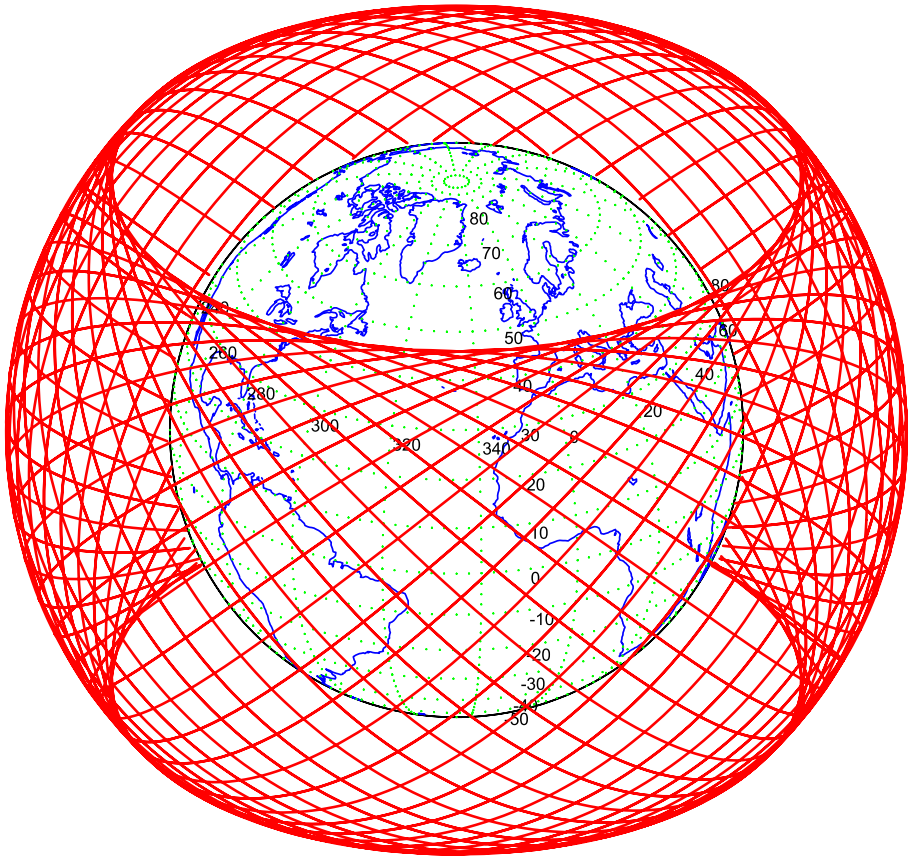
Ernst Friedrich Maria Jochim

Satellitenbewegung



Band IV: Bewegungsanalyse

Herausgeber: Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt
Bibliotheks- und
Informationswesen
D-51170 Köln
Porz-Wahnheide
Linder Höhe
D-51147 Köln

Telephon (022 03) 6 01- 44 44
Telephax (022 03) 6 01- 47 47

Als Manuskript gedruckt.
Abdruck oder sonstige Verwendung
nur nach Absprache mit dem DLR gestattet

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2018-31

© Dr. E. F. M. Jochim (vormals Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR)

\ documents \ SAB \ SAB-Gesamt \SAB Band IV.docx \

Stand der Arbeit: Montag, 6. März 2023

Titelbild: Das bezüglich der Erdoberfläche feststehende daher mit der Erdrotation mitrotierende Netz einer reproduzierbaren kreisförmigen Bahn unter der Inklination i=40° und mit dem Reproduktionsverhältnis $K{:}N_K$=5:43 (siehe Abschnitt 23.9.1, Bild 23-25)

Vorwort zu Band IV

Im vorliegenden vierten Band der Satellitenbewegung werden in fortlaufender Nummerierung einige für die Bahnanalyse der Bewegung künstlichen Satelliten wichtige Bezüge und Zusammenhänge behandelt. Dazu zählen die unterschiedlichen Aspekte der Bewegung der Himmelskörper, die Steuerung und Kontrolle von künstlichen Objekten, und insbesondere die für eine Satellitenbahnanalyse wichtigen Bezüge der Satellitenbewegung. Diese Beziehungen lassen sich klassifizieren einerseits im Hinblick auf die Bewegung um einen Zentralkörper, in der klassischen Weise auf die Apsidenlinie eines zur Anpassung verwendeten Kegelschnitts. Wichtiger für das weite Spektrum der Erdbeobachtungssatelliten ist der Bezug auf den Äquator des Bezugskörpers etwa im Zusammenhang mit reproduzierbaren Bahnen oder auf einen speziellen Meridian im Zusammenhang etwa mit geosynchronen Bahnen. Die zweite grundsätzliche Beziehung ist die auf einen dritten Körper gerichtete synodische Bewegung, insbesondere die Sonne mit den wichtigen Anwendungen der sonnensynchronen Bahnen. Dies schließt eine Erweiterung des Begriffs der sonnensynchronen synodischen Bewegung mit ein. Auch andere Bezugskörper wie Mond, Planeten, interplanetare Sonden und andere Satelliten sowie stellare Objekte können für eine Bahnanalyse zur Berücksichtigung der Aufgabenstellung einer Satellitenmission von Wichtigkeit sein. Ausgehend von der grundlegenden *Hansen*bewegung konzentriert sich der vorliegende Band als Bahnmodell auf die allgemeine *Kepler*bewegung. Darunter kann eine Bewegung verstanden werden, in der die *Kepler*schen Gesetze grundlegend sind, wobei alle Parameter als bewegungsabhängig betrachtet werden.

Eine erschöpfende Bearbeitung der einzelnen Themenkreise darf nicht erwartet werden. Jeder Punkt könnte beliebig vertieft und ergänzt werden. Damit kann auf ergänzendes Studium anderer Bücher und Darstellungen nicht verzichtet werden.

Die Liste der verwendeten Symbole und die für Band IV relevante Literatur sind in diesen Band der Satellitenbewegung mit aufgenommen.

Einige mit den Kollegen *Dr. Herbert Porsche* (vormals DLR-HF), *Dr. Martin Ch. Eckstein* (vormals DFVLR-DF, DLR-RB), *Dr. Michael Kirschner* (DLR-RB), *Dr. Hauke Fiedler* (DLR-HR und DLR-RB), *Prof. Dr. Gerhard Krieger* (DLR-HR) durchgeführten Untersuchungen sind in diesem Band berücksichtigt. Besonders herzlicher Dank gebührt Herrn *Dr. Thomas Neff* (DLR-HR) für die kritische Unterstützung des gesamten Werkes, Herrn *Dr. Jan Eilers* (DLR-HR) für die kritische Durchsicht des vorliegenden Bandes, sowie dem Raumfahrtingenieur *Sebastien Tailhades* und Herrn *Sebastian Calaminus*, M. Sc., für die Unterstützung bei den Programmierarbeiten, sowie Herrn Dipl. Ing. *Manfred Hager* für die Betreuung des Rechners. Für die Veröffentlichung des Bandes in der Reihe der DLR Forschungsberichte geht besonderer Dank an die Herren Professor *Dr. Alberto Moreira* und Professor *Dr. Helmut Süß* (beide DLR-HR).

Mit großer Dankbarkeit darf Herrn *Dr. Ing. habil. Otto Wagner* (1936 - 2016), Professor für Flugmechanik an der TU München, gedacht werden, der die in den fünf Bänden der *Satellitenbewegung* durchgeführten Arbeiten sehr interessiert und wohlwollend unterstützt und gefördert hat.

Inhaltsverzeichnis

VORWORT ZU BAND IV ..... **III**

INHALTSVERZEICHNIS ..... **V**

BEZUGSKÖRPER-BEZOGENE BEWEGUNG **1**

21 *KEPLER*BEWEGUNG AUF DER GRUNDLAGE VON *HANSEN*-SYSTEMEN **9**

21.1 DIE WICHTIGSTEN EIGENSCHAFTEN DER *HANSEN*-SYSTEME 9
21.2 ZEIT UND *HANSEN*SCHER BAHNWINKEL 13
21.2.1 Die Zuordnung eines Hansenschen Bahnwinkels zur Zeit im Rahmen einer Keplerbewegung *14*
21.2.2 Berechnung des Hansenschen Bahnwinkels einer Keplerbewegung *17*
21.2.3 Mittlere Umlaufzeit erster Ordnung bezogen auf ein Hansen-System *19*
21.3 DIE ÜBERLAGERTE FUNKTION 20
21.4 DIE *HANSEN*SCHE UMLAUFZEIT EINER *KEPLER*BEWEGUNG 22
21.5 BAHNAUSWAHL MIT *HANSEN*SCHER UMLAUFZEIT 25

22 ANOMALISTISCHE BEWEGUNG **28**

22.1 DAS APSIDENSYSTEM 29
22.2 WAHRE ANOMALIE ALS BAHNWINKEL IM APSIDENSYSTEM 32
22.2.1 Wahre Anomalie und Zeit *32*
22.2.2 Näherung der wahren Anomalie mit der Mittelpunktsgleichung *32*
22.2.3 Die anomalistische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten *37*
22.2.4 Näherungsweise Berechnung der Zeit aus der wahren Anomalie *38*
22.3 DIE ÜBERLAGERTE FUNKTION BEI ANOMALISTISCHEN BEWEGUNGEN 40
22.4 DIE ANOMALISTISCHE UMLAUFZEIT 41
22.4.1 Die wahre anomalistische Umlaufzeit *41*
22.4.2 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Luftwiderstand *43*
22.4.3 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit Luftwiderstand *45*
22.4.4 Zur numerischen Berechnung im Rahmen der anomalistischen Bewegung *46*
22.4.5 Die oskulierende anomalistische Umlaufzeit *55*
22.4.5.1 Die Variationsgleichungen der Keplerelemente in Abhängigkeit von der wahren Anomalie 56
22.4.5.2 Die Lösung der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit nach E. A. Roth 59
22.5 KLEINE BEWEGUNGSÄNDERUNGEN IM ERDGRAVITATIONSFELD 60
22.5.1 Partialausdrücke der allgemeinen Keplerbewegung *60*
22.5.1.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens 60
22.5.1.2 Argument des Perizentrums 61
22.5.1.3 Mittlere Epoche-Anomalie 62
22.5.2 Genauigkeitsabschätzungen für Erdsatelliten *64*
22.5.2.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens 64
22.5.2.2 Argument des Perizentrums 65
22.5.2.3 Mittlere Epoche-Anomalie 66
22.6 BAHNAUSWAHL AUS ANOMALISTISCHER UMLAUFZEIT 67
22.6.1 Große Bahnhalbachse bei Vorgabe der anomalistischen Umlaufzeit *67*
22.6.2 Die Zwei-Zeilen-Elemente („two-line elements“) *69*
22.6.3 Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit *73*
22.6.4 Inklination bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit *74*
22.7 DIE SÄKULARE DRIFT DER MITTLEREN EPOCHEANOMALIE VON ERDSATELLITEN 75
22.8 DIE SÄKULARE DRIFT DES ARGUMENTES DES PERIZENTRUMS 77
22.8.1 Die säkulare Änderung des Argumentes des Perizentrums *77*
22.8.2 Die Drehung der Apsidenlinie und die Wanderung der Apsiden *79*
22.9 GEOGRAPHISCHE POSITIONEN UND DRIFTEN VON PERIGÄUM UND APOGÄUM 81
22.9.1 Die geographischen Koordinaten des Perigäums *81*
22.9.2 Die Variation der geographischen Position des Perigäums *83*
22.9.3 Die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums pro anom. Umlauf *84*

22.9.3.1 Die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums 84
22.9.3.2 Die genäherte wahre Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums....87
22.9.3 Die Variation der geographischen Position des Apogäums 88
22.10 BAHNAUSWAHL AUS DRIFT DER PERIGÄUMSLÄNGE 88
22.10.3 Mittlere große Bahnhalbachse aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 89
22.10.4 Mittlere Exzentrizität aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 98
22.10.5 Mittlere Inklination aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 99
22.10.6 Mittleres Argument des Perigäums aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 101
22.11 VORGABE VON ANOMAL. UMLAUFZEIT UND VARIATION DER PERIGÄUMSLÄNGE 101
22.11.3 Berechnung von Halbachse und Inklination....103
22.11.4 Berechnung von Halbachse und Exzentrizität 107
22.11.5 Berechnung von Halbachse und Argument des Perigäums 107
22.11.6 Berechnung von Exzentrizität und Inklination....107
22.11.7 Berechnung von Exzentrizität und Argument des Perigäums 107
22.12 AUFBAU EINER SATELLITENFORMATION MIT HILFE DER ANOMALISTISCHEN BEWEGUNG 108
22.12.3 Aufbau der Formation mit ganzzahligem Verhältnis anomalistischer Umläufe....108
22.12.4 Zeitlich rascher Aufbau einer Konstellation durch kleine Manöver....114

23 DRAKONITISCHE BEWEGUNG....117

23.1 DAS KNOTENBEZOGENE BAHNSYSTEM 118
23.1.1 Eigenschaften des knotenbezogenen Bahnsystems 118
23.1.2 Bezug des knotenbezogenen Bahnsystems zu anderen Bahnsystemen....121
23.2 DAS ARGUMENT DER BREITE ALS BAHNWINKEL 125
23.2.1 Darstellung des Argumentes der Breite....125
23.2.2 Die drakonitische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten....127
23.2.3 Zeit und Argument der Breite 127
23.2.4 Die Variationen der Keplerbewegung in Bezug auf das Argument der Breite 128
23.2.4.1 Die Variation der Zeit nach dem Argument der Breite 129
23.2.4.2 Variation des Flächenparameters nach dem Argument der Breite 133
23.2.4.3 Die Variation des Kegelschnittparameters nach dem Argument der Breite....134
23.2.4.4 Die Variation der Exzentrizität nach dem Argument der Breite 136
23.2.4.5 Die Variation der Inklination nach dem Argument der Breite 138
23.2.4.6 Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite 139
23.2.4.7 Die Variation der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite....141
23.2.4.8 Die Variation des Argumentes des Perigäums nach dem Argument der Breite 143
23.3 DIE DRAKONITISCHE UMLAUFZEIT 146
23.3.1 Wahre drakonitische Umlaufzeit 146
23.3.2 Mittlere drakonitische Umlaufzeit 148
23.3.3 Die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit Luftwiderstand....152
23.3.4 Zur numerischen Berechnung der drakonitischen Umlaufzeit 155
23.3.5 Bahnauswahl aus drakonitischer Umlaufzeit 157
23.3.5.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 157
23.3.5.2 Berechnung der Exzentrizität aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 161
23.3.5.3 Berechnung der Inklination aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 162
23.3.6 Bahnauswahl aus drakonitischen Tagesumläufen 163
23.3.7 Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit....164
23.3.8 Beispiel für die oskulierenden Geschwindigkeiten auf drakonitischen Umläufen 166
23.4 DIE INERTIALE WANDERUNG DER KNOTEN 167
23.4.1 Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens....167
23.4.2 Drehung der Knotenlinie und Wanderung der Knoten....168
23.5 KNOTENLÄNGENVERSCHIEBUNG UND KNOTENLÄNGENDRIFT 171
23.5.1 Herleitung von Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift 171
23.5.2 Die Knotenlängenverschiebung als Bezugsintervall 177
23.5.3 Bahnauswahl aus mittlerer Knotenlängenverschiebung 178
23.5.4 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift....182
23.5.4.1 Große Bahnhalbachse aus Knotenlängendrift....182
23.5.4.2 Exzentrizität aus Knotenlängendrift 183
23.5.4.3 Inklination aus Knotenlängendrift 183

23.6 BAHNAUSWAHL AUS KNOTENLÄNGENDRIFT UND DRAKONITISCHER UMLAUFZEIT 184
23.6.1 Erste Näherungslösung 184
23.6.2 Iterative Verbesserung 186
23.6.3 Genauigkeitsabschätzungen 191
23.7 DER KNOTENUMLAUF 195
23.8 DIE KNOTENLÄNGENRESTVERSCHIEBUNG 196
23.8.1 Eigenschaften der mittleren Knotenlängenrestverschiebung 197
23.8.2 Bahnauswahl aus der mittleren Knotenlängenrestverschiebung 198
23.9 SPUR-REPRODUZIERBARE BAHNEN 200
23.9.1 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenverschiebung 200
23.9.2 Bahnauswahl für Spur-reproduzierbare Bahnen 202
23.9.3 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenrestverschiebung 205
23.9.4 Nachweis der Reproduzierbarkeit einer gegebenen Bahn 208
23.9.5 Subzyklen 210
23.9.6 Die Längen auf - und absteigender Knoten von reproduzierbaren Bahnen 214
23.10 FORMSTABILE BEWEGUNG 220
23.10.1 Notwendige Bedingung für eine formstabile Bewegung 221
23.10.2 Hinreichende Bedingungen für formstabile Bewegungen 225
23.10.3 Eigenschaften der formstabilen Bewegung 225
23.10.4 Librationen um die formstabile Bewegung 231
23.10.5 Korrekturen der formstabilen Bewegung 235
23.11 VARIATIONEN DER DRAKONITISCHEN BEWEGUNG DURCH EINSCHUSSFEHLER 238
23.12 VARIATIONEN DER DRAKONITISCHEN BEWEGUNG DURCH BEWEGUNGSEINFLÜSSE 244
23.12.1 Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 244
23.12.2 Die Spurdrift 248
23.12.3 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängendrift 249
23.12.4 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängenverschiebung 250
23.12.5 Korrekturzyklus für Spurstabilität 254
23.12.6 Die relative Positionsbewegung 264
23.12.7 Variation in Länge (alongtrack variation) 268
23.13 BEWEGUNGEN IM FORMATIONSFLUG AUF KREISNAHEN BAHNEN 269
23.13.1 Satellitenkonstellationen mit kreisförmigen Bahnen nach Walker 269
23.13.2 Relativbewegung zu einer Kreisbewegung 270
23.13.3 Relativbewegung in der „CartWheel Ellipse“ 273
23.13.4 Formationsflug dreier Satelliten mit unterschiedlichen Knoten und Perigäen 279
23.13.5 Formationsflug zweier Satelliten in Helix-Konfiguration 285
23.13.6 Formationsflug mit Kreisbewegung in einer Bahnebene 287
23.13.7 Formationsflug mit Kreisbewegung über einer Bodenspur 289

24. DIE TROPISCHE BEWEGUNG 291

24.1 DAS GEOZENTRISCHE FRÜHLINGSPUNKT BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM 292
24.1.1 Basissystem und Fundamentalsystem 292
24.1.2 Bezug auf ein Hansen-System 293
24.1.3 Fundamentalsystem und Hansen-System 295
24.2 DER BAHNWINKEL DER TROPISCHEN BEWEGUNG 295
24.2.1 Die äquatorialen Koordinaten eines Satelliten 296
24.2.2 Der tropische Bahnwinkel 297
24.2.3 Die mittlere tropische mittlere Bewegung 298
24.2.4 Bewegung des Knotens und Bewegung eines Satelliten 299
24.2.5 Die Reduktion auf den Äquator 300
24.3 DIE TROPISCHE UMLAUFZEIT VON ERDSATELLITEN 304
24.3.1 Definition der tropischen Umlaufzeit 305
24.3.2 Die mittlere tropische Umlaufzeit 305
24.3.3 Die mittlere tropische Umlaufzeit und andere mittlere Umlaufzeiten 305
24.3.4 Bahnauswahl mit der mittleren tropischen Umlaufzeit 308

25. DIE SIDERISCHE BEWEGUNG 310

25.1 Zur Definition der siderischen Bewegung eines Erdsatelliten 310
25.2 Numerische Abschätzungen der siderischen Satellitenbewegung 311
25.3 Einfluss der Präzession durch die Planeten 312

26. DIE MERIDIAN-BEZOGENE BEWEGUNG 313

26.1 Das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem 313
26.2 Die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung 314
26.3 Die Meridian-bezogene Umlaufzeit 315
26.4 Bahnauswahl aus Meridian-bezogener Satellitenbewegung 320
26.5 Scheinbare Satellitenbewegung mit Meridian-bezogener Bewegung 322
26.6 Geosynchrone Bahnen 327
26.6.1 Einige Beispiele geosynchroner Satellitenbahnen 327
26.6.2 Einige Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen 330
26.7 Scheinbares Verhalten von Kreisbahnen 331
26.7.1 Scheinbares Bewegungsverhalten und scheinbar stationäre Bahnpunkte 331
26.7.2 Besondere scheinbare Bahnpunkte auf Kreisbahnen 334
26.7.2.1 Äquatoriale Kreisbahnen mit stationären Punkten 334
26.7.2.2 Besonderheiten einer Satellitenbewegung auf kreisförmigen Äquatorbahnen 337
26.7.2.3 Spitzenpunkte auf geneigten Kreisbahnen 340
26.7.2.4 Wendepunkte auf geneigten Kreisbahnen 342
26.7.2.5 Stillstandpunkte auf geneigten Kreisbahnen 343
26.7.2.6 Kreisförmige Schleifenbahnen 345
26.8 Scheinbares Bewegungsverhalten auf elliptischen Bahnen 355
26.8.1 Allgemeine Darstellung 355
26.8.2 Bahnen mit Perigäum auf dem Äquator 357
26.8.3 Bahnen mit scheinbaren Überflugwinkeln 360

27. TOPOZENTRISCHE BEWEGUNG 361

27.1 Topozentrische Koordinaten 361
27.2 Bahnabschätzung aus topozentrischer Bewegung 364
27.3 Topozentrische Bewegungsgrößen 367
27.4 Bewegung eines Satelliten gesehen von einem Topozentrum aus 369
27.4.1 Darstellung einer topozentrischen Bewegung 370
27.4.2 Entfernung und Lichtzeit 372
27.4.3 Spezielle Punkte der scheinbaren topozentrischen Bewegung 378
27.5 Doppler Beobachtungen 381
27.6 Anmerkungen zur Genauigkeit einer geostationären Bahn 383

SYNODISCHE BEWEGUNGEN 385

28. SONNENBEZOGENE SYNODISCHE BEWEGUNG 385

28.1 Die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde 385
28.1.1 Die Sonnenephemeride 386
28.1.2 Die mittlere Sonne 388
28.1.3 Wahre geozentrische Sonnenbewegung nach Newcomb 393
28.1.4 Jahreslängen 402
28.1.4.1 Tropisches Jahr 402
28.1.4.2 Sternjahr 403
28.1.4.3 Siderisches Jahr 404
28.1.4.4 Anomalistisches Jahr 404
28.1.4.5 Finsternis Jahr 405
28.1.4.6 Das Besselsche Jahr 405
28.2 Die näherungsweise Sonnenbewegung bezogen auf den Erdäquator 406
28.2.1 Die fiktive mittlere Sonne 406
28.2.2 Übersicht über die Bewegung der Sonne in der Ekliptik 407
28.2.3 Die Reduktion der wahren Sonne auf den Äquator 408
28.2.4 Die Bewegung der wahren Sonne bezogen auf den Äquator 409
28.3 Die Sonnenzeit 412

28.3.1 Wahre Sonnenzeit *412*
28.3.2 Mittlere Sonnenzeit *413*
28.3.3 Die Zeitgleichung *413*
28.3.4 Länge des wahren Sonnentages *415*
28.3.4.1 Der wahre Sonnentag als Bogen der Sonnenbahn 415
28.3.4.2 Der Rotationssonnentag 417
28.4 DIE TOPOZENTRISCHE BEOBACHTUNG DER WAHREN SONNE 418
28.4.1 Die horizontalen Koordinaten der Sonne *418*
28.4.2 Der Polarkreis *419*
28.4.3 Sonnenkontaktzeiten *420*
28.5 SONNENSYNODISCHE BEWEGUNG EINES SATELLITEN 422
28.5.1 Die Sonnensynodische Bewegung in Bezug auf den Erdäquator *423*
28.5.1.1 Der wahre sonnensynodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator 423
28.5.1.2 Der mittlere sonnensynodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator 425
28.5.1.3 Berechnung einer Referenz-Konjunktion 428
28.5.1.4 Zeit aus Sonnenwinkel 429
28.5.1.5 Konjunktionen und Oppositionen 430
28.5.1.6 Bahndefinition aus mittlerem Äquator-bezogenem sonnensynodischer Umlauf 432
28.5.2 Die Sonnensynodische Bewegung in Bezug auf die Ekliptik *433*
28.5.3 Die sonnensynodische Bewegung in Bezug auf die Satellitenbahnebene *435*
28.5.4 Vergleichende Betrachtung der unterschiedlichen Definitionen der sonnensynodischen Bewegung 437
28.6 SATELLITENBEWEGUNG IN BEZUG AUF DIE FIKTIVE MITTLERE SONNE 439
28.6.1 Bewegung in mittlerer Sonnenzeit *439*
28.6.2 Die sonnensynodische Bewegung in geographischen Koordinaten *440*
28.6.3 Verfahren der Bahnauslegung aus mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Sonnendrift *442*
28.6.3.1 Knoten und mittlere Anomalie bei Knotendurchgang 443
28.6.3.2 Startpunkt in beliebigen geographischen Koordinaten 445
28.6.3.3 Startpunkt aus Sonnenwinkel und Breitenkreis 449
28.7 DIE SONNENSYNODISCHE BEWEGUNG DER SATELLITENBAHNEBENE 450
28.7.1 Der Knotensonnenwinkel, die Knotensonnendrift *450*
28.7.2 Die Knotensonnenverschiebung *458*
28.7.2.1 Die mittlere Knotensonnenverschiebung 458
28.7.2.2 Die wahre Knotensonnenverschiebung 461
28.7.3 Zur Veranschaulichung der sonnenbezogenen Bewegung einer Bahnebene *462*
28.7.4 Verfahren der Bahnauslegung aus Knotensonnendrift und Knotensonnenverschiebung *466*
28.7.4.1 Bahnparameter aus Knotensonnendrift: 466
28.7.4.2 Bahnparameter aus Knotensonnenverschiebung 468
28.7.4.3 Bahnparameter aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene 473
28.8 SONNENSYNCHRONE BAHNEN 475
28.8.1 Charakteristika für Sonnensynchronität *475*
28.8.1.1 Bezug auf die fiktive mittlere Sonne 475
28.8.1.2 Anmerkungen zum Bezug auf die wahre Sonne 477
28.8.2 Bahndefinition aus Bedingung für sonnensynchrone Bahnen *478*
28.8.2.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse 478
28.8.2.2 Berechnung der Exzentrizität 479
28.8.2.3 Berechnung der Inklination 479
28.8.3 Übersicht über sonnensynchrone Bahnen *480*
28.8.4 Spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen *484*
28.8.5 Bahndefinition bei reproduzierbaren sonnensynchronen Bahnen *487*
28.8.6 Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen *489*
28.8.7 Radiale Geschwindigkeit einer sonnensynchronen Bahn *492*
28.9 REPRODUZIERBARKEIT IN DER ZEIT 492
28.9.1 Der Saros-Zyklus *492*
28.9.2 Bahnauswahl mit Saros-Zyklus *494*
28.9.3 Reproduzierbarkeit in Zeit und Subsatellitenbahn *495*
28.10 SCHATTEN 497
28.10.1 Die Schattenmodelle *498*
28.10.1.1 Das Kegelmodell für Zentralschatten 498
28.10.1.2 Das Kegelmodell für Halbschatten 501

28.10.1.3 Das Zylindermodell 503
28.10.2 Die Schattengleichung 504
28.10.3 Schattenkontakte 507
28.10.3.1 Näherungsweise Berechnung der Schattenkontaktzeiten 507
28.10.3.2 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf kreisnahen Bahnen 511
28.10.3.3 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf elliptischen Bahnen 511
28.10.3.4 Exakte Berechnung der Schattenkontaktzeiten 513
28.10.3.5 Würdigung des Verfahrens 514
28.10.4 Schattenfaktor und Schattendauer 515
28.10.4.1 Schattenzeiten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn 515
28.10.4.2 Schattenzeiten auf einer elliptischen Bahn 520
28.10.4.3 Schattenzeiten auf einer geostationären Bahn 521
28.10.5 Schattengrenze (Terminator) und Sonnenelevationskurven 521
28.10.6 Sonnenelevationskurven 525
28.10.7 Okkultationsmessungen (Limb Sounding) 525
28.10.8 Abschätzungen zur Genauigkeit bei Schattenberechnungen 530
28.10.8.1 Abschätzung des Einflusses der Erdabplattung 530
28.10.8.2 Einfluss von Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn bei Kernschatten 533
28.10.8.3 Abschätzung des Einflusses der Zylindermodells 534
28.11 BEWEGUNG EINES ERDSATELLITEN IN BEZUG AUF DIE SONNE 535
28.11.1 Sonnenaspektwinkel 535
28.11.2 Sonne in der Subsatellitenbahn 539
28.11.3 Sonnenelevation in Sensor Aufsichtspunkt 543
28.11.4 Sonnenspiegelung pro Satellitenumlauf 545
28.12 SATELLITENLAGE UND SONNENEINSTRAHLUNG 547
28.12.1 Satellitenzentrierte Systeme 547
28.12.2 Sonnenbeobachtung bei Nadir ausgerichteter Satellitenlage 549
28.12.3 Sonneninertiale Satellitenlage 551
28.13 UNTERSCHIEDLICHE ENTWICKLUNGEN DES SONNENBEZUGS 555
28.13.1 Einfluss von Einschussfehlern auf Sonnensynodische Bewegungen 555
28.13.2 Sonnendrift einer Bahn ohne Bahnkorrektur 557
28.14 VARIATIONEN DER SONNENSYNODISCHEN BEWEGUNG DURCH BEWEGUNGSEINFLÜSSE 562
28.14.1 Zeitstabilität bei der Variation natürlicher Bewegungseinflüsse 562
28.14.2 Die Drift der Knotensonnenzeit 564
28.14.3 Die Variation des Knotensonnenintervalls 565
28.14.4 Korrekturzyklus für Zeitstabilität 570

29. SYNODISCHE BEWEGUNG BEZOGEN AUF MOND UND MONDORBITER 577

29.1 DIE SCHEINBARE BEWEGUNG DES MONDES UM DIE ERDE 577
29.1.1 Die Entwicklung der Mondtheorie 577
29.1.2 Die Gesetze von Cassini 581
29.1.3 Bahnelemente und physikalische Parameter des Mondes 582
29.1.3.1 Physikalische Parameter des Mondes 582
29.1.3.2 Mittlere Bahnelemente des Mondes auf seiner Bahn bezüglich der Erde 583
29.1.4 Die Monate 588
29.1.4.1 Zahlenwerte in der Antike 588
29.1.4.2 Aktuelle Zahlenwerte 590
29.1.5 Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes 594
29.1.5.1 Hauptproblem der Mondtheorie 595
29.1.5.2 Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung 596
29.1.6 Näherungsweise Darstellung des geozentrischen Ortsvektors der Mondbewegung 596
29.1.6.1 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Länge des Mondes 597
29.1.6.2 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Breite des Mondes 598
29.1.6.3 Die geozentrische Parallaxe des Mondes 600
29.1.6.4 Der geozentrische ekliptikale Ortsvektor des Mondes 601
29.1.7 Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes 601
29.1.7.1 Die Variation der ekliptikalen Länge des Mondes 603
29.1.7.2 Die Variation der ekliptikalen Breite des Mondes 607
29.1.7.3 Die Variation der Parallaxe des Mondes 609

29.2 DIE BEWEGUNG DES MONDES UM DIE SONNE 610
29.3 DAS KOORDINATENSYSTEM DER MONDBAHN 615
29.3.1 Das geozentrische Bahnsystem des Mondes 615
29.3.2 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Ekliptiksystem 617
29.3.3 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Erdäquatorsystem 622
29.4 DAS ÄQUATORSYSTEM DES MONDES 626
29.4.1 Ausrichtung des Äquatorsystems 626
29.4.2 Das selenographische System 627
29.4.3 Äquatorsystem des Mondes und Ekliptik 630
29.4.4 Bezug des Bahnsystems des Mondes auf das Äquatorsystem des Mondes 635
29.4.5 Bezug des Äquatorsystems des Mondes auf das Äquatorsystem der Erde 640
29.5 DIE LIBRATIONEN 641
29.5.1 Geozentrische geometrische Librationen 641
29.5.2 Die physikalischen Librationen des Mondes 643
29.5.3 Der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche 647
29.5.4 Topozentrische geometrische Librationen 648
29.6 DIE BEOBACHTUNG DES MONDES VON DER ERDOBERFLÄCHE AUS 651
29.6.1 Die Mondphase 651
29.6.2 Der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche 653
29.6.3 Der Phasenwinkel bezogen auf einen Erdsatelliten 653
29.6.4 Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche von der Erde aus 655
29.7 DER MONDORBITER 658
29.7.1 Selenozentrische Bewegung eines Mondorbiters 659
29.7.2 Synchrone und stationäre Bewegung eines Mondorbiters 664
29.7.3 Sonnensynchrone Mondorbiter 664
29.8 BEOBACHTUNG EINES MONDORBITERS VON DER ERDE AUS 666
29.9 MONDSYNODISCHE ERDSATELLITENBAHNEN 668
29.9.1 Der synodische Bezug von Erdsatelliten auf den Mond 668
29.9.2 Bezug von Erdsatellitenbahnen auf die tropische Bewegung des Mondes 670

30. SYNODISCHE BEWEGUNG IN BEZUG AUF EIN INTERPLANETARES OBJEKT 671

30.1 EINIGE BEZIEHUNGEN ZUR BESCHREIBUNG DER PLANETENBEWEGUNG 671
30.1.1 Bahnparameter der Planeten 672
30.1.2 Bahnparameter der kleinen Planeten 672
30.2 GENÄHERTE BEWEGUNG DER PLANETEN 673
30.2.1 Wahre Bewegung der Planeten 673
30.2.2 Mittlere Bewegung der Planeten 674
30.3 DAS KOORDINATENSYSTEM EINER PLANETENBAHN 678
30.3.1 Das Bahnsystem eines Planeten 678
30.3.2 Transformation zwischen Planetenbahnsystem und Ekliptiksystem 680
30.4 DAS PLANETENÄQUATORSYSTEM (BEZOGEN AUF IAU-VEKTOR) 684
30.4.1 Transformationen des Planetenäquatorsystems 686
30.4.1.1 Planetenäquatorsystem und Erdäquatorsystem 686
30.4.1.2 Planetenäquatorsystem und Ekliptiksystem 689
30.4.1.3 Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem 697
30.4.2 Das planetographische System 703
30.4.3 Der subterrestrische Punkt auf einer Planetenoberfläche 705
30.5 PHYSIKALISCHE EPHEMERIDEN DER PLANETEN 707
30.6 DIE ERDBEZOGENE SYNODISCHE BEWEGUNG DER PLANETEN 707
30.7 BEISPIELE ZUR DARSTELLUNG DER BEWEGUNG INTERPLANETARER OBJEKTE 709
30.7.1 Heliozentrischen Bewegung 710
30.7.2 Erdbezogene Bewegung 715
30.8 DIE BEOBACHTUNG INTERPLANETARER BEWEGUNGEN 721
30.8.1 Geozentrische Distanzen und Lichtzeit interplanetarer Objekte 721
30.8.2 Die Beobachtung interplanetarer Missionen von einer irdischen Station aus 723
30.8.3 Der Phasenwinkel interplanetarer Objekte 723
30.8.4 Die Elongation interplanetarer Objekte 726
30.9 ANMERKUNGEN ZUR BEWEGUNG VON RAUMSONDEN 728

30.9.1 Die Bewegung von Raumsonden ... 728
30.9.2 Natürliche und gesteuerte Beeinflussung der Bewegungen von Raumsonden ... 729
30.10 MESSUNGEN VON DISTANZ-VARIATIONEN INTERPLANETARER OBJEKTE ... 729
30.10.1 Das Beobachter-System ... 729
30.10.2 Beobachtung einer „gestörten" Bewegung ... 736
30.10.3 Geometrische Interpretation der modifizierten Einweg-Doppler-Formel ... 740
30.10.4 Zweiweg-Dopplermessungen in der modifizierten Theorie ... 743
30.10.5 Anwendung auf interplanetare Beobachtungen ... 746
30.10.6 1. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Halley ... 748
30.10.7 2. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Grigg-Skjellerup 1992 ... 750
30.10.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen in Abschnitt 30.10 ... 753
30.11 BEWEGUNG EINES PLANETENORBITERS ... 753
30.11.1 Die Bewegungsparameter eines Planetenorbiters ... 753
30.11.2 Sonnensynchrone Bewegung eines Planetenorbiters ... 758
30.12 ERGÄNZENDE LITERATUR ZU MARS-ORBITERN ... 766

31. SYNODISCHE BEWEGUNG ZWEIER SATELLITEN ... 768

31.1 SICHT SATELLIT-SATELLIT ... 768
31.2 DIE SYNODISCHE BEWEGUNG ZWEIER KOPLANARER SATELLITEN ... 774
31.2.1 Mittlere synodische Bewegung koplanarer Satelliten ... 774
31.2.2 Säkular gestörte synodische Bewegung koplanarer Satelliten ... 775
31.3 DIE SYNODISCHE BEWEGUNG VON SATELLITEN AUF KREISNAHEN BAHNEN ... 777
31.4 STATIONÄRE PUNKTE UND RÜCKLÄUFIGKEIT BEI SICHT SATELLIT-SATELLIT ... 780
31.4.1 Bewegung auf koplanaren Bahnen ... 780
31.4.2 Der Fall koplanarer Kreisbahnen ... 784
31.4.3 Diskussion beliebiger relativer Bewegungen zweier Satelliten ... 787

SCHRIFTTUM ZU BAND IV ... 801

LISTE DER VERWENDETEN SYMBOLE ... 817

ABBILDUNGSVERZEICHNIS ... 851

TABELLENVERZEICHNIS ... 879

INDEX ... 885

INHALT VON BAND I

DER BEWEGUNGSBEGRIFF

BEGRIFFLICHE DIMENSIONIERUNG DER BEWEGUNG

1. Die Antike Bewegungslehre
2. Die Klassische Bewegungslehre
3. Ansätze einer Nachklassischen Bewegungslehre

Schrifttum zu Band I

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND II

BEWEGUNG IN RAUM UND ZEIT

4. Bezugssysteme zur Beschreibung von Bewegungen
5. Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen
6. Bewegungen in geradlinigen Systemen
7. Bewegungen in krummlinigen Systemen
8. Einige spezielle Koordinatensysteme
9. Bewegungen in Zeit
Schrifttum zu Band II
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND III

NATÜRLICHE UND GESTEUERTE BEWEGUNG

10. Die spezielle Keplerbewegung
11. Bewegungsparameter
12. Natürliche und gesteuerte Bewegungsänderungen
13. *Kepler*bewegung in uniformisierter Darstellung
14. Parameterräume
15. Partialausdrücke
16. Bahnbestimmung und Bahnverbesserung
17. Bewegungseinflüsse
18. Anmerkungen zur Integration der Bewegungsgleichungen
19. Überblick Analytische Störungstheorie periodischer Bewegungen
20. Ergebnisse analytischer Satellitenbahntheorien
Schrifttum zu Band III
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND V [in 1. Auflage Band IV]

BEWEGUNG IN BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

BEWEGUNG IN SPHÄRISCHER BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

32. Sphärische Beobachtungsgeometrie

33. Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises

34. Überdeckung eines sphärischen Breitenkreises

35. Lokale Überdeckung

36 Sichtbarkeitsuntersuchungen

BEWEGUNG ÜBER REFERENZELLIPSOID

37. Allgemeine Beziehungen auf einem Rotationsellipsoid

38. Satellitenbewegung über Rotationsellipsoid

ANHANG

A. Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

B. Näherungsausdrücke

C. Tschebyscheff-Approximationen

D. Integraltafel

E. Astronomische Konstante

F. Das julianische Datum

G. Tabellen reproduzierbarer Bahnen

H. Hohmann Übergänge im Interplanetaren Raum

I. Parameter der Attraktionssphären und kollinearen Librationspunkte im Sonnensystem

J. Sichtbarkeitsgrenzen geostationärer Satelliten

K. MSIS Luftwiderstandsmodell

Schrifttum zu Band V

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

Bezugskörper-bezogene Bewegung

Die Bewegung eines Satelliten bzw. Orbiters um den Gravitationsschwerpunkt seines Zentralkörpers wird in diesem Kapitel bei Bezug auf diesen Zentralkörper unter verschiedenen bahngeometrischen und bahnkinematischen Gesichtspunkten untersucht. Dabei kann der Zentralkörper als Massenpunkt oder als ausgedehnter Körper von Interesse sein. Der Begriff der Zentralbewegung ist also hier allgemeiner gefasst als in der physikalischen Bewegungslehre üblich, welche sich auf die Fälle einschränkt, bei denen der Beschleunigungsvektor stets zum Massenmittelpunkt des Zentralkörpers gerichtet ist. Hier geht es um eine spezielle Interpretation von Form und Lage der Bahn im Raum um den Zentralkörper, um geometrische Beziehungen der Bahn oder der momentanen Position des Satelliten in seiner Bahn zu einem astronomischen Bezugssystem oder einem, das mit dem Zentralkörper gekoppelt ist, und den bahngeometrischen Bezug zur Oberfläche des Zentralkörpers (der beobachtungsgeometrische Bezug der Satellitenbewegung zur Oberfläche des Zentralkörpers wird in Band V behandelt). Je nach Referenzpunkt oder Referenzsystem lässt sich ein und dieselbe Satellitenbewegung in sehr verschiedenartigen Bezügen darstellen.

Satellitenbewegungen werden vielerorts auf der Grundlage einer *Kepler*bewegung untersucht. Unter *Kepler*bewegung wird eine Bewegung verstanden, welche nach den *Kepler*schen Gesetzen abläuft, wobei alle Parameter konstant sind. Dies trifft auf keine Satellitenbewegung zu. Wir können den Begriff der *Kepler*bewegung verallgemeinern als eine Bewegung, die nach den *Kepler*schen Gesetzen abläuft, wenn in ihnen alle vorkommenden Parameter als variabel in der Zeit, das heißt mit der Bewegung sich verändernd angenommen werden. Für eine derart definierte Bewegung ist jedoch kein reproduzierbar fester Bezug zur Bahn definierbar. Dies ist nur möglich mit dem übergeordneten Begriff einer *Hansen*bewegung (Bild IV-1), da ein *Hansen*system fest an eine Bahn gekoppelt ist (Kapitel 21).

Elliptische bzw. ellipsennahe Bahnen (allgemeiner beliebige Kegelschnittbahnen) können auf die Apsidenlinie bezogen werden, also die Verbindungslinie durch Perizentrum und Apozentrum der Bahn. Man bezeichnet diese Bewegung als *anomalistische Bewegung* (in Kapitel 22). Allgemeiner kann als *anomalistische Bewegung* der Bezug auf die Linie des kürzesten Abstandes der Bewegungsbahn zu einem Bezugspunkt („Zentrum“) definiert werden, dem Perizentrum. Bahnen von Beobachtungssatelliten sind meist kreisnah und haben daher nur ein schwach oder gar nicht ausgeprägtes Perizentrum. Sie sind jedoch in der Regel gegenüber der Äquatorebene des Zentralkörpers geneigt, die Schnittpunkte mit der Äquatorebene, die Knoten, sind scharf definiert. Als *drakonitische Bewegung* wird eine Satellitenbewegung bezeichnet, wenn sie auf die Knotendurchgänge bezogen wird (in Kapitel 23). Das wichtigste auf einen Zentralkörper bezogene astronomische System ist das bewegliche Äquatorsystem mit der Äquatorebene als Grundebene und im Fall der Erde als Zentralkörper dem Frühlingspunkt als Referenzpunkt. Als Frühlingspunkt wird der aufsteigende Knoten der scheinbaren Sonnenbahn, der Ekliptik, mit dem Erdäquator bezeichnet. Wird die Satellitenbewegung auf den Frühlingspunkt bezogen, wird sie als *tropische Bewegung* bezeichnet (in Kapitel 24). Bahnen, die in der Äquatorebene verlaufen, haben keine Knoten. Sie sind aber als tropische Bewegungen fassbar. Bezieht man die Satellitenbewegung auf den Fixsternhimmel, spricht man von *siderischer Bewegung*. (Kapitel 25). Die Unterschiede zwischen tropischer und siderischer Bewegung sind so klein, dass sie in einer Satellitenbahnanalyse gewöhnlich vernachlässigt werden können.

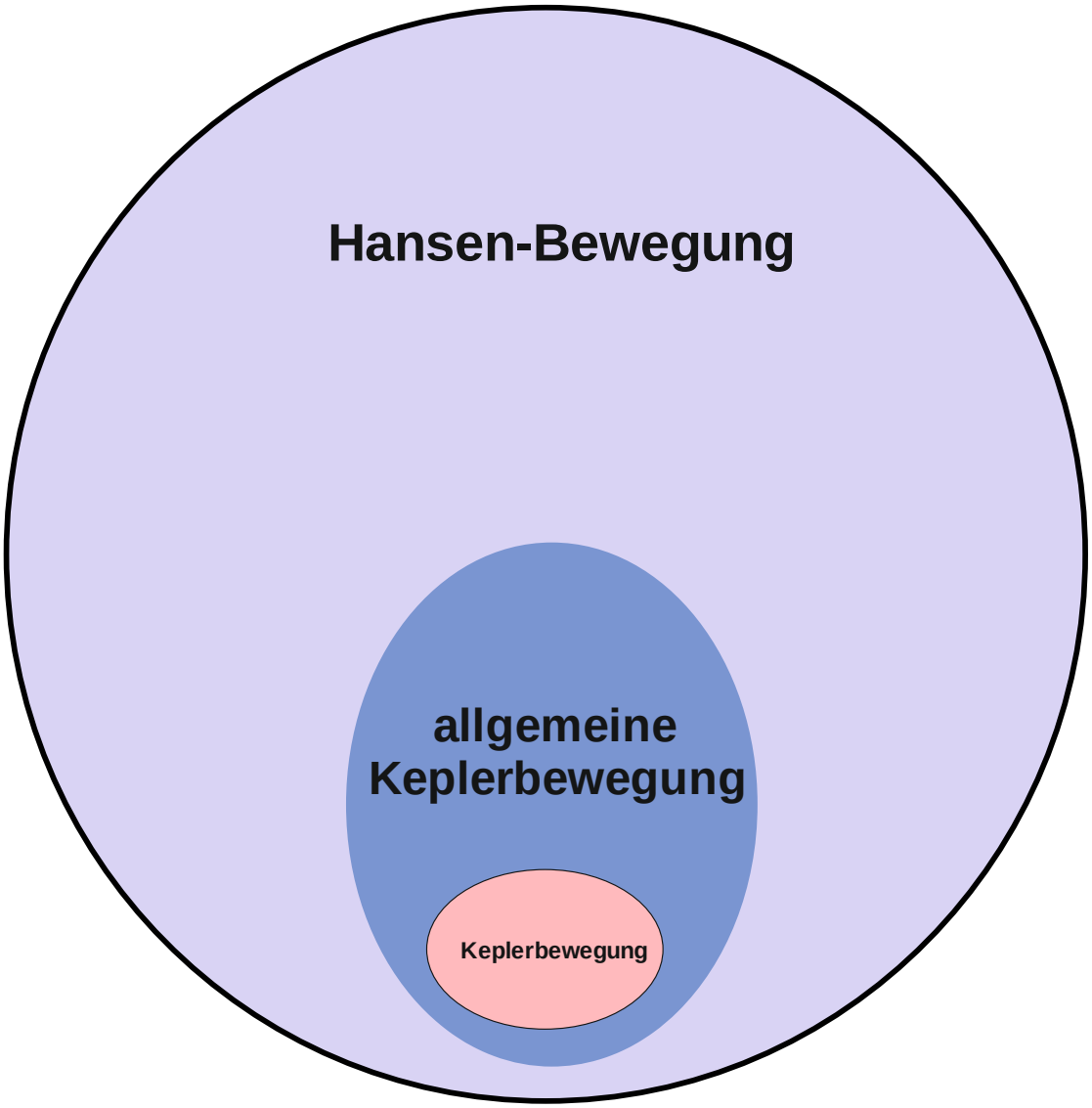


Bild IV-1: Zur Einordnung von Satellitenbewegungen

Für Beobachtungssatelliten und für die Beobachtbarkeit eines Satelliten von Bodenstationen aus wichtig ist der Bezug der Bewegung auf die Oberfläche des Zentralkörpers. Als Referenz kann - mit gewissen Einschränkungen - der Bezug der Satellitenbewegung auf einen bestimmten Längenkreis, einen Meridian, gewählt werden, was die *Meridian bezogene Bewegung* definiert (in Kapitel 26). Damit lässt sich eine Subsatellitenbahn berechnen, aber auch wichtige Spezialtypen von Satellitenbahnen, wie reproduzierbare, sonnensynchrone, geosynchrone Bahnen charakterisieren. Der globale Bezug der Satellitenbewegung zur Oberfläche des Zentralkörpers stellt sich als *scheinbare Bewegung* dar (in Kapitel 27). Infolge der Rotation des Zentralkörpers erscheint die Bewegung eines Satelliten gesehen von der Oberfläche des Zentralkörpers aus verändert. Rechtläufige Bahnen können beispielsweise scheinbar rückläufig sein, es gibt Bahnen mit scheinbaren Umkehrpunkten, mit scheinbar stationären Punkten, scheinbar stationäre ("geostationäre") Bahnen usw.. Ergänzende Beispiele hierzu werden in Kapitel 33 (Band V) in Bezug auf den Überflug eines Breitenkreises vorgestellt.

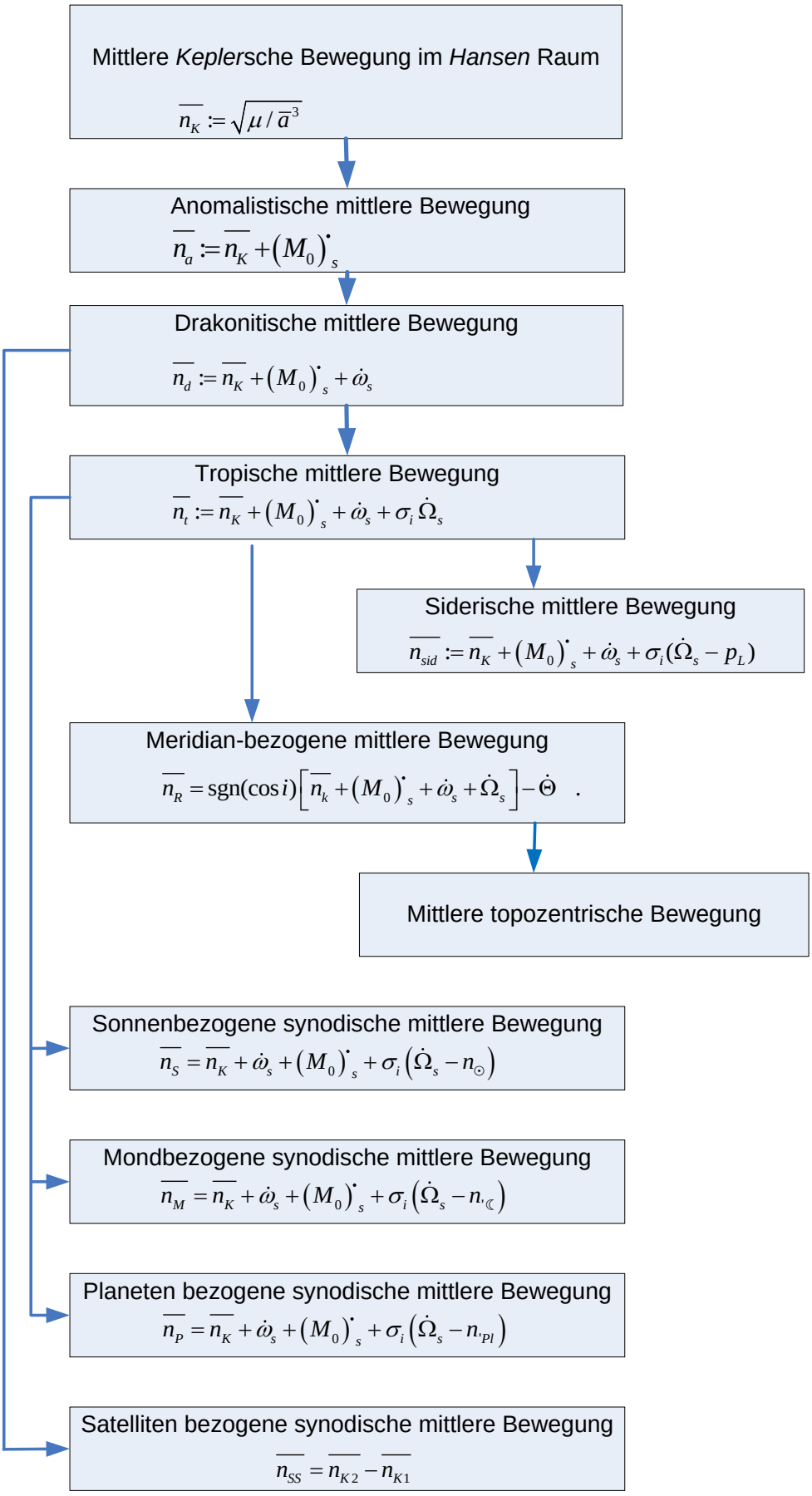


Bild IV-2: Relationen zwischen Bewegungsbezügen

In allen Fällen lassen sich Umlaufzeiten zuordnen und viele andere Parameter, die eine bestimmte Satellitenbewegung charakterisieren. Umgekehrt lassen sich diese Größen verwenden, um Bahnen auszuwählen, die bestimmte Anforderungen erfüllen sollen. Die Satellitenbewegung um einen Zentralkörper wird im vorliegenden Band IV der Satellitenbewegung durch genaue wie durch approximative mathematische Formulierungen beschrieben, durch zahlreiche Beispiele für Erdsatelliten, Mond- und Marsorbiter erläutert. Formeln zur approximativen Bahnauswahl werden entwickelt, die sich mit analytischen wie numerischen Methoden bearbeiten lassen. Ein analytischer Zusammenhang zwischen allen diesen Bewegungsmodellen kann in übersichtlicher Weise im Zusammenhang mit der mittleren Bewegung hergestellt werden, wie in Bild IV-2 demonstriert wird[1].

Eine zentrale Aufgabe einer Satellitenbahnanalyse ist die Auswahl einer geeigneten Bahn, die bestimmte Aufgabenstellungen erfüllen, welche etwa durch Beobachtungsbedingungen vorgegeben sein können. Einige solcher Verfahren der Bahnauswahl sind in Tabelle IV-1 zusammengestellt. Unter Ref. ist der Hinweis auf den Abschnitt, in dem die Behandlung des betreffenden Verfahrens enthalten ist.

vorgegebene Parameter	*Kepler*-Elemente	Ref.
Hansen Umlaufzeit $\overline{P_H}, (P_H)$	$\bar{a}_0$	21.5
anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a0}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	22.6.1
$\overline{P_H}, (P_H)$	$\bar{a}_0$	21.5
$\overline{P}_{a0}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	22.6.1
$\overline{P}_{a0}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	22.6.3
$\overline{P}_{a0}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	22.6.4
Perigäumslängendrift $\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{a}_0$	22.10.3
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{e}_0$	22.10.4
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{i}_0$	22.10.5
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{\omega}_0$	22.10.6

[1] Diese Überlegungen wurden erstmals vorgestellt in: JOCHIM, E. F. [1980]: 'Zur Begriffsbildung in der Bahnmechanik für Erdbeobachtungssatelliten', DGLR Walter-Hohmann-Symposium Raumflugmechanik, 12. und 13. März 1980. DGLR 80-014 in DLR-Mitt. 80-01 (her. von W. SCHULZ [1980]), und in: JOCHIM, E. F. [1983] 'The Synodic Motion of Satellites Related to Sun'. AAS / AIAA Astrodynamics Conference, Lake Placid, New York, August, 22 - 25, 1983; AAS 83-334

anom. Umlauf, Perig. Längendrift $\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, \overline{e}_0, \overline{\omega}_0$	$\overline{a}_0, \overline{i}_0$	22.11.3
$\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, \overline{i}_0, \overline{\omega}_0$	$(\overline{a}_0, \overline{e}_0)$	22.11.4
$\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, \overline{e}_0, \overline{i}_0$	$(\overline{a}_0, \overline{\omega}_0)$	22.11.5
$\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, (\overline{a}_0, \overline{\omega}_0)$	$(\overline{e}_0, \overline{i}_0)$	22.11.6
$\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, (\overline{a}_0, \overline{i}_0)$	$(\overline{e}_0, \overline{\omega}_0)$	22.11.7
Phasing Orbit zum Aufbau einer Formation	$\overline{a}_0, \overline{e}_0$	22.12.3
drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}}, \overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.3.5.1
$\overline{P_{d\,0}}, \overline{a}_0, \overline{i}_0$	$\overline{e}_0$	23.3.5.2
$\overline{P_{d\,0}}, \overline{a}_0, \overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	23.3.5.3
Anzahl N_{0M} drakonitischen Umläufen in M_0 Tagen, $\overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.3.6
Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$, $\overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.5.3
Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.5.4.1
$\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{a}_0, \overline{i}_0$	$\overline{e}_0$	23.5.4.2
$\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{a}_0, \overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	23.5.4.3
drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängendrift $\overline{P_{d\,0}}, \dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{e}_0$	$\overline{a}_0, \overline{i}_0$	23.6
Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift $\overline{\Delta\lambda_\Omega}, \dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{e}_0$	$\overline{a}_0, \overline{i}_0$	23.6
Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$, $\overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.8.2
Spur-Reproduzierbarkeit $K_1 : K_2, N_d, \overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.8.2
Reproduktionsdauer und drakonitische Umläufe $T_d, N_d, \overline{e}_0, \overline{i}_0$	$\overline{a}_0$	23.9.1
$T_d, N_d, \overline{a}_0, \overline{i}_0$	$\overline{e}_0$	23.9.1,

		23.3.5
$T_d, N_d, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	23.9.1, 23.3.5
Knotenumläufe und drakonitische Umläufe $K, N_d, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.9.2, 23.3.5
Tropische Umlaufzeit $\overline{P_t}, (P_t), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	24.3.4
Meridianbezogene Umlaufzeit $P_R, (P_{R.\sec}), (\overline{P_R}), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	26.4
Stationäre Punkte	$\overline{a_0}$	26.7.2.1
Bahnen mit Spitzenpunkten, $\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	26.7.2.3
Stillstandpunkte bei Knotenüberflug, $\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	26.7.2.5
Sonnenbezogene Umlaufzeit $\overline{P_S}, (P_S), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.5.1.6
$\overline{P_S}, (P_S), \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.5.1.6
$\overline{P_S}, (P_S), \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.5.1.6
Knotenlänge und Knoten-Durchgangszeit $\lambda_\Omega(t_\Omega), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t_\Omega), \overline{M_0}(t_\Omega), T_\Omega(t_\Omega)$	28.6.3.1
Mittlere lokale und Greenwich-bezogene Knotendurchgangszeit $T_{m\Omega}(t_\Omega), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$t_\Omega, \bar{\Omega}_0(t_\Omega), \overline{M_0}(t_\Omega), \lambda_\Omega(t_\Omega)$	28.6.3.1
Überflug einer geogr. Position in mittlerer Sonnenzeit $\lambda(t), \varphi(t), \mathrm{sgn}(\cos u), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t), \overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.2
Überflug einer geogr. Position in lokaler Sonnenzeit $\lambda(T), \varphi(T), \mathrm{sgn}(\cos u), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$t, \bar{\Omega}_0(t), \overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.2
Sonnenwinkel und Überflug eines Breitenkreises in mittlerer Sonnenzeit $\bar{\tau}(t), \varphi(t), \mathrm{sgn}(\cos u), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t), \overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.3
Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.1
$\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.1

$\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.1
Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.2
$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.2
$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.2
Sonnensynodische Bewegung der Bahnebene $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.3
$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.3
$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.3
sonnensynchron, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.8.2.1
sonnensynchron, $\bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.8.2.2
sonnensynchron, $\bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.8.2.3
sonnensynchron, reproduzierbar, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.8.5
Sonnensynchron, Knotenlängenrestverschiebung	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.8.5
Saros Zyklus	$\bar{a}_0$	28.9.2
Reproduzierbar in Zeit und Spur, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.9.3
Sensorhalbwertbreite und Überdeckungsstrecke[1]	$\bar{a}_0$	32.4.1
Zielpunkt und Sichtwinkel bei Überdeckung	$t_\Omega, \bar{\Omega}_0(t_\Omega), \overline{M_0}(t_\Omega), \lambda_\Omega(t_\Omega)$	32.4.2
Mindestabstand bei parallelen Bahnen. $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	33.2.3
Überflugwinkel über Breitenkreis, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	33.2.6.1
Überflugwinkel über Breitenkreis, $\bar{a}_0(t_0), \bar{e}_0(t_0)$	$\bar{i}_0$, $\bar{\Omega}_0(t_0), \bar{\omega}_0(t_0)$	33.2.6.2

Tabelle IV-1: Übersicht über verschiedene Verfahren der Bahnauswahl von Erdsatellitenbahnen: Vorgabe bestimmter Bahn- oder Beobachtungsparameter, Berechnung der mittleren *Kepler*-Elemente

[1] Band V

21 *Kepler*bewegung auf der Grundlage von *Hansen*-Systemen

Die allgemeine *Kepler*sche Bewegung hat keinen direkten Bezug zur Geometrie einer Satellitenbewegung, da sie keinen Bezugspunkt und keinen Bahnwinkel für eine solche Bewegung kennt. Dies ist nur für die spezielle *Kepler*bewegung der Fall, die von einer unveränderlichen Kegelschnittbewegung ausgeht, bei der etwa die wahre Anomalie als Bahnwinkel angesehen werden kann. Die allgemeine *Kepler*sche Bewegung muss daher als ein analytisches Hilfsmittel angesehen werden, während der reale Bezug auf die Bewegung eines Himmelskörpers (eines Satelliten) nur in einem anderen System mit klar definiertem Bezugspunkt und klar erkennbarem Bahnwinkel erfolgen kann.

Ein solcher Bezugspunkt ist etwa das Perizentrum einer Bahn und die darauf bezogenen wahre Anomalie (im Rahmen der anomalistischen Bewegung), ein auf oder absteigender Knoten und das darauf bezogene Argument der Breite (im Rahmen einer drakonitischen Bewegung), der Frühlingspunkt und die darauf bezogene Länge in der Bahn bzw. Rektaszension auf dem Äquator (im Rahmen der tropischen Bewegung), ein Fixstern (im Rahmen der síderischen Bewegung), ein fester Meridian auf der Erdoberfläche und die zugehörige geographische Länge (im Rahmen der meridionalen Bewegung), ein Beobachtungsort (aktiv oder passiv) auf der Erdoberfläche (im Rahmen der scheinbaren Bewegung), ein anderes bewegtes Objekt wie Sonne, Mond, Planet oder anderer Himmelskörper, ein anderer Satellit (im Rahmen einer synodischen Bewegung). Der grundlegend primäre Bezug zur Geometrie eines Bewegungsvorganges als Projektion einer *Kepler*bewegung in einem physikalischen Raum kann nur in einem *Hansen*-System durchgeführt werden, da allein dieses auf einen willkürlich festzulegenden, dann aber unveränderlichen Bezugspunkt in einer Bahnebene mit klar definiertem Bahnwinkel ausgerichtet ist.

Die von *Peter Andreas Hansen* entdeckten „idealen Koordinaten“, die im vorliegenden Bericht unter dem Begriff „*Hansen*-System“ verwendet werden, bilden eine allgemeingültige Grundlage für die Untersuchung beliebiger Bewegungen[1]. Dies gilt insbesondere auch für die Satellitenbewegung, die unter verschiedenartigen Bezügen hier auf der Grundlage der *Hansen*-Systeme entwickelt werden soll. *Hansen* selbst hatte die „idealen Koordinaten“ zur Herleitung der Störungsgleichungen zur Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper im Sonnensystem angewendet. Er scheint den grundlegenden Charakter dieser Koordinaten geahnt zu haben, weshalb er sie als „ideal“ bezeichnet hatte. Eine Ausführung zu diesen Überlegungen durch *Hansen* selbst, dessen Interesse sich auf die Anwendungen konzentrierte, ist nicht bekannt[2].

21.1 Die wichtigsten Eigenschaften der *Hansen*-Systeme

Bevor die *Hansen*-Systeme auf die Analyse einer Satellitenbewegung angewendet werden, werden in diesem Abschnitt einige ihrer charakterisierenden Eigenschaften zusammengestellt[3]. Sie sind notwendig und hinreichend mit *Hansen*-Systemen verkoppelt. Wenn also eine solche Eigenschaft auftaucht, führt sie auch auf ein *Hansen*-System.

---

[1] Siehe etwa Abschnitt 2.7.7 (Band I), sowie Abschnitt 8.12 (Band II)

[2] JOCHIM, E.F.M. [2011]

[3] Basierend auf den Herleitungen in den Abschnitten 4.3.10 bis 4.4.10 (Band II)

1. Ein *Hansen*-System kann ohne das mit einer Bewegung mitbewegte *Leibniz*-System nicht verstanden werden. Seien $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ die orthonormierten Basisvektoren eines *Leibniz*-Systems ($\mathbf{r}_0$ der radiale Richtungsvektor, $\mathbf{q}_0$ der transversale Richtungsvektor, $\mathbf{c}_0$ der normale Richtungsvektor) so kann ein Ortsvektor in der Form

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \qquad \langle r := |\mathbf{r}| \;,\; |\mathbf{r}_0| = 1 \tag{21.1}$$

geschrieben werden. Der absolute Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 \tag{21.2}$$

Die Variation des transversalen Richtungsvektors habe den Betrag

$$\dot{\zeta} := |\dot{\mathbf{r}}_0| \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \qquad \langle |\mathbf{q}_0| = 1 \tag{21.3}$$

Der Drallvektor in Richtung des normalen Richtungsvektors

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = G\,\mathbf{c}_0 \qquad \langle G := |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| \;,\; |\mathbf{c}_0| = 1 \tag{21.4}$$

hat als Betrag den Flächenparameter *G*. Damit ergibt sich die grundlegende Variationsgleichung

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad , \tag{21.5}$$

die in der klassischen Himmelsmechanik als skalare Form des Flächensatzes bezeichnet wird. Das Integral dieses Satzes führt auf den Bahnwinkel

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{G}{r^2}\,dt \quad . \tag{21.6}$$

Dieser Winkel ist notwendig und hinreichend mit einem *Hansen*-System verknüpft[1]. Er wird deshalb als *Hansen*scher Bahnwinkel (gelegentlich als erster *Hansen*scher Bahnwinkel) bezeichnet. Er kann an Stelle der Zeit als unabhängige Variable zur Beschreibung eines Bewegungsvorganges eingesetzt werden[2].

2. Im Fall einer *Kepler*bewegung kann die Differentialgleichung des *Hansen*schen Bahnwinkels auf die wahre Anomalie υ und die *Kepler*elemente ω, Ω, i zurückgeführt werden (siehe Formel (4.257) in Abschnitt 4.3.16 (Band II))

$$\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i \quad . \tag{21.7}$$

Mit dem Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$ sowie dem *Hansen*schen Winkel des aufsteigenden Knotens σ mit[3]

$$\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i \tag{21.8}$$

lautet die charakterisierende Differentialgleichung auch

---

[1] Sätze H10 und H11 in Abschnitt 4.3.16, (Band II)

[2] wie dies in Kapitel 5 durchgeführt wird (Band II)

[3] aus Formel (4.259)

$$\dot{\zeta} = \dot{u} + \dot{\sigma} \quad . \tag{21.9}$$

3. Es seien $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$ die orthonormierten Basisvektoren eines *Hansen*-Systems. Im Gegensatz zu einem *Leibniz* System sind diese Richtungsvektoren auf einen Ursprung bezogen. Dieser Ursprung kann willkürlich angenommen werden, er muss sich nicht in der (oskulierenden) Bahnebene befinden, er sollte aber (sinnvollerweise) nicht auf der Bahnkurve liegen. Damit kann ein Ortsvektor im *Hansen*-System in der Form

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta\right) \tag{21.10}$$

geschrieben werden.

4. Wird durch Variation des Geschwindigkeitsvektors (21.2) der zugehörige Beschleunigungsvektor gebildet[1], so ergibt sich für die radiale Beschleunigung der Ausdruck

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R \quad , \tag{21.11}$$

(die *Leibniz* Gleichung), für die transversale Beschleunigung durch Variation des Flächenparameters

$$b_T = \frac{\dot{G}}{r} \quad . \tag{21.12}$$

Für die normale Beschleunigung folgt der Ausdruck

$$b_N = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{21.13}$$

Die hier neu auftauchende Größe $\dot{\eta}$ ist im Zusammenhang mit *Hansen*-Systemen von besonderer Wichtigkeit[2]. Das Integral η charakterisiert die räumliche Rotation eines *Hansen*-Systems und kann deshalb als zweiter *Hansen*scher Bahnwinkel bezeichnet werden[3].

5. Der enge Zusammenhang zwischen *Hansen* und *Leibniz* System zeigt sich in den *Frenet*schen Formeln des *Leibniz* Systems (4.318), die auch als „*Frenet*sche Formeln der Astrodynamik“ bezeichnet werden können:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{21.14}$$

---

[1] Formel (4.300) und folgende in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

[2] Herleitungen in Abschnitt 4.4.2

[3] Man muss jedoch beachten, dass der Winkel η keine unabhängige Variable ist, sondern als Funktion der Zeit bzw. besser als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels behandelt werden muss: $\eta = \eta(\zeta)$

Der Eigenbewegungsvektor des *Leibniz* Systems lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{21.15}$$

6. Ein *Hansen*-System ist unverrückbar mit der zugehörigen (auch oskulierenden) Bahnebene verknüpft. Die Basisrichtungsvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}$ und $\mathbf{q}_2^{(I)}$ führen keine Eigenbewegung innerhalb der Bahnebene aus, wie dies sonst prinzipiell bei allen anderen Bahnsystemen der Fall ist (außer im „ungestörten" Fall der exakten *Kepler*bewegung). Dies zeigen die *Frenet*schen Formeln des *Hansen*-Systems (4.326)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\sin\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\cos\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\left(\sin\zeta\,\mathbf{q}_1^{(I)} - \cos\zeta\,\mathbf{q}_2^{(I)}\right) \quad . \end{aligned} \tag{21.16}$$

Der Richtungsvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ ist auf einen Punkt in der oskulierenden Bahnebene ausgerichtet, der als „Anfangspunkt des *Hansen*-Systems" bezeichnet wird[1]. Er verändert sich nicht in der Bahnebene, ebenso wenig wie der zweite Richtungsvektor $\mathbf{q}_2^{(I)}$. Wird die Bahnebene infolge einer normalen Beschleunigung gedreht (mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\eta}$), so bewegen sich diese beiden Basisvektoren mit der Ebene mit, bleiben aber unveränderlich an die Bahnebene gekoppelt. Dies ist eine der wesentlichen Eigenschaften des *Hansen*-System im Vergleich zu allen anderen Systemen[2].

7. Im absoluten Geschwindigkeitsvektor tritt bei Bezug auf ein *Hansen*-System keine Eigenbewegung des Basissystems auf, auch wenn das System eine Eigenbewegung hat. Bei allen anderen Systemen verschwindet dieser Anteil dann und nur dann, wenn das entsprechende Basissystem keine Eigenbewegung hat (d.h. nur bei einem Inertialsystem). Sei der Ortsvektor mit kartesischen Koordinaten gegeben in der Form

$$\mathbf{r} = y^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \tag{21.17}$$

so gilt bei *Hansen*-Systemen[3]

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{mit} \quad y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \quad . \tag{21.18}$$

8. Wenn nach *Hansen* in bahnmechanischem Zusammenhang für das bewegte Objekt nur Systeme mit $y_3 = 0$ betrachtet werden (wie das schon *Hansen* selbst durchgeführt hat[4]), bleibt mit $y_1 = r\cos\zeta$, $y_2 = r\sin\zeta$ die wichtige Beziehung[5]

---

[1] In der englisch sprachigen Literatur ist nach *A. Cayley* der Begriff „departure point" üblich

[2] Satz H23 in Abschnitt 4.4.6

[3] Satz H1 in Abschnitt 4.3.10. Dies ist der Grund weshalb *Hansen* dieses System als „ideal" bezeichnet hat

[4] Hinweis in Abschnitt 4.3.15, Unterpunkt (5)

[5] aus Abschnitt 4.3.16

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin\zeta = 0 \quad . \tag{21.19}$$

9. Der absolute Eigenbewegungsvektor eines *Hansen*-System ist stets auf den radialen Richtungsvektor ausgerichtet und hat den Betrag der Variation des zweiten *Hansen*schen Bahnwinkels:

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \qquad . \tag{21.20}$$

10. Wird mit $\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ der relative Geschwindigkeitsvektor bei Bezug auf das *Hansen*-System bezeichnet, so folgt aus der Darstellung des absoluten Geschwindigkeitsvektors (21.18)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q \tag{21.21}$$

die interessante Aussage: bei *Hansen*-Systemen sind absoluter und relativer Geschwindigkeitsvektor stets identisch[1].

11. Eine fundamentale Eigenschaft von *Hansen*-Systemen ist folgenden Aussage: Die Oskulationsbedingung in der Methode der Variation der Parameter

$$\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} = 0 \tag{21.22}$$

ist notwendig auf ein *Hansen*-System mit dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ bezogen[2]. Die Methode der Variation der Parameter kann ohne Bezug auf ein *Hansen*-System nicht sinnvoll begründet werden. In diesem und nur in diesem Fall (abgesehen von einem physikalisch gesehen unmöglichen Inertialsystem) wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \qquad . \tag{21.23}$$

21.2 Zeit und *Hansen*scher Bahnwinkel

Der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ ist der einzige Bahnwinkel (von Interesse), dessen Variationsgleichung (21.5) nicht unmittelbar von einem Bahnmodell etwa mit Beschleunigungen in radialer, transversaler und normaler Richtung (b_R, b_T, b_N) geprägt wird, wie dies für die meisten sonst verwendeten Bahnwinkel der Fall ist[3]. Dies macht ihn interessant für eine exakte analytische Begründung der allgemeinen *Kepler*bewegung.

Die Zeit, die einem *Hansen*schen Bahnwinkel zugeordnet ist, wird aus dem Integral über den Flächensatz

---

[1] Satz H2 in Abschnitt 4.3.10

[2] Satz H24 in Abschnitt 4.4.7; JOCHIM, E.F.M. [2012]

[3] Siehe hierzu auch die vergleichenden Darstellungen in Abschnitt 11.13 mit Tabelle 11-1 (Band III)

$$t - t_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G} d\zeta \tag{21.24}$$

erhalten, wobei t_0 ein dem Anfangswinkel ζ_0 zugeordneter Anfangswert sei. ζ_0 kann willkürlich gewählt werden, darf aber im gesamten Rechenprozess dann nicht mehr geändert werden.

In den folgenden Abschnitten wird das *Hans*ensystem speziell in Bezug auf eine *Kepler*bewegung untersucht, zunächst die Berechnung der Zeit bei vorgegebenem *Hansen*schen Bahnwinkel, anschließend umgekehrt der *Hansen*sche Bahnwinkel bei vorgegebener Ephemeride.

1.1.1 Die Zuordnung eines *Hansen*schen Bahnwinkels zur Zeit im Rahmen einer *Kepler*bewegung

Zur Lösung des Integrals (21.24) werden die Parameter *G* und *r* als Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ benötigt. Dazu muss ein geeignetes Bahnmodell zur Verfügung gestellt werden, das alle Bewegungseinflüsse enthält, die zur adäquaten Beschreibung eines bestimmten Bewegungsvorganges benötigt werden.

Der Flächenparameter *G* wird mit der Differentialgleichung (21.12) aus dem Integral

$$G = G(\zeta) = G_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^3 b_T}{G} d\zeta \tag{21.25}$$

erhalten. Hierzu muss neben dem Radius *r* auch die transversale Beschleunigung b_T als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels bekannt sein.

Der Bahnradius *r* werde mit dem Ansatz der geradlinigen Bewegung[1]

$$r = r(\zeta) = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \tag{21.26}$$

untersucht. Die Parameter g_1, g_2 sind ebenfalls Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels. Sie genügen den Variationsgleichungen (5.105)

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left(\; b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta \right) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left(-b_R \cos\zeta + b_T \sin\zeta \right) \quad . \end{aligned} \tag{21.27}$$

Hier wird die Kenntnis der radialen Beschleunigung b_R und der transversalen b_T als Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels vorausgesetzt.

[1] mit Formel (5.106) in Abschnitt 5.2.7 (Band II)

Im Fall von Erdsatelliten wird üblicherweise als Basisbewegung (als eine intermediäre Bewegung) die *Kepler*bewegung angenommen. Sie wird durch die *Kepler*sche Beschleunigung[1] (17.3) charakterisiert

$$b_K = -\frac{\mu}{r^2} \quad . \tag{21.28}$$

Der Koeffizient μ ist die (hier als konstant angenommene) geozentrische Gravitationskonstante. Für die gestörte *Kepler*bewegung muss dann die radiale Beschleunigung in der Form

$$b_R = b_K + b_{R2} \tag{21.29}$$

angesetzt werden. Der Term b_{R2} enthält alle Restbeschleunigungen in radialer Richtung, die zur Beschreibung des betreffenden Bewegungsvorganges in Abweichung von der (exakten) *Kepler*bewegung noch benötigt werden. Auch dieser Störterm muss in diesem Zusammenhang als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels bekannt sein.

Je nach dem verwendeten Bahnmodell und den vorgegebenen Genauigkeitsanforderungen müssen dazu passende Formelsysteme entwickelt werden, die aber nicht generalisiert werden können. Dies trifft für numerische Lösungen zu wie insbesondere auch für analytische Näherungslösungen.

Für eine näherungsweise analytische Berechnung wird häufig die Zerlegung der Parameter in einen mittleren und periodischen Anteil durchgeführt:

$$r = r(\zeta) = \overline{r(\zeta)} + \delta r(\zeta) \quad , \quad G = G(\zeta) = \overline{G(\zeta)} + \delta G(\zeta) \quad . \tag{21.30}$$

Dies ist insbesondere im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung üblich, wenn von einer periodischen oder allgemeiner einer quasiperiodischen Bewegung ausgegangen werden kann.

Beim *Hansen*schen Winkel $\sigma = \zeta - u$ des aufsteigenden Knotens lautet die Zerlegung in einen säkularen und in einen periodischen Anteil

$$\sigma = \sigma(\zeta) = \overline{\sigma(\zeta)} + \delta\sigma(\zeta) = \zeta - u(\zeta) = \zeta - \overline{u(\zeta)} - \delta u(\zeta) \quad . \tag{21.31}$$

Hier ist offensichtlich

$$\delta\sigma(\zeta) = -\delta u(\zeta) \quad . \tag{21.32}$$

BEISPIEL: Im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik („Störeinflüsse“ nur durch den größten der harmonischen Koeffizienten J_2) unterliegen die Parameter g_1, g_2 in erster Näherung den Variationsgleichungen (unter Verwendung der Entwicklungen (17.34) und (17.35))

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} = &-\frac{\mu \sin\zeta}{\bar{G}} + \frac{\mu\ \delta G\ \sin\zeta}{\bar{G}^2} + \\ &+\frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\left[3\sin^2\bar{i}\,\sin^2(\zeta-\bar{\sigma})-1\right]\sin\zeta - \\ &-3\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\sin^2\bar{i}\,\sin(\zeta-\bar{\sigma})\cos(\zeta-\bar{\sigma})\cos\zeta + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{21.33}$$

[1] siehe in Abschnitt 17.1 (Band (III)

$$\frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{\mu\cos\zeta}{\bar{G}} - \frac{\mu\ \delta G\ \cos\zeta}{\bar{G}^2} -$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\left[3\sin^2\bar{i}\sin^2\left(\zeta-\bar{\sigma}\right)-1\right]\cos\zeta -$$
$$-3\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\sin^2\bar{i}\sin\left(\zeta-\bar{\sigma}\right)\cos\left(\zeta-\bar{\sigma}\right)\sin\zeta + O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Entsprechend gilt für den Flächenparameter in erster Näherung

$$\frac{dG}{d\zeta} = -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{\bar{r}\ \bar{G}}\sin^2\bar{i}\sin\left(\zeta-\bar{\sigma}\right)\cos\left(\zeta-\bar{\sigma}\right) + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.34}$$

Im Fall von Erdsatelliten ist bekannt[1], dass

$$\left|\delta G\right| = O\left(J_2\right) \quad . \tag{21.35}$$

Der mittlere Anteil des Flächenparameters ist bei Berücksichtigung der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld der Erde konstant[2]:

$$\bar{G} \mathrel{\hat{=}} \overline{G_G} = \overline{G_{G0}} = const. \quad . \tag{21.36}$$

Für den mittleren Radius erhält man aus der Darstellung (21.26)

$$\bar{r} = \bar{r}\left(\zeta\right) = \frac{\bar{G}}{\overline{g_1}\cos\zeta + \overline{g_2}\sin\zeta} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.37}$$

Hier werden zur Berechnung der Parameter $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ in den Differentialgleichungen (21.33) die periodischen Anteile im Flächenparameter δG abgespalten.

Es fehlt noch die Berechnung des *Hansen*schen Knotenwinkels σ mit Hilfe der Differentialgleichung (21.8). Mit (11.71) und (17.33) sowie (17.35) ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = -3\mu J_2 R_E^2 \frac{\cos^2 i \sin^2\left(\zeta-\sigma\right)}{G^2 r} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.38}$$

Der mittlere Anteil im *Hansen*winkel des aufsteigenden Knotens $\bar{\sigma}$ kann aus dem Integral

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\zeta} = -3\mu J_2 R_E^2 \frac{\cos^2\bar{i}\sin^2\left(\zeta-\bar{\sigma}\right)\left[\bar{g}_1\cos\zeta + \bar{g}_2\sin\zeta\right]}{\bar{G}^3} + O\left(J_2^2\right) \tag{21.39}$$

erhalten werden. Hier muss allerdings wegen des hier verwendeten Bahnmodells bei Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde auch ein Beschleunigungsanteil in der Variationsgleichung für den aufsteigenden Knoten (21.8)[3] normal zur Bahnebene berücksichtigt werden.

Für eine analytische Näherung nullter Ordnung kann gesetzt werden

---

[1] Siehe die Formeln (20.180) und (20.182) in Abschnitt 20.2.4.12 (Band III)

[2] Formeln (20.175) und (20.176)

[3] mit Formel (11.71) (Abschnitt 11.1.5, Band III)

$$\begin{aligned}\frac{dg_1}{d\zeta} &= -\frac{\mu \sin\zeta}{\bar{G}} + O\left(J_2\right) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{\mu \cos\zeta}{\bar{G}} + O\left(J_2\right) \\ \frac{dG}{d\zeta} &= \bar{G} + O\left(J_2\right) = const. + O\left(J_2\right) \quad .\end{aligned} \tag{21.40}$$

Wie in Abschnitt 5.4.3 lautet die Lösung nullter Ordnung

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1\left(\zeta\right) = g_{11} + \frac{\mu}{\bar{G}}\cos\zeta + O\left(J_2\right) = \overline{g_1} + O\left(J_2\right) \qquad \left\langle g_{11} = const. \right. \\ g_2 &= g_2\left(\zeta\right) = g_{21} + \frac{\mu}{\bar{G}}\sin\zeta + O\left(J_2\right) = \overline{g_2} + O\left(J_2\right) \qquad \left\langle g_{21} = const. \quad . \right. \end{aligned} \tag{21.41}$$

Werden diese Ergebnisse in die Gleichung (21.26) für den Bahnradius eingesetzt, ergibt sich notwendigerweise mit den Abkürzungen

$$g_{100} := \sqrt{\overline{g_{11}}^2 + \overline{g_{21}}^2} \quad , \quad \bar{e} := \frac{\mu}{\bar{G}} g_{100} \quad , \quad \bar{G} := \sqrt{\mu\, \bar{p}^2} \tag{21.42}$$

sowie

$$\frac{\bar{G}}{\mu}\overline{g_1} - \cos\zeta =: \bar{e}\cos\overline{\zeta_K} \quad , \quad \frac{\bar{G}}{\mu}\overline{g_2} - \sin\zeta =: \bar{e}\sin\overline{\zeta_K} \tag{21.43}$$

für den mittleren Bahnradius die Polargleichung

$$\bar{r} = \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e}\cos\left(\zeta - \overline{\zeta_K}\right)} \quad . \tag{21.44}$$

Hier ist $\overline{\zeta_K} = \bar{\sigma} + \bar{\omega}$ der mittlere *Hansen*sche Bahnwinkel des Perizentrums des Kegelschnitts. Er kann in der hier betrachteten Näherung nullter Ordnung als konstant betrachtet werden. Die periodische Variation des Radius ist im Fall von Erdsatelliten durch Formel (20.187) gegeben ist.

Näherungen höherer Ordnung können etwa mit Hilfe eines Formelmanipulatorsystems (etwa MAPLE) zur gemeinsamen Integration der Differentialgleichungen (21.33), (21.34) und (21.38) erhalten werden. Dies führt auf eine vollständige Lösung des Bewegungsproblems in der Bahnebene.

1.1.2 Berechnung des *Hansen*schen Bahnwinkels einer *Kepler*bewegung

Wenn der *Hansen*sche Bahnwinkel explizit benötigt wird, kann er mit Hilfe der Integration der Differentialgleichung (21.6) direkt erhalten werden, wie im vorhergehenden Abschnitt angedeutet wurde. Der Anfangswert $\zeta_0 := \zeta\left(t_0\right)$ wird willkürlich festgelegt, darf aber dann während des gesamten Rechenprozesses nicht mehr geändert werden.

Im vorliegenden Abschnitt wird der *Hansen*sche Bahnwinkel aus einer bereits vorhandenen Ephemeride berechnet. Im Fall einer allgemeinen *Kepler*bewegung werden die *Kepler*elemente und als Bahnwinkel die wahre Anomalie erhalten. Damit kann der *Hansen*sche Bahnwinkel

durch Integration der für eine *Kepler*bewegung gültigen Differentialgleichung (21.9) bzw. (21.7) erhalten werden:

$$\zeta = \zeta(t) = \zeta_0 + u(t) + \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega} \cos i \, dt \quad . \tag{21.45}$$

Die Lösung des verbleibenden Integrals

$$\sigma = \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega} \cos i \, dt \tag{21.46}$$

kann zu numerischen Unstimmigkeiten führen. Um diese (näherungsweise) in den Griff zu bekommen, kann folgendermaßen vorangegangen werden:

Die Inklination einer Satellitenbahn kann in der üblichen Weise in einen säkularen (mittleren) und periodischen Anteil zerlegt werden

$$i = \bar{i} + \delta i = \bar{i}_0 + (i)^{\bullet}(t - t_0) + \delta i \quad . \tag{21.47}$$

Damit kann die Variationsgleichung (21.7) in diesem Fall umgeschrieben werden

$$\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos \bar{i} \cos(\delta i) - \dot{\Omega} \sin \bar{i} \sin(\delta i) \quad . \tag{21.48}$$

Im Fall von Erdsatellitenbahnen ist in erster Näherung[1] $(i)^{\bullet} = O\left(J_2^4\right) \approx 0.0/s$. Die periodischen Variationen der Inklination δi sind im Fall von Erdsatelliten aus den Ausdrücken (20.27) und (20.59) bekannt. Können sie als klein angenommen werden[2] $\delta i \approx 0.0$, lautet die Variationsgleichung näherungsweise mit einem Anfangswert $\bar{i}_0$ für die Inklination

$$\dot{\zeta} = \dot{u} + \dot{\Omega} \cos \bar{i}_0 \quad . \tag{21.49}$$

Damit kann die Variationsgleichung (21.48) direkt integriert werden

$$\zeta = \zeta_0 + \upsilon(t) - \upsilon(t_0) + \omega(t) - \omega(t_0) + \left[\Omega(t) - \Omega(t_0)\right] \cos \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \; . \tag{21.50}$$

Werden die periodischen Variationen in den Elementen, insbesondere in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, abgetrennt, bleibt

$$\Delta\Omega = \Omega(t) - \Omega(t_0) = \dot{\Omega}_s (t - t_0) + \delta\Omega[t, t_0] \quad . \tag{21.51}$$

Im Fall der Anfangswerte ist

$$\zeta_0 = u_0 + \sigma_0 \quad . \tag{21.52}$$

Da $u_0 = u(t_0)$ aus der Ephemeridenrechnung bekannt ist, ζ_0 ein (willkürlich) vorgegebener Anfangswert ist, bleibt für den *Hansen*winkel des aufsteigenden Knotens die jetzt bekannte Größe

$$\sigma_0 = \zeta_0 - u_0 \quad . \tag{21.53}$$

Damit kann der *Hansen*sche Bahnwinkel (im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung) schließlich berechnet werden aus

---

[1] siehe in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] siehe die Ausdrücke (20.27) und (20.59)

$$\zeta = \zeta(t) = \sigma_0 + u + \Delta\Omega \cos \bar{i}_0 + \cdots \quad . \tag{21.54}$$

Da im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse mit bekanntem Bahnmodell zu jedem Zeitpunkt *t* die wahre Anomalie $\upsilon = \upsilon(t)$ sowie die Parameter $\omega = \omega(t)$ und $\Omega = \Omega(t)$ berechnet werden können, ist damit auch der *Hansen*sche Bahnwinkel $\zeta = \zeta(t)$ (zumindest näherungsweise) bekannt.

Anmerkung: Die Bedeutung des *Hansen*-Winkels σ des aufsteigenden Knotens kann aus der relativen Sicht eines *Hansen*systems folgendermaßen gedeutet werden: Das *Hansen*-System wird als fester Bezug angesehen, demgegenüber alle anderen Systeme als variable angesehen werden können. Dies trifft insbesondere für das Äquatorsystem zu[1]. Dieses bewegt sich gegenüber dem *Hansen*-System mit den Variationen der Inklination und des aufsteigenden Knotens infolge einer normalen Beschleunigung auf die Bahnebene mit den Variationen[2]

$$(i)^{\cdot} = \frac{r}{G} \cos u \, b_N \quad , \quad \dot{\sigma} = \frac{r}{G} \frac{\sin u \cos i}{\sin i} b_N \quad . \tag{21.55}$$

Wird der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable gewählt, lauten die entsprechenden Variationsgleichungen[3]

$$\frac{di}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} \cos(\zeta - \sigma) b_N \quad , \quad \frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} \frac{\sin(\zeta - \sigma) \cos i}{\sin i} b_N \quad . \blacktriangleleft \tag{21.56}$$

1.1.3 Mittlere Umlaufzeit erster Ordnung bezogen auf ein *Hansen*-System

Eine Umlaufzeit kann nur bei periodischen Bahnen berechnet werden. Es werde angenommen, dass die mittleren Bahnparameter große Bahnhalbachse, Exzentrizität und Kegelschnittparameter $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{p}_0$ etwa für einen Anfangswert t_0 als konstante Größen bekannt seien: $\bar{a}_0 := \bar{a}(t_0)$, usw... Im Fall einer Ellipse (21.44) bzw. einer ellipsennahen Bewegung gilt notwendig für den Kegelschnittparameter die Beziehung

$$\bar{p}_0 = \bar{a}_0 \left(1 - \bar{e}_0^2\right) \quad . \tag{21.57}$$

Bezogen darauf ergibt die Lösung des Zeitintergrals (21.24) mit der Integration nach Anhang D2 (Band V)

$$\overline{P_{K0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}^2}{\sqrt{\bar{p}_0}} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{p}_0^{3/2}}{1 + \bar{e}_0 \cos\left(\zeta - \overline{\zeta_{K0}}\right)} d\zeta = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{a}_0^3}{\mu}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{K0}}} \quad . \tag{21.58}$$

Die Integration wird mit Hilfe des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ durchgeführt, beginnend im Anfangspunkt des *Hansen*-Systems und wieder endend in exakt diesem festen Punkt. Damit wird genau ein voller Umlauf vollzogen. Dies ist nur im Rahmen eines *Hansen*-Systems mög-

---

[1] Man könnte formulieren: „wir blicken hoch zum Äquatorsystem, das eine scheinbare Eigenbewegung gegenüber dem *Hansen*-System hat“

[2] Formeln (11.70) und (11.71) in Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[3] Hier wird der Flächensatz $r^2 \dot{\zeta} = G$ verwendet (Formel (4.297) in Abschnitt 4.4.2, Band II)

lich. Damit ist das *Hansen*-System eine Voraussetzung zur exakten Betrachtung der *Kepler*-bewegung.

Das in (21.58) gefundene Integral ist nichts anderes als die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung. Allerdings wird hier die Integration geometrisch einwandfrei auf den Ursprung eines *Hansen*-Systems bezogen durchgeführt, während sonst üblicherweise die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung definitorisch durch

$$\overline{n_{K0}} := \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \tag{21.59}$$

ohne möglichen geometrischen Bezug bestimmt wird.

Die weiteren Bezüge einer Satellitenbewegung, die auf einen nicht in der Bahnebene fest liegenden Bezugspunkt orientiert sind, werden in den folgenden Kapiteln[1] im Hinblick auf die Durchführung einer Bewegungsanalyse untersucht.

21.3 Die überlagerte Funktion

1.1.4 Allgemeine Überlegungen

Eine beliebige Funktion $y(x)=0$ soll nach der Variablen *x* aufgelöst werden, In manchen Anwendungen kann eine geeignete Funktion $z[y(x)]=0$ gefunden werden, so dass die Lösung *x* die Funktionen $y(x)=0$ UND $z[y(x)]=0$ löst. Numerische Untersuchungen zeigen, dass eine geschickte Auswahl der *überlagerten* Funktion *z* zu einer schnelleren und stabileren Berechnung der Lösung *x* führen kann als die direkte Berechnung mit der Funktion $y(x)=0$. Dies kann sogar dann der Fall sein, wenn die *Horner Zahl* (= Anzahl der Aufrufe der Funktion und ihrer Ableitungen[2]) wächst und der Konvergenzradius kleiner wird. Ein Nachteil des Verfahrens besteht darin, dass es notwendig zur Lösung führen, aber nicht hinreichend zu ein und derselben Lösung führen kann. Eine Lösung muss daher stets sorgfältig überprüft werden. Im Allgemeinen können die Variablen x, y, z mehrdimensionale Vektoren sein.

1.1.5 Anwendung in Satellitenbahnanalyse

In einer Satellitenbahnanalyse wird meist mit Winkeln gerechnet. Üblicherweise werden jedoch nicht die Winkel selbst, sondern die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus dieser Winkel als Ergebnisse einer Bahnberechnung erhalten. Für eine numerische iterative Lösung einer analytisch nicht mehr zu bearbeitenden Problemstellung (etwa unter Einschluss eines beliebig aufwendigen Bahnmodells) ist es in vielen Anwendungen sinnvoller und meist auch numerisch stabiler etwa mit einer Sinusfunktion als einer überlagerten Funktion zu rechnen. Vorausgesetzt wird, dass die überlagerte Funktion auf denselben Fixpunkt führt, wie die

[1] Ab Kapitel 22

[2] JORDAN-ENGELN, GISELA; FRITZ REUTTER [1981], p. 25

Unbekannte selbst. Dies ist etwa der Fall, wenn die Differenz zweier nahe beieinander liegender Winkel verschwinden soll, was dann auch für den Sinus dieser Winkel zutreffen muss.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse werden wir häufig auf derartige Problemstellungen stoßen und können dieses Verfahren bei der numerischen Behandlung dieses Problems vorteilhaft einsetzen.

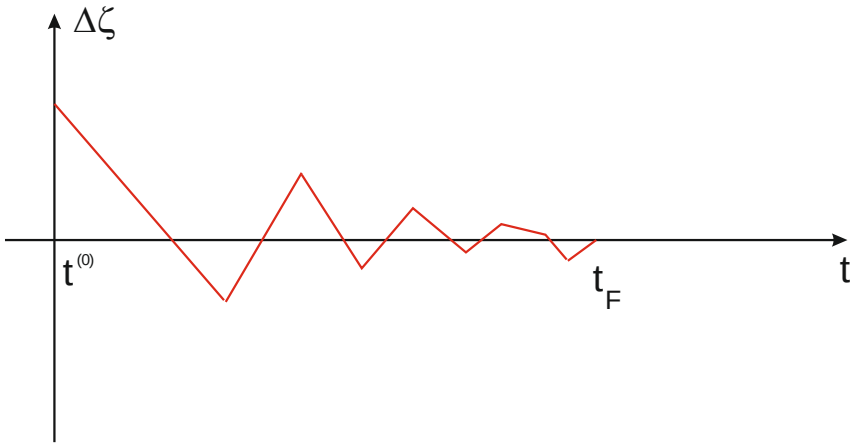


Bild 21-1: Symptomatische Darstellung eines Fixpunktverfahrens zur Berechnung des Zeitpunktes t_F, der einem gegebenen Bahnwinkel zugeordnet wird mit Hilfe der Winkeldifferenz $\Delta\zeta = \zeta(t) - \zeta(t_F)$

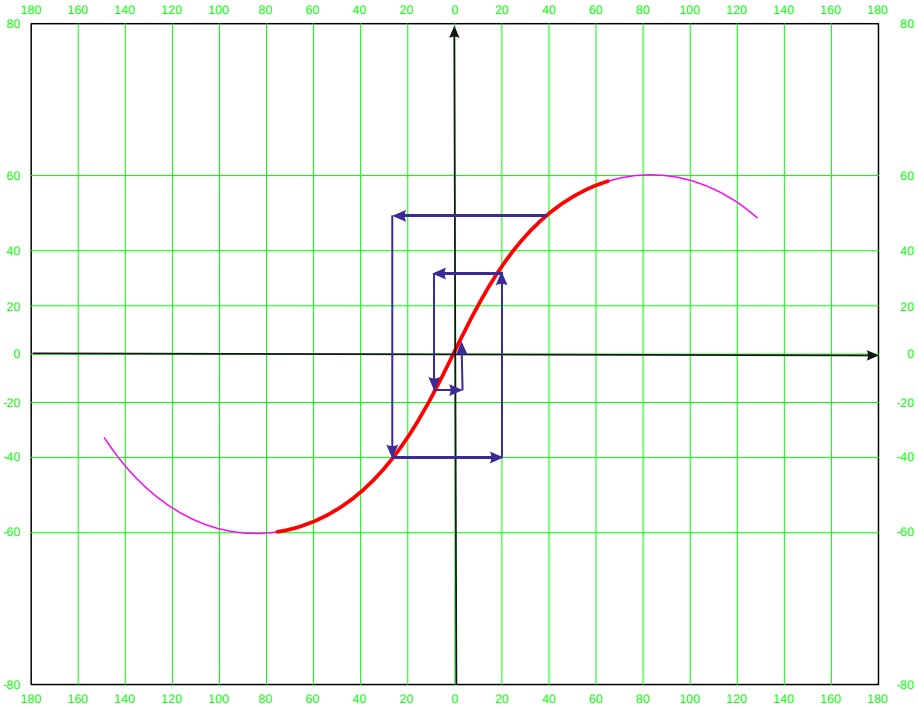


Bild 21-2: Beispiel für ein Fixpunktverfahren mit Sinus-Funktion als überlagerter Funktion

Die Vorteile des Verfahrens der überlagerten Funktion mit Hilfe einer Sinusfunktion sind vor allem:

1. Das Verfahren ist glatter als mit dem zugrundeliegenden Winkel (vgl. Bild 21-1 mit Bild 21-2)
2. Das Verfahren ist numerisch stabil. An Stelle eines *Newton*-Verfahrens führt auch ein die Ableitungen vermeidendes Verfahren der fortgesetzten Halbierung rasch zum Ziel.

3. Der Konvergenzkreis ist mit etwa $\pm 80°$ für den zu iterierenden Winkel (die zu iterierende Winkeldifferenz) sehr groß (siehe den hervorgehobenen Bereich der Kurve in Bild 21-2). Da üblicherweise bei trigonometrischen Rechnungen neben dem Sinus auch der Cosinus eines Winkels berechnet werden kann, ist es möglich mit dem Vorzeichen des Cosinus zu entscheiden, ob um den Winkel 0° oder 180° iteriert werden soll.

Anmerkung: Das Verfahren der überlagerten Funktion ist im Grunde der Ersatz einer physikalischen Größe (hier ein Winkel mit der Dimension Grad oder in Radian) durch einen mathematischen Ausdruck (hier eine trigonometrische Funktion). Man kann dies auch als Projektion einer physikalischen Größe in einen mathematischen Strukturraum bezeichnen, womit die physikalische Größe einer geschickten eindeutigen Lösung zugeführt werden kann[1]. ◄

21.4 Die *Hansen*sche Umlaufzeit einer *Kepler*bewegung

Das Verfahren der überlagerten Funktion kann verwendet werden um etwa die *Hansen*sche Umlaufzeit P_H mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$fct\left(P_H\right) \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{21.60}$$

bezogen auf einen Anfangszeitpunkt t_0 zu berechnen. Der Vorgang kann bei einem beliebigen Bahnmodell nur iterativ bearbeitet werden. Als Anfangswert kann die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit (21.58) verwendet werden:

$$P_H^{(0)} := \overline{P_K} \quad . \tag{21.61}$$

Mit der Einführung

$$\sigma_0 := \Omega \cos \bar{i}_0 \tag{21.62}$$

werden die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sin\zeta &= \sin u \, \cos\sigma_0 + \cos u \sin\sigma_0 \\ \cos\zeta &= \cos u \cos\sigma_0 - \sin u \sin\sigma_0 \end{aligned} \tag{21.63}$$

benötigt, die direkt mit Hilfe der Ergebnisse der Ephemeridenrechnung erhalten werden können. Wird der *Hansen*winkel des aufsteigenden Knotens mit der vollständigen Berechnung der Inklination gewünscht, muss die Differentialgleichung (21.8) zusätzlich integriert werden um den Winkel σ an Stelle von σ_0 zu erhalten.

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10000$ km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$, sowie der Inklination $\bar{i}_0 = 85°$. Die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{K0}} = 9952.014050$ s. Bei Bezug auf ein Bahnmodell mit nur säkularen Störungen auf die *Kepler*bewegung durch die zonalen Harmonischen J_2, J_4 hat die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit den Betrag $\overline{P_H} = 9957.705601$ s.

[1] siehe hierzu auch die prinzipiellen Überlegungen in Kapitel 14 (Band III)

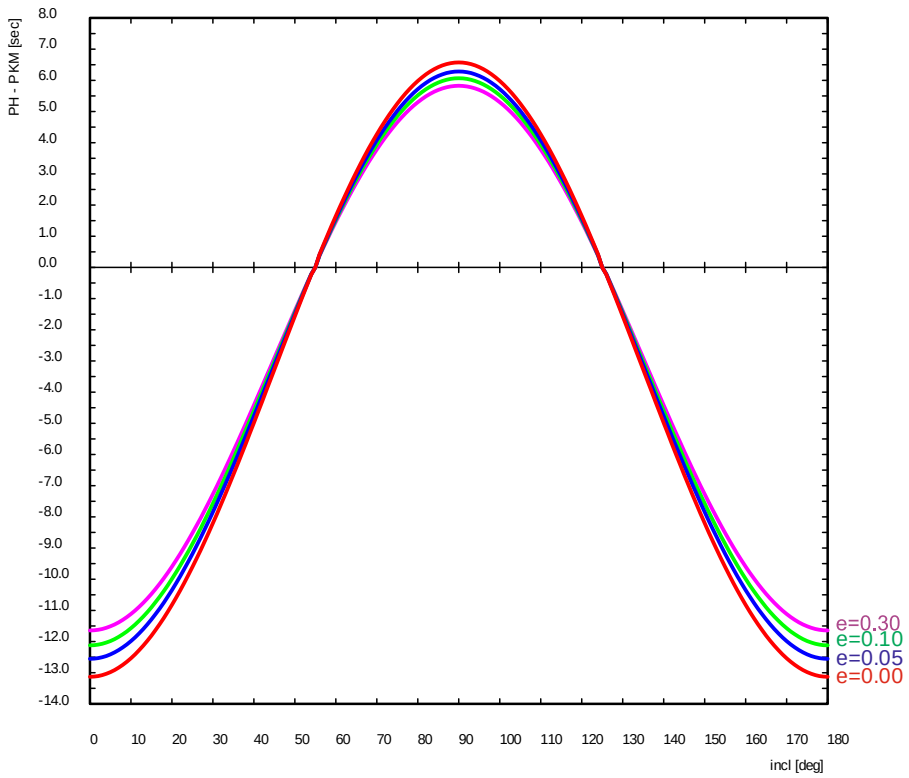


Bild 21-3: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit P_H im Vergleich zur mittleren Keplerschen Umlaufzeit $\overline{P_K}$ über der Inklination bei Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“). Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten

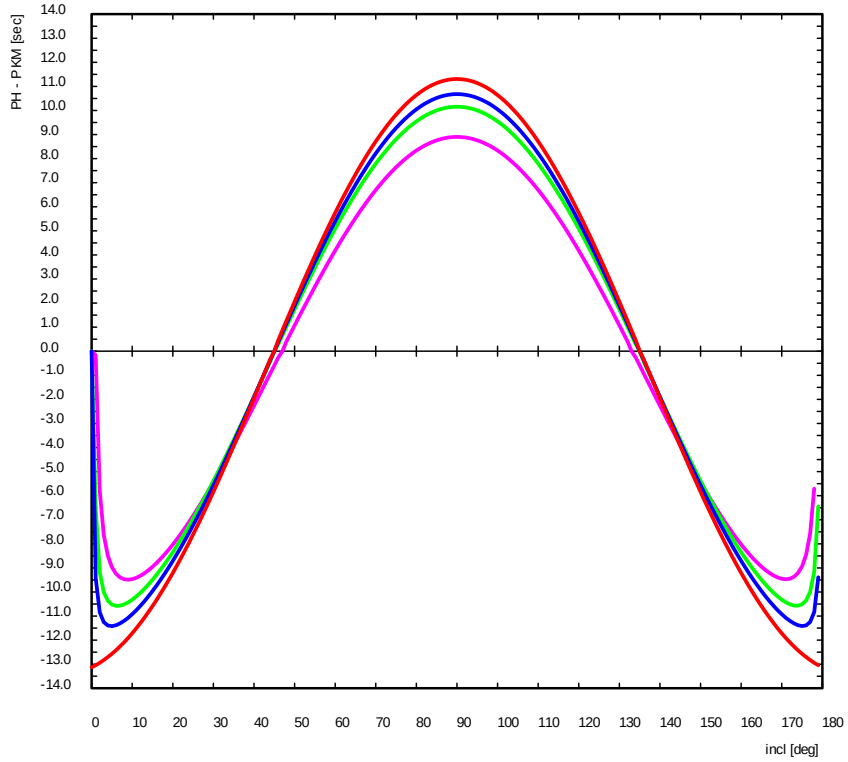


Bild 21-4: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit im Vergleich zur mittleren Keplerschen Umlaufzeit über der Inklination bei Berücksichtigung aller (d.h. säkularer und periodischen) Bewegungseinflüssen („Störungen“) durch die zonalen Harmonischen $\left(J_2, J_3, J_4\right)$. Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten (Anordnung wie in Bild 21-3)

Werden auch die periodischen Störeinflüsse durch J_2, J_3, J_4 berücksichtigt und die a priori Genauigkeit $\Delta t = 10^{-6}$ sec verlangt, hat die *Hansen*sche Umlaufzeit bezogen auf den Anfangszeitpunkt t_0 den Betrag $P_H = 9957.706308\,\mathrm{s}$.◄

Der Einfluss der Inklination auf die *Hansen*sche Umlaufzeit erscheint zunächst überraschend, da der *Hansen* Raum fest an die Bahnebene geknüpft ist und daher von der räumlichen Orientierung unabhängig sein muss. Jedoch sind die *Hansen*schen Bahnwinkel ζ nach Formel (21.7) im Gravitationsfeld der Erde wesentlich auch von der Inklination abhängig, was sich daher auch auf die *Hansen*sche Umlaufzeit auswirken muss. Dies zeigt im Unterschied zum vorherigen Beispiel

BEISPIEL 2: Gegeben sei die Bahn von BEISPIEL 1 einer Erdsatellitenbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10000$ km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$, sowie der Inklination $\bar{i}_0 = 5°$. Die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit beträgt wie oben $\overline{P_{K0}} = 9952.014050\,\mathrm{s}$. Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit hat mit säkularen Störeinflüssen den Betrag $P_H = 9940.502630\,\mathrm{s}$, bei Berücksichtigung der periodischen Störeinflüsse den Betrag $P_H = 9940.505316\,\mathrm{s}$.◄

Der Vergleich der beiden Beispiele zeigt den großen Einfluss der Inklination auf die *Hansen*sche Umlaufzeit. In Bild 21-3 wird die Variation der *Hansen*schen Umlaufzeit über der Inklination am Beispiel einer Bahn mit der großen Bahnhalbachse a=10000 km und für einige Exzentrizitäten demonstriert. In diesem Beispiel, das unter Verwendung der Bedingungsgleichung (21.60) nur mit säkularen Bewegungseinflüssen durch die zonalen Harmonischen J_2, J_4 gerechnet wurde, werden Variationen der Umlaufzeit bis zu etwa 20 Sekunden beobachtet. Der Einfluss der Exzentrizität ist gering. Werden jedoch auch die periodischen Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4 berücksichtigt, ergeben sich die in Bild 21-4 dargestellten Kurven, die erheblich von denen in Bild 21-3 abweichen.

Anmerkung zur Begriffsbildung:

Es ist üblich, die mit Hilfe der Anfangsbahnelemente berechnete Umlaufzeit als „mittlere Umlaufzeit“ zu bezeichnen. Im Fall der *Hansen*schen Umlaufzeit ist diese die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit (21.58).

Die mit Hilfe der Bedingungsgleichung (21.60) unter Berücksichtigung allein von säkularen Bewegungseinflüssen („Störungen“) erhaltene Umlaufzeit wollen wir dagegen als die „säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit einer *Kepler*nahen Satellitenbewegung“ $\overline{P_H}$ benennen. Sie kann sich wesentlich von der mittleren Umlaufzeit unterscheiden, wenn die wahre Bewegung des Satelliten im Hinblick auf das verwendete Bahnmodell berücksichtigt wird. Bei den Bahnen von Erdsatelliten wirken sich hier die säkularen Variationen in den *Kepler*elementen Ω, ω, M_0 aus. Diese sind in der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit nicht berücksichtigt.

Werden bei dieser Berechnung auch die periodischen Einflüsse auf die Bahn und die Bewegung eines Satelliten in der Bahn berücksichtig, können wir von der „wahren *Hansen*schen Umlaufzeit“ P_H sprechen. Diese beiden Begriffe müssen somit in ihrem Verständnis stets das verwendete Bahnmodell implizieren. ◄

21.5 Bahnauswahl mit *Hansen*scher Umlaufzeit

Das dritte *Kepler*sche Gesetz hat die Beziehung zwischen Umlaufzeit und großer Bahnhalbachse einer elliptischen *Kepler*bewegung zum Inhalt. Dies legt nahe, auch im Fall einer allgemeinen *Kepler*bewegung einer vorgegebenen Umlaufzeit die Auswahl einer Bahnhalbachse zuzuordnen. Dies soll im vorliegenden Abschnitt am Beispiel einer vorgegebenen *Hansen*schen Umlaufzeit $\overline{P_H}$ bzw. P_H demonstriert werden[1]. Es soll die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zu einer Epoche t_0 berechnet werden.

Die Bahnauswahl bei Vorgabe einer *Hansen*schen Umlaufzeit kann nur iterativ durchgeführt werden. Als nullte Näherung wird formal das dritte *Kepler*sche Gesetz verwendet

$$\frac{2\pi}{\left(P_H\right)_0} \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{P_H} = n_H =: \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \quad , \tag{21.64}$$

woraus der Anfangswert für die große Bahnhalbachse

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[3]{\mu \frac{\left(P_H\right)^2}{4\pi^2}} \tag{21.65}$$

erhalten wird. Die Iteration erfolgt mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\zeta\left[t_0 + P_H; \bar{a}_0\right] - \zeta\left[t_0; \bar{a}_0\right]\right) = 0 \quad . \tag{21.66}$$

Die Lösung ergibt die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0$ zur Epoche t_0. Die Iteration wird in Abhängigkeit von dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ durchgeführt. Dieser wird mit dem gegebenen Bahnmodell aus dem Integral (21.45) bzw. näherungsweise aus Formel (21.54) aus der vorhandenen Lösung einer Ephemeridenrechnung erhalten.

Mit der so berechneten großen Bahnhalbachse kann auch die Berechnung der *Hansen*schen Umlaufzeit in Abschnitt 21.4 kontrolliert werden. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL: In Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts wurde für die Bahn a=10000 km, e=0.3, i=85° unter Verwendung der überlagerten Funktion (21.60) die säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit $P_{Hs} = 9957.706290\,\mathrm{s}$ bzw. bei Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4 die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit $P_H = 9957.70631\,\mathrm{s}$ erhalten. Mit letzterer Umlaufeit liefert Formel (21.65) für die große Bahnhalbachse den Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 10003.8127605712\,\mathrm{km}$. Die Iteration (21.66) liefert $\bar{a}_0 = 10000.000\,\mathrm{km}$. Als a priori Genauigkeit werden für die Halbachse $\left|\Delta a\right| \le 10^{-5}\,\mathrm{km}$ und für den Funktionswert $\left|fct\left(\bar{a}_0\right)\right| \le 10^{-7}$ verlangt.

[1] Beispiele mit anderen Umlaufzeiten und zur Auswahl anderer Bahnelemente, wie Exzentrizität, Inklination usw., werden in den folgenden Kapiteln des vorliegenden Bandes IV der Satellitenbewegung hergeleitet.

Um einen Einblick in das Rechnen mit einer überlagerten Funktion zu gewähren, welche die Nullstelle eines Differenzwinkels zu berechnen gestattet, der mit einer Sinusfunktion überlagert ist, wird das Verfahren an Hand des vorliegenden Beispiels detailliert entwickelt.

Gegeben sei die *Hansen*sche Umlaufzeit P_H, die auf ein bestimmtes Bahnmodell (säkulare, periodische, andere Einflüsse) bezogen sei. Formel (21.65) liefert die Näherung nullter Ordnung $\bar{a}_0^{(0)}$ der gesuchten großen Bahnhalbachse. Mit dem verwendeten Bahnmodell werden mit Hilfe der Formeln (21.63) die *Hansen*schen Bahnwinkel am Anfang und Ende eines *Hansen*-Umlaufs bezogen auf eine Epoche t_0 berechnet:

$$\zeta_1(t_0) = \text{-}0°.2155996478 \quad , \quad \zeta_2(t_0 + P_H) = \text{-}0°.6157798478 \quad .$$

Um einen vollständigen *Hansen*-Umlauf zu erhalten muss $\zeta_2 - \zeta_1 = 360°$ exakt erfüllt sein. Im vorliegenden Fall ist $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1 = 360°\text{-}0°.4001802000 \mathrel{\hat{=}} \text{-}0°.4001802000$. Für eine iterative Verbesserung wird die berechnete Halbachse um einen Wert Δa (im vorliegenden Fall $\Delta a = 2\,\text{km}$) so verändert, dass der Differenzwinkel $\Delta\zeta$ bzw. die überlagerte Funktion $\sin(\Delta\zeta)$ kleiner wird. Der neue Funktionswert wird mit dem vorhergehenden verglichen: haben beide dasselbe Vorzeichen, wird die Halbachse wieder mit Δa so verändert, dass der neue Funktionswert wieder kleiner wird. Haben die beiden Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen bedeutet dies, dass der gesuchte Fixpunkt („Nullstelle“) durch die beiden Werte eingeschlossen ist. In diesem Fall wird das Intervall, das den Fixpunkt einschließt, durch fortgesetzte Halbierung weiter eingeengt. Dabei kann es passieren, dass ein neuer Funktionswert, der oberhalb der verlangten Genauigkeitsgrenze liegt, größer als der vorhergehende Funktionswert ist. Die weitere Anwendung des Verfahrens wird aber sicher zur gewünschten Lösung führen. Dieser Prozess kann an den numerischen Werten in der folgenden Tabelle nachvollzogen werden:

$\bar{a}_0$	$\Delta\zeta$	$fct(\bar{a}_0)$
10003.8127605712 km	-0°.4001802000	-0.0069844053
10005.8135231233 km	-0°.6100194505	-0.0106466468
10001.8119980191 km	-0°.1902329099	-0.0033201845
9999.8112354670 km	0°.0198211941	0.0003459451
10000.8116167430 km	-0°.0852191329	-0.0014873539
10000.3114261050 km	-0°.0327022785	-0.0005707624
10000.0613307860 km	-0°.0064413683	-0.0001124231
9999.9362831265 km	0°.0066897066	0.0001167574
9999.9988069562 km	0°.0001241175	0.0000021663
10000.0300688711 km	-0°.0031586383	-0.0000551286
10000.0144379137 km	-0°.0015172636	-0.0000264812
10000.0066224349 km	-0°.0006965738	-0.0000121575
10000.0027146956 km	-0°.0002862283	-0.0000049956

10000.0007608259 km	-0°.0000810554	-0.0000014147
9999.9997838911 km	0°.0000215310	0.0000003758
10000.0002723585 km	-0°.0000297622	-0.0000005194
10000.0000281248 km	-0°.0000041156	-0.0000000718
9999.9999060079 km	0°.0000087077	0.0000001520
9999.9999670663 km	0°.0000022961	0.0000000401
9999.9999975955 km	-0°.0000009098	-0.0000000159
9999.9999823309 km	0°.0000006932	0.0000000121
9999.9999899632 km	-0°.0000001083	-0.0000000019
9999.9999899632 km	-0°.0000001083	-0.0000000019

Die a posteriori Genauigkeit der überlagerten Funktion als Bedingungsgleichung beträgt somit $\bar{\Delta} fct(\bar{a}_0) = 2 \times 10^{-9}$. Da das verwendete Rechnerprogramm nur eine Eingabegenauigkeit von 5 geltenden Ziffern erlaubt, konnte die angestrebte Genauigkeit der großen Bahnhalbachse nicht ganz erreicht werden. ◄

22 Anomalistische Bewegung

Als anomalistische Bewegung wird eine Bewegung verstanden, die auf das Perizentrum ihrer Bahn im Hinblick auf einen Bezugspunkt ausgerichtet ist. Im Rahmen einer (allgemeinen) *Kepler*bewegung kann dieser Bezugspunkt ein Kraftzentrum wie etwa die Sonne im Rahmen von Untersuchungen der Planetenbewegung, der Erdmittelpunkt bei Erdsatelliten, es kann aber auch der gemeinsame Schwerpunkt in einem Mehrkörpersystem oder irgendein willkürlicher Referenzpunkt sein.

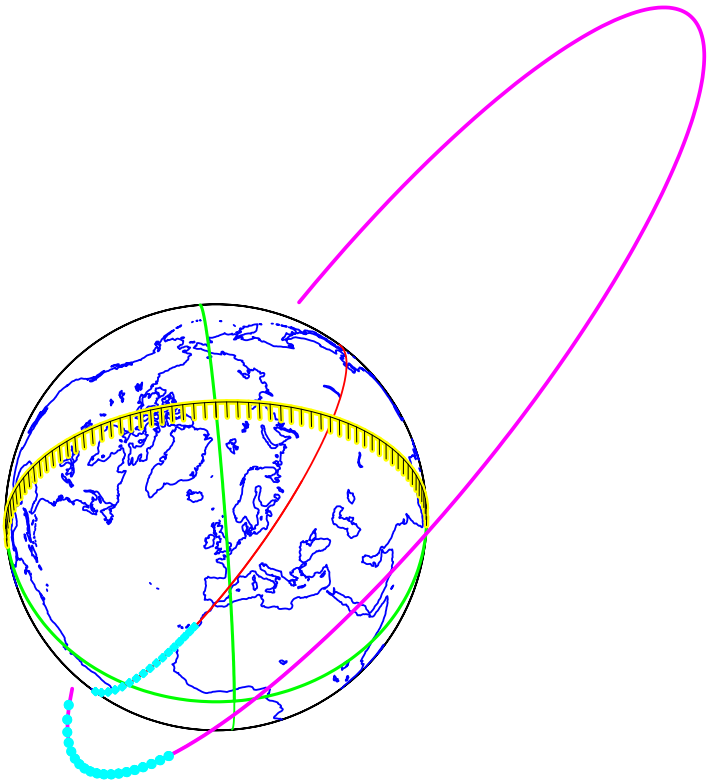


Bild 22-1: Anomalistische Bewegung einer hochexzentrischen Erdsatelliten Bahn: Apogäumshöhe 20000km, Perigäumshöhe 200 km, Inklination 60°. Das Bild zeigt die wahre Bahn und die zugehörige Subsatellitenbahn über einen anomalistischen Umlauf. Die Rotation der Erde ist im Bild nicht dargestellt. Der Terminator ist für den 1. Oktober 1985 um 00:25:0.0 eingezeichnet. Das Perigäum der Bahn liegt im Erdschatten, der in hellblauer Farbe markiert ist. In grüner Farbe sind der Erdäquator und der Nullmeridian eingezeichnet.

Somit ist die anomalistische Bewegung am engsten mit der allgemeinen *Kepler*bewegung verknüpft, die ebenfalls auf das Perizentrum der Bahn bezogen wird, im Fall einer elliptischen Bewegung auf die Apsidenlinie, die Perizentrum und Apozentrum verbindet. Allerdings wird im Gegensatz zur (speziellen) *Kepler*bewegung für die anomalistische Bewegung eine Eigenbewegung des Perizentrums und damit eines Perizentrum-bezogenen Koordinatensystems zugelassen. Die Untersuchung der anomalistischen Bewegung ist vor allem für exzentrische Bahnen sinnvoll, deren Perizentrum scharf ausgeprägt ist, nicht aber für kreisnahe Bahnen, deren Perizentrum nicht präzise definiert werden kann. Allerdings spielt in der praktischen Anwendung der Raumfahrttechnik die anomalistische Bewegung auch für kreisnahe Bahnen eine gewisse formale Rolle, etwa bei der Definition der gelegentlich verwendeten Zweizeilen Parameter („two-line elements“).

22.1 Das Apsidensystem

Als Apsidensystem (Perizentrum-bezogenes Koordinatensystem) wird üblicherweise ein orthonormiertes Koordinatensystem verstanden, dessen Basisvektoren die Einheitsvektoren $\mathbf{q}_j^{(P)}$ $\left(\left(\mathbf{q}_j^{(P)}\right)^2 = 1\right)$ seien. Die $\mathbf{q}_1^{(P)}$ – Achse dieses Systems ist zum Perizentrum der oskulierenden Bahn ausgerichtet, die $\mathbf{q}_2^{(P)}$ – Achse liegt in der oskulierenden Bahnebene um einen Winkel von 90° gegenüber dem Perizentrum in Richtung der Bahnbewegung gedreht. Diese Achse wird gelegentlich auch als „Parameterachse“ bezeichnet, da der innerhalb des Kegelschnittes liegende Anteil bis zur Apsidenlinie die Länge des Kegelschnittparameters *p* hat. Die $\mathbf{q}_3^{(P)}$ – Achse ergänzt das System zum orthonormierten Koordinatensystem und fällt mit der Bahnnormale zusammen:

$$\mathbf{q}_3^{(P)} = \mathbf{q}_1^{(P)} \times \mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{c}_0 \quad . \tag{22.1}$$

Die Bezüge dieses Systems zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem, zum (bewegungsbezogenen) *Hansen*-System und zum (mitbewegten) *Leibniz*-System sind in Abschnitt 8.13.2 (Band II) zusammengestellt.

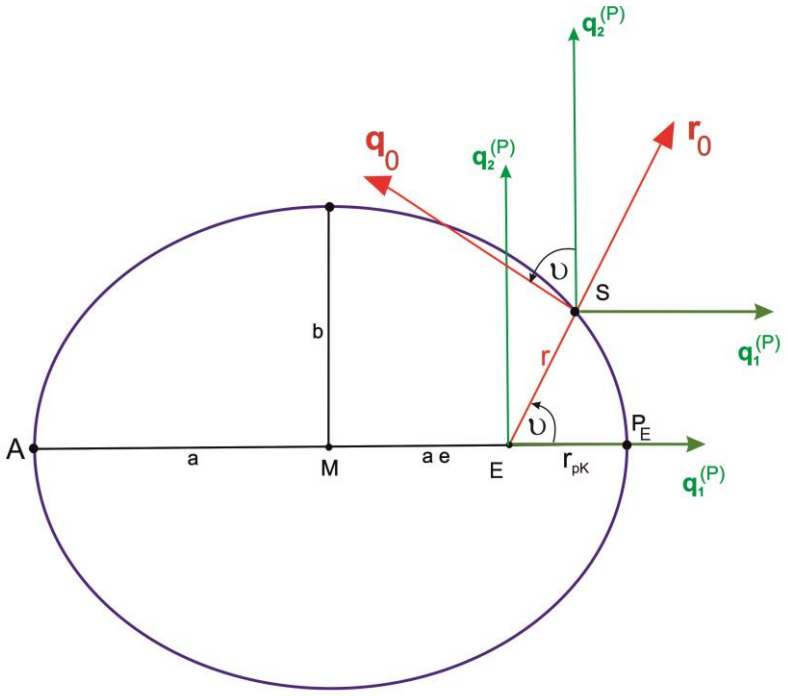


Bild 22-2: Das $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem in Bezug auf das $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)$ – *Leibniz*-System. υ-wahre Anomalie, M-Mittelpunkt der Ellipse, E-Brennpunkt der Ellipse („Erdmittelpunkt“), A-Apogäum, P_E-Perigäum[1]

Hier sei der Übersichtlichkeit wegen der Bezug auf das *Leibniz*system reproduziert. Das *Leibniz*system wird durch den radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$, den transversalen Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ und den normalen Richtungsvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ aufgespannt. Mit der wahren Anomalie υ als Bahnwinkel ergeben sich dann die Beziehungen für die Basisvektoren

[1] Kopie von Bild 8-20 (Band II)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(P)} \cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)} \sin\upsilon \\
\mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(P)} \quad , \\
\mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{r}_0 \cos\upsilon - \mathbf{q}_0 \sin\upsilon \\
\mathbf{q}_2^{(P)} &= \mathbf{r}_0 \sin\upsilon + \mathbf{q}_0 \cos\upsilon \\
\mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{c}_0 \qquad\qquad .
\end{aligned}
\tag{22.2}
$$

Die Variationen der Basisvektoren der beiden Systeme werden umgerechnet mit

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \cos\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \sin\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \cos\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{r}_0 \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} \quad , \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \cos\upsilon - \dot{\mathbf{q}}_0 \sin\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_2^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_0 \cos\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_1^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\mathbf{c}}_0 \quad .
\end{aligned}
\tag{22.3}
$$

Die wahre Anomalie hat im Rahmen einer „Störung“ des Zweikörperproblems mit dem Bahnparameter *G*, der zentrischen Gravitationskonstanten μ, der numerischen Exzentrizität *e* und dem Kegelschnittparameter *p* die *Gauß*sche Variation (aus Abschnitt 11.1 (Band II))

$$
\dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{G}{r^2} + \frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2} \cos\upsilon - b_T \sin\upsilon \left(1 + \frac{r}{p} \right) \right] \quad . \tag{22.4}
$$

Im Zweikörperproblem hat der Bahnparameter die Relation[1] $G = \sqrt{\mu\, p}$. b_{R2} ist die radiale Beschleunigung, welche eine Zweikörperbewegung „stört“, b_T die zugehörige transversale Beschleunigung. Die wahre Anomalie wird somit ausschließlich durch Einflüsse innerhalb der Bahnebene beeinflusst. Dies trifft jedoch nicht auf das Apsidensystem zu, das auch Einflüssen aus normaler Richtung unterliegt. Dies zeigen die ***Frenet*schen Formeln der absoluten Eigenbewegung des Apsidensystems**[2]

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} \right) \mathbf{q}_2^{(P)} - \dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(P)} \sin\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} \right) \mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(P)} \cos\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\eta} \left[\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon \right] \qquad .
\end{aligned}
\tag{22.5}
$$

Hier ist

$$
\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} = \left| \dot{\mathbf{r}}_0 \right| \tag{22.6}
$$

[1] sie wird als „drittes *Kepler*sches Gesetz“ bezeichnet, wenn die Parameter als konstant angenommen werden können (Siehe in Abschnitt 10.1.3 (Band III))

[2] nach Abschnitt 8.13.4.2 (Band II)

die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels[1], der auch als erster Bahnwinkel bezeichnet wird, während der zweite (*Hansen*sche) Bahnwinkel η die räumliche Bewegung der Bahnebene beschreibt. Seine Variation lautet[2] mit der Beschleunigung b_N in normaler Richtung zur Bahnebene

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad . \tag{22.7}$$

Nach Beziehung (22.4) und da im Rahmen einer *Kepler*bewegung $G = \sqrt{\mu\, p}$, ist

$$\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T \sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] \quad . \tag{22.8}$$

Das Apsidensystem hat den absoluten Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} = D^j_{q^{(P)}}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.9}$$

Die Formeln (22.7) und (22.8) zeigen, dass der Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems verschwindet, wenn keine der Beschleunigungen b_{R2}, b_T, b_N auf die Bewegung des Objektes einwirkt. Ohne diese Beschleunigungen ist die Bewegung im Apsidensystem eine exakte *Kepler*bewegung. Eine exakte *Kepler*bewegung erzeugt somit ein Apsidensystem, das keine Eigenbewegung hat.

Im allgemeinen Fall können die *Frenet*schen Formeln des Apsidensystems durch die bekannte Beziehung ersetzt werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} \qquad \langle\ j = 1,2,3 \quad . \tag{22.10}$$

Die zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem relativen *Frenet*-Formeln und der zugehörige relative Eigenbewegungsvektor sind in Abschnitt 8.13.4.1 (Band II) zusammengestellt.

Es seien die $y^{(P)j}$ die kartesischen Koordinaten eines Ortes im Apsidensystem:

$$\mathbf{r} = y^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.11}$$

Der absolute Geschwindigkeitsvektor hat dann die Gestalt

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} + y^{(P)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \dot{y}^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} + \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(P)}} + \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.12}$$

Damit ist wieder die Trennung in die zum Apsidensystem relative Bewegung des betrachteten Objektes mit dem relativen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{q^{(P)}}$ und der Eigenbewegung dieses Systems mit Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(P)}}$ erreicht.

---

[1] Siehe Satz H10 in Abschnitt 4.3.16 (Band II)

[2] Etwa nach Abschnitt 5.1 (Band II)

22.2 Wahre Anomalie als Bahnwinkel im Apsidensystem

22.2.1 Wahre Anomalie und Zeit

Wie in der speziellen *Kepler*bewegung kann auch in der anomalistischen Bewegung die wahre Anomalie als Bahnparameter verwendet werden. Der Bezug zur Zeit kann mit der Variationsgleichung (22.4) hergestellt werden:

$$t = t_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \qquad . \tag{22.13}$$

Nach Vorgabe der wahren Anomalie υ bei Bezug auf einen Anfangswert υ_0, wobei keine Reduktion um 360° (bzw. 2π) erfolgen darf, liefert dieses Integral das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$, das zum Durchlaufen des Bahnbogens auf der angenommenen Bahn benötigt wird. Da alle Parameter in der Variationsgleichung (22.4) der wahren Anomalie üblicherweise Funktionen der Zeit t sind, kann das Integral (22.13) grundsätzlich nur iterativ gelöst werden: Die Funktion des Zeitintervalls kann aus einer identischen Beziehung etwa der Form

$$fct_0(\Delta t) \equiv \upsilon(t_0) - \upsilon(t_0 + \Delta t) = 0 \tag{22.14}$$

für das sichere numerische Rechnen günstiger mit der überlagerten Funktion

$$fct(\Delta t) \equiv \sin\left[\upsilon(t_0) - \upsilon(t_0 + \Delta t)\right] = 0 \tag{22.15}$$

berechnet werden.

Für bahnanalytische Untersuchungen ist es sinnvoll, Näherungslösungen zu untersuchen. Mit ihrer Hilfe können bestimmte Bewegungseinflüsse herausgefunden werden, welche eine Bewegung wesentlich prägen. Eine solche Näherungslösung kann dann auch als Ausgangslösung für die Beziehung (22.14) verwendet werden.

22.2.2 Näherung der wahren Anomalie mit der Mittelpunktsgleichung

Für elliptische Bewegungen kann die wahre Anomalie mit der Anordnung nach *Fourier* Sinus-Reihen in die für alle Exzentrizitäten $e < 1$ konvergente Form der Mittelpunktsgleichung nach Vielfachen der mittleren Anomalie entwickelt werden[1]

[1] Siehe in Abschnitt 10.2 Band III, Formel (10.87)

$$\begin{aligned}\upsilon = \quad & M + \left(2e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin M + \\ & + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 - \cdots\right)\sin 2M + \\ & + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{192}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right)\sin 3M + \\ & + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right)\sin 4M + \\ & + \left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin 5M + \\ & + \left(\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right)\sin 6M + \\ & + \left(\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right)\sin 7M + \cdots \ .\end{aligned} \tag{22.16}$$

Da diese Reihe sehr langsam konvergiert, wird sie in der praktischen Anwendung gewöhnlich nur für kleine Exzentrizitäten eingesetzt. Für allgemeingültige bahnanalytische Untersuchungen ist sie jedoch von zentraler Bedeutung. Dies wird in den folgenden Überlegungen angedeutet.

Wenn die wahre Anomalie in einen säkular variierenden Anteil $\bar{\upsilon}$ und einen periodisch variierenden Anteil $\delta\upsilon$ zerlegt werden kann[1],

$$\upsilon = \bar{\upsilon} + \delta\upsilon \quad , \tag{22.17}$$

kann in Formel (22.16) der gesamte Anteil mit den $\sin kM$ $(k = 1, 2, \cdots)$ dem periodischen Anteil $\delta\upsilon$ zugeordnet werden. Allerdings enthält auch die mittlere Anomalie *M* periodische Anteile, die ebenfalls $\Delta\upsilon$ zugeordnet werden können. Neben der üblichen Darstellung der mittleren Anomalie bei Bezug auf eine Anfangsanomalie (wie sie durch Projektion auf eine Kreisbewegung im Rahmen der *Kepler*bewegung gedeutet werden kann[2])

$$M = M_0 + n(t)(t - t_0) \tag{22.18}$$

kann sie auch in einen mittleren (d.h. säkular variierenden) und einen periodischen Anteil aufgespalten werden:

$$M = M(t) = \overline{M}(t) + \delta M(t) \quad . \tag{22.19}$$

Dies ist entsprechend auch für die Epocheanomalie als einem eigenständigen Parameter möglich

$$M_0 = M_0(t) = \overline{M_0}(t) + \delta M_0[t, t_0] = \overline{M_0}(t_0) + (M_0)^{\cdot}_{s0}(t - t_0) + \delta M_0[t, t_0] \quad , \tag{22.20}$$

wobei auch die Schreibweise

$$\overline{M_{00}} := \overline{M_0}(t_0) \tag{22.21}$$

[1] Siehe etwa auch die formale Darstellung in Abschnitt 20.2.4.2 (Band III)

[2] Siehe in Abschnitt 14.1 (Band III)

verwendet werden kann. In der säkularen Variation der Anfangsanomalie $(M_0)^{\cdot}_s$ wird die Gesamtheit der säkularen Änderungen in M_0 zusammengefasst. Somit darf diese Größe prinzipiell nicht als eine Konstante aufgefasst werden.

n ist die *Kepler*sche mittlere Bewegung, welche mit der großen Bahnhalbachse durch die Beziehung

$$n_K := n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{22.22}$$

verknüpft ist. Diese Beziehung kann nur im Rahmen der exakten *Kepler*bewegung als eine Gesetzmäßigkeit verstanden werden. Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung mit Zeitabhängigkeit aller Parameter darf sie nur definitorisch aufgefasst werden. Um den Unterschied zu den in einer Bahnanalyse anfallenden unterschiedlichen Bewegungsbezügen herauszuarbeiten, wollen wir die *Kepler*sche mittlere Bewegung in der Schreibweise

$$n_K = n_K(t) := \sqrt{\frac{\mu}{\left(a(t)\right)^3}} \tag{22.23}$$

verwenden. In diesem Zusammenhang muss die mittlere Anomalie in der Schreibweise

$$M = M_0 + n_K(t)(t - t_0) \tag{22.24}$$

dargestellt werden. Auch die *Kepler*sche mittlere Bewegung kann im Allgemeinen periodische Anteile enthalten. Es gibt somit die Zerlegung

$$n_K = n_K(t) = \overline{n_K}(t) + \delta n_K[t,t_0] = \overline{n_K}(t_0) + \dot{n}_{Ks0}(t - t_0) + \delta n_K[t,t_0] \quad , \tag{22.25}$$

wobei der nur säkular beeinflusste Anteil $\overline{n_K}(t)$ als die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung bezeichnet werden kann. $\delta n_K = \delta n_K(t)$ ist der periodische Anteil der *Kepler*schen mittleren Bewegung. Es gelten die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} &n_K(t_0) = n_{K0} = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \ , \ \overline{n_K} = \overline{n_K}(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}^3}} \ , \\ &\overline{n_K}(t_0) = \overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \qquad\qquad \left\langle \overline{a} = \overline{a}(t) \ , \ \overline{a}_0 = \overline{a}(t_0) \quad . \right. \end{aligned} \tag{22.26}$$

Im Allgemeinen wird für die mittlere Anomalie die Darstellung mit den Formeln (22.24) und (22.20)

$$\begin{aligned} M = M(t) = \overline{M_{00}} + \left[(M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks0}(t - t_0) \right](t - t_0) + \\ + \delta n_K[t,t_0](t - t_0) + \delta M_0[t,t_0] = \bar{M} + \delta M \quad . \end{aligned} \tag{22.27}$$

erhalten. Hier definiert die Größe

$$\overline{n_a} = \overline{n_a}(t) := (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks0}(t - t_0) = (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} =: \overline{n_{a0}} + \dot{n}_{Ks}(t - t_0) \tag{22.28}$$

die säkulare Variation der mittleren Anomalie in Bezug auf das Perizentrum. Diese Größe wird daher als die *mittlere anomalistische mittlere Bewegung* bezeichnet. Die anomalistische mittlere Bewegung enthält jedoch im Allgemeinen auch periodische Anteile:

$$n_a = n_a(t) := (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \left(\dot{n}_{Ks0} + \delta n_K[t,t_0]\right)(t-t_0) = \overline{n_a} + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) \quad . (22.29)$$

Die periodischen Anteile der anomalistischen mittleren Bewegung werden im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse für Missionsauslegungen üblicherweise nicht berücksichtigt.

Mit den vorstehenden Darstellungen der mittleren Anomalie kann auch eine für eine Bahnanalyse geeignete Darstellung der wahren Anomalie im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung erhalten werden. Dazu werde die Mittelpunktsgleichung (22.16) formal dargestellt (mit Hilfe der Schreibweise (22.24)) durch

$$\upsilon = M + \Delta\upsilon_M = \bar{M} + \delta M + \Delta\upsilon_M = M_0 + n_K(t-t_0) + \Delta\upsilon_M \quad . \qquad (22.30)$$

In der Differenzformel $\Delta\upsilon_M := \upsilon - M$ sind nicht alle periodischen Anteile der Mittelpunktsgleichung zusammengefasst, da auch die mittlere Anomalie selbst periodische Anteile enthält.

Mit den vorstehenden Begriffen folgt

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t) + \delta M_0[t,t_0] + \left[\overline{n_K}(t) + \delta n_K[t,t_0]\right](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \quad . \qquad (22.31)$$

Ein Bezug auf eine Anfangsepoche t_0 kann sinnvollerweise nur dann erhalten werden, wenn die säkularen Störanteile als zeitunabhängig betrachtet werden können, d.h. wenn $(M_0)^{\cdot}_s(t) \triangleq (M_0)^{\cdot}_s(t_0)$, $\dot{n}_{Ks}(t) \triangleq \dot{n}_{Ks}(t_0)$. Dies ist bei großen Zeiträumen bzw. bei großen Bahnänderungen sicherlich nicht erlaubt. Bei kleinen Bahnänderungen sowie zur Abschätzung von Manövern zur Bahnhaltung kann diese Annahme jedoch akzeptiert werden. Dann kann die wahre Anomalie dargestellt werden in der Form

$$\begin{aligned}\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t_0) + \left[\overline{n_K}(t_0) + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0)\right](t-t_0) + \\ + \delta M_0[t,t_0] + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t)\end{aligned} \qquad (22.32)$$

bzw. mit der Bezeichnung (22.28) sowie der Definition

$$\Delta\upsilon_a = \Delta\upsilon_a(t) := \delta M_0[t,t_0] + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \qquad (22.33)$$

auch in

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t_0) + \overline{n_a}(t_0)(t-t_0) + \Delta\upsilon_a(t) \quad . \qquad (22.34)$$

In diesem Ausdruck ist in $\Delta\upsilon_a$ die Gesamtheit aller periodischen Variationen aus der Mittelpunktsgleichung (22.16) und aller periodischen Einflüsse auf die mittlere Anomalie zur Epoche t_0 sowie die *Kepler*sche mittlere Bewegung zum Zeitpunkt t zusammengefasst enthalten.

Anmerkung: Hier bedeuten die Ausdrücke der Form $\delta M_0[t,t_0], \delta n_K[t,t_0]$ usw. den Wert dieser Größe zum Zeitpunkt t bei Bezug auf die Anfangswerte zum Zeitpunkt t_0. Diese Schreibweise könnte auch für die säkularen Parameter $(M_0)^{\cdot}_s[t,t_0], \dot{n}_{Ks}[t,t_0]$ usw. verwendet werden, da im Prinzip auch diese Größen als variabel aufgefasst werden müssen. In der Praxis einer Satellitenbahnanalyse werden diese allerdings normalerweise als konstant abgesehen. ◄

Eine Näherung lautet etwa mit der Mittelpunktsgleichung (22.16)

$$\upsilon = \overline{M_{0\,0}} + \overline{n_{a\,0}}\left(t - t_0\right) + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + O\left(e^3\right) + \delta M \quad . \tag{22.35}$$

Je nach Anforderungsprofil können die periodischen Anteile δM, in welchen die periodischen Anteile der Epocheanomalie und der *Kepler*schen mittleren Bewegung enthalten sind, vernachlässigt und bei Bedarf des Einflusses höherer Potenzen der Exzentrizität einbezogen werden.

Für weitere Untersuchungen insbesondere im Vergleich zu anderen Bezügen der Satellitenbewegung wird die säkulare Abnahme $\dot{n}_{Ks}$ der *Kepler*schen mittleren Bewegung, die vor allem eine Folge des säkularen Einflusses der Luftdichte auf die Satellitenbewegung ist, vernachlässigt, bzw. es kann eine Bahnerhaltung vorausgesetzt werden. In diesem Fall ist die Verwendung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung üblich in der Form

$$\overline{n_a} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s \qquad \langle \dot{n}_{Ks} \approx 0 \quad . \tag{22.36}$$

BEISPIEL: Um einen Eindruck zu vermitteln, wie sich die wahre Anomalie von der mittleren Anomalie mit zunehmender Exzentrizität unterscheidet, wird in Bild 22-3 die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Anomalie aufgetragen. Gewählt ist die große Bahnhalbachse a = 66000 km und die Inklination i = 80°. Die Rechnung ist für Erdsatellitenbahnen unter Einschluss der kurzperiodischen Störungen durch J_2, J_3, J_4 durchgeführt worden. Allerdings ist der Einfluss der kurzperiodischen Störungen im Bild nicht erkennbar. (Zur größenordnungsmäßigen Abschätzung: für die obige Bahn mit Exzentrizität e = 0.9 ergibt sich für den maximalen Wert $\upsilon - M$ eine Abweichung von etwa 17“ zwischen den Werten mit und ohne Berücksichtigung der kurzperiodischen Störeinflüsse). ◄

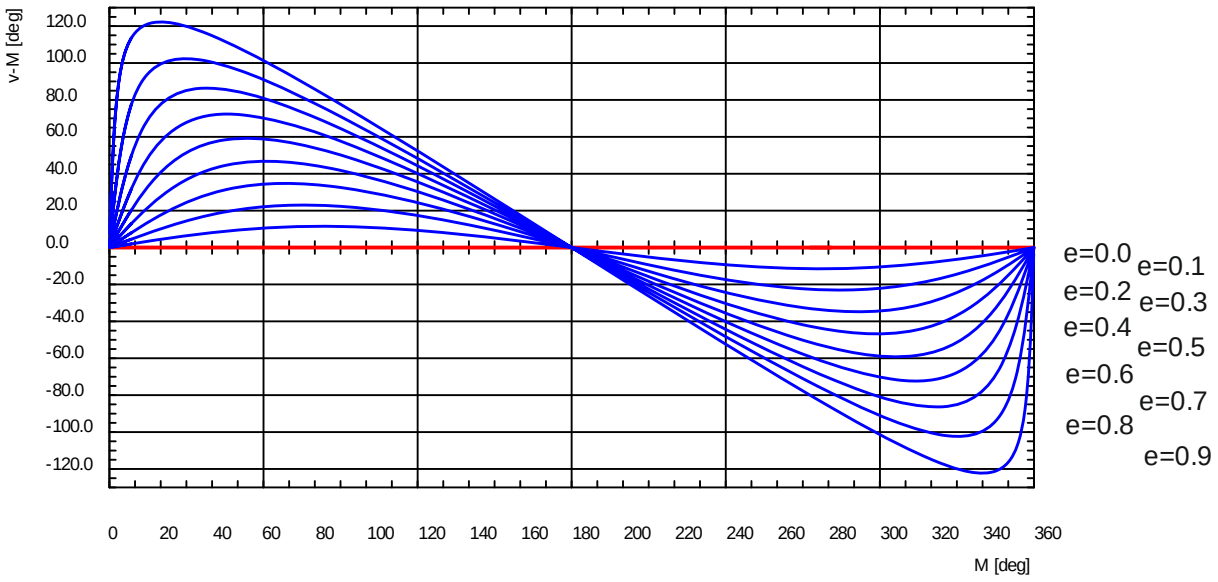


Bild 22-3: Die Differenz wahre υ – mittlere Anomalie M über der mittleren Anomalie für die große Bahnhalbachse a = 66000 km, die Inklination i = 80°, die Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9

22.2.3 Die anomalistische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten

Im Rahmen einer Bahnanalyse für Satellitenmissionen werden nur die Bewegungseinflüsse durch die ersten drei (oder fünf) zonalen Harmonischen berücksichtigt, in erster Näherung nur durch den Faktor J_2. Für erdnahe Missionen wird in einem nächsten Schritt lediglich der säkulare Einfluss durch den Luftwiderstand einbezogen.

Da die *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu / a^3}$ nach Formel (20.12) nicht durch J_2, J_3, J_4, J_5 säkular gestört wird[1], bleiben im Näherungsausdruck (22.35) lediglich die säkularen Störungen in der mittleren Epocheanomalie M_0 zu berücksichtigen.

Die säkulare Variation der mittleren Anomalie wird in einer Theorie erdnaher Satellitenbahnen bei Berücksichtigung der Einflüsse durch J_2 allein nach Formel (20.17) gegeben durch den Ausdruck

$$(M_0)^{\cdot}_{Gs0} = \frac{3}{2}\,\overline{n_{K0}}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)\,, \tag{22.37}$$

wobei die Werte $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ gegebene (eine bestimmte Bahn gegebenenfalls definierende) Anfangswerte für eine Epoche t_0 sind. Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung zur Epoche lautet $\overline{n_{K0}} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$. Damit hat die genäherte anomalistische mittlere Bewegung basierend auf der allgemeinen Formel (22.28) ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Darstellung

$$\begin{aligned}\overline{n_{a0}} &= \overline{n_{K0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{Gs} + \cdots = \\ &= \overline{n_{K0}}\left[1+\frac{3}{2}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)\,.\end{aligned} \tag{22.38}$$

Wird der säkulare Einfluss des Luftwiderstand berücksichtigt, der sich in einer säkularen Variation der großen Bahnhalbachse auf die *Kepler*sche mittlere Bewegung wegen

$$\dot{n}_K = -\frac{3}{2}\frac{n_K}{a}\,\dot{a} \tag{22.39}$$

auswirkt, lautet der mittlere Anteil

$$\overline{n_K} = \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks}\left(t-t_0\right) + \cdots = \overline{n_{K0}} - \frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s\left(t-t_0\right) + \cdots \quad \left\langle \overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0\right)^3}} \right. \,. \tag{22.40}$$

In diesem Fall wird die mittlere große Bahnhalbachse gestört

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{a}_s\left(t-t_0\right) \,. \tag{22.41}$$

Dies wirkt sich auch auf die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung aus

$$\overline{n_K} = \overline{n_K}\left(t\right) = \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks}\left(t-t_0\right) \tag{22.42}$$

---

[1] Siehe die dazugehörenden Entwicklungen in Abschnitt 20.2.1, Band II. Dort ist auch die Entwicklung höherer Ordnung einschließlich der Beeinflussung durch J_4 wiedergegeben

Mit der säkularen Variation der *Kepler*schen mittleren Bewegung bzw. der großen Halbachse

$$\dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\dot{a}_s \quad . \tag{22.43}$$

Die genäherte anomalistische mittlere Bewegung von Erdsatelliten zum Zeitpunkt t bei Bezug auf die Epoche t_0 beträgt bei Berücksichtigung der säkularen Einflüsse des Luftwiderstandes

$$\overline{n_a}(t) = \overline{n_{K0}}\left[1+\frac{3}{2}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\bar{a}_0^{\,2}\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\bar{a}_0}(t-t_0)\right]+ \\ + O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)+O\left(\overline{n_{K0}}\,\dot{a}_s^2\right). \tag{22.44}$$

Falls höhere Bewegungseinflüsse („Störungen“) wie etwa bereits durch J_4 berücksichtigt werden sollten, müssten auch alle anderen Störungen einbezogen werden, die in derselben Größenordnung liegen, also etwa auch tesserale geodynamische Formfaktoren wie J_{22}, λ_{22} , allgemeine Terme des Luftwiderstandes für erdnahe Bahnen (vor allem unter 600 km), Sonne-Mond-Attraktion usw.. Dadurch würde sich aber die Auswahl einer Nominalbahn nur unwesentlich verbessern, die Formelsysteme aber wesentlich verkompliziert und unübersichtlich werden. Für bahnanalytische Untersuchungen genügen daher in den meisten Anwendungsfällen die obigen Formeln (22.38) bzw. (22.44).

22.2.4 Näherungsweise Berechnung der Zeit aus der wahren Anomalie

Als eine Anwendung der vorstehenden Überlegungen soll aus einer vorgegebenen wahren Anomalie υ die Zeit berechnet werden, die ein Satellit benötigt, um von einer vorgegebenen Epoche t_0 zu dem Ort zu gelangen, an dem der Satellit die wahre Anomalie υ annimmt.

1. Fall: exakte *Kepler*bewegung

Im „ungestörten“ Fall, das heißt im Fall einer speziellen *Kepler*bewegung, kann für jede elliptische (und damit auch kreisnahe) Bewegung das zugehörige Zeitintervall mit den Formeln aus Abschnitt 10.1.3 (Band III) berechnet werden. Bekannt seien für eine Epoche t_0 die *Kepler*parameter große Bahnhalbachse a und Exzentrizität e, sowie die mittlere Epocheanomalie M_0. Damit sind die *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu/a^3}$ sowie die exzentrische und die mittlere Anomalie berechenbar

$$\cos E = \frac{e+\cos\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \quad , \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \quad , \; M = E - e\sin E = M_0 + n_K\left(t-t_0\right) \; . \tag{22.45}$$

Das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ zwischen der Epoche und dem Zeitpunkt t, an dem die wahre Anomalie υ angenommen wird, ist daher bekannt und der gesuchte Zeitpunkt lautet

$$t = t_0 + \frac{M - M_0}{n_K} \quad . \tag{22.46}$$

Als BEISPIEL werde die Perizentrumsdurchgangszeit t_p berechnet. Mit der vorgegebenen wahren Anomalie υ zum Zeitpunkt t_0 der Epoche lautet die mittlere Anomalie im Perizentrum $M_p = M_0 + n_K\left(t_p - t_0\right) = 0$, der Zeitpunkt des Perizentrumsdurchganges beträgt:

$$t_p = t_0 - \frac{M_0}{n_K} \quad . \tag{22.47}$$

Dieser Zeitpunkt liegt im Allgemeinen vor der Epoche. Da die Epoche gewöhnlich mit Beginn oder vor Beginn einer Ephemeride gesetzt ist, und um auch die Apozentren berechnen zu können, wird der allgemeine Ansatz gewählt

$$t_a = t_0 - \frac{M_0}{n_K} + \sigma_i \, 2\pi \quad \langle \sigma_i = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, \cdots \; . \tag{22.48}$$

Ganzzahlige Werte σ_i entsprechen dann Perizentren, die Zwischenwerte 1.5, 2.5 usw. den Apozentren nach der gegebenen Epoche. Diese Formel erfasst allerdings auch Zeitpunkte vor der Epoche, wenn den σ_i negative Werte zugeordnet werden.

2. Fall: allgemeine *Kepler*bewegung, nur säkulare „Störungen“ durch die Erdabplattung ohne Luftwiderstand:

Die zum unbekannten Zeitpunkt *t* oskulierende mittlere Anomalie $M(t)$ kann aus der vorgegebenen wahren Anomalie $\upsilon = \upsilon(t)$ aus dem Ansatz (22.31) berechnet werden. Zur Epochezeit t_0 sei die mittlere Epocheanomalie $\overline{M}_{0\,0} = \overline{M}_0(t_0)$ als ein Anfangswert bekannt, mit den mittleren Epocheparametern $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ die säkulare Variation von $\left(\dot{M}_0\right)_s$ aus Formel (22.37). Mit der genäherten wahren Anomalie $\upsilon(t)$ aus Formel (22.34) sowie der anomalistischen mittleren Bewegung aus (22.38) folgt die gesuchte Zeit aus

$$t = t_0 + \frac{\upsilon(t) - \overline{M}_0(t_0)}{\overline{n}_{a\,0}} \quad . \tag{22.49}$$

3. Fall: allgemeine *Kepler*bewegung, säkulare „Störungen“ durch die Erdabplattung und den Luftwiderstand:

Unter Vernachlässigung der periodischen Störungen wird die wahre Anomalie zum Zeitpunkt *t* mit Formel (22.31) mit Einbeziehung der säkularen Variation der großen Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes entsprechend (22.44) dargestellt durch

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M}_{0\,0} + \left[\overline{n}_{a\,0} + \dot{n}_{as}\left(t - t_0\right)\right]\left(t - t_0\right) + \cdots \quad . \tag{22.50}$$

Auflösung nach dem Zeitintervall $\left(t - t_0\right)$ ergibt

$$t = t_0 + \frac{1}{2\dot{n}_{as}}\left[-\overline{n}_{a\,0} \pm \sqrt{\left(\overline{n}_{a\,0}\right)^2 + 4\dot{n}_{as}\left(\upsilon - \overline{M}_{0\,0}\right)}\right] + \cdots \quad . \tag{22.51}$$

Um hier die Singularität für $\dot{n}_{as} \to 0$ zu vermeiden, sollte stets die alternative Lösung[1]

$$t = t_0 + \frac{2\left(\upsilon - \overline{M}_{0\,0}\right)}{\overline{n}_{a\,0} + \sqrt{\left(\overline{n}_{a\,0}\right)^2 + 4\dot{n}_{as}\left(\upsilon - \overline{M}_{0\,0}\right)}} \tag{22.52}$$

[1] Siehe etwa in PRESS, W. H. et al. [1986], ch. 5.5, p. 145, oder auch in Abschnitt 22.4.4

verwendet werden. Diese stellt eine Verallgemeinerung von Formel (22.49) dar. Falls der erste Zeitpunkt *t* nach der Epoche t_0 gewünscht wird, muss $\upsilon > \overline{M}_{0\,0}$ angenommen werden. Dazu wird eventuell $\upsilon \bmod(2\pi)$ benötigt.

Hier wird nach Formel (22.38) unter der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung zur Epoche der Ausdruck

$$\overline{n}_{a\,0} = \overline{n}_{K\,0} + \dot{M}_{0s0} \tag{22.53}$$

verstanden. Ein prinzipieller Fehler, der bei der Verwendung der Näherung

$$\dot{n}_{as} \approx \dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n}_{K\,0}}{\overline{a}_0}\dot{a}_s \tag{22.54}$$

auftreten kann, wird in der praktischen Anwendung üblicherweise vernachlässigt[1].

4. Fall: Allgemeiner Störansatz.

Der gesuchte Zeitpunkt werde mit t_F bezeichnet. Die vorgegebene wahre Anomalie lautet dann $\upsilon(t_F)$. Wenn nach einer der vorstehenden Methoden ein Näherungswert $t = t^{(0)}$ für den gesuchten Zeitpunkt t_F gefunden ist, kann durch ein Fixpunktverfahren mit der Funktion

$$fct\left(t^{(\kappa)}\right) \equiv \upsilon\left(t^{(\kappa)}\right) - \upsilon\left(t_F\right) = 0 \qquad \langle \kappa = 0,1,2,\cdots \tag{22.55}$$

bei Konvergenz der gesuchte Zeitpunkt gefunden werden. Zu jedem Zeitpunkt $t^{(\kappa)}$ wird zur Berechnung der entsprechenden wahren Anomalie $\upsilon\left(t^{(\kappa)}\right)$ das gesamte bekannte Bahnmodell eingesetzt. Numerisch sinnvoll ist die Verwendung einer überlagerten Funktion an Stelle der Fixpunktbedingung (22.55) (siehe in Abschnitt 21.3)[2].

22.3 Die überlagerte Funktion bei anomalistischen Bewegungen

Das Verfahren der überlagerten Funktion (siehe in Abschnitt 21.3) ist im Rahmen einer Bewegungsanalyse von Satellitenbewegungen von großem Interesse. Symptomatisch ist dies etwa im Fall der Untersuchung einer anomalistischen Bewegung.

BEISPIEL: Im vorstehenden Fall (Abschnitt 22.2.4) der Berechnung eines Zeitpunktes t_F zu einer vorgegebenen wahren Anomalie $\upsilon\left(t_F\right)$ können die zugehörigen trigonometrischen Funktionen $\sin\left(\upsilon\left(t_F\right)\right), \cos\left(\upsilon\left(t_F\right)\right)$ berechnet werden. Die überlagerte Funktion lautet dann

---

[1] Bei den bisherigen Herleitungen wurde stets $\dot{n}_{as} = \dot{n}_{Ks}$ angenommen. Eine Abweichung zwischen diesen beiden Größen ist zu erwarten, wenn etwa die säkulare Variation der mittleren Epocheanomalie $\left(\dot{M}_0\right)_s$ säkularen Variationen unterliegt

[2] Ein numerisches Beispiel hierzu wird in Abschnitt 22.4.4 (Beispiel 4) gegeben.

$$fct \equiv \sin\left[\upsilon(t)-\upsilon(t_F)\right]=\sin\left(\upsilon(t)\right)\cos\left(\upsilon(t_F)\right)-\cos\left(\upsilon(t)\right)\sin\left(\upsilon(t_F)\right)=0 \quad . \quad (22.56)$$

Die trigonometrischen Funktionen $\sin\left(\upsilon(t)\right), \cos\left(\upsilon(t)\right)$ werden zu jedem Zeitpunkt *t* mit dem gesamten vorgegebenen Bahnmodell im Rahmen einer Ephemeridenrechnung berechnet und stehen somit ohne zusätzlichen Rechenaufwand für das Iterationsverfahren zur Verfügung. Anmerkungen zum numerischen Verfahren werden in Abschnitt 22.4.4 gegeben.

Numerisches BEISPIEL: Gegeben sei die Bahn a = 8300 km, e = 0.2, i = 60°, Ω = 245°, ω = 156°, M_0 = 23°.456, Epoche: 2015-Sep-30/11:00:0.0. Es ist der Zeitpunkt zu berechnen, an dem der Satellit die wahre Anomalie $\upsilon = 58°$ durchläuft. Das Iterationsverfahren mit dem Anfangswert aus (22.49) ergibt die Tageszeit $t^{(0)}$ = 39947.8931 s mit der Funktionsgenauigkeit $\left|\Delta fct^{(0)}\right| = 0.00377$. Die iterative Verbesserung ergibt *t* = 39944.44 s mit der Genauigkeit $\left|\Delta fct\right| = 3.21446925\text{D-}07 \times 10^{-8}$. Der gesuchte Zeitpunkt lautet daher 2015-Sep-30/11:05:44.44. Zur Kontrolle kann die entsprechende wahre Anomalie berechnet wird. Sie beträgt für den berechneten Zeitpunkt $\upsilon = 58°.00000$, der Fehler ist somit weit unter 0“.01 .◀

22.4 Die anomalistische Umlaufzeit

Es werde die Bewegung eines Satelliten in Bezug auf das Perigäum seiner Bahn betrachtet. Als anomalistische Umlaufzeit wird die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch das Perigäum bezeichnet. Ist die Variation $\dot{\upsilon}$ der wahren Anomalie υ bekannt, beträgt die Zeitdauer zum Durchlaufen des Bahnbogens der Länge $\upsilon - \upsilon_0 = \upsilon(t) - \upsilon(t_0)$ im Allgemeinen

$$\Delta t \;=\; t \;-\; t_0 \;=\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \quad . \quad (22.57)$$

Über das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ ändert sich die wahre Anomalie entsprechend Ausdruck (22.32) bei Vernachlässigung einer Variation der großen Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes um die Winkeldifferenz

$$\Delta\upsilon \;=\; \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(t_2 - t_1\right) \;+\; n_K\left(t_2 - t_1\right) \;+\; O\left(n_K\; J_2^2\right) \;+\; \delta_p M_0\left[t_2 - t_1\right] + \;\delta_p n_K\left[t_2 - t_1\right] \;, \quad (22.58)$$

wobei die beiden δ_p – Terme die periodischen Anteile in der mittleren Epocheanomalie zusammenfassen.

22.4.1 Die wahre anomalistische Umlaufzeit

Für einen anomalistischen Umlauf ergibt sich die wahre anomalistische Umlaufzeit bezogen auf eine Epoche t_0 aus dem Integral

$$P_a \;= P_a\left(\upsilon_0\right) \;=\; P_a\left(\upsilon(t_0)\right) \;=\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+360°} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \quad . \quad (22.59)$$

Diese Darstellung bringt zum Ausdruck, dass die wahre anomalistische Umlaufzeit als Funktion des Anfangswertes $\upsilon_0 = \upsilon(t_0)$ akzeptiert werden muss, wenn t_0 ein Anfangszeitpunkt ist. Die wahre anomalistische Umlaufzeit ist daher prinzipiell keine konstante Größe.

Für das praktische Rechnen kann die Beziehung mit der überlagerten Funktion

$$fct(P_a) \equiv \sin\left[\upsilon(t_0 + P_a) - \upsilon(t_0)\right] = 0 \tag{22.60}$$

bearbeitet werden. Für das iterative Rechnen muss ein geeigneter Anfangswert $P_a^{(0)}$ bekannt sein. Als solcher empfiehlt sich im Fall von Satellitenbewegungen die *Kepler*sche Umlaufzeit

$$P_K = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} \quad . \tag{22.61}$$

Da die große Bahnhalbachse *a* von den physikalischen „Störeinflüssen“ abhängig ist, somit eine Funktion von der Zeit, was dann auch für die *Kepler*sche Umlaufzeit gilt

$$P_K = P_K(t) = 2\pi\sqrt{\left(a(t)\right)^3/\mu} \quad , \tag{22.62}$$

ist es sinnvoll, als Anfangsnäherung die „mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit“ zu wählen, die mit einer als konstant angenommenen mittleren Halbachse $\bar{a} = a(t) - \delta a(t)$ berechnet wird:

$$\overline{P_K} = 2\pi\sqrt{\bar{a}^3/\mu} \quad . \tag{22.63}$$

Falls auch die mittlere Halbachse zeitabhängig ist, kann ein mittlerer Anfangswert gewählt werden: $\bar{a}_0 = \bar{a}(t_0) = a(t_0) - \delta a(t_0)$. Dann wird $P_a^{(0)} = \overline{P_{K0}}$ gewählt mit

$$\overline{P_{K0}} = 2\pi\sqrt{\bar{a}_0^3/\mu} \quad . \tag{22.64}$$

Anmerkung: Um den Iterationsprozess zu beschleunigen, kann als Anfangswert anstelle der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit die mittlere anomalistische Umlaufzeit verwendet werden (siehe in Abschnitt 22.4.2). ◄

Die Notwendigkeit zu einer iterativen Berechnung der wahren anomalistischen Umlaufzeit ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Für die Differenz in der wahren Anomalie zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1, t_2 folgt aus der Mittelpunktsgleichung (22.16) näherungsweise

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon(t_2) - \upsilon(t_1) = M_2 - M_1 + 2\left(e_2 \sin M_2 - e_1 \sin M_1\right) + O\left(e^2\right) \quad .$$

In erster Näherung ergibt sich mit der Definition der mittleren Anomalie (vgl. die allgemeine Darstellung in Formel (22.20)) $M = M(t) = M_0(t) + n(t - t_0)$

$$\Delta\upsilon = M_0(t_2) - M_0(t_1) + n_K(t_2)(t_2 - t_0) - n_K(t_1)(t_1 - t_0) + O(e) \quad . \tag{22.65}$$

Da die mittlere *Kepler*sche Bewegung nach Formel (20.12) (Band III) durch J_2 nicht säkular gestört wird, bleiben in diesem Näherungsausdruck lediglich die säkularen Störungen in der mittleren Epocheanomalie M_0 zu berücksichtigen. Nach Formel (22.31) wird über das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta\upsilon = \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(t_2 - t_1\right) + \overline{n_K}\left(t_2 - t_1\right) + O\left(n_K\ J_2^2\right) + \\ + \delta_p M_0\left[t_2 - t_1\right] + \delta_p n_K\left[t_2 - t_1\right] + \delta_p \upsilon_M\left[t_2 - t_1\right] \quad , \tag{22.66}$$

berechnet. Die Δ_p – Terme fassen die periodischen Anteile zusammen. Entsprechend über einen wahren anomalistischen Umlauf (d.h. von Perizentrum zum darauf folgenden Perizentrum) wird

$$2\pi = \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} P_a + \overline{n_K} P_a + O\left(n_K\ J_2^2\right) + \delta_P M_0\left[P_a\right] + \delta_P n_K\left[P_a\right] + \delta_P \upsilon_M\left[P_a\right] \quad . \tag{22.67}$$

Die Herleitung zeigt, dass die wahre anomalistische Umlaufzeit P_a in allen Resttermen enthalten ist. Der genaue Wert von P_a kann daher nur iterativ aus dem Gesamtausdruck (22.67) oder direkt über die Bedingungsgleichung (22.60) erhalten werden.

22.4.2 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Luftwiderstand

Bei Vernachlässigung aller Restglieder in Gleichung (22.67) erhält man mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}$ die *mittlere anomalistische mittlere Bewegung*

$$\overline{n_a} = \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \overline{n_K} \tag{22.68}$$

und damit die *mittlere anomalistische Umlaufzeit*

$$\overline{P_a} = \overline{P_a}\left(t\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_a}} \quad . \tag{22.69}$$

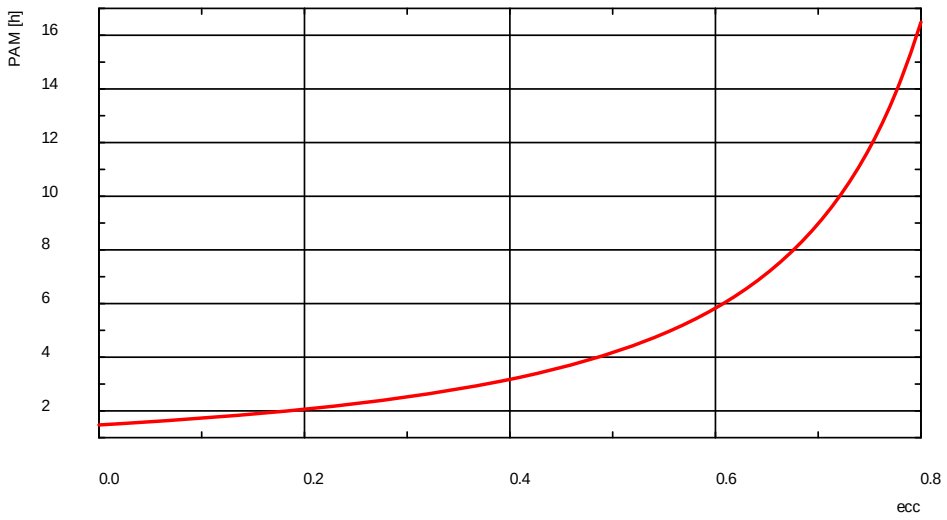


Bild 22-4: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 0.8]$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°.

Das Wort *mittlere* bezieht sich auf die Vernachlässigung aller periodischen Terme. Die säkulare Variation $\left(M_0\right)^{\cdot}_{s}$ der mittleren Epocheanomalie hängt von den mittleren Keplerelementen $\overline{a} = \overline{a}\left(t\right), \overline{e} = \overline{e}\left(t\right), \overline{i} = \overline{i}\left(t\right)$ ab, die mittlere *Kepler*sche Bewegung von $\overline{a} = \overline{a}\left(t\right)$. Da diese Größen zeitabhängig sind, ist auch die mittlere anomalistische Umlaufzeit zeitabhängig.

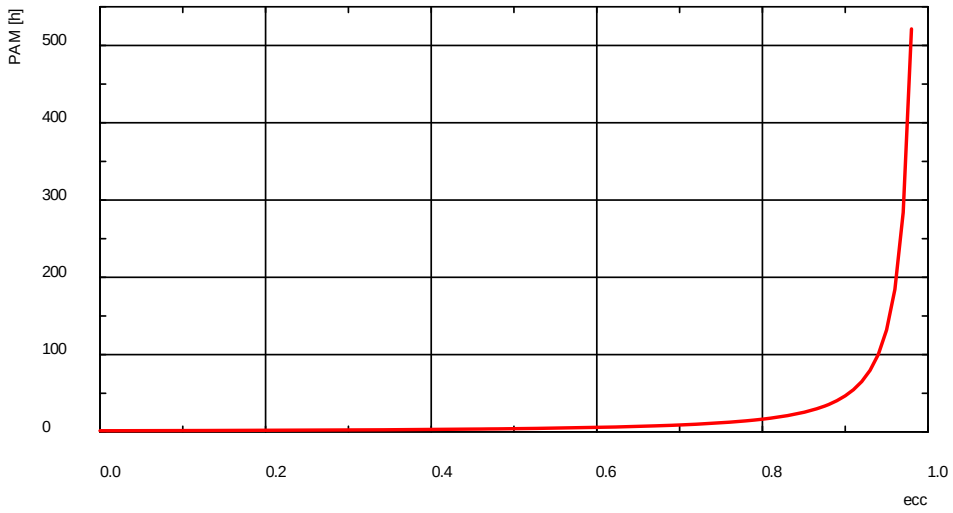


Bild 22-5: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 1.0)$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°. Man beachte, dass die untere Grenze der Umlaufzeit $\overline{P_a}(e = 0.0) = 1.47490$ h beträgt.

In der Praxis werden die spezifizierenden Begriffe gerne weggelassen, müssen aber auch in einer Bahnanalyse im Auge behalten werden, um nicht die Gültigkeit bzw. die einschränkenden Randbedingungen einer Untersuchung zu vergessen. So ist es üblich, im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse statt der mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_a}(t_0)$ zur Epoche t_0 einfach die mittlere anomalistischen Umlaufzeit in der Schreibweise $\overline{P_a} \triangleq \overline{P_a}(t_0)$ zu verwenden unter der impliziten Annahme, dass es sich um eine Größe zu einer Epoche t_0 handelt.

Es erscheint notwendig auf diese scharfen Begriffsbildungen hinzuweisen, da insbesondere der Begriff der Umlaufzeit in seinen sehr unterschiedlichen Facetten im Rahmen einer Bahnanalyse von zentraler Bedeutung ist. Eine oberflächliche Begriffsbildung kann zu falschen Folgerungen führen.

BEISPIEL: Um die Abhängigkeit der mittleren anomalistischen Umlaufzeit von der Exzentrizität der Bahn zu demonstrieren werden Bahnen untersucht, die alle die Perigäumshöhe $H_P = 200\,\text{km}$ haben. Die Inklination sei für alle untersuchten Bahnen dieselbe (im Beispiel i = 23°). Bild 22-4 zeigt den Verlauf der mittleren anomalistischen Umlaufzeit für die Exzentrizitäten von 0.0 bis 0.8 mit allmählicher Zunahme. Bild 22-5 zeigt die dramatische Zunahme der Umlaufzeit für Exzentrizitäten über 0.8. Allerdings muss beachtet werden, dass es sich bei diesen Darstellungen nur um theoretische Werte handeln kann, da bei derart hochexzentrischen Bahnen der Einfluss der Potentialterme des Erdkörpers durch die Attraktion von Sonne und Mond so übertroffen wird, dass dadurch der Verlauf der Kurve verfälscht werden wird. ◀

Der Einfluss der Inklination auf den Wert der mittleren anomalistischen Umlaufzeit ist bei der Auflösung dieser Plots nicht erkennbar. Die Abhängigkeit von der Inklination wird in Beispiel 2 in Abschnitt 22.4.4 untersucht.

Im Rahmen einer Bahnanalyse für Erdsatelliten ergibt die Näherung (22.38) einen Ausdruck erster Näherung für die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes:

$$\begin{aligned}\overline{P}_{a\,0} &= \frac{2\pi}{\overline{\dot{n}}_{a\,0}} = \frac{2\pi}{\overline{\dot{n}}_{K\,0} + \overline{(M_0)^{\cdot}}_{Gs}} + \cdots = \\ &= \frac{2\pi}{\overline{n}_{K\,0}} \left[1 - \frac{3}{2}\, J_2\, \frac{R_E^2 \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \overline{i}_0 \right) \right] + O\left(J_2^2 \right) .\end{aligned} \tag{22.70}$$

Anstelle dieses Ausdrucks zur Berechnung der mittleren anomalistischen Umlaufzeit kann auch die Bedingungsgleichung (22.60) verwendet werden, wenn als Bahnmodell nur säkulare Bewegungseinflüsse (bei Erdsatelliten die säkularen „Störungen“ durch $\left(J_2, J_4\right)$) zugelassen werden[1]. Dann liefert die Bedingungsgleichung

$$fct\left(\overline{P}_a\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + \overline{P}_a\right) - \upsilon\left(t_0\right) \right] = 0 \tag{22.71}$$

die „säkulare anomalistische Umlaufzeit“. Ein Blick auf (22.67) zeigt jedoch, dass die mittlere anomalistische Umlaufzeit aus der Beziehung

$$2\pi \mathrel{\hat{=}} \Delta\upsilon = \upsilon\left(t_0 + \overline{P}_a\right) - \upsilon\left(t_0\right) = \overline{n}_a\, \overline{P}_a \tag{22.72}$$

unter Vernachlässigung aller periodischen Bewegungseinflüsse (und in diesem Fall auch höherer Einflüsse) erhalten werden kann. Da $\sin\left(2\pi\right) = 0$ ist die Bedingung (22.71) mit der mittleren anomalistischen Umlaufzeit (22.70) erfüllt:

- *Mittlere und säkulare anomalistische Umlaufzeit sind identisch.*

22.4.3 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit Luftwiderstand

Die mittlere Anomalie wird unter Einschluss der säkularen Einflüsse durch den Luftwiderstand nach der Darstellung (22.27) mit der Variation (22.43) der mittleren *Kepler*schen Bewegung berechnet aus

$$M\left(t\right) = M_0\left(t_0\right) + \left[\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \overline{n_K}\left(t_0\right) \right]\left(t - t_0\right) - \frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n_K}\left(t_0\right)\left(t - t_0\right)^2 + \cdots \tag{22.73}$$

Für die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_a$ folgt daraus die Bedingung (unter Verwendung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.28))

$$\frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n}_{K\,0}\, \overline{P}_{a\,0}^2 - \overline{n}_{a\,0}\, \overline{P}_{a\,0} + 2\pi = 0 \tag{22.74}$$

somit

$$\overline{P}_{a\,0} = \frac{\overline{a}_0}{3\dot{a}_s\, \overline{n}_{K\,0}} \left[\overline{n}_{a\,0} \pm \sqrt{\left(\overline{n}_{a\,0}\right)^2 - 12\pi\, \frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n}_{K\,0}} \right] \quad . \tag{22.75}$$

---

[1] Siehe zum Vergleich die entsprechenden Herleitungen und Begriffsbildung in Abschnitt 21.4

Während die Bedingungsgleichung (22.74) allgemein gültig ist, ist die Auflösung nach $\overline{P_a}$ in (22.75) nur dann erlaubt, wenn $\dot{a}_s \neq 0$ angenommen werden kann. Da die Umlaufzeit eine positive Größe ist, muss das Vorzeichen vor der Wurzel entsprechend gewählt werden:

$$\begin{aligned} \dot{a}_s > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vorzeichen: } +1 \\ \dot{a}_s < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vorzeichen: } -1 \quad . \end{aligned} \tag{22.76}$$

Nach NUMERICAL RECIPES[1] kann die Lösung der quadratischen Gleichung (22.74) mit der formalen Darstellung $Ax^2 + Bx + C = 0$ mit den Koeffizienten $A = 3\dot{a}_s \overline{n_{K\,0}} \,/\left(2\overline{a}_0\right)$, $B = -\overline{n_{a\,0}}$, $C = 2\pi$ und der Größe

$$Q := -\frac{1}{2}\left[B + \operatorname{sgn}\left(B\right)\sqrt{B^2 - 4AC} \right]$$

in der Form $x_1 = Q / A$, $x_2 = C / Q$ gefunden werden. Im aktuellen Fall führt die erste Lösung auf eine Singularität, wenn $\dot{a}_s \to 0$ angenommen wird. Es bleibt somit die zweite sicher singularitätenfreie Lösung

$$\overline{P_a} = \frac{4\pi}{\overline{n_{a\,0}} + \sqrt{\left(\overline{n_a}\right)_0^2 - 12\,\pi\,\dot{a}_s \dfrac{\overline{n_{a\,0}}}{\overline{a}_0}}} \quad . \tag{22.77}$$

Diese Darstellung ist die natürliche Erweiterung der Basisbeziehung (22.69) im Hinblick auf den Luftwiderstand.

22.4.4 Zur numerischen Berechnung im Rahmen der anomalistischen Bewegung

Zur Lösung der Bedingungsfunktion (22.60) mit einem Verfahren der sukzessiven Approximation

$$P_a^{(\kappa+1)} = P_a^{(\kappa)} - \frac{\operatorname{fct}\left(P_a^{(\kappa)}\right)}{\dfrac{d\,\operatorname{fct}\left(P_a^{(\kappa)}\right)}{dP_a^{(\kappa)}}} \tag{22.78}$$

wird die Ableitung der Bedingungsfunktion

$$\frac{d\,\operatorname{fct}\left(P_a^{(\kappa)}\right)}{dP_a^{(\kappa)}} = \cos\left[\upsilon\left(t_1 + P_a\right) - \upsilon\left(t_1\right)\right]\frac{d\upsilon}{dP_a} \tag{22.79}$$

[1] PRESS, W. H. et al. [1986], ch. 5.5, p. 145

benötigt. Als Startwert für die Iteration kann die mittlere anomalistische Umlaufzeit (22.69) verwendet werden, oder eventuell auch die oskulierende anomalistische Umlaufzeit (22.110) auf Seite 58.

Die hier benötigte Ableitung der wahren Anomalie nach der wahren anomalistischen Umlaufzeit P_a als unabhängiger Variablen kann berechnet werden mit

$$\frac{d\upsilon}{dP_a} = \frac{d\upsilon}{dE}\frac{dE}{dM}\frac{dM}{dP_a} \quad . \tag{22.80}$$

Die einzelnen Differentialquotienten werden mit Hilfe der Formeln des Zweikörperproblems erhalten:

$$\begin{aligned} \cos\upsilon &= \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \\ M &= E - e\sin E \\ M &= M(t_1) + n_K (t - t_1) \\ M_1 &:= M(t_1) \\ M_2 = M(t_2) &:= M(t_1 + P_a) = E_2 - e_2 \sin E_2 = M_1 + n_K(t_2) P_a \quad . \end{aligned} \tag{22.81}$$

Der Index 2 bezieht sich auf das Ende des betrachteten Zeitintervalls $t_2 = t_1 + P_a$, wofür der Anfangszeitpunkt t_1 konstant festgehalten wird. Der zu berechnende Differentialquotient muss daher die exakte Schreibweise annehmen

$$\frac{d\upsilon_2}{dP_a} = \frac{d\upsilon_2}{dE_2}\frac{dE_2}{dM_2}\frac{dM_2}{dP_a} \tag{22.82}$$

mit $\upsilon_2 = \upsilon(t_2), E_2 = E(t_2), e_2 = e(t_2),\ n_{K2} = n_K(t_2) = \sqrt{\mu / a(t_2)}$. Damit folgen im Einzelnen[1] mit den Formeln (15.20) und (15.47)

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon_2}{dE_2} &= \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial E_2}\right|_{(e,E)} + \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial e_2}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial e_2}{\partial E_2}\right|_{(\upsilon,E)} \\ \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial E_2}\right|_{(e,E)} &= \frac{1 + e_2\cos\upsilon_2}{\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{\sqrt{1-e_2^2}}{1 - e_2\cos E_2} \\ \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial e_2}\right|_{(e,E)} &= \frac{\sin\upsilon_2}{1-e_2^2} = \frac{\sin E_2}{\sqrt{1-e_2^2}\,(1 - e_2\cos E_2)} \\ \left.\frac{\partial e_2}{\partial E_2}\right|_{(\upsilon,E)} &= -\frac{1-e_2^2}{\sin E_2} \quad , \end{aligned} \tag{22.83}$$

mit den Formeln (15.29) und (15.44)

[1] Wegen der hier verwendeten spezifischen Schreibweise der partiellen Ableitungen siehe in Kapitel 15, Band III

$$\begin{aligned}
\frac{dE_2}{dM_2} &= \left.\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\right|_{(e,M)} + \left.\frac{\partial E_2}{\partial e_2}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial e_2}{\partial M_2}\right|_{(E,M)} \\
\left.\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\right|_{(e,M)} &= \frac{1+e_2\cos\upsilon_2}{1-e_2^2} = \frac{1}{1-e_2\cos E_2} \\
\left.\frac{\partial E_2}{\partial e_2}\right|_{(e,M)} &= \frac{\sin\upsilon_2}{\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{\sin E_2}{1-e_2\cos E_2} \\
\left.\frac{\partial e_2}{\partial M_2}\right|_{(E,M)} &= -\frac{1}{\sin E_2} \qquad .
\end{aligned} \tag{22.84}$$

Um den Differentialquotienten der mittleren Anomalie am Ende des P_a – Intervalls zu berechnen, wird auf die Darstellung (22.27) für die mittlere Anomalie zum Endpunkt des betrachteten Intervalls zurückgegriffen:

$$\begin{aligned}
M_2 = M\left(t_2\right) = \overline{M_0}\left(t_1\right) + \left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\left(t_1\right) + \overline{n_K}\left(t_1\right) + \dot{n}_{Ks}\left(t_1\right) P_a \right] P_a + \\
+ \delta n_K\left(t_1 + P_a\right) P_a + \delta M_0\left(t_1 + P_a\right) = \\
= \overline{M_{0\,1}} + n_a\, P_a + \delta M_0\left(t_1 + P_a\right) \quad .
\end{aligned} \tag{22.85}$$

Da $\overline{M_0}\left(t_1\right)$ von P_a unabhängig ist, ebenso $\overline{n_a}$ und $\dot{n}_{Ks}$, bleibt

$$\frac{dM_2}{dP_a} = \overline{n_a} + 2\,\dot{n}_{Ks}\, P_a + \frac{\partial\left(\Delta M_0\left(t_2\right)\right)}{\partial P_a} \qquad . \tag{22.86}$$

Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung können die Abhängigkeiten *E* bzw. *M* von *e* sowie der periodischen Variationen der mittleren Epocheanomalie nur näherungsweise oder gar nicht explizit erhalten werden. Verzichtet man auf sie, wird die sukzessive Approximation (22.78) nicht als *Newton*sches Verfahren mit quadratischer Konvergenz sondern als vereinfachtes *Newton*sches Verfahren mit geringerer Konvergenz erhalten[1]. Dann bleiben, wenn noch auf die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse (auf Grund etwa des Luftwiderstandes) verzichtet werden kann,

$$\begin{aligned}
\frac{d\upsilon_2}{dE_2} &\approx \frac{\partial\upsilon_2}{\partial E_2} = \frac{\sqrt{1-e_2^2}}{1-e_2\cos E_2} \\
\frac{dE_2}{dM_2} &\approx \frac{\partial E_2}{\partial M_2} = \frac{1}{1-e_2\cos E_2} \\
\frac{dM_2}{dP_a} &\approx \overline{n_a} \qquad .
\end{aligned} \tag{22.87}$$

Gewöhnlich wird im Verlauf der Iteration der Differentialquotient $d\,\mathrm{fct}\left(P_a\right)/dP_a$ nur schwach verändert, so dass er nur einmal berechnet und dann für den ganzen Iterationsprozess unverändert verwendet werden kann.

[1] Siehe hierzu etwa in STUMMEL, F. UND HAINER, K. [1971], p.37 u.a.

Der Konvergenzradius der so definierten sukzessiven Approximation ist erfahrungsgemäß oft so klein, dass die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a}$ nicht als Anfangswert genügen kann. Für jede in der wahren Anomalie υ periodische Bahn muss die wahre anomalistische Umlaufzeit P_a existieren. In diesem Fall ist es zielführender, P_a mit einer linearen Interpolation zu berechnen. Diese ist zwar numerisch aufwendiger, da sie einen häufigeren Funktionsaufruf $\mathrm{fct}\left(P_a\right)$ erfordert. Allerdings ist dieses Verfahren numerisch stabil und muss daher immer zum Ziel führen, sofern nur die Schrittweite hinreichend klein gewählt werden kann.

Anmerkung: Eine wesentliche Einschränkung beim Rechnen mit der anomalistischen Bewegung ist bei kreisnahen Bahnen gegeben als Folge der dann unpräzisen Positionierung der Apsiden: für Exzentrizitäten etwa $e < 0.01$ ist erfahrungsgemäß eine Berechnung der wahren anomalistischen Umlaufzeit und anderer mit der anomalistischen Bewegung zusammenhängenden Größen nicht sinnvoll. ◀

Zur a-priori Genauigkeitsabschätzung verwendet man mit der Bedingungsfunktion (22.60) mit der vorgegebenen Fehlergröße ΔP_a die Differenzengleichung

$$\Delta fct\left(P_a\right) = \frac{dfct\left(P_a\right)}{dP_a}\Delta P_a \quad . \tag{22.88}$$

Die Fehlergröße ΔP_a kann mit Hilfe der wahren anomalistischen mittleren Bewegung n_a und der Definition der wahren anomalistischen Umlaufzeit

$$P_a = \frac{2\pi}{n_a} \tag{22.89}$$

sowie mit den Bahnparametern $El_k\ \left[k = 1,6\right]$ und „Störparametern“ $S_k\left[k = 1,2,\cdots\right]$ aus

$$\Delta P_a = -\frac{2\pi}{n_a^2}\left[\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial n_a}{\partial El_k}\Delta El_k \ + \ \sum_k \frac{\partial n_a}{\partial S_k}\Delta S_k\right] \tag{22.90}$$

berechnet werden. Aus

$$n_a \approx \overline{n_a} \approx \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \cdots = \overline{n_K}\left(1 + \frac{\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\overline{n_K}} + \cdots\right) \tag{22.91}$$

folgt

$$\frac{\partial n_a}{\partial El_k} = \frac{\partial n_K}{\partial El_k} + \frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\partial El_k} + \cdots \quad \langle k = 1,2,\ldots 6 \quad . \tag{22.92}$$

Im Fall, dass die El_k die *Kepler*-Elemente seien und wenn $\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ durch die Formel (22.37) bekannt sei, ergeben sich die partiellen Ableitungen näherungsweise zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_a}{\partial a} &= -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_K}}{a}\left(1+\frac{\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\overline{n_K}}+\cdots\right)+\frac{3}{2}\frac{\overline{}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^3\left(1-e^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2 i\right)+\cdots \\
\frac{\partial n_a}{\partial e} &= -\frac{15}{4}\frac{\overline{}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^3}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2 i\right)+\cdots \\
\frac{\partial n_a}{\partial i} &= -\frac{9}{2}\frac{\overline{}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\sin i\cos i+\cdots \\
\frac{\partial n_a}{\partial J_2} &= \frac{3}{2}\frac{\overline{}}{n_K}\frac{R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2 i\right)+\cdots \quad .
\end{aligned} \tag{22.93}$$

Wie zu erwarten wird der Hauptanteil einer Variation in P_a durch eine Variation in der großen Bahnhalbachse *a* verursacht. Im erdnahen Bereich wirken sich die Schwankungen in *a* um einige Kilometer mit Variationen im Sekundenbereich in P_a aus.

BEISPIEL 1: Berechne die wahre anomalistische Umlaufzeit der Bahn

a = 8300.000, e = 0.2, i = 60°.0, Ω = 33°.0, ω = 221°.0, M_0 = 125°.0

zur Epoche t_0: 2015-09-25/11:30:0.00.

Der hier vorgegebenen großen Bahnhalbachse entspricht die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = 7525.374528\,\mathrm{s}$. Die mittlere anomalistische Umlaufzeit auf dieser Bahn beträgt nach Formel (22.69) $\overline{P_a} = 7526.333512\,\mathrm{s}$. Zur Durchführung der Fixpunktiteration sei die Genauigkeitsschranke $\Delta P_a = 0.001\mathrm{s}$ vorgegeben. Die Ableitung der Bedingungsfunktion $fct\left(P_a\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0+P_a\right)-\upsilon\left(t_0\right)\right] = 0$ beträgt

$$\frac{dfct\left(P_a\right)}{dP_a} = 0.6323911981499\times 10^{-3}\left[\frac{1}{s}\right] \quad .$$

Nach Beziehung (22.88) hat die Bedingungsfunktion somit die (a-priori-) Schranke $\Delta fct\left(P_a\right) = 0.6323911981499\times 10^{-6}$. (Diese Schranke kann in der Praxis auch separat vorgegeben werden). Zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (im Beispiel $\left(t_1 = t_0\right)$) hat der Satellit die wahre Anomalie $\upsilon_1 = 141°.2111556944$. Für den Beginn der Iteration wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit als Anfangswert vorgegeben. Dies führt am Ende des $\overline{P_a}-$Intervalls auf die wahre Anomalie $\upsilon_2^{(0)} = 141°.2110603476$ mit der Bedingungsfunktion $\left|fct\left(\overline{P_a}\right)\right| = 0.1664114750666\times 10^{-5}$. Da diese geringfügig über der Schranke $\Delta fct\left(P_a\right)$ liegt, ist ein Iterationsschritt erforderlich, der auf die wahre anomalistische Umlaufzeit $P_a = 7526.336382805\,\mathrm{s}$ führt. Die zugehörende wahre Anomalie beträgt dann $\upsilon_2^{(1)} = 141°.2111647428$ mit der Bedingungsfunktion $\left|fct\left(\overline{P_a}\right)\right| = 0.1579249895856\times 10^{-6}$, die somit den berechneten Grenzwert unterscheidet. Die a-posteriori Untersuchung der Position in der Bahn beträgt $\Delta\upsilon = \left|\upsilon_2^{(1)}-\upsilon_1\right| = 0°.000009048 \mathrel{\hat{=}} 0''.033$. Dieser Wert dürfte der Genauigkeit

des verwendeten Bahnmodells (säkulare, lang- und kurzperiodische Einflüsse des Erdfeldes mit den Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4) entsprechen.◀

BEISPIEL 2: Um die Abhängigkeit der wahren anomalistischen Umlaufzeit (bezogen auf die Epoche t_0) von der Inklination zu untersuchen wird dieselbe Bahn wie in Beispiel 1 verwendet, jedoch mit den Inklinationen $i \in \left[0°, 180°\right)$. Die Ergebnisse werden in Tabelle 22-1 zusammengefasst[1]: Wahre und mittlere anomalistische Umlaufzeit werden wesentlich durch die Inklination beeinflusst. Im Beispiel hat der Satellit die mittlere Bahngeschwindigkeit 6.9 km/s. Die Abweichungen bis zu 12 Sekunden als Folge unterschiedlicher Inklinationen können bei deren Vernachlässigung zu erheblichen Fehlern führen. Der Unterschied zwischen der mittleren und der wahren anomalistischen Umlaufzeit ist im Beispiel sehr gering. Dies deutet darauf hin, dass für bahnanalytische Untersuchungen die Verwendung der mittleren anomalistischen Umlaufzeit für die meisten Anwendungen ausreichend ist. Auf Grund der Tatsache, dass die Inklination in den relevanten Entwicklungen (die säkulare Variation in der mittleren Epocheanomalie (22.37) sowie den Ausdrücken für die periodischen Variationen in Kapitel 20, Band III) nur in Quadraten der trigonometrischen Funktionen vorkommen, sind die Ausdrücke für die Inklinationen *i* und 180°-*i* identisch.

Im Beispiel wird auch die *Hansen*sche Umlaufzeit entsprechend den Berechnungen in Abschnitt 21.4 mit angezeigt. Die säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit wird erhalten, wenn im verwendeten Bahnmodell lediglich die säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch die zonalen Harmonischen $\left(J_2, J_4\right)$ berücksichtigt werden, die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit bei Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells unter Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse durch $\left(J_2, J_3, J_4, \text{ohne Luftwiderstand}\right)$. ◀

BEISPIEL 3: Es soll der Verlauf der wahren anomalistischen Umlaufzeit über einen Umlauf untersucht werden. Dazu werde dieselbe Bahn wie in Beispiel 1 verwendet. Wie Tabelle 22-1 zeigt, sind die Unterschiede zwischen der wahren und der mittleren anomalistischen Umlaufzeit quantitativ sehr gering. Um trotzdem zu der vermuteten Variation des Betrages der wahren anomalistischen Umlaufzeit über einen (anomalistischen) Umlauf zu kommen, wird die Differenz

$$\Delta P := P_a - \overline{P_a}$$

untersucht. Um Rundungsfehler bei der numerischen Berechnung zu vermeiden, mussten die Genauigkeitsgrenzen gegenüber denen in Beispiel 2 erheblich verschärft werden: $\Delta P_a = 0.0001\text{s}$, $\Delta fct\left(P_a\right) = 1.0\times10^{-8}$. Mit diesen Werten konnte die in Bild 22-6 wiedergegebene obere Kurve (1) erhalten werden. Für eine weitere Analyse werden in diesem Bild die unterschiedlichen Auswirkungen der Bewegungseinflüsse durch die einzelnen Potentialterme J_2, J_3, J_4 demonstriert. Die qualitativen Unterschiede sind bemerkenswert und zeigen, dass die Einflüsse der kurzperiodischen „Störungen“ sehr unterschiedlich ausfallen können. Das Beispiel zeigt jedoch auch, dass die Unterschiede im Verlauf der wahren anomalistischen Umlaufzeit im Millisekundenbereich liegen können. Insgesamt gesehen müssen die kurzperi-

[1] Bei dem hier verwendeten Bahnmodell ist der Fall einer rückläufigen Äquatorbahn (*i*=180°) nicht definiert. Dieser Fall könnte berücksichtigt werden, wenn wie in den Abschnitten 11.4 und 11.6 der Faktor $\sigma_i = \text{sgn}(\cos i)$ verwendet wird und entsprechend die Formeln des Bahnmodells variiert werden.

odischen „Störungen“ im Falle einer Missionsanalyse im Zusammenhang mit der anomalistischen Bewegung daher normalerweise nicht notwendig berücksichtigt werden. ◀

Inklination *i*	Säkulare *Hansen*-sche Umlaufzeit	wahre *Hansen*-sche Umlaufzeit	Mittlere anomalistische Umlaufzeit	wahre anomalistische Umlaufzeit
0°	7507.421843 s	7507.416331 s	7517.697574 s	7517.697574 s
10°	7508.235745 s	7508.230233 s	7518.044938 s	7518.053542 s
20°	7510.574563 s	7510.570889 s	7519.045059 s	7519.059400 s
30°	7514.159037 s	7514.157200 s	7520.577123 s	7520.592614 s
40°	7518.557413 s	7518.555576 s	7522.456129 s	7522.469329 s
50°	7523.238725 s	7523.236888 s	7524.455302 s	7524.463913 s
60°	7527.638938 s	7527.635263 s	7526.333512 s	7526.336383 s
70°	7531.225249 s	7531.221575 s	7527.864356 s	7527.861484 s
80°	7533.565905 s	7533.564068 s	7528.863404 s	7528.857085 s
90°	7534.377970 s	7534.376132 s	7529.210344 s	7529.202876 s
100°	7533.565905 s	7533.564068 s	7528.863404 s	7528.857085 s
110°	7531.225249 s	7531.223412 s	7527.864356 s	7527.860335 s
120°	7527.638938 s	7527.637101 s	7526.333512 s	7526.333512 s
130°	7523.238725 s	7523.236888 s	7524.455302 s	7524.461617 s
140°	7518.557413 s	7518.553739 s	7522.456129 s	7522.467033 s
150°	7514.159037 s	7514.153526 s	7520.577123 s	7520.591467 s
160°	7510.574563 s	7510.565377 s	7519.045059 s	7519.058253 s
170°	7508.235745 s	7508.222884 s	7518.044938 s	7518.052395 s
179°	7507.431029 s	7507.421843 s	7517.701083 s	7517.701083 s

Tabelle 22-1: Beispiel für die Abhängigkeit der wahren *Hansen*schen sowie der mittleren und wahren anomalistischen Umlaufzeit von der Bahninklination für Bahnen mit a = 8300 km, e = 0.2

BEISPIEL 4: Berechnung des ersten Perigäums nach einer Epoche. Diese Aufgabe besteht in der Berechnung des ersten Zeitpunktes, an dem die wahre Anomalie den Wert $0° = \upsilon_F = \upsilon(t_F) \bmod (2\pi)$ annimmt. Wir verwenden für die erste Näherung die Formel (22.48). Die iterative Verbesserung unter Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells verwendet als Bedingungsfunktion die überlagerte Funktion

$$fct \equiv \sin\upsilon = 0 \quad .$$

Als numerisches Beispiel werde wieder die Bahn von Beispiel 1 verwendet mit der Epoche t_0: 2015-09-25/11:30:0.00. Die Tageszeit in Sekunden ist $t_0 = 41400\,\mathrm{s}$. Die zugehörige wahre Anomalie beträgt $\upsilon_0 = 141°.20$. Die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt nach Formel

(22.69) $\overline{P_a} = 7526.333512\,\mathrm{s}$. Formel (22.48) liefert mit $\sigma_i = +1$ als erste Näherung für den gesuchten Zeitpunkt des ersten Perigäums $t_P^{(0)} = 46312.397\,\mathrm{s}$ mit der wahren Anomalie $\upsilon^{(0)} = 359°.954$. Iterative Verbesserung führt auf den Zeitpunkt 46313.023 s, die zugehörige wahre Anomalie beträgt 360°.00000, was im Rahmen des verwendeten Bahnmodells als ausreichend genau betrachtet werden sollte. Die hier besprochene Aufgabenstellung dient als Vorbereitung zur Berechnung der Folge der Apsiden (siehe im folgenden Beispiel).◀

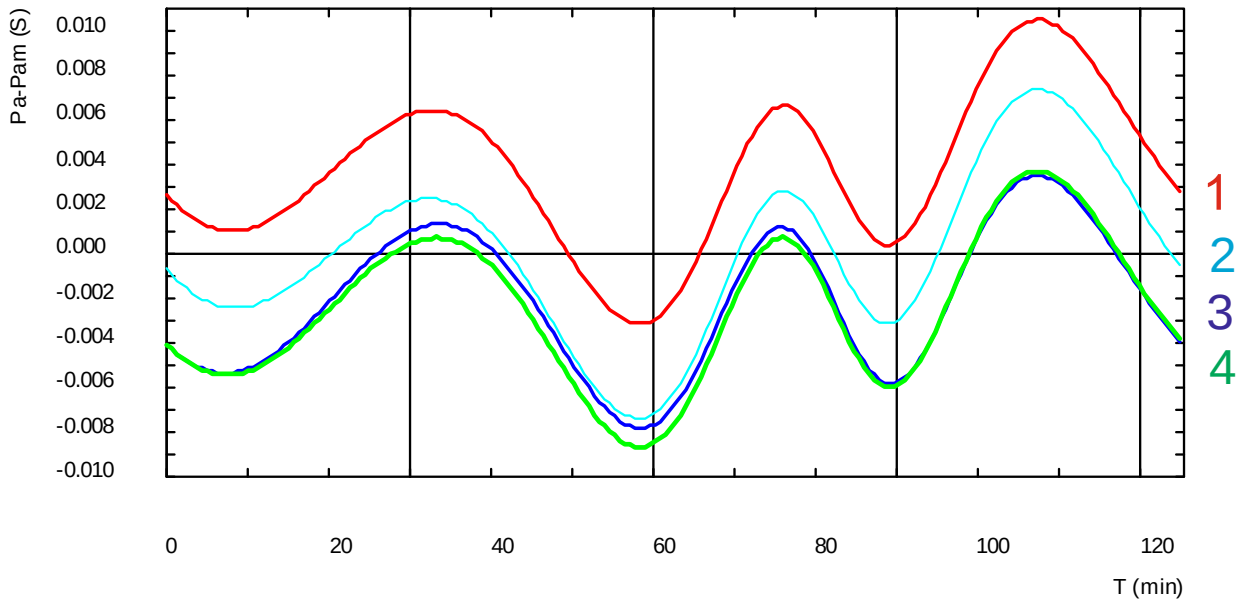


Bild 22-6: Verlauf der Differenz zwischen wahrer und mittlerer anomalistischer Umlaufzeit für die Erdsatellitenbahn a=8300 km, e = 0.2, i = 60°, bezogen auf die Epoche t_0, über einen (anomalistischen) Umlauf unter Berücksichtigung unterschiedlicher Bahnmodelle. Kurve 1 (rot): komplettes analytisches Bahnmodell, Kurve 2 (hellblau): ohne J_4, Kurve 3 (blau): nur mit J_2, Kurve 4 (grün): mit J_2 und J_4, ohne J_3.

BEISPIEL 5: Fortlaufende Berechnung der Apsiden: Gegeben sei eine hochexzentrische Bahn. Die Folge der Apsiden und ihrer geographischen und inertialen Positionen ist zu berechnen.

Im Beispiel wird die Transferbahn des Satelliten Symphonie A nach Start mit einer Delta-Rakete von der ETR (Cape Canaveral) gegeben. Die Bahn wird durch die mittleren Einschussbahnelemente definiert:

Epoche: 1974-12-19/03:12:0.0 (UTC)

Höhe des Apogäums: H_A = 38138.138 km

Höhe des Perigäums: H_P = 397.932

Inklination : i = 13°.27

Östliche geographische Länge des ersten (nominellen, d.h. vor der Epoche liegenden) absteigenden Knotens: $\lambda_{\mathfrak{V}} = 359°.5$

Argument des Perigäums : ω=179°.798

Mittlere Epocheanomalie : M_0 = 4°.11

P|A|	N|	M|	YEAR	MO	DA	HO	MI	SE	L(deg)	P(deg)	H(km)	AR(deg)	DE(deg)
|A|	0|	0|	1974	12	19	8	44	44.295|	95.962|	-0.008|	38138.138|	314.718|	-0.008|
P| |	1|	0|	1974	12	19	14	25	15.094|	190.673|	-0.029|	397.932|	134.791|	-0.029|
|A|	1|	0|	1974	12	19	20	5	45.893|	285.385|	0.066|	38138.138|	314.864|	0.066|
P| |	2|	0|	1974	12	20	1	46	16.692|	20.096|	-0.103|	397.932|	134.936|	-0.102|
|A|	2|	0|	1974	12	20	7	26	47.490|	114.807|	0.139|	38138.138|	315.009|	0.139|
P| |	3|	1|	1974	12	20	13	7	18.289|	209.518|	-0.177|	397.932|	135.081|	-0.176|
|A|	3|	1|	1974	12	20	18	47	49.088|	304.230|	0.213|	38138.138|	315.154|	0.213|
P| |	4|	1|	1974	12	21	0	28	19.887|	38.941|	-0.252|	397.932|	135.227|	-0.250|
|A|	4|	1|	1974	12	21	6	8	50.685|	133.652|	0.287|	38138.139|	315.299|	0.287|
P| |	5|	2|	1974	12	21	11	49	21.484|	228.363|	-0.326|	397.933|	135.372|	-0.324|
|A|	5|	2|	1974	12	21	17	29	52.283|	323.075|	0.361|	38138.139|	315.445|	0.361|
P| |	6|	2|	1974	12	21	23	10	23.081|	57.786|	-0.400|	397.933|	135.517|	-0.398|
|A|	6|	2|	1974	12	22	4	50	53.880|	152.497|	0.435|	38138.139|	315.590|	0.435|
P| |	7|	3|	1974	12	22	10	31	24.679|	247.208|	-0.474|	397.933|	135.663|	-0.471|
|A|	7|	3|	1974	12	22	16	11	55.478|	341.920|	0.509|	38138.140|	315.735|	0.508|
P| |	8|	3|	1974	12	22	21	52	26.276|	76.631|	-0.549|	397.934|	135.808|	-0.545|
|A|	8|	3|	1974	12	23	3	32	57.075|	171.342|	0.583|	38138.140|	315.881|	0.582|
P| |	9|	4|	1974	12	23	9	13	27.874|	266.053|	-0.623|	397.935|	135.953|	-0.619|
|A|	9|	4|	1974	12	23	14	53	58.672|	0.765|	0.657|	38138.141|	316.026|	0.656|
P| |	10|	4|	1974	12	23	20	34	29.471|	95.476|	-0.697|	397.935|	136.099|	-0.693|
|A|	10|	4|	1974	12	24	2	15	0.270|	190.187|	0.730|	38138.141|	316.171|	0.730|
P| |	11|	5|	1974	12	24	7	55	31.069|	284.898|	-0.771|	397.936|	136.244|	-0.767|
|A|	11|	5|	1974	12	24	13	36	1.867|	19.610|	0.804|	38138.142|	316.317|	0.803|
P| |	12|	5|	1974	12	24	19	16	32.666|	114.321|	-0.846|	397.937|	136.389|	-0.840|
|A|	12|	5|	1974	12	25	0	57	3.465|	209.032|	0.878|	38138.143|	316.462|	0.877|
P| |	13|	6|	1974	12	25	6	37	34.264|	303.744|	-0.920|	397.937|	136.535|	-0.914|
|A|	13|	6|	1974	12	25	12	18	5.062|	38.455|	0.952|	38138.144|	316.607|	0.951|
P| |	14|	6|	1974	12	25	17	58	35.861|	133.166|	-0.994|	397.938|	136.680|	-0.988|
|A|	14|	6|	1974	12	25	23	39	6.660|	227.878|	1.025|	38138.145|	316.753|	1.024|
P| |	15|	7|	1974	12	26	5	19	37.458|	322.589|	-1.068|	397.939|	136.826|	-1.061|
|A|	15|	7|	1974	12	26	11	0	8.257|	57.300|	1.099|	38138.146|	316.898|	1.098|
P| |	16|	7|	1974	12	26	16	40	39.056|	152.011|	-1.142|	397.940|	136.971|	-1.135|
|A|	16|	7|	1974	12	26	22	21	9.855|	246.723|	1.173|	38138.147|	317.044|	1.172|

Tabelle 22-2: Die Abfolge der Apsiden und ihrer Positionen bezüglich der Erdoberfläche für eine Transferbahn in eine geostationäre Sollbahn (Beispiel Symphonie A)

Daraus ergeben sich die mittleren *Kepler*elemente:

Große Bahnhalbachse : $\bar{a}_0 = 25646.172$ km

Exzentrizität : $\bar{e}_0 = 0.73578634$

Inklination : $\bar{i}_0 = 13°.27$

Rektaszension des aufsteigenden Knotens: $\bar{\Omega}_0 = 314°.83971666$

Argument des Perigäums : $\bar{\omega}_0 = 179°.79800000$

Mittlere mittlere Epocheanomalie : $\overline{M_{00}} = 4°.11$

Die entsprechenden Umlaufzeiten betragen:

Mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit : $\overline{P_{K0}} = 40873.780316\ \mathrm{s} \triangleq 11^h\ 21^m\ 13^s.780316$

Mittlere anomalistische Umlaufzeit : $\overline{P_{a0}} = 40861.597445\ \mathrm{s} \triangleq 11^h\ 21^m\ 1^s.597445$

In Tabelle 22-2 wird die Folge der Apsiden in Bezug auf die Erdoberfläche sowie im inertialen Raum dargestellt:

Es bedeuten:

P – Perigäum

A – Apogäum

N – Anzahl der anomalistischen Umläufe

M – Anzahl der Umläufe der Apsidenlinie (ungefähr Anzahl der Tage)

Zeit in U.T.

L - geographische Länge (östlich) [Grad]

P – geodätische Breite [Grad]

H – Höhe über dem mittlerem Äquator [km]

AR – Rektaszension [Grad]

DE – Deklination [Grad].

Die Projektion dieser Bahn auf die Erdoberfläche über die ersten 6 anomalistischen Umläufe ist in Bild 22-7 wiedergegeben. ◀

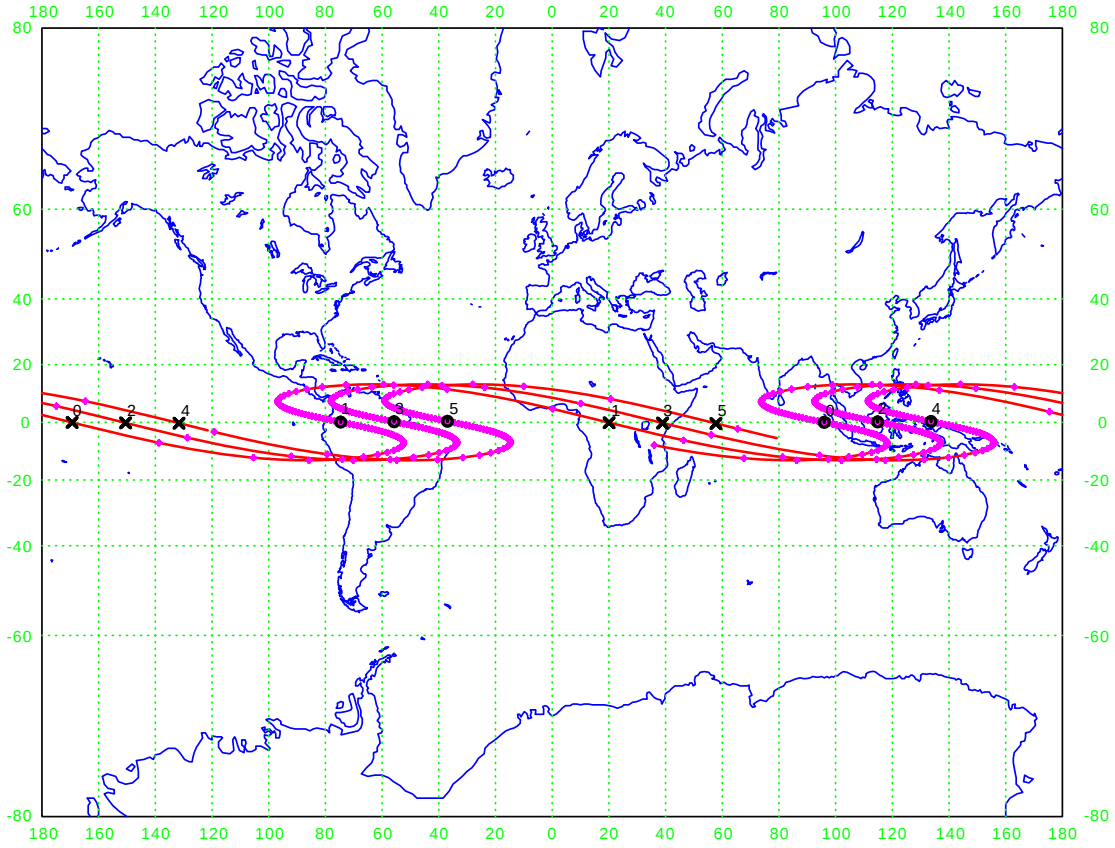


Bild 22-7: Die ersten 6 anomalistischen Umläufe der Transferbahn des Satelliten Symphonie-A in die geostationäre Bahn mit Kennzeichnung der Apsiden: X für Perigäum, O für Apogäum

22.4.5 Die oskulierende anomalistische Umlaufzeit

Neben den analytischen Darstellungen der mittleren anomalistischen Umlaufzeit (22.69) bzw. (22.77) wird die wahre anomalistische Umlaufzeit durch numerische Verfahren ermittelt. Im Rahmen einer Bahnanalyse kann jedoch auch eine näherungsweise hinreichend genaue analytische Darstellung von Interesse sein. Die (vermutlich) erste Darstellung geht auf *I. D. Zhon-*

golovich[1] zurück, der für kleine Exzentrizitäten einen analytischen Ausdruck erster Ordnung hergeleitet hat (mit der Genauigkeit $O\left(e^2\right)$). Diese Arbeit ist ein Musterbeispiel mit welcher Sorgfalt auch analytische Näherungsausdrücke hergeleitet werden müssen.

Eine für alle Exzentrizitäten gültige Form der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit wurde unter Berücksichtigung des Einflusses von J_2 von *Moe* und *Karp*[2] gefunden. Eine allgemeingültige Formel unter Berücksichtigung der zonalen Harmonischen $J_n\left(n \geq 2\right)$, die insbesondere auch für hochexzentrische Bahnen gültig ist, wurde von *E. A. Roth* gefunden[3]. Auf diese Arbeit wird in diesem Abschnitt hingewiesen.

22.4.5.1 Die Variationsgleichungen der Keplerelemente in Abhängigkeit von der wahren Anomalie

Da in der anomalistischen Bewegung die wahre Anomalie als Bahnwinkel betrachtet wird, muss die im Folgenden benötigte Integration über der wahren Anomalie durchgeführt werden. Hierzu werden die Variationsgleichungen für die große Halbachse, die Exzentrizität und die wahre Anomalie benötigt, die in der *Gauß*schen Form[4] verwendet werden. Mit der radialen Beschleunigung b_{R2}, die sich „störend“ auf die „ungestörte“ Zweikörperbewegung auswirkt, sowie der transversalen Beschleunigung b_T und dem Flächenparameter, der im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung die Darstellung $G = \sqrt{\mu p}$ hat, erhält man für die große Halbachse unter Verwendung der Formeln (11.82) und (11.80)

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\upsilon} = \frac{\dot{a}}{\dot{\upsilon}} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{d\upsilon} = \frac{2a^2 r^2}{G^2} \frac{b_{R2} e \sin\upsilon + b_T\left(1 + e\cos\upsilon\right)}{1 + \frac{r^2}{e\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T \sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right]} = \\ = \frac{2a^2 r^2}{G^2}\left[b_{R2} e\sin\upsilon + b_T\left(1 + e\cos\upsilon\right)\right]\left\{1 - \frac{r^2}{e\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right) + \cdots\right]\right\} \end{aligned} \tag{22.94}$$

Da die Beschleunigungen b_{R2} und b_T im Fall von Erdsatelliten nach den Ausdrücken[5] (17.33)-(17.35) von der Größenordnung $\left(O\left(10^{-3}\right)\right)$ sind, sowie nach Linearisierung von Exzentrizität und Kegelschnittparameter $p = a\left(1 - e^2\right)$ um den mittleren Epochewert, erhält man in erster Näherung die Variationsgleichung[6]

---

[1] ZHONGOLOVITCH, I. D. [1960]. Diese Arbeit wird diskutiert in Abschnitt 2.10.8, Band I

[2] MOE, M. M. and KARP, E. E. [1961]: 'Effect of Earth's Oblateness on the Anomalistic Period of a Satellite', *ARS J.* 31, 1462 (zitiert nach ROTH, E. A. [1981], p.86)

[3] E. A. ROTH [1981]

[4] zusammengestellt in Kapitel 11.1.5 (Band III), siehe hierzu auch Abschnitt 11.13

[5] In Kapitel 17.2.2 (Band III)

[6] Die Variationen nach der wahren Anomalie finden sich bereits (vielleicht erstmals) bei *H. G. L. Krause* (in Arbeiten zwischen 1951 bis 1956) (siehe z.B. in Abschnitt 2.9.4 (Band I))

$$\frac{da}{d\upsilon} = \frac{2\,\overline{p}_0^3}{\mu\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{\overline{e}_0 \sin\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} b_{R2} + \frac{b_T}{1+\overline{e}_0\cos\upsilon}\right] + \cdots \quad . \tag{22.95}$$

Hieraus wird durch Integration die Lösung in erster Ordnung als Funktion der wahren Anomalie υ erhalten:

$$a^{(1)} = a^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{a}_0 + \Delta a^{(1)} = \overline{a}_0 + \Delta a^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{a}_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{da}{d\upsilon} d\upsilon \quad . \tag{22.96}$$

Als Integrationskonstante wird hier der „ungestörte“ mittlere Ausgangswert $\overline{a}_0$ gesetzt.

In gleicher Weise folgt für die Exzentrizität mit dem Ausdruck[1] (11.72)

$$\frac{de}{d\upsilon} = \frac{\overline{p}_0^3}{\mu}\left[\frac{\sin\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} b_{R2} + \frac{\overline{e}_0 + 2\cos\upsilon + \overline{e}_0\cos^2\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^3} b_T\right] + \cdots \tag{22.97}$$

somit das Integral erster Ordnung mit dem konstanten Anfangswert $\overline{e}_0$

$$e^{(1)} = e^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{e}_0 + \Delta e^{(1)} = \overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{e}_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{de}{d\upsilon} d\upsilon \quad . \tag{22.98}$$

Um nun die oskulierende anomalistische Umlaufzeit in erster Ordnung zu erhalten, muss das Zeitintegral über einen Umlauf der wahren Anomalie integriert werden:

$$P_a = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{1}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{22.99}$$

Die *Gauß*sche Variationsgleichung der wahren Anomalie (11.80) ergibt in erster Näherung

$$\frac{1}{\dot{\upsilon}} = \frac{dt}{d\upsilon} = \frac{r^2}{G} + \frac{\overline{p}_0^4}{\overline{e}_0\,\mu\sqrt{\mu\,\overline{p}_0}}\left[-\cos\upsilon\, b_{R2} + \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{\overline{p}_0}\right) b_T\right] + \cdots \quad . \tag{22.100}$$

Die Integration kann für die beiden Komponenten getrennt durchgeführt werden, da nur im zweiten Anteil die „Störgrößen“ b_{R2}, b_T enthalten sind, während der erste Anteil ohne direkten Anteil dieser Größen von erster Integrationsordnung ist. Dazu wird

$$\frac{dt}{d\upsilon} = \frac{dt_1}{d\upsilon} + \frac{dt_2}{d\upsilon} \tag{22.101}$$

gesetzt. Das zweite Integral erfolgt mit dem Flächenparameter $\overline{G}_0 = \sqrt{\mu\,\overline{p}_0}$ und der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{K\,0}} = 2\pi\sqrt{\overline{a}_0^3/\mu}$ über der Differentialgleichung

$$\frac{dt_2}{d\upsilon} = \frac{\overline{p}_0^2\sqrt{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}}{\overline{e}_0\,\mu}\frac{\overline{P_{K\,0}}}{2\pi}\left[-\frac{\cos\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^4} b_{R2} + \frac{\sin\upsilon\left(2+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^5} b_T\right] + \cdots \tag{22.102}$$

und ergibt das Integral

[1] Band III

$$\Delta P_{a2} = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{dt_2}{d\upsilon} d\upsilon \quad . \tag{22.103}$$

Zur Bearbeitung der ersten Komponente

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{r^2}{G} \quad , \tag{22.104}$$

die nicht (direkt) von den „Störgrößen“ b_{R2}, b_T abhängt und daher ungenähert gelöst werden muss, müssen die Lösungen $a^{(1)}$ und $e^{(1)}$ der Integrale über die Differentialgleichungen (22.95) und (22.97) verwendet werden. Um die entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, wird mit den Lösungen (22.96) und (22.98) der Ausdruck verwendet

$$\frac{r^2}{G} = \frac{\left(p^{(1)}\right)^2}{\sqrt{\mu\, p^{(1)}}\left(1+e^{(1)}\cos\upsilon\right)^2} = \frac{\left(\overline{p}_o + \Delta p^{(1)}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}\left[1+\left(\overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\right)\cos\upsilon\right]^2} \quad . \tag{22.105}$$

Für den Kegelschnittparameter gilt mit der Beziehung $\overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right)$ die Zerlegung

$$p = p^{(1)} = \overline{p}_0 + \Delta p^{(1)} = \left(\overline{a}_0 + \Delta a^{(1)}\right)\left[1-\left(\overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\right)^2\right] \approx \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right) + \left(1-\overline{e}_0^2\right)\Delta a^{(1)} - 2\overline{a}_0\overline{e}_0\,\Delta e^{(1)} \quad . \tag{22.106}$$

Damit wird schließlich

$$\frac{r^2}{G} = \frac{\left(\overline{p}_0\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\left\{1+\frac{3}{2\,\overline{a}_0}\Delta a^{(1)} - \frac{3\overline{e}_0 + \left(2+\overline{e}_0^2\right)\cos\upsilon}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)}\Delta e^{(1)}\right\} \quad . \tag{22.107}$$

Dieser Ausdruck zerfällt in zwei unterschiedliche Anteile. Der erste Anteil kann entsprechend der Integraltafel in Anhang D2 sofort integriert werden und ergibt die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit zur Epoche

$$\frac{\left(\overline{a}_0\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{d\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} = \overline{P_{K0}} \quad . \tag{22.108}$$

Der zweite Anteil führt auf das Integral

$$\Delta P_{a1} = \frac{\overline{P_{K0}}\sqrt{\left(1-\overline{e}_0\right)^3}}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \left\{\frac{3}{2\overline{a}_0\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\Delta a^{(1)} - \frac{3\overline{e}_0 + \left(2+\overline{e}_0^2\right)\cos\upsilon}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^3}\Delta e^{(1)}\right\} d\upsilon \quad . \tag{22.109}$$

Das Gesamtergebnis lautet

$$P_a = \overline{P_{K0}} + \Delta P_{a1} + \Delta P_{a2} \quad . \tag{22.110}$$

Mit bekannten Lösungen $\Delta a^{(1)}, \Delta e^{(1)}$ können die Integrale (22.103) und (22.109) mit Hilfe der vollständigen Integrale gelöst werden, die in Anhang D2 (Band V) zusammengestellt sind.

22.4.5.2 Die Lösung der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit nach E. A. Roth

Mit den zonalen Harmonischen J_n sowie den *Legendre*-Polynomen $P_n\left(\sin i \cdot \sin\omega\right)$ erhält *Roth* (nach langwierigen Rechnungen[1]) die allgemeine Lösung

$$\Delta P_{a1} + \Delta P_{a2} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[3\, J_n\, \overline{P_{K\,0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^n \frac{P_n\left(\sin i \cdot \sin\omega\right)}{\left(1-\overline{e}_0\right)^{n+1}} + C_n\, J_n\, \overline{P_{K\,0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^n \frac{f_n\left(\sin i, \sin\omega\right)}{e^{\sigma_e}\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)^{n-3/2}} \right] =: \tag{22.111}$$

$$=: \sum_{n=2}^{\infty}\left[\Delta t_{1n} + \Delta t_{2n}\right] \quad .$$

Hier ist der Faktor C_n eine Konstante, f_n ist eine Funktion der beiden (getrennten) Argumente $\sin i$ und $\sin\omega$, wobei *i* und ω als oskulierende Parameter aufzufassen sind. Außerdem ist $\sigma_e = 0$ für geradzahlige *n* und $\sigma_e = 1$ für ungeradzahlige *n*.

Im Fall *n*=2 verschwindet f_2 identisch und es bleibt in diesem Fall für die oskulierende anomalistische Umlaufzeit

$$P_a\left(J_2;\omega\right) = \overline{P_{K\,0}} - \frac{3}{2} J_2\, \overline{P_{K\,0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^2 \frac{1-3\sin^2 i\, \sin^2\omega}{\left(1-\overline{e}_0\right)^3} \quad . \tag{22.112}$$

Dieser Ausdruck ist für alle Exzentrizitäten mit $0 < e < 1$ definiert. Man vergleiche diesen Ausdruck mit dem von *I. D. Zhongolovich* gefundenen Ausdruck (2.434), der nur für kleine Exzentrizitäten bis zur Ordnung e^2 gültig ist[2].

Für die Fälle $n \geq 3$ sind nach *Roth* folgende Fälle zu unterscheiden:

(I) Für etwa $0.8 < e < 1$ wird $\left(1-e\right)^{n+1} \ll e^{\sigma_e}\left(1-e^2\right)^{n-3/2}$ somit $\Delta t_{1n} \gg \Delta t_{2n}$, d.h. der zweite Anteil im Ausdruck (22.111) kann vernachlässigt werden.

(II) Für $0.1 < e < 0.5$ und $0 < e < 0.1$ wird bei geradzahligem *n*

$\left(1-e\right)^{n+1} \sim \left(1-e^2\right)^{n-3/2}$, somit $\Delta t_{1n} \sim \Delta t_{2n}$.

(III) Für $0.1 < e < 0.05$ wird bei ungeradzahligem *n*

$\left(1-e\right)^{n+1} \gg e\left(1-e^2\right)^{n-3/2}$, somit $\Delta t_{1n} \ll \Delta t_{2n}$.

Kritische Anmerkung: Bei der Herleitung der Differentialgleichungen (22.102) und (22.107) wurden infolge der Linearisierung Fehler der Größenordnung J_2^2 vernachlässigt. Da die höheren zonalen Harmonischen $J_n\left(n \geq 3\right)$ von dieser Größenordnung sind, können die Aussagen über die Anteile in der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit mit $n \geq 3$ nur als unvollständige analytisch interessierende Aussagen bewertet werden. ◀

---

[1] Die Rechnungen können nachgelesen werden in: ROTH, E. A. [1970]: 'A Method an a Computer Program for the Quick Determination of a Preliminary Launch Window for Satellites with Moderate-to-Highly Eccentric Orbits', ESRO SR-15, Paris (zitiert nach ROTH, E. A. [1981], p.86)

[2] Abschnitt 2.10.8, Band I

22.5 Kleine Bewegungsänderungen im Erdgravitationsfeld

Geschlossene analytische Ausdrücke, die für Überblicks- und Langzeituntersuchungen vorteilhaft sind, sind nur mit eingeschränkter Genauigkeit und in eingeschränktem Umfang bekannt, wie die Formulierungen im vorhergehenden Kapitel zeigen. Das mit diesen Formeln beschreibbare Bahnverhalten weicht nach einiger Zeit vom wahren Bahnverhalten in einem Maß ab, das für bestimmte Untersuchungen nicht mehr tolerierbar ist. Diese Abweichungen werden als „kleine Bahnänderungen“ bezeichnet, wenn sie die analytisch erfassbare „Sollbahn“ nur in größeren Zeiträumen (Tage, Wochen) etwas verändern. Sie haben ihre Ursachen in den höheren Einflüssen durch die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers, langfristige Variationen durch den Luftwiderstand, Attraktionen anderer Himmelskörper und weiterer kleiner Effekte. Diese Einflüsse müssen mit Näherungsformeln abgeschätzt oder aus numerischen Rechnungen gemittelt werden können. Sie müssen bei Langfristuntersuchungen berücksichtigt werden. Sie helfen auch bei der Abschätzung von Bahnkorrekturen, die zum Erhalt einer analytisch gewählten Sollbahn dienen. In beiden Anwendungen kann die numerisch ermittelte Bahn, die alle kurzperiodischen Variationen enthält, nicht oder nur mit unnötig großem Aufwand für generelle Aussagen herangezogen werden.

22.5.1 Partialausdrücke der allgemeinen Keplerbewegung

Analytische Ephemeridenrechnungen über lange Zeiträume, Genauigkeitsabschätzungen und manche Verbesserungsmethoden benötigen Partialausdrücke der analytisch dargestellten Bahnparameter. Es ist nicht sinnvoll, einen kompletten Vorrat dieser Ausdrücke hier zusammenzustellen, von denen dann erfahrungsgemäß nur ein kleiner Teil benötigt wird. Für gewisse Langzeituntersuchungen sind freilich die Partialausdrücke zumindest erster Ordnung in J_2 in den mittleren Bahnelementen unentbehrlich. Sie werden deshalb hier zusammenfassend hergeleitet. Bei langfristigen Untersuchungen müssen Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt werden. Gewöhnlich genügen Korrekturen 2. Ordnung, wie in den Formeln dieses Kapitels behandelt.

Es wird angenommen, dass die wichtigsten Variationen in den Epoche-Bahnelementen $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$, $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{M}_{00}$ und eventuell auch in den säkularen Störkoeffizienten, insbesondere in $\dot{a}_s$, $\dot{e}_s$ und $(i)^{\cdot}_s$, bekannt seien. Allerdings kann im Allgemeinen nicht angenommen werden, dass die gegebenen Variationen nicht von der Zeit unabhängig seien. Die folgenden Formeln gelten daher nicht in voller Allgemeinheit. Es müssen gegebenenfalls feinere Untersuchungen angestellt werden als sie mit diesen Formeln möglich sind. Die Variationen in den Epocheelementen sind in der Regel nicht konstant. Typische Beispiele sind die Einflüsse des Luftwiderstandes, der vor allem dem 11-jährigen Sonnenzyklus mit unterschiedlichen Maxima unterworfen ist sowie Einflüsse durch Sonnen- und Mondgravitation mit ihren Perioden von einem Jahr bzw. einem Monat.

22.5.1.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Die mittlere Rektaszension des aufsteigenden Knotens hat die Entwicklung um den mittleren Wert zur Epoche des aufsteigenden Knotens

$$\bar{\Omega} \;=\; \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_{s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\Omega}_{s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.113}$$

mit $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(t)$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(t_0)$, wenn säkulare Veränderungen in den Epocheelementen, dargestellt etwa durch die Ausdrücke $\dot{a}_{s0}$, $\dot{e}_{s0}$, $(i)^{\cdot}_{s0}$, $\dot{\Omega}_{s0}$, $\dot{\omega}_{s0}$, $\dot{M}_{0s0}$, berücksichtigt werden müssen. Die Variation der Epocheknotendrift lautet

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega}_{s0} \;=\;& \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{e}_0}\,\dot{e}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{i}_0}\,(i)^{\cdot}_{s0} + \\ &+ \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{\Omega}_0}\,\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{\omega}_0}\,\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{M}_{00}}\,(M_0)^{\cdot}_{s0} \quad .\end{aligned} \tag{22.114}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\dot{\Omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.115}$$

In diesem Fall lauten die Partialausdrücke erster Ordnung

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{a}_0} \;=\; \frac{21}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.116}$$

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{e}_0} \;=\; -6\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\,\bar{e}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\cos\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.117}$$

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{i}_0} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.118}$$

Die Variation des säkularen Variationskoeffizienten $\dot{\Omega}_{s0G}$ in erster Ordnung durch die Anisotropie des Schwerefeldes das Zentralkörpers lautet daher

$$\ddot{\Omega}_{Gs0} \;=\; -\frac{3}{4}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\overline{n_{K0}}}{p_0^2}\left\{\cos\bar{i}_0\left[-\frac{7}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{8\,\bar{e}_0}{1-\bar{e}^2}\,\dot{e}_{s0}\right] - 2\sin\bar{i}_0\,(i)^{\cdot}_{s0}\right\} + O\left(J_2^2\right) . \tag{22.119}$$

22.5.1.2 Argument des Perizentrums

Das mittlere Argument des Perizentrums hat die allgemeine Darstellung

$$\bar{\omega} \;=\; \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_{s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\omega}_{s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.120}$$

und

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{s0} \;=\;& \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{e}_0}\,\dot{e}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{i}_0}\,(i)^{\cdot}_{s0} + \\ &+ \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{\Omega}_0}\,\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{\omega}_0}\,\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{M}_{00}}\,(M_0)^{\cdot}_{s0} \quad .\end{aligned} \tag{22.121}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1

$$\dot{\omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2\, \frac{1-5\cos^2 \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right)$$

und daher

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{Gs0}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, \frac{J_2\, R_E^2}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.122}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{Gs0}}{\partial \bar{e}_0} = -3\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, \frac{J_2\, R_E^2\, \bar{e}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.123}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{Gs0}}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{15}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, \frac{J_2\, R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 \sin\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.124}$$

Der säkulare Variationskoeffizient $\dot{\omega}_{s0G}$ beschreibt in erster Ordnung die Drift infolge der Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers

$$\ddot{\omega}_{Gs0} = -\frac{3}{4}\, J_2\, R_E^2\, \frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{p}_0^2}\left\{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left[-\frac{7}{2\,\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{4\,\bar{e}_0}{1-\bar{e}_0^2}\,\dot{e}_{s0}\right] - 10\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0\,(i)^{\cdot}_{s0}\right\} + O\left(J_2^2\right). \tag{22.125}$$

22.5.1.3 Mittlere Epoche-Anomalie

In der Definitionsgleichung der mittleren Anomalie

$$M = M_0 + \int_{t_0}^{t} n_K\, dt \tag{22.126}$$

werde die hier verwendete *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu / a^3}$ zerlegt in

$$n_K = \overline{n_{K0}} + \left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot}(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot\cdot}(t-t_0)^2 + \ldots + \delta n_K \quad . \tag{22.127}$$

Der periodische Anteil δn_K werde herausgemittelt, so dass sich für die mittlere mittlere Anomalie der Ausdruck

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \overline{n_{K0}}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot}(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.128}$$

ergibt. Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_{K0}}$ zur Epoche t_0 wird mit Hilfe des 3. *Kepler*schen Gesetzes

$$\mu = \overline{n_{K0}}^2\, \bar{a}_0^3 \tag{22.129}$$

auf die mittlere Halbachse $\bar{a}_0$ zur Epoche bezogen, so dass ihre Variation

$$\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot} \;=\; -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} \tag{22.130}$$

ergibt. Wird in der Variation der Epochehalbachse nur der säkulare Anteil $\dot{a}_s$ berücksichtigt

$$\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} \;=\; \dot{a}_s + \delta\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} \quad , \tag{22.131}$$

hat die mittlere mittlere Anomalie die Entwicklung

$$M \;=\; \bar{M}_0 + \overline{n_{K0}}\,(t-t_0) - \frac{3}{4}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.132}$$

Die mittlere mittlere Epocheanomalie $\bar{M}_0$ wird üblicherweise als ein Bahnparameter („*Kepler*element“) verwendet, weshalb die Schreibweise

$$\overline{M_0} := \bar{M}_0 \tag{22.133}$$

sinnvoll ist. Sie lässt sich selbst um einen Epochewert entwickeln

$$\overline{M_0} \;=\; \overline{M_{00}} + \dot{M}_{0s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{M}_{0s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.134}$$

Dies führt auf die allgemeine Darstellung der mittleren mittleren Anomalie

$$\bar{M} \;=\; \overline{M_{00}} + \left(\overline{n_{K0}} + \dot{M}_{0s0}\right)(t-t_0) + \left(-\frac{3}{4}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{1}{2}\,\ddot{M}_{0s0}\right)(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.135}$$

Die Variation der Drift der mittleren Epocheanomalie lautet

$$\begin{aligned}\ddot{M}_{0s0} \;=\;& \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{e}_0}\,\dot{e}_{s0} + \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{i}_0}\left(i\right)^{\cdot}_{s0} + \\ &+ \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{\Omega}_0}\,\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{\omega}_0}\,\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \bar{M}_{00}}\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \ldots\end{aligned} \tag{22.136}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1

$$\dot{M}_{0Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{22.137}$$

und daher

$$\frac{\partial \dot{M}_{0Gs0}}{\partial \bar{a}_0} \;=\; \frac{21}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.138}$$

$$\frac{\partial \dot{M}_{0Gs0}}{\partial \bar{e}_0} \;=\; -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.139}$$

$$\frac{\partial \dot{M}_{0Gs0}}{\partial \bar{i}_0} \;=\; -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.140}$$

Nach dem Muster der in diesem Kapitel hergeleiteten Variationsgleichungen werden weitere Formeln im Zusammenhang mit den speziellen Aufgabenstellungen der nächsten Kapitel hergeleitet.

22.5.2 Genauigkeitsabschätzungen für Erdsatelliten

Für eine Genauigkeitsabschätzung erster Ordnung der Variationen der Bahnparameter Ω, ω, M_0 können die in Abschnitt 22.5.1 (ab Seite 60) hergeleiteten Variationen angewandt werden. Die Abschätzungen gelten jeweils unter der Annahme, dass die höheren Einflüsse („Störungen“) klein gegenüber den Einflüssen durch J_2 sind und daher gegenüber diesen Abschätzungen vernachlässigt werden können.

22.5.2.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Um einen Fehler in der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens wegen der Funktionalität (22.115) auf Fehler in den Parametern a, e, i zurückführen zu können, wird der Ansatz

$$\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right) = \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.141}$$

verwendet. Zur Übersichtlichkeit kann die Definition

$$B_2 := \frac{3}{2}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \tag{22.142}$$

eingeführt werden. Damit folgt

$$\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right) = B_2\left\{\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a - 4\frac{\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\Delta e + \frac{\sin\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i\right\} + \cdots \tag{22.143}$$

Für Erdsatelliten können folgende numerische Abschätzungen durchgeführt werden. Zunächst wird

$$B_{2_{\oplus}} = 4.170886113\times 10^7\,\frac{\mathrm{km}^3\sqrt{\mathrm{km}}}{s} \tag{22.144}$$

erhalten. Wird als untere Grenze für eine Erdsatellitenbahn die Bahnhöhe H=200 km zugelassen, gelten die Abschätzungen $\bar{a}_0 \geq \overline{r_{P0}} = \bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0\right) \geq R_E + 200\,\mathrm{km}$. Damit können obere Grenzen für die hier verwendeten Parameter abgeschätzt werden:

$$\left|\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right| = \left|\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^2\sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^2\overline{r_{P0}}^2}\right| \leq \frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\overline{r_{P0}}^4\sqrt{\overline{r_{P0}}}} \leq 2.3\times 10^{-17}\ \mathrm{km}^{-4.5} \tag{22.145}$$

$$\left|\frac{4\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\right| = \frac{4\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^3\overline{r_{P0}}^3} \leq \frac{4}{\overline{r_{P0}}^3\sqrt{\overline{r_{P0}}}} \leq 1.7\times 10^{-13}\ \mathrm{km}^{-3.5} \tag{22.146}$$

$$\left|\frac{\sin \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right| = \frac{\left|\sin \bar{i}_0\right|}{\bar{a}_0 \sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^2 \bar{r}_{P0}^2} \le \frac{1}{\bar{r}_{P0}^3 \sqrt{\bar{r}_{P0}}} \le 4.3\times 10^{14}\ \mathrm{km}^{-3.5} \tag{22.147}$$

Es ergibt sich für Erdsatelliten die Abschätzung

$$\left|\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)\right| \le 9.6\times 10^{-6}\left|\Delta a\right| + 7.1\times 10^{-6}\left|\Delta e\right| + 1.8\times 10^{-6}\left|\Delta i\right| \quad \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{22.148}$$

- *Der Fehler in der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens hängt ausschließlich von der Größenordnung der Fehler in den Keplerelementen a, e und i ab.*

Mit den obigen Werten kann im Fall von Erdsatelliten die Größenordnung der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens in erster Ordnung nach oben abgeschätzt werden:

$$\left|\dot{\Omega}_{Gs0}\right| = \left|-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{\cos \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right| \le \frac{B_2}{\sqrt{\bar{r}_{P0}^7}} \le 1.8\times 10^{-6}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{22.149}$$

22.5.2.2 Argument des Perizentrums

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, kann nach Abschnitt 20.2.1 das Argument des Perigäums als Funktion der *Kepler*elemente *a*, *e*, *i* aufgefasst werden:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) &= -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{1-5\cos^2 \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) = \\ &= \frac{1}{2} B_2 \frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) \ .\end{aligned} \tag{22.150}$$

Mit dem Ansatz

$$\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right) = \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.151}$$

lautet die Variation

$$\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right) = \frac{1}{2} B_2 \left\{-\frac{7}{2}\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a + \frac{4\bar{e}_0\left(5\cos^2 \bar{i}_0 - 1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\Delta e - \frac{10\sin \bar{i}_0 \cos \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i\right\} + \cdots \tag{22.152}$$

Die entsprechende Abschätzung ergibt (wie im vorhergehenden Abschnitt) mit der Perizentrumsdistanz r_P

$$\left|\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)\right| \le \frac{1}{2} B_2 \left\{\frac{14}{\bar{r}_{P0}^4 \sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta a + \frac{16}{\bar{r}_{P0}^3 \sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta e + \frac{5}{\bar{r}_{P0}^3 \sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta i\right\} \tag{22.153}$$

und im Fall von Erdsatelliten die obere Abschätzung

$$\left|\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)\right| \le 1.92\times10^{-9}\left|\Delta a\right| + 2.9\times10^{-5}\left|\Delta e\right| + 9.03\times10^{-6}\left|\Delta i\right| \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \quad . \tag{22.154}$$

Die Größenordnung in erster Ordnung der Variation des Argumentes des Perigäums kann nach oben abgeschätzt werden zu:

$$\left|\dot{\omega}_{Gs0}\right| = \left|-\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2\, \frac{1-5\cos^2\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right| \le \frac{2B_2}{\sqrt{r_{P0}^7}} \le 3.6\times10^{-6}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \quad . \tag{22.155}$$

22.5.2.3 Mittlere Epoche-Anomalie

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, kann nach Abschnitt 20.2.1 auch die mittlere Epocheanomalie als Funktion der *Kepler*elemente *a, e, i* aufgefasst werden:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{0Gs0} = \text{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) &= -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2\, \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}B_2\, \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(3\cos^2\bar{i}_0 - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{22.156}$$

Mit dem Ansatz

$$\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right) = \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.157}$$

lautet die Variation

$$\begin{aligned}\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right) = \frac{1}{2}B_2 \Bigg\{ &-\frac{7}{2}\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(3\cos^2\bar{i}_0 - 1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a + \frac{3\bar{e}_0\left(3\cos^2\bar{i}_0 - 1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)^5}\Delta e - \\ &- \frac{6\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\sin\bar{i}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i\Bigg\} + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{22.158}$$

Die Abschätzung ergibt

$$\left|\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)\right| \le \frac{1}{2}B_2\left\{\frac{7}{r_{P0}^4\sqrt{r_{P0}}}\Delta a + \frac{6}{r_{P0}^3\sqrt{r_{P0}}}\Delta e + \frac{3}{r_{P0}^3\sqrt{r_{P0}}}\Delta i\right\} \tag{22.159}$$

und im Fall von erdnahen Satellitenbahnen

$$\left|\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)\right| \le 9.61\times10^{-10}\left|\Delta a\right| + 1.08\times10^{-5}\left|\Delta e\right| + 5.42\times10^{-6}\left|\Delta i\right| \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \quad . \tag{22.160}$$

Die Größenordnung in erster Ordnung der Variation des Argumentes des Perigäums kann nach oben abgeschätzt werden zu:

$$\left|\dot{M}_{0Gs0}\right| = \left| -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right)\right| \le \frac{B_2}{\sqrt{\overline{r_{P0}}^7}} \le 1.8\times10^{-6}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \quad .(22.161)$$

22.6 Bahnauswahl aus anomalistischer Umlaufzeit

22.6.1 Große Bahnhalbachse bei Vorgabe der anomalistischen Umlaufzeit

Wir wollen die vorstehenden Überlegungen auf die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zu einer Epoche t_0 aus der mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P}_{a0} = \overline{P}_a\left(t_0\right)$ bzw. der wahren anomalistischen Umlaufzeit $P_{a0} = P_a\left(t_0\right)$ anwenden. Die Epocheelemente mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ und mittlere Inklination $\bar{i}_0$ seien vorgegeben. Eine erste Näherung für die entsprechende große Bahnhalbachse ergibt sich unter Vernachlässigung aller „Störungen“ aus dem *Kepler*schen Ansatz

$$\frac{2\pi}{\left(\overline{P}_a\right)_0} \triangleq \frac{2\pi}{\overline{P}_a} = \overline{n}_a =: \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \qquad (22.162)$$

somit

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu\,\overline{P}_a^2}{4\pi^2}} \quad . \qquad (22.163)$$

Um einen verbesserten Wert für die große Bahnhalbachse zu berechnen

$$\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \qquad (22.164)$$

wird im Fall von erdnahen Satellitenbahnen mit Berücksichtigung der säkularen „Störeinflüsse“ durch J_2 die mittlere anomalistische mittlere Bewegung mit den Gleichungen (22.68) und (22.37) dargestellt durch

$$\overline{n}_a = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^{\,3}}}\left[1+\frac{3}{2}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad .(22.165)$$

Quadrierung ergibt

$$\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} = \frac{\mu}{\bar{a}_0^{\,3}}\left[1+3J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \quad (22.166)$$

Wird hier die Linearisierung (22.164) eingesetzt, wird

$$\frac{1}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} = \frac{1}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} - \frac{3\Delta\bar{a}_0^{(1)}}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^4} + \frac{3}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^5}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad (22.167)$$

bzw.

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}} J_2 \sqrt{1-\bar{e}_0^2} \left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \bar{i}_0 \right) + O\left(J_2^2 \, \bar{a}_0^{(0)} \right) \quad . \qquad (22.168)$$

Mit dem Näherungsausdruck (21.65) kann die mittlere große Bahnhalbachse in erster Näherung bei vorgegebener anomalistischer mittlerer Umlaufzeit mit der Formel

$$\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}} J_2 \sqrt{1-\bar{e}_0^2} \left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \bar{i}_0 \right) + O\left(J_2^2 \, \bar{a}_0^{(0)} \right) \qquad (22.169)$$

berechnet werden.

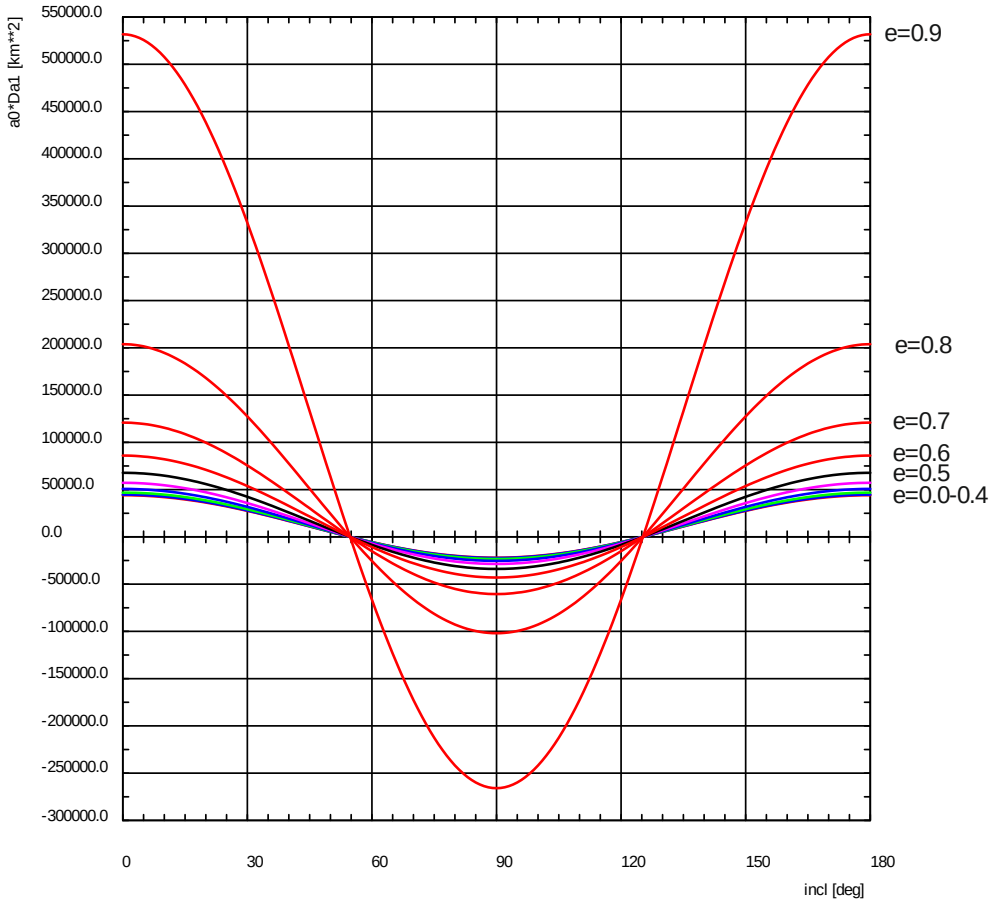


Bild 22-8: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)} \Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für verschiedene Exzentrizitäten

Die ausführliche Herleitung zeigt, dass die beiden Linearisierungen (22.166) und (22.167) keinen größeren Gesamtfehler als von der Ordnung J_2^2 verursachen. Deshalb ist die analytische Darstellung (22.169) im Hautproblem der Erdsatelliten-Bahnmechanik völlig ausreichend zur Berechnung der großen Epoche-Bahnhalbachse $\bar{a}_0$. Ein Iterationsprozess, wie ihn Gleichung (22.68) ohne die Linearisierung (22.164) nahe legen würde, kann somit umgangen werden.

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsgleichung (wieder mit der Sinusfunktion als überlagerter Funktion)

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\upsilon\left[t_0 + P_a; \bar{a}_0\right] - \upsilon\left[t_0; \bar{a}_0\right]\right) = 0 \tag{22.170}$$

geschehen, wozu die vorgegebene mittlere oder wahre anomalistische Umlaufzeit eingesetzt wird. Die hierzu eventuell benötigte Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der wahren Anomalie findet sich in Abschnitt 22.4.4 ab Seite 46.

Die Korrektur erster Ordnung (22.168) zeigt, dass der Term $\bar{a}_0^{(0)} \Delta\bar{a}_0^{(1)}$ eine von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Größe ist, welche für alle Halbachsen denselben Betrag liefert.

Diese Größe hängt nur von der Exzentrizität und der Inklination ab. Bild 22-8 zeigt den Verlauf über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Die gemeinsame Nullstelle wird aus

$$\sin^2 \bar{i}_{0a1/2} = \frac{2}{3} \tag{22.171}$$

errechnet für die Inklinationen $\bar{i}_{0a1} = 54°.7356$, $\bar{i}_{0a2} = 125°.2644$.

BEISPIEL 1: Gegeben sei die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a} = 43200\,\mathrm{s}$, die Bahn soll die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.75$ haben, die Bahnebene soll um $\bar{i}_0 = 23°$ gegenüber dem Äquator geneigt sein. Damit ergeben sich für die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse folgende Werte:

$\bar{a}_0^{(0)} = 26610.22281\,\mathrm{km}$. Die Korrektur mit Formel (22.168) ergibt $\Delta\bar{a}_0 = 4.40962\,\mathrm{km}$. Der endgültige Wert mit Hilfe der Iteration (22.170) lautet somit $\bar{a}_0 = 26614.63243\,\mathrm{km}$. Zur Kontrolle wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit der berechneten Halbachse ausgerechnet: $\overline{P_a}\left(\bar{a}_0\right) = 43199.994960\,\mathrm{s}$. Der a posteriori Fehler ist somit von der Größenordnung $10^{-3}\,\mathrm{s}$. ◄

BEISPIEL 2: Es werde jetzt angenommen, dass der Wert $P_a = 43200\,\mathrm{s}$ die wahre anomalistische Umlaufzeit einer Erdsatellitenbahn sei. Mit den weiteren Parametern $\bar{e}_0 = 0.75$ und $\bar{i}_0 = 23°$ liefert die Iteration (22.170) für die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 26614.63243\,\mathrm{km}$. Die entsprechende mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_a} = 43199.994960\,\mathrm{s}$, die wahre anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a} = 43199.993364\,\mathrm{s}$. Auch hier ist der a posteriori Fehler von der Größenordnung $10^{-3}\,\mathrm{s}$. Die Rechnungen wurden mit den a priori Genauigkeiten $|\Delta a| = |\Delta fct| = 10^{-6}, |\Delta a| = 10^{-7}$ durchgeführt. ◄

22.6.2 Die Zwei-Zeilen-Elemente („two-line elements“)

Als ein BEISPIEL zur Anwendung der anomalistischen mittleren Bewegung in der Satellitenbahnmechanik können die „Zweizeilenelemente“ („two-line elements“) angeführt werden. Standardmäßig werden Bahnelemente für alle Erdsatelliten nach automatischer Beobachtung und Auswertung in vereinfachter Form in kurzen Zeitabständen (täglich bzw. nach wenigen

Tagen) zur Verfügung gestellt[1]. Diese Bahnelemente sind mittlere Elemente wesentlich im Sinn des *Brouwer*schen Bahnmodells und seiner formalen Weiterentwicklung[2]. Hier wird üblicherweise der *SGP4 Orbit Propagator* für die Bahnberechnungen zur Verfügung gestellt, es kann aber auch ein darauf aufbauender Orbit Propagator zum Einsatz kommen. Dies schränkt aber in jedem Fall die Genauigkeitsaussage ein, genügt aber etwa für bahnanalytische Untersuchungen oder zur Berechnung für das Beobachten mit dem bloßen Auge oder für Antennenanlagen mit nicht allzu enger Antennenkeule. Sie sind jedoch nicht geeignet für hochpräzise Untersuchungen, etwa zur Formationshaltung oder zu exakter Bahnvorhersage.

Diese Bahndaten werden in einem strengen Format in zwei Zeilen übermittelt. Das Arbeiten mit diesen Elementen wird dadurch erschwert, dass zwar die Bahnelemente in der *Kepler*schen Form verwendet werden - unter Einschluss der mit den *Kepler*schen Elementen verknüpften Singularitäten - , dass aber die große Bahnhalbachse nicht beigestellt wird, sondern erst aus der Anzahl N_a der mittleren anomalistischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag berechnet werden muss.

Aus der Anzahl N_a wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit, die im Sinne der Definitionsgleichung (22.69) gegeben ist, berechnet

$$\overline{P_a} = \frac{86400}{N_a} = \frac{2\pi}{\overline{n_a}} \; [s] \quad , \tag{22.172}$$

womit auch die mittlere anomalistische mittlere Bewegung

$$\overline{n_a} = \frac{2\pi N_a}{86400}\left[\frac{1}{s}\right] \tag{22.173}$$

bekannt ist. Die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ wird dann mit dem Näherungswert (21.65) aus der Näherungsformel (22.169) erhalten. Aus diesem Vorgang ist die erhebliche Einschränkung im Gebrauch der Two-line Elemente ersichtlich. Wesentlich ist, dass sowohl die Berechnung der Anzahl N_a der mittleren anomalistischen Umläufe pro Tag und der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ mit **demselben** Bahnmodell durchgeführt werden. Andernfalls sind infolge von Modell-Inkonsistenzen erhebliche Fehler zu erwarten, die zuverlässige Aussagen nahezu unmöglich machen. Beispielweise muss streng darauf geachtet werden, ob in N_a die säkularen Störungen in der großen Bahnhalbachse durch den Luftwiderstand berücksichtigt wurden. Nur in diesem Fall müsste der mit Formel (22.169) berechnete Wert für die mittlere Halbachse durch eine ergänzende Iteration verbessert werden. Dies ist aber in der Regel nicht der Fall, so dass $\dot{a}_s$ nicht verwendet werden darf. Wenn aber säkulare „Störungen“ durch J_4 entsprechend Formel (20.15) zur Berechnung der Umläufe verwendet wurden[3], muss die Berechnung mit (22.169) iterativ um diesen Faktor ergänzt werden.

NUMERISCHES BEISPIEL: Für die internationale Raumstation ISS, bezogen auf das Kernmodul Zarya, werden folgende Two-line Elemente zur Verfügung gestellt:

---

[1] http://www.celestrak.com/NORAD/elements/

[2] D. BROUWER [1959], BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], LYDDANE, R. H. [1963], HOOTS, F. R. [1979], HOOTS, F. R. [1981]

[3] Siehe in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

```
  SatNo. Launch   yyDoY.dayfract    NDOT2    (NDDOT6) (BSTAR)
1 25544U 98067A   05069.80658593  .00020305  00000-0  16508-3 0  9863
2 25544  51.6464  44.1899 0004064 174.6830 257.5491 15.70669395360212
  SatNo.    i        Ω        e        ω        M0        Na        REVNO
```

Hier bedeuten:

in Zeile 1:

SatNo ⇔ 25544: die fortlaufende Satellitennummer, U steht für Unclassified (NORAD ID)

Launch ⇔ 98067A: 98 ⇔ Startjahr 1998, der 67. Start, Teil A bei mehreren Teilen, die gemeinsam gestartet wurden

yy-05 ⇔ 2005: Jahr der Epoche der Bahnelemente

DoY ⇔ 069: Tag 69 des laufenden Jahres der Epoche, entsprechend dem Datum 2005-03-10

Dayfract ⇔ 0. 80658593: Bruchteil des Tages der Epoche, c_w entsprechend der Zeit $19^h\ 21^m\ 29^s.02$

NDOT2 ⇔ 0.00020305 REV/D**2 – die säkulare Variation der mittleren Bewegung $\left[rev / d^2 \right]$

NDDOT6 ⇔ $\ddot{n}/6$. Dieser Faktor wird im SGP-Modell als Widerstandskoeffizient bezeichnet, er wird normalerweise gleich Null gesetzt

BSTAR ⇔ Widerstandskoeffizient im SGP4-Modell $B^* = 0.5 \cdot \rho_0 \, m / (c_D \, A_D) \left[1 / R_E \right]$

0 ⇔ bedeutet SGP4 Modell

Die letzte Ziffer (3) ist eine Kontrollzahl (Prüfsumme modulo 10)

in Zeile 2:

SatNo

i ⇔ 51°.6464: Inklination [Grad]

Ω ⇔ 44°.1899: Rektaszension des aufsteigenden Knotens [Grad]

e ⇔ 0. 0004064: Exzentrizität (nur für elliptische Bahnen)

ω ⇔ 174°.6830: Argument des Perigäums [Grad]

M_0 ⇔ 257°.5491: Mittlere Anomalie [Grad] zur Epoche

N_a ⇔ 15.706693953: Anzahl der mittleren anomalistischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag

REVNO ⇔ 36021: Umlauf Nummer (eines drakonitischen Umlaufs, bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten)

Die letzte Ziffer (2) ist eine Kontrollzahl (Prüfsumme modulo 10).

Anmerkung: Der hier für B^* verwendete Faktor $B := m / (c_D \, A_D)$ wird gelegentlich als ballistischer Koeffizient bezeichnet. Leider wird diese Bezeichnung in der Literatur missverständlich verwendet, da auch die Umkehrung häufig als ballistischer Koeffizient bezeichnet wird[1]

[1] in R. H. BATTIN [1987], p. 505 wird der Faktor $0.5 B_D = 0.5 c_D \, A_D / m$ als *ballistischer Koeffizient* bezeichnet. Dagegen wird in WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON [2007], ch. 8, die Definition $B := m / (c_D \, A_D)$ verwendet. Die im vorliegenden Bericht verwendete Definition findet sich etwa in H. KLINKRAD [2006], p. 171.

(siehe Formel (17.41) in Abschnitt 17.3.1 in Band III: $B := 1/B_D$). Mit ρ_0 wird die Dichte der Atmosphäre bezogen auf eine Referenzhöhe bezeichnet. Im Zusammenhang mit den NORAD Bahnelementen hat der Luftwiderstandsbeiwert das Symbol c_w an Stelle des sonst üblichen c_D. ◀

Umrechnungen:

Mit der Anzahl der Umläufe wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit berechnet

$$\overline{P_a} = \frac{86400s}{15.706693953} = 5500.83934 \text{ s} \quad .$$

Formel (21.65) liefert die erste Näherung für die Halbachse

$$\overline{a}_0^{(0)} = 6735.11972 \text{ km} \quad ,$$

eine Verbesserung mit Formel (22.169) schließlich

$$\overline{a}_0 = 6735.62686 \text{ km} \quad .$$

Aus der Variation NDOT2 $\Leftrightarrow \dot{n}_{Ks}$ wird mit der Formel (17.43) (Band III, Abschnitt17.3.2)

$$\overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \quad , \quad \dot{a}_s = -\frac{8\pi \dot{n}_{Ks} \overline{a}_0}{86400^2 \cdot 3 \cdot \overline{n_{K0}}} = \text{-0.1343910282372D-05 km/s} \quad .◀$$

Anmerkung zur Genauigkeit der Zweizeilenelemente: Die Umrechnung eines Zustandsvektors in und von Zweizeilenelementen erfolgt im Wesentlichen (d.h. mit geringfügigen Modifikationen) mit dem auf *D. Brouwer* [1969] zurückgehenden analytischen Bahnmodell, allerdings nur unter Einschluss der zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4. Die zu erwartende Genauigkeit der Zweizeilenelemente und der mit ihnen erzeugten Ephemeride unterscheidet sich daher unwesentlich von diesem Modell (siehe in Abschnitt 20.2, Band III). In der Praxis wird die Zuverlässigkeit der Zweizeilenelemente durch die Updaterate der Elemente durch die NORAD[1] eingeschränkt. Eine Bahn kann sich gegenüber der hier vorgegebenen Epoche im Verlauf der Zeit entscheidend verändern, bis neue Bahnparameter eine Bahn besser annähern können. Zielvorstellung ist, dass spätestens bei einer Abweichung der wahren Bahn von der mit den Zweizeilenelementen erzeugten Ephemeride in der Größenordnung von 5 km eine Angleichung erfolgt[2]. Die Zweizeilenelemente sind daher nur für Beobachtungen etwa zur Steuerung von Bodenantennen oder visuelle Beobachtungen und für langfristige Untersuchungen geeignet, nicht aber etwa für aktuelle Untersuchungen oder gar als Grundlage für die Berechnung von Bahnmanövern oder zur Steuerung enger Formationsflüge. ◀

[1] http://www.celestrak.com/NORAD/elements/

[2] KELSO, D. T. [1995]

22.6.3 Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit

Zu einer Epoche t_0 seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a0}$, die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ vorgegeben. Zu berechnen ist die entsprechende Exzentrizität $\overline{e}_0$. Einen ersten Näherungswert erhält man durch Auflösung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.165) nach der Exzentrizität

$$\overline{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^2 \frac{1 - 3\cos^2 \overline{i}_0}{1 - \frac{2\pi}{\overline{P}_{a0}} \sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}}}} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.174}$$

Diese Berechnung ist numerisch außerordentlich kritisch und liefert erfahrungsgemäß keinen zuverlässigen Wert für die Exzentrizität. Dieser kann erst nach Iteration mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P}_a\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P}_{a0} = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \tag{22.175}$$

errechnet werden. Für die numerische Iteration wird die Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der Exzentrizität als Variablen benötigt. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.38) erhält man

$$\frac{dfct\left(\overline{e}_0\right)}{d\overline{e}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n}_a\right)^2} \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{d\overline{e}_0} \quad . \tag{22.176}$$

Die Variation der Ableitung der mittleren Epocheanomalie nach der Exzentrizität ist in Formel (22.137) berechnet. Allerdings müssen in diesem Zusammenhang die Exzentrizität als Variable aufgefasst werden, die anderen *Kepler*elemente als feste Eingangsparameter. In Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde in erster Ordnung ist

$$\frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{\partial \overline{e}_0^{(n)}} \triangleq \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{d\overline{e}_0^{(n)}} = -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1 - \left(\overline{e}_0^{(n)}\right)^2}}{\overline{a}_0^2 \left[1 - \left(\overline{e}_0^{(n)}\right)^2\right]^2} \left(1 - 3\cos^2 \overline{i}_0\right) + \ldots \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{22.177}$$

Als nullte Näherung wird der in (22.174) berechnete Wert für den Iterationsprozess herangezogen.

BEISPIEL: Es werden die Zahlenwerte des Beispiels in Abschnitt 22.6.1 verwendet: Vorgegeben seien die Werte

$$\overline{P}_{a0} = 43200.0000\,\mathrm{s}\ ,\ \overline{\mathrm{a}}_0 = 26614.6324\,\mathrm{km}\ ,\ \overline{\mathrm{i}}_0 = 23^\circ\ .$$

Formel (22.174) liefert als nullte Näherung $\overline{e}_0^{(0)} = 0.7500713637183$. Die zugehörende mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_{a0}^{(0)} = 43199.99094981\,\mathrm{s}$. Die a posteriori Genauigkeit ist besser als $10^{-2}\,\mathrm{s}$. Um die Stabilität des Verfahrens zu testen, werde willkürlich die Anfangslösung $\overline{e}_{0f}^{(0)} = 0.53$ vorgegeben. Eine Iteration nach der Bedingungsgleichung

(22.175) mit den a-priori Genauigkeiten $\Delta e = 10^{-7}$ und $\Delta fct = 10^{-7}$ ergibt für die Exzentrizität und als Kontrolle für die mittlere anomalistische Umlaufzeit die Werte

$$\bar{e}_0^{(n)} = 0.74990778 \quad , \quad \overline{P}_{a\,0}^{(n)} = 43199.99999633\ \mathrm{s} \qquad .$$

Die a posteriori Genauigkeit ist somit von der Größenordnung $10^{-6}\,\mathrm{s}$. ◀

Das Beispiel zeigt, dass das Verfahren sehr robust ist. Allerdings zeigt sich umgekehrt, dass die Abhängigkeit der zu bestimmenden Exzentrizität sehr sensitiv gegenüber den gewählten Eingangsdaten große Bahnhalbachse und mittlerer anomalistischer Umlaufzeit ist.

22.6.4 Inklination bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit

Zu einer Epoche t_0 seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a\,0}$, die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgegeben. Zu berechnen ist die entsprechende mittlere Inklination $\bar{i}_0$. Einen ersten Näherungswert erhält man durch Auflösung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.165) nach der Inklination

$$\cos\bar{i}_0^{(0)} = \mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0^{(0)}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{4}{3}\frac{1}{J_2}\left(\frac{\bar{a}_0}{R_E}\right)^2\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}^{\,3}\left(1-\bar{a}_0\right)\sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}}\frac{2\pi}{\overline{P}_{a\,0}}} \qquad . \quad (22.178)$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es muss zusätzlich zu den Eingangswerten noch eine Aussage geben, ob eine recht- oder ein rückläufige Bahn erwartet wird. Eine iterative Verbesserung des Ergebnisses kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P}_a\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P}_{a\,0} = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, \cdots \qquad (22.179)$$

durchgeführt werden. Für die numerische Iteration wird die Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der Inklination als Variablen benötigt. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.38) erhält man

$$\frac{dfct\left(\bar{i}_0\right)}{d\bar{i}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n}_a\right)^2}\frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{d\bar{i}_0} \qquad . \quad (22.180)$$

Die Variation der Ableitung der mittleren Epocheanomalie nach der Inklination ist in Formel (22.140) berechnet. Allerdings müssen in diesem Zusammenhang die Inklination als Variable aufgefasst werden, die anderen *Kepler*elemente als feste Eingangsparameter:

$$\frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{\partial\bar{i}_0} \triangleq \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{d\bar{i}_0^{(n)}} = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\cos\bar{i}_0^{(n)}\sin\bar{i}_0^{(n)} + \ldots \quad \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . (22.181)$$

BEISPIEL: Gegeben seien zu einer Epoche die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 26614.632\,\mathrm{km}$, die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.75$, außerdem sei bekannt, dass die gewünschte Bahn rechtläufig sei: $\mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right) = 1$. Als nullte Näherung für die gesuchte Inklina-

tion liefert Formel (22.178) den Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 54°.7356103172$ mit der zugehörenden mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_a}\left(\bar{i}_0^{(0)}\right) = 43210.74065\,\mathrm{s}$, der Fehler ist also erheblich. Erst die sehr langsame Iteration mit der Bedingungsfunktion (22.179) führt auf $\bar{i}_0^{(n)} = 23°.019417$ mit der zugehörenden mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_a}\left(\bar{i}_0^{(n)}\right) = 43200.000001\,\mathrm{s}$. Das Zahlenbeispiel zeigt, dass das Verfahren außerordentlich sensitiv ist und nicht zu einer 100% sicheren Lösung führen kann. ◀

Anmerkung: Man beachte, dass die Formel (22.178) nur verwendet werden darf, wenn $J_2 \neq 0$ verwendet wird. Ansonsten ist die hier vorgestellte Theorie unsinnig.◀

22.7 Die säkulare Drift der mittleren Epocheanomalie von Erdsatelliten

Die Beziehung (22.38) zeigt, dass die mittlere Epocheanomalie und ihre Variation nach Formel (20.17)

$$(M_0)^{\cdot}_{Gs0} = \frac{3}{2}\,\overline{n}_{K0}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(\overline{n}_{K0}\,J_2^2\right)\,, \tag{22.182}$$

wesentlich die anomalistische Bewegung prägt. Durch Integration über die Zeit kann die Drift der mittleren Epocheanomalie in einem Zeitintervall erhalten werden:

$$\Delta M_0\left[t_2 - t_1\right] = \int_{t_1}^{t_2}\left(M_0\right)^{\cdot}_s\,dt = \left(M_0\right)^{\cdot}_s\left(t_2 - t_1\right) \quad . \tag{22.183}$$

In erster Näherung gilt für erdnahe Satellitenbahnen

$$\Delta M_0\left[t_2 - t_1\right] = \frac{3}{2}\overline{n}_{K0}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(t_2 - t_1\right) + \cdots \quad . \tag{22.184}$$

Als erstes BEISPIEL ist in Bild 22-9 die Drift für die Bahn a = 8300 km und die Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2 über der Inklination für einen Tag aufgetragen. ◀

Als zweites BEISPIEL ist in Bild 22-10 die Drift über einen mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_a}$ für Bahnen mit der Exzentrizität e=0.1 und verschiedene große Bahnhalbachsen dargestellt.◀

Wie unmittelbar aus Formel (22.184) erkannt werden kann, verschwindet die säkulare Drift der mittleren Epocheanomalie für die Inklinationen

$$i_{M1} = 54°.735610317\ ,\ i_{M2} = 125°.264389683 \quad . \tag{22.185}$$

Sie ist positiv für Äquator-nahe Bahnen, negativ für Pol-nahe Bahnen. Die Abhängigkeit von der Exzentrizität der Bahn ist gering, dagegen von der großen Bahnhalbachse sehr groß. Je nach Inklination muss täglich mit einer Drift bis zu 4° gerechnet werden.

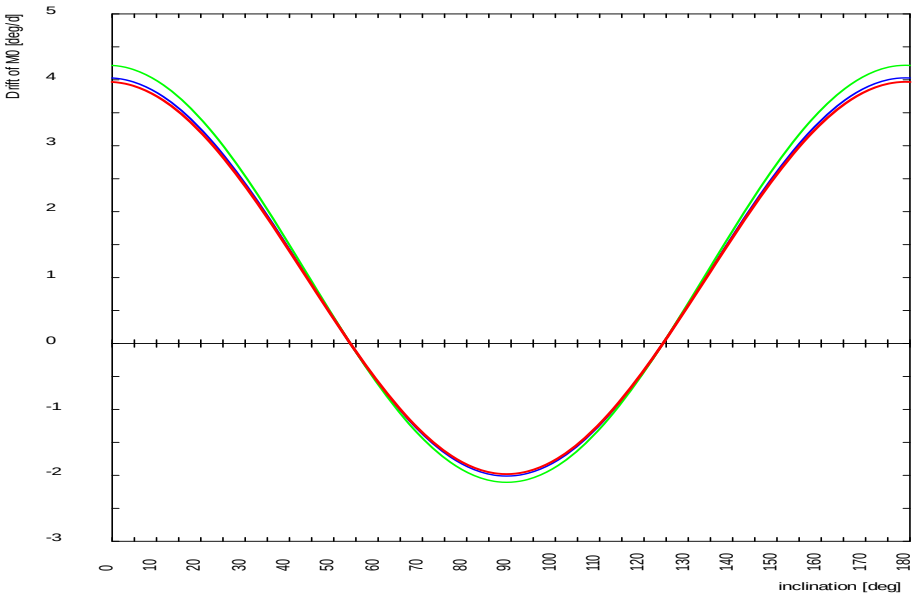


Bild 22-9: Beispiel für die säkulare Drift ΔM_0 [Grad] der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahn a = 8300 km mit den Exzentrizitäten e=0.0 (rote Kurve), e=0.1 (blaue Kurve), e = 0.2 (grüne Kurve).

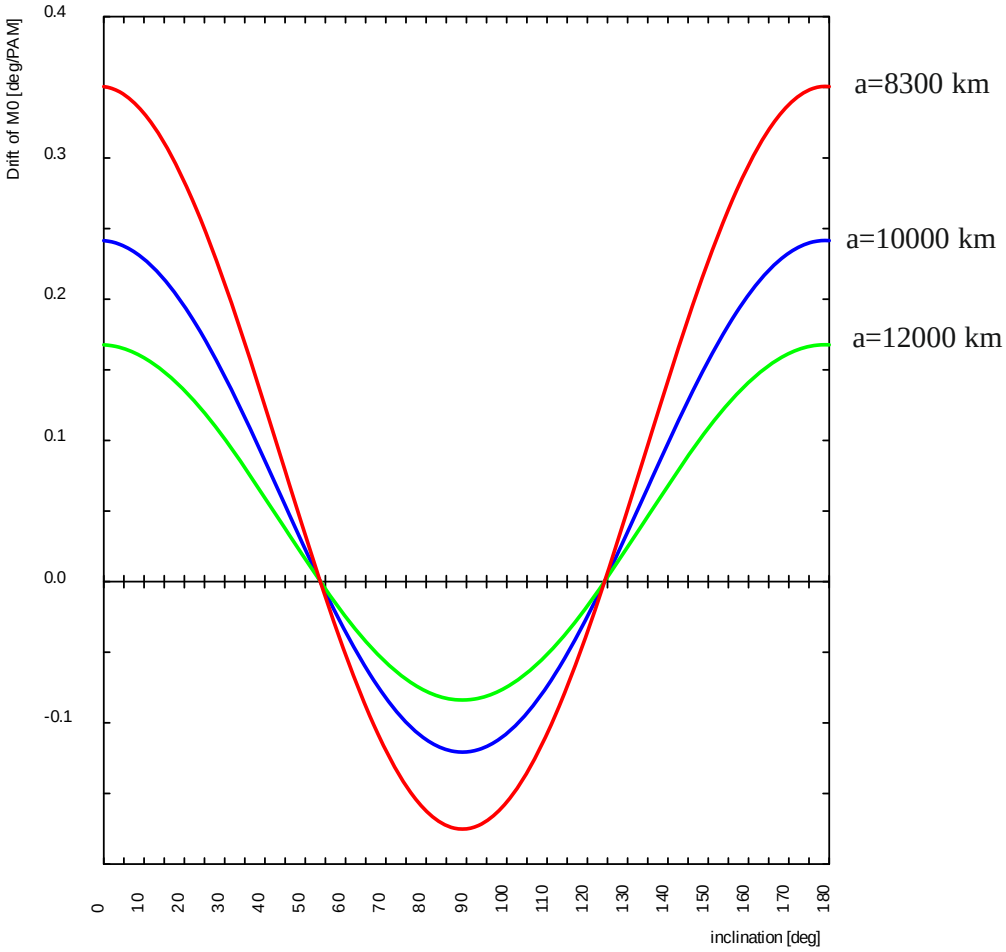


Bild 22-10: Beispiel für die säkulare Drift ΔM_0 [Grad] der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 8300 km (rote Kurve), a = 10000 km (blaue Kurve), a = 12000 km (grüne Kurve) und mit der Exzentrizität e=0.1.

22.8 Die säkulare Drift des Argumentes des Perizentrums

Der Ort des Perizentrums einer Bahn und damit die Eigenschaften der anomalistischen Bewegung werden durch das Argument ω des Perizentrums wesentlich geprägt. Es ist daher von Interesse im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse das langfristige Verhalten dieses Bahnparameters zu untersuchen.

22.8.1 Die säkulare Änderung des Argumentes des Perizentrums

In erster Näherung hat das Argument der Perizentrums (nach Formel (20.17)) die säkulare Drift (mit den Epocheparametern $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$)

$$\dot{\omega}_s = \frac{3}{4} \overline{n}_{K0} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left(5\cos^2 \bar{i}_0 - 1\right) + \cdots \quad . \tag{22.186}$$

Unabhängig von der Bahnform ist diese Drift positiv, wenn $\cos^2 \bar{i}_0 > 1/5$, somit für Inklinationen

$$0° \le \bar{i}_0 < 63°.434948823 \quad \text{und} \quad 116°.565051177 < \bar{i}_0 \le 180° \quad , \tag{22.187}$$

rückläufig für

$$63°.434948823 < \bar{i}_0 < 116°.56505051177 \quad . \tag{22.188}$$

Anmerkung: Die Inklination

$$i_K = 63°.434948823 \quad \left(\text{bzw.}116°.56505051177\right) \tag{22.189}$$

spielte in der Satellitenbahnmechanik als „kritische Inklination“ eine besondere Rolle, da sie in den langperiodischen Variationen der *Kepler*elemente *a, e, i, Ω, ω, M*$_0$ in den Ausdrücken mit den zonalen Harmonischen J_4 und J_5 (und höheren) im Nenner vorkommen, so dass für Bahnen mit diesen Inklinationen Singularitäten in einer Ephemeridenrechnung auftreten. Dies ist eine Folge der Wahl des Argumentes der Breite als ein Bahnparameter, so dass diese Singularität nur mathematische Bedeutung hat, physikalisch jedoch irrelevant ist. Um Satellitenbahnen in Nähe der kritischen Inklination analytisch untersuchen zu können, müssen daher andere Parameter gewählt werden, oder die Ephemeride muss numerisch integriert werden, wobei keine Singularitäten auftreten können (wenn das Verfahren numerisch stabil ist). Bahnen mit kritischer Inklination sind jedoch in der astronautischen Anwendung für bestimmte Anwendungen von besonderer Wichtigkeit, da auf ihnen wegen des Ausdrucks (22.186) keine Apsidendrehung stattfinden wird, so dass damit gewisse Aufgabenstellungen erfüllt werden können, die eine feste Position der Apside erfordern. Das bekannteste Beispiel dafür sind die *Molnija* Satelliten. (Siehe näheres dazu im Beispiel 2 in Abschnitt 23.5.3 auf Seite 178) ◀

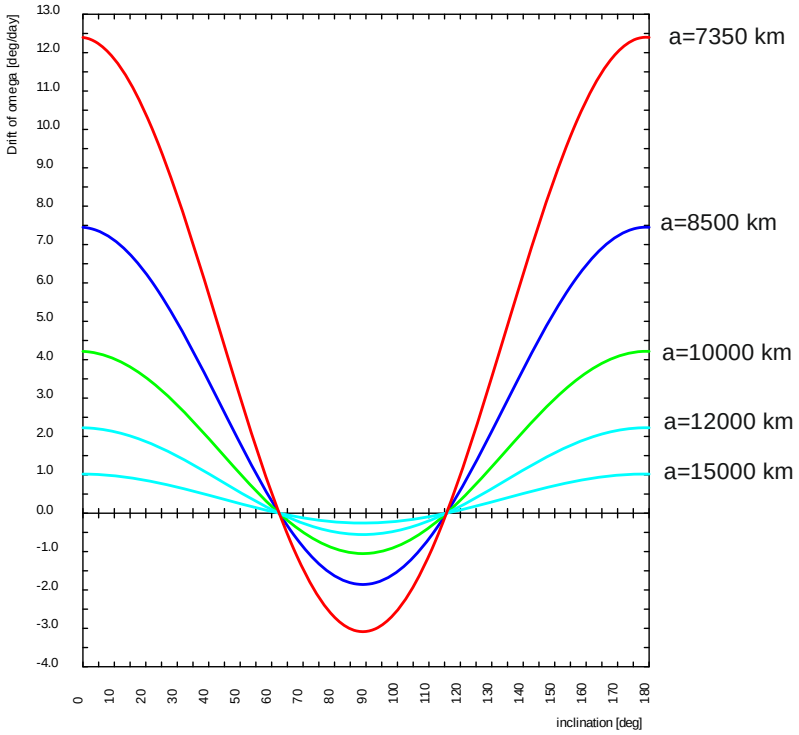


Bild 22-11: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}[\text{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 7350, 8000, 10000, 12000, 15000 km mit der Exzentrizität e=0.1

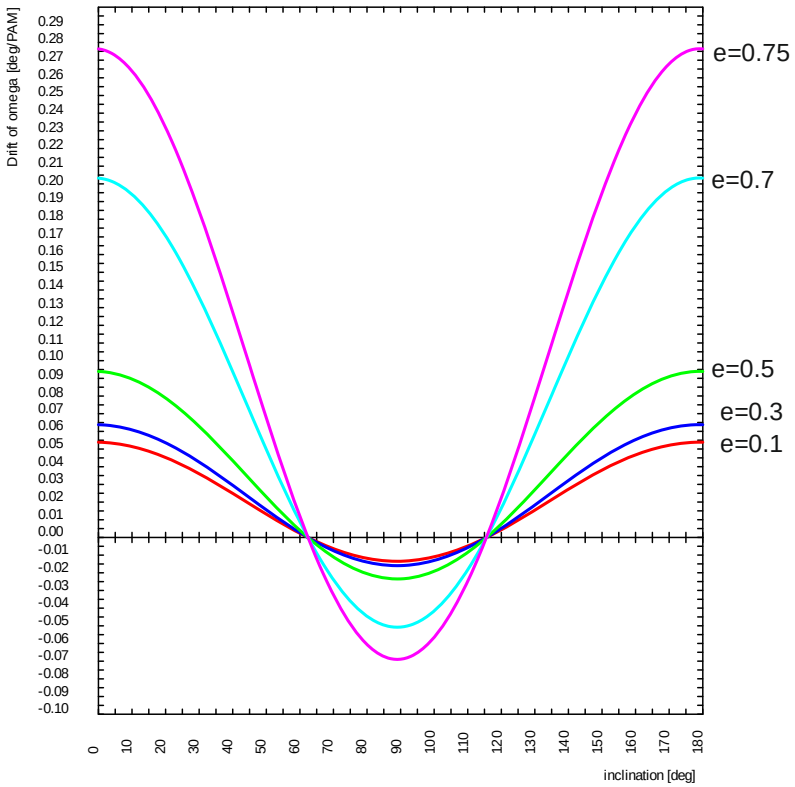


Bild 22-12: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}[\text{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 30000 km mit den Exzentrizitäten e=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.75

Durch Integration über die Zeit kann die Drift des mittleren Argumentes des Perizentrums in einem Zeitintervall erhalten werden:

$$\Delta\bar{\omega}\left[t_2,t_1\right]=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\omega}_s dt=\dot{\omega}_s\left(t_2-t_1\right) \quad . \tag{22.190}$$

In erster Näherung gilt für erdnahe Satellitenbahnen

$$\Delta\bar{\omega}\left[t_2,t_1\right]=\frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2\bar{i}_0-1\right)\left(t_2-t_1\right)+\cdots \quad . \tag{22.191}$$

Als erstes BEISPIEL ist in Bild 22-11 (auf Seite 78) die Drift des mittleren Argumentes des Perigäums für die Bahnen *a* = 7350, 8500, 10000, 12000., 15000 km mit der Exzentrizität e= 0.1 über der Inklination für einen Tag aufgetragen. ◀

Als zweites BEISPIEL ist in Bild 22-12 die Drift über einen mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_a}$ für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse a=30000 km und die Exzentrizitäten *e*=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.75 dargestellt.◀

22.8.2 Die Drehung der Apsidenlinie und die Wanderung der Apsiden

Die säkulare Drift des Argumentes des Perigäums kann, wie die beiden vorstehenden Beispiele zeigen, erheblich für erdnahe Bahnen sein. Auch für erdferne Bahnen kann der Einfluss der Exzentrizität auf diese Drift zwar quantitativ klein, aber doch sehr bemerkbar sein (vgl. Bild 22-12).

Die Drift des Perigäums hat eine Drift der Apsidenlinie zur Folge. Für Bahnen, die näherungsweise als eine allgemeine *Kepler*bewegung charakterisiert werden können, verbindet sich mit der Drehung der Apsidenlinie eine Drehung der scheinbaren Bahnellipse zu einer quasiperiodischen Spiralbewegung. Dies veranschaulicht folgendes

BEISPIEL 1: Zur Veranschaulichung der Apsidendrehung als Folge der Erdabplattung wird in Bild 22-13 der Verlauf einer hochexzentrischen Bahn dargestellt. Gewählt wurden die Daten einer Transferbahn (TVSAT-1) in eine geostationäre Bahn. Die Bahndaten sind große Bahnhalbachse a = 24354.797 km, Exzentrizität e =0.73. Die Bahn soll ausschließlich in der Äquatorebene verlaufen (i=0°.0). Um den Effekt der Apsidendrehung zu veranschaulichen, wird der größte (und für diesen Effekt entscheidende) zonale harmonische Potentialkoeffizient J_2 um das 100 fache gegenüber dem für den Erdkörper gültigen Wert überhöht:

$J_2 \triangleq 0.1$. Mit diesem Wert lautet die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a}=36563.537570\ \mathrm{s}\triangleq 10.156538214\,\mathrm{h}$. Dargestellt ist der Verlauf der Bahn über 7 Tage, was etwa 16.54 anomalistischen Umläufen entspricht.◀

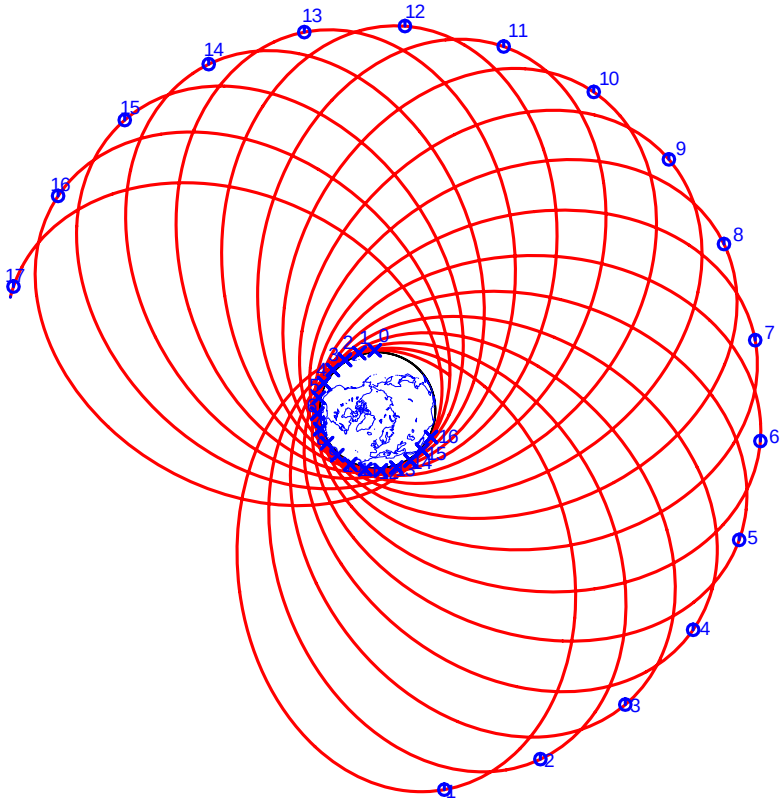


Bild 22-13: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für die Bahn a=24354.797 km, e=0.73, i=0°.0. Zur Veranschaulichung ist die Abplattung der Erde um das 100 fache überhöht mit der Annahme J_2=0.1.

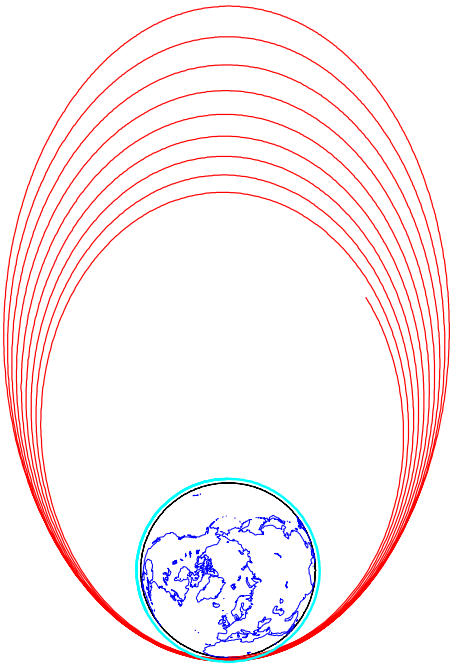


Bild 22-14: Veranschaulichung der Wirkung des Luftwiderstandes (angedeutete Atmosphäre in hellblau um die Erde).

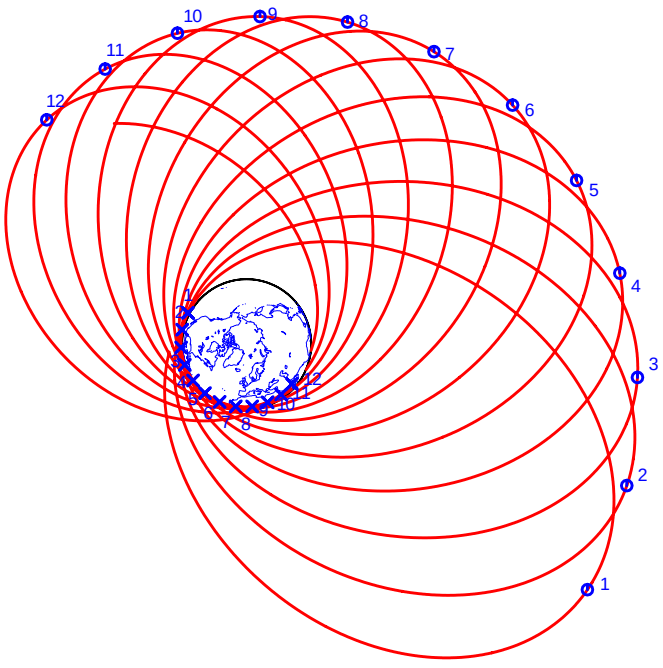


Bild 22-15: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für eine Bahn unter Einwirkung des Luftwiderstandes

BEISPIEL 2: In Bild 22-14 wird der Einfluss des Luftwiderstandes auf die Bewegung einer Satellitenbahn qualitativ beschrieben. Die Bahn im linken Bild ist mit den *Kepler*elementen a=24354.8 km, *e*=0.74, i=0° definiert. Zur Demonstration des Einflusses des Luftwiderstandes werden die (unrealistischen) Werte $\dot{a}_s = -50\,\mathrm{m/s}$ für die säkulare Abnahme der Halbachse sowie $\dot{e}_s = -5\times10^{-7}$ für die Abnahme der Exzentrizität angenommen. Die Abbremsung dieser Bahn im Perigäum wird durch die angedeutete Atmosphäre verursacht.

In Bild 22-15 wird die Überlagerung der anomalistischen Bewegung durch den Einfluss des Luftwiderstandes qualitativ demonstriert. Das Szenario ist realistisch, da hochexzentrische Bahnen (etwa Transferbahnen aus dem erdnahen Bereich in eine geosynchrone Bahn) durchaus dem Einfluss der Restatmosphäre in der Umgebung des Perigäums unterliegen können. Im Beispiel wird von der Bahn *a*= 24354.797 km, *e*= 0.73, *i*= 0° ausgegangen, die Bahn werde durch die säkulare Abnahme der Bahnelemente $\dot{a}_s = -20\,\mathrm{m/s}$, $\dot{e}_s = -2\times10^{-7}$ beeinflusst. Für das Erdmodell wurden die zonalen Harmonischen $J_2 = 0.1, J_3 = J_4 = 0.0$ gewählt.◀

BEISPIEL 3: Die Abfolge der Apsiden kann tabellarisch erfasst werden, wie in Tabelle 22-2 auf Seite 54 am Beispiel einer Transferbahn gezeigt wird. ◀

22.9 Geographische Positionen und Driften von Perigäum und Apogäum

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse kann der Bezug einer anomalistischen Bewegung zur Erdoberfläche benötigt werden. In diesem Abschnitt werden die geographischen Positionen von Perigäum und Apogäum und ihre Driften gegenüber der Erdoberfläche untersucht. Bei Vorgabe dieser Größen können im Rahmen einer Bahnauslegung einige der *Kepler*schen Elemente einer Satellitenbahn bestimmt werden.

22.9.1 Die geographischen Koordinaten des Perigäums

Wenn die Parameter der räumlichen Orientierung einer Satellitenbahn, Inklination *i*, Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens und Argument des Perigäums ω für einen bestimmten Zeitpunkt *t* vorgegeben sind, können mit ihrer Hilfe die geographischen Koordinaten des Perigäums, geographische Länge λ_P und Deklination δ_P berechnet werden[1]. Dazu wird die zum Zeitpunkt *t* gültige Sternzeit[2]

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\left(t - t_0\right) \tag{22.192}$$

benötigt, wenn Θ_{G0} ein (fester) Anfangswert[3] zum Zeitpunkt t_0 und $\dot{\Theta}$ die tropische Rotationsperiode der Erde ist. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird $\dot{\Theta}$ als konstante Größe

---

[1] Wird die geodätische Breite φ_P des Perigäums benötigt, kann sie mit den Formeln (8.189), (8.190) [Band II, Abschnitt 8.6.1] berechnet werden. Im vorliegenden Zusammenhang spielt der Bezug auf die abgeplattete Erdoberfläche zunächst nur eine untergeordnete Rolle

[2] Siehe in Abschnitt 9.1.2

[3] Vorzugsweise eine Fundamentalepoche

angenommen. Säkulare (und eventuell auch nichtsäkulare) Variationen sind so klein, dass sie hier vernachlässigt werden können[1]. Der aufsteigende Knoten ☊ der Satellitenbahn hat die auf den Greenwich-Meridian bezogene geographische Länge

$$\lambda_\Omega = \Omega - \Theta_G \quad . \tag{22.193}$$

Nach Bild 22-16 ergeben sich die geographischen Koordinaten des Perigäums aus

$$\begin{aligned} \sin\delta_P &= \sin\omega \sin i \\ \cos\delta_P &= \sqrt{1-\sin^2\omega \sin^2 i} \\ \cos\left(\lambda_P - \lambda_\Omega\right)\cos\delta_P &= \cos\omega \\ \sin\left(\lambda_P - \lambda_\Omega\right)\cos\delta_P &= \sin\omega \cos i \end{aligned} \tag{22.194}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos\lambda_P \cos\delta_P &= -\cos i \sin\omega \sin\lambda_\Omega + \cos\omega \cos\lambda_\Omega \\ \sin\lambda_P \cos\delta_P &= \quad \cos i \sin\omega \cos\lambda_\Omega + \cos\omega \sin\lambda_\Omega \quad . \end{aligned} \tag{22.195}$$

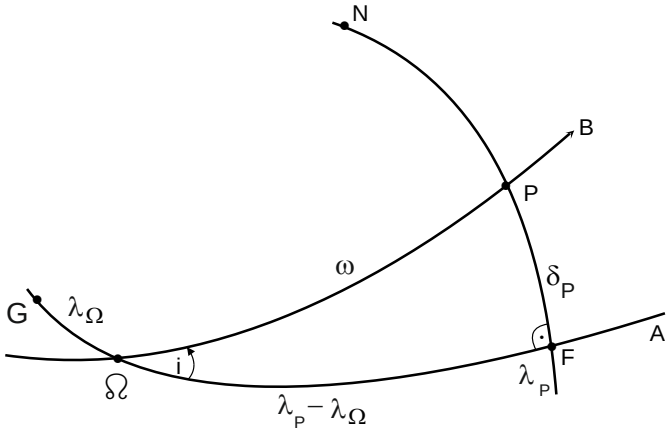


Bild 22-16: Zu Berechnung der geographischen Länge λ_P des Perigäums P mit Hilfe der geographischen Länge λ_Ω des aufsteigenden Knotens ☊. G bezeichnet den Schnittpunkt des Meridians durch Greenwich mit dem Äquator A, B die Bahnebene unter der Inklination *i* gegenüber dem Äquator

Um die geographische Länge des aufsteigenden Knotens zu vermeiden, kann mit Beziehung (22.193) gebildet werden:

$$\begin{aligned} \cos\lambda_P \cos\delta_P &= \cos\Theta_G\left(-\cos i \sin\Omega \sin\omega + \cos\Omega \cos\omega\right) + \\ &\quad + \sin\Theta_G\left(\cos i \cos\Omega \sin\omega + \sin\Omega \cos\omega\right) \\ \sin\lambda_P \cos\delta_P &= \cos\Theta_G\left(\cos i \cos\Omega \sin\omega + \sin\Omega \cos\omega\right) + \\ &\quad + \sin\Theta_G\left(\cos i \sin\Omega \sin\omega - \cos\Omega \cos\omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{22.196}$$

Als dritte Möglichkeit zur Berechnung der geographischen Länge des Perigäums bietet sich das Ergebnis einer Ephemeridenrechnung an, welche die Rektaszension α_P des Perigäums berechnet. Dann ist

$$\lambda_P = \alpha_P - \Theta_G \quad . \tag{22.197}$$

[1] Siehe Formel (9.19) (Band II)

22.9.2 Die Variation der geographischen Position des Perigäums

Falls die Variation der Rektaszension der geographischen Länge des Perigäums bekannt ist, lautet ihre Variation

$$\dot{\lambda}_P = \dot{\alpha}_P - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.198}$$

Um den Bezug auf die Bahnparameter und damit auf ein Bahnmodell herstellen zu können, wird aus den Beziehungen (22.194) mit (22.197) erhalten:

$$\dot{\lambda}_P = \dot{\lambda}_\Omega + \frac{\cos i}{\cos^2 \delta_P}\dot{\omega} - \frac{\sin i \sin\omega\cos\omega}{\cos^2 \delta_P}(i)^{\cdot} \quad , \tag{22.199}$$

somit wegen (22.193)

$$\dot{\lambda}_\Omega = \dot{\Omega} - \dot{\Theta} \tag{22.200}$$

auch

$$\dot{\lambda}_P = \dot{\Omega} + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i \, \sin^2\omega}\dot{\omega} - \frac{\sin i \sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i \, \sin^2\omega}(i)^{\cdot} - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.201}$$

Die Variation der Rektaszension des Perigäums hat nach (22.198) die Darstellung

$$\dot{\alpha}_P = \dot{\Omega} + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i \, \sin^2\omega}\dot{\omega} - \frac{\sin i \sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i \, \sin^2\omega}(i)^{\cdot} \quad . \tag{22.202}$$

Werden hier die *Gauß*schen Variationsgleichungen[1] (11.70), (11.71) und (11.73) eingesetzt, folgt die *Gauß*sche Variationsgleichung für die geographische Länge des Perigäums

$$\dot{\lambda}_P = -\frac{G}{e\,\mu}\,\frac{\cos i}{1-\sin^2 i \, \sin^2\omega}\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] + \frac{r}{G}\frac{\sin i \, \cos\omega \, \sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i \, \sin^2\omega\right)}b_N - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.203}$$

Aus der ersten der Formeln (22.194) folgt für die Variation der Deklination des Perigäums

$$\dot{\delta}_P \cos\delta_P = \dot{\omega}\,\cos\omega\,\sin i + (i)^{\cdot}\,\sin\omega\,\cos i \quad , \tag{22.204}$$

mit den Variationsgleichungen (11.70) und (11.73) die *Gauß*sche Variationsgleichung der geographischen Breite des Perigäums

$$\dot{\delta}_P = -\frac{G}{e\,\mu}\,\cos\omega\,\sin i\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] - \frac{r}{G}\cos i\,\sin\upsilon\, b_N \quad . \tag{22.205}$$

BEISPIEL 1: Um eine größenordnungsmäßige Einordnung der Drift der geographischen Länge des Perigäums zu ermöglichen, wird in diesem Beispiel die säkulare Drift über der Inklination für verschiedene Bahnhöhen dargestellt (Bild 22-17). Das Beispiel ist theoretisch zu verstehen, da in jedem Fall eine kreisförmige Bahn zugrunde gelegt wird. Der Einfluss der Exzentrizität wird in den beiden nächsten Beispielen untersucht. Interessant ist die Auszeichnung des Bezugs auf die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde, da sich alle Kurven in diesem Wert treffen. Als Bahnmodell wird die säkulare Wirkung der Erdabplattung erster und zweiter Ord-

[1] In Abschnitt 11.1.5, Band III

nung verwendet. Die „Nullstellen“, d.h. die Schnittpunkte der $\dot{\lambda}_P - $Kurven mit der $-\dot{\Theta}$-Geraden werden für die Bedingung $\dot{\lambda}_P + \dot{\Theta} = 0$ erhalten. Sie werden mit der Formel (22.248) in Abschnitt 22.11 abgeschätzt. ◀

BEISPIEL 2: In diesem Beispiel (Bild 22-18) wird der Einfluss einer Variation der Exzentrizität auf die säkulare Drift der geographischen Länge des Perigäums untersucht. Ausgewählt ist die Bahn mit der großen Bahnhalbachse a= 10000 km. Die Exzentrizität variiert zwischen 0.0 und 0.34 (Grenzwert wenn das Perigäum eine Mindesthöhe von ungefähr 200 km haben soll). Der Verlauf der Kurven variiert sehr gering im Vergleich zum vorstehenden Beispiel einer Variation der großen Bahnhalbachse. ◀

BEISPIEL 3: Um den Einfluss der Exzentrizität auf die Drift der Perigäumslänge über der Inklination bei höheren Exzentrizitäten zu demonstrieren wird in diesem Beispiel (Bild 22-19) die große Bahnhalbachse einer geostationären Übergangsbahn gewählt: a = 25646.172 km. Mit zunehmender Exzentrizität wird der Verlauf der Kurve erheblicher. ◀

22.9.3 Die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums pro anom. Umlauf

Pro wahrem anomalistischen Umlauf kann die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums berechnet werden aus

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\lambda}_p}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{22.206}$$

Die Variation der geographischen Länge ist aus Formel (22.203) bekannt, die der wahren Anomalie aus (11.80) (Band III). Die Zerlegung (22.198) ergibt

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} d\upsilon - \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\Theta}}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{22.207}$$

Da die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse als konstant angenommen werden darf, kann das zweite dieser Integrale auf die wahre anomalistische Umlaufzeit in Beziehung (22.59) zurückgeführt werden und es bleibt

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} d\upsilon - \dot{\Theta} P_a \quad . \tag{22.208}$$

22.9.3.1 Die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums

Nach Elimination aller periodischen Anteile in der Variationsgleichung (22.201) folgt der säkulare Anteil in Bezug auf mittlere Epocheelemente

$$\dot{\lambda}_{Ps0} := \dot{\Omega}_{s0} + \frac{\cos \bar{i}_0}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} \dot{\omega}_{s0} - \frac{\sin \bar{i}_0 \sin \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} (i)^{\cdot}_{s0} - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.209}$$

Im Fall der Einflüsse durch das Gravitationsfeld der Erde werden hier die säkularen Variationen (20.14) – (20.16) (Band III) mit den als konstant angenommenen mittleren Epocheelementen verwendet. Integration über einen anomalistischen Umlauf ergibt die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums in Bezug auf die mittlere anomalistische Umlaufzeit

$$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} d\upsilon = \dot{\lambda}_{Ps}\, \overline{P_a} \quad . \tag{22.210}$$

Diese Formel findet Verwendung bei Untersuchungen des langfristigen Bahnverhaltens von Satellitenmissionen.

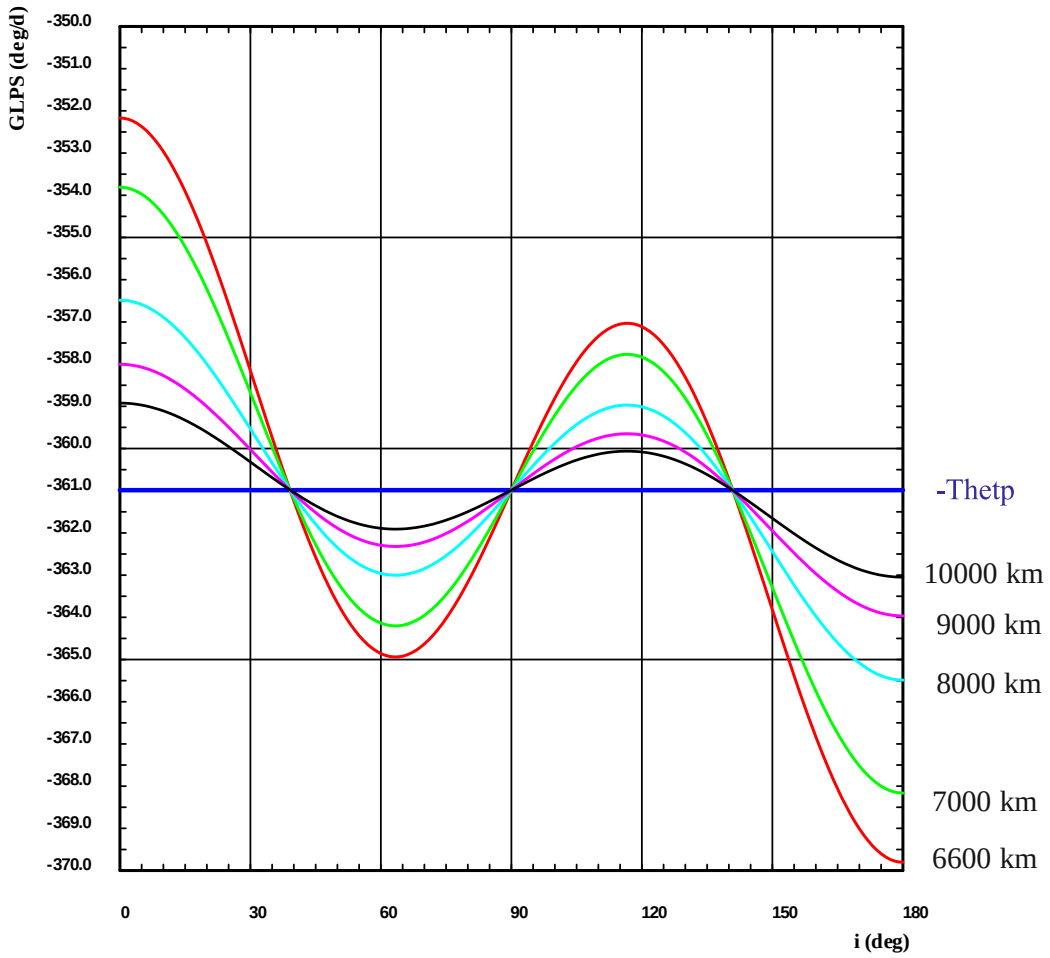


Bild 22-17: Theoretische Beschreibung der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene große Bahnhalbachsen für Kreisbahnen, zum Vergleich ist die tropische Erd-Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) (der negative Wert) eingetragen

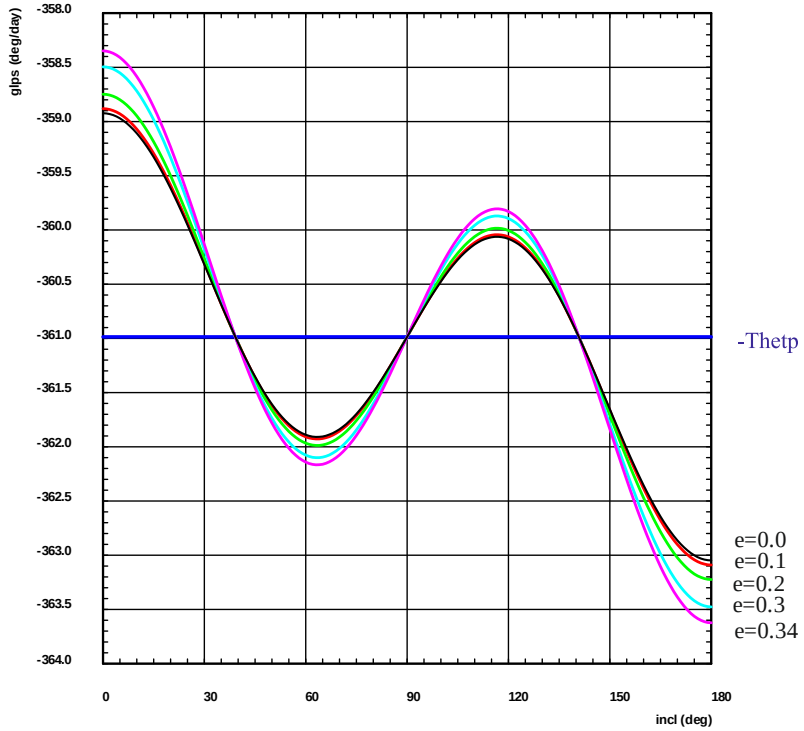


Bild 22-18: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse a = 10000 km und minimale Perigäumshöhe über 200 km. Zum Vergleich ist die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) eingetragen

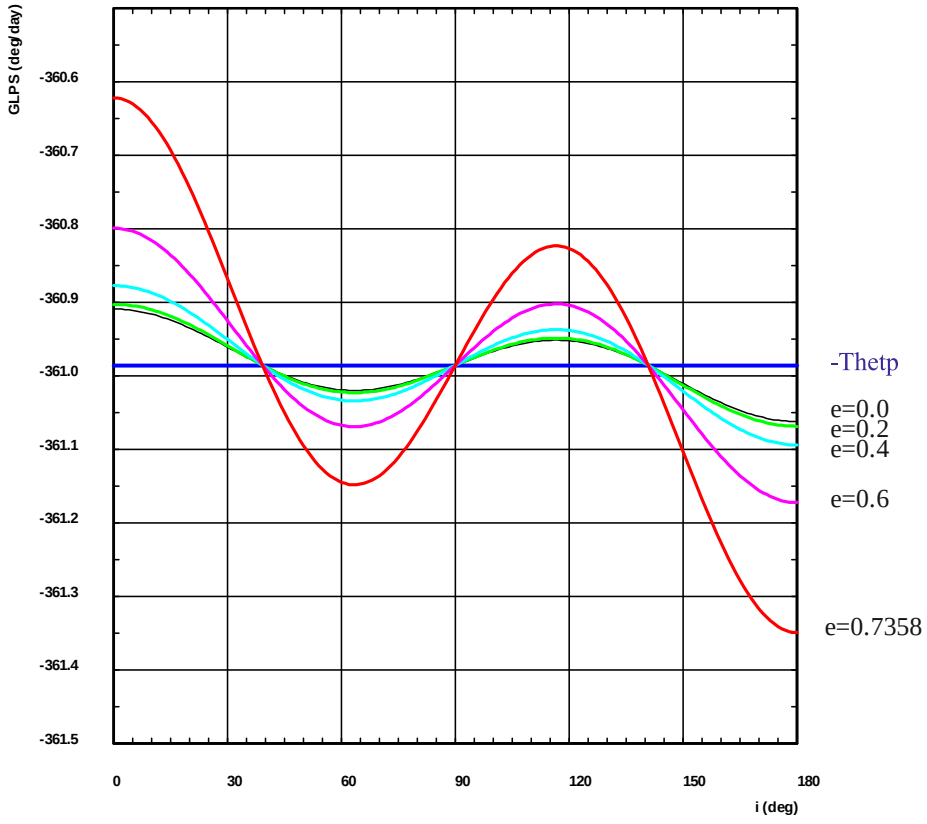


Bild 22-19: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für eine Übergangsbahn in eine geostationäre Bahn

22.9.3.2 Die genäherte wahre Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums

Entsprechend der Darstellung der Verschiebung (22.208) der wahren geographischen Länge des Perigäums pro anomalistischem Umlauf, muss nur der erste Anteil auf der rechten Seite betrachtet werden. Mit der Entwicklung (22.100) führt die Variationsgleichung (22.203) auf den Näherungsausdruck

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_P}{d\upsilon} &= \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} = \\ &= -\frac{r^2}{e\,\mu}\frac{\cos i}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] + \frac{r^3}{G^2}\frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}b_N + \cdots .\end{aligned} \tag{22.211}$$

Mit Linearisierungen um die mittleren Anfangswerte $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{p}_0 = \bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right), \bar{i}_0, \bar{\omega}_0\right)$ ergibt sich als zweite Näherung

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_P}{d\upsilon} = -\frac{\bar{p}_0^2}{\mu\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}\Bigg[&\frac{\cos\bar{i}_0\cos\upsilon}{\bar{e}_0\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^2}b_{R2} - \frac{\cos\bar{i}_0\sin\upsilon}{\bar{e}_0\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\left(2+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)b_T + \\ &+ \frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^3}b_N\Bigg] + \cdots\end{aligned} \tag{22.212}$$

Werden hier die Beschleunigungen erster Ordnung auf Grund des Gravitationsfeldes der Erde eingesetzt (nach Abschnitt 17.2.2, Band III)

$$\begin{aligned} b_{R2} &= \frac{3}{2}\mu J_2\frac{R_E^2}{r^4}\left(3\sin^2 i\sin^2 u - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \\ b_T &= -\frac{3}{4}\mu J_2\frac{R_E^2}{r^4}\sin^2 i\,\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \\ b_N &= -\frac{3}{2}\mu J_2\frac{R_E^2}{r^4}\sin 2i\,\sin u + O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{22.213}$$

und wird wieder die Linearisierung um die mittleren Anfangswerte durchgeführt, bleibt schließlich

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_P\left[P_a\right] = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}}d\upsilon &= \frac{3}{2}\frac{J_2 R_E^2}{\bar{p}_0^2\left(1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0\right)} \times \\ \times\Bigg\{&\sin\bar{i}_0\sin 2\bar{i}_0\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\sin\upsilon\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)\left[\sin\upsilon\cos\bar{\omega}_0+\cos\upsilon\sin\bar{\omega}_0\right]d\upsilon - \\ &-\frac{\cos\bar{i}_0}{\bar{e}_0}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\cos\upsilon\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^2\left[3\sin^2\bar{i}_0\left(\sin\upsilon\cos\bar{\omega}_0+\cos\upsilon\sin\bar{\omega}_0\right)^2-1\right]d\upsilon - \\ &-\frac{\cos\bar{i}_0}{\bar{e}_0}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\sin\upsilon\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^2\left(2+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)\times \\ &\times\left[\sin\upsilon\cos\bar{\omega}_0+\cos\upsilon\sin\bar{\omega}_0\right]\left[\cos\upsilon\cos\bar{\omega}_0-\sin\upsilon\sin\bar{\omega}_0\right]d\upsilon\Bigg\} \quad .\end{aligned} \tag{22.214}$$

Die hier benötigten Integrationen können mit Hilfe der in Anhang D2 zusammengestellten bestimmten Integrale durchgeführt werden. Da die hier untersuchte Formel in der Praxis der Satellitenbahnanalyse keine besondere Rolle spielt, wollen wir diesen Weg hier nicht weiter verfolgen.

22.9.3 Die Variation der geographischen Position des Apogäums

Die geographischen Koordinaten (λ_A, δ_A) des Apogäums einer Satellitenbahn werden berechnet, wenn $\omega_A = \omega + 180°$ das Argument der Breite des Apogäums ist, aus dem System

$$\begin{aligned} \sin\delta_A &= -\sin\omega\,\sin i \\ \cos\delta_A &= \sqrt{1-\sin^2\delta_P} \\ \cos(\lambda_A-\lambda_\Omega)\cos\delta_P &= -\cos\omega \\ \sin(\lambda_A-\lambda_\Omega)\cos\delta_P &= -\sin\omega\,\cos i \quad . \end{aligned} \tag{22.215}$$

Durch die Differentiation folgt

$$\dot\lambda_A - \dot\lambda_\Omega = \frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\dot\omega - \frac{\sin i\sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}(i)^{\cdot} \quad , \tag{22.216}$$

somit die (triviale) Aussage:

$$\dot\lambda_A = -\frac{G}{e\,\mu}\frac{\cos i}{1-\sin^2 i\sin^2\omega}\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] + \frac{r}{G}\frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}b_N - \dot\Theta = \dot\lambda_P\,. \tag{22.217}$$

Entsprechendes gilt für die Variation der Deklination des Apogäums.

22.10 Bahnauswahl aus Drift der Perigäumslänge

Im Fall der Satellitenbewegung werden ausgehend von der Beziehung (22.209) die säkularen Variationen erster Ordnung durch das Gravitationsfeld der Erde berücksichtigt. Nach Formel (22.186) ist

$$\dot\omega_{Gs} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar a_0^3}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar a_0^2\left(1-\bar e_0^2\right)^2}\left(5\cos^2\bar i_0 - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.218}$$

entsprechend den Ausdrücken (20.14) und (20.15)[1]

$$\begin{aligned} (i_{Gs})^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dot\Omega_{Gs} &= -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar a_0^3}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar a_0^2\left(1-\bar e_0^2\right)^2}\cos\bar i_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{22.219}$$

[1] Band III, Abschnitt 20.2.1

Diese Ausdrücke in Formel (22.201) ergeben die Bedingungsgleichung der säkularen Variation durch das Gravitationsfeld der Erde für die geographische Länge des Perigäums

$$\dot{\lambda}_{PGs} = \dot{\Omega}_{Gs} + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i \, \sin^2 \omega} \dot{\omega}_{Gs} - \dot{\Theta} \tag{22.220}$$

somit in erster Ordnung

$$\dot{\lambda}_{PGs0} + \dot{\Theta} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.221}$$

22.10.3 Mittlere große Bahnhalbachse aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere große Bahnhalbachse zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann aus dem Ausdruck (22.221) berechnet werden:

$$\bar{a}_0^{(1)} = \sqrt[7]{\mu\left[\frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2\left(\dot{\lambda}_{PGs} + \dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right)\right]^2} \quad . \tag{22.222}$$

Die Berechnung wird ungenau für große Exzentrizitäten, außerdem für Polbahnen $\left(\bar{i}_0 = 90°\right)$ und wenn die Apside über dem Pol liegt $\left(\bar{\omega}_0 = 90° \text{ oder} = 270°\right)$. Eine Verbesserung der Berechnung der mittleren großen Bahnhabachse ist möglich mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs0}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.223}$$

Zur Durchführung einer sukzessiven Approximation als einem vereinfachten *Newton*-Verfahren wird die Ableitung der Bedingungsgleichung nach der gesuchten Halbachse nach (22.220) benötigt:

$$\frac{d\left(fct\right)}{d\bar{a}_0} = \frac{d\left(\dot{\lambda}_{PGs}^{(k)}\right)}{d\bar{a}_0} = \frac{d\left(\dot{\Omega}_{Gs}\right)}{d\bar{a}_0} + \frac{\cos \bar{i}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0}\frac{d\left(\dot{\omega}_{Gs}\right)}{d\bar{a}_0} \quad . \tag{22.224}$$

Im Fall der Einflüsse erster Ordnung durch das Erdschwerefeld folgt aus (22.221)

$$\frac{d\left(fct\right)}{d\bar{a}_0} = -\frac{21}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^4\sqrt{\bar{a}_0}}\frac{J_2 R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right] + \cdots \quad . \tag{22.225}$$

Eine Einschränkung in den Berechnungen wird durch die Höhe des Perigäums vorgegeben, die nicht unterschritten werden darf. Wird hierfür der Wert $H_P = r_P - R_E$ gewählt, so kann die zugehörige erlaubte Exzentrizität in Bezug auf die große Bahnhalbachse aus

$$\bar{e}_0 = 1 - \frac{r_P}{\bar{a}_0} \tag{22.226}$$

berechnet werden. Wird dieser Wert mit fest vorgegebenem Perigäumsradius r_P in (22.222) eingesetzt, kann die Grenzkurve Halbachse über Inklination iterativ aus der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0^{(1)}\right) \equiv \bar{a}_0^{(1)} - \sqrt[7]{\mu\left[\frac{3}{4}\frac{J_2\, R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\left[1-\left(1-\frac{r_P}{\bar{a}_0^{(1)}}\right)^2\right]^2}\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)\left(\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right)\right]^2} = 0 \qquad (22.227)$$

berechnet werden. Es zeigt sich, dass damit eine obere Schranke für die Exzentrizität notwendig erhalten wird.

BEISPIEL 1: Berechnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe von Exzentrizität, Inklination und Argument des Perigäums. Gegeben sei die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Mit Annahme der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$, der Inklination $\bar{i}_0 = 25°$, sowie dem Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$ liefert Formel (22.222) die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 10929.084\,\mathrm{km}$. Da die Kontrolle mit Formel (22.220) den Wert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.0033656701/\mathrm{d}$ ergibt, der eine Abweichung vom vorgegebenen Sollwert $\dot{\lambda}_{PGs}$ im zweistelligen Sekundenbereich hat, ist eine iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.223) erforderlich. Diese ergibt die große Halbachse $\bar{a}_0^{(1)} = 10918.38742930\,\mathrm{km}$, somit die Korrektur $\Delta a = \bar{a}_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(0)} = \text{-}10.69703\,\mathrm{km}$. Damit liefert die Kontrolle für die Längendrift den geforderten Wert auf mindestens 10 Stellen nach dem Komma genau.

Wenn dagegen $\bar{\omega}_0 = 60°$ vorgegeben ist, wird als erster Näherungswert für die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 12114.995\,\mathrm{km}$ erhalten. Das Argument des Perigäums hat ersichtlich wesentlichen Einfluss auf die Berechnungen. Die Kontrolle mit Formel (22.220) ergibt den Wert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.3002670930/\mathrm{d}$. Die iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.223) liefert $\bar{a}_0^{(1)} = 12108.73332653\mathrm{km}$ mit der Korrektur $\Delta a = \bar{a}_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(0)} = \text{-}6.26214\,\mathrm{km}$. Die a-posteriori Genauigkeit liegt unter 2×10^{-12}.◀

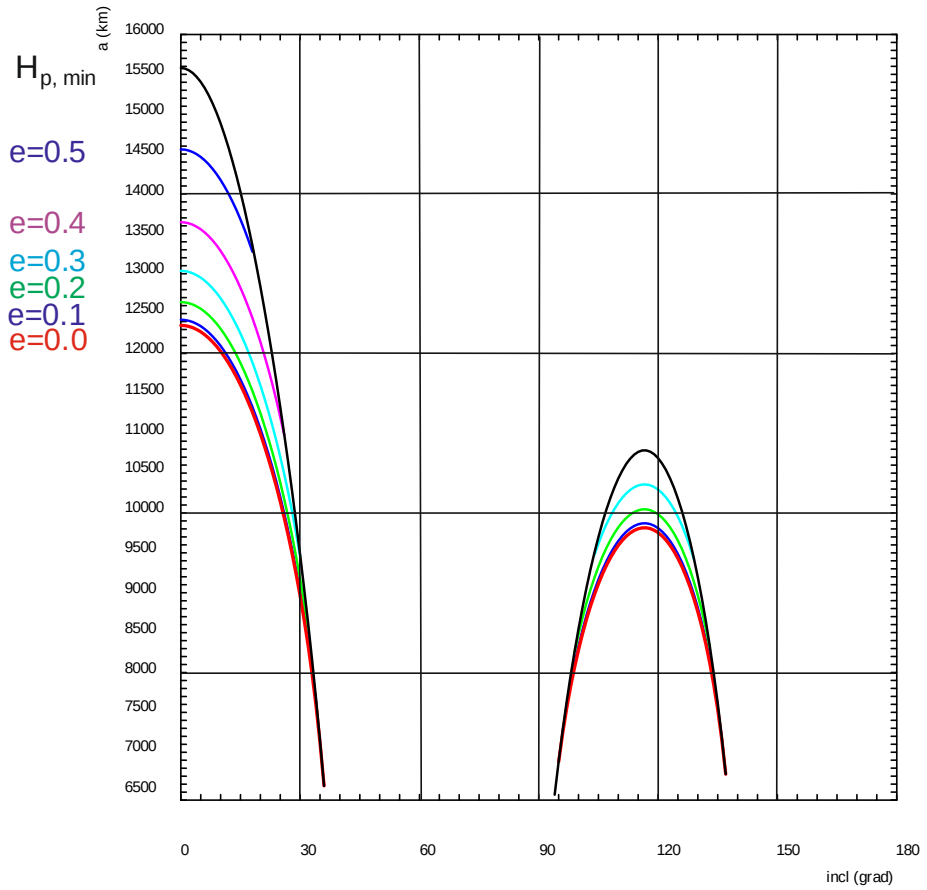


Bild 22-20: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten bei Annahme der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, Die Berechnung wird eingeschränkt durch Vorgabe der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Im Beispiel ist $\bar{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben.

BEISPIEL 2: Berechnung von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität bei Vorgabe von minimaler Perigäumshöhe $H = 200$ km, Inklination $\bar{i}_0 = 25°$ und Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$. Gegeben sei die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Um eine Iteration mit Formel (22.227) starten zu können, wird ein Anfangswert für die große Bahnhalbachse benötigt, bzw. nach Formel (22.226) für die Exzentrizität. In Bild 22-20 ist die Halbachse über der Inklination für eine feste Drift der Perigäumslänge für verschiedene Exzentrizitäten aufgetragen. Es ist zu ersehen, dass für die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.0$ das größte Inklinationsintervall erhalten wird. Um also das Problem unabhängig von einer gewählten Inklination bearbeiten zu können, ist es sinnvoll als Anfangswert für die gestellte Aufgabe stets $\bar{e}_0 = 0.0$ zu wählen. Im aktuellen Fall wird dann aus Formel (22.222) der Näherungsausdruck $\bar{a}_0 = 10142.700$ km erhalten. Die iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.227) ergibt eine Korrektur um $\Delta\bar{a}_0 = 1184.75610$ km. Die endgültige Lösung beträgt somit $\bar{a}_0 = 11327.456$ km, die zugehörige Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.41927498$. Die a posteriori Genauigkeit beträgt $\left| fct\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)\right| = 4\times10^{-6}$. Zur Durchführung der Iteration war die Schrittweite $\bar{a}_0/100[\mathrm{km}]$ gewählt worden, bevor das stabile Verfahren fortgesetzter Halbierung einsetzen kann. Die Ableitung der Bedingungsfunktion (22.225) beträgt in diesem Fall

$d(fct)/d(\bar{a}_0) = -6\times10^{-8}$, was aber die langsame Konvergenz des Verfahrens nicht wesentlich beeinflusst. ◀

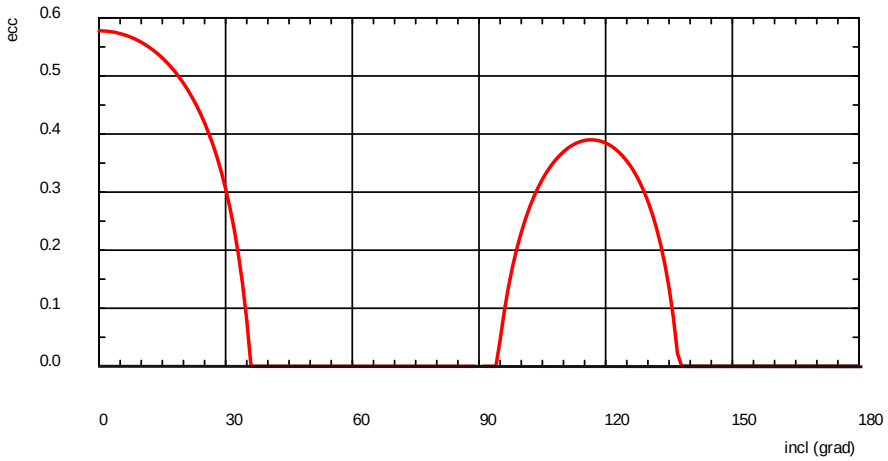


Bild 22-21: Verlauf der (mittleren) Exzentrizität $\bar{e}_0$ über der Inklination für Satellitenbahnen mit der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$ und bei der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Dies ist die Grenzexzentrizität, die erreicht werden kann, wenn die obige säkulare Drift der Perigäumslänge eingehalten werden soll. Im Beispiel ist $\bar{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben.

BEISPIEL 3: Übersicht über alle möglichen Bahnen, welche die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$ und mindestens die Perigäumshöhe 200 km haben. Bei diesen Bahnen ist auch eine höhere Perigäumshöhe zugelassen. Mit den in den beiden vorstehenden Beispielen angewandten Verfahren wird in diesem Beispiel als Funktion der Inklination und für verschiedene Exzentrizitäten die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ berechnet. Außerdem wird in jedem Fall die mögliche Grenzexzentrizität für den Fall berechnet, dass die Bahn exakt die minimale Perigäumshöhe $H = 200\,\mathrm{km}$ annimmt. Die entsprechende Kurve, die in Bild 22-20 als schwarze Kurve eingetragen ist, hüllt die Schar möglicher Bahnen ein. Die Kurven aller dieser möglichen Bahnen enden auf der Kurve der Grenzexzentrizitäten. In Bild 22-21 ist der Verlauf der Grenzexzentrizität aufgetragen. Das Bild zeigt als Ergebnis: es gibt keine Erdsatellitenbahn mit einer höheren Exzentrizität, wenn nach genau einem mittlerem Sonnentag das Perigäum wieder über demselben geographischen Längengrad stehen soll, wobei die minimaler Perigäumshöhe exakt den Wert $H = 200\,\mathrm{km}$ und das mittlere Argument des Perigäums den Wert $\bar{\omega}_0 = 0°$ annehmen sollen. ◀

BEISPIEL 4: In den bisherigen drei Beispielen wurde die Längendrift des Perigäums so gewählt, dass nach genau einem mittleren Sonnentag das Perigäum sich exakt wieder über demselben Längengrad befindet. Da das Argument des Perigäums von den Einflüssen der Erdabplattung abhängt, muss in diesem Fall (außer bei Äquatorbahnen) erwartet werden, dass sich die geographische Breite des Perigäums notwendig ändert. Einen Hinweis liefert die in Tabelle 22-3 berechnete Abfolge der Apsiden: man erkennt eine langsame aber merkbare Drift der geographischen Breiten phi der Apogäen wie der Perigäen. ◀

Anmerkung: In Tabelle 22-3 befindet sich zum angegebenen Zeitpunkt der Satellit an der angegebenen Position. Wenn die Lage des Perigäums nach einem Tag betrachtet wird, so befindet sich der Satellit nicht notwendig im Perigäum seiner Bahn. Die Vorgabe der Drift des

Perigäums einer Satellitenbahn hat somit nichts mit der Bewegung des Satelliten in seiner Bahn zu tun. ◀

P	A	N	M	YEAR	MO	DA	HO	MI	SE	L(deg)	phi(deg)	H(km)	AR(deg)	DE(deg)
P		0	0	2016	1	16	11	37	24.619	344.378	-25.046	2714.298	274.084	-24.942
	A	0	0	2016	1	16	13	17	20.605	208.145	7.785	9102.315	162.902	7.764
P		1	0	2016	1	16	14	57	16.591	294.494	-25.032	2714.294	274.303	-24.929
	A	1	0	2016	1	16	16	37	12.577	158.185	7.613	9102.298	163.045	7.592
P		2	0	2016	1	16	18	17	8.563	244.610	-25.017	2714.290	274.522	-24.914
	A	2	0	2016	1	16	19	57	4.549	108.224	7.441	9102.281	163.188	7.420
P		3	0	2016	1	16	21	37	0.535	194.726	-25.001	2714.285	274.742	-24.898
	A	3	0	2016	1	16	23	16	56.521	58.264	7.268	9102.265	163.331	7.248
P		4	0	2016	1	17	0	56	52.508	144.842	-24.983	2714.280	274.961	-24.880
	A	4	0	2016	1	17	2	36	48.494	8.303	7.095	9102.249	163.473	7.076
P		5	0	2016	1	17	4	16	44.480	94.957	-24.964	2714.274	275.180	-24.861
	A	5	0	2016	1	17	5	56	40.466	318.341	6.922	9102.233	163.615	6.903
P		6	0	2016	1	17	7	36	36.452	45.073	-24.943	2714.269	275.398	-24.840
	A	6	0	2016	1	17	9	16	32.438	268.380	6.748	9102.218	163.757	6.729
P		7	0	2016	1	17	10	56	28.424	355.188	-24.921	2714.262	275.617	-24.818
	A	7	0	2016	1	17	12	36	24.410	218.418	6.574	9102.203	163.899	6.556
P		8	1	2016	1	17	14	16	20.396	305.303	-24.897	2714.256	275.835	-24.794

Tabelle 22-3: Die Abfolge von Perigäen (P) und Apogäen (A) und ihre geographischen Positionen für die Bahn $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, a=11327.456, e=0.4192750, i=25°, ω=0°.

BEISPIEL 5: In allen vorstehenden Beispielen wurde angenommen, dass das erste Perigäum auf dem Äquator liegt $\left(\bar{\omega}_0 = 0°.0\right)$. Formel (22.222) lässt jedoch vermuten, dass mit wachsender Inklination auch der Einfluss eines wachsenden Argumentes des Perigäums die Berechnung der Bahnparameter beeinflussen wird. Um dies zu demonstrieren wird mit $\sin\bar{\omega}_0 = 1$ der maximal mögliche Einfluss untersucht. Das Ergebnis ist in Bild 22-22 dargestellt. Ein Vergleich mit Bild 22-20 zeigt nur geringe Abweichungen für Inklinationen unter 90°, jedoch erhebliche für rückläufige Bahnen. Genauere Daten unter Einschluss des Zwischenwertes $\left(\bar{\omega}_0 = 45°.0\right)$ sind in Tabelle 22-4 enthalten. Alle Bahnen wurden wieder für die säkulare Drift $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$ gerechnet. In allen drei Fällen hat die große Bahnhalbachse im Fall i = 0° den maximalen Wert 15580.0 km, die Exzentrizität e = 0.5777855. Dieses erste Intervall möglicher Bahnen wird mit zunehmendem Argument des Perigäums etwas größer mit wachsender Inklination. Das zweite Intervall für Inklinationen größer als 90° sind die Verhältnisse auffallend anders. Das Inklinationsintervall wird immer enger, so als würden die Kurven gestaucht (vgl. Bild 22-22 auf Seite 94 und die Zusammenstellung in Tabelle 22-4). Damit verbunden wird die große Bahnhalbachse wie entsprechend auch die Exzentrizität erheblich größer als im Fall $\bar{\omega}_0 = 0°$. Dieses Verhalten muss bei langfristigen Untersuchungen sorgfältig berücksichtigt werden, da das Argument des Perigäums langfristig wächst, so dass im Lauf der Zeit das Bahnverhalten grundsätzlich periodisch variiert, obwohl nur die säkulare Variation des Argumentes des Perigäums betrachtet wird. ◀

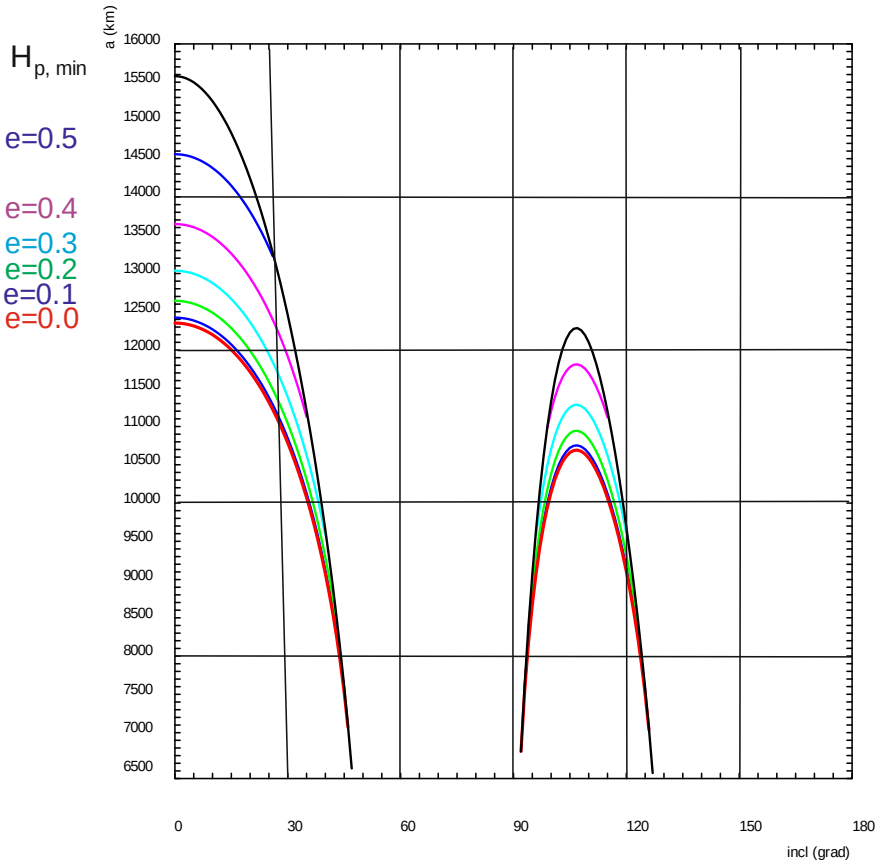


Bild 22-22: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten bei Annahme der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, Die Berechnung wird eingeschränkt durch Vorgabe der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Im Beispiel ist $\overline{\omega}_0 = 90°$ vorgegeben.

$\overline{\omega}_0$	Erstes Intervall	Zweites Intervall			
		a_{max}	e_{max}	i_{max}	
0°	i = 0° → i = 39°	10784.07 km	0.3900744	117°	i = 95° → i = 140°
45°	i = 0° → i = 47°	11724.47 km	0.4389396	108°	i = 95° → i = 130°
90°	i = 0° → i = 48°	12286.52 km	0.4646054	107°	i = 95° → i = 128°

Tabelle 22-4: Übersicht über das Bahnverhalten bei Vorgabe der säkularen Drift des Perigäums $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$.

BEISPIEL 6: In den bisherigen Beispielen wurde stets angenommen, dass die Länge des Perigäums im Verlauf eines Tages um genau 360° verschoben wird, das Perigäum sich somit stets wieder über demselben Längengrad befindet. Im vorliegenden Beispiel wird untersucht, wie sich eine Veränderung der säkularen Drift des Perigäums auf die Bahnauswahl auswirkt. In jedem Fall wird wieder angenommen, dass der Start der Untersuchungen auf dem Äquator beginnt $(\overline{\omega}_0 = 0°)$. Es zeigt sich für unterschiedliche Driften des Perigäums, dass diese extrem sensitiv die Bahnauswahl beeinflussen. Das merkwürdige Verhalten wird in Bild 22-23 bis Bild 22-27 demonstriert. Entscheidend ist die Abweichung der Drift des Perigäums von

der tropischen Rotation der Erde[1] $\dot{\Theta} \approx 361° / d$. Formel (22.222) zeigt Singularität für den Fall $\dot{\lambda}_{PGs} = -\dot{\Theta}$. In diesem Fall kann keine Bahn mit der vorgegebenen Drift gefunden werden. Allerdings sind für Driften nahe der tropischen Erdrotation Bahnen mit hohen Exzentrizitäten und bei vorgegebener Perigäumshöhe mit hoher Apogäumshöhe möglich. Mit zunehmendem Abstand von $\dot{\Theta}$ wird die Bahnauswahl immer geringer und dann auch nur noch für wenige Inklinationen möglich. Der singuläre Fall $\dot{\lambda}_{PGs} = -\dot{\Theta}$ wirkt als Spiegelung der Bahnauswahl: der Fall $\left|\dot{\lambda}_{PGs}\right| > \dot{\Theta}$ wird in Bild 22-26 und Bild 22-27 gezeigt. Vergleiche dazu etwa Bild 22-25 und Bild 22-26. ◀

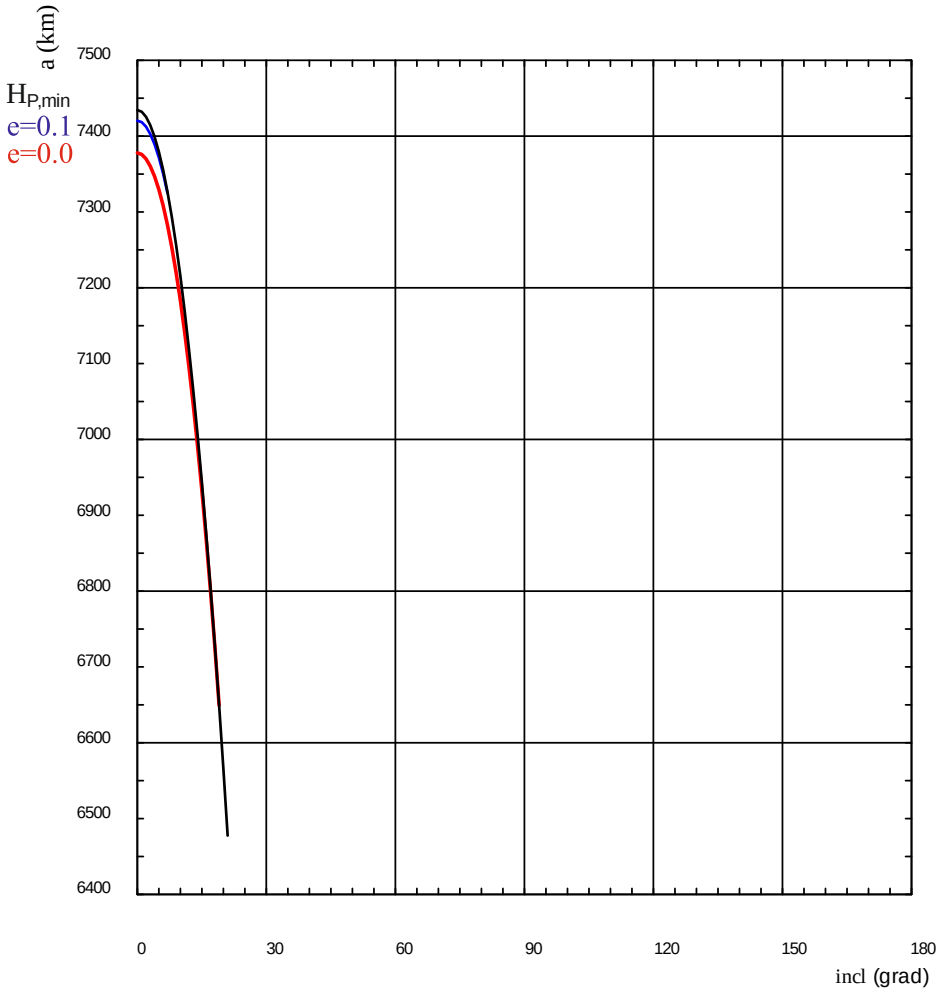


Bild 22-23: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ über der Inklination für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -355°.0 / \mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\bar{\omega}_0 = 0°$

[1] Der exakte Wert ist in Tabelle 7 in Anhang E.2 (Band V) enthalten

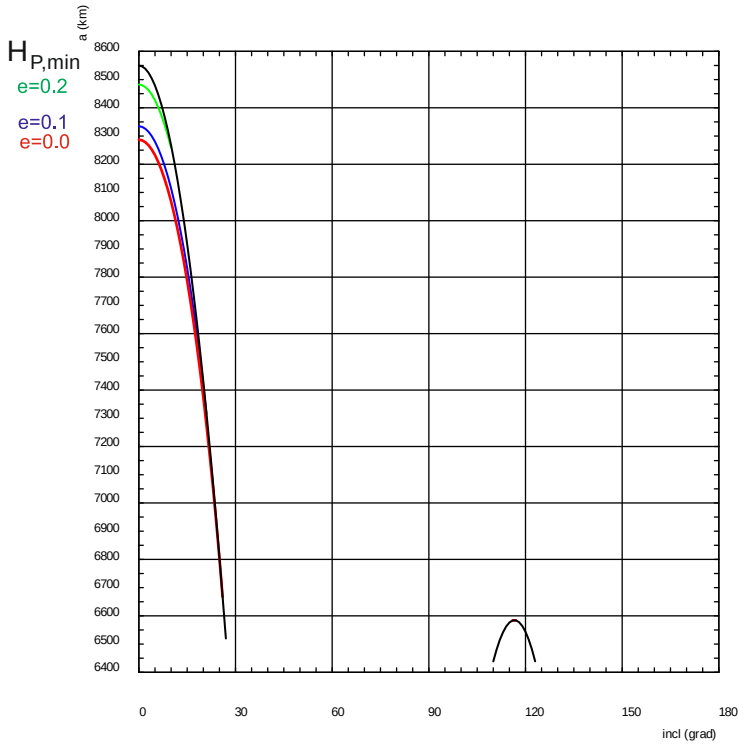


Bild 22-24: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -357°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$

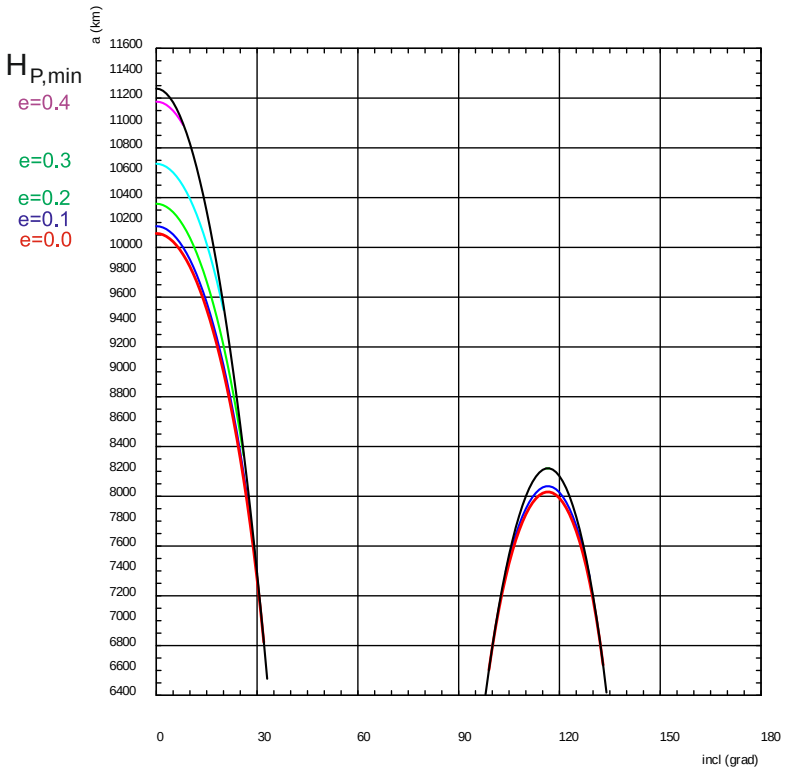


Bild 22-25: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -359°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$

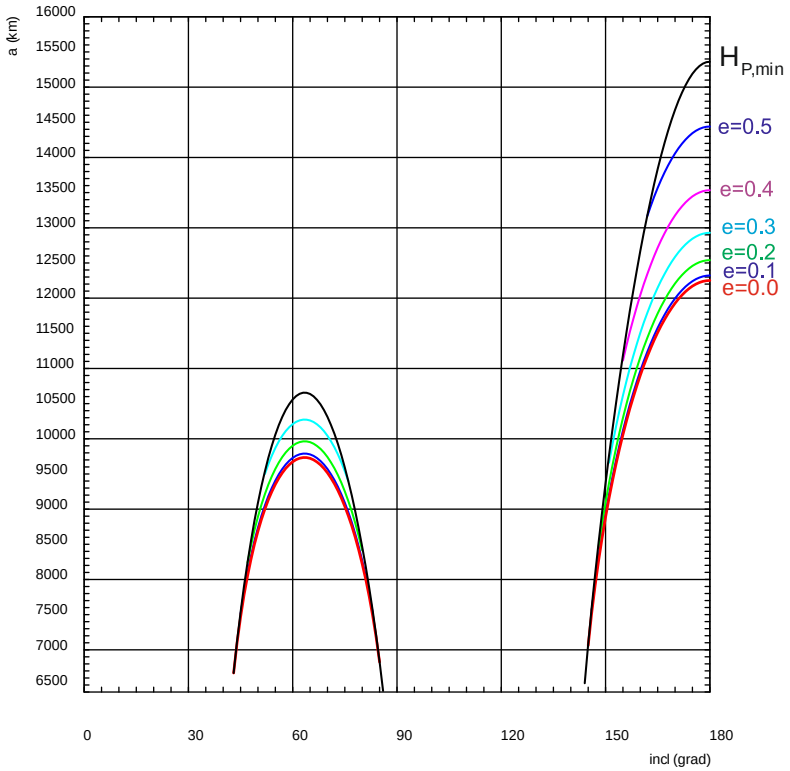


Bild 22-26: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -362°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\bar{\omega}_0 = 0°$.

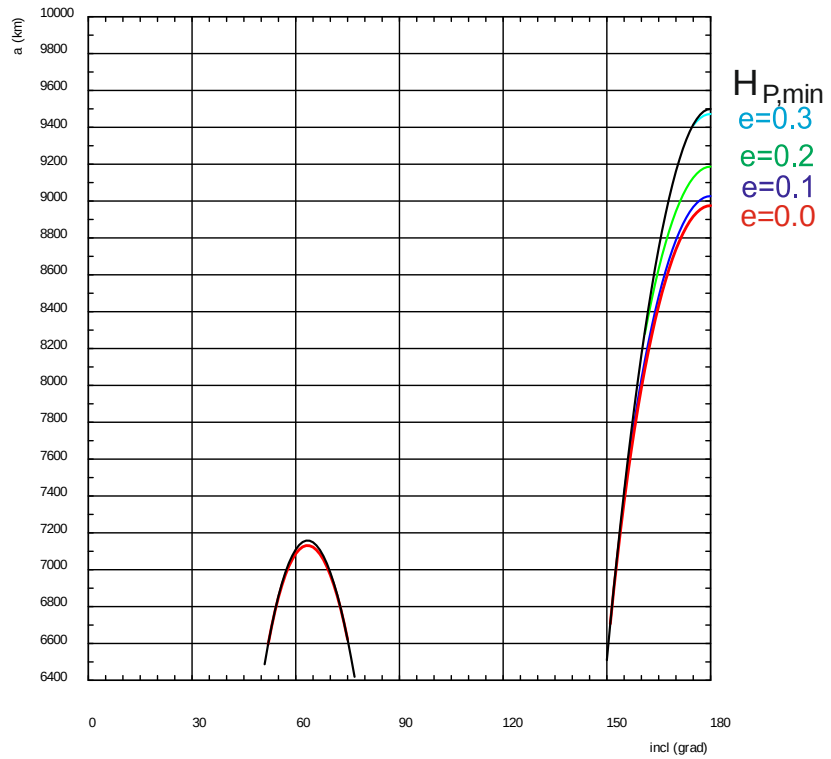


Bild 22-27: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ für die Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -364°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\bar{\omega}_0 = 0°$

22.10.4 Mittlere Exzentrizität aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere Exzentrizität zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann wieder aus dem Ausdruck (22.221) berechnet werden:

$$\bar{e}_0^{(1)} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0}}\frac{J_2 R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\bar{a}_0^3\left(\dot{\lambda}_{PGs} + \dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right)}} \quad . \tag{22.228}$$

Als notwendige Vorbedingung für die Existenz der Exzentrizität muss die Bedingung

$$0 \le \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0}}\frac{J_2 R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\bar{a}_0^3\left(\dot{\lambda}_{PGs} + \dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right) \le 1 \tag{22.229}$$

erfüllt sein. Damit ist auch klar, dass die Formel (22.228) nur für elliptische Bahnen gültig sein kann.

Falls benötigt kann analog zur Bedingungsgleichung (22.223) eine Verbesserung erhalten werden mit der Gleichung

$$fct\left(\bar{e}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.230}$$

Die Ableitung nach der Exzentrizität lautet

$$\frac{d\dot{\lambda}_{PGs0}}{d\bar{e}_0} = 3\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{\bar{e}_0 R_E^2 \cos \bar{i}_0}{\bar{a}_0^2\left(1 - \bar{e}_0^2\right)^3}\left[\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.231}$$

BEISPIEL 1: Zur Überprüfung von Formel (22.228) wird mit den Ergebnissen aus dem vorstehenden Beispiel 1 bei Vorgabe der säkularen Drift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, der Inklination i = 25° , des Arguments des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$ und der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10918.38742930\,\mathrm{km}$ die Exzentrizität mit Formel (22.228) berechnet: es ergibt sich $\bar{e}_0^{(0)} = 0.3478432916473$. Eine iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.230) und der a-priori Forderung $\Delta e = 10^{-6}$ ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3500003228973$, d.h. den gesuchten Wert 0.35 in ausreichender Genauigkeit. Zur Kontrolle wird die säkulare Drift der Perigäumslänge für diese Exzentrizität berechnet: sie lautet $\dot{\lambda}_{PGs}^{(1)} = -359°.9999994932/\mathrm{d}$ mit der a-posteriori Genauigkeit $\Delta\dot{\lambda}_{PGs} = 10^{-6}$ entsprechend besser als 4×10^{-4} Bogensekunden. ◀

BEISPIEL 2: Mit $\bar{\omega}_0 = 60°$ und der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 12108.73332653\,\mathrm{km}$ ergibt sich (wieder mit der Inklination i = 25°) der erste Näherungswert $\bar{e}_0^{(0)} = 0.3488634172138$. Die iterative Verbesserung ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3500001359638$ entsprechend dem Kontrollwert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(1)} = -359.9999997863/\mathrm{d}$. ◀

22.10.5 Mittlere Inklination aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere Inklination zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann wieder aus dem Ausdruck (22.221) berechnet werden. Die Auflösung nach $\cos \bar{i}_0^{(1)}$ führt auf eine kubische Gleichung der Form

$$A\cos^3 \bar{i}_0^{(1)} + B\cos^2 \bar{i}_0^{(1)} + C\cos \bar{i}_0^{(1)} + D = 0 \tag{22.232}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} &A := F\left(5 - 2\sin^2 \bar{\omega}_0\right), B := -\sin^2 \bar{\omega}_0, C := -F\left(3 - 2\sin^2 \bar{\omega}_0\right), D := -\cos^2 \bar{\omega}_0, \\ &F := \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \frac{J_2 R_E^2}{\left(\dot{\lambda}_{PGs} + \dot{\Theta}\right)\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \end{aligned} \tag{22.233}$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann nach einer der bekannten Methoden, etwa mit der Cardanischen Formel oder mit einem numerischen Verfahren (*Newton* Iteration) durchgeführt werden. Letzteres empfiehlt sich in der praktischen Anwendung um eine eindeutige Lösung erhalten zu können. Falls für einen Näherungsprozess eine Anfangslösung benötigt wird, kann diese folgendermaßen hergeleitet werden[1]: mit den Hilfsgrößen

$$q := \frac{B^3}{27A^3} - \frac{BC}{6A^2} + \frac{D}{2A} \quad , \quad p := \frac{3AC - B^2}{9A^2} \tag{22.234}$$

wird die Diskriminante

$$\Delta := q^2 + p^3 \tag{22.235}$$

gebildet. Wenn diese positiv ist, hat die kubische Gleichung genau die eine reelle Lösung

$$\cos \bar{i}_0^{(1)} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad , \tag{22.236}$$

die beiden anderen Lösungen sind komplex. Falls die Diskriminante negativ ist, sind alle drei Wurzeln reell und es muss numerisch die passende Lösung gesucht werden.

Ausgehend von der hier hergeleiteten Näherungslösung kann eine Verbesserung gefunden werden analog Bedingungsfunktion (22.223) aus

$$fct\left(\bar{i}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.237}$$

Mit den Ausdrücken (22.218) - (22.220) wird in diesem Fall

$$\dot{\omega}_{Gs}^{(k)} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2 \bar{i}_0^{(k)} - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{22.238}$$

$$\dot{\Omega}_{Gs}^{(k)} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos \bar{i}_0^{(k)} + O\left(J_2^2\right) \tag{22.239}$$

und somit für die Drift der geographischen Länge des Perigäums

---

[1] Siehe etwa in BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962], p. 117

$$\dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} = \dot{\Omega}_{Gs}^{(k)} + \frac{\cos \bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0} \dot{\omega}_{Gs}^{(k)} - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.240}$$

Um die sukzessive Iteration durchführen zu können, wird die Ableitung der Bedingungsgleichung (22.237) benötigt, die hier im Hinblick auf ein genähertes *Newton*-Verfahren nur für die Anfangslösung $\bar{i}_0^{(1)}$ verwendet wird:

$$\begin{aligned} \frac{d(fct)}{d\bar{i}_0^{(k)}} = &-\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^3 \sqrt{\bar{a}_0}} \frac{J_2 R_E^2 \sin \bar{i}_0^{(k)}}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[1 + \frac{5\cos^2 \bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0} \right] + \\ &+ \frac{\sin \bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0} \left[-1 + \frac{2\cos^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin \bar{\omega}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0} \right] \dot{\omega}_{Gs}^{(k)} + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{22.241}$$

BEISPIEL 1: In Umkehrung der vorherigen Beispiele werden neben der Längendrift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$ die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$ und die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10918.387\,\mathrm{km}$ sowie eine rechtläufige Bahn $\mathrm{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right) = +1$ vorgegeben. Das mittlere Argument des Perigäums sei $\bar{\omega}_0 = 0°.0$. Die Diskriminante (22.235) ergibt $\Delta = 0.002065195911273$. Somit liefert Formel (22.236) nur eine reelle Lösung: $\bar{i}_0^{(0)} = 25°.04990814309$. Als Kontrolle wird die säkulare Drift der Perigäumslänge berechnet: $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.0/\mathrm{d}$. Eine Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsgleichung (22.237) ergibt $\bar{i}_0^{(1)} = 25°.00000000533$. Die a-posteriori Genauigkeit liegt somit bei 2×10^{-5} Bogensekunden. ◀

BEISPIEL 2: Im Fall $\bar{\omega}_0 = 60°.0$ wird nach Beispiel 1 in Abschnitt 22.10.3 die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0^{(1)} = 12108.73332653\mathrm{km}$ vorgegeben sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$ und wie oben die säkulare Längendrift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Es wird eine rechtläufige Bahn angenommen $\left(\mathrm{sgn}(\cos \bar{i}_0) = +1\right)$. Die erste Näherung für die Inklination beträgt $\bar{i}_0^{(0)} = 32°.4964469167$ mit dem Kontrollausdruck $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.6654078993/\mathrm{d}$. Wie im vorherigen Beispiel sollte die Inklination *i* =25° betragen. Das Beispiel zeigt wie außerordentlich empfindlich diese Berechnungen sind, die ohne eine iterative Verbesserung kein brauchbares Ergebnis liefern. Die Iteration ergibt $\bar{i}_0^{(0)} = 25°.00000000757$, die a-posteriori Genauigkeit beträgt 2×10^{-10} Grad in der Perigäumslängendrift. ◀

Anmerkung: Die Auswahl der Inklination bei Vorgabe der Perigäumslängendrift ist wie etwa ein Blick auf Bild 22-17 bis Bild 22-27 zeigt, nicht eindeutig oder gar nicht möglich. In der praktischen Anwendung wird es deshalb vorteilhaft sein, an Hand eines solchen Diagramms eine erste Auswahl für Inklination und große Bahnhalbachse zu treffen um dann anschließend mit einem der hier geschilderten analytischen Verfahren eine verfeinerte Bahnauswahl zu finden. ◀

22.10.6 Mittleres Argument des Perigäums aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ vorgegeben.

Aus (22.221) kann erhalten werden:

$$\sin\overline{\omega}_0 = \pm\frac{1}{\sin\overline{i}_0}\sqrt{1-\frac{\left(5\cos^2\overline{i}_0-1\right)J_2\,R_E^2\cos\overline{i}_0}{2\,J_2\,R_E^2\cos\overline{i}_0+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}} \quad . \tag{22.242}$$

Die Berechnung ist nur unter Einschränkungen möglich: sie ist für Äquatorbahnen nicht definiert, außerdem ist die Lösung nicht eindeutig und erfordert daher eine zusätzliche Forderung. Dieser Fall soll hier nicht weiter verfolgt werden. Er dürfte in der Praxis nicht von direktem Interesse sein. Eine schrittweise Bearbeitung dürfte im Rahmen einer Auswahl der großen Bahnhalbachse (Abschnitt 22.10.3) zielführender sein. Dieser Fall soll hier nicht weiter verfolgt werden.

22.11 Vorgabe von anomal. Umlaufzeit und Variation der Perigäumslänge

Wenn zwei Bewegungsparameter vorgegeben sind, können aus ihnen zwei *Kepler*elemente oder andere vergleichbare Bahnparameter bestimmt werden. Je nach den analytischen Verknüpfungen dieser Parameter ist die umkehrbare Eindeutigkeit dieser Beziehungen nur mit einschränkenden Randbedingungen möglich. Im aktuellen Beispiel seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a}$ und die säkulare Drift $\dot{\lambda}_{Ps}$ der geographischen Länge des Perigäums im Erdfeld vorgegeben. Damit können je nach Anforderung Paare von *Kepler*elementen berechnet werden. Dazu müssen im Prinzip die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}\left|\overline{P_a}-\overline{P_a}^{(k)}\right| &\le \varepsilon_1\\ \left|\dot{\lambda}_{Ps}-\dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}\right| &\le \varepsilon_2\end{aligned} \tag{22.243}$$

erfüllt sein. Hier sind $\overline{P_a}$ und $\dot{\lambda}_{Ps}$ die vorgegebenen Sollwerte, während die Parameter $\overline{P_a}^{(k)}$ und $\dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}$ iterativ mit dem gegebenen Bahnmodell berechnet werden, bis nach *k* Iterationsschritten vorgegebene Genauigkeitsschranken $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ unterboten werden.

Um das Verfahren numerisch stabil zu halten, werden als Bedingungsgleichungen statt der Ausdrücke (22.243) die überlagerten Funktionen

$$\begin{aligned}fct_1\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\upsilon^{(k)}\left(t_0+N\,\overline{P_a}\right)-\upsilon^{(k)}\left(t_0\right)\right]=0\\ fct_2\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\lambda_P^{(k)}\left(t_0+N\,\overline{P_a}\right)-\lambda_P^{(k)}\left(t_0\right)-\dot{\lambda}_{Ps}\,N\,\overline{P_a}\right]=0\end{aligned} \tag{22.244}$$

gewählt. Die zu bestimmenden Bahnparameter sind für die Epoche t_0 zu berechnen. Die natürliche Zahl *N* gibt an, über wieviele anomalistische Umläufe die Berechnung zu erfolgen hat. $E^{(k)}$ bezeichnet den Vektor der zu berechnenden Parameter im *k*-ten Iterationsschritt. Die

Verschiebung der Perigäumslänge über *N* anomalistische Umläufe hat die fest vorgegebene Größe

$$N\,\overline{\Delta\lambda_P} = N\,\dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_a} \quad . \tag{22.245}$$

Im Iterationsprozess sind daher nur die wahre Anomalie $\upsilon^{(k)}$ und die geographische Länge $\lambda_P^{(k)}$ zu den betreffenden Zeitpunkten mit Hilfe des vorgegebenen Bahnmodells zu berechnen. Die Epoche t_0 als Anfangszeitpunkt für das zu untersuchende Intervall ist eine feste Größe, ebenso die wahre Anfangsanomalie $\upsilon(t_0) = \upsilon_0$, die somit nicht in den Iterationsprozess einbezogen werden muss. Damit liegt auch der Endzeitpunkt $t_2 := t_0 + N\,\overline{P_a}$ fest. Jedoch muss die wahre Anomalie am Ende des Intervalls in Abhängigkeit von den zu suchenden Bahnparametern in den Iterationsprozess einbezogen werden. Anders sind die Verhältnisse bei der geographischen Länge λ_P, da auch deren Wert am Anfangszeitpunkt von den zu iterierenden Bahnparametern abhängt (siehe die Systeme (22.194) - (22.196). Damit haben die Bedingungsgleichungen im Hinblick auf den Iterationsprozess die Gestalt

$$\begin{aligned} fct_1\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\upsilon^{(k)}(t_2) - \upsilon_0\right] = 0 \\ fct_2\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)} - N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right] = 0 \quad . \end{aligned} \tag{22.246}$$

Hier ist (nach Formel (22.210))

$$\Delta\lambda_{NP}^{(k)} = \dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}\,\frac{2N\pi}{\overline{n}_a^{(k)}} \quad . \tag{22.247}$$

Der eventuelle Einfluss des Luftwiderstandes wird für die hier angestrebte langfristige Untersuchung vernachlässigt. Daher kann die säkulare Variation der Perigäumslänge in erster Ordnung nach Formel (22.221) verwendet werden. Die mittlere anomalistische mittlere Bewegung erster Ordnung ist mit Formel (22.38) gegeben. Damit ergibt sich die mittlere Verschiebung der Perigäumslänge pro mittlerem anomalistischem Umlauf in erster Näherung in jedem Iterationsschritt zu

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{NP} = 2N\pi\Bigg\{\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\Bigg[\cos\overline{i}_0\left(\frac{5\cos^2\overline{i}_0 - 1}{1-\sin^2\overline{i}_0\sin^2\overline{\omega}_0} - 2\right) - \\ - 2\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}\,\dot{\Theta}\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\overline{i}_0\right)\Bigg] - \dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}\Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{22.248}$$

Mit dieser Formel können jetzt auch die „Nullstellen“ der Kurven der säkularen Drift der Perigäumslänge über der Inklination in Bild 22-17 auf Seite 85 abgeschätzt werden (d.h. die Schnittpunkte mit der $-\dot{\Theta}$-Geraden). Im Näherungsfall der säkularen Variation ergibt sich zunächst die Bedingung $\cos\overline{i}_0 = 0$, somit $\overline{i}_{01} = 90°$. Als zweite Bedingung muss

$$\frac{5\cos^2\overline{i}_{0/2,3} - 1}{1-\sin^2\overline{i}_{0/2,3}\sin^2\overline{\omega}_0} = 2 \;,\; \text{somit} \;\; \cos\overline{i}_{0/2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{5+2\sin^2\overline{\omega}_0}} \tag{22.249}$$

erfüllt sein. Im vorliegenden Fall werde $\overline{\omega}_0 = 0°$ angenommen. Dann haben die beiden Schnittpunkte die Inklinationen $\overline{i}_{0/2} = 39°.231520484$ und $\overline{i}_{0/3} = 140°.768479516$.

22.11.3 Berechnung von Halbachse und Inklination

Vorgegeben seien neben den Parametern $\left(\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}\right)$ der anomalistischen Bewegung die mittleren *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ für eine Epoche t_0, außerdem die Anzahl N der gewünschten anomalistischen Umläufe. Gesucht sind die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und die Inklination $\overline{i}_0$ zur Epoche.

In diesem Fall führt eine Taylorentwicklung erster Ordnung auf die Darstellungen

$$\begin{aligned} fct_1\left(\overline{a}_0^{(k+1)}, \overline{i}_0^{(k+1)}\right) &= fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right) + \\ &+ \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0} \Delta\overline{a}_0^{(k+1)} + \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} \Delta\overline{i}_0^{(k+1)} + R_1 \\ fct_2\left(\overline{a}_0^{(k+1)}, \overline{i}_0^{(k+1)}\right) &= fct_2\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right) + \\ &+ \frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0} \Delta\overline{a}_0^{(k+1)} + \frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} \Delta\overline{i}_0^{(k+1)} + R_2 \quad . \end{aligned} \tag{22.250}$$

In den Restgliedern $\left(R_1, R_2\right)$ werden alle Anteile zweiter und höherer Ordnung zusammengefasst, die hier vernachlässigt werden. Die Korrekturterme sind

$$\Delta\overline{a}_0^{(k+1)} := \overline{a}_0^{(k+1)} - \overline{a}_0^{(k)} \quad , \Delta\overline{i}_0^{(k+1)} := \overline{i}_0^{(k+1)} - \overline{i}_0^{(k)} \quad . \tag{22.251}$$

Damit können die Parameter der $(k+1)-$ten Iteration berechnet werden unter der Bedingung, dass die linken Seiten in den Gleichungen (22.250) verschwinden sollen:

$$\begin{aligned} \overline{a}_0^{(k+1)} &= \overline{a}_0^{(k)} - \frac{fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)\dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} - fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0}}{\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} - \dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0}} \\ \overline{i}_0^{(k+1)} &= i_0^{(k)} - \frac{fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0} - fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)\dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0}}{\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} - \dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0}} \end{aligned} \tag{22.252}$$

Die Berechnung erfolgt als vereinfachtes *Newton*sches Verfahren, d.h. die Ableitungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0} & \dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0} \\ \dfrac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} & \dfrac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0} \end{pmatrix} \tag{22.253}$$

wird nur näherungsweise unter Verzicht auf periodische und höhere Bewegungseinflüsse („Störungen“) verwendet und nur einmal mit den Anfangswerten berechnet. Wenn die entsprechende Determinante verschwindet, konvergiert das Verfahren nicht und es müssen verbesserte Anfangswerte gesucht werden.

Die gegebene mittlere anomalistische Umlaufzeit werde als Näherung für die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit angenommen. Somit kann als Anfangsnäherung der großen Bahnhalbachse für den Iterationsprozess der Wert

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu \bar{P}_a^{\,2}}{4\pi^2}} \tag{22.254}$$

gewählt werden. Eine Anfangsnäherung $\bar{i}_0^{(0)}$ für die Inklination kann mit dem in Abschnitt 22.10.5 geschilderten Verfahren mit Hilfe des zuvor gefundenen $\bar{a}_0^{(0)}$ berechnet werden.

Zur Durchführung der Iteration (22.252) werden die partiellen Ableitungen der Bedingungsfunktionen (22.246) nach den Variablen $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ benötigt. Um die erste der Bedingungsgleichungen (22.246) für die k-te Iteration

$$fct_1\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}; t_0\right) \equiv \sin\left[\upsilon_2^{(k)} - \upsilon_0\right] = 0 \tag{22.255}$$

zum Zeitpunkt $t_2 = t_0 + N\bar{P}_a$ berechnen zu können, wird zunächst die mittlere Anomalie

$$M_2^{(k)} = \overline{M_0}\left(t_2\right) + \overline{n_{K0}}^{(k)}\left(t_2 - t_0\right) = \overline{M_{00}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(t_2 - t_0\right) + \overline{n_{K0}}^{(k)}\left(t_2 - t_0\right) = \overline{M_{00}} + \overline{n_{a0}}^{(k)} N\,\bar{P}_a \tag{22.256}$$

mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (nach Formel (22.38))

$$\overline{n_{a0}}^{(k)} = \overline{n_{K0}}^{(k)} + \left(M_0\right)^{\cdot(k)}_{Gs0} = \overline{n_{K0}}^{(k)}\left[1 + \frac{3}{2}\, J_2 \frac{R_E^2 \sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 \bar{i}_0^{(k)}\right)\right] + \cdots. \tag{22.257}$$

benötigt. Die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt t_2 erlaubt somit den Näherungsausdruck

$$M_2^{(k)} = \overline{M_{00}} + N\bar{P}_a \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^3}}\left[1 - \frac{3}{2}\, J_2 \frac{R_E^2 \sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 \bar{i}_0^{(k)}\right) + \cdots\right]. \tag{22.258}$$

Durch Auflösung der *Kepler*gleichung

$$M_2^{(k)} = E_2^{(k)} - \bar{e}_0 \sin E_2^{(k)} \tag{22.259}$$

wird die zugehörige exzentrische Anomalie und mit den *Kepler*gleichungen

$$\cos\upsilon_2^{(k)} = \frac{\cos E_2^{(k)} - \bar{e}_0}{1 - \bar{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \quad , \quad \sin\upsilon_2^{(k)} = \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}\sin E_2^{(k)}}{1 - \bar{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \tag{22.260}$$

die wahre Anomalie erhalten. Die gesuchten partiellen Ableitungen der ersten Bedingungsgleichung ergeben sich damit aus

$$\frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0^{(k)}} = \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} \frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} \frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\overline{a}_0^{(k)}}$$
$$\frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} = \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} \frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} \frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} \quad . \tag{22.261}$$

Im Einzelnen sind[1]

$$\frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} = \cos\left(\upsilon_2^{(k)} - \upsilon_0\right)$$
$$\frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} = \frac{\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{1-\overline{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \tag{22.262}$$
$$\frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} = \frac{1}{1-\overline{e}_0 \cos E_2^{(k)}}$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \overline{a}_0^{(k)}} = -\frac{3}{2} N \overline{P}_a \frac{\sqrt{\mu}}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^2 \sqrt{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)}} \left[1 - \frac{7}{2} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \overline{i}_0^{(k)}\right)\right] + \cdots$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} = \frac{9}{2} N \overline{P}_a \overline{n}_{K0}^{(k)} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \sin \overline{i}_0^{(k)} \cos \overline{i}_0^{(k)} + \cdots \quad .$$

Zur Berechnung der zweiten Bedingungsgleichung

$$fct_2\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}; t_0\right) \equiv \sin\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)} - N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right] = 0 \tag{22.263}$$

werden mit der Längenverschiebung $\Delta\lambda_{NP}^{(k)}$ des Perigäums nach Formel (22.248) die Partialausdrücke

$$\frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_o^{(k)}} = \frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} \frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0^{(k)}}$$
$$\frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} = \frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} \frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} \tag{22.264}$$

benötigt. Hier ist zunächst

$$\frac{\partial fct_2\left(\overline{a}_o^{(k)},\,\overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} = \cos\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)} - N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right] \quad . \tag{22.265}$$

Nach Formel (22.248) ergeben sich die Partialausdrücke

[1] Siehe etwa die Zusammenstellungen in Abschnitt 15.2, Band III, außerdem die erste der Formeln (22.93)

$$\frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial\bar{a}_0}=3N\pi\left\{-\frac{J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0^{(k)}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}-1}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right)-\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{J_2\,R_E^2\,\dot{\Theta}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)\sqrt{\mu\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)}}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\right)-\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\bar{a}_0^{(k)}}{\mu}}\right\} \tag{22.266}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial\bar{i}_0}=\frac{3N\pi}{2}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left\{-\sin\bar{i}_0\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}-1}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right)+\right.$$
$$+\frac{\cos\bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\left[-10\cos\bar{i}_0^{(k)}\sin\bar{i}_0^{(k)}+\frac{2\left(5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}-1\right)\sin\bar{i}_0^{(k)}\cos\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\right]+ \tag{22.267}$$
$$\left.+6\sqrt{\frac{\bar{a}_0^3}{\mu}}\,\dot{\Theta}\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\sin\bar{i}_0^{(k)}\cos\bar{i}_0^{(k)}\right\}\quad.$$

BEISPIEL 1: Um die hier entwickelten Formeln zu testen, werden bekannte Daten vorgegeben, die hier wieder reproduziert werden sollen. Vorgegeben seien die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PsG}$ = -355°.0, die Inklination $\bar{i}_0 = 10°.0$, sowie die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.0$, sowie das Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°.0$. Nach Abschnitt 22.10.3 (ab Seite 89) ergibt sich mit diesen Daten die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7177.34865\,\text{km}$ sowie die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a0} = 6044.002436093\,\text{sec}$. Mit den Vorgaben $\dot{\lambda}_{PsG}$ = -355°.0 und $\overline{P}_{a0} = 6044.00244\,\text{sec}$ sollen mit den Formeln dieses Abschnittes Halbachse und Inklination berechnet werden. Wird $\overline{P}_{a0}$ als *Kepler*sche Umlaufzeit angenommen, folgt als Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 7182.981\,\text{km}$. Die entsprechende Näherungslösung für die Inklination ergibt keine eindeutige Lösung der algebraischen Gleichung dritter Ordnung (22.232), da die Diskriminante (22.235) negativ ist. Um keinen willkürlichen Suchprozess starten zu müssen, wird auf Bild 22-17 auf Seite 85 verwiesen. Hier können die möglichen Bereiche einer Lösung entnommen werden. Danach werde mit der willkürlichen Annahme $\bar{i}_0^{(0)} = 15°$ der Iterationsprozess (22.252) gestartet. Er liefert nach wenigen Schritten die Lösungen $\bar{a}_0^{(k)} = 7177.348604968871\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(k)} = 10°.00078602465138$. Die Abweichungen gegenüber den Vorgaben sind eine Folge der auf 10 Stellen eingeschränkten Eingabe und damit folgenden Rundungsfehlern. Zur Kontrolle werden die anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a0}^{(k)} = 6044.002440000\,\text{sec}$ sowie die säkulare Drift der Perigäumslänge berechnet: $\dot{\lambda}_{PsG}$ = -355°.000091. ◀

BEISPIEL 2: Vorgegeben seien die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PsG}$ = -360°.0, die Inklination $\bar{i}_0 = 25°.0$, sowie die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$, sowie das Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 60°.0$. Diese Daten führen auf die mittlere große Bahnhalbachse

$\bar{a}_0 = 12108.73332653$ km und die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a\,0} = 13255.15106080\ \text{sec} \mathrel{\hat{=}} 3^h.681986406$. Mit den Vorgaben $\dot{\lambda}_{PsG} = \text{-}360°.0$ und $\overline{P}_{a\,0} = 13255.1511$ sec wird zunächst die genäherte große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 12105.49265$ km mit Formel (22.254) berechnet. Als Anfangsinklination wird nach Bild 22-17 der Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 15°$ gewählt. Die Iteration (22.252) führt auf $\bar{a}_0^{(k)} = 12108.727$ km, $\bar{i}_0^{(k)} = 25°.07529624$, die Kontrolle ergibt $\dot{\lambda}_{PsG}{}^{(k)} = \text{-}360°.002280$ und $\overline{P}_{a\,0}^{(k)} = 13255.15109999$ sec. ◀

22.11.4 Berechnung von Halbachse und Exzentrizität

Nach dem vorstehenden Muster können bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die große Bahnhalbachse und die Exzentrizität berechnet werden, sofern die übrigen Bahnparameter Inklination, Rektaszension des aufsteigenden Knotens, Argument des Perigäums und mittlere Epocheanomalie vorgegeben sind.

22.11.5 Berechnung von Halbachse und Argument des Perigäums

In analoger Weise können bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die große Bahnhalbachse und das Argument des Perigäums berechnet werden, sofern die übrigen Bahnparameter Exzentrizität, Inklination, Rektaszension des aufsteigenden Knotens und mittlere Epocheanomalie vorgegeben sind. Um die Berechnung eindeutig zu gestalten muss eventuell eine weitere Forderung erhoben werden. Siehe hierzu die Anmerkung in Abschnitt 22.10.6 auf Seite 101.

22.11.6 Berechnung von Exzentrizität und Inklination

Prinzipiell ist es auch möglich bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums in analoger Weise die Exzentrizität und die Inklination zu berechnen, sofern die anderen Bahnparameter bekannt sind.

22.11.7 Berechnung von Exzentrizität und Argument des Perigäums

Schließlich ist es denkbar, dass in der praktischen Anwendung bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die Exzentrizität und das Argument des Perigäums gewünscht werden, wenn die restlichen Bahnparameter bekannt sind.

22.12 Aufbau einer Satellitenformation mit Hilfe der anomalistischen Bewegung

22.12.3 Aufbau der Formation mit ganzzahligem Verhältnis anomalistischer Umläufe

Zwei Satelliten sollen sich auf ein- und derselben kreisförmigen Bahn getrennt durch einen großen zentralen Winkel γ hintereinander her bewegen. Der zweite Satellit S_2 werde so manövriert, dass die beiden Satelliten schließlich eine enge Formation bilden. Die Bewegung des ersten Satelliten S_1 bleibe unverändert. Das benötigte Geschwindigkeitsinkrement, der relative Treibstoffverbrauch und die Zeitdauer zum Aufbau der Konstellation sind abzuschätzen. Im Rahmen der anomalistischen Bewegung werde angenommen, dass der zweite Satellit in eine elliptische Zwischenbahn eingeschossen wird. Für diese Bahn wird in der englischen Literatur gelegentlich der Begriff „Phasing Orbit“ verwendet.[1]

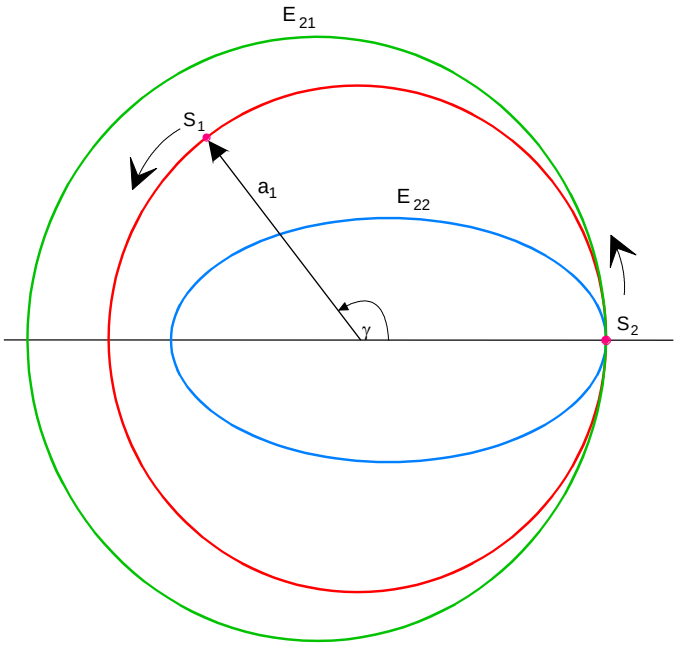


Bild 22-28: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch Bahnmanöver des zweiten Satelliten über eine elliptische Zwischenbahn (E_1 außerhalb, E_2 innerhalb der gegebenen Kreisbahn mit Radius a_1) in eine enge Konstellation in der Position S_2 gebracht

Die beiden Satelliten bewegen sich nach Bild 22-28 exakt auf derselben Bahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_1}$. Nach genau einem mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_{a1}}$ befindet sich der Satellit wieder im selben Punkt der Bahn. Wird die Bahn kreisförmig angenommen, wird der Bahnbogen von S_2 nach S_1 im Zeitraum

$$\Delta t = \frac{\gamma}{360°}\overline{P_{a1}} \tag{22.268}$$

durchlaufen. Der Satellit S_2 werde nun durch ein Manöver $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ in eine elliptische Bahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_2}$ und der mittleren Exzentrizität $\overline{e_2}$ eingeschossen. Die

[1] siehe auch: DLR GSOC TN 2003-06: ‘Orbit Aspects of TS-L/CTW Formation Flight’

mittlere anomalistische Umlaufzeit auf dieser Bahn betrage $\overline{P_{a2}}$. Als Bedingung wird angestrebt, dass sich nach einigen Umläufen beide Satelliten im Punkt S_2 befinden. Bis zu diesem Zeitpunkt hat der zweite Satellit M anomalistische Umläufe ausgeführt, der erste N anomalistische Umläufe und zusätzlich den Winkel γ durchlaufen. Es muss daher die Bedingung

$$\left(N + \frac{\gamma}{360°} \right) \overline{P_{a1}} \; = \; M \; \overline{P_{a2}} \tag{22.269}$$

erfüllt sein. Wenn $\gamma>0$ befindet sich S_1 vor S_2, sonst dahinter. Mit Gleichung (22.268) wird auch

$$\overline{P_{a2}} \; = \; \frac{1}{M} \left[\; N \, \overline{P_{a1}} + \Delta t \right] \quad . \tag{22.270}$$

Die Übergangsbahn des zweiten Satelliten kann innerhalb oder außerhalb der ursprünglichen Bahn liegen. Entsprechend erfolgt das Manöver im Perigäum oder Apogäum der Übergangsbahn. Treffen sich nach dem Zeitraum $\left(M \, \overline{P_{a2}} \right)$ die beiden Satelliten an derselben Stelle, muss der zweite Satellit ein zweites Manöver ausführen, um wieder in die ursprüngliche Bahn einschwenken zu können. Dieses zweite Manöver hat denselben Betrag $\Delta V = \left| \Delta \dot{\mathbf{r}} \right|$ wie das erste Manöver, ist aber genau entgegengerichtet. Das Gesamtinkrement beträgt daher $2 \Delta V$.

Die Abschätzung wird mit Formeln der speziellen *Kepler*bewegung und des *Hohmann* Transfers nach Abschnitt 12.3.3 durchgeführt. Auf der gegebenen Bahn hat ein Satellit im Manöverort die mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{V_1} \; = \; \sqrt{\mu \left(\frac{2}{\overline{r_1}} - \frac{1}{\overline{a_1}} \right)} \quad , \tag{22.271}$$

im Punkt S_2 habe er den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_2$.

Wir wollen annehmen, dass das Manöver (aus Gründen der Energieeinsparung als *Hohmann* Transfer) im Apogäum oder Perigäum der neuen Übergangsbahn stattfinde.

Falls die neue mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{a2}}$ kleiner als die entsprechende Umlaufzeit $\overline{P_{a1}}$ auf der ursprünglichen Bahn ist, liegt die neue Bahn innerhalb der alten Bahn, das Manöver findet somit im Apogäum der neuen Bahn im Abstand

$$\overline{r_{2\,P}} \; = \; \overline{a_2} \left(1 + \overline{e_2} \right) \; = \; \overline{r_1} \tag{22.272}$$

statt, wenn $\overline{r_1}$ der Radius der alten Bahn im Manöverort S_2 ist, $\overline{a_2}$ und $\overline{e_2}$ die noch zu bestimmenden große Bahnhalbachse und Exzentrizität der Übergangsbahn. Auf der neuen Bahn hat der Satellit im Moment des impulsiven Manövers die mittlere *Kepler*sche Apogäumsgeschwindigkeit

$$\overline{V_A} \; = \; \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_2}} \frac{1 - \overline{e_2}}{1 + \overline{e_2}}} \quad = \; \sqrt{\frac{\mu \left(1 - \overline{e_2} \right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.273}$$

Im Fall $\overline{P_{a2}} > \overline{P_{a1}}$ befindet sich der Satellit während des Manövers im Perigäum der Bahn im Abstand

$$\overline{r_{2P}} = \overline{a_2}\left(1-\overline{e_2}\right) = \overline{r_1} \tag{22.274}$$

mit der mittleren *Kepler*schen Perigäumsgeschwindigkeit

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_{21}}}\frac{1+\overline{e_{21}}}{1-\overline{e_{21}}}} = \sqrt{\frac{\mu\left(1+\overline{e_{21}}\right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.275}$$

Um die beiden Fälle in der Praxis einheitlich behandeln zu können, ist es nahe liegend den Faktor

$$\sigma_e := \begin{cases} +1 & \text{für} \quad \overline{P_{a2}} > \overline{P_{a1}} \quad , \text{ Bahn 2 außerhalb Bahn 1} \\ -1 & \text{für} \quad \overline{P_{a2}} < \overline{P_{a1}} \quad , \text{ Bahn 2 innerhalb Bahn 1} \end{cases} \tag{22.276}$$

zu verwenden. Der Satellit hat nach dem Manöver somit einheitlich die mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{V_2} = \sqrt{\frac{\mu\left(1+\sigma_e\,\overline{e_2}\right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.277}$$

Das Geschwindigkeitsinkrement, mit dem das Manöver durchgeführt wird, beträgt

$$\overline{\Delta V} := \overline{V_2} - \overline{V_1} \quad . \tag{22.278}$$

Es ist positiv bei einem Manöver in eine äußere Bahn, negativ in eine innere Bahn. Dies zeigt sich somit im Schubvektor

$$\Delta\dot{\mathbf{r}} = \overline{\Delta V}\,\frac{\dot{\mathbf{r}}_2}{\left|\dot{\mathbf{r}}_2\right|} \quad . \tag{22.279}$$

Um die Bahnparameter $\overline{a_2}$, $\overline{e_2}$ der Übergangsbahn zu bestimmen, werden zwei Bedingungsgleichungen benötigt.

Zunächst bietet sich die Radiusbedingung

$$\overline{r_1} = \overline{a_2}\left(1-\sigma_e\,\overline{e_2}\right) \tag{22.280}$$

an, welche das Apogäum bzw. Perigäum der neuen Bahn charakterisiert. Als weitere Bedingung wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{a2}}$ auf der Übergangsbahn verwendet, die durch Gleichung (22.270) definiert ist. In einer Theorie erster Ordnung nach Abschnitt 22.4.2 ab Seite 43 ist

$$\overline{P_{ai}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{ai}}} \qquad \langle i = 1,2 \tag{22.281}$$

mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_{ai}} = \overline{n_{Ki}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{si} \qquad \langle i = 1,2 \quad . \tag{22.282}$$

Hier ist in der üblichen Schreibweise die mittlere *Kepler*sche Bewegung gegeben durch

$$\overline{n_{Ki}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_i^3}}} \qquad \langle i = 1,2 \tag{22.283}$$

und die säkulare Variation der mittleren Anomalie in einer Theorie erdnaher Satellitenbahnen durch (siehe Formel (20.17))

$$\left(M_0\right)^{\cdot}_{Gsi} = -\frac{3}{4}\overline{n_{Ki}}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\overline{e_i}^2}}{\overline{a_i}^2\left(1-\overline{e_i}^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\overline{i}_0\right) + ... \quad , \quad (i=1,2)\ . \tag{22.284}$$

Damit lauten die beiden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1\left(\overline{a}_2,\overline{e}_2\right) &\equiv \overline{P}_a - \overline{P_{a2}} = 0 \\ f_2\left(\overline{a}_2,\overline{e}_2\right) &\equiv \overline{a}_2\left(1-\sigma_e\,\overline{e}_2\right) - \overline{r}_1 = 0 \quad . \end{aligned} \tag{22.285}$$

Eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung gibt

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{10} + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_2}\left(\overline{a}_2-\overline{a}_{20}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_2}\left(\overline{e}_2-\overline{e}_{20}\right) + ... \\ f_2 &= f_{20} + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_2}\left(\overline{a}_2-\overline{a}_{20}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_2}\left(\overline{e}_2-\overline{e}_{20}\right) + ... \end{aligned} \tag{22.286}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \overline{a}_2 &= \overline{a}_{20} - \frac{f_{10}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_2} - f_{20}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_2}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_2}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_2}} + ... \\ \overline{e}_2 &= \overline{e}_{20} + \frac{f_{10}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_2} - f_{20}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_2}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_2}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_2}} + ... \quad . \end{aligned} \tag{22.287}$$

Für die partiellen Ableitungen folgen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_2} = \frac{\partial \overline{P}_a}{\partial \overline{a}_2} = \frac{\partial \overline{P}_a}{\partial \overline{n}_a}\frac{\partial \overline{n}_a}{\partial \overline{a}_2} = -\frac{2\pi}{\overline{n}_a^2}\frac{\partial \overline{n}_a}{\partial \overline{a}_2} \tag{22.288}$$

sowie mit den Beziehungen (22.282) - (22.284)

$$\frac{\partial \overline{n}_a}{\partial \overline{a}_2} = \frac{3\sqrt{\mu}}{2\overline{a}_2^{\,2}\sqrt{\overline{a}_2}}\left\{-1+\frac{7}{4\overline{a}_2^{\,2}}J_2\,R_E{}^2\,\frac{\sqrt{1-\overline{e}_2^{\,2}}}{\left(1-\overline{e}_2^{\,2}\right)^2}\left(1-3\cos^2\overline{i}_2\right)\right\} \tag{22.289}$$

außerdem

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_2} = \frac{\partial \overline{P}_a}{\partial \overline{e}_2} = \frac{\partial \overline{P}_a}{\partial \overline{n}_a}\frac{\partial \overline{n}_a}{\partial \overline{e}_2} = -\frac{2\pi}{\overline{n}_a^2}\frac{\partial \overline{n}_a}{\partial \overline{e}_2} \tag{22.290}$$

mit

$$\frac{\partial \overline{n_a}}{\partial \overline{e_2}} = -\frac{9}{4}\overline{n}_0 J_2 \frac{R_E{}^2}{\overline{a_2}^2} \frac{\overline{e_2}\sqrt{1-\overline{e_2}^2}}{\left(1-\overline{e_2}^2\right)^3}\left(1-3\cos^2 \overline{i_2}\right) \quad . \tag{22.291}$$

Ferner sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}} &= \frac{\partial \overline{r}_1}{\partial \overline{a_2}} = 1-\sigma_e \overline{e}_{20} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}} &= \frac{\partial \overline{r}_1}{\partial \overline{e_2}} = -\sigma_e \overline{a}_{20} \quad . \end{aligned} \tag{22.292}$$

Um Anfangslösungen $\overline{a}_{20}$, $\overline{e}_{20}$ zu wählen, werde etwa zunächst $\overline{e}_{20} := 0.0$ angenommen. Dann kann aus der in Abschnitt 22.6.1 geschilderten Bahndefinition, die Halbachse aus der mittleren anomalistischen Umlaufzeit zu bestimmen, der Anfangswert $\overline{a}_{20}$ aus der vorgegebenen Umlaufzeit $\overline{P}_2$ hergeleitet werden. Mit diesem neuen Wert kann ein verbesserter Anfangswert für die Exzentrizität aus der zweiten der Gleichungen (22.285) berechnet werden:

$$\overline{e}_{20} = \sigma_e\left(1-\frac{\overline{r}_1}{\overline{a}_{20}}\right) \quad . \tag{22.293}$$

Mit den neuen Anfangswerten $\overline{a}_{20}, \overline{e}_{20}$ wird die Verbesserung mit dem System (22.287) gestartet. Dieser Vorgang kann bei Bedarf mehrfach iterativ angewendet werden.

Für die praktische Anwendung muss angemerkt werden, dass bei langen Manöverzeiten, also bei lang dauernden Transfers, die zusätzlichen Bewegungseinflüsse („Störeinflüsse“) zunehmend zur Auswirkung kommen: zum einen kann die Halbachse durch nichtgravitative Einflüsse, wie etwa den Luftwiderstand, verändert werden. Dadurch wird die (anomalistische) Umlaufzeit vermindert, was durch ein zusätzliches Bahnmanöver ausgeglichen werden muss. Zum anderen hat die Transferbahn infolge der von der Ursprungsbahn abweichenden großen Bahnhalbachse und Exzentrizität auch bei gleicher Inklination eine unterschiedliche säkulare Variation des aufsteigenden Knotens $\dot{\Omega}_s$, so dass durch ein weiteres Manöver das Abdriften der Bahnebene aufgehalten werden muss. Um diese zusätzlichen Manöver weitgehend vermeiden zu können, ist es also sinnvoll, möglichst kurze Transferzeiten zu wählen, daher einen Kompromiss zwischen geringem Manöveraufwand und Zeitbedarf zu suchen.

1. BEISPIEL: Gegeben sei ein Satellit auf einer kreisförmigen Bahn. Die mittlere große Bahnhalbachse und die mittlere Inklination betragen $\overline{a}_1 = 6883.509\,\text{km}, \overline{i}_1 = 97°.4221$, die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_{a1} = 5687.394\,\text{s} \triangleq 94.78989590\,\text{min}$. Die Kreisbahngeschwindigkeit dieses Satelliten beträgt $\overline{V}_K = 7.60963765\,km/s$.

In der folgenden Tabelle werden einige Übergangsbahnen durch Vorgabe der Zahlenwerte *N* und *M* berechnet. Diese Werte legen die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_2$ und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_2$ der Übergangsbahn fest. Ferner finden sich in der Tabelle Werte für das ge-

samte Geschwindigkeitsinkrement ΔV sowie das Verhältnis des Treibstoffanteils (siehe in Abschnitt 12.10.2.1)

$$\frac{m_T}{m_A} = \left| 1 - e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \right| \quad , \tag{22.294}$$

wenn m_T die Treibstoffmasse, m_A die Startmasse, sowie V_e die Austrittsgeschwindigkeit des Raketenmotors bedeuten. Die Berechnungen werden für Kaltgastriebwerke (V_e = 1.0 km/s) und Heißgastriebwerke (V_e = 2.8 km/s) durchgeführt. Die Gesamtdauer für das Manöver beträgt $T = M\ \overline{P_{a2}}$ [min]. Die beiden Satelliten sollen um die Strecke 50 km getrennt werden, wobei der zweite (kleine) Satellit in Flugrichtung „hinter" dem Mastersatelliten positioniert werden soll. Das Zeitintervall, durch das die beiden Satelliten in ein und derselben Bahn getrennt sein sollen, beträgt dann $\Delta t = 6.5706151\text{sec}$, d.h. der Satellit S_1 befindet sich vor Satellit S_2 in seiner Bahn um den Winkel $\gamma = 2\pi\ \Delta t\ / \overline{P_{a1}} = 50\,\text{km} / \overline{a_1} \approx 0°.4159$ getrennt. Bahnen mit Perigäumshöhen unter 200 km werden eliminiert. Wird ein Transfer von etwa 4 Tagen erlaubt, was nach etwa 61 anomalistischen Umläufen erreicht werden kann, ergeben sich nach der folgenden Tabelle die Werte: die zweite Bahn, die außerhalb der unbeeinflussten ersten Bahn verläuft, hat die anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{a2}} = 94.791691\,\text{min}$. Die mittlere große Bahnhalbachse beträgt $\overline{a_2} = 6883.596310\,\text{km}$ und die mittlere Exzentrizität $\overline{e_2} = 0.000012684$. Das Gesamtmanöver erfordert das Geschwindigkeitsinkrement ΔV=0.096519m/s, der Transfer ist nach 96.371553 Stunden abgeschlossen. Wird das Manöver mit einem Heißgastriebwerk durchgeführt, wird bei einer Gesamtmasse des Satelliten von 130 kg der Treibstoff Δm = 0.00345 x 130 kg / 100 = 0.00449 kg benötigt. ◀

2. BEISPIEL: Gegeben sei wieder wie im ersten Beispiel ein Satellit auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn, die nach 11 Tagen und 167 drakonitischen Umläufen in der Bodenspur reproduzierbar ist. Die mittlere große Bahnhalbachse und die mittlere Inklination betragen $\overline{a_1} = 6883.509\,\text{km}, \overline{i_1} = 97°.422169$, die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{a1}} = 94.789896\,\text{min}$. Die Kreisbahngeschwindigkeit dieses Satelliten beträgt $\overline{V_K} = 7.60963765\ km/s$. Es soll berechnet werden, welcher Energieaufwand nötig ist, um den Satelliten um 50 km vor einem Mastersatelliten zu positionieren.

Die neue Position, die längs der kreisförmigen Bahn um Δt = -6.5706 Sekunden zurückbleiben soll, wird entsprechend Formel (22.269) nach N = 61 anomalistischen Umläufen des ersten und M = 61 anomalistischen Umläufen des zweiten Satelliten erreicht werden. Die Transferbahn befindet sich dann innerhalb der ersten Bahn. Die neue anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{a2}} = 94.788101\,\text{min}$, demnach die mittlere große Bahnhabachse und Exzentrizität $\overline{a_{2/2}} = 6883.422\,\text{km}, \overline{e_{2/2}} = 0.00001259$. Das Triebwerk muss zunächst gegen die Bewegungsrichtung gezündet werden, das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement beträgt $\Delta V_{2/2} = -0.095812\,\text{m/s}$ und der Treibstoffanteil $m_T / m_A = 0.00342\,\%$. Der Transfer benötigt in diesem Fall $96^{\text{h}}.3679$. ◀

2. N - anomalistic periods of satellite 1

3. M - anomalistic periods of satellite 2
4. PA2 - anomalistic period of satellite 2
5. A2 - semimajor axis (km) satellite 2
6. E2 - eccentricity satellite 2
7. DV - velocity increment (km/s) for total maneuver
8. T - total period (h) of maneuver
9.
10. DMC - relative mass budget for cold gas motor for transfer maneuver
11. DMH - relative mass budget for hot gas motor for transfer maneuver
12.
13. A1 = 6883.509000 km
14. E1 = 0.000000
15. PAM1 = 94.78989590 min
16. required time difference Dt = 0.109510 min
17. required time difference Dt = 6.570600 sec
18. ---

19.	N	M	PAM2(min)	A2(km)	E2	DV(m/s)	T(h)	DMC(%)	DMH(%)
20.	61	61	94.791691	6883.596310	0.0000127	0.096519	96.371553	0.00965	0.00345
21.	61	62	93.262793	6809.311977	0.0108964	-83.144805	96.371553	8.66992	3.01399
22.	62	60	97.951384	7035.856673	0.0216530	163.889337	97.951384	15.11640	5.68519
23.	62	61	96.345624	6958.686164	0.0108034	81.988774	97.951384	7.87177	2.88572
24.	62	62	94.791662	6883.594884	0.0000125	0.094942	97.951384	0.00949	0.00339

Tabelle 22-5: Beispiel für Übergangsbahnen und zugehörige Manöver zum Aufbau einer gegebenen Satellitenformation für verschiedene Verhältnisse N:M der ursprünglichen und der Übergangsbahn.

Anmerkung: Das zweite Beispiel zeigt, dass die Positionierung des zweiten Satelliten vor dem nicht beeinflussten Mastersatelliten etwas billiger ist als die Positionierung nach diesem. Dieser Effekt ist abhängig von dem verwendeten Störmodell. Die Methode im folgenden Abschnitt zeigt, dass ohne Berücksichtigung eines Störmodells dieser Unterschied nicht berücksichtigt werden kann. Darüber hinaus ist die hier vorgeschlagene Methode auch für große Manöver im erdnahen Bereich (Dominanz des Erdfeldes) relevant, während Näherungsmethoden, die aus dem dritten *Kepler*schen Gesetz (der speziellen *Kepler*bewegung) abgeleitet sind, nur für sehr kleine Manöver angewandt werden dürfen.◀

22.12.4 Zeitlich rascher Aufbau einer Konstellation durch kleine Manöver

Für Abschätzungen sehr kleiner Bahnänderungen wird das dritte *Kepler*sche Gesetz in der klassischen Form

$$P_K = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2a\pi}{V_C} \quad ,$$

verwendet, wobei

$$n = \frac{2\pi}{P_K} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V_C}{a} \tag{22.295}$$

die *Kepler*sche mittlere Bewegung und

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{22.296}$$

die entsprechende Kreisbahngeschwindigkeit bedeutet. Eine kleine Änderung der großen Bahnhalbachse bewirkt die Änderung in der *Kepler*schen Umlaufzeit

$$\Delta P_K \approx -\frac{3P_K}{V_C}\Delta V_T \quad . \tag{22.297}$$

Nach Formel (12.90)[1] bewirkt eine Änderung in der großen Bahnhalbachse in Bezug auf kreisförmig angenäherte Bahnen eine Änderung der Geschwindigkeit in transversaler Richtung von

$$\Delta V_T = -\frac{V_C}{2a}\Delta a \quad . \tag{22.298}$$

Werden kleine Bahnänderungen durch ein Geschwindigkeitsinkrement in transversaler Richtung verursacht, wird die große Bahnhalbachse daher um

$$\Delta a \approx -\frac{2a}{V_C}\Delta V_T = -\frac{P_K}{\pi}\Delta V_T \tag{22.299}$$

geändert. Deshalb entspricht einer Variation in der transversalen Geschwindigkeit eine Variation in der Umlaufzeit

$$\Delta P_K \approx -\frac{3P_K}{V_C}\Delta V_T \quad . \tag{22.300}$$

Die Verschiebung der Position eines Satelliten längs der kreisförmig angenommenen Bahn kann aus der Beziehung

$$\Delta x = V_C \, \Delta t \tag{22.301}$$

berechnet werden. Bezogen auf einen *Kepler*schen Umlauf P_K beträgt die Verschiebung längs der Bahn

$$\Delta x_P = V_c \, \Delta P_K \approx -\frac{6a\pi}{V_c}\Delta V_T \quad . \tag{22.302}$$

Auf Grund seiner relativen Bewegung hat ein Objekt, das sich mit dem Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T gegenüber einem Bezugsobjekt bewegt, in Bezug auf einen *Kepler*schen Umlauf P_K im Zeitintervall Δt_r die relative Entfernung Δx_r durchlaufen, für welche die Beziehung

$$\frac{\Delta x_P}{P_K} = \frac{\Delta x_r}{\Delta t_r} \tag{22.303}$$

gilt. In einem Zeitintervall Δt_r verursacht durch das transversale Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T durchläuft das Objekt somit die relative Distanz

[1] In Abschnitt 12.4.4, Band III

$$\Delta x_r \approx -3\,\Delta t_r\,\Delta V_T \quad . \tag{22.304}$$

Bezogen auf diese Abschätzung beträgt umgekehrt das Zeitintervall, das benötigt wird um die relative Verschiebung Δx_r des Ortes eines Satelliten längs seiner Bahn zu erreichen, welche durch das transversale Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T verursacht wird,

$$\Delta t_r \approx -\frac{\Delta x_r}{3\Delta V_T} \quad . \tag{22.305}$$

BEISPIEL: Es wird mit den Zahlenwerten der beiden Beispiele im vorigen Abschnitt gerechnet. Mit der Transferzeit $\Delta t_r=97^h.3716$ und der Distanz $\Delta x_r=50$ km ergibt sich aus Formel (22.305) das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für die beiden benötigten Manöver $\Delta V_T=0.09509199$ m/s. Im zweiten Fall mit der Transferzeit $\Delta t_r=97^h.3679$ wird das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement $\Delta V_T=0.0950956$ m/s benötigt.

Diese Werte liegen etwas unter den beiden im vorigen Abschnitt bei Berücksichtigung der Störungen durch J_2 berechneten Zahlenwerten. Ein direkter Vergleich der beiden Methoden ist wegen der unterschiedlichen Bahnmodelle nicht möglich. ◀

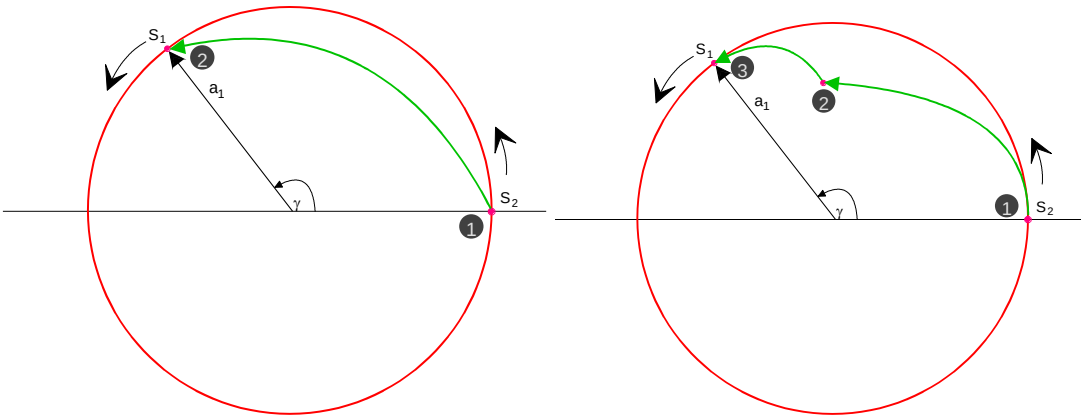


Bild 22-29: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch zwei bzw. drei Bahnmanöver des zweiten Satelliten über einen elliptischen Bahnbogen in eine gewünschte Konstellation in der Position S_1 gebracht, während der erste Satellit in der Position S_2 verharrt

23 Drakonitische Bewegung

Der Begriff der drakonitischen Bewegung ist der Mondtheorie entnommen. Als drakonitischer Monat wird die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch den aufsteigenden Knoten seiner Bahn bezeichnet. Als Knoten werden hier die Schnittpunkte der Mondbahnebene mit der Ekliptik bezeichnet.

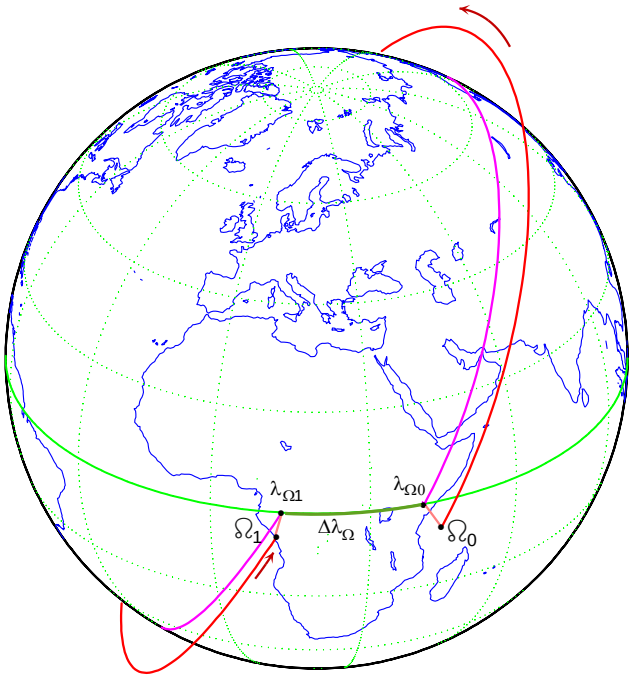


Bild 23-1: Ein drakonitischer Umlauf eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn um die als fest angenommene Erde vom aufsteigendem Knoten Ω_0 zum nächsten aufsteigenden Knoten Ω_1.

In der Bewegungslehre von Satelliten werden als Knoten die Schnittpunkte der Satellitenbahnebene mit der Äquatorebene des Zentralkörpers bezeichnet. Entsprechend ist die drakonitische Bewegung die auf die Knotendurchgänge bezogene Bewegung. Sie ist für alle Bahnen außer Äquatorbahnen definiert, insbesondere auch für geneigte Kreisbahnen, für welche die anomalistische Bewegung nicht definiert ist. Kreisbahnen sind jedoch vor allem bei erdnahen Missionen üblich, etwa die bemannten Missionen (Space Shuttle, MIR, ISS). Von besonderer Wichtigkeit sind die üblicherweise kreisnahen Bahnen von Erdbeobachtungssatelliten und Planetenorbitern. Diese können mit den Methoden der drakonitischen Bewegung ausgelegt werden.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird die drakonitische Bewegung nicht für beliebige Bewegungen, sondern lediglich in Bezug auf die allgemeine *Kepler*bewegung untersucht[1].

[1] d.h. für eine Bewegung, für welche die *Kepler*schen Bahngesetze gelten, in denen aber alle Parameter als zeitabhängige Variable angesetzt werden können.

23.1 Das knotenbezogene Bahnsystem

Der Knoten einer Bahn ist von der Bewegung eines Objektes in dieser Bahn abhängig. Auch wenn die Bewegung in Bezug auf den Knoten alle anderen Bewegungbezüge außer Acht lässt, ist die Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems nur im Gesamtzusammenhang der Bewegung zu verstehen, in Bezug auf das bewegungsbezogene Bahnsystem oder in Bezug auf das Frühlingspunkt - orientierte Äquatorsystem.

23.1.1 Eigenschaften des knotenbezogenen Bahnsystems

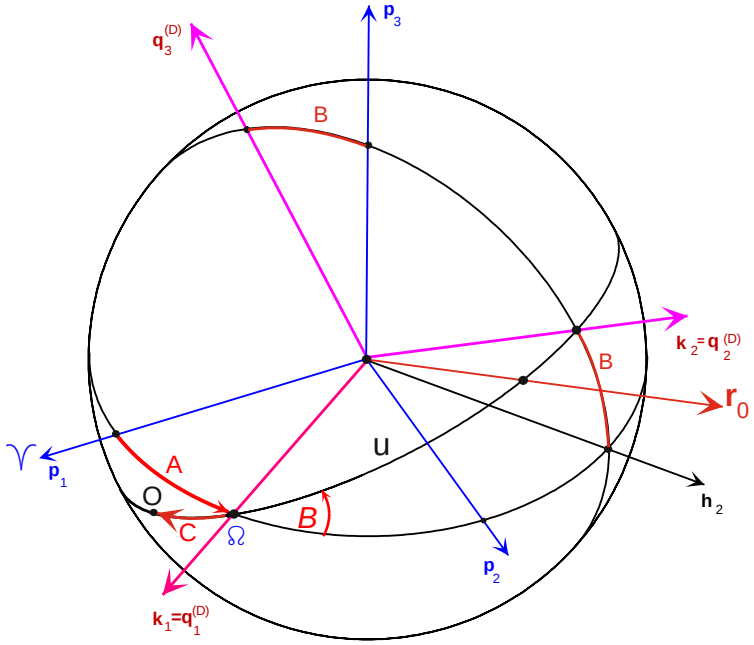


Bild 23-2: Das knotenbezogene $\mathbf{q}_j^{(D)}$ – Bahnsystem, Bezug auf das Frühlingspunkt-bezogene $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem mit Hilfe der *Euler*winkel *A, B, C,* wobei hier *C*=0 gesetzt werden kann, $\mathbf{r}_0$ ist der Richtungsvektor zu einem Ort auf der Bahn, $u = \sphericalangle\left(\mathbf{q}_1^{(D)}, \mathbf{r}_0\right)$ ist der Bahnwinkel im Knotensystem (Argument der Breite), O ist der Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems

Das knotenbezogene Bahnsystem wird definiert durch den Knotenvektor d.h. den Richtungsvektor $\mathbf{q}_1^{(D)}$ zum aufsteigenden Knoten ☊ bezogen auf den Äquator (Ebene durch die Basisvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$), den Normalenvektor $\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ der momentanen Bahnebene und den zum Orthonormalsystem ergänzenden Vektor $\mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)}$, der so gewählt wird, dass er in der Bahnebene B liegt (vgl. Bild 23-2). Der Bahnwinkel ist in diesem Fall das Argument der Breite *u*, das bei geneigten Bahnen immer definiert ist, auch wenn kein Perizentrum der Bahn bekannt ist, d.h. auch für alle geneigten kreisförmigen Bahnen. Der radiale Richtungsvektor eines bewegten Objektes hat somit im Knotensystem die Darstellung

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(D)} \cos u + \mathbf{q}_2^{(D)} \sin u \tag{23.1}$$

und der transversale Richtungsvektor

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u + \mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \quad . \tag{23.2}$$

Der normale Richtungsvektor stimmt mit dem normalen Richtungsvektor des mitgeführten Bahnsystems überein:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_3^{(D)} \quad . \tag{23.3}$$

Da das knotenbezogene System somit orthonormiert ist, gelten die Beziehungen

$$\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{q}_1^{(D)} \times \mathbf{q}_2^{(D)} \quad , \quad \mathbf{q}_1^{(D)} = \mathbf{q}_2^{(D)} \times \mathbf{q}_3^{(D)} \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)} \quad . \tag{23.4}$$

Der radiale Richtungsvektor hat die Variation

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \sin u + \dot{u}\left(-\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u + \mathbf{q}_2^{(D)} \cos u\right) \ ,$$

somit

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \sin u + \dot{u}\, \mathbf{q}_0 \quad . \tag{23.5}$$

Für die Variationen der Basisvektoren des knotenbezogenen Bahnsystems können aus dem allgemeinen Ansatz

$$\dot{\mathbf{q}}_i^{(D)} =: k_i^{\,j}\, \mathbf{q}_j^{(D)} \tag{23.6}$$

mit der schiefsymmetrischen Koeffizientenmatrix

$$k_i^{\,j} = -k_j^{\,i} \quad , \quad k_i^{\,i} = 0 \qquad \langle i, j = 1,2,3 \tag{23.7}$$

die Variationsformeln

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \qquad\qquad k_{12}\, \mathbf{q}_2^{(D)} + k_{13}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -k_{12}\, \mathbf{q}_1^{(D)} \qquad\quad + k_{23}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= -k_{13}\, \mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}\, \mathbf{q}_2^{(D)} \end{aligned} \tag{23.8}$$

aufgestellt werden. Die Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems kann wie üblich auf einen Epochezustand dieses Systems oder ein entsprechendes anderes System mit den drei „*Euler*drehungen“ um die Winkel *A, B, C* (siehe etwa in Abschnitt 6.3.2, Band II) und daher mit den Formeln (6.136) bezogen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \left(\dot{C} + \dot{A}\cos B\right)\mathbf{q}_2^{(D)} - \left(-\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C\right)\mathbf{q}_3^{(D)} + k_{12}^{(2)}\, \mathbf{q}_2^{(D)} - k_{31}^{(2)}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\left(\dot{C} + \dot{A}\cos B\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + \left(\dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C\right)\mathbf{q}_3^{(D)} - k_{12}^{(2)}\, \mathbf{q}_1^{(D)} + k_{23}^{(2)}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \left(-\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C\right)\mathbf{q}_1^{(D)} - \left(\dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + k_{31}^{(2)}\, \mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}^{(2)}\, \mathbf{q}_2^{(D)} \end{aligned} \tag{23.9}$$

Um die Koeffizienten $k_i^{\,j}$ zu bestimmen, wird zunächst die Variation des transversalen Richtungsvektors betrachtet:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{u}\, \mathbf{r}_0 - \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \sin u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \cos u \quad . \tag{23.10}$$

Werden hier die allgemeinen Variationsformeln (23.8) eingesetzt, folgt

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\mathbf{r}_0\left(\dot{u} + k_{12}\right) + \mathbf{c}_0\left(k_{13}\sin u + k_{23}\cos u\right) \quad .$$

Im mitgeführten Bahnsystem (*Leibniz*-System) hat der transversale Richtungsvektor nach dem System (4.319) die Variation

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\, \mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\, \mathbf{c}_0 \quad .$$

Da für den (*Hansen*schen) Bahnwinkel ζ die Variation, etwa mit den Formeln (4.257) und (4.259), wobei jetzt aktuell $C = \sigma$ gesetzt wird als *Hansen*winkel des aufsteigenden Knotens,

$$\dot{\zeta} \;=\; \dot{u} + \dot{\sigma}$$

gilt, folgt

$$k_{12} \;=\; \dot{\sigma} \quad . \tag{23.11}$$

Ferner ist mit den *Frenet*schen Formeln des mitbewegten Bahnsystems[1] (*Leibniz* Systems)

$$\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} = \dot{\mathbf{c}}_0 \;=\; -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \;=\; -k_{13}\,\mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \;=\; \dot{\eta}\;\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u - \dot{\eta}\;\mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \;, \tag{23.12}$$

somit

$$k_{13} \;=\; -\dot{\eta}\sin u \quad , \quad k_{23} \;=\; \dot{\eta}\cos u \quad . \tag{23.13}$$

Die Variationsformeln der Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems lauten daher

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \;&=\; \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \;-\; \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \sin u \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \;&=\; -\dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \;+\; \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \cos u \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \;&=\; \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u - \dot{\eta}\;\mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \quad .
\end{aligned} \tag{23.14}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor („Drehvektor“, „*Darboux*scher Vektor“) dieses Systems

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = D^{j}_{q^{(D)}}\,\mathbf{q}_j^{(D)} \tag{23.15}$$

mit der Bedingung

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(D)} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} \times \mathbf{q}_j^{(D)} \qquad (j = 1,2,3) \tag{23.16}$$

genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \;&=\; D_{q^{(D)}3}\,\mathbf{q}_2^{(D)} - D_{q^{(D)}2}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \;&=\; -D_{q^{(D)}3}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \;+\; D_{q^{(D)}1}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \;&=\; D_{q^{(D)}2}\,\mathbf{q}_1^{(D)} - D_{q^{(D)}1}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \quad .
\end{aligned}$$

Vergleich mit den Variationsformeln (23.14) ergibt die Komponenten (s.a. (8.509))

$$D_{q^{(D)}3} = \dot{\sigma} \;,\; D_{q^{(D)}2} = \dot{\eta}\sin u \;,\; D_{q^{(D)}1} = \dot{\eta}\cos u \quad . \tag{23.17}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des knotenbezogenen Bahnsystems lautet daher

$$\boxed{\mathbf{D}_{q^{(D)}} \;=\; \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(D)} \cos u + \mathbf{q}_2^{(D)} \sin u\right) + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \quad .} \tag{23.18}$$

Mit Formel (23.1) lautet diese Beziehung bei Bezug auf das *Leibniz*-System auch (es ist nach (23.3) $\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{c}_0$)

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} \;=\; \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\sigma}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{23.19}$$

---

[1] Siehe die Formeln (4.318) in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

In Bezug auf das bewegungsbezogene *Hansen*-System hat der **relative Eigenbewegungsvektor** des Knotensystems mit Formel (4.329) $\left(\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0\right)$ die interessante Darstellung

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}q^{(I)}} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} - \mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\sigma}\,\mathbf{c}_0 \tag{23.20}$$

sowie wegen Formel (4.320) $\left(\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0\right)$ zum mitgeführten Bahnsystem (*Leibniz*-System)

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}q^{(L)}} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} - \mathbf{D}_{q^{(L)}} = \left(\dot{\sigma} - \dot{\zeta}\right)\mathbf{c}_0 = -\dot{u}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{23.21}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Knotensystems in Bezug auf das *Leibniz*system ist somit in beiden Fällen zu einem Pol der Bahn gerichtet, jedoch mit gegensätzlicher Orientierung.

23.1.2 Bezug des knotenbezogenen Bahnsystems zu anderen Bahnsystemen

In Ergänzung zu den in Abschnitt 8.14 (Band II) hergeleiteten Beziehungen des Knotensystems werden in diesem Abschnitt die Beziehungen zu einigen anderen Systemen grundsätzlich zusammengestellt.

1. Knotensystem und *Leibniz*system

Der Bezug zwischen Knoten- und *Leibniz*system wird durch Drehung um das Argument der Breite in der Bahnebene hergestellt. Mit den Formeln des vorhergehenden Abschnitts wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u \\
\mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(D)}\sin u + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos u \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin u + \dot{u}\,\mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos u - \dot{u}\,\mathbf{r}_0 \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}
\end{aligned} \tag{23.22}$$

Umkehrung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{r}_0\cos u - \mathbf{q}_0\sin u \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= \mathbf{r}_0\sin u + \mathbf{q}_0\cos u \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{c}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\cos u - \dot{\mathbf{q}}_0\sin u - \dot{u}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\sin u + \dot{\mathbf{q}}_0\cos u + \dot{u}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\mathbf{c}}_0
\end{aligned} \tag{23.23}$$

2. Knotensystem und *Hansens*ystem

Das Knotensystem und das *Hansen*system sind Bahnsysteme, die fest in der (momentanen) Bahnebene liegen. Sie werden durch Drehung um die (auf den Ursprung O des *Hansen*systems bezogene) Länge in der Bahn σ des Knotens verknüpft[1].

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos\sigma - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos\sigma - \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin\sigma - \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos\sigma + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \quad .
\end{aligned} \tag{23.24}$$

Umkehrung

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{q}_3^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\sigma + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\sigma - \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} \quad .
\end{aligned} \tag{23.25}$$

3. Knotensystem und Frühlingspunkt-bezogenes Äquatorsystem

Der Bezug des Knotensystems zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem, das in der Satellitenbahnmechanik meistens als Basissystem verwendet wird, erfolgt durch Drehung der Bahnebene um den Knotenvektor $\mathbf{q}_1^{(D)} = \mathbf{k}_1$ mit der Inklination i (=C) als Drehwinkel und anschließend durch Drehung um die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω (=A) in den Frühlingspunkt Υ als Anfangspunkt des Äquatorsystems[2]. Das Äquatorsystem habe die orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{p}_i \;(i=1,2,3)$. Dann lauten die Umrechnungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= -\mathbf{p}_1\cos i\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\sin i \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\cos i
\end{aligned} \tag{23.26}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\Omega}\left(-\mathbf{p}_1\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos\Omega\right) + \dot{\mathbf{p}}_1\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_2\sin\Omega \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\Omega}\cos i\left(-\mathbf{p}_1\cos\Omega - \mathbf{p}_2\sin\Omega\right) + (i)^{\cdot}\left(\mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\cos i\right) - \\
&\quad - \dot{\mathbf{p}}_1\cos i\sin\Omega + \dot{\mathbf{p}}_2\cos i\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_3\sin i \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\Omega}\sin i\left(\mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega\right) + (i)^{\cdot}\left(\mathbf{p}_1\cos i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\cos i\cos\Omega - \mathbf{p}_3\sin i\right) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{p}}_1\sin i\sin\Omega - \dot{\mathbf{p}}_2\sin i\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_3\cos i
\end{aligned} \tag{23.27}$$

Umkehrung

---

[1] Siehe die Formelsysteme (8.496) – (8.499) in Band II, Abschnitt 8.14

[2] siehe in Abschnitt 8.14.2.1 und Bild 8-21, Band II,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\sin\Omega + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega - \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega \\
\mathbf{p}_3 &= \qquad\qquad \mathbf{q}_2^{(D)}\sin i \qquad + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i
\end{aligned}
\tag{23.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1 &= \dot{\Omega}\left(-\mathbf{q}_1^{(D)}\sin\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega\right) + (i)^{\cdot}\sin\Omega\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i\right) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos\Omega - \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= \dot{\Omega}\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\cos\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega\right) - (i)^{\cdot}\cos\Omega\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i\right) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin\Omega + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega - \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= (i)^{\cdot}\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\cos i - \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\right) + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i - \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i \quad .
\end{aligned}
\tag{23.29}
$$

Ein Ort S auf der Bahnebene hat vom Knoten als Abstand das Argument der Breite *u*. Im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem sind seine Winkelkoordinaten die Rektaszension α und die Deklination δ. Nach Bild 23-3 gelten die Beziehungen[1]

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \cos u \\
\sin(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \sin u\cos i \\
\sin\delta &= \sin u\sin i \quad .
\end{aligned}
\tag{23.30}
$$

Die zugehörigen differentiellen Beziehungen sind

$$
\begin{aligned}
(\dot{\alpha}-\dot{\Omega})\cos\delta &= \dot{u}\left[\cos i\cos u\cos(\alpha-\Omega)+\sin u\sin(\alpha-\Omega)\right] - (i)^{\cdot}\sin u\sin i\,\cos(\alpha-\Omega) \\
\dot{\delta}\cos\delta &= \dot{u}\cos u\sin i + (i)^{\cdot}\sin u\cos i
\end{aligned}
\tag{23.31}
$$

oder auch

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}-\dot{\Omega} &= \frac{\dot{u}\cos i - (i)^{\cdot}\sin i\sin u\cos u}{\cos^2\delta} \\
\dot{\delta} &= \dot{u}\left[\cos u\sin i\cos\delta + \left(-\cos i\cos u\sin(\alpha-\Omega)+\sin u\cos(\alpha-\Omega)\right)\sin\delta\right] + (i)^{\cdot}\sin(\alpha-\Omega) \quad .
\end{aligned}
\tag{23.32}
$$

Umgekehrt ist

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= (\dot{\alpha}-\dot{\Omega})\left[\cos i\cos(\alpha-\Omega)\cos u + \sin(\alpha-\Omega)\sin u\right] + \\
&\quad + \dot{\delta}\left\{\left[-\sin(\alpha-\Omega)\sin\delta\cos i + \cos\delta\sin i\right]\cos u + \cos(\alpha-\Omega)\sin\delta\sin u\right\} \quad .
\end{aligned}
\tag{23.33}
$$

Ein Ort P außerhalb der Bahnebene habe im Knotensystem die Koordinaten (u,w), im Äquatorsystem (α_1,δ_1). Die Beziehungen sind

$$
\begin{aligned}
\sin u\cos w &= \sin(\alpha_1-\Omega)\cos\delta_1\cos i + \sin\delta_1\sin i \\
\cos u\cos w &= \cos(\alpha_1-\Omega)\cos\delta_1 \\
\sin w &= -\sin(\alpha_1-\Omega)\cos\delta_1\sin i + \sin\delta_1\cos i
\end{aligned}
\tag{23.34}
$$

und umgekehrt

---

[1] vgl. auch Abschnitt 6.3.3 (Band II); $\alpha-\Omega$ wird als die knotenbezogene Rektaszension bezeichnet

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1-\Omega)\cos\delta_1 &= \cos u\cos w\\ \sin(\alpha_1-\Omega)\cos\delta_1 &= \sin u\cos w\cos i-\sin w\sin i\\ \sin\delta_1 &= \sin u\cos w\sin i\ +\sin w\cos i\quad .\end{aligned}\tag{23.35}$$

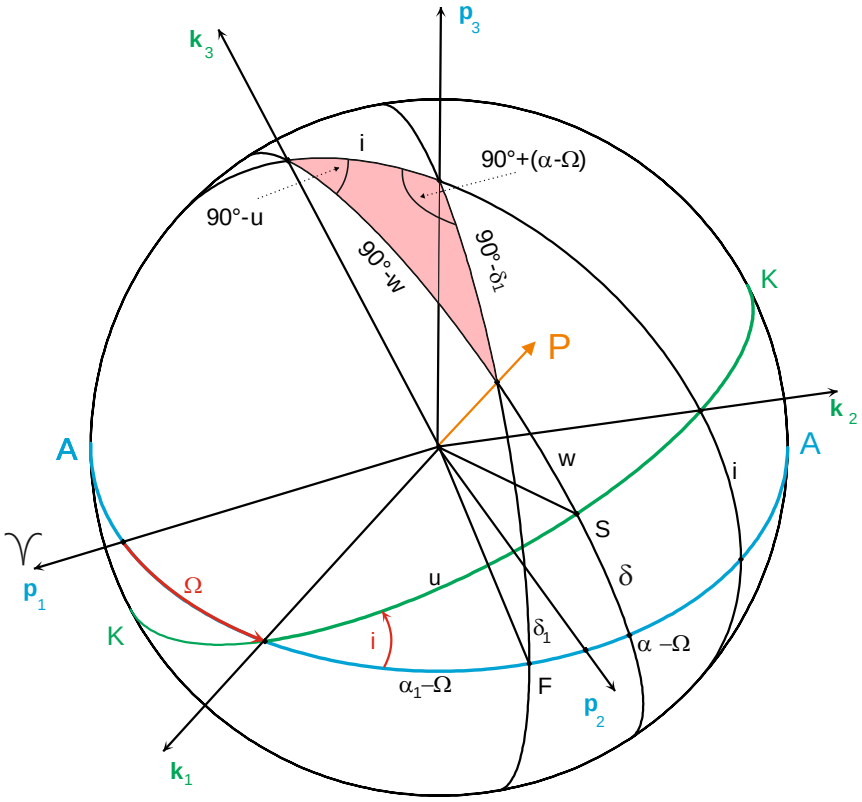


Bild 23-3: Bezug des $\mathbf{k}_j$ – Knotensystems (grüne Basisebene K-K, „Bahnebene“) auf das $\mathbf{p}_i$ – Äquator-System (blaue Basisebene A-A, „Äquator“) mit den *Euler*winkel Ω Rektaszension des aufsteigenden Knotens) und *i* („Inklination“). Eine Sichtrichtung P hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel α_1, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ_1 (Deklination), im $\mathbf{k}_j$ – System die Richtungswinkel *u* (Argument der Breite), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und *w* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{k}_3$.

Die zugehörenden differentiellen Beziehungen sind

$$\begin{aligned}\left(\dot\alpha_1-\dot\Omega\right)\cos\delta_1 &= \dot u\cos w\left[\cos i\cos u\cos(\alpha_1-\Omega)+\sin u\sin(\alpha_1-\Omega)\right]-\\ &-\dot w\left\{\left[\sin u\sin w\cos i+\cos w\sin i\right]\cos(\alpha_1-\Omega)-\cos u\sin w\sin(\alpha_1-\Omega)\right\}-\\ &-(i)^{\cdot}\sin\delta_1\cos(\alpha_1-\Omega)\end{aligned}\tag{23.36}$$

$$\begin{aligned}\dot\delta_1 &= \dot u\ \cos w\left\{\cos u\sin i\cos\delta_1+\left[-\cos i\cos u\sin(\alpha_1-\Omega)+\sin u\cos(\alpha_1-\Omega)\right]\sin\delta_1\right\}+\\ &+\dot w\left\{\left[-\sin u\sin w\sin i+\cos w\cos i\right]\cos\delta_1+\right.\\ &\left.+\left[\left(\sin u\sin w\cos i+\cos w\sin i\right)\sin(\alpha_1-\Omega)+\cos u\sin w\cos(\alpha_1-\Omega)\right]\sin\delta_1\right\}+\\ &+(i)^{\cdot}\sin(\alpha_1-\Omega)\end{aligned}\tag{23.37}$$

und umgekehrt

$$\dot{u}\cos w=\left(\dot{\alpha}_1-\dot{\Omega}\right)\cos\delta_1\left[\cos i\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos u+\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin u\right]+$$
$$+\dot{\delta}_1\left\{\left[-\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos i+\cos\delta_1\sin i\right]\cos u+\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\sin u\right\}+ \qquad (23.38)$$
$$+(i)^{\cdot}\sin w\cos u$$

$$\dot{w}=\left(\dot{\alpha}_1-\dot{\Omega}\right)\cos\delta_1\left\{-\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin i\cos w+\right.$$
$$\left.+\left[-\cos i\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin u+\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos u\right]\sin w\right\}+$$
$$+\dot{\delta}_1\left\{\left[\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\sin i+\cos\delta_1\cos i\right]\cos w- \qquad (23.39)$$
$$-\left[\left(-\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos i+\cos\delta_1\sin i\right)\sin u-\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos u\right]\sin w\right\}-$$
$$+(i)^{\cdot}\sin u \quad .$$

23.2 Das Argument der Breite als Bahnwinkel

23.2.1 Darstellung des Argumentes der Breite

Das Argument der Breite wird formal auf ein Perizentrum mit Hilfe der wahren Anomalie υ und auf den Knoten mit dem Argument des Perizentrums ω bezogen

$$u=\omega+\upsilon \quad . \qquad (23.40)$$

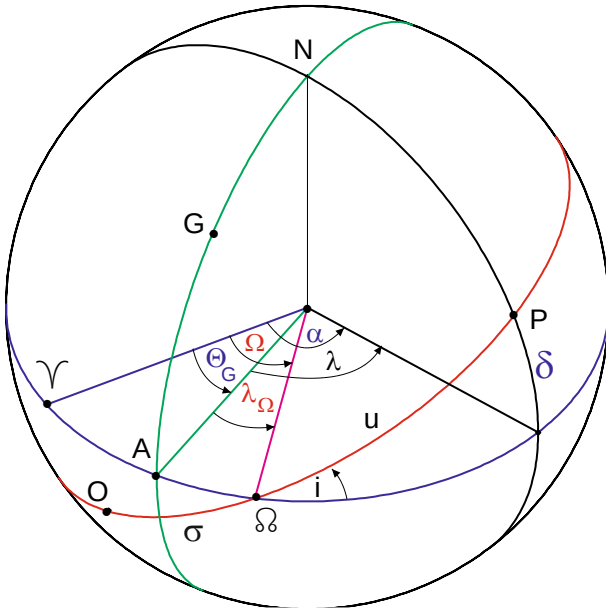


Bild 23-4: Das Argument der Breite u als Bahnwinkel bei Bezug der Bewegung auf den aufsteigenden Knoten ☊. $P \leftrightarrow$ Ort des Satelliten in seiner Bahn (mit Deklination bei Bezug auf ein zentrisches Äquatorsystem), Bogen $GG_0 \leftrightarrow$ 0-Meridian (auf Erde durch Greenwich G), Θ_G Sternzeit des Nullmeridians, Bezug auf das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem durch die Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens (mit $\Omega = A$) und Inklination $i\left(=B\right)$

Im Rahmen einer *Kepler*bewegung kann die wahre Anomalie durch die mittlere Anomalie mit einer Reihenentwicklung des Zweikörperproblems, wie in Abschnitt 22.2.2 hergeleitet wird, dargestellt werden. Mit dem mittleren Argument des Perizentrums $\bar{\omega}_0$ zu einem Anfangszeitpunkt t_0, seiner säkularen Variation $\dot{\omega}_s$ und der Zusammenfassung seiner periodischen Variationen in dem Term $\delta\omega\left[t,t_0\right]$ ergibt sich zusammen mit der Mittelpunktsgleichung für die Entwicklung der wahren Anomalie im Fall einer (hier allein betrachteten) elliptischen Bewegung der Ausdruck

$$\begin{aligned} u = u(t) = \upsilon(t) + \omega(t) = \bar{\omega}(t_0) + \dot{\omega}_s(t_0)(t-t_0) + \delta\omega\left[t,t_0\right] + \\ + M(t) + \left(2e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin M + \\ + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 - \cdots\right)\sin 2M + \\ + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{192}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right)\sin 3M + \\ + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right)\sin 4M + \\ + \left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin 5M + \\ + \left(\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right)\sin 6M + \\ + \left(\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right)\sin 7M + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{23.41}$$

Wie in Formel (22.32) dargestellt, kann dieser Ausdruck in der Form

$$\begin{aligned} u = \bar{u} + \delta u = u(t) = \overline{M_0}(t_0) + \bar{\omega}(t_0) + \left[\overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0)\right](t-t_0) + \\ + \delta M_0\left[t,t_0\right] + \delta n_K\left[t,t_0\right](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \end{aligned} \tag{23.42}$$

zusammengefasst werden. Hier sind

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(t_0) := \overline{M_0}(t_0) + \bar{\omega}(t_0) = \overline{M_{00}} + \bar{\omega}_0 \tag{23.43}$$

das mittlere Argument der Breite zur Epoche t_0 und

$$\bar{u} = \bar{u}(t) = \bar{u}(t_0) + \left[\overline{n_a}(t_0) + \dot{\omega}_{s0}\right](t-t_0) + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0)^2 \tag{23.44}$$

das mittlere Argument der Breite zu einem beliebigen Zeitpunkt *t*. Die periodischen Anteile des Argumentes der Breite werden zusammengefasst in dem Ausdruck

$$\delta u := \delta u\left[t,t_0\right] = \delta M_0\left[t,t_0\right] + \delta n_K\left[t,t_0\right](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \quad . \tag{23.45}$$

23.2.2 Die drakonitische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten

In dem Ausdruck (23.42) können die säkularen Variationen als mittlere drakonitische mittlere Bewegung

$$\overline{n_d} := \overline{n_d}\left[t,t_0\right] = \overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}\left(t-t_0\right) \tag{23.46}$$

zum Zeitpunkt *t* bezogen auf den Anfangszeitpunkt t_0 zusammengefasst werden. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.27) lautet dieser Ausdruck (in vereinfachter Schreibweise)

$$\overline{n_d} = \overline{n_a} + \dot{\omega}_s + \dot{n}_{Ks}\left(t-t_0\right) \quad . \tag{23.47}$$

Bei langfristigen Untersuchungen im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird die Variation der *Kepler*schen mittleren Bewegung vernachlässigt und es wird die (säkulare) mittlere drakonitische mittlere Bewegung verwendet

$$\overline{n_d} = \overline{n_a} + \dot{\omega}_s = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s \qquad \left\langle \dot{n}_{Ks} = 0 \quad . \right. \tag{23.48}$$

Werden hier für einen Näherungsausdruck erster Ordnung die entsprechenden säkularen Variationen aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) eingesetzt, wird

$$\overline{n_{d\,0}} = \overline{n_{K\,0}}\left\{1-\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\}+O\left(\overline{n_{K\,0}}\,J_2^2\right) \quad . \tag{23.49}$$

Sollen zusätzlich säkulare Einflüsse $\dot{n}_{ds}$ auf die Bahnelemente berücksichtigt werden, etwa durch die Einwirkung des Luftwiderstandes auf die große Bahnhalbachse der Bahn, erhält man analog zur Formel (22.42) mit der Näherung[1]

$$\dot{n}_{ds} \approx \dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K\,0}}}{\overline{a}_0}\dot{a}_s \tag{23.50}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned}\overline{n_d} = \overline{n_{K\,0}}\left\{1-\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\left(t-t_0\right)\right\}+ \\ +O\left(\overline{n_{K\,0}}\,J_2^2\right)+O\left(\overline{n_{K\,0}}\,\dot{a}_s^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{23.51}$$

23.2.3 Zeit und Argument der Breite

Vorgegeben seien neben den Bahnparametern mit Bezug auf Anfangsbahnelemente zu einer Epoche t_0 ein Argument der Breite $u = u\left(t\right)$. Gesucht sei der entsprechende Zeitpunkt *t*. Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird analog Abschnitt 22.2.4 durchgeführt. Die Ergebnisse lauten im Fall der drakonitischen Bewegung:

---

[1] siehe hierzu die entsprechenden Bemerkungen in Abschnitt 22.2.3

1. Näherungsweise Berechnung ohne säkulare Beeinflussung der mittleren Bewegung. Nach Formel (23.44) folgt

$$t = t_0 + \frac{u - \overline{M}_{0\,0}}{\overline{n}_{d\,0}} \quad . \tag{23.52}$$

2. Mit Berücksichtigung einer säkularen Variation in der drakonitischen mittleren Bewegung $\dot{n}_{ds} \approx \dot{n}_{Ks}$ ist

$$t = t_0 + \frac{2\left(u - \overline{M}_{0\,0}\right)}{\overline{n}_{d\,0} + \sqrt{\left(\overline{n}_{d\,0}\right)^2 + 4\,\dot{n}_{Ks}\left(u - \overline{M}_{0\,0}\right)}} \quad . \tag{23.53}$$

3. Eine iterative Verbesserung kann mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(t^{(\kappa)}\right) \equiv \sin\left[u\left(t^{(\kappa)}\right) - u\left(t_F\right)\right] = 0 \qquad \langle \kappa = 0,1,2,\cdots \tag{23.54}$$

gefunden werden, wenn der gesuchte Zeitpunkt mit t_F und als Anfangswert für die Iteration der zuvor gefundene Zeitpunkt $t^{(0)}$ eingesetzt wird.

BEISPIEL: Eine Erdsatellitenbahn habe zur Epoche 2015, 9, 25/11^h:30^m: 0^s.00, entsprechend der Tageszeit t_0=41400.00 sec., die Anfangselemente a=8300.000 km, e= 0.2, i=60°.000, Ω=33°.000, ω=221°.000, M_0=125°.000. Zu diesem Zeitpunkt beträgt das Argument der Breite $u_0 = 2°.12$. Der entsprechende Knotendurchgang vor der Epoche würde zur Tageszeit $t_{n0} = 41341.957$ sec stattfinden, der erste nach der Epoche zur Tageszeit $t_{n1} = 48867.03$ sec, entsprechend 13^h:34^m:27^s.03. Dieser Zeitpunkt wurde mit Formel (23.54) gefunden, wobei ein Näherungswert mit Hilfe der *Kepler*schen Umlaufzeit $\overline{P_K} = 7525.374528$ s aus dem ersten Wert t_{n1} errechnet wurde[1]. Die Rechnung wurde mit der a priori Genauigkeit 10^{-3} sec durchgeführt. Zur Kontrolle wird das Argument der Breite zum Zeitpunkt t_{n1} berechnet: es lautet $u_1 = 0°.00002$. Die erreichte Genauigkeit liegt somit unter $0''.1$. ◄

23.2.4 Die Variationen der *Kepler*bewegung in Bezug auf das Argument der Breite

Im Rahmen der drakonitischen Bewegung werden auch differentielle Beziehungen mit dem Argument der Breite als Bahnwinkel benötigt. In diesem Abschnitt werden die Variationsgleichungen der *Kepler*elemente in Bezug auf das Argument der Breite in erster Ordnung und die zugehörigen Integrationen zusammengestellt. Derartige Entwicklungen werden zum Beispiel bei der Berechnung der oskulierenden drakonitischen Umlaufzeit benötigt[2]. Da diese Formelsysteme von allgemeinerem Interesse sein können, werden sie hier im Zusammenhang mit dem Argument der Breite als Bahnvariable systematisch und umfassend behandelt.

---

[1] ein verbesserter Näherungswert kann mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit erhalten werden (Abschnitt 23.3.2)

[2] siehe in Abschnitt 23.3.7 ab Seite 163 etwa nach E. ROTH [1981]

Die Entwicklungen werden hier nur in erster Ordnung des Erdgravitationsfeldes $\left(J_2\right)$ durchgeführt. Nach demselben Schema können auch Systeme höherer Ordnung erhalten werden. Die hierzu benötigten Integrale sind in Anhang D (Band V) zusammengestellt. Die Integrationen können auch mit einem geeigneten Formelmanipulator (etwa MAPLE) durchgeführt werden.

Die Variationsgleichungen nach dem Argument der Breite werden in gleicher Weise hergeleitet wie die entsprechenden Variationsgleichungen nach der wahren Anomalie[1].

In allen Fällen werden die Formeln um oskulierende Anfangsparameter entwickelt. Dadurch unterscheiden sich diese Systeme von den klassischen Satellitentheorien von *D. Brouwer* und *Y. Kozai* u.a., welche ihre Entwicklungen auf mittleren Bahnparametern aufbauen. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass diese klassischen Theorien allgemeingültig durch parallele Integrationen sind, während die hier durchgeführten Formeln als Taylorentwicklungen um einen Anfangspunkt nur für einen beschränkten Zeitraum (einige Umläufe) Gültigkeit haben. Dadurch bleiben auch die langfristig wirkenden periodischen Variationen verborgen[2].

23.2.4.1 Die Variation der Zeit nach dem Argument der Breite

In allen Fällen geht die Untersuchung von der Variationsgleichung des Argumentes der Breite bezüglich der Zeit aus. Sie lautet in der *Gauß*schen Form[3]

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{G}{r^2} - \frac{r\cos i \sin u}{G \sin i} b_N = \frac{G}{r^2}\left(1 - \frac{r^3 \cos i \sin u}{G^2 \sin i} b_N\right). \tag{23.55}$$

Der Bezug der Zeit auf das Argument der Breite wird nach Linearisierung in erster Ordnung durch die Variationsgleichung

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{G}\left(1 + \frac{r^3 \cos i \sin u}{G^2 \sin i} b_N + \cdots\right) \tag{23.56}$$

hergestellt. Die normale Beschleunigung b_N lautet im Erdschwerefeld in erster Ordnung[4]

$$b_N \approx b_{GN0} = -\frac{3\mu J_2 R_E^2 \sin i \cos i \sin u}{r^3} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.57}$$

Somit lautet in diesem Fall die Variationsgleichung der Zeit abhängig vom Argument der Breite in erster Ordnung[5]

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{G} - \frac{3r^2 \mu J_2 R_E^2 \cos^2 i \sin^2 u}{G^3} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.58}$$

---

1 vgl. hierzu bei H. G. L. KRAUSE [1956a], sowie in Abschnitt 22.4.5

2 Dieser Sachverhalt wurde bereits in den Anmerkungen zu den von *H. G. L. Krause* bis 1956 gefundenen Lösungen kritisch angemerkt (siehe in Abschnitt 2.9.4, Band I)

3 Nach Formel (11.79), Abschnitt 11.1.5, Band III

4 Nach Abschnitt 17.2.2, Band III

5 Somit nach zweimaliger (!) Linearisierung

Bemerkenswert an diesem Ausdruck ist das Verschwinden der Singularität für äquatoriale Bahnen.

Vorgegeben sei ein Anfangswert u_0 mit zugehörenden *Kepler*elementen und Bahnparametern

$$\begin{aligned} &a_0 := a(u_0)\ ,\ e_0 := e(u_0)\ ,\ p_0 := p(u_0)\ ,\ G_0 := G(u_0)\ , \\ &i_0 := i(u_0)\ ,\ \Omega_0 := \Omega(u_0)\ ,\ \omega_0 := \omega(u_0)\ ,\ r_0 := r(u_0)\ . \end{aligned} \tag{23.59}$$

Um eine (Taylor-) Entwicklung um diese oskulierenden Anfangswerte[1] durchführen zu können, werden die Differenzausdrücke eingeführt

$$\begin{aligned} &\Delta a := a(u) - a(u_0) = a - a_0\ ,\ \Delta e := e(u) - e(u_0) = e - e_0\ , \\ &\Delta p := p(u) - p(u_0) = p - p_0\ ,\ \Delta G := G(u) - G(u_0) = G - G_0\ , \\ &\Delta i := i(u) - i(u_0) = i - i_0\ ,\ \Delta\Omega := \Omega(u) - \Omega(u_0) = \Omega - \Omega_0\ , \\ &\Delta\omega := \omega(u) - \omega(u_0) = \omega - \omega_0\ . \end{aligned} \tag{23.60}$$

Im Rahmen einer (allgemeinen) Keplerbewegung gelten die Zuordnungen

$$r = r(u) = \frac{p(u)}{1 + e(u)\cos\left[u - \omega(u)\right]}\ ,\ G = G(u) = \sqrt{\mu\, p(u)}\quad . \tag{23.61}$$

Damit wird in erster Ordnung die (Taylor-) Entwicklung nach dem Anfangswert $u_0 = u(t_0)$

$$\frac{dt}{du} = \left.\frac{dt}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega + \cdots \tag{23.62}$$

gebildet. Hier erhält man wegen (23.58) zunächst mit

$$r_0 = \frac{p_0}{1 + e_0\cos(u - \omega_0)}\quad . \tag{23.63}$$

die sofort integrierbare Differentialgleichung, die aus zwei unabhängigen Teilintegralen besteht

$$\left.\frac{dt}{du}\right|^{(0)} = \frac{p_0^2}{G_0\left[1 + e_0\cos(u - \omega_0)\right]^2} - \frac{3\, p_0^2\, \mu\, J_2\, R_E^2\, \cos^2 i_0\, \sin^2 u}{G_0^3\left[1 + e_0\cos(u - \omega_0)\right]^2}\quad . \tag{23.64}$$

Das erste Integral lautet (mit $p_0 = a_0\left(1 - e_0^2\right)$ und $G_0 = \sqrt{\mu\, p_0}$) und unter Verwendung der Integraltafel in Anhang D1 (Band V)

$$\Delta t_1 := \int_{u_0 - \omega_0}^{u - \omega_0} \frac{p_0^2}{\sqrt{\mu p_0}\left[1 + e_0\cos(u - \omega_0)\right]^2}\, du = \sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}}\left(M - M_0\right)\quad . \tag{23.65}$$

Hier ist *M* die der wahren Anomalie $\upsilon = u - \omega_0$ zugeordnete mittlere Anomalie.

---

[1] Da es sich hier um oskulierende Parameter handelt ist die in manchen Arbeiten zu findende Behauptung, es würde sich um „ungestörte“ Parameter handeln, in diesem Zusammenhang unsinnig

Das zweite Teilintegral lautet

$$\Delta t_2 = -\frac{3\,p_0^2\,\mu\,J_2\,R_E^2\,\cos^2 i_0}{G_0^3}\int_{u_0}^{u}\frac{\sin^2 u}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\,du \quad . \tag{23.66}$$

Da $du = d\upsilon$, kann dieses Integral zerlegt werden

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u}\frac{\sin^2 u}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\,du &= \cos^2\omega_0\int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0}\frac{d\upsilon}{\left[1+e_0\cos\upsilon\right]^2} - \\ &-\cos 2\omega_0\int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0}\frac{\cos^2\upsilon\,d\upsilon}{\left[1+e_0\cos\upsilon\right]^2} - \frac{\sin 2\omega_0}{2}\int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0}\frac{\sin 2\upsilon\;d\upsilon}{\left[1+e_0\cos\upsilon\right]^2} \quad .\end{aligned} \tag{23.67}$$

Entsprechend der Integraltafel D1 (Band V) werde die exzentrische Anomalie E eingeführt mit der Zuordnung $\upsilon_0+\omega_0 \to E_1$, $\upsilon+\omega_0 \to E_2$. Damit lautet die Lösung

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u}\frac{\sin^2 u}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\,du &= \cos^2\omega_0\,\frac{E_2-E_1-e_0\left(\sin E_2-\sin E_1\right)}{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}} - \\ &-\frac{\cos 2\omega_0}{e_0^2}\left\{\upsilon-\upsilon_0-\frac{\left(1-2e_0^2\right)\left[E_2-E_1\right]+e_0\left[\sin E_2-\sin E_1\right]}{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}}\right\} \\ -\frac{\sin 2\omega_0}{2e_0^2}&\left\{\ln\left(1+e_0\cos\upsilon\right)-\ln\left(1+e_0\cos\upsilon_0\right)+\left[\frac{1}{1+e_0\cos\upsilon}-\frac{1}{1+e_0\cos\upsilon_0}\right]\right\} \quad .\end{aligned} \tag{23.68}$$

Da in einer Theorie erster Ordnung angenommen werden kann, dass

$$\Delta G = O\left(J_2\right),\ \Delta p = O\left(J_2\right),\ \Delta e = O\left(J_2\right),\ \Delta i = O\left(J_2\right),\ \Delta\omega = O\left(J_2\right),\ \cdots \tag{23.69}$$

können die hier benötigten partiellen Ableitungen in erster Ordnung (im Erdschwerefeld) erhalten werden:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{G}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} + O\left(J_2\right) = -\frac{r^2}{G_0^2} + O\left(J_2\right) \tag{23.70}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\,p}}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} + O\left(J_2\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{1}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2} + O\left(J_2\right) \tag{23.71}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\,p}}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} + O\left(J_2\right) = -2\sqrt{\frac{p_0^3}{\mu}}\,\frac{\cos\left(u-\omega_0\right)}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^3} + O\left(J_2\right) \tag{23.72}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} + O\left(J_2\right) = -2\sqrt{\frac{p_0^3}{\mu}}\,\frac{e_0\,\sin\left(u-\omega_0\right)}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^3} + O\left(J_2\right) \qquad (23.73)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} + O\left(J_2\right) = 0 + O\left(J_2\right) \quad . \qquad (23.74)$$

Zur Bearbeitung der Variationsgleichung (23.62) fehlen noch die Differenzen $\Delta p, \Delta e, \Delta\omega$, während wegen (23.74) Δi in einer Rechnung erster Ordnung nicht jedoch bei höherer Ordnung benötigt wird. Werden die oskulierenden Anfangswerte p_0, e_0, i_0, ω_0 als Integrationskonstante aufgefasst, können die folgenden Integrale formuliert werden:

$$\begin{aligned}
p = p\left(u\right) &= p_0 + \Delta p \;\; = p_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{dp}{du}\,du \\
e = e\left(u\right) &= e_0 + \Delta e \quad = e_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{de}{du}\,du \\
i = i\left(u\right) &= i_0 + \Delta i \quad\;\; = i_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{di}{du}\,du \\
\omega = \omega\left(u\right) &= \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{d\omega}{du}\,du \quad .
\end{aligned} \qquad (23.75)$$

Die hier benötigten Variationsgleichungen in Bezug auf das Argument der Breite werden aus den entsprechenden *Gauß*schen Variationsgleichungen nach der Zeit aus Abschnitt 11.1.5 (Band III) hergeleitet. Bevor die Variationsgleichung (23.62) weiter bearbeitet werden kann, müssen die Integrale (23.75) gelöst sein, was in den folgenden Abschnitten durchgeführt wird. Die Gesamtintegration wird im vorliegenden Bericht nur für den Fall der oskulierenden drakonitischen Umlaufzeit in Abschnitt 23.3.7 ab Seite 164 hergeleitet. Falls jedoch die Integrale

$$\int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\Delta p\right]du, \int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\Delta e\right]du, \int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial\omega}\Delta\omega\right]du \qquad (23.76)$$

nicht über einen ganzen Umlauf sondern nur über ein Teilintervall benötigt werden, können die Integrationen mit den allgemeinen Integralen in Anhang D1 (Band V) erhalten werden. Hier wird wegen (23.74) das Integral erster Ordnung mit der partiellen Differentiation nach der Inklination nicht benötigt.

23.2.4.2 Variation des Flächenparameters nach dem Argument der Breite

Für den Flächenparameter G wird mit Hilfe der Variationsgleichung[1] (11.68) und (23.56) in erster Ordnung

$$\frac{dG}{du} = \dot{G}\frac{dt}{du} = r\, b_T \frac{dt}{du} = \frac{r^3}{G} b_T + O\left(J_2^2\right) \tag{23.77}$$

erhalten. Mit der tangentialen Beschleunigung im Erdschwerefeld[2] wird in erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{dG}{du} &= -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{2rG}\sin^2 i\, \sin 2u + O\left(J_2^2\right) = \\ &= -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G^3}\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]\sin^2 i\, \sin 2u + O\left(J_2^2\right). \end{aligned} \tag{23.78}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u\left(t_0\right)$ gibt

$$\frac{dG}{du} = \left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} \Delta G + \left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega \cdots \quad . \tag{23.79}$$

Im Einzelnen gelten die Beziehungen:

$$\left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)} = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.80}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} = \frac{9\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^4}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u \tag{23.81}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0\cos\left(u-\omega_0\right)\sin 2u \tag{23.82}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{G_0^3}\sin 2i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u \tag{23.83}$$

---

1 In Abschnitt 11.1.5 (Band III)

2 nach Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} = -\frac{3e_0\,\mu^2\,J_2\,R_E^2}{2\,G_0^3}\sin^2 i_0 \sin\left(u-\omega_0\right)\sin 2u \quad . \tag{23.84}$$

Alle diese Ausdrücke sind von erster Ordnung wie auch die Differenzen Δp usw.. Aus diesem Grund können in allen Fällen die Ausdrücke höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} \Delta G = O\left(J_2^2\right)\ , \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e = O\left(J_2^2\right)\ , \cdots . \tag{23.85}$$

Somit lautet die Variationsgleichung erster Ordnung für den Flächenparameter in Bezug auf das Argument der Breite

$$\frac{dG}{du} = \left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)} + O\left(J_2^2\right) = -\frac{3\mu^2\,J_2\,R_E^2}{2\,G_0^3}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.86}$$

Zur Integration können die in Anhang D1 (Band V) zusammengestellten unbestimmten Integrale verwendet werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} G = G(u) = G_0 - \frac{3\mu^2\,J_2\,R_E^2\sin^2 i_0}{4\,G_0^3}\Big\{&\cos(2u_0)-\cos(2u)+ \\ &+e_0\cos\omega_0\left[\frac{1}{3}\cos(3u_0)+\cos(u_0)-\frac{1}{3}\cos(3u)+\cos(u)\right]+ \\ &+e_0\sin\omega_0\left[-\sin(u_0)+\frac{1}{3}\sin(3u_0)+\sin(u_0)-\frac{1}{3}\sin(3u)\right]\Big\}+O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{23.87}$$

23.2.4.3 Die Variation des Kegelschnittparameters nach dem Argument der Breite

Für den Kegelschnittparameter p wird mit Hilfe der Variationsgleichung (23.58) in erster Ordnung

$$\frac{dp}{du} = \dot{p}\frac{dt}{du} = \frac{2r^2}{\mu}b_T + O\left(J_2^2\right) \tag{23.88}$$

erhalten. Mit der tangentialen Beschleunigung im Erdschwerefeld (nach Abschnitt 17.2.2, Band III) wird in erster Ordnung

$$\frac{dp}{du} = -\frac{3J_2\,R_E^2}{r}\sin^2 i\,\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.89}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u\left(t_0\right)$ gibt

$$\frac{dp}{du} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \left[1 - e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right]^2 \sin 2u + \\ + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega \quad . \tag{23.90}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2} \sin^2 i_0 \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] \sin 2u \tag{23.91}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \cos\left(u - \omega_0\right) \sin 2u \tag{23.92}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin 2i_0 \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] \sin 2u \tag{23.93}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = -\frac{3 e_0 J_2 R_E^2}{p_0} \sin 2i_0 \sin\left(u - \omega_0\right) \sin 2u \quad . \tag{23.94}$$

Alle diese Ausdrücke sind von erster Ordnung wie auch die Differenzen Δp usw.. Aus diesem Grund kann in allen Fällen

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p = O\left(J_2^2\right) \ , \ \cdots \tag{23.95}$$

gesetzt werden und es bleibt in erster Ordnung die Variationsgleichung für den Kegelschnittparameter

$$\frac{dp}{du} = \left.\frac{dp}{du}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \left[1 - e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right]^2 \sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.96}$$

Das Integral lautet

$$p = p(u) = p_0 - 3 J_2 R_E^2 \frac{\sin^2 i_0}{p_0} \left\{ \sin^2 u - \sin^2 u_0 - \frac{2}{3} e_0 \cos\omega_0 \left[\cos^3 u - \cos^3 u_0\right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} e_0 \sin\omega_0 \left[\sin^3 u - \sin^3 u_0\right] \right\} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.97}$$

23.2.4.4 Die Variation der Exzentrizität nach dem Argument der Breite

Für die Exzentrizität *e* wird mit Hilfe der Variationsgleichung (23.58) in erster Ordnung

$$\frac{de}{du} = \dot{e}\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{\mu}\left\{ b_{R2}\sin(u-\omega) + b_T\left[\frac{e\,r}{p} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(u-\omega)\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.98}$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[1] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\begin{aligned}\frac{de}{du} = \frac{3J_2R_E^2}{2p^2}\Big\{&\left[1+e\cos(u-\omega)\right]^2\left[3\sin^2 i\,\sin^2 u\sin(u-\omega)-\sin(u-\omega)\right]- \\ &-\sin^2 i\left[1+e\cos(u-\omega)\right]\left[e+2\cos(u-\omega)+e\cos^2(u-\omega)\right]\sin 2(u-\omega)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.99}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\frac{de}{du} = \frac{de}{du}\bigg|^{(0)} + \frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)}\Delta p + \frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)}\Delta e + \frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)}\Delta i + \frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial \omega}\bigg|^{(0)}\Delta\omega \quad . \tag{23.100}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen werden der Vollständigkeit halber hier zusammengestellt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} = -\frac{3J_2R_E^2}{p_0^3}\Big\{&\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2\left[3\sin^2 i_0\,\sin^2 u\sin(u-\omega_0)-\sin(u-\omega_0)\right]- \\ &-\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\left[e_0+2\cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.101}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} = \frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\Big\{&2\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\cos(u-\omega_0)\times \\ &\times\left[3\sin^2 i_0\,\sin^2 u\sin(u-\omega_0)-\sin(u-\omega_0)\right]- \\ &-\sin^2 i_0\cos(u-\omega_0)\left[e_0+2\cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)- \\ &-\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\left[1+\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.102}$$

[1] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3J_2 R_E^2}{2p_0^2}\Big\{3\left[1+e_0\cos\left(u-\omega\right)\right]^2 \sin 2i\ \sin^2 u\ \sin\left(u-\omega_0\right)+$$
$$-\sin 2i\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]\left[e+2\cos\left(u-\omega\right)+e\cos^2\left(u-\omega\right)\right]\sin 2\left(u-\omega\right)\Big\}+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.103}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} = \frac{3J_2 R_E^2}{2p_0^2}\Big\{2e_0\sin\left(u-\omega\right)\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[3\sin^2 i\ \sin^2 u\sin\left(u-\omega\right)-\sin\left(u-\omega\right)\right]-$$
$$+\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2\left[-3\sin^2 i_0\ \sin^2 u\cos\left(u-\omega_0\right)+\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+$$
$$+e\sin^2 i\sin\left(u-\omega\right)\left[e+2\cos\left(u-\omega\right)+e\cos^2\left(u-\omega\right)\right]\sin 2\left(u-\omega\right)- \tag{23.104}$$
$$-\sin^2 i\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\left[2\sin\left(u-\omega\right)+e\sin 2\left(u-\omega\right)\right]\sin 2\left(u-\omega\right)+$$
$$+2\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\left[e_0+2\cos\left(u-\omega_0\right)+e_0\cos^2\left(u-\omega_0\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\cos 2\left(u-\omega_0\right)\Big\}+O\left(J_2^2\right)$$

Da sie alle von erster Ordnung sind, sind die Produkte

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p = O\left(J_2^2\right)\ ,\ \cdots \tag{23.105}$$

von zweiter Ordnung. Es bleibt somit in erster Ordnung

$$\frac{de}{du} = \left.\frac{de}{du}\right|^{(0)} = \frac{3J_2 R_E^2}{2p_0^2}\left\{I_1+\sin^2 i_0\ I_2\right\}+O\left(J_2^2\right) \tag{23.106}$$

mit den beiden Teilfaktoren

$$I_1 := -\sin\left(u-\omega_0\right)-2e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\sin\left(u-\omega_0\right)-e_0^2\cos\ \left(u-\omega_0\right)\sin\left(u-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) \tag{23.107}$$

$$I_2 := 3\sin\left(u-\omega_0\right)\sin^2 u+6e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\sin\left(u-\omega_0\right)\sin^2 u+$$
$$+3e_0^2\cos^2\left(u-\omega_0\right)\sin\left(u-\omega_0\right)\sin^2 u-e_0\sin 2u-3e_0\cos^2\left(u-\omega_0\right)\sin 2u- \tag{23.108}$$
$$-\left(2+e_0^2\right)\cos\left(u-\omega_0\right)\sin 2u-e_0^2\cos^3\left(u-\omega_0\right)\sin 2u+O\left(J_2^2\right)\quad .$$

Integration ergibt

$$\int_{u_0}^{u} I_1\,du = \cos\left(u-\omega_0\right)+e_0\cos^2\left(u-\omega_0\right)+\frac{e_0^2}{3}\cos^3\left(u-\omega_0\right)-$$
$$-\cos\left(u_0-\omega_0\right)+e_0\cos^2\left(u_0-\omega_0\right)+\frac{e_0^2}{3}\cos^3\left(u_0-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) \tag{23.109}$$

$$\int_{u_0}^{u} I_2 du = -3\left[\cos(u-\omega_0)-\cos(u_0-\omega_0)\right]+2\sin\omega_0\left[\sin u-\sin u_0\right]+$$
$$+\cos^2 u\cos(u-\omega_0)-\cos^2 u_0\ \cos(u_0-\omega_0)+3e_0\cos 2\omega_0\left[\sin^4 u-\sin^4 u_0\right]-$$
$$-\frac{3}{4}e_0\sin 2\omega_0\left[\sin 2u-\sin 2u_0\right]+\frac{3}{8}\sin 2\omega_0\left[\sin 4u-\sin 4u_0\right]+$$
$$+\frac{e_0^2}{5}\cos\omega_0\left(4\cos^2\omega_0-3\right)\left[\cos^5 u-\cos^5 u_0\right]+\frac{e_0^2}{3}\cos\omega_0\left(4-5\cos^2\omega_0\right)\left[\cos^3 u-\cos^3 u_0\right]-$$
$$-3e_0^2\sin^2\omega_0\cos\omega_0\left[\cos u-\cos u_0\right]+\frac{e_0^2}{5}\sin\omega_0\left(4\cos^2\omega_0-1\right)\left[\sin^5 u-\sin^5 u_0\right]-$$
$$-e_0^2\cos^2\omega_0\sin\omega_0\left[\sin^3 u-\sin^3 u_0\right]-e_0\left[\sin^2 u-\sin^2 u_0\right]+$$
$$+\frac{3}{2}e_0\cos^2\omega_0\left[\cos 2u-\cos 2u_0\right]+\frac{1}{6}\left(2+e_0^2\right)\left[\cos(3u-\omega_0)-\cos(3u_0-\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left(2+e_0^2\right)\left[\cos(u+\omega_0)-\cos(u_0+\omega_0)\right]-\frac{3}{4}e_0^2\sin 2\omega_0\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{1}{4}e_0^2\sin 2\omega_0\left[\sin(3u+\omega_0)-\sin(3u_0+\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.110)$$

Die Entwicklung der Exzentrizität nach dem Argument der Breite lautet somit in erster Ordnung

$$e=e(u)=e_0+\frac{3J_2R_E^2}{2\,p_0^2}\left\{\int_{u_0}^{u} I_1\,du+\sin^2 i_0\int_{u_0}^{u} I_2\,du\right\}+O\left(J_2^2\right)\ . \qquad (23.111)$$

23.2.4.5 Die Variation der Inklination nach dem Argument der Breite

Für die Inklination *i* wird mit den Variationsgleichungen[1] (11.70) und (23.56) in erster Ordnung

$$\frac{di}{du}=\frac{di}{dt}\frac{dt}{du}=\frac{r}{G}\cos u\,b_N\,\frac{r^2}{G}\left(1+\frac{r^3\cos i\sin u}{G^2\sin i}b_N+\cdots\right)\ . \qquad (23.112)$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[2] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{di}{du}=-\frac{3J_2R_E^2}{4p^2}\sin 2i\sin 2u\left[1+e\cos(u-\omega)\right]+O\left(J_2^2\right)\ . \qquad (23.113)$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0=u(t_0)$ gibt

---

1 Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

2 Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\frac{di}{du} = \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} \Delta p + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial \omega}\Delta\omega \quad . \tag{23.114}$$

Da die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} = \frac{di}{du} = \frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^3}\sin 2i_0 \sin 2u\left[1 + e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) . \tag{23.115}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{4 p_0^2}\sin 2i_0 \sin 2u\cos\left(u-\omega_0\right) + O\left(J_2^2\right) . \tag{23.116}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^2}\cos 2i_0 \sin 2u\left[1 + e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) . \tag{23.117}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial \omega}\bigg|^{(0)} = -\frac{3\, e_0\, J_2 R_E^2}{4 p_0^2}\sin 2i_0 \sin 2u\, e\sin\left(u-\omega_0\right) + O\left(J_2^2\right) . \quad . \tag{23.118}$$

wieder alle von erster Ordnung sind, bleibt

$$\frac{di}{du} = \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{4 p_0^2}\sin 2i_0 \sin 2u\left[1 + e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \tag{23.119}$$

mit dem Integral

$$i = i\left(u\right) = i_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} du = i_0 + \frac{3 J_2 R_E^2 \sin 2i_0}{8 p_0^2}\left\{\cos 2u + \frac{e_0}{3}\cos\left(3u-\omega_0\right) + e_0\cos\left(u+\omega_0\right) - \right.$$
$$\left. - \cos 2u_0 - \frac{e_0}{3}\cos\left(3u_0-\omega_0\right) - e_0\cos\left(u_0+\omega_0\right)\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.120}$$

23.2.4.6 Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite

Für die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω wird mit den Variationsgleichungen[1] (11.71) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite erhalten:

---

[1] Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{d\Omega}{dt}\frac{dt}{du}=\frac{r}{G}\frac{\sin u}{\sin i}b_N\frac{r^2}{G}\left[1+\frac{r^3}{G^2}\cot i\,\sin u\,b_N+\cdots\right]\quad . \tag{23.121}$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[1] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{d\Omega}{du}=-\frac{3J_2R_E^2}{p^2}\cos i\sin^2 u\left[1+e\cos(u-\omega)\right]+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.122}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0=u(t_0)$ gibt

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{d\Omega}{du}\bigg|^{(0)}+\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)}\Delta p+\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial e}\bigg|\Delta e+\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)}\Delta i+\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial\omega}\bigg|^{(0)}\Delta\omega \tag{23.123}$$

mit den zugehörigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)}=\frac{6J_2R_E^2}{p_0^3}\cos i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.124}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\cos i_0\sin^2 u\cos(u-\omega_0)+O\left(J_2^2\right)\ .\ \big| \tag{23.125}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)}=\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\sin i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.126}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial\omega}\bigg|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}e_0\cos i_0\sin^2 u\sin(u-\omega_0)+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.127}$$

Sie sind wieder alle von erster Ordnung sind, so dass bleibt

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{d\Omega}{du}\bigg|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\cos i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.128}$$

Das entsprechende Integral lautet

---

[1] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\Omega = \Omega(u) = \Omega_0 + \int_{u_0}^{u} \left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)} du = \Omega_0 - \frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{2 p_0^2} \left\{ u - u_0 - \frac{1}{2}(\sin 2u - \sin 2u_0) - \right.$$
$$- \frac{e_0}{2}\left[\sin(u+\omega_0) - \sin(u_0+\omega_0)\right] - \frac{e_0}{6}\left[\sin(3u-\omega_0) - \sin(3u_0-\omega_0)\right] + \qquad (23.129)$$
$$\left. + e_0\left[\sin(u-\omega_0) - \sin(u_0\omega_0)\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $(u-u_0)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_d}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\Omega}{du}\right|_s^{(0)} := -\frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{p_0^2} \overline{n_d} + O\left(J_2^2\right) \quad . \qquad (23.130)$$

Diese Größe ist offensichtlich wegen $\overline{n_d}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \overline{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \overline{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

23.2.4.7 Die Variation der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite

Für die Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ bei Bezug auf den Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems wird mit den Variationsgleichungen[2] (4.392) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite erhalten:

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{dt}{du} = \dot{\Omega}\cos i \frac{dt}{du} = \frac{r}{G}\frac{\sin u \cos i}{\sin i} b_N \frac{r^2}{G}\left[1 + \frac{r^3}{G^2}\cot i \, \sin u \, b_N + \cdots\right] \quad . \qquad (23.131)$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[3] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{d\sigma}{du} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p^2}\cos^2 i \sin^2 u\left[1 + e\cos(u-\omega)\right] + O\left(J_2^2\right) \, . \qquad (23.132)$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\frac{d\sigma}{du} = \left.\frac{d\sigma}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega \quad . (23.133)$$

Die partiellen Ableitungen lauten dann

---

1 Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.15) (Band III)

2 Etwa aus Abschnitt 4.4.10 (Band II)

3 Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \frac{6 J_2 R_E^2}{p_0^3}\cos^2 i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.134)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\cos^2 i_0 \sin^2 u\cos\left(u-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.135)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\sin 2i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.136)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2} e_0\cos^2 i_0 \sin^2 u\sin\left(u-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.137)$$

Da diese Ausdrücke wieder alle von erster Ordnung sind, ebenso wie die Differenzen $\Delta p, \Delta e, \Delta i, \Delta\omega$ in (23.75), bleibt

$$\frac{d\sigma}{du} = \left.\frac{d\sigma}{du}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\cos^2 i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.138)$$

mit dem Integral

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma(u) = \sigma_0 + \int_{u_0}^{u}\left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)} du = \sigma_0 - \frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{2 p_0^2}\Big\{ & u-u_0-\frac{1}{2}\left(\sin 2u-\sin 2u_0\right)- \\ -\frac{e_0}{2}\left[\sin\left(u+\omega_0\right)-\sin\left(u_0+\omega_0\right)\right]-\frac{e_0}{6}\left[\sin\left(3u-\omega_0\right)-\sin\left(3u_0-\omega_0\right)\right]+ & \qquad (23.139) \\ +e_0\left[\sin\left(u-\omega_0\right)-\sin\left(u_0\omega_0\right)\right]\Big\}+O\left(J_2^2\right) & .\end{aligned}$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $\left(u-u_0\right)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_d}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\sigma}{du}\right|_s^{(0)} := -\frac{3 J_2 R_E^2 \cos^2 i_0}{p_0^2}\overline{n_d}+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.140)$$

Auch diese Größe ist offensichtlich wegen $\overline{n_d}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \bar{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \bar{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

23.2.4.8 Die Variation des Argumentes des Perigäums nach dem Argument der Breite

Für das Argument des Perigäums ω wird mit den Variationsgleichungen[2] (11.73) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite gebildet:

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{du} = \left\{ -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] - b_N\,\frac{r\sin u\cos i}{G\sin i}\right\}\frac{r^2}{G}\left(1+\frac{r^3\cos i\sin u}{G^2\sin i}b_N + \cdots\right). \quad (23.141)$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[3] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{du} = \frac{3J_2R_E^2}{2p^2}\Bigg\{ -\frac{1}{e}\Big[&\left(1+e\cos(u-\omega)\right)^2\left(3\sin^2 i\sin^2 u - 1\right)\cos(u-\omega) + \\ &+\sin^2 i\,\sin 2u\sin(u-\omega)\left(\left(1+e\cos(u-\omega)\right)^2 + \left(1+e\cos(u-\omega)\right)\right)\Big] + \\ &+2\left(1+e\cos(u-\omega)\right)\sin^2 u\,\cos^2 i\Bigg\} \qquad + O\left(J_2^2\right). \end{aligned} \quad (23.142)$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\frac{d\omega}{du} = \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}\Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}\Delta\omega \quad . (23.143)$$

Da die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = -\frac{3J_2R_E^2}{p_0^3}\Bigg\{ -\frac{1}{e_0}\Big[&\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u - 1\right)\cos(u-\omega_0) + \\ &+\sin^2 i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2 + \left(1+e_0\cos(u-\omega\ )\right)\right)\Big] + \\ &+2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\Bigg\} \qquad + O\left(J_2^2\right). \end{aligned} \quad (23.144)$$

---

1 Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.15) (Band III)

2 Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

3 Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \frac{d\omega}{du} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{\frac{1}{e_0^2}\left[\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$\left.+\sin^2 i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2+\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{e_0}\left[2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos^2(u-\omega_0)+\right. \quad (23.145)$$
$$+\sin^2 i_0\,\sin(2u)\,\sin(u-\omega_0)\cos(u-\omega_0)(2+e_0\cos(u-\omega_0))+$$
$$+\sin^2 i_0\sin(2u)\sin(u-\omega_0)(1+e_0\cos(u-\omega_0))\cos(u-\omega_0)\Big]+$$
$$\left.+2\cos(u-\omega_0)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \quad .$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{-\frac{1}{e_0}\left[6\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\sin i_0\sin^2 u\cos i_0\cos(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$\left.+2\sin i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right]- \quad (23.146)$$
$$\left.-2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\sin^2 u\sin 2i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \; .$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{-\left[2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{e_0}\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\sin(u-\omega_0)-$$
$$-\frac{1}{e_0}\sin^2 i_0\sin 2u\cos(u-\omega_0)\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)+ \quad (23.147)$$
$$+\sin^2 i_0\sin 2u\sin^2(u-\omega_0)\left(\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)+\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right)\Big]+$$
$$\left.+2e_0\sin(u-\omega_0)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \; .$$

wieder alle von erster Ordnung sind, bleibt

$$\frac{d\omega}{du} = \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} + O\left(J_2^2\right) \quad , \qquad (23.148)$$

wobei in (23.142) alle Bahnparameter durch ihren festgehaltenen Wert an der Anfangsstelle $u_0 = u(t_0)$ ersetzt werden müssen. Damit kann die Integration durchgeführt werden und ergibt

$$\omega = \omega(u) = \int_{u_0}^{u} \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} du = -\frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^2} \left\{ -2\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)\left[u-u_0\right] - \right.$$
$$-\frac{1}{e_0}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{9 e_0 \sin^2 i_0}{16}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u+\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{9 e_0 \sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{3 e_0 \sin^2 i_0}{16}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0 \sin^2 i_0}{8}\left[\sin 3(u-\omega_0)-\sin 3(u_0-\omega_0)\right]+\frac{3 e_0 \sin^2 i_0}{4}\left[\sin 2(u-\omega_0)-\sin 2(u_0-\omega_0)\right]- \quad (23.149)$$
$$-\frac{3\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(4u-2\omega_0)-\sin(4u_0-2\omega_0)\right]-\frac{3 e_0 \sin^2 i_0}{16}\left[\sin(u-3\omega_0)-\sin(u_0-3\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{3 e_0 \sin^2 i_0}{80}\left[\sin(5u-3\omega_0)-\sin(5u_0-3\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{4}\left[\sin(2u)-\sin(2u_0)\right]-$$
$$-\frac{\sin^2 i_0}{4 e_0}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{4 e_0}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{e_0}{12}\left[\sin 3(u-\omega_0)-\sin 3(u_0-\omega_0)\right]+\frac{3\sin^2 i_0}{2 e_0}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{3 e_0}{4}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{1}{2}\left[\sin 2(u-\omega_0)-\sin 2(u_0-\omega_0)\right]-$$
$$+\frac{1}{e_0}\sin^2 i_0\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0 \sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u-3\omega_0)-\sin(u_0-3\omega_0)\right]-\frac{e_0 \sin^2 i_0}{40}\left[\sin(5u-3\omega_0)-\sin(5u_0-3\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0 \sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-\frac{\sin^2 i_0}{3 e_0}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{e_0 \sin^2 i_0}{24}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(4u-2\omega_0)-\sin(4u_0-2\omega_0)\right]-$$
$$-\cos^2 i_0\left[-\frac{1}{2}(\sin 2u-\sin 2u_0)-\frac{e_0}{2}\left(\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e_0}{6}\left(\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right)+e_0\left(\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right)\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $(u-u_0)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_d}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\omega}{du}\right|_s^{(0)} := \frac{3 J_2 R_E^2 \overline{n_d}}{p_0^2}\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)+O\left(J_2^2\right) \quad . \qquad (23.150)$$

Diese Größe ist offensichtlich wegen des Faktors $\overline{n_d}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \overline{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \overline{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

---

[1] Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.16) (Band III)

23.3 Die drakonitische Umlaufzeit

Bei Satellitenbewegungen ist die drakonitische Umlaufzeit definiert als der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Satelliten durch den aufsteigenden Knoten seiner Bahn mit dem Äquator des Zentralkörpers. Die drakonitische Umlaufzeit ist bis auf Äquatorbahnen für alle Satellitenbahnen, insbesondere die nichtexzentrischen Beobachtungssatellitenbahnen erklärt. Die drakonitische Umlaufzeit ist ein zentraler Begriff für die Auslegung von Beobachtungssatellitenbahnen.

23.3.1 Wahre drakonitische Umlaufzeit

Der Bahnwinkel der drakonitischen Bewegung, das Argument der Breite, kann über einen gewissen Zeitraum durch Integration über der Variation des Argumentes der Breite $\dot{u}$ erhalten werden. Für einen drakonitischen Umlauf muss der Beginn der Integration nicht im Knoten erfolgen, sondern kann auf einen beliebigen Anfangspunkt bezogen werden. Die wahre drakonitische Umlaufzeit wird daher aus dem Integral

$$P_d = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{du}{\dot{u}} \tag{23.151}$$

erhalten. Bei Bezug auf ein *Hansen*-System mit *Hansen*schem Bahnwinkel ζ und die auf den Anfangspunkt des *Hansen*-System bezogene Länge in der Bahn σ des aufsteigenden Knotens lautet die Variationsgleichung des Argumentes der Breite[1]

$$\dot{u} = \dot{\zeta} - \dot{\sigma} \quad . \tag{23.152}$$

Die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ist durch den Flächensatz $r^2 \dot{\zeta} = G$ mit dem Flächenparameter G gegeben[2], die Variation der Länge des aufsteigenden Knotens durch $\dot{\sigma} = \dot{\Omega} \cos i$. Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens ist aus Formel (11.71) bekannt[3]. Damit lautet die Variation des Argumentes der Breite[4]

$$\dot{u} = \frac{G}{r^2} - \frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} \, b_N \quad . \tag{23.153}$$

Bemerkenswert an dieser Gleichung sind folgende Eigenschaften: wie die drakonitische Bewegung ist sie nicht für äquatoriale Bahnen (sin$i$ = 0) definiert. Besonders interessant ist die Tatsache, dass sie im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung nur die normale Störbeschleunigung b_N explizit enthält. Dadurch wird der Ansatz für eine Integration in den meisten Anwendungen wesentlich vereinfacht.

BEISPIEL 1: Für erdnahe Satellitenbahnen lautet die Variationsgleichung erster Ordnung[5]

---

1 Siehe die Formel (4.351) in Abschnitt 4.4.6 (Band II)

2 Formel (4.298) in Abschnitt 4.4.2

3 Abschnitt 11.1.5 (Band III)

4 Vgl. Formel (11.79)

5 Mit den Ausdrücken (17.33) und (17.35) (Band III)

$$\dot{u} = \frac{G}{r^2} - b_{GN0}\frac{r\sin u\cos i}{G\sin i} + \cdots = \frac{G}{r^2} + \frac{3\mu J_2 R_E^2}{G}\sin^2 u\,\sin^2 i + \cdots \quad . \blacktriangleleft \qquad (23.154)$$

In der praktischen Anwendung kann die Integration (23.151) vermieden werden, wenn ein bekanntes Ephemeridenprogramm zur Verfügung steht. Die wahre drakonitische Umlaufzeit, die in diesem Fall als oskulierende aufgefasst werden kann, lässt sich dann mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(P_d\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_d\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \qquad (23.155)$$

berechnen. Als Anfangswert $P_d^{(0)} = \overline{P_K}$ für die Iteration kann hierzu die *Kepler*sche Umlaufzeit (bzw. die im nächsten Abschnitt berechnete mittlere drakonitische Umlaufzeit) verwendet werden. $u\left(t_0\right) = u_0$ ist ein Anfangswert, auf den die drakonitische Umlaufzeit bezogen werden soll. Wird ein Knoten $u_0 = 0°$ oder $u_0 = 180°$ gewünscht, so kann dieser etwa mit Hilfe der überlagerten Funktion (23.54) gefunden werden: $u\left(t_F\right) = u_0$.

Anmerkung: Die Lösung der überlagerten Funktion kann mit einem vereinfachten *Newton* Verfahren bearbeitet werden, wie es für die wahre anomalistische Umlaufzeit in Abschnitt 22.4.4 beschrieben wurde. Damit ist auch die Möglichkeit verknüpft, Genauigkeitsabschätzungen analytisch durchzuführen. Anmerkungen zur numerischen Bearbeitung und Genauigkeitsfragen werden in Abschnitt 23.3.4 (Seite 155) gegeben. ◀

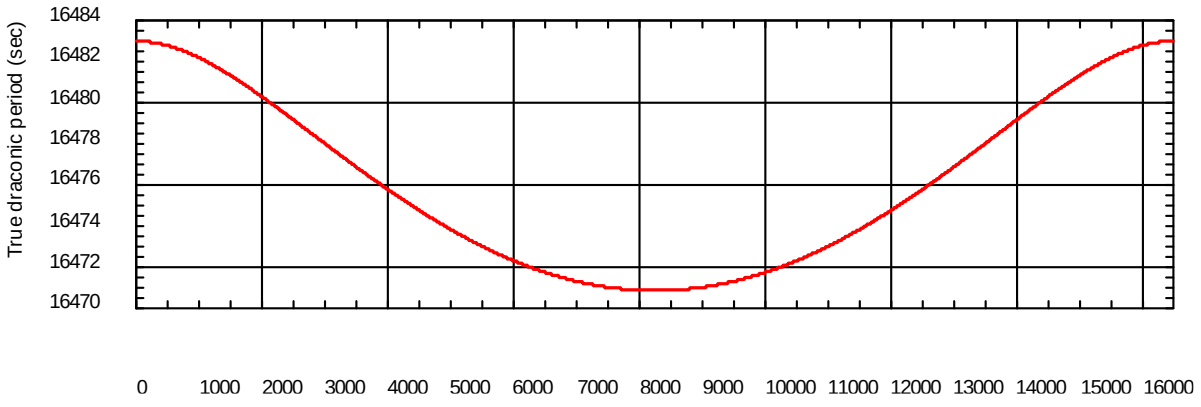


Bild 23-5: Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für die Bahn: a=14000 km, e=0.5, i=50°, $\Omega = \omega = M_0$=0° (Bahnmodell nach Brouwer mit J_2, J_3, J_4)

BEISPIEL 2: Zur Demonstration über die zu erwartenden Größenordnungen wird in Bild 23-5 der Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für eine exzentrische Bahn dargestellt. Die Darstellung beginnt im aufsteigenden Knoten der Bahn. Während des Umlaufs schwankt in diesem Fall die Dauer eines drakonitischen Umlaufs um bis zu 12 Sekunden. Das bedeutet, dass die Umlaufzeit von absteigendem Knoten zum nächsten absteigenden Knoten kürzer als zwischen zwei aufeinanderfolgenden aufsteigenden Knoten ist (weitere Beispiele hierzu im nächsten Abschnitt 23.3.2). ◀

23.3.2 Mittlere drakonitische Umlaufzeit

Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung kann die drakonitische Umlaufzeit üblicherweise in einen säkularen und in einen periodischen Anteil zerlegt werden:

$$P_d = \overline{P_d} + \delta P_d \quad . \tag{23.156}$$

Wenn in Analogie zur *Kepler*schen Umlaufzeit für die drakonitische Umlaufzeit

$$P_d = \frac{2\pi}{n_d} \tag{23.157}$$

mit der drakonitischen mittleren Bewegung

$$n_d = \overline{n_d} + \delta n_d \tag{23.158}$$

gesetzt wird, kann die drakonitische Umlaufzeit im Fall kleiner periodischer Anteile der drakonitischen mittleren Bewegung dargestellt werden durch

$$P_d = \frac{2\pi}{\overline{n_d}\left(1+\frac{\delta n_d}{\overline{n_d}}\right)} = \frac{2\pi}{\overline{n_d}} + 2\pi\left[-\frac{\delta n_d}{\overline{n_d}^2} + \cdots\right] \quad . \tag{23.159}$$

Wird der periodische Anteil der drakonitischen Umlaufzeit durch

$$\delta P_d = -2\pi\left[\frac{\delta n_d}{\overline{n_d}^2} - + \cdots\right] \tag{23.160}$$

wiedergegeben, bleibt für die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.47) und bei Vernachlässigung eines Einflusses des Luftwiderstandes (d.h. bei Annahme einer Bahnhaltung) für die mittlere drakonitische Umlaufzeit die Beziehung

$$\overline{P_d} = \frac{2\pi}{\overline{n_d}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \overline{(M_0)}_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s} \qquad \langle \dot{n}_{Ks} = 0 \quad . \tag{23.161}$$

Für erdnahe Satellitenbahnen und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes genügt die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit der mittleren drakonitischen Bewegung (23.51) der Näherung

$$\overline{P_{d\,0}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{K\,0}}}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.162}$$

BEISPIEL 1: In Tabelle 23-1 ist der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit für kreisförmige Bahnen mit der Bahninklination i = 60° für verschiedene große Bahnhalbachsen aufgetragen. Der Unterschied ist vernachlässigbar. Zum Vergleich enthält die Tabelle auch die jeweilige mittlere *Kepler*sche und die mittlere anomalistische Umlaufzeit. ◀

a [km]	$\overline{P_K}$ [s]	$\overline{P_a}$ [s]	$\overline{P_d}$ [s]	P_d [s]
6800	5580.515896	5584.141503	5587.525987429	5587.525987429
7000	5828.516638	5832.090086	5835.42592192	5835.42592192
7500	6464.022740	6467.475043	6470.69787317	6470.69787317
8000	7121.081578	7124.424274	7127.544850732	7127.544850732
8500	7799.008058	7802.250965	7805.27843687	7805.27843687
9000	8497.178560	8500.330112	8503.27234057	8503.27234057
9500	9215.022255	9218.089760	9220.9535606	9220.9535606
10000	9952.014050	9955.003893	9957.79521777	9957.79521777
10500	10707.668790	10710.586584	10713.3106699	10713.3106699
11000	11481.536433	11484.387148	11487.0486296	11487.0486296
11500	12273.198011	12275.986071	12278.5890742	12278.5890742
12000	13082.262211	13084.991573	13087.5397893	13087.5397893

Tabelle 23-1: Vergleich der mittleren *Kepler*schen und der mittleren anomalistischen mit der mittleren und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für kreisförmige Bahnen mit unterschiedlicher großer Halbachse, sowie in allen Fällen der Inklination i=80°

e	P_H [s]	$\overline{P_d}$ [s]	$P_{d,\mathrm{sec}}$ [s]	P_d [s]
0.00	28152.774777	28152.63461868	28152.63461344	28152.63461344
0.05	28152.588578	28152.65247723	28152.46088133	28152.46128490
0.10	28152.448771	28152.70680607	28152.33221018	28152.33234862
0.15	28152.350930	28152.79993818	28152.24362947	28152.24373267
0.20	28152.292555	28152.93601973	28152.19327036	28152.19321079
0.25	28152.272946	28153.12144580	28152.18022389	28152.18029856
0.30	28152.293261	28153.36558322	28152.20612260	28152.20631977
0.35	28152.356778	28153.68193377	28152.27458508	28152.27467821
0.40	28152.469463	28154.09001395	28152.39137650	28152.39143607
0.45	28152.640967	28154.61845970	28152.56622322	28152.56631636
0.50	28152.886389	28155.31033096	28152.81424800	28152.81446029
0.55	28153.229401	28156.23258216	28153.15920538	28153.15954858
0.60	28153.707990	28157.49392448	28153.63887151	28153.63955710
0.65	28154.385748	28159.28088747	28154.31701360	28154.31800974

Tabelle 23-2: Vergleich der wahren *Hansen*schen mit der mittleren, der säkularen und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=20000 km und der Inklination i=80° und variierend mit Exzentrizitäten $e \in [0.00, 0.65]$

i	P_H [s]	$\overline{P_d}$ [s]	$P_{d,\sec}$ [s]	P_d [s]
5°	13071.257126	13057.681080	13067.919354	13067.932399
10°	13071.634039	13058.426552	13068.372803	13068.385105
20°	13073.084682	13061.295219	13070.117811	13070.127424
30°	13075.306892	13065.688248	13072.790085	13072.796193
40°	13078.032350	13071.073745	13076.065947	13076.068919
50°	13080.932144	13076.800796	13079.549806	13079.550488
60°	13083.656573	13082.178623	13082.821194	13082.821017
70°	13085.877152	13086.559902	13085.486495	13085.486357
80°	13087.326510	13089.418235	13087.225414	13087.225803
90°	13087.830002	13090.410675	13087.829086	13087.830003
100°	13087.326948	13089.418235	13087.225414	13087.226246
110°	13085.877814	13086.559902	13085.486495	13085.487051
120°	13083.657084	13082.178623	13082.821194	13082.821633
130°	13080.932082	13076.800796	13079.549806	13079.550649
140°	13078.031365	13071.073745	13076.065947	13076.068315
150°	13075.304812	13065.688248	13072.790085	13072.794660
160°	13073.081573	13061.295219	13070.117811	13070.125015
170°	13071.630228	13058.426552	13068.372803	13068.382088
175°	13071.253238	13057.681080	13067.919354	13067.929286

Tabelle 23-3: Vergleich der wahren *Hansen*schen mit der mittleren, säkularen und wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=12000 km und der Exzentrizität e=0.4, für alle Inklination $i \in [5°,175°]$

BEISPIEL 2: Die Abhängigkeit des Unterschiedes der mittleren, der säkularen und wahren drakonitischen Umlaufzeiten von der Exzentrizität einer Bahn wird in Tabelle 23-2 am Beispiel einer Bahn mit der Halbachse a = 20000 km und der Bahnneigung i = 60° demonstriert.

Die säkulare drakonitische Umlaufzeit wird durch Iteration mit der Bedingungsgleichung (23.155) erhalten, wenn im verwendeten Bahnmodell nur die säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch $\left(J_2, J_4\right)$ zugelassen werden[1]. Zum Vergleich ist auch die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit in die Tabelle integriert. Da die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit nicht von der Exzentrizität einer Bahn abhängt, hat diese in allen Fällen den Wert $\overline{P_K} = 28148.546486 \sec$. Es zeigt sich, dass der Einfluss der Exzentrizität auf die wahre drakonitische Umlaufzeit sehr gering ist, wie dies auch im Fall der anomalistischen Umlaufzeit beobachtet worden war. ◀

[1] Vgl. die Anmerkungen zur Begriffsbildung in Abschnitt 21.4

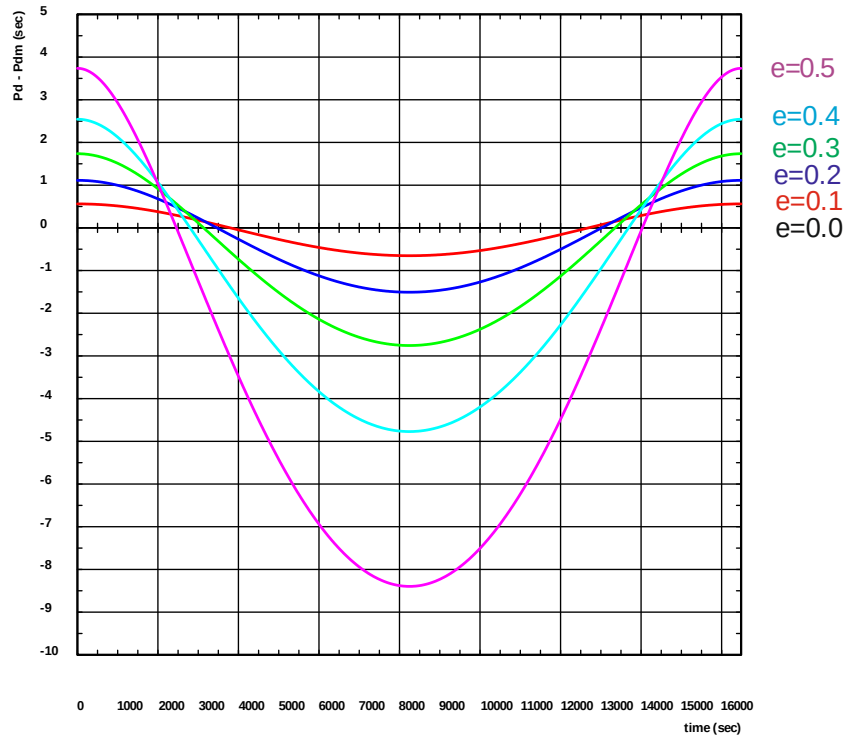


Bild 23-6: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.0 -0.5, i=50°, $\Omega = \omega = M_0$=0°, beginnend im aufsteigenden Knoten

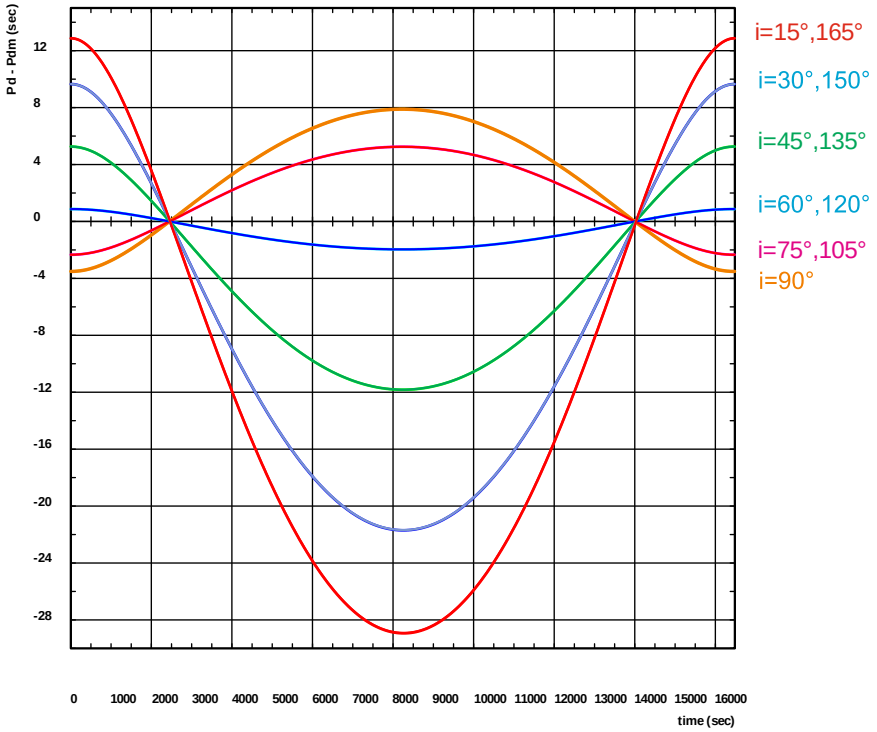


Bild 23-7: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.5, $\Omega = \omega = M_0$=0°, und verschiedene Inklinationen, beginnend im aufsteigenden Knoten

BEISPIEL 3: Der Einfluss der Inklination auf die wahre drakonitische Umlaufzeit wird in Tabelle 23-3 für Bahnen mit der großen Halbachse a = 12000 km und der Exzentrizität e = 0.4 demonstriert. Der Unterschied zwischen mittlerer, säkularer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit ist bemerkenswert. Ebenso bemerkenswert ist der Unterschied zur wahren *Hansen*schen Umlaufzeit (mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit $\overline{P_K}$ = 13082.262211 s). ◀

BEISPIEL 4: In Ergänzung zu dem zweiten Beispiel in Abschnitt 23.3.1 wird in Bild 23-6 der Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit bezogen auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit für verschiedene Exzentrizitäten über einen mittleren drakonitischen Umlauf dargestellt. Gewählt wurde eine Bahn mit der großen Bahnhalbachse a = 14000 km und der Inklination i = 50°. Während (siehe das vorstehende Beispiel 2) der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit im aufsteigenden Knoten der Bahn von der Exzentrizität vernachlässigbar ist, ist dieser Unterschied während eines Umlaufs beträchtlich. ◀

BEISPIEL 5: Auch die Differenz zwischen wahrer und mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf ist erheblich von der Bahninklination abhängig, wie Bild 23-7 für Bahnen mit a = 14000 km und die Exzentrizität e = 0.5 zeigt. ◀

Die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = \sqrt{\mu / a^3}$ ist in einer (allgemeinen) Theorie der Satellitenbewegung von theoretischem Interesse ohne physikalischen Bezug. Wenn daher die drakonitische Umlaufzeit auf andere Umlaufzeiten bezogen werden soll, bietet sich die anomalistische Umlaufzeit wegen beider physikalischem Bezug an. Entsprechend könnte hier auch die *Hansen*sche Umlaufzeit nach Kapitel 21 zur Anwendung kommen. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit ist der mittleren anomalistischen nach Formel (23.48) genau identisch gleich, wenn die Bahn als Neigung gegenüber der Äquatorebene wegen $\dot{\omega}_{s,krit} = 0.0\,\text{rad/s}$ die kritischen Neigungen $\cos \bar{i}_{krit-1/2} = \pm 1/\sqrt{5}$ hat. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}$ ist dann größer als die mittlere anomalistische $\overline{P_a}$, wenn $\dot{\omega}_s < 0.0$. In diesem Fall erreicht der Satellit eher sein Perigäum als den nächsten aufsteigenden Knoten, das Perigäum wandert also dem Satelliten entgegen. Dagegen ist $\overline{P_d} < \overline{P_a}$, wenn $\dot{\omega}_s > 0.0$, das Perigäum bewegt sich vom Satelliten weg, es wird daher später erreicht im Vergleich zum Durchlaufen das aufsteigenden Knotens. Diese Eigenschaften können in manchen Fällen der Bahnanalyse von Interesse sein.

BEISPIEL 6: Bild 23-8 zeigt symptomatisch die Unterschiede zwischen der mittleren drakonitischen und der mittleren anomalistischen Umlaufzeit über der Inklination und für einige Exzentrizitäten. Zur quantitativen Darstellung wurde die große Bahnhalbachse a = 20000 km gewählt. ◀

23.3.3 Die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit Luftwiderstand

Mit Berücksichtigung der säkularen Abnahme der großen Bahnhalbachse kann die mittlere drakonitische Umlaufzeit zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf die Anfangsbahnelemente zur Epoche t_0 mit Hilfe des Argumentes der Breite in der Darstellung (23.44) berechnet werden aus der Beziehung

$$2\pi = \overline{n_d}\,\overline{P_d} + \dot{n}_{Ks}\,\overline{P_d}^{\,2} \quad . \tag{23.163}$$

Wenn die die säkulare Variation der Keplerschen mittleren Bewegung mit dem Ausdruck (23.50) auf die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse zurückgeführt werden kann, lautet die mittlere drakonitische Umlaufzeit (analog zu den Darstellungen in Abschnitt 22.4.3) mit Berücksichtigung der säkularen Abnahme der großen Bahnhalbachse auf Grund des Luftwiderstandes

$$\overline{P_d} = \overline{P_d}\left[t, t_0\right] = \frac{4\pi}{\overline{n_{d\,0}} + \sqrt{\left(\overline{n_{d\,0}}\right)^2 - 12\pi\,\dot{a}_s\,\dfrac{\overline{n_{d\,0}}}{\overline{a}_0}}} \quad . \tag{23.164}$$

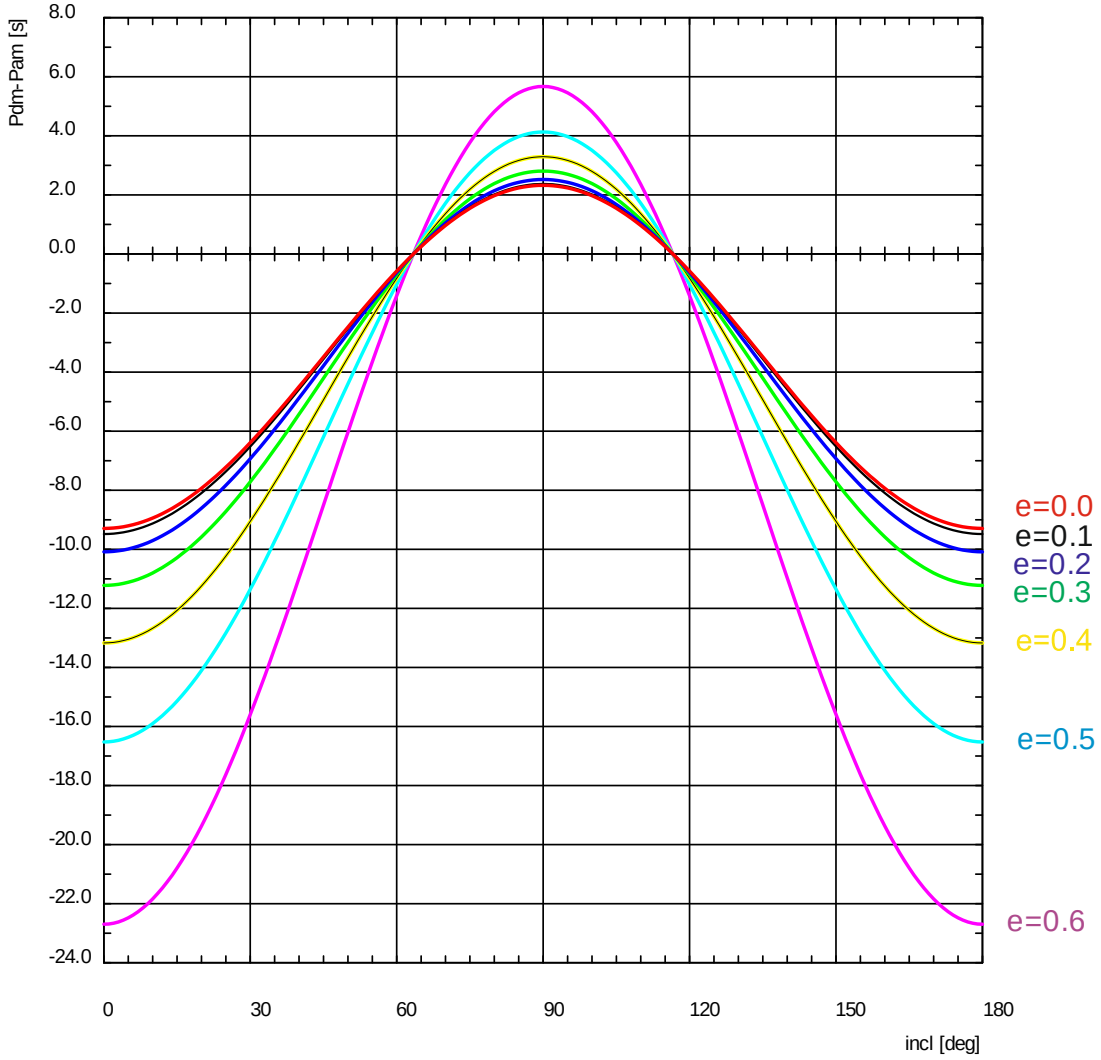


Bild 23-8: Die Differenz von mittlerer drakonitischer Umlaufzeit zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit über alle Inklinationen, einige Exzentrizitäten und die große Bahnhalbachse a = 20000 km

BEISPIEL: Ein Satellit bewege sich in 300 km Bahnhöhe auf einer kreisförmigen Bahn, die um i = 60° geneigt sei. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt ohne Berücksichtigung einer Bahnhöhenveränderung infolge des Luftwiderstandes

$$\overline{P_d} = 5431.02436374568\,\text{sec}\,.$$

Die entsprechende wahre drakonitische Umlaufzeit (bei Bezug auf das hier verwendete Bahnmodell) beträgt

$$P_d = 5431.02436735192\,\text{sec}\,.$$

Um die Wirkung des Luftwiderstandes zu beurteilen, werde angenommen, dass der Satellit die Masse $m_s = 300\,\text{kg}$ und die mittlere Anströmfläche $A_D = 10\,\text{m}^2$. Der Luftwiderstandsbeiwert werde zu $c_D = 2.3$ angenommen. Für die Luftdichte kann im ungünstigsten Fall nach der Tabelle von *Harris-Priester*[1] $\rho_{\max}\left[H = 300\,\text{km}\right] = 35.260\,\text{g/km}^3$ gewählt werden. Die säkulare Abnahme der großen Bahnhalbachse beträgt nach Formel (17.43)

$$\dot{a}_s = -\rho_{\max}\, c_D\, \frac{A_D}{m_s}\sqrt{a\,\mu} = -0.13630278{*}10^{-3}\ \text{km/s}\quad . \tag{23.165}$$

Dies ergibt nach Formel (23.164) die mittlere drakonitische Umlaufzeit

$$\overline{P_{d\,L}} = 5430.56242386946\,\text{sec}\,.$$

Die wahre (zum Beginn der jeweiligen Epoche berechnete oskulierende) drakonitische Umlaufzeit beträgt

$$P_{d\,L} = 5430.562562579219\,\text{sec}\,.\blacktriangleleft$$

Anmerkungen: 1. Die säkulare Abnahme der Bahnhalbachse (23.165) gibt über längere Zeiträume eine unrealistische Abnahme der drakonitischen Umlaufzeit, sofern die mit abnehmender Bahnhöhe exponentiell sich ändernde Luftdichte ρ ad hoc berücksichtigt wird. Um diese Abnahme zu simulieren ist es üblich, die Tabelle von *Harris-Priester*[2] zu interpolieren. Falls dies nicht möglich ist, muss die Luftdichte durch Interpolation angepasst werden. ◄

2. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit ist im Rahmen einer Bahnauslegung von zentraler Bedeutung. Daher ist es erforderlich, insbesondere bei erdnahen Bahnen die Beeinflussung durch den Luftwiderstand ins Kalkül einzubeziehen, eventuell auch eine Bahnkorrektur systematisch einzuplanen (siehe in Abschnitt 23.10). ◄

3. Die mittlere drakonitische Bewegung in der allgemeinen Darstellung (23.47) zeigt den Zusammenhang und den Unterschied zwischen der anomalistischen und der drakonitischen Bewegung. Im Fall $\dot{\omega}_s = 0$ sind diese beiden Bewegungen jedoch identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn die durchflogene Bahn die kritische Neigung hat (siehe in Abschnitt 22.7.1). ◄

4. Als Faustregel für die minimale Umlaufzeit eines Erdsatelliten kann eine kreisförmige Bahn in etwa 200 km Bahnhöhe, somit $a_{\min} = 6758.140\,\text{km}$, gewählt werden. Für alle betrachteten Arten von Umlaufzeiten kann als untere Schätzung gewertet werden

$$P \le P_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{\min}}{\mu}} = 5310\,\text{sec} \mathrel{\hat{=}} 88.5\,\text{min} \mathrel{\hat{=}} 1.5\,\text{h}\quad .\blacktriangleleft \tag{23.166}$$

---

[1] Tabelle 17-12 in Abschnitt 17.3.1 (Band III)

[2] oder eine vergleichbare wie die in Anhang K (Band V) wiedergegebene MSIS Tabelle

23.3.4 Zur numerischen Berechnung der drakonitischen Umlaufzeit

Die überlagerte Funktion (23.155)

$$fct\left(P_d\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_d\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{23.167}$$

kann mit dem vereinfachten *Newton*-Verfahren

$$P_d^{(\nu+1)} = P_d^{(\nu)} - \frac{fct\left(P_d^{(\nu)}\right)}{fct'\left(P_d^{(\nu)}\right)} \tag{23.168}$$

durch sukzessive Approximation bearbeitet werden. Die Vorbedingung stetiger Differenzierbarkeit ist mit der Funktion (23.167) sicher erfüllt. Als Anfangswert kann die mittlere drakonitische Umlaufzeit (aus Formel (23.161) oder (23.164)) gewählt werden $P_d^{(0)} = \overline{P_d}$ oder einfacher die (wahre) *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$. Im Rahmen einer Bahnanalyse wird hier angenommen, dass die abgeleitete Funktion $fct'\left(P_d^{(\nu)}\right)$ nur die säkularen Störungen erster Ordnung enthält. Damit genügt es, die Ableitung nur einmal zu berechnen und für die weitere Iteration konstant zu halten. Der Vorteil der quadratischen Konvergenz des *Newton* Verfahrens geht dadurch verloren, wird aber in den meisten Anwendungen einer Bahnanalyse durch den reduzierten Berechnungsaufwand ausgeglichen. Es werde in diesem Zusammenhang der konstante Wert

$$fct'\left(P_d^{(\nu)}\right) = fct'\left(\overline{P_d}\right) \tag{23.169}.$$

zugeordnet. Das Verfahren (23.168) konvergiert, wenn mit $0 \le \left|fct'\left(\overline{P_d}\right)\right|$ für eine reelle positive Zahl q die Bedingung

$$0 \le \frac{1}{\left|fct'\left(\overline{P_d}\right)\right|}\left|fct'\left(\overline{P_d}\right) - fct'\left(P_d\right)\right| \le q < 1 \tag{23.170}$$

erfüllt ist[1]. Mit einer reellen Zahl *m*

$$0 < m \le \left|fct'\left(P_d\right)\right| \tag{23.171}$$

erhält man nach ν Iterationsschritten die a priori Abschätzung für die Abweichung der erhaltenen Näherung $P_d^{(\nu)}$ vom Zielwert P_d

$$\left|P_d^{(\nu)} - P_d\right| \le \frac{q^\nu}{m}\left|fct\left(\overline{P_d}\right)\right| \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{23.172}$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit der Bedingungsfunktion (23.167) in Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit ΔP_d der zu berechnenden drakonitischen Umlaufzeit wird der Differenzen Ausdruck

---

[1] Näheres über das vereinfachte *Newton*sche Verfahren etwa in STUMMEL, F. und HAINER, K. [1971], p. 36 ff.

$$\Delta fct = \frac{\partial fct}{\partial P_d}\Delta P_d \tag{23.173}$$

benötigt. Zur Berechnung der partiellen Differentiation nach der drakonitischen Umlaufzeit werden die Bezeichnungen $u_1 := u(t_0 + P_d), u_0 := u(t_0)$ eingeführt. Dann wird

$$\frac{\partial fct}{\partial P_d} = \frac{dfct}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial P_d} \quad . \tag{23.174}$$

Hier ist

$$\frac{dfct}{du_1} = \cos(u_1 - u_0) = \cos\left[u(t_0 + P_d) - u(t_0)\right] \; . \tag{23.175}$$

Da das Argument der Breite in die wahre Anomalie und das Argument des Perigäums zerlegt werden kann

$$u_1 = \upsilon_1 + \omega_1 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \upsilon_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \omega_1} = 1 \tag{23.176}$$

wird

$$\frac{\partial u_1}{\partial P_d} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial P_d} + \frac{\partial \omega_1}{\partial P_d} \quad . \tag{23.177}$$

Hier ist zunächst

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial P_d} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial E_1}\frac{\partial E_1}{\partial M_1}\frac{\partial M_1}{\partial P_d} \; , \tag{23.178}$$

wobei (siehe etwa die Formeln (15.20) und (15.29)[1])

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial E_1} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E_1} \quad , \quad \frac{\partial E_1}{\partial M_1} = \frac{1}{1 - e\cos E_1} \quad . \tag{23.179}$$

Mit den Beziehungen (22.26) und (22.28) kann die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + P_d$ dargestellt werden in der Form

$$M_1 = M(t_1) = \overline{M}_{0\,0} + \left[(M_0)^{\cdot}_{s} + \overline{n}_{K\,0} + \dot{n}_{Ks}\, P_d\right] P_d + \delta M\left[t_0 + P_d; t_0\right] \; . \tag{23.180}$$

Werden die periodischen Variationen sowie der Einfluss des Luftwiderstandes vernachlässigt, bleibt

$$\frac{\partial M_1}{\partial P_d} = (M_0)^{\cdot}_{s} + \cdots \quad , \tag{23.181}$$

wobei die säkulare Variation der mittleren Epocheanomalie im Fall erdnaher Satellitenbahnen aus der Beziehung (20.17) bekannt ist[2]. Entsprechend kann das Argument des Perigäums in die Darstellung

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \omega_0 + \dot{\omega}_s\, P_d + \delta\omega\left[t_0 + P_d; t_0\right] \tag{23.182}$$

---

1 In den Abschnitten 15.2.1 und 15.2.3 in Band III

2 In Abschnitt 20.2.1 in Band III

entwickelt werden. Bei Vernachlässigung der periodischen Variationen bleibt

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial P_d} = \dot{\omega}_s + \cdots \ . \tag{23.183}$$

Die hier benötigte säkulare Variation des Argumentes des Perigäums findet sich in Formel (20.16).

23.3.5 Bahnauswahl aus drakonitischer Umlaufzeit

Eine der wichtigsten Problemstellungen einer Satellitenbahnanalyse ist die Auswahl der Bahnelemente nach Vorgabe von Projekt-relevanten Parametern. Im Rahmen der drakonitischen Bewegung ist eine derartige aus der drakonitischen Umlaufzeit eine Grundaufgabe, auf die viele weitere Problemstellungen zurückgeführt werden können.

23.3.5.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Es sei die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}} = 2\pi / \overline{n_{d\,0}}$ für eine bestimmte Epoche t_0 vorgegeben. Ferner seien die mittleren Epocheelemente Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ bekannt. Eine Grundaufgabe ist die Berechnung der zugehörigen mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$.

Diese Aufgabe kann in verschiedenen Schritten mit unterschiedlicher Genauigkeitsanforderung bearbeitet werden[1].

Als erster Schritt wird eine Näherungslösung mit Hilfe der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit erhalten:

$$\overline{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu \left(\overline{P_{d\,0}}\right)^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\overline{n_{d\,0}}\right)^2}} \quad . \tag{23.184}$$

Eine erste Verbesserung

$$\overline{a}_0^{(1)} = \overline{a}_0^{(0)} + \Delta \overline{a}_0^{(1)} \tag{23.185}$$

wird (wenn der säkulare Einfluss durch den Luftwiderstand vernachlässigt werden kann) mit Hilfe der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.49) erhalten

$$\overline{n_{d\,0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(1)}\right)^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\left(\overline{a}_0^{(1)}\right)^2 \left(1 - \overline{e}_o^2\right)^2} \left[1 + \sqrt{1 - \overline{e}_0^2} - \left(5 + 3\sqrt{1 - \overline{e}_0^2}\right) \cos^2 \overline{i}_0 \right] \right\} + \cdots \tag{23.186}$$

Quadrierung und Entwicklung in erster Ordnung ergibt mit der Definition (23.185) den Korrekturterm erster Ordnung

---

[1] Die Entwicklungen in diesem Abschnitt folgen den entsprechenden im Rahmen der anomalistischen Bewegung in Abschnitt 22.5

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = -J_2 \frac{R_E^2}{2\bar{a}_0^{(0)}\left(1-\bar{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0\right]+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.187)$$

bzw.

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}\left(1-\bar{e}_o^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)+\frac{1}{2}\left(5\cos^2\bar{i}_0-1\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.188)$$

Diese Korrektur nimmt linear mit der mittleren Entfernung („große Bahnhalbachse“) zum Erdmittelpunkt ab.

Während die erste dieser beiden Darstellungen für die Rechnung geeigneter ist, zeigt die zweite den Einfluss der säkularen Variationen im Argument des Perigäums $\dot{\omega}_s$ bzw. in der mittleren Epocheanomalie $\left(M_0\right)_s^{\cdot}$. Falls der erstere Anteil verschwindet $\left(5\cos^2\bar{i}_0=0\right)$ bewegt sich der Satellit auf einer Bahn mit „kritischer Neigung“. Im zweiten Fall, der durch Verschwinden der säkularen Variation der Epocheanomalie gekennzeichnet ist (etwa in der Darstellung (22.35) in Abschnitt 22.2.3) $\left(\sin^2\bar{i}_0=2/3\right)$ bewegt sich der Satellit auf einer Bahn mit Neigung

$$\bar{i}_{0K1}=54°.73561032 \quad \text{bzw.} \quad \bar{i}_{0K2}=125°.26438968 \quad . \qquad (23.189)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, für welche Bahnen der Korrekturterm $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Bahn die Neigung aus

$$\cos\bar{i}_{0K3/4}=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}} \qquad (23.190)$$

hat. Für kreisförmige Bahnen ist dies der Fall für die Inklinationen $\bar{i}_{0K3}=60°$ bzw. $\bar{i}_{0K4}=120°$, für hochexzentrische Bahnen mit $\bar{e}_0=0.9$ für die Inklinationen $\bar{i}_{0k3}=61°.5$, $\bar{i}_{0k4}=118°.5$.

Die Korrektur erster Ordnung in Formel (23.187) zeigt, dass der Ausdruck $\bar{a}_0^{(0)}\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ eine von der großen Bahnhalbachse unabhängige Größe ist, somit für alle Exzentrizitäten und Inklinationen gültig. In Bild 23-9 und Bild 23-10 ist der Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ über alle Inklinationen und Exzentrizitäten e=0.0 bis e=0.5, bzw. bis e=0.9 aufgetragen. Keine Korrektur wird erforderlich für Inklinationen aus Bedingung (23.190).

Die hier gefundene erste Lösung $\bar{a}_0^{(1)}$ kann iterativ mit der überlagerten Funktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right)\equiv\sin\left[u\left(t_0+P_{d0};\bar{a}_0^{(\nu)}\right)-u\left(t_0;\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right]=0 \qquad \langle\nu=2,3,\cdots \qquad (23.191)$$

im Rahmen des zur Verfügung stehenden Bahnmodells und einer gewünschten Genauigkeit verbessert werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien für eine kreisförmige Bahn die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_{d0}=6000.000\,\text{sec}$ sowie die Inklination $\bar{i}_0=10°$. Die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit ergibt für die zu bestimmende mittlere große Bahnhalbachse mit Formel (23.184) die Aus-

gangsnäherung $\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635455699\,\text{km}$. Die Korrektur mit Formel (23.187) beträgt $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 17.76937497517\,\text{km}$, somit die erste verbesserte Lösung $\bar{a}_0^{(1)} = 7154.404830674\,\text{km}$. Die zugehörige mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_{d\,0}^{(1)} = 6000.08493585472\,\text{sec}$.

Eine weitere Verbesserung, die mit Hilfe der überlagerten Funktion (23.191) und ausschließlich mit säkularen Störgliedern $\left(J_2, J_4, \text{kein Luftwiderstand}\right)$ durchgeführt wird, ergibt $\bar{a}_0^{(2)} = 7154.337649278\,\text{km}$. Zur Kontrolle wird mit diesem Wert die mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet: $\overline{P}_{d\,0}^{(2)} = 6000.00000507239747\,\text{sec}$, die a posteriori Genauigkeit ist also besser als $10^{-5}\,\text{sec}$.

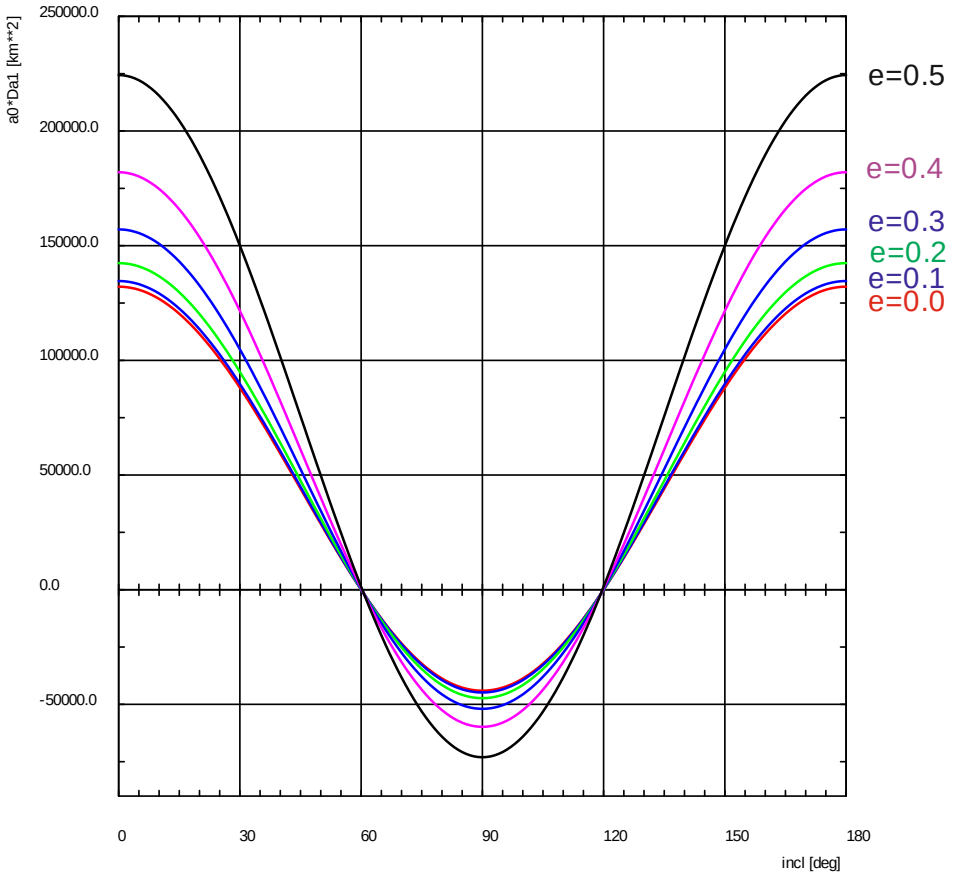


Bild 23-9: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für Exzentrizitäten $e \le 0.5$

Werden dagegen bei Lösung der überlagerten Funktion (23.191) die periodischen Störungen im verwendeten Bahnmodell $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ zugelassen, so ergibt sich der modifizierte Wert $\bar{a}_0^{(2p)} = 7154.337637071\text{km}$ mit der zugehörigen mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}^{(2p)} = 5999.99998964014139\,\text{sec}$, die - wie zu erwarten war – mit besser als $10^{-4}\,\text{sec}$ etwas ungenauer als der ohne die periodischen Störungen erhaltene Wert ist.

Zur Ergänzung: in diesem Fall hat der Korrekturterm nach Beziehung (23.187) den Wert $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 126813.6\,\mathrm{km}^2$. Wird diese Zahl durch $\bar{a}_0^{(0)}$ dividiert, ergibt sich genau die obige Korrektur $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$.

In Ergänzung sei neben den obigen Zahlenwerten $\overline{P_{d\,0}} = 6000\,\mathrm{sec}$ und $\bar{i}_0 = 10°$ die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.08$ gefordert, womit eine Perigäumshöhe von 202 km erhalten werden kann. Die entsprechende mittlere große Bahnhalbachse lautet $\bar{a}_0 = 7152.796\,\mathrm{km}$. Wird zur Kontrolle die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet, erhält man den fehlerhaften Wert $\overline{P_d}^{(0)} = 5997.71492\,\mathrm{s}$. Da die Halbachse durch Iteration mit der Bedingungsgleichung (23.191) erhalten wurde, muss die entsprechende drakonitische Umlaufzeit mit der analogen Iteration nach (23.155) berechnet werden. In diesem Fall wurde die Halbachse nur mit säkularen Bewegungseinflüssen $\left(J_2, J_4\right)$ berechnet. Dem entspricht die säkulare drakonitische Umlaufzeit $P_{d,\mathrm{sec}} = 5999.9999383\,\mathrm{s}$. Werden dagegen die periodischen Bewegungseinflüsse durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ zugelassen, lautet die zugehörige große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7152.789\,\mathrm{km}$. Die mit diesem Wert berechnete wahre drakonitische Umlaufzeit beträgt $P_{d,\mathrm{sec}} = 5999.99999996\,\mathrm{s}$

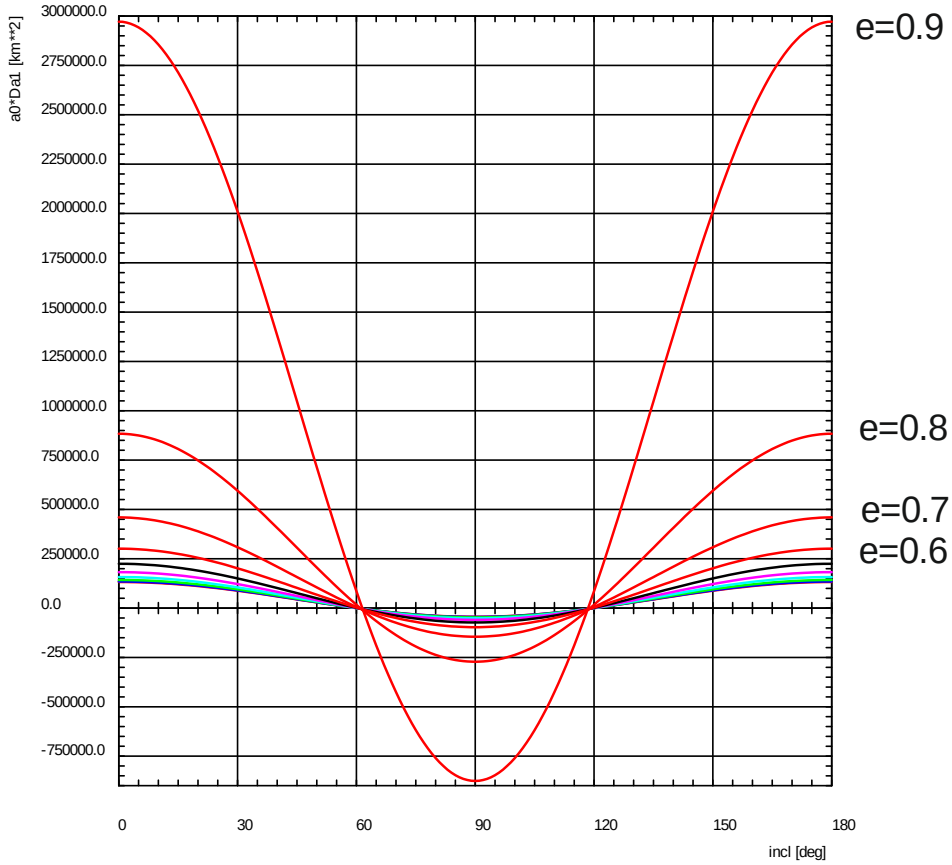


Bild 23-10: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, über der Inklination für Exzentrizitäten e>0.5 (Ergänzung zu Bild 23-9) .◀

23.3.5.2 Berechnung der Exzentrizität aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Mit Hilfe von Formel (23.161) kann bei Vorgabe der Epocheparameter, der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$, der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und der mittleren Inklination $\overline{i}_0$ die entsprechende mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ berechnet werden. Die benötigten mittleren Bewegungen sind

$$\overline{n}_{d\,0} = \frac{2\pi}{\overline{P}_{d\,0}} \quad , \quad \overline{n}_{K\,0} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \quad . \tag{23.192}$$

Die Berechnung muss iterativ durchgeführt werden. Um einen (nicht ganz willkürlichen) Anfangswert zu bekommen, kann die im Rahmen der anomalistischen Bewegung gefundene Anfangslösung gewählt werden[1]

$$\overline{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^2 \frac{1 - 3\cos^2 \overline{i}_0}{1 - \frac{2\pi}{\overline{P}_{d\,0}} \sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}}}^3} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.193}$$

Zur Durchführung der Iteration wird die Bedingungsfunktion

$$fct\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P}_d\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P}_{d\,0} = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \tag{23.194}$$

gewählt. Mit der berechneten Näherung $\overline{e}_0^{(\nu)}$ können die säkulare Epocheanomalie und das Argument des Perigäums in erster Näherung berechnet werden. Die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit folgt dann (entsprechend dem Ausdruck (23.161), ohne Berücksichtigung der Einflüsse durch den Luftwiderstand) aus

$$\overline{P}_d\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n}_d\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)} \quad , \quad \overline{n}_d\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = \overline{n}_{K\,0} + \left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) + \dot{\omega}_s\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) \quad . \tag{23.195}$$

BEISPIEL: Gegeben seien $\overline{P}_{d\,0} = 43200\,\mathrm{sec}$, $\overline{a}_0 = 26614.6234\,\mathrm{km}$, $\overline{i}_0 = 23°$. Die Anfangsnäherung nach Formel (22.174) lautet $\overline{e}_0^{(0)} = 0.7496737072014$ mit $\overline{P}_d\left(\overline{e}_0^{(0)}\right) = 43165.95914\,\mathrm{sec}$. Die Iteration mit Hilfe d(22.174) er Bedingungsfunktion (23.194) ergibt nach etlichen Schritten die Exzentrizität $\overline{e}_0^{(\nu)} = 0.2375968048119$ mit der jetzt berechneten mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_d\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = 43199.99999998\,\mathrm{sec}$, die Genauigkeit beträgt somit $10^{-8}\,\mathrm{sec}$. Für eine weitere Kontrolle wird die Differenz im Argument der Breite zwischen Anfangs- und Endwert über einen drakonitischen Umlauf berechnet. Diese Differenz müsste exakt 360° betragen. Allerdings ergibt die Berechnung den Wert $\Delta u = 359°.9583514746 \mathrel{\hat{=}} 359°\,57'\,30''$. Eine bessere Näherung erlaubt das Verfahren nicht, was ein Hinweis auf die Sensitivität der Berechnung mit Hilfe der Exzentrizität ist. Weitere Berechnungen, die auf diesen Ergebnissen fußen, sollten daher mit höchstens der Genauigkeit $10^{-3}\,\mathrm{sec}$ durchgeführt werden. Das Beispiel zeigt, dass die Näherungsformel (22.174) einen

---

[1] Siehe in Abschnitt 22.3

für sich allein genommen unbrauchbaren Wert liefert. Erst die iterative Verbesserung führt zu einem brauchbaren Ergebnis. In der praktischen Anwendung dürfte die Berechnung der Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit nur untergeordnete Bedeutung haben. ◄

23.3.5.3 Berechnung der Inklination aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Die mittlere drakonitische mittlere Bewegung (23.49) in erster Ordnung erlaubt die Auflösung nach der mittleren (Epoche-) Inklination

$$\cos^2 \bar{i}_0^{(0)} = \frac{1}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\frac{4\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3J_2R_E^2}\left(1-\frac{\overline{n_{d\,0}}}{\overline{n_{K\,0}}}\right)\right] \quad . \qquad (23.196)$$

Bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}}$, der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ kann somit die mittlere Inklination berechnet werden. Die entsprechenden mittleren Bewegungen können aus (23.192) übernommen werden. Zusätzlich zu diesen Vorgaben muss noch bekannt sein, ob die Bahn rechtläufig oder rückläufig sein soll. Der Faktor J_2 im Nenner des obigen Ausdrucks zeigt, dass diese ganze Theorie nur im Fall eines abgeplatteten Zentralkörpers mit $J_2 \neq 0$ sinnvoll ist.

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss durch Vorgabe des Faktors $\mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right)$ gewählt werden, ob die Bahn im auf- oder absteigenden Bahnast betrachtet werde soll. Die Lösung lautet dann

$$\cos\bar{i}_0^{(0)} = \mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right)\sqrt{\frac{1}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\frac{4\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3J_2R_E^2}\left(1-\frac{\overline{n_{d\,0}}}{\overline{n_{K\,0}}}\right)\right]} \quad . (23.197)$$

Analog (23.195) wird die jeweilige mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right)$ in jedem Iterationsschritt mit den entsprechenden säkularen Variationen erster Ordnung in $\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ und $\dot{\omega}_s$ berechnet. Ausgehend von dieser Anfangslösung kann eine iterative Bearbeitung erfolgen mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P_d}\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_{d\,0}} = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \quad . \qquad (23.198)$$

BEISPIEL: Gegeben seien die Bahnparameter $\bar{a}_0 = 20000\,\mathrm{km}$, $\bar{e}_0 = 0.4$, $\mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right) = -1$, $\overline{P_d} = 28154.0900\,\mathrm{s}$. Formel (23.197) liefert die Näherungslösung $\bar{i}_0^{(0)} = 100°.00897$. Zur Kontrolle wird die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet: $\overline{P_{d\,0}}^{(0)} = 28154.08864634\,\mathrm{sec}$, der Fehler liegt bei etwa $10^{-3}\,\mathrm{sec}$. Wird eine Verbesserung mit der Bedingungsfunktion (23.198) gewünscht, kann nach einigen Iterationsschritten der Wert $\bar{i}_0^{(\nu)} = 100°.00008348$ erhalten werden. Die zugehörige drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{d\,0}}^{(\nu)} = 28154.09000123\,\mathrm{sec}$ mit der Genauigkeit $10^{-6}\,\mathrm{sec}$. Der Fehler im Argument der Brei-

te nach einem drakonitischen Umlauf beträgt $\Delta u = 0°.0553018764$, was einen Hinweis auf die Sensitivität aber auch Zuverlässigkeit des Verfahrens gibt. ◄

23.3.6 Bahnauswahl aus drakonitischen Tagesumläufen

Die Anzahl der Umläufe eines Erdsatelliten pro Tag um die Erde ist ein anschaulich charakterisierender Parameter einer Erdsatellitenbahn. Wegen des Bezugs auf den Knotenüberflug wird der Umlauf um die Erde durch die drakonitische Umlaufzeit charakterisiert. Die Anzahl der Tagesumläufe beträgt daher

$$N_0 = \frac{86400\,\mathrm{s}}{\overline{P_d}\,[\mathrm{s}]} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\overline{P_d}\,[\mathrm{d}]} \quad . \tag{23.199}$$

Der ganzzahlige Anteil der Tagesumläufe, der für manche allgemeingültige Aussagen in einer Satellitenbahnanalyse von Bedeutung ist, kann mit der Funktion

$$\tilde{N}_0 = \mathrm{int}\left(N_0\right) \tag{23.200}$$

berechnet werden. Wird als untere Schranke eine kreisförmige Erdsatellitenbahn in etwa 200 km Bahnhöhe gewählt, beträgt deren *Kepler*sche Umlaufzeit $\overline{P_{K0}} \approx 5310\,\mathrm{s}$, somit gilt die Relation

$$\tilde{N}_0 \le 16 \quad . \tag{23.201}$$

Ganz allgemein gilt die Aussage:

- *Ein Erdsatellit kann pro Sonnentag höchstens 16 ganze Erdumläufe vollenden*.

An M_0 Tagen kann ein Erdsatellit

$$N_{0M} = M_0 \frac{86400\,\mathrm{s}}{\overline{P_d}\,[\mathrm{s}]} \quad \text{mit} \quad \frac{N_{0M}}{M_0} \le 16 \tag{23.202}$$

drakonitische Umläufe vollenden. Wird umgekehrt verlangt, dass ein Satellit an M_0 Tagen N_{0M} drakonitische Erdumläufe vollenden soll, muss seine mittlere drakonitische Umlaufzeit den Wert

$$\overline{P_d} = \frac{N_{0M}}{M_0} 86400\,[\mathrm{s}] \tag{23.203}$$

haben. Damit kann etwa die große Bahnhalbachse nach Abschnitt 23.3.5.1 (auf Seite 157) berechnet werden, wenn Exzentrizität und Inklination zusätzlich auf Grund anderer Vorgaben bekannt sind.

BEISPIEL: Auf einer kreisförmigen Bahn umlaufe ein Satellit die Erde unter der Bahnneigung i=50° in 12 Tagen 170 mal. In welcher Bahnhöhe fliegt der Satellit?

Die Relation (23.202) ist mit $N_{0M} / M_0 = 170/12 = 14.1666667 < 16$ erfüllt. Die gewünschte drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_d} = 1.694117647\,\mathrm{h} \mathrel{\hat{=}} 6098.82352942\,\mathrm{s}$. Als nullte Näherung folgt aus Formel (23.184) $\bar{a}_0^{(0)} = 7214.790\,\mathrm{km}$. Die Korrektur (23.187)

$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 3.98435969\,\text{km}$ ergibt in erster Näherung . $\bar{a}_0^{(1)} = 7218.76931683\,\text{km}$. Eine weitere Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsfunktion (23.191) ergibt $\bar{a}_0^{(2)} = 7218.75175768\,\text{km}$. Zur Kontrolle wird die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet $\overline{P}_{d\,0}^{(2)} = 6098.82352941097997\,\text{sec}$. Die Genauigkeit liegt somit bei $10^{-8}\,\text{sec}$. Die gesuchte mittlere Bahnhöhe beträgt 840.615 km. ◄

23.3.7 Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit

Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit war in der Anfangszeit der Satellitenbahnmechanik von besonderem Interesse[1]. Die Herleitung ist aufwendig (und fehleranfällig). Die in diesem Abschnitt gewählte Entwicklung stützt sich auf die Arbeit von E. A. ROTH [1982][2] . Die benötigten unbestimmten und bestimmten Integrale über der wahren Anomalie bzw. dem Argument der Breite sind in Anhang D (Band V) zusammengestellt.

Bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten wird die oskulierende drakonitische Umlaufzeit entsprechend der Zerlegung (23.62) berechnet mit dem Integral

$$\begin{aligned} P_{d\,0} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\right)du = \int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\Big|^{(0)}\right)du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\Big|^{(0)}\Delta p\right]du + \\ + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\Big|^{(0)}\Delta e\right]du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\Big|^{(0)}\Delta i\right]du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\Big|^{(0)}\Delta \omega\right]du + \cdots \end{aligned} \tag{23.204}$$

Nach Formel (23.64) kann das erste dieser Integrale aufgespalten werden in

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\Big|^{(0)}\right)du =: \Delta t_1\Big|_0^{2\pi} + \Delta t_2\Big|_0^{2\pi} \quad . \tag{23.205}$$

Davon ergibt der erste Anteil die oskulierende *Kepler*sche Umlaufzeit im aufsteigenden Knoten

$$P_{d1} := \Delta t_1\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi}\frac{p_0^2}{\sqrt{\mu p_0}\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}du = 2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}} = P_{K0} \quad . \tag{23.206}$$

---

[1] Siehe etwa die Arbeiten von *I. D. Zhongolovich*, referiert in Abschnitt 2.10.8 (Band I), hochgenaue Formel bei A. J. CLAUS and A. G. LUBOWE [1963], ferner R. H. MERSON [1961] und [1963], L. BLITZER [1957] und [1964]. Vorsicht: in der englischsprachigen Literatur wird die drakonitische Umlaufzeit in verwirrender Weise als „nodal period“ bezeichnet, nicht zu verwechseln mit „Umlaufzeit des Knotens“.

[2] *Dr. Ernst A. Roth* (ESOC-Darmstadt) ist kurz nach Abschluss dieser Arbeit in Rente gegangen und kurz darauf verstorben. Daher darf diese Arbeit vielleicht als *Roth*s Vermächtnis bezeichnet werden.

Es bleibt als zweiter Anteil der direkte Beitrag der Variation des Argumentes der Breite nach der Zeit

$$\Delta P_{d2} := \Delta t_2\Big|_0^{2\pi} = -3\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}\, J_2\, R_E^2\, \cos^2 i_0 \sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\, du = \\ = -P_{K0}\, 3 J_2\, R_E^2\, \cos^2 i_0 \left[\sin^2\omega_0 + \cos 2\omega_0 \frac{1-e_0^2}{1+\sqrt{1-e_0^2}} \right] \quad . \tag{23.207}$$

Mit den partiellen Ableitungen (23.71) - (23.74) sowie den Integralen (23.97) $\left(\Delta p = p - p_0\right)$, (23.111) $\left(\Delta e = e - e_0\right)$, (23.149) $\left(\Delta\omega = \omega - \omega_0\right)$, sowie wegen (23.74) ergeben sich über einen drakonitischen Umlauf bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten und die dort geltenden oskulierenden Bahnparameter die folgenden weiteren Integrale:

$$\Delta P_{dp} := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} \Delta p \right] du = -P_{K0} \frac{9}{2p_0^2} \frac{J_2 R_E^2}{e_0^2} \sin^2 i_0 \left\{ \sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3} \left(-1+2\cos^2\omega_0\right) + \right. \\ \left. + \left[1 + 2e_0^3 \cos\omega_0 + \left(-2+3e_0^2\right)\cos^2\omega_0 \right] \right\} + O\left(J_2^2\right) \tag{23.208}$$

$$\Delta P_{de} := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} \Delta e \right] du = P_{K0} \frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^2} \left\{ \frac{\sin^2 i_0 \left(1-e_0^2\right)\left(-2+4\cos^2\omega_0\right)\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}}{e_0^4} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)^3}{1-e_0^2} + \frac{\sin^2 i_0}{e_0^4}\left(2-5e_0^2+2e_0^4-2e_0^5\cos\omega_0+\left(-4+10e_0^2-7e_0^4\right)\cos^2\omega_0\right) \right] + O\left(J_2^2\right) \tag{23.209}$$

$$\Delta P_{d\omega} := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial\omega}\bigg|^{(0)} \Delta\omega \right] du = -P_{K0} \frac{3 J_2 R_E^2}{4 e_0^5 p_0^2} \left\{ \sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3} \left[-2e_0^2 + 4e_0^2\cos^2\omega_0 + \right. \right. \\ \left. + \sin^2 i_0 \left(-2+3e_0^2\right)\left(-1+2\cos^2\omega_0\right) \right] + 2e_0^2 - 2e_0^2\left(2-e_0^2\right)\cos^2\omega_0 + \\ \left. + 2\sin^2 i_0 \left[\left(1-2e_0^2\right) + \left(-2+4e_0^2-e_0^4\right)\cos^2\omega_0 \right] \right\} - \\ - P_{K0} \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2} \sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3} \left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right) \frac{1}{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)^2} + O\left(J_2^2\right) \tag{23.210}$$

Zusammenfassend lautet die oskulierende drakonitische Umlaufzeit bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten in erster Ordnung

$$P_{d0} = P_{d1} + \Delta P_{d2} + \Delta P_{dp} + \Delta P_{de} + \Delta P_{d\omega}$$

$$P_{d0} = P_{K0}\left\{1 - \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\left[\frac{\left(1+e\cos\omega_0\right)^3}{2\left(1-e_0^2\right)} + \left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)\frac{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}}{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)}\right] + O\left(J_2^2\right)\right\} \quad . \tag{23.211}$$

Anmerkung: Eine weitere Diskussion dieser Formel und ihre historische Einordnung kann bei E. A. ROTH [1982] nachgelesen werden. ◀

23.3.8 Beispiel für die oskulierenden Geschwindigkeiten auf drakonitischen Umläufen

Um das Bewegungsverhalten erdnaher Satelliten über einen oder mehrere drakonitische Umläufe quantitativ beurteilen zu können, werden in den folgenden Bildern Bild 23-11 bis Bild 23-14 die oskulierenden Variationen von Radius und den Geschwindigkeiten dargestellt. Als Beispiel wurden die Bahndaten der D1-Mission gewählt (oskulierende Epocheparameter: a= 6704.529 km, e= 0.00080458, i= 57°.00321433, Ω= 174°.95883908, ω= 13°.49907356, M_0= 213°.8575965). Wegen der fast vernachlässigbaren Exzentrizität unterscheiden sich die absolute Geschwindigkeit V und die transversale Geschwindigkeit V_T kaum voneinander.

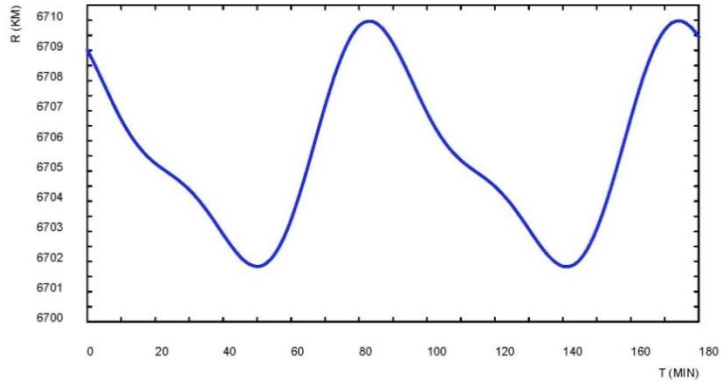


Bild 23-11: Verlauf des Bahnradius der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

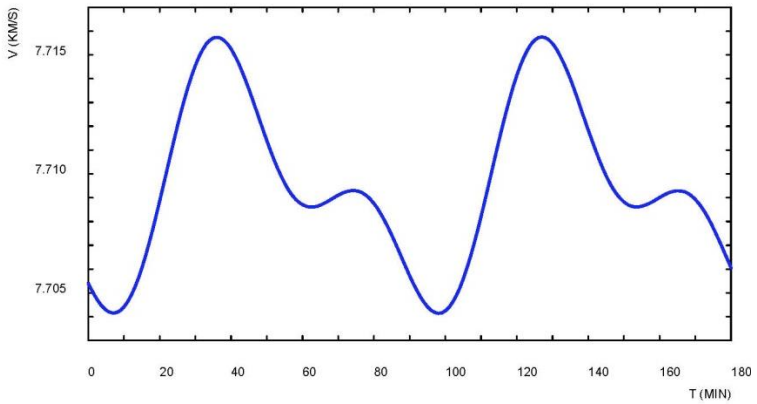


Bild 23-12: Verlauf der Bahngeschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

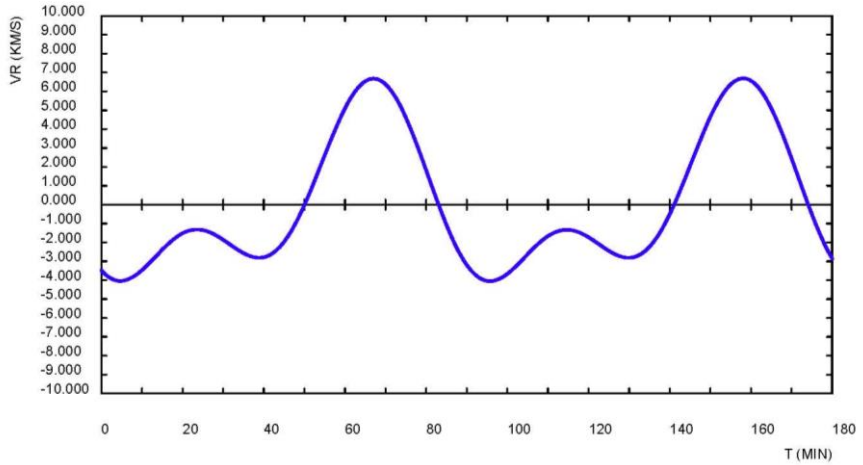


Bild 23-13: Verlauf der radialen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

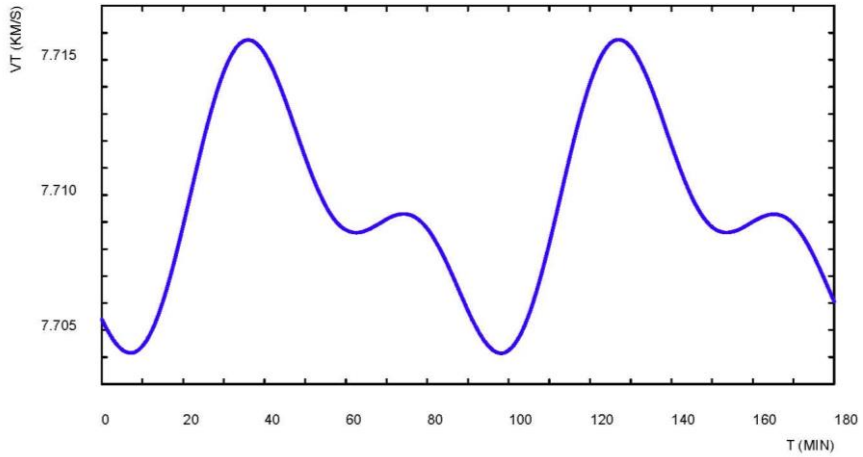


Bild 23-14: Verlauf der transversalen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

23.4 Die inertiale Wanderung der Knoten

23.4.1 Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Die räumliche Beschreibung einer drakonitischen Bewegung erfordert neben der Kenntnis des Argumentes der Breite auch die Kenntnis der Wanderung der Knoten der Bahn längs der Äquatorebene. Die oskulierende Verschiebung der Knoten pro drakonitischem Umlauf kann mit Kenntnis der Variationsgleichung der Rektaszension des aufsteigenden Knotens aus den Formeln[1] (11.104) durch Integration des Integrals

$$\Delta\Omega = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \dot{\Omega}\, du = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{r \sin u}{G \sin i}\, du \tag{23.212}$$

erhalten werden. Dieses Integral ist stets definiert, da der Flächenparameter in den normalen Fällen einer Satellitenbewegung als positive Größe $\left(\text{mit } G = \left|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right| > 0\right)$ aufgefasst werden

[1] in Abschnitt 11.1.6, Band III

darf. Außerdem werden äquatoriale Bahnen im Fall der drakonitischen Bewegung nicht betrachtet, d.h. es kann immer $\sin i \neq 0$ angenommen werden.

Bei bahnanalytischen Untersuchungen interessiert nur die mittlere Knotenverschiebung, die bei konstanter säkularer Drift $\dot{\Omega}_s$ (etwa nach Formel (20.15)) im Zeitintervall $t_2 - t_1$

$$\Delta\bar{\Omega}\left[t_2, t_1\right] = \dot{\Omega}_s \left(t_2 - t_1\right) \tag{23.213}$$

beträgt. Entsprechend lautet sie mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\Delta\bar{\Omega}\left[\overline{P_d}\right] = \dot{\Omega}_s \, \overline{P_d} \quad . \tag{23.214}$$

BEISPIEL 1: Um einen Eindruck über die für Erdsatelliten zu erwartenden quantitativen Größenordnungen zu bekommen, wird in Bild 23-15 die tägliche Drift des mittleren Knotens für schwach exzentrische Bahnen (e=0.1) und für verschiedene große Bahnhalbachsen über der Inklination aufgetragen. Es zeigt sich, dass für erdnahe Bahnen Driften in der Größenordnung von 6°/Tag zu erwarten sind, die allein auf den Einfluss der zonalen Harmonischen J_2 zurückzuführen sind. ◄

BEISPIEL 2: Um auch den Einfluss der Exzentrizität einer Erdsatellitenbahn abzuschätzen wird in Bild 23-16 die mittlere Knotendrift über einen drakonitischen Umlauf für Bahnen mit der großen Halbachse $\bar{a}_0 = 30000\,\text{km}$ für verschiedene Exzentrizitäten über der Inklination aufgetragen. Es zeigt sich, dass für kleine Exzentrizitäten (etwa im Bereich $0.0 \leq e \leq 0.2$) der Einfluss auf die Drift sehr klein ist, für große Exzentrizitäten (hier bis zu e=0.75) jedoch beträchtlich. ◄

23.4.2 Drehung der Knotenlinie und Wanderung der Knoten

Die Knotendrift wirkt sich auf die räumliche Orientierung einer Bahn erheblich aus. Es wandert die Knotenlinie einer Bahn, das ist die Verbindungslinie von aufsteigendem und absteigendem Knoten, längs der Bezugsebene, im Fall von Erdsatelliten längs des Äquators. Damit verschiebt sich auch die gesamte Bahnebene, welche dadurch im Raum verbogen erscheinen muss. Es ist wichtig zu wissen, dass diese Rotation der Bahnebene nichts mit der Rotation der Erde unter dieser Bahnbewegung zu tun hat.

BEISPIEL 1: Zur Veranschaulichung wird in Bild 23-17 die Verschiebung einer Satellitenbahn pro drakonitischem Umlauf als Folge der Erdabplattung demonstriert. Als Bahnelemente wurden *a*=7400 km, *e*=0.0, *i* = 57° verwendet. Für die Erdabplattung wurde der (unrealistische) Wert $J_2 = 0.05$ angesetzt. Die aufsteigenden Knoten der Bahn werden durch das Symbol ▲, die absteigenden Knoten durch X gekennzeichnet. ◄

BEISPIEL 2: In Bild 23-18 wird die Eigenbewegung einer Satellitenbahn infolge der Erdabplattung an einer hochexzentrischen Bahn demonstriert: es zeigt sich eine (inertiale) Drift der Apsiden sowie ein (inertiale) Drift der Knoten. Die Rotation des Erdkörpers ist nicht berücksichtigt (Die Darstellung der Erdoberfläche dient hier nur der Veranschaulichung). Bahndaten: *a* = 24354.797 km, *e* = 0.73, *i* = 60°.0, (Ω = 180°.0). Die Erdabplattung wird durch $J_2 = 0.02$ simuliert. Zeitdauer 5 Tage. ◄

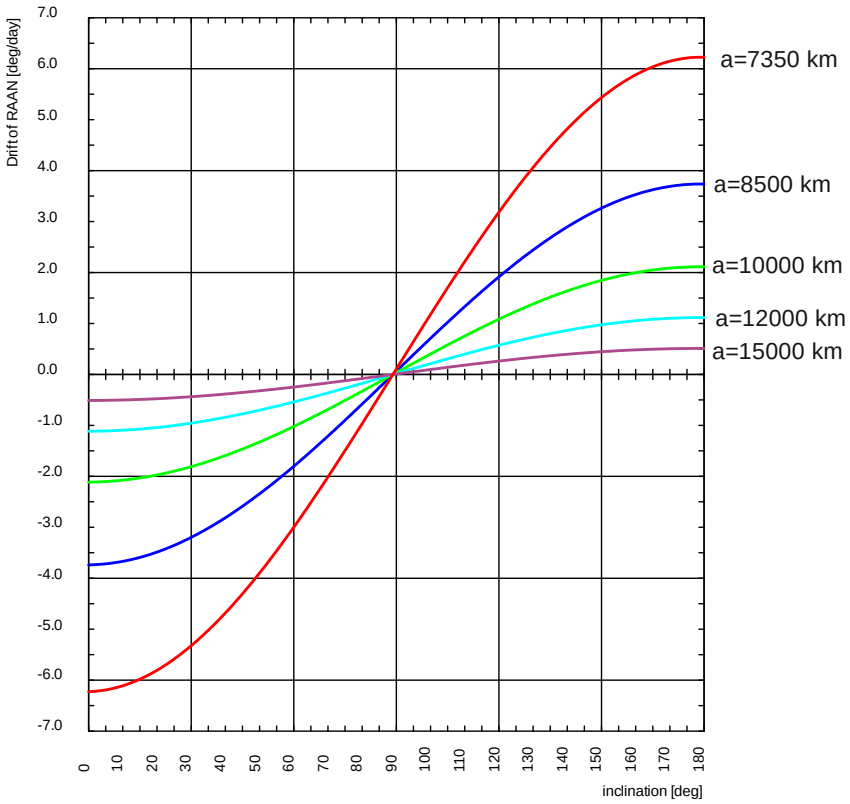


Bild 23-15: Drift des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf verschiedener Erdsatellitenbahnen mit unterschiedlichen großen Bahnhalbachsen, je mit der Exzentrizität *e*=0.1 über allen Inklinationen

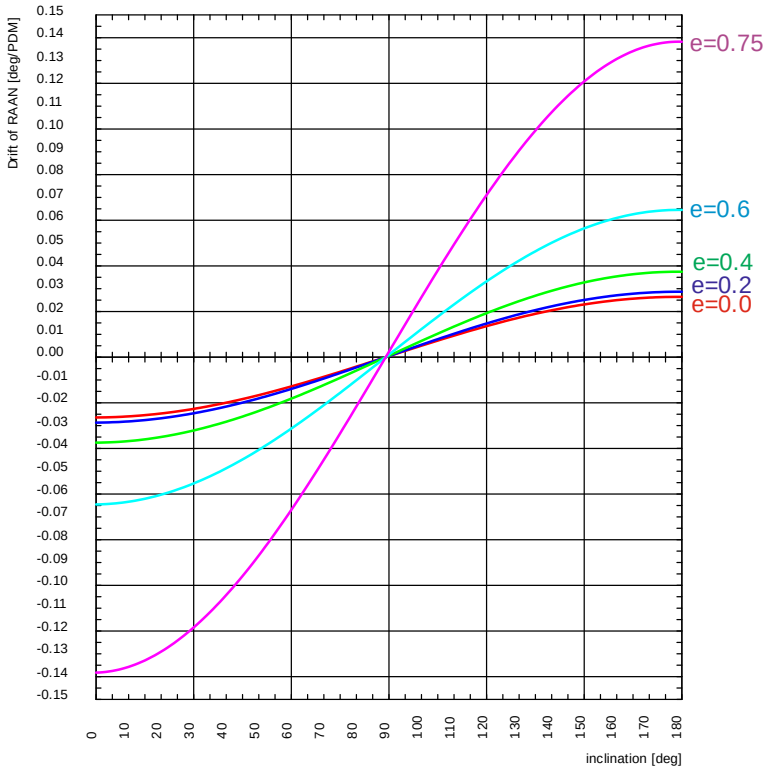


Bild 23-16: Drift des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf verschiedener Erdsatellitenbahnen je mit der großen Bahnhalbachse *a*=30000 km, mit verschiedenen Exzentrizitäten *e*=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.75 und je über allen Inklinationen

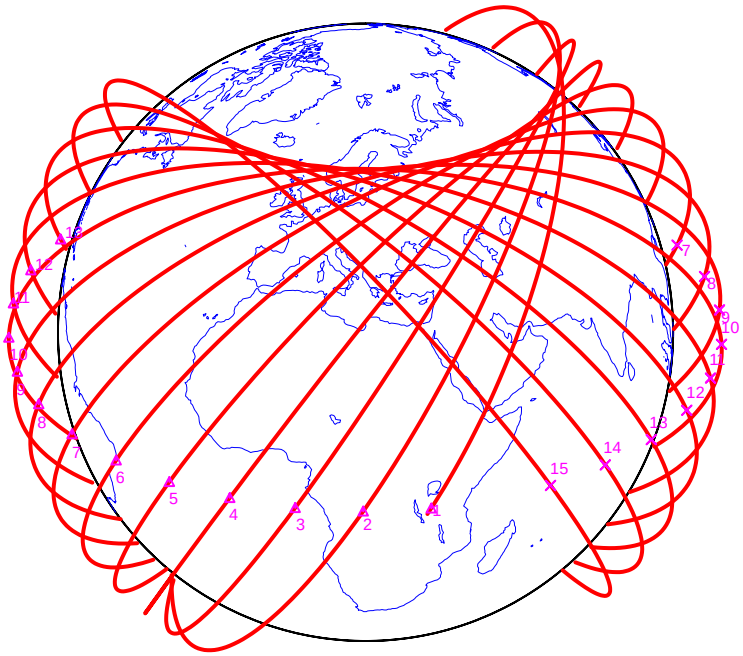


Bild 23-17: Qualitative Veranschaulichung der Verschiebung einer Bahn auf Grund der inertialen Knotenverschiebung als Folge der Erdabplattung. Zeitdauer 1 Tag (Die Erdrotation unter der inertialen Bahn ist nicht berücksichtigt)

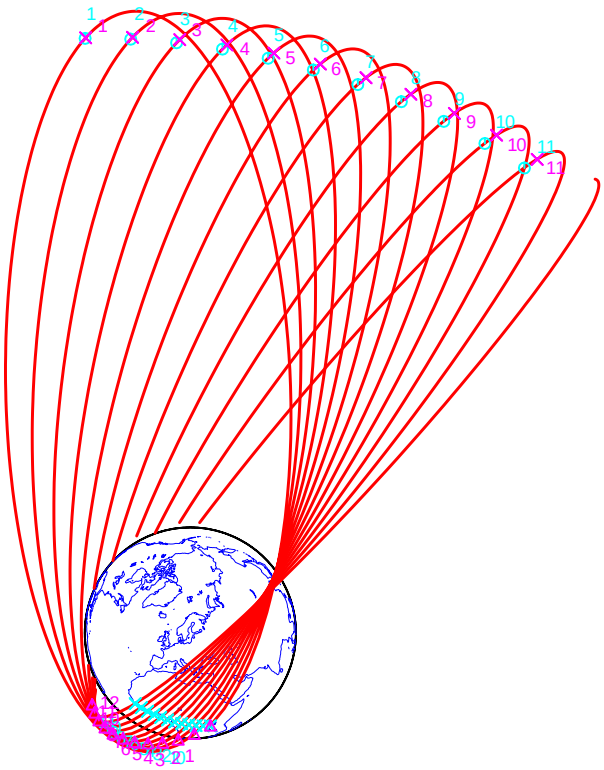


Bild 23-18: Qualitative Veranschaulichung der säkularen Bahnverschiebung auf Grund von Knoten- und Apsidendrift als Folge der Erdabplattung

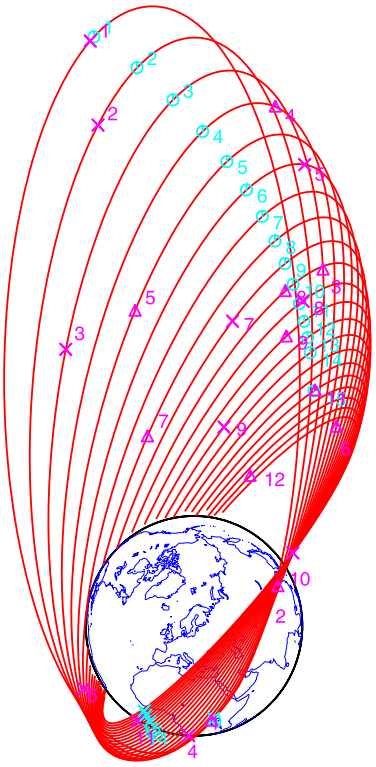


Bild 23-19: Wie Bild 23-18 jedoch zusätzlich mit Überlagerung durch den Luftwiderstand

BEISPIEL 3: In Bild 23-19 wird die Gesamtwirkung aus Erdabplattung und Luftwiderstand auf die Bewegung einer Satellitenbahn qualitativ dargestellt. Zusätzlich zu den Parametern der Bahn aus Bild 23-18 wird die Wirkung des Luftwiderstandes durch die säkulare Abnahme von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität dargestellt: $\dot{a} = -30\,m/s, \dot{e} = -8\times10^{-7}$. Die Apsiden und Knoten sind charakterisiert und nummeriert. Zeitdauer: 5 Tage. ◄

23.5 Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift

Die Bahnebene eines Satelliten ist nicht raumfest. Ihre Eigenbewegung ist allerdings im Vergleich zur Erdrotation bei den meisten Bahnen (Ausnahmen sind geosynchrone Bahnen) verschieden, so dass der aufsteigende Knoten bezogen auf die Erdoberfläche nach einem drakonitischen Umlauf eine andere geographische Länge hat (vgl. Bild 23-1 auf Seite 117). Diese Knotenlängendifferenz

$$\Delta\lambda_\Omega := \lambda_\Omega\left(t_0 + P_d\right) - \lambda_\Omega\left(t_0\right) = \lambda_{\Omega 2} - \lambda_{\Omega 1} \tag{23.215}$$

ist für Untersuchungen der Beziehung einer Erdsatellitenmission zur Erdoberfläche von besonderer Wichtigkeit, somit insbesondere grundlegend für Erdbeobachtungssatelliten. Die für Erdbeobachtungssatelliten grundlegenden Größen mittlere Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift werden im folgenden Abschnitt hergeleitet und analysiert.

23.5.1 Herleitung von Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift

Ein Ort (λ, δ) im erdfesten (Greenwich-bezogenen) Äquatorsystem hat im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem die Winkelkoordinaten (α, δ) mit dem Bezug zwischen Rektaszension α und (östlicher) geographischer Länge λ

$$\alpha = \Theta_G + \lambda \quad . \tag{23.216}$$

Hier ist Θ_G die für den Meridian durch Greenwich gültige mittlere Sternzeit[1] zur Tageszeit *t*

$$\Theta_G = \Theta_G\left(t\right) = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\, t \quad , \tag{23.217}$$

wobei Θ_{G0} die mittlere Sternzeit für 0^h UT1 und die säkulare Variation $\dot{\Theta}$ das Verhältnis Sternzeit zur Sonnenzeit zur betreffenden Epoche somit der Betrag der tropischen Erdrotation (d.h. bei Bezug auf den Frühlingspunkt) ist:

$$\dot{\Theta} = 360°.9856473354\ \frac{1}{d} \triangleq 4°.17807461937\times10^{-3}\,\frac{1}{s}\ . \tag{23.218}$$

Exakt gilt dieser Wert nur zur Fundamentalepoche J2000.0. Die Abweichungen relativ zur Fundamentalepoche sind zu einem anderen Zeitpunkt jedoch so gering, dass sie zumindest bei bahnanalytischen Untersuchungen vernachlässigt werden können. Die Variation der Winkelkoordinaten kann somit durch die Beziehung

$$\dot{\alpha} = \dot{\Theta} + \dot{\lambda} \tag{23.219}$$

dargestellt werden, wobei jedoch beachtet werden muss, dass $\dot{\Theta}$ ein säkularer Wert ist.

---

1 Siehe hierzu die Zusammenstellung in Anhang E.2 (Band V)

Für Untersuchungen der drakonitischen Satellitenbewegung wird der Bezug auf den aufsteigenden Knoten zwischen der Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens und der entsprechenden geographischen Länge λ_Ω entsprechend Beziehung (23.216)

$$\Omega = \Theta_G + \lambda_\Omega \tag{23.220}$$

durchgeführt. Die zugehörende Variation lautet

$$\dot{\Omega} = \dot{\Theta} + \dot{\lambda}_\Omega \quad . \tag{23.221}$$

In diesem Ausdruck sind säkulare und periodische Anteile enthalten:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_s + \delta\left(\dot{\Omega}\right) \quad , \quad \dot{\lambda}_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s} + \delta\left(\dot{\lambda}_\Omega\right) \quad . \tag{23.222}$$

Für langfristige bahnanalytische Untersuchungen werden die periodischen Anteile vernachlässigt und es bleibt die grundlegende Beziehung

$$\dot{\Omega}_s = \dot{\Theta} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{23.223}$$

Die säkulare Variation des aufsteigenden Knotens für Erdsatelliten wird aus Formel (20.15) berechnet[1]. Dieser Wert ist für Erdsatelliten in der Größenordnung maximal 6° pro Tag, also wesentlich kleiner als die Erdrotation. Dies ergibt (wie auch aus der Anschauung unmittelbar ersichtlich):

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \quad . \tag{23.224}$$

- *Die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ einer Erdsatellitenbahn ist stets negativ, die Bahnverschiebung erfolgt somit stets in westlicher Richtung.*

Die mittlere Knotenlänge zu einem Zeitpunkt t hat (wenn $\bar{\Omega}_0$ ein mittlerer Anfangswert ist) die Beziehung

$$\overline{\lambda_\Omega}(t) = \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_s\, t - \left(\Theta_{G0} + \dot{\Theta} t\right) \quad . \tag{23.225}$$

Die mittlere Knotenlängendifferenz zwischen in dem Zeitintervall $\left(t_2 - t_1\right)$ beträgt

$$\overline{\lambda_{\Omega 2}} - \overline{\lambda_{\Omega 1}} = \dot{\Omega}_s \left(t_2 - t_1\right) - \dot{\Theta}\left(t_2 - t_1\right) \quad . \tag{23.226}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist ein mittlerer drakonitischer Umlauf mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_d}$. In diesem Fall beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_d} \quad . \tag{23.227}$$

Diese Beziehung ist für die Untersuchung des Bahnverhaltens von Erdbeobachtungssatelliten von zentraler Bedeutung und soll deshalb als *Fundamentalbeziehung von Erdbeobachtungssatelliten* bezeichnet werden. Im Zusammenhang mit der Knotenlängendrift (23.224) ergibt sich die Aussage:

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

➢ *Die mittlere Knotenlängenverschiebung über einen mittleren drakonitischen Umlauf ist bei Erdsatelliten stets negativ.*

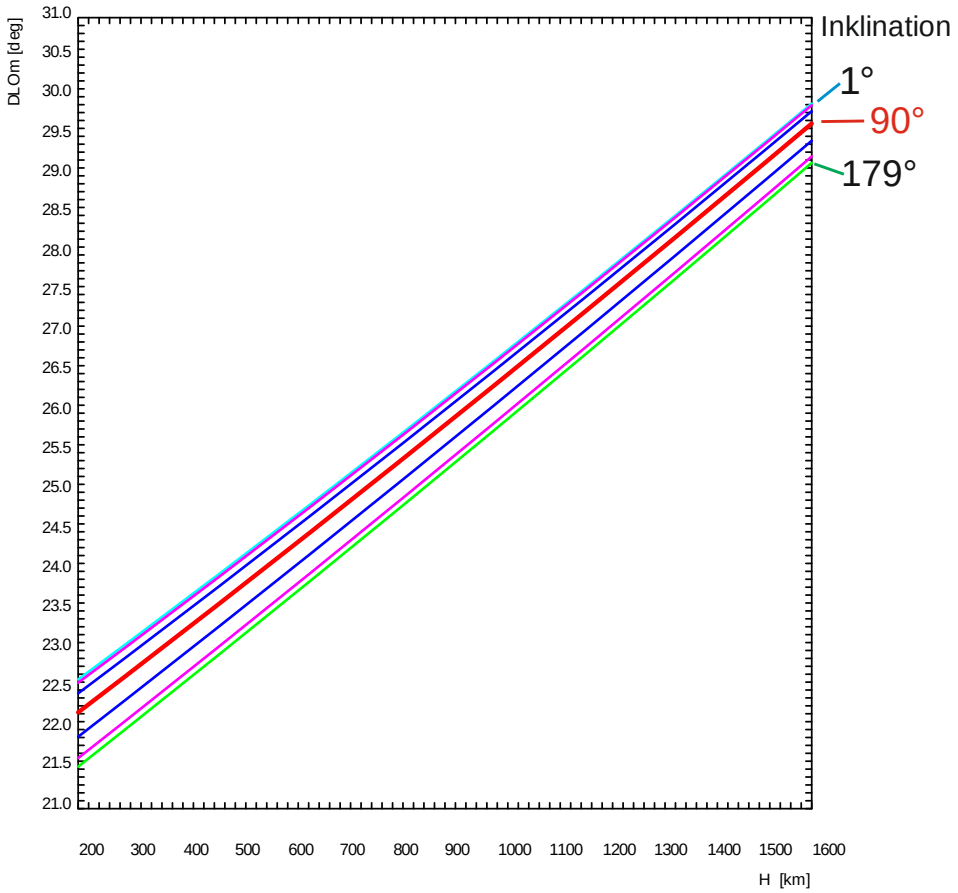


Bild 23-20: Die Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf für alle Kreisbahnen im Höhenbereich H = 200 – 1600 km für verschiedene Inklinationen (i=1°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 179°) (seine auch die Tabelle 23-4 auf Seite 176)

BEISPIEL 1: In Bild 23-20 wird die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf für einige Kreisbahnen aufgetragen. Die zugehörigen Abschätzungen sind in Tabelle 23-4 (auf Seite 176) enthalten. Diese Zahlenwerte schließen die Aussage über minimal mögliche Knotenlängenverschiebungen ein. ◄

In einer Bahnanalyse erster Ordnung ist die säkulare Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens gegeben durch den Ausdruck[1]

$$\dot{\Omega}_{s0} = -\frac{3}{2}\overline{\overline{n}}_{K0} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.228}$$

Entsprechend wird die säkulare Drift der Knotenlänge bei gegebener Exzentrizität am größten für erdnahe Bahnen sein, wie Bild 23-21 als quantitatives aber auch qualitatives Beispiel demonstriert. Der Verlauf der Kurve der Knotenlängendrift ist punktsymmetrisch zum entsprechenden Wert für die Inklination $i = 90°$. In diesem Fall verschwindet die säkulare Drift in

[1] siehe die Formel (20.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

der Rektaszension des aufsteigenden Knotens und die Knotenlängendrift wird ausschließlich durch die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde geprägt.

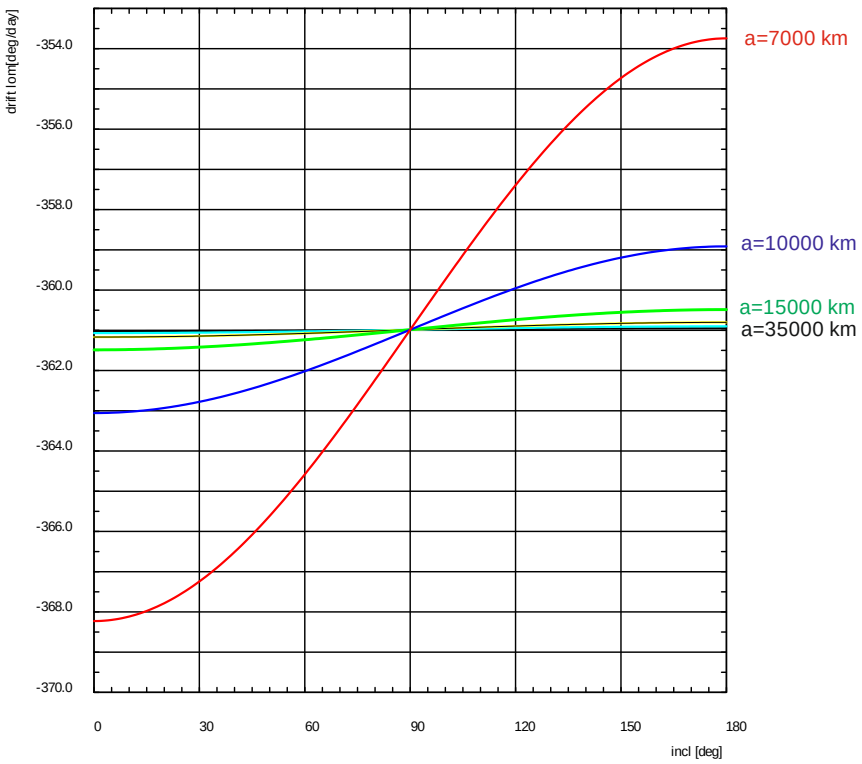


Bild 23-21: Die Knotenlängendrift über der Inklination für kreisförmige Bahnen und verschiedene große Bahnhalbachsen (a = 7000 km bis a = 35000 km)

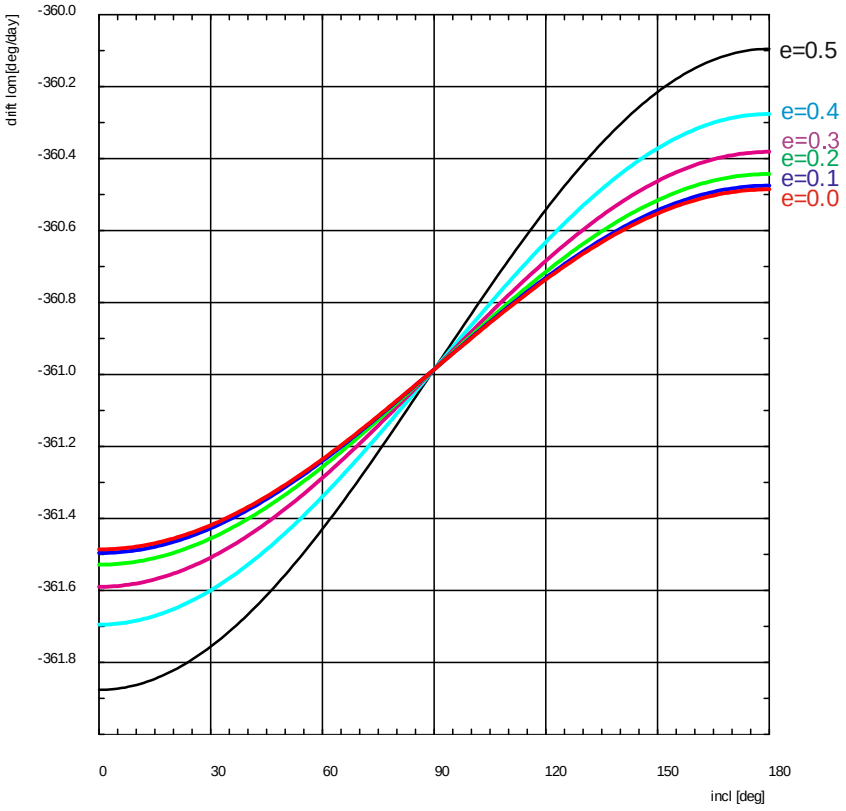


Bild 23-22: Die Knotenlängendrift über der Inklination für Bahnen mit der großen Halbachse a = 15000 km und verschiedene Exzentrizitäten von e =0.0 bis e = 0.5 über der Inklination

BEISPIEL 2: In Bild 23-21 ist die Knotenlängendrift über der Inklination für die kreisförmige Satellitenbahn mit Inklination i = 70° und verschiedenen großen Bahnhalbachsen von a = 7000 km bis 35000 km dargestellt. Ab etwa a = 20000 km ist die Variation der Knotenlängendrift über der Inklination nahezu vernachlässigbar, für erdnahe Bahnen ist sie jedoch äußerst beträchtlich. ◀

Inklination i	Mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$
1°	22°.63 – 29°.91
30°	22°.59 – 29°.89
60°	22°.46 – 29°.82
90°	22°.22 – 29°.89
120°	21°.91 – 29°.44
150°	21°.64 – 29°.25
179°	21°.53 – 29°.16

Tabelle 23-4: Variationsbereich der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Kreisbahnen über den Höhenbereich H = 200 bis 1600 km für verschiedene Inklinationen (entsprechend der Grafik in Bild 23-20)

Ausgehend von diesen Kurven kann abgeschätzt werden, in welchem Bereich die Knotenlängendrift vorkommen kann. Dazu wird als erdnächste Bahn in der Bahnhöhe H = 200 km die große Bahnhalbachse a = 6578.140 km gewählt. Exzentrische Bahnen sind in dieser Höhe nicht sinnvoll, also e = 0.0. Der unterste Punkt der Verlaufskurve wird für i=0°, der oberste für i=180° erhalten. Somit hat das maximal mögliche Intervall für Erdsatelliten die Grenzen

$$-370° < \dot{\lambda}_{\Omega s} < -352° \quad . \tag{23.229}$$

Im Fall anderer Himmelskörper müssen diese Parameter entsprechend angepasst werden.

BEISPIEL 3: Um den Einfluss der Exzentrizität auf die Knotenlängendrift zu demonstrieren wird in Bild 23-22 der Verlauf der Knotenlängendrift über der Inklination für Satellitenbahnen mit der großen Bahnhalbachse a=15000 km über verschiedene Exzentrizitäten aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Variation der Drift mit zunehmender Exzentrizität wächst, quantitativ jedoch nur mit mäßigen Beträgen. ◀

Die mittlere Knotenlängenverschiebung steht in engem grundsätzlichem Zusammenhang mit den Umläufen eines Satelliten um die Erde. Dazu wird längs des Äquators über eine Umdrehung der Erde um 360° die Relation $360° / \overline{\Delta\lambda_\Omega}$ betrachtet. Entscheidend ist, wann ein Satellit nach einem Knotenumlauf wieder den Äquator überfliegt. Bezogen auf einen Anfangsknoten wird dies nach

$$N_1 = \mathrm{int}\left[-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right] \tag{23.230}$$

drakonitischen Umläufen der Fall sein[1]. Diese Beziehung lässt sich erweitern auf den Fall von *K* Knotenumläufen um den Zentralkörper:

$$N_K = \mathrm{int}\left[-\frac{K\ 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right] \qquad \langle\ K \in \mathbb{N} \quad . \tag{23.231}$$

BEISPIEL 4: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a} = 7089.597\,\mathrm{km}$ und Inklination $\bar{i} = 70°$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_d} = 5944.936\mathrm{s} \triangleq 1.651371\mathrm{h}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°$. Damit kann der Satellit pro Tag 14.533377 drakonitische Umläufe ausführen. Entsprechend Formel (23.230) befindet er sich nach $N_1 = 15$ drakonitischen Umläufen wieder in einem aufsteigenden Knoten seiner Bahn. Nach 7 Knotenumläufen (das sind **ungefähr** 7 Tage) und $N_7 = 101$ drakonitischen Umläufen wird wieder ein aufsteigender Knoten überflogen. ◄

Anmerkung: Es soll wiederholt darauf hingewiesen werden, dass der Begriff „Knotenumlauf“ auf die Bewegung des Knotens somit der Bahn um den Zentralkörper bezogen ist. Er liegt quantitativ wegen Beziehung (23.224) im Bereich der Rotation $\dot{\Theta}$ des Zentralkörpers. Im Fall der Erde liegt dieser Parameter also im Größenbereich um 361°/Tag, wie etwa aus Bild 23-21 ersehen werden kann (exakter Wert in Formel (23.218)). Im Gegensatz dazu besagt der Begriff „drakonitische Bewegung“ die Bewegung eines Satelliten bei **Bezug** auf den (aufsteigenden) Knoten. ◄

23.5.2 Die Knotenlängenverschiebung als Bezugsintervall

Die mittlere Knotenlängenverschiebung ist auch eine grundlegende Größe bei Untersuchungen des Bezugs gleichförmiger (in der Regel kreisnaher) Satellitenbahnen auf die Erdoberfläche. Hierzu wird die mittlere Knotenlängenverschiebung zwischen einem Anfangsknoten und dem nächsten aufsteigenden Knoten als Bezugsintervall gewählt. Alle in diesem Intervall untersuchten geometrischen Beziehungen etwa zwischen einem Sensor an Bord des Satelliten und der Erdoberfläche können dann auf die gesamte Satellitenbahn übertragen werden. Das bezieht sich zum Beispiel auf Überdeckungen mit feststehenden Sensorblickrichtungen und können vom Äquator auf einen beliebigen von dem betreffenden Satelliten aus erfassbaren Breitenkreis übertragen werden[2].

Von besonderem Interesse bei der Beobachtung der Erdoberfläche ist die Tatsache, dass die Projektion der Bodenspur rückläufiger Bahnen gegenüber rechtläufigen Bahnen gedehnt erscheint, wie in Bild 23-23 anschaulich demonstriert wird. Dies wirkt sich auf die Beobachtung von Zielgebieten auf der Erdoberfläche auf, wie sie etwa bei der Überdeckung eines Breitenkreises zu beobachten ist[3].

---

[1] Die Funktion <int> bezeichnet den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl (BEISPIEL: int(7.52415) = 7)

[2] Näheres hierzu in den Kapiteln 32-34 (Band V)

[3] Siehe hierzu Kapitel 34, insbesondere Abschnitt 34.9 (Band V)

Allgemein können wir die Relation zwischen einem überflogenen Längenintervall in Bezug auf die rotierende Erde und dem entsprechenden Intervall im „inertialen“ Intervall untersuchen (als würde die Erde angehalten). Hier können wir über einem Überdeckungsintervall die *Verzerrungsrelation*

$$\Delta\lambda\left[t_2-t_1\right]=\Delta\alpha\left[t_2-t_1\right]-\mathrm{sgn}(\cos i)\dot{\Theta}\left(t_2-t_1\right) \tag{23.232}$$

herleiten. Für retrograde Bahnen wird das Überdeckungsintervall gedehnt, für rechtläufige Bahnen gestaucht. Wir können salopp formulieren:

- *„Erdbeobachtungsatelliten auf rückläufigen Bahnen sehen pro Umlauf mehr von der Erdoberfläche als auf rechtläufigen Bahnen“.*

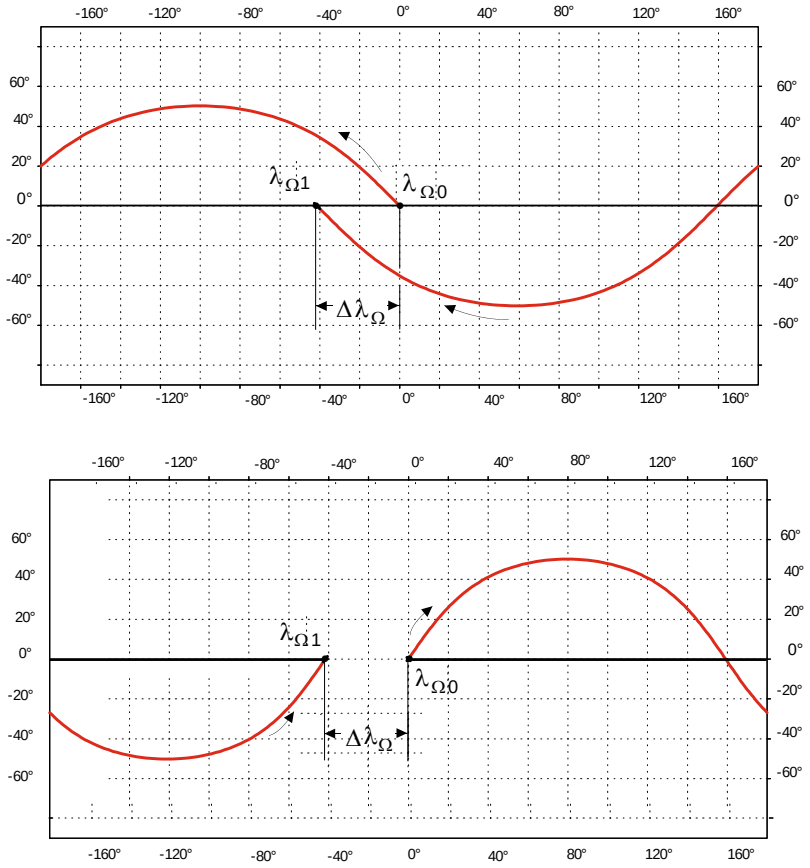


Bild 23-23: Ein drakonitischer Umlauf in Projektion auf die Erdoberfläche (auf einen Zentralkörper). Oben: Rückläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 130°), unten: rechtläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 50°)

23.5.3 Bahnauswahl aus mittlerer Knotenlängenverschiebung

Die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ kann als ein Parameter zur Definition einer Satellitenbahn aufgefasst werden. Durch Vorgabe dieser Größe kann die große Bahnhalbachse berechnet werden. Dazu wird in der Fundamentalbeziehung (23.227) für eine erste Näherung eine spezielle *Kepler*bewegung angenommen. In diesem Fall wird der Bewegungseinfluss im Knoten vernachlässigt

$$\dot{\Omega}_s \approx 0°.0/s$$

und die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ wird auf

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} \approx -\dot{\Theta}$$

reduziert. Damit kann für die große Halbachse ein Näherungswert a_L definiert werden, so dass für eine vorgegebene Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ aus der Fundamentalbeziehung (23.227) die Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\dot{\Theta}\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}} \tag{23.233}$$

angesetzt werden kann. Der Näherungswert wird daraus berechnet zu

$$a_L = \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)^2}{\dot{\Theta}^2\,4\pi^2}} \quad . \tag{23.234}$$

Die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ als einem Epochebahnelement wird durch Korrektur

$$\overline{a}_0 = a_L + \Delta a_L \tag{23.235}$$

erhalten. Für eine Näherung erster Ordnung wird die Fundamentalbeziehung (23.227) um a_L linearisiert und im Fall von erdnahen Satelliten die säkularen Variationen der Ordnung J_2 in Ω, ω und M_0 aus den Formeln (20.15) - (20.17) berücksichtigt[1]. Dafür müssen jetzt auch die Epochewerte für Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ vorgegeben sein. Mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.48)

$$\overline{n_d} = \frac{2\pi}{\overline{P_d}} = \overline{n_K} + \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s \quad ,$$

der mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung zur Epoche t_0

$$\overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^{\,3}}}$$

und der Abkürzung

$$B := -\frac{3}{4}\,J_2\,\frac{R_E^{\,2}}{\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}\right)\cos^2\overline{i}_0\right] \tag{23.236}$$

liefert eine Linearisierung der Fundamentalbeziehung (23.227)

$$-\dot{\Theta}\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}} = 2\pi\left[-\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^{\,2}\cos^2\overline{i}_0}{a_L^{\,2}\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)^2}+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^{\,2}\cos\overline{i}_0}{a_L^{\,3}\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)^2}\Delta a_L - \frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}}-\frac{3}{2}\frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}}\frac{\Delta a_L}{a_L}\right]\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{B}{a_L^{\,2}}-\frac{1}{2}B\frac{\Delta a_L}{a_L^{\,3}}\right)+\ldots\ .$$

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Eine Näherung bei Bezug auf J_2 führt auf die Bedingung

$$0 = -\frac{3\cdot 2\pi}{2} J_2 \frac{R_E{}^2 \cos^2 \bar{i}_0}{a_L{}^2 \left(1-\bar{e}_0{}^2\right)^2} + \frac{3}{2} J_2 \overline{\Delta\lambda_\Omega} \frac{\Delta a_L}{a_L} + \overline{\Delta\lambda_\Omega} \frac{B}{a_L{}^2} + \dots ,$$

somit schließlich für die Korrektur erster Ordnung, wenn noch berücksichtigt wird, dass die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ üblicherweise im Gradmaß gegeben ist,

$$\Delta a_L = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_E{}^2}{a_L \left(1-\bar{e}_0{}^2\right)^2} \left[\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0{}^2}\right)\cos^2 \bar{i}_0 - \left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0{}^2}\right) + 2\frac{360^\circ}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} \cos \bar{i}_0 \right] \dots . \quad (23.237)$$

Dieser rasch zu berechnende analytische Ausdruck liefert im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse gewöhnlich genügend genaue Ergebnisse. Ist ein höheres Bahnmodell mit säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s$, $\dot{\omega}_s$, $\dot{M}_{0s}$ und eventuell auch infolge einer Variation in den anderen Bahnparametern bekannt, kann eine weitere Verbesserung aus der überlagerten Funktion

$$f\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \frac{\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right)360^\circ}{\overline{n_K} + \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s} \right) = 0 \quad (23.238)$$

iterativ entsprechend der Genauigkeit des verwendeten Bahnmodells erhalten werden.

Anmerkung: Da die Variationsformeln erster Ordnung in J_2 die mittleren Epochewerte für die große Bahnhalbachse, die Exzentrizität und die Inklination enthalten, können neben der großen Halbachse bei Vorgabe der Knotenlängenverschiebung auch die Exzentrizität oder die Inklination bei Vorgabe der jeweils anderen beiden Bahnparameter in analoger Weise wie die große Bahnhalbachse berechnet werden. Diese Fälle spielen in den Anwendungen eine untergeordnete Rolle und werden daher an dieser Stelle nicht bearbeitet. ◄

BEISPIEL 1: Es sei $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25^\circ.52432$ für eine kreisförmige ($\bar{e}_0 = 0.0$) und um $\bar{i}_0 = 10^\circ$ geneigte Bahn vorgegeben. Als Ausgangswert liefert Formel (23.234) den Wert

$$a_L = 7222.895654\ km \ .$$

Die Korrektur erster Ordnung nach Formel (23.237) lautet

$$\Delta a_L = -67.13765\ km \ , \quad \bar{a}_0^{(1)} = 7155.758262\ km \ .$$

Mit dieser Halbachse ergibt sich als ein erster Kontrollwert die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25^\circ.53184 / \overline{P_d} \ .$$

Iterative Verbesserung der Halbachse nach der Forderung (23.238) unter Berücksichtigung des J_4- Terms gibt die verbesserte Halbachse

$$\bar{a}_0^{(2)} = 7153.811973\ km \ .$$

Mit diesem Wert ergibt sich genau der vorgegebene Wert für die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25^\circ.524320 / \overline{P_d} \ . \blacktriangleleft$$

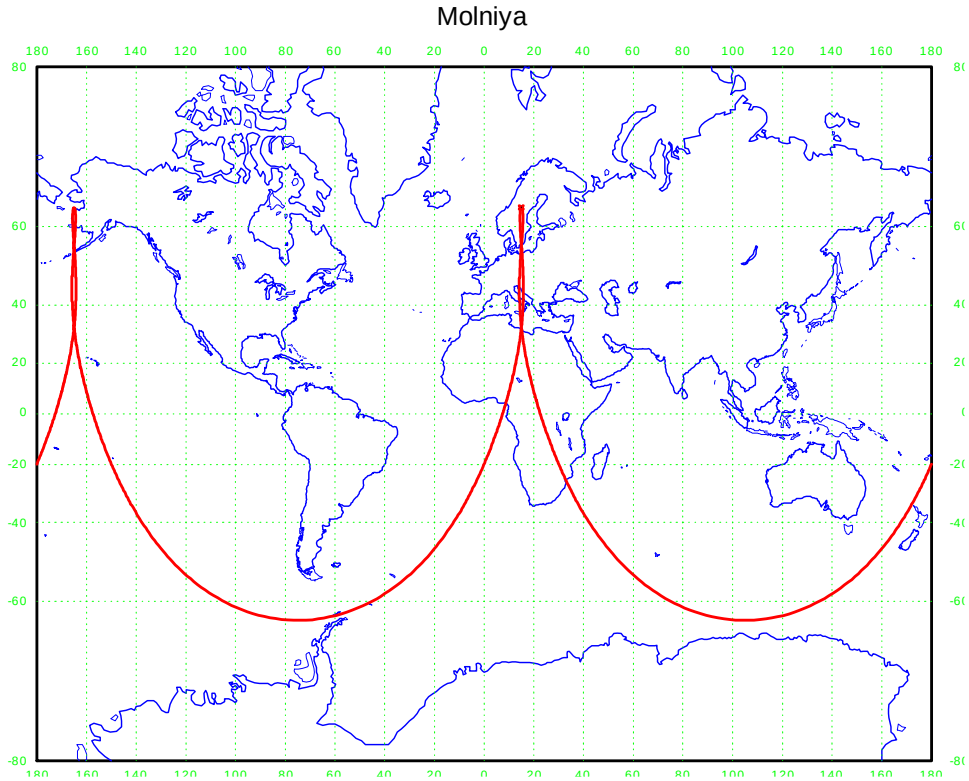


Bild 23-24: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum über Mitteleuropa.
$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180° / \overline{P_d}$, a= 26554.2276 km, e = 0.7222, i = 63°.43495, ω = 270°, $\overline{P_d}$ = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km

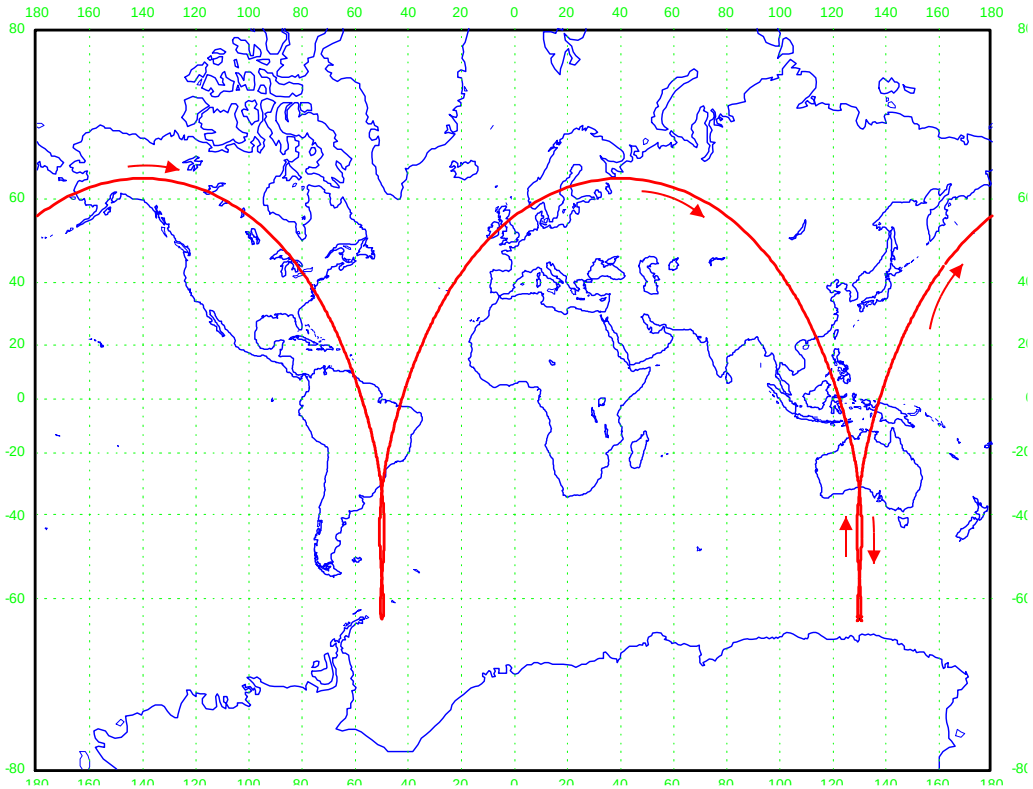


Bild 23-25: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum südlich von Australien.
$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180° / \overline{P_d}$, a= 26554.2276 km, e = 0.7222, i = 63°.43495, ω = 90°, $\overline{P_d}$ = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km

BEISPIEL 2: Die *Molniya* Satellitenbahnen (siehe Bild 23-24 und Bild 23-25) können obgleich hochexzentrisch vom Standpunkt der drakonitischen Bewegung definiert werden, da der Apogäumsbereich fest auf die Erdoberfläche bezogen sein soll. Dazu muss der Knoten in Bezug auf die Erdoberfläche exakt definiert sein. Dies kann durch Vorgabe eines Anfangsortes und dann der Knotenlängendifferenz erreicht werden. Da die Molnija Satelliten nach zweimaligem Umlauf wieder über demselben Gebiet die Erdoberfläche beobachten sollen, muss die Knotenlängendifferenz mit dem Wert

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180°.0$$

vorgegeben werden. Als Ausgangswert liefert Formel (23.234) für die große Halbachse den Wert

$$a_L = 26561.762397\,km \quad .$$

Die Verbesserungen mit den Formeln (23.237) und (23.238) liefern die Werte

$$\begin{aligned} \Delta a_L &= -7.481349\ km \\ \bar{a}_0^{(1)} &= 26554.281057\ km \\ \bar{a}_0^{(2)} &= 26554.2276255\ km \quad . \end{aligned}$$

Eine Probe liefert genau $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 180°.000000$ ◀

23.5.4 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift

Wird eine säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ vorgegeben, kann die entsprechende säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens aus Formel (23.224) berechnet werden:

$$\dot{\Omega}_{s0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta} \quad . \tag{23.239}$$

Damit ist es möglich, eines der drei *Kepler*elemente *a, e, i* nach Vorgabe der anderen Bahnparameter zu berechnen.

23.5.4.1 Große Bahnhalbachse aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben. Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der großen Bahnhalbachse den Näherungswert

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\left[\frac{3\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{2\dot{\Omega}_{s0}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right]^2} \quad . \tag{23.240}$$

Eine Ausnahme ist der Fall einer Polarbahn mit i=90°, da dann $\dot{\Omega}_{s0} = 0$. Ansonsten kann unter Einbeziehung von physikalischen Einflüssen höherer Ordnung eine Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s\left(\bar{a}_0\right) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.241}$$

erhalten werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -363°/d$, die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.4$, sowie die Inklination $\bar{i}_0 = 25°$. Formel (23.240) ergibt den Anfangsnäherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 10817.445381\,\text{km}$, die Verbesserung mit der Bedingung (23.241) mit der Genauigkeitsschranke $\Delta a = 10^{-5}\,\text{km}$ lautet $\bar{a}_0^{(1)} = 10826.986397\,\text{km}$. Zur Kontrolle wird mit diesem Ergebnis die Knotenlängendrift berechnet: $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \text{-}362°.9999998\,/\text{d}$. ◄

23.5.4.2 Exzentrizität aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben. Für die gegebene Halbachse können die Grenzen für eine mögliche Knotenlängendrift mit i=0° für den unteren Wert und i=180° für den oberen Wert berechnet werden. Nur wenn die vorgegebene Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ zwischen diesen Werten liegt, kann die weitere Berechnung durchgeführt werden (vgl. auch die äußerste Abschätzung (23.229)).

Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der Exzentrizität den Näherungswert

$$\bar{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{-\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos\bar{i}}{2\,\bar{a}_0^3\,\sqrt{\bar{a}_0}\,\dot{\Omega}_{s0}}}} \quad . \tag{23.242}$$

Neben $\dot{\Omega}_{s0} \neq 0$ muss auch die Bedingung $\dot{\Omega}_{s0}\cos\bar{i}_0 < 0$ erfüllt sein. Andernfalls kann es keine Lösung für die vorgegebene Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ geben. Eine Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct(\bar{e}_0) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s(\bar{e}_0) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.243}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Gegeben seien $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -360°.339840/d$, die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 11200.0\,\text{km}$ und die Inklination $\bar{i}_0 = 111°.0$. Das erlaubte Intervall für die Knotenlängendrift beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} \in (\text{-}359°.5934286/\text{d},\ \text{-}362°.3777959/\text{d})$. Der Näherungswert nach Formel (23.242) beträgt $\bar{e}_0^{(0)} = 0.3494874041140569$, die Verbesserung mit der Bedingung (23.243) mit der Genauigkeit $\Delta e = 10^{-7}$ ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3501870134890568$. Zur Kontrolle wird mit diesem Ergebnis die Knotenlängendrift berechnet: $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \text{-}360°.3398402/\text{d}$. ◄

23.5.4.3 Inklination aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgegeben. Wie im vorstehenden Fall sollte zunächst mit der gegebenen Halbachse abgeschätzt werden, ob die gegebene Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ in einem erlaubten Intervall liegt. Andernfalls muss eine mögliche andere Drift gesucht werden. Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der Inklination den Näherungswert

$$\cos \bar{i}_0^{(0)} = -\frac{2\dot{\Omega}_{s0}\,\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2} \quad . \tag{23.244}$$

Eine Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0\right) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s\left(\bar{i}_0\right) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.245}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = \text{-}360°.99648/\text{d}$, die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 21000.0$ km und die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.7$. Das erlaubte Intervall der Knotenlängendrift beträgt mit der gegebenen Halbachse $\dot{\lambda}_{\Omega s} \in \left(\text{-}360°.39197/\text{d}, \text{-}361°.57926/\text{d}\right)$. Formel (23.244) ergibt $\bar{i}_0^{(0)} = 88°.94723689$, die Bedingungsfunktion (23.245) bringt mit der geforderten Genauigkeit $\Delta i = 0°.0001$ keine Verbesserung. Der Kontrollwert beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \text{-}360°.9964591/\text{d}$. Die a posteriori Genauigkeit liegt in der Größenordnung $\Delta i = 0''.4$. ◄

23.6 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift und drakonitischer Umlaufzeit

Eine besonders wichtige Methodik der Bahnauswahl besteht darin, zwei *Kepler*elemente durch Vorgabe von zwei anderen Bahnparametern zu bestimmen. Im vorliegenden Fall seien (bei Bezug auf eine Epoche t_0) neben der Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$ oder die mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0}$ vorgegeben. Die hier besprochene Methodik findet vielfache Anwendung in der Satellitenbahnanalyse.

Wenn $\overline{\Delta\lambda}_{\Omega}$ gegeben ist, kann die Aufgabe auf Vorgabe von $\overline{P}_{d\,0}$ und $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ mit Hilfe der Fundamentalbeziehung (23.227) zurückgeführt werden:

$$\overline{P}_{d\,0} = \frac{\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0}}{\dot{\lambda}_{\Omega s0}} \quad . \tag{23.246}$$

23.6.1 Erste Näherungslösung

Eine erste Näherung für die große Bahnhabachse kann mit der Formel (23.184) (auf Seite 157) für die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit erhalten werden:

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P}_{d\,0}\right)^2}{4\pi^2}} \quad . \tag{23.247}$$

Wird noch die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgegeben, können die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ bestimmt werden. Dazu sind zwei Bedingungsgleichungen erforderlich.

Die erste dieser Bedingungsgleichungen folgt aus der säkularen Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens mit Formel (23.224) (auf Seite 172) aus

(I) $$\dot{\Omega}_{s0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta} \quad . \tag{23.248}$$

Dies führt auf die Inklination in Formel (23.244), die allerdings noch die unbekannte große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ enthält. Die zweite Bedingungsgleichung folgt aus der Definition der mittleren drakonitischen Umlaufzeit (23.161) (von Seite 148)

(II) $$\overline{P_d} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s} \quad , \tag{23.249}$$

wenn hier die säkularen Variationen erster Ordnung in der mittleren Epocheanomalie und dem Argument des Perigäums aus den Beziehungen (20.16) und (20.17) verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\overline{n_K} \quad &\hat{=}\, \overline{n_{K\,0}} \quad &&= \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \\
\dot{\omega}_s \quad &\hat{=}\, \dot{\omega}_{s0} \quad &&= -\frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left(1 - 5\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \\
\left(M_0\right)^{\cdot}_s &\hat{=} \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} &&= -\frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2 \sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad .
\end{aligned} \tag{23.250}$$

Damit führt (23.249) mit der vorgegebenen mittleren drakonitischen Umlaufzeit bei Bezug auf die Epoche t_0 auf den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{\overline{P_{d\,0}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\left(5 + 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \cos^2 \bar{i}_0 - \left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \right] \right\} + \cdots \tag{23.251}$$

Wird hier die Beziehung für $\cos \bar{i}_0$ aus dem Ausdruck (23.244) eingesetzt, kann die Inklination eliminiert werden und es bleibt als Bedingung für die große Bahnhalbachse

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\overline{P_{d\,0}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \Bigg\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \Bigg[& -\left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) + \\
& + \left(5 + 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \frac{4}{9} \frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)^2 \bar{a}_0^7 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^4}{\mu J_2^2 R_E^4} \Bigg] \Bigg\} + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{23.252}$$

Für eine erste Verbesserung werde die große Bahnhalbachse ersetzt durch den Näherungswert

$$\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \quad . \tag{23.253}$$

Zur übersichtlichen weiteren Berechnung seien die (konstanten) Hilfsgrößen

$$\begin{aligned}
D_0 &:= \frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 \left(5 + 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{3\sqrt{\mu}\, J_2 R_E^2} \\
D_1 &:= \frac{3\sqrt{\mu}\, J_2 R_E^2 \left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{4\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}
\end{aligned} \tag{23.254}$$

eingeführt. Damit bleibt ein Ausdruck, der allein von der unabhängigen Variablen $\bar{a}_0$ abhängt:

$$\frac{2\pi}{\overline{P}_{d\,0}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\bar{a}_0^3}} - \frac{D_1}{\sqrt{\bar{a}_0^7}} + D_0\sqrt{\bar{a}_0^7} + \cdots \quad . \tag{23.255}$$

Wird hier ausgehend von der Näherung nullter Ordnung (23.247) die Näherung erster Ordnung (23.253) eingesetzt, ergibt die Linearisierung in erster Ordnung

$$\frac{2\pi}{\overline{P}_{d\,0}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^5}}\Delta\bar{a}_0^{(1)} - \frac{D_1}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^7}} + D_0\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^7} + \cdots \quad . \tag{23.256}$$

Die Verbesserung erster Ordnung kann daraus berechnet werden:

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{2}{9}\frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{\mu\, J_2\, R_E^2}\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^6 - \frac{J_2\, R_E^2\left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{2\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}} \quad . \tag{23.257}$$

Wird mit diesem Ausdruck die Lösung erster Ordnung (23.253) gebildet, so kann mit dem Näherungswert (23.244) schließlich eine Näherung erster Ordnung für die Inklination gefunden werden:

$$\cos\bar{i}_0^{(1)} = -\frac{2\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2}\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^3\sqrt{\bar{a}_0^{(1)}} \quad . \tag{23.258}$$

23.6.2 Iterative Verbesserung

Eine weitere Verbesserung kann nur iterativ unter Verwendung des gesamten bekannten Bahnmodells erfolgen. Da zwei unabhängige Variable $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ zu bestimmen sind, müssen zwei Funktionen dieser Variablen in eine Taylorreihe um die Anfangswerte $\left(\bar{a}_0^{(1)}, i_0^{(1)}\right)$ entwickelt werden. Als Bedingungsfunktionen empfehlen sich an Stelle der beiden Bedingungsgleichungen (I) und (II) die überlagerten Funktionen

$$\begin{aligned} f_1\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) &\equiv \sin\left[u\left(t_0 + \overline{P}_{d\,0}\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \\ f_2\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + \overline{P}_{d\,0}\right) - \lambda\left(t_0\right) - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right] = 0 \quad . \end{aligned} \tag{23.259}$$

Die erste Funktion besagt, dass genau nach der vorgegebenen mittleren drakonitischen Umlaufzeit wieder dasselbe Argument der Breite überflogen werden soll. Die zweite Funktion basiert auf der Bedingung, dass die geographische Knotenlänge längs des Erdäquators nach genau einem drakonitischen Umlauf um den vorgegebenen Betrag $\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}$ verschoben werden soll. Hier sind das Argument der Breite und die geographische Länge zur Epoche feste Anfangswerte, das Argument der Breite sowie die geographische Länge nach einem drakonitischen Umlauf werden mit Hilfe des gegebenen Bahnmodells in jedem Iterationsschritt neu berechnet.

Die *Taylor*entwicklung führt im ν-ten Iterationsschritt auf die Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\left(\overline{a}_0^{(\nu+1)}-\overline{a}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left(\overline{i}_0^{(\nu+1)}-i_0^{(\nu)}\right)=0\\
&f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\left(\overline{a}_0^{(\nu+1)}-\overline{a}_0^{(\nu)}\right)+\frac{f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left(\overline{i}_0^{(\nu+1)}-i_0^{(\nu)}\right)=0 \quad .
\end{aligned}
\tag{23.260}
$$

Die Lösung lautet nach der *Cramer*schen Regel mit $\nu=1,2,3,\cdots$

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_0^{(\nu+1)}&=\overline{a}_0^{(\nu)}-\frac{f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}-f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}}{\Delta}\\
\overline{i}_0^{(\nu+1)}&=\overline{i}_0^{(\nu)}-\frac{f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}-f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}}{\Delta}\\
\Delta&=\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}-\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0} \quad ,
\end{aligned}
\tag{23.261}
$$

sofern die Koeffizientendeterminante Δ nicht verschwindet.

Im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung erster Ordnung können die hier benötigten partiellen Ableitungen wie folgt berechnet werden:

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Abkürzungen eingeführt:

$$
\begin{aligned}
&u_1 := u\left(t_0\right) \;,\; u_2 := u\left(t_0+\overline{P_d}\right)\\
&M_1 := \overline{M_{0\,0}} \;,\; M_2 := \overline{M_{0\,0}}+\left(\overline{n_K}+\left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\right)\overline{P_d}\\
&M_{1/2}=E_{1/2}-\overline{e}_0\sin E_{1/2}\\
&\cos\upsilon_{1/2}=\frac{\cos E_{1/2}-\overline{e}_0}{1-\overline{e}_0\cos E_{1/2}} \;,\; \sin\upsilon_{1/2}=\frac{\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}\sin E_{1/2}}{1-\overline{e}_0\cos E_{1/2}}\\
&\omega_1 := \overline{\omega}_0 \;,\; \omega_2 := \overline{\omega}_0+\dot{\omega}_s\,\overline{P_d} \quad,\quad \upsilon_1=u_1-\omega_1 \;,\; \upsilon_2=u_2-\omega_2\\
&\qquad\overline{n_K}=\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \quad,\quad B_2 := \overline{n_K}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)^2}\\
&\qquad\dot{\omega}_s=\frac{3B_2}{4}\left(5\cos^2\overline{i}_0-1\right) \quad,\quad \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}=\frac{3B_2\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\overline{i}_0\right)
\end{aligned}
\tag{23.262}
$$

Variation der ersten Funktionsgleichung nach der großen Halbachse

$$
\begin{aligned}
&f_1\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right)=\sin\left(u_2-u_1\right)\\
&\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \overline{a}_0} \;,\; \frac{\partial f_1}{\partial u_2}=\cos\left(u_2-u_1\right) \;,\; \frac{\partial f_1}{\partial u_1}=-\cos\left(u_2-u_1\right)\\
&\frac{\partial u_2}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial u_2}{\partial \upsilon_2}\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial u_2}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{a}_0} \quad,\quad \frac{\partial u_1}{\partial \overline{a}_0}=0
\end{aligned}
\tag{23.263}
$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s} = \overline{P_d} \quad , \quad \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0} = -\frac{21}{8}\frac{\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2}{\sqrt{\left(\overline{a}_0\right)^9}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2 \overline{i}_0 - 1\right)$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \overline{a}_0}$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2} = \frac{1+\cos \upsilon_2}{1+\cos E_2}\sqrt{\frac{1+\overline{e}_0}{1-\overline{e}_0}} \quad , \quad \frac{\partial E_2}{\partial M_2} = \frac{1}{1-\overline{e}_0 \cos E_2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \overline{a}_0} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^5}}\left[1+\frac{7}{2}\frac{J_2\, R_E^2\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 \overline{i}_0\right)\right] \overline{P}_{d\,0} = -\frac{\overline{P}_{d\,0}}{2\,\overline{a}_0}\left[3\overline{n_K} + 7\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} = \cos\left(u_2 - u_1\right)\left[\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \overline{a}_0} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0}\right] \tag{23.264}$$

Variation der ersten Funktionsgleichung nach der Inklination:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \overline{i}_0} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial \overline{i}_0} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{i}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s} = \overline{P}_{d\,0}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0} = -\frac{15}{4}\frac{\overline{n_K}\, J_2\, R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\sin 2\overline{i}_0$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial M_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]}\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]} = \overline{P}_{d\,0}$$

$$\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]}{\partial \overline{i}_0} = -\frac{9}{4}\overline{n}_K\, J_2\, R_E^2\frac{\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\sin 2\overline{i}_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} = \cos\left(u_2 - u_1\right)\left[\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]}\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s\right]}{\partial \overline{i}_0} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0}\right] \tag{23.265}$$

Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der großen Halbachse:

Mit den Abkürzungen

$$\lambda_1 := \lambda\left(t_0\right) \quad , \quad \lambda_2 := \lambda\left(t_0 + \overline{P_d}\right)$$

lautet die Funktionsgleichung

$$f_2\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right) = \sin\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right] \quad .$$

Der Bezug auf den Frühlingspunkt bezogenen aufsteigenden Knoten ☊ wird über die Rektaszension mit Hilfe der Sternzeit Θ_G hergestellt, die auf den Nullmeridian (Greenwich Meridian) bezogen ist (siehe die Definitionsgleichung (23.216) auf Seite 171):

$$\lambda_{2/1} = \alpha_{2/1} - \Theta_{G2/1} \quad , \quad \lambda_{\Omega 2/1} = \Omega_{2/1} - \Theta_{G2/1}$$

und es ist (mit Formel (23.217))

$$\Theta_{G2} = \Theta_{G1} + \dot{\Theta}\,\overline{P}_{d\,0} \quad .$$

Für die Rektaszension des aufsteigenden Knotens gilt die Entwicklung

$$\Omega = \Omega(t) = \bar{\Omega}(t_0) + \dot{\Omega}_s\,(t - t_0) + \delta\Omega \quad .$$

Unter Vernachlässigung der periodischen Variationen $\delta\Omega$ werden die Bezeichnungen

$$\Omega_1 := \bar{\Omega}(t_0) = \bar{\Omega}_0 \quad , \quad \Omega_2 := \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_s\,\overline{P}_{d\,0} \tag{23.266}$$

verwendet. Damit lauten die einzelnen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{a}_0}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \cos\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right] \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = -\cos\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right]$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0}$$

Aus den Beziehungen (23.30) (auf Seite 123) folgen

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos i_2}{\cos^2 \delta_2}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\sin u_2\,\sin i_2\,\cos(\alpha_2 - \Omega_2)}{\cos^2 \delta_2}\frac{\partial i_2}{\partial \bar{a}_0}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos i_1}{\cos^2 \delta_1}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\sin u_1\,\sin i_1\,\cos(\alpha_1 - \Omega_1)}{\cos^2 \delta_1}\frac{\partial i_1}{\partial \bar{a}_0}$$

Hier sind

$$\frac{\partial i_2}{\partial \bar{a}_0} = 0 + O\left(J_2^2\right) \quad , \quad \frac{\partial i_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$$

außerdem sind nach (23.263)

Aus (23.266) folgen $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{a}_0} = \dfrac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0}\,\overline{P}_{d\,0}$, $\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$ somit $\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$

Nach (23.228) (auf Seite 173) ist

$$\dot{\Omega}_{s0} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^{\frac{7}{2}}}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\bar{a}_0^9}}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + \cdots = -\frac{7}{2\,\bar{a}_0}\dot{\Omega}_{s0}$$

Damit lautet die Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der großen Bahnhalbachse (für den Fall, dass ein exakter Polüberflug mit $\cos\delta_2 = 0$ ausgeschlossen werden kann):

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right)\left\{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{\Omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos \bar{i}_0^{(\nu)}}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\left[\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{a}_0}\right]\right\} \tag{23.267}$$

Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der Inklination:

Aus $f_2\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) = \sin\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right]$ folgt

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{i}_0}$$

Wie im vorherigen Fall ist $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{i}_0} = 0$ und es bleiben (bei fest vorgegebenen $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{P}_{d\,0}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\cos i_2^{(\nu)}}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\sin i_2^{(\nu)} \cos u_2 \sin u_2}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\frac{\partial i_2}{\partial \bar{i}_0}$$

Da $\frac{\partial i_2}{\partial \bar{i}_0} = 1 + O\left(J_2^2\right)$ und $\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0}$ im Zusammenhang mit der ersten Funktionsgleichung bearbeitet worden ist, bleiben

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{i}_0} = \overline{P}_{d\,0}\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0}$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right)$$

und damit schließlich

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right)\left\{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{\Omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\cos \bar{i}_0^{(\nu)}}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\left[\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{i}_0}\right] - \frac{\sin \bar{i}_0^{(\nu)} \sin u_2 \cos u_2}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\right\} \tag{23.268}$$

BEISPIEL: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn, die zur Epoche die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_d = 6000\,\text{sec}$ und die säkulare Drift der Knotenlänge $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -4°.244 \times 10^{-3}/\text{s} \;\hat{=}\; -366°.681/\text{d}$ habe. Als Näherung nullter Ordnung mit den Formeln (23.247) ergibt sich für die große Bahnhalbachse den Wert $\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635456\,\text{km}$. Die Verbesserung erster Ordnung (23.257) lautet $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 11.538360\,\text{km}$ und führt auf die Lösung erster Ordnung $\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 7148.173815\,\text{km}$. Damit ergibt sich der Wert erster Ord-

nung der Inklination mit Formel (23.258) zu $\bar{i}_0^{(1)} = 31°.590699$. Zur Durchführung der Iteration (23.261) seien die a-priori Genauigkeiten

$$\left|\Delta\bar{a}_0^{(\nu+1)}\right| = \left|\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right| \le \varepsilon_a = 10^{-5}\,\text{km} \quad <\nu=1,2,3,\cdots>,$$
$$\left|\Delta\bar{i}_0^{(\nu+1)}\right| = \left|\bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)}\right| \le \varepsilon_i = 10^{-4} \triangleq 0°.00572957795$$

vorgegeben. Damit ergeben sich folgende Schritte:

ν=2: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=2)} = 0.211094151350\times10^{-2}$, $f_2^{(\nu=2)} = -0.349396466414\times10^{-2}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=2)} = -0.262178738301\times10^{-1}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=2)} = -0°.349396466414$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=2)} = 7148.20003327\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=2)} = 31°.9400953121$

ν=3: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=3)} = -0.117849982082\times10^{-4}$, $f_2^{(\nu=3)} = 0.247034660339\times10^{-5}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=3)} = -0.560595193767\times10^{-2}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=3)} = 0°.169176985117\times10^{-1}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=3)} = 7148.20563922\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=3)} = 31°.9231776136$

ν=4: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=4)} = 0.296308862113\times10^{-6}$, $f_2^{(\nu=4)} = 0.414680246807\times10^{-7}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=4)} = 0.869201883777\times10^{-4}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=4)} = -0°.284752077478\times10^{-3}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=4)} = 7148.20555230\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=4)} = 31°.9234623657$

ν=5: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=5)} = -0.520441766072\times10^{-8}$, $f_2^{(\nu=5)} = -0.798089982990\times10^{-9}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=5)} = -0.149022909435\times10^{-5}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=5)} = 0°.490646206235\times10^{-5}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=5)} = 7148.20555379\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=5)} = 31°.9234574592$

Damit sind die Bedingungen für die Genauigkeiten der Elemente erfüllt: $\left|\Delta\bar{a}_0^{(\nu=5)}\right| < \varepsilon_a$, $\left|\Delta\bar{i}_0^{(\nu=5)}\right| < \varepsilon_i$. Zur Kontrolle werden mit den erhaltenen Elementen $\bar{a}_0 = 7148.205554\,\text{km}$, $\bar{i}_0 = 31°.92346$ die vorgegebenen Parameter mittlere drakonitische Umlaufzeit und säkulare Knotenlängendrift berechnet: $\overline{P_{d\,0}^{(\nu=5)}} = 6000.000000\,\text{s}$, $P_{d0}^{(\nu=5)} = 5999.999999991442\,\text{s}$, $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -366°.6809495\,/\text{d}$. ◄

23.6.3 Genauigkeitsabschätzungen

Im vorherigen Abschnitt wurden die *Kepler*elemente große Halbachse und Inklination mit Abschätzung der erreichbaren und erreichten Genauigkeit berechnet. Um einen Eindruck über die Sensitivität des geschilderten Verfahrens zu vermitteln, werden in diesem Abschnitt weitere differentielle Beziehungen zwischen den hier verwendeten Parametern untersucht.

Für eine a-priori Abschätzung der Bedingungsfunktionen f_1, f_2 können verschiedene Bezüge untersucht werden, welche sich auf die Messungen bzw. die Messgenauigkeiten stützen, die zur Verfügung stehen.

Interessante Abhängigkeiten betreffen die Sensitivitäten von Halbachse und Inklination, wenn Variationen der vorgegebenen Parameter drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängendrift zugelassen werden. Entsprechend sind die Variationen von Halbachse und Inklination bzw. der beiden Bedingungsfunktionen von den vorgegebenen Parametern zu untersuchen.

1. Zunächst wird aus den Funktionen (23.259) der Zusammenhang zwischen den Funktionen und den Genauigkeiten der zu bestimmenden Bahnparameter $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ hergestellt

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}\Delta\overline{a}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0}\Delta\overline{i}_0 \\ \Delta f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0}\Delta\overline{a}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0}\Delta\overline{i}_0 \quad . \end{aligned} \tag{23.269}$$

   Die hier benötigten partiellen Ableitungen wurden im vorhergehenden Abschnitt (Formeln (23.264) - (23.268)) hergeleitet. Damit kann abgeschätzt werden, wie genau die Funktionsgleichungen f_1, f_2 berechnet werden müssen, wenn Forderungen für die Genauigkeiten $\Delta\overline{a}_0$ für die Halbachse und $\Delta\overline{i}_0$ Inklination vorgegeben werden.

2. Für weitere Abschätzungen seien der Übersichtlichkeit halber die Abkürzungen

$$u_2 := u\left(t_0 + \overline{P}_{d\,0}\right) \;,\quad u_1 := u\left(t_0\right) \;,\quad \lambda_2 := \lambda\left(t_0 + \overline{P}_{d\,0}\right) \;,\quad \lambda_1 := \lambda\left(t_0\right) \tag{23.270}$$

   gesetzt. Da die Anfangswerte $\left(u_1, \lambda_1\right)$ als feste Größen vorgegeben sind, bleiben entsprechend (23.259) die Fehlergrößen

$$\Delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\Delta u_2 \quad , \quad \Delta f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\Delta\lambda_2 \quad . \tag{23.271}$$

   Die erstere Bedingung gibt die Genauigkeit, die längs der Bahn mit dem Argument der Breite als Bahnwinkel erreicht werden kann, die zweite Bedingung die Genauigkeit des Schnittpunktes der Bahnebene längs des Äquators.

3. In beiden Fällen kann das Winkelintervall Δu_2 bzw. $\Delta\lambda_2$ durch eine Strecke ersetzt werden. Dazu muss allerdings die radiale Distanz des entsprechenden Satellitenortes bekannt sein, was aber wegen der noch unbekannten großen Bahnhalbachse nicht möglich ist. Bei erdnahen Satellitenbahnen kann in erster Näherung der Äquatorradius der Erde oder ein über eine geschätzte Bahnhöhe *H* erhaltener Bahnradius verwendet werden:

$$\Delta x_u \approx \left(R_\mathrm{E} + H\right)\Delta u_2 \quad , \quad \Delta x_L \approx \left(R_\mathrm{E} + H\right)\Delta\lambda_2 \quad . \tag{23.272}$$

4. Für eine weitere Untersuchung der ersten Bedingung (23.271) ist zunächst

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = \cos\left(u_2 - u_1\right) \quad . \tag{23.273}$$

Mit Hilfe der Variation (15.113) wird das Differential[1]

$$\Delta u_2 = \frac{\left(1+\overline{e}_0 \cos \upsilon_2\right)^2}{\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}^{\,3}} \Delta M_2 + \frac{\sin \upsilon_2 \left(2+\overline{e}_0 \cos \upsilon_2\right)}{1-\overline{e}_0^2} \Delta e + \Delta \omega_2 \tag{23.274}$$

erhalten. Hier ist

$$\upsilon_2 = u_2 - \omega_2 \quad , \quad \omega_2 = \omega_1 + \dot{\omega}_s \overline{P}_{d\,0} \left(+\delta\omega\right) \quad . \tag{23.275}$$

Da im Zusammenhang mit der hier durchgeführten Bahnauswahl die Exzentrizität eine feste Eingangsgröße ist, die in Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde in erster Ordnung keinen säkularen Einwirkungen unterliegt, kann $\Delta e = 0$ gesetzt werden. Somit bleiben die säkularen Einflüsse auf die mittlere Anomalie und das Argument des Perigäums in erster Ordnung zu berücksichtigen, während die Einflüsse infolge von periodischen Variationen vernachlässigt werden können.

Die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt t_2 kann als Funktion

$$M_2 = \overline{M}_2 + \delta M_2 = \overline{M}_{0\,0} + \left(\overline{n}_{K\,0} + \dot{M}_{0s0}\right)\overline{P}_{d\,0} + \cdots = fct\left(\overline{M}_{0\,0}, \overline{n}_{K\,0}, \dot{M}_{0s0}, \overline{P}_{d\,0}\right) + \cdots \tag{23.276}$$

dargestellt werden. Da $\overline{M}_{0\,0}$ als feste Eingangsgröße betrachtet werden darf, bleibt für das Differential von M_2

$$\Delta M_2 \approx \Delta \overline{M}_2 = \frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \overline{n}_{K\,0}} \Delta \overline{n}_{K\,0} + \frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \dot{M}_{0s0}} \Delta \dot{M}_{0s0} + \frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \overline{P}_{d\,0}} \Delta \overline{P}_{d\,0} + \cdots \quad . \tag{23.277}$$

Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n}_{K\,0} = \sqrt{\mu}\left(\overline{a}_0\right)^{-\frac{3}{2}}$ führt auf

$$\Delta \overline{n}_{K\,0} = \frac{\partial\left(\overline{n}_{K\,0}\right)}{\partial \overline{a}_0} \Delta \overline{a}_0 = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^5}}\, \Delta \overline{a}_0 \quad . \tag{23.278}$$

Ferner sind

$$\frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \overline{n}_{K\,0}} = \frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \dot{M}_{0s0}} = \overline{P}_{d\,0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{M}_2}{\partial \overline{P}_{d\,0}} = \overline{n}_{K\,0} + \dot{M}_{0s0} \quad . \tag{23.279}$$

Nach Formel (21.43) können im Differential

$$\Delta \dot{M}_{0s0} = \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \overline{a}_0} \Delta \overline{a}_0 + \frac{\partial \dot{M}_{0s0}}{\partial \overline{i}_0} \Delta \overline{i}_0 \tag{23.280}$$

die partiellen Ableitungen im Fall des Gravitationsfeldes der Erde erster Ordnung (mit $\dot{M}_{0s0} \triangleq \dot{M}_{0Gs0}$) verwendet werden. Das Differential der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\overline{P}_{d\,0} = \frac{2\pi}{\overline{n}_{K\,0} + \dot{M}_{0s0} + \dot{\omega}_s} \tag{23.281}$$

kann wegen

---

1 Abschnitt 15.2.14 (Band III)

$$\Delta\overline{P}_{d\,0} = \frac{\partial\overline{P}_{d\,0}}{\partial\overline{n}_{K\,0}}\Delta\overline{n}_{K\,0} + \frac{\partial\overline{P}_{d\,0}}{\partial\dot{M}_{0s0}}\Delta\dot{M}_{0s0} + \frac{\partial\overline{P}_{d\,0}}{\partial\dot{\omega}_s}\Delta\dot{\omega}_s \tag{23.282}$$

zurückgeführt werden auf

$$\Delta\overline{P}_{d\,0} = -\frac{\left(\overline{P}_{d\,0}\right)^2}{2\pi}\left[\Delta\overline{n}_{K\,0} + \Delta\dot{M}_{0s0} + \Delta\dot{\omega}_s\right] \quad . \tag{23.283}$$

Es fehlt noch das Differential für das Argument des Perigäums, das aus dem Ansatz $\omega_2 = \bar{\omega}_2 + \delta\omega_2 = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,\overline{P}_{d\,0} + \cdots$ erhalten werden kann:

$$\Delta\omega_2 \approx \Delta\bar{\omega}_2 = \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\dot{\omega}_s}\Delta\dot{\omega}_s + \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\overline{P}_{d\,0}}\Delta\overline{P}_{d\,0} + \cdots = \overline{P}_{d\,0}\,\Delta\dot{\omega}_s + \dot{\omega}_s\,\Delta\overline{P}_{d\,0} + \cdots \quad . \tag{23.284}$$

Hier sind $\Delta\overline{P}_{d\,0}$ aus (23.283) bekannt und $\Delta\dot{\omega}_s$ im Fall von Erdsatelliten aus Abschnitt 21.2.2.

5. Für die zweite Bedingung (23.271) wird

$$\frac{\partial f_2}{\partial\lambda_2} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right) \quad . \tag{23.285}$$

Aus

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0}\left(+\delta\lambda_\Omega\right) \tag{23.286}$$

wird nach Vernachlässigung aller periodischen Einflüsse für eine Abschätzung der geographischen Länge

$$\Delta\lambda_2 = \Delta\left(\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0}\right) \triangleq \Delta\lambda \quad . \tag{23.287}$$

Wegen $\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}$ lautet das zugehörige Differential

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda}_{\Omega\,0}\right) = \overline{P}_{d\,0}\,\Delta\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0}\right) + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\Delta\overline{P}_{d\,0} \tag{23.288}$$

wobei wegen $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = \dot{\Omega}_{s0}$ auch

$$\Delta\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0}\right) = \Delta\dot{\Omega}_{s0} \quad . \tag{23.289}$$

6. Von besonderem Interesse ist wegen des unmittelbaren Einflusses auf die Umlaufzeit der näherungsweise Zusammenhang der großen Bahnhalbachse mit den gegebenen Parametern mittlere drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängenverschiebung bzw. Knotenlängendrift. Da im Fall von Erdsatelliten die numerischen Abschätzungen in Abschnitt 21.2 ergeben, dass

$$\Delta\dot{\Omega}_{s0} = \Delta\dot{\omega}_{s0} = \Delta\left(\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0}\right) = O\left(J_2^2\right) \qquad \langle\text{für } ♁ \quad , \tag{23.290}$$

kann aus Formel (23.283) mit Hilfe der Näherung $\overline{P}_{d\,0} = \overline{P}_{K\,0} + O\left(J_2\right)$ und unter Verwendung des Differentials (23.278) die Näherungsabschätzung

$$\Delta\overline{P}_{d\,0} = \frac{3}{2}\frac{\overline{P}_{d\,0}}{\bar{a}_0}\Delta\bar{a}_0 + O\left(J_2^2\right) \tag{23.291}$$

erhalten werden. Hier ist die gesuchte Halbachse $\bar{a}_0$ zunächst noch unbekannt, so dass die nullte Näherung (23.247) einen ersten Anhaltswert liefern kann. Der Einfluss auf die Bahnhalbachse durch die Wahl der mittleren drakonitischen Umlaufzeit ergibt daher die Abschätzung

$$\Delta\bar{a}_0 = \frac{2}{3}\frac{\bar{a}_0^{(0)}}{\overline{\overline{P}_{d\,0}}}\Delta\overline{P}_{d\,0} \;+\; O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.292}$$

In analoger Weise kann mit den Beziehungen (23.287) und (23.288) die Abschätzung

$$\Delta\lambda = \Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}\right) = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\Delta\overline{P}_{d\,0} = \frac{3}{2}\dot{\lambda}_{\Omega s0}\frac{\overline{P}_{d\,0}}{\bar{a}_0^{(0)}}\Delta\bar{a}_0 \tag{23.293}$$

erhalten werden, somit auch

$$\Delta\bar{a}_0 = \frac{2}{3}\frac{\bar{a}_0^{(0)}}{\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}}\Delta\lambda \;+\; O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.294}$$

23.7 Der Knotenumlauf

Die Fundamentalbeziehung (23.227) kann für einfache Anwendungen verallgemeinert werden, wenn die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ bekannt ist.

Sei etwa eine (mittlere) Knotenlängenverschiebung, d.h. die Verschiebung der Bahnebene bezüglich des Äquators (ohne Berücksichtigung der Bewegung eines Satelliten in seiner Bahnebene) $\overline{\delta\lambda_\Omega}$, so kann die dazu benötigte Zeit berechnet werden mit Hilfe der Differenz

$$\Delta t = \frac{\overline{\delta\lambda_\Omega}}{\dot{\lambda}_{\Omega s0}}[\mathrm{d}] \tag{23.295}$$

Von besonderem Interesse ist die Zeitdauer für einen ganzen Knotenumlauf um die Erde. Sie errechnet sich aus

$$\overline{P_{\lambda\Omega}} = \frac{-360^\circ}{\dot{\lambda}_{\Omega s}} \quad . \tag{23.296}$$

BEISPIEL 1: Gegeben sei die Bahn $\bar{a}_0 = 6578.140\,\mathrm{km}, \bar{e}_0 = 0.0, \bar{i}_0 = 25^\circ$. Die Knotenlängendrift beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -369^\circ.1345940/\mathrm{d}$, die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 1^h.469769$, die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischen Umlauf $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22^\circ.605934$. Wie lange dauert es, bis die Bahnebene um den Betrag $\overline{\delta\lambda_\Omega} = -130^\circ$ verschoben wird? Ergebnis: $\Delta t = 8^h.4522$. ◄

BEISPIEL 2: Für die Bahn des vorstehenden Beispiels ergibt sich: $\overline{P_{\lambda\Omega}} = 23^h\,24^m\,21^s.948$, also ungefähr aber keineswegs genau ein mittlerer Sonnentag[1]. ◄

---

[1] Diese Aussage ist wichtig, da die Knotenumlaufzeit dann und nur dann einen mittleren Sonnentag beträgt, wenn die Bahn sonnensynchron ist (siehe in Kapitel 28)

23.8 Die Knotenlängenrestverschiebung

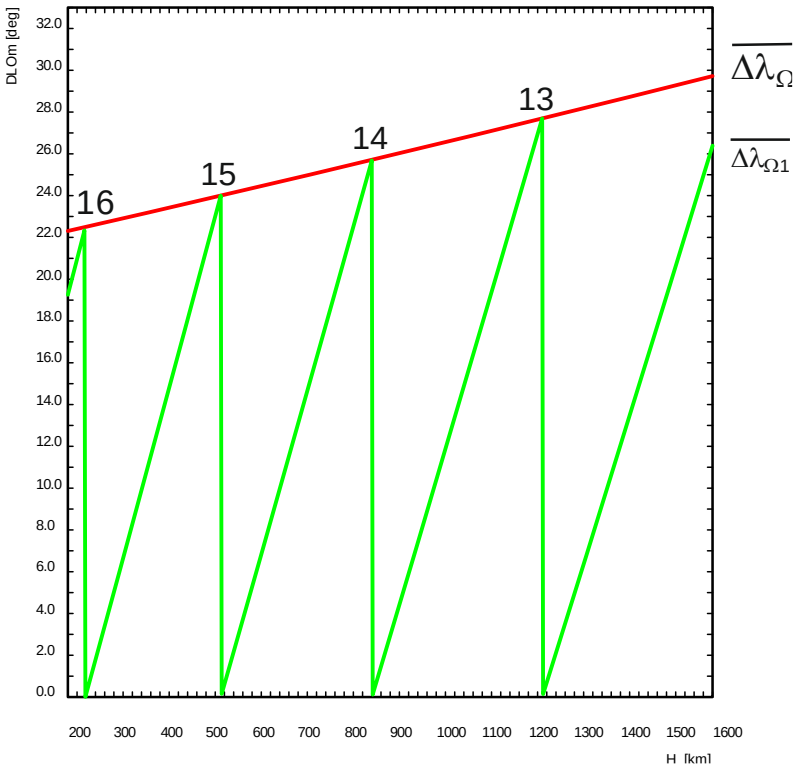


Bild 23-26: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für die Kreisbahn mit Inklination i = 80° und variiert über den Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$.

Nach einem Knotenumlauf des Bahnknotens längs des Äquators um die Erde befindet sich ein Satellit normalerweise nicht im Knoten (die einzige Ausnahme sind nach einem Knotenumlauf reproduzierbare Bahnen, die als „integer Bahnen“ bezeichnet werden). Vielmehr ist der erste aufsteigende Knoten der Satellitenbahn nach einem Knotenumlauf gegenüber einem Referenzknoten um einen bestimmten Betrag, der als „Knotenlängenrestverschiebung“ $\Delta\lambda_{\Omega K}$ bezeichnet wird, verschoben. Für bahnanalytische Untersuchungen ist die mittlere Knotenlängenrestverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \Delta\lambda_{\Omega K} - \delta\left(\Delta\lambda_{\Omega K}\right) \tag{23.297}$$

von besonderer Wichtigkeit. Bei bahnanalytischen Untersuchungen bleibt der periodische Anteil $\delta\left(\Delta\lambda_{\Omega K}\right)$ normalerweise unberücksichtigt.

Die geographische Länge des aufsteigenden Knotens nach einem Knotenumlauf wird gegenüber einem Referenzknoten um die Knotenlängenrestverschiebung in westlicher Richtung verschoben (vgl. Formel (23.230)), wenn N_1 die Anzahl der drakonitischen Umläufe nach einem Knotenumlauf ist,

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} := N_1\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 360° = \text{int}\left[-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right]\overline{\Delta\lambda_\Omega}\ + 360° \quad . \tag{23.298}$$

23.8.1 Eigenschaften der mittleren Knotenlängenrestverschiebung

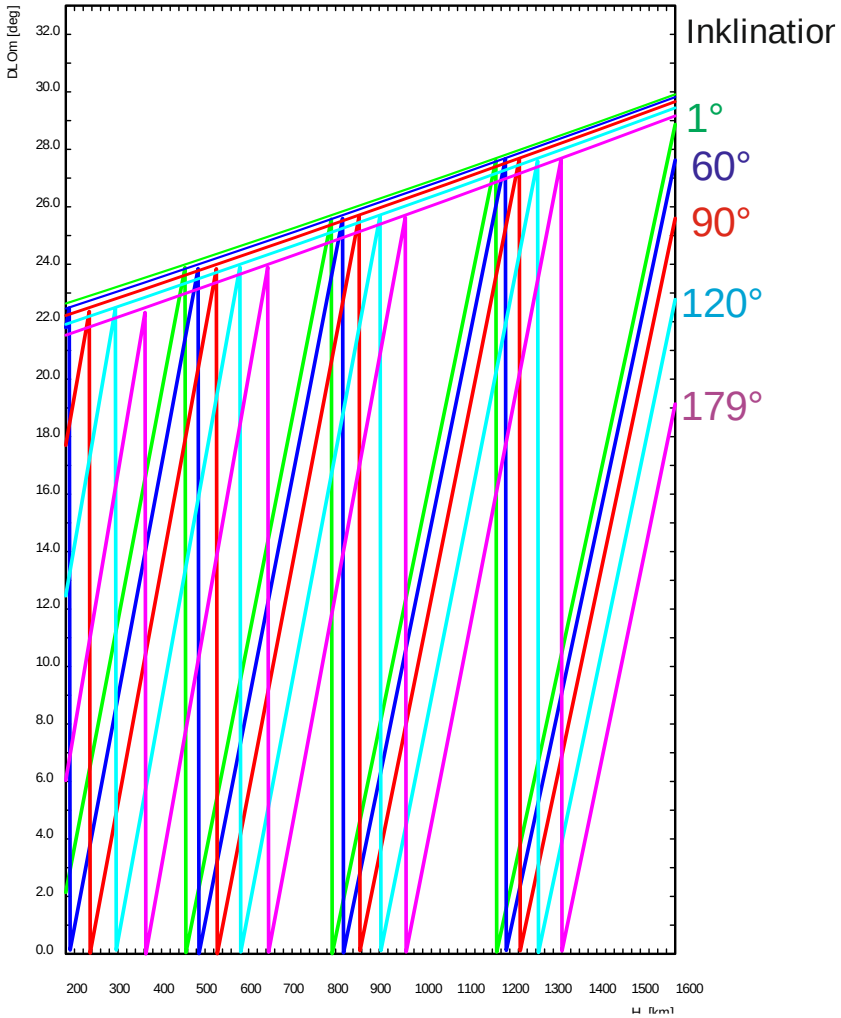


Bild 23-27: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für Kreisbahnen mit den Inklinationen i = 1°, 60°, 90°, 120°, 179° in Abhängigkeit vom Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$.

Entsprechend kann auch eine Knotenlängenrestverschiebung nach K Knotenumläufen bei N_d drakonitischen Umläufen definiert werden:

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} := N_d\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + K\cdot 360° = \text{int}\left[-\frac{K\cdot 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right]\overline{\Delta\lambda_\Omega}\ + K\cdot 360° \quad . \qquad (23.299)$$

Offensichtlich gilt die Einschränkung

$$0° \le \left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| \quad . \qquad (23.300)$$

Die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ und die mittlere Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$ haben interessanterweise ein völlig unterschiedliches Verhalten. Die Knotenlängenverschiebung nimmt mit zunehmender (Kreis-) Bahnhöhe und entsprechender längerer (drakonitischer) Umlaufzeit allmählich stetig zu. Die Knotenlängenrestverschiebung durchläuft mit

zunehmender Bahnhöhe rasch das Intervall der Länge $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ und trifft auf die Knotenlängenverschiebung jeweils, wenn beide Werte zusammenfallen: $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}$. Dies sind die Punkte, wenn der Satellit nach **einem** Knotenumlauf genau den Referenzknoten überfliegt, wenn sich der Satellit also auf einem „integer orbit“ bewegt. Dies wird in Abhängigkeit von der Bahnhöhe nach 16, 15, 14, 13,… drakonitischen Umläufen erreicht, wie aus Bild 23-26 ersehen werden kann.

Von besonderem Interesse ist, dass die Knotenlängenrestverschiebung im Gegensatz zur Knotenlängenverschiebung entscheidend von der Bahninklination beeinflusst wird. Dies wirkt sich auch auf die Position der „integer orbits“ aus, wie für einige Beispiele aus Bild 23-27 abgelesen werden kann. Eine beliebige Verschiebung der Anordnung der Knotenlängenrestverschiebung längs des Bahnhöhenverlaufs ist nicht möglich. Hier können nur einige diskrete Anordnungen eingestellt werden.

Die Knotenlängenrestverschiebung erlaubt eine Zuordnung von Bahn- und Bahnebene in Bezug auf die Erdoberfläche über längere Zeiträume. Dies erläutert folgendes

BEISPIEL: Die kreisförmige Bahn mit mittlerer Kreisbahnhöhe H = 750 km und der Inklination $\bar{i}_0 = 98°.37$ hat die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -24°.98513$ sowie die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}} = 1^h.6657$. Über einen längeren Zeitraum $\Delta t = N_K \cdot \overline{P_{d\,0}}$ ergibt sich mit Formel (23.301) und der Anzahl der drakonitischen Umläufe N_K bei K Knotenumläufen nach Formel (23.231) $N_K = \mathrm{int}\left[-K \cdot 360° / \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 1\right]$ die Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$. Die Tabelle 23-5 schließt die entsprechenden Werte bei Start sowie nach einem drakonitischen Umlauf $\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$ ein. Das Beispiel zeigt eine sprunghafte Änderung der Knotenlängenrestverschiebung von Tag zu Tag, die zunächst willkürlich anmutet, über längere Zeiträume jedoch einen systematischen Gang aufweist. Man kann sich dieses Verhalten bei der Bahnauswahl eine Erderkundungssatelliten zunutze machen. In der vierten Spalte der vorstehenden Tabelle kann man erkennen, dass die Umlaufzeiten ungefähr ganzen Tagen entsprechen, jedoch nie exakt. Dies ist typisch in nahezu allen Anwendungen. ◄

23.8.2 Bahnauswahl aus der mittleren Knotenlängenrestverschiebung

Bei Vorgabe der Knotenlängenrestverschiebung nach N_d drakonitischen Umläufen kann nach Formel (23.299) die Knotenlängenverschiebung nach einem drakonitischen Umlauf berechnet werden aus

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} - K \cdot 360°}{N_d} \quad . \tag{23.301}$$

Mit bekannter Knotenlängenverschiebung sowie bei Vorgabe von Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ kann mit dem in Abschnitt 23.5.3 ab Seite 178 hergeleiteten Verfahren die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Epoche berechnet werden. Die Formel (23.299) zeigt jedoch auch, dass Vorgabe der Knotenumlaufzahl K nicht ausreicht, um eine eindeutige Berechnung einer Bahn zu ermöglichen. In einem solchen Fall ist es nötig, etwa durch ungefähre Wahl

einer geeigneten Bahnhöhe aus dem Bereich aller für ein gewünschtes *K* möglichen Bahnen eine passende Bahnen zu suchen.

BEISPIEL 1: Nach 7 drakonitischen Umläufen soll der aufsteigende Bahnknoten einer Bahn bezüglich der Erdoberfläche um den Betrag 33°.742 nach Westen verschoben sein. Die gesuchte Bahn soll die Exzentrizität e=0.3 und um 111° gegenüber dem Äquator geneigt sein. Zu bestimmen ist die große Bahnhalbachse.

Nach Formel (23.301) muss die Bahn die Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}56.248857$ haben. Die Berechnung mit Formel (23.234) liefert die Näherung $\bar{a}_0^{(0)} = 12231.631276\,\text{km}$, die Verbesserung (23.237) liefert $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 7.919915\,\text{km}$ und ergibt die Näherung erster Ordnung $\bar{a}_0^{(1)} = 12239.551191\,\text{km}$, die iterative Verbesserung (23.238) schließlich die endgültige Lösung $\bar{a}_0^{(2)} = 12239.530508\,\text{km}$. Zur Kontrolle werden mit dieser Halbachse die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}56°.248857$ und die Knotenlängenrestverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = \text{-}33°.741999$ berechnet. ◄

Für die Anwendungen der Knotenlängenrestverschiebung ist neben der Vorgabe eines Zahlenwertes von größerer Bedeutung die Vorgabe eines Bruchteiles, den die Knotenlängenverschiebung in dem Referenzintervall der Knotenlängenverschiebung einnehmen soll. Für natürliche Zahlen K_1, K_2 soll somit die Relation erfüllt sein:

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \frac{K_1}{K_2}\overline{\Delta\lambda_\Omega} \qquad \langle K_1, K_2 \in \mathbb{N}, \quad K_1 < K_2 \quad . \tag{23.302}$$

Hier ist die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ selber eine unbekannte Größe, die mit Hilfe der Beziehung (23.299) berechnet werden muss:

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \frac{K \cdot 360°}{\frac{K_1}{K_2} - N_d} \quad . \tag{23.303}$$

Die Lösung ist aber nicht eindeutig, da die Anzahl N_K der drakonitischen Umläufe noch wählbar ist. Hier gilt lediglich für Erdsatelliten die Einschränkung (wie aus der *Kepler*schen Umlaufzeit für eine Kreisbahn in 200 km Höhe geschlossen werden kann)

$$N_d \le 16K \quad . \tag{23.304}$$

BEISPIEL 3: Für $K_1 = 1, K_2 = 7, N_1 = 13$ liefert Formel (23.303) die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -28°.0$. Die Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf beträgt mit (23.302) $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = -4°$. Eine Kreisbahn mit der Bahnneigung $\bar{i}_0 = 125°$ muss dann die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7726.220\,\text{km}$ haben. ◄

Die in diesem Abschnitt behandelte Knotenlängenrestverschiebung ist eine wichtige Größe im Zusammenhang mit Untersuchungen der Reproduzierbarkeit von Satellitenbewegungen.

K	N_d	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$	Δt
0	0	0°	0^h
0	1	24°.99	$1^h.6657$
1	15	14°.78	$1^d.0411$
2	29	4°.57	$2^d.0127$
3	44	19°.35	$3^d.0538$
4	58	9°.15	$4^d.0254$
5	73	23°.91	$5^d.0665$
6	87	13°.71	$6^d.0382$
7	101	3°.50	$7^d.0098$
8	116	18°.28	$8^d.0509$
9	130	8°.07	$9^d.0225$
10	145	22°.84	$10^d.0636$
11	159	12°.64	$11^d.0353$
12	173	2°.43	$12^d.0069$
13	188	17°.20	$13^d.0480$
14	202	7°.00	$14^d.0196$
15	217	21°.77	$15^d.0607$
16	231	16°.57	$16^d.0324$
17	245	1°.36	$17^d.0040$
18	260	16°.13	$18^d.0451$
19	274	5°.93	$19^d.0167$
20	289	20°.70	$20^d.0578$
21	303	10°.50	$21^d.0295$
22	317	0°.29	$22^d.0011$

Tabelle 23-5: Die Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Knotenumläufen für die Bahn $\bar{a}_0 = 7128.140\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 98°.37$

23.9 Spur-reproduzierbare Bahnen

23.9.1 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenverschiebung

Der Begriff einer Reproduzierbarkeit wird in der Satellitenbahnmechanik in verschiedenem Zusammenhang benötigt. Im Zusammenhang mit Fernerkundungssatelliten interessiert in erster Linie der Bezug auf die Erdoberfläche und damit der Begriff der *reproduzierbaren Subsatellitenbahn*. Die Problemstellung lautet dann: kann nach einer bestimmten Anzahl N_d drakonitischer Umläufe ein und dieselbe Subsatellitenspur (= Fußpunktkurve) wieder exakt überflogen werden? Bei Einschränkung auf das Hauptproblem der Satellitenbahnmechanik (Stö-

rungen durch $J_2 - J_4$ allein) und Vernachlässigung periodischer Bewegungseinflüsse („Störterme“) verändert sich die Bahnneigung nach Beziehung[1] (20.14) nicht. Unter diesen Voraussetzungen wird eine bestimmte Stellung der Bahnebene in Bezug auf den Erdkörper nach jedem Knotenlängenumlauf wieder erreicht, wenn die mittlere geographische Länge $\overline{\lambda_\Omega}$ des momentanen aufsteigenden Knotens wieder denselben Wert annimmt. Reproduzierbar ist eine Satellitenbewegung jedoch erst dann, wenn sich der Satellit nach einer bestimmten Anzahl *K* von Knotenumläufen bei einem Bezug auf den aufsteigenden Knoten genau wieder im aufsteigenden Knoten befindet. Für ein bestimmtes Wertepaar K, N_d natürlicher Zahlen muss also mit der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ die Beziehung erfüllt sein

$$N_d \, \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -K \cdot 360° \quad . \tag{23.305}$$

Diese Beziehung kann folgendermaßen formuliert werden:

- *Eine Subsatellitenbahn ist genau dann reproduzierbar, wenn ihre mittlere Knotenlängenverschiebung kommensurabel zum Vollkreis ist.*

Die Zahlen N_d und *K* unterliegen bei Erdsatellitenbahnen wegen einer sinnvollen Mindestbahnhöhe von etwa 200 km nach Bedingung (23.304) der Einschränkung $N_d \leq 16K$. Die Zahl *K* kann in diesem Fall als *Reproduktionszyklus* bezeichnet werden. Sie ist als Anzahl der Knotenumläufe bezüglich der Erdoberfläche nahezu der Anzahl an Tagen zur Spurwiederholung gleich[2].

Im Fall von Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn kann die Zeitdauer T_d, nach der eine mittlere Subsatellitenbahn reproduziert wird, mit Hilfe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit aus der Beziehung

$$T_d = N_d \, \overline{P_d} / 86400 \, [d] \tag{23.306}$$

berechnet werden. Diese Größe ist die *Reproduktionsdauer*. Sie hat als Dimension einen mittleren Sonnentag (für die Definitionsgleichung wird somit angenommen, dass die mittlere drakonitische Umlaufzeit in Sekunden gegeben ist).

BEISPIEL: Bild 23-28 zeigt das Netz einer im Verhältnis $K{:}N_d = 5{:}43$ kreisförmigen Bahn unter der Bahnneigung $i = 40°$. Die Bahn hat die mittlere große Bahnhalbachse a = 10021.741 km. Das Bahnnetz zeigt keinen Anfang und kein Ende, da die Bahn als eine reproduzierbare Bahn bezüglich der Erdoberfläche in sich geschlossen ist. Das Netz rotiert fest an die Erde gekoppelt zusammen mit der Erdrotation. ◄

---

1 Abschnitt 20.2.1, Band III

2 Exakt gleich der Anzahl der Tage ist der Reproduktionszyklus ausschließlich im Fall sonnensynchroner Bahnen (siehe hierzu in Kapitel 28.8.1 auf Seite 473)

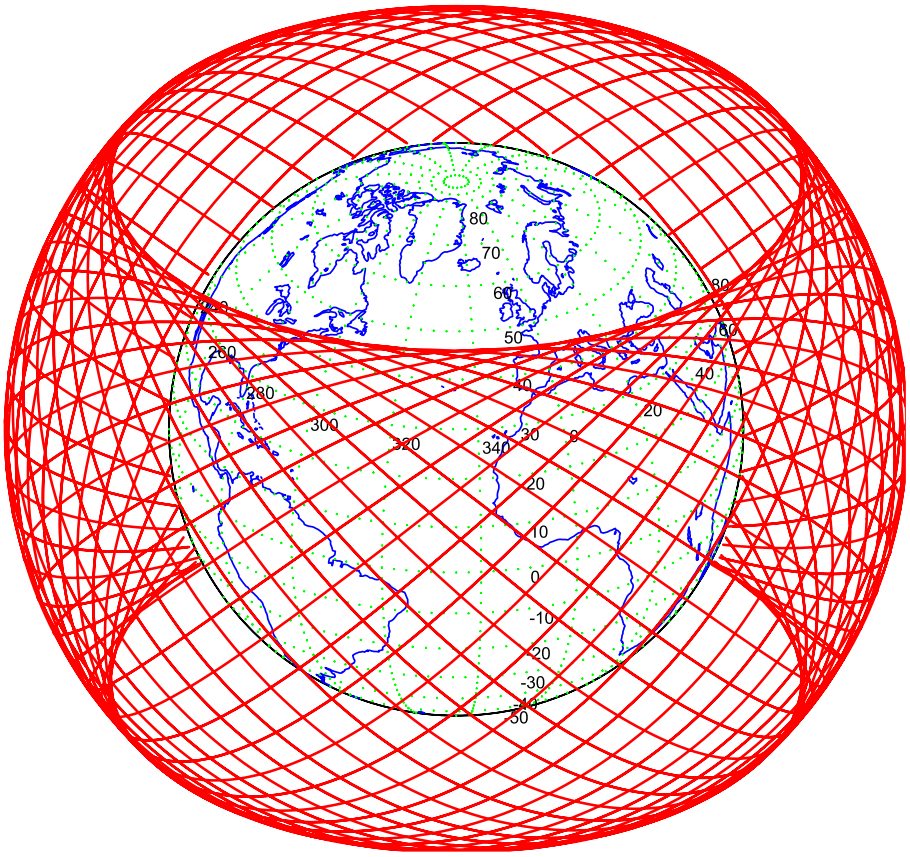


Bild 23-28: Das bezüglich der Erdoberfläche feststehende, daher mit der Erdrotation mit rotierende, Netz einer reproduzierbaren kreisförmigen Bahn unter der Inklination i=40° und mit dem Reproduktionsverhältnis $K{:}N_d$=5:43

23.9.2 Bahnauswahl für Spur-reproduzierbare Bahnen

Eine wichtige Anwendung der Spurreproduzierbarkeit von Satellitenbahnen ist die Bestimmung der Bahnparameter einer solchen Bahn. Wenn die Reproduktionsparameter K und N_d vorgegeben sind, kann aus der Definitionsgleichung (23.305) die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ berechnet werden. Damit kann mit den Methoden von Abschnitt 23.5.3 (auf Seite 178) die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ eindeutig erhalten werden, sofern die mittlere Anfangs-Inklination $\overline{i_0}$ sowie die mittlere Anfangs-Exzentrizität $\overline{e_0}$ bekannt sind. Damit wird ersichtlich, dass mit Hilfe der Reproduzierbarkeit einer Sub-Satellitenbahn ausschließlich mittlere Anfangs-Bahnparameter ausgewählt werden können. Dies muss bei der Berechnung einer Satelliten-Bahnakquisition sowie für eine eventuell nötige Bahnhaltung stets sorgfältig berücksichtigt werden.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination $\overline{i_0} = 70°$ geneigt sei, soll nach einer Repetitionsdauer von etwa K = 17 Tagen und nach N_d = 250 drakonitischen Umläufen wieder eine reproduzierbare Bodenspur haben. Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt nach Formel (23.305) $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -24°.480$, was nach Ab-

schnitt 23.5.3 auf die mittlere Anfangs-Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7024.517\ \text{km}$ und die mittlere auf den mittleren Äquator bezogene Bahnhöhe $\bar{H} = \bar{a}_0 - R_E = 646.362\ \text{km}$ führt. Die zugehörige mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt (nach Formel (23.161)) $\overline{P_d} = 5819.772\ s \triangleq 1^d.616603.$ Die Reproduktionsdauer beträgt nach Formel (23.306) $T_d = 16^d 20^h 9^m 3^s.0$.◄

BEISPIEL 2: In Tabelle 23-6 werden einige spur-reproduzierbare Erdsatellitenbahnen für die Bahnneigung i=57° zusammengestellt[1]. Weitere ausführliche Tabellen mit spur-reproduzierbaren Erdsatellitenbahnen finden sich in Anhang G (Band V). ◄

K	N_d	a*[km]*	H[km]	i	$\overline{P_d} / d$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	$\overline{\Delta\lambda_0}$
1	16	6582.776	205	57°.000	16.259675	–22°.500	–22°.500	–22°.500
4	63	6654.415	276	57°.000	15.997219	–22°.857	–5°.714	–5°.714
3	47	6678.704	301	57°.000	15.910497	–22°.979	–7°.660	–7°.660
2	31	6727.913	350	57°.000	15.736195	–23°.226	–11°.613	–11°.613
3	46	6777.985	400	57°.000	15.562879	–23°.478	–15°.652	–7°.826
4	61	6803.353	425	57°.000	15.475090	–23°.607	–17°.705	–5°.903
1	15	6880.822	503	57°.000	15.214395	–24°.000	–24°.000	–24°.000
4	59	6960.411	582	57°.000	14.954099	–24°.407	–6°.102	–6°.102
3	44	6987.429	609	57°.000	14.867420	–24°.545	–8°.182	–8°.182
2	29	7042.220	664	57°.000	14.694192	–24°.828	–12°.414	–12°.414
3	43	7098.043	720	57°.000	14.521131	–25°.116	–16°.744	–6°.279
4	57	7126.352	748	57°.000	14.434663	–25°.263	–18°.947	–6°.316
1	14	7212.919	835	57°.000	14.175503	–25°.714	–25°.714	–25°.714
4	55	7302.039	924	57°.000	13.916703	–26°.182	–6°.545	–6°.545
3	41	7332.335	954	57°.000	13.830514	–26°.341	–8°.780	–8°.780
2	27	7393.840	1016	57°.000	13.658251	–26°.667	–13°.333	–13°.333

Tabelle 23-6**:** Spur-reproduzierbare kreisförmige Bahnen für die Inklination *i* = 57° bis zu 1000 km Bahnhöhe. *K* Anzahl der Knotenumläufe, N_d Anzahl der drakonitischen Umläufe, *H* – mittlere Bahnhöhe bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde, $\overline{P_d} / d$ *-Anzahl der mitt*leren drakonitischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag, $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ -mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ -mittlere Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf, $\overline{\Delta\lambda_0}$ -kleinstes mögliches Intervall einer Knotenlängenverschiebung pro Reproduktionszyklus (aus Formel (23.307)).

[1] DLR GSOC TN 95-03

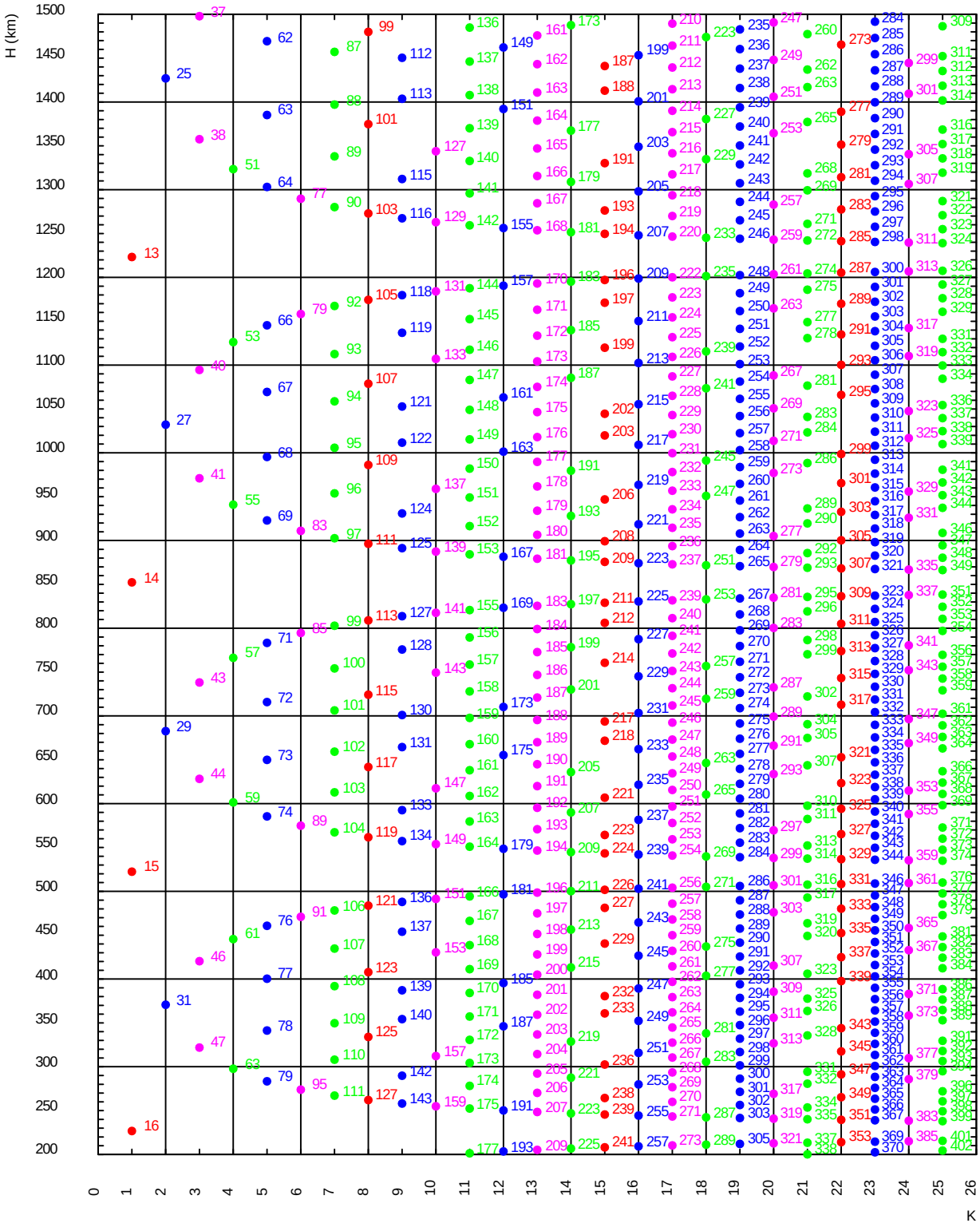


Bild 23-29: Übersicht über alle kreisförmigen spurreproduzierbaren Erdsatellitenbahnen unter der Neigung i = 70°, im Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1500\,\text{km}$ und im Bereich 1 bis 25 Knotenumläufe

BEISPIEL 3: Ein typisches Beispiel für die Verteilung spurreproduzierbarer Bahnen ist in Bild 23-29 dargestellt. Gegeben sind kreisförmige Bahnen unter der Inklination i=70°. Im Bild sind die nach den Bahnhöhen geordneten Bahnen über der Anzahl *K* der Knotenumläufe durch ihren Ort im Diagramm gekennzeichnet. Die Zahlen an diesen Punkten geben die Anzahl N_d der je für die Reproduzierbarkeit benötigten drakonitischen Umläufe an.

Die Anzahl möglicher reproduzierbarer Bahnen ist für die Anzahl der Knotenumläufe sehr unterschiedlich, was eine Folge der Kommensurabilität unter verschiedenen Zahlenpaaren (K, N_d) ist. Die Bahnen mit K=1 werden als „Integer Bahnen" bezeichnet. Die Bahnen mit K=2 befinden sich genau auf Lücke zwischen den Integer Bahnen. Ihre Gesamtanzahl entspricht der Anzahl der Integer Bahnen. Für K=3 und K=6 gibt es dieselbe Anzahl von möglichen reproduzierbaren Bahnen, nämlich genau doppelt so viele wie integer Bahnen. Demgegenüber gibt es genau doppelt so viele Bahnen für K=5, K=8 und K=10. Dicht besetzt sind nur Bahnen, für die K eine Primzahl ist: K=5, K=7, K=11, K=13, K=17, K=19, K=23 usw.. Diese Überlegungen zeigen, dass bei der Planung von reproduzierbaren Bahnen die Berücksichtigung der Zahlenverhältnisse eine wichtige Rolle spielt.

Man beachte, dass in diesem Bild ALLE kreisförmigen spurreproduzierbaren Bahnen mit der Bahninklination i=70° enthalten sind, die im Höhenintervall $200\,\text{km} \le H \le 1500\,\text{km}$ vorkommen und die eine Knotenumlaufzahl bis zu 25 Umläufen haben können. ◄

23.9.3 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenrestverschiebung

Vergleich der Formeln (23.305) und (23.299) erlaubt folgende Aussage:

- *Eine Satellitenbahn hat nach K Knotenumläufen und N_d drakonitischen Satellitenumläufen genau dann eine reproduzierbare Bodenspur, wenn ihre Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$ identisch verschwindet.*

Die Kenntnis der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K_0}}$ mit $K_0 < K$, wenn *K* der Reproduktionszyklus einer spurreproduzierbaren Satellitenbahn ist, ist für die Bahnauslegung von Beobachtungssatelliten von besonderer Bedeutung. Dies trifft insbesondere für Überdeckungsanalysen zu, wenn für bestimmte Projekte eine bestimmte Überdeckungsfolge ausgewählter Gebiete auf der Erdoberfläche gewünscht wird[1]. Ein Beispiel für derartige Untersuchungen ist eine Mehrpass-Interferometrie, die mit einem Sensor an Bord des Satelliten durchgeführt werden soll und eine globale Überdeckung erzielen soll.

Ebenfalls im Fall von Reproduzierbarkeit kann die kleinste mögliche Knotenlängenrestverschiebung während eines Reproduktionszyklus durch Betrachtung des Bezugsintervalls $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ aus der Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_0} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{K} \tag{23.307}$$

[1] Untersuchungen des Überdeckungsverhaltens von optischen und oder scannenden Sensoren über der kugelförmigen Erdoberfläche siehe in Kapitel 34 , über einem Rotationsellipsoid in Abschnitt 38.4.3 (Band V)

berechnet werden. Diese Formel setzt voraus, dass die als Referenzintervall angesehene Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf während des Reproduktionszyklus von *K* Knotenumläufen in genau *K* gleichlange Teilintervalle gestückelt wird. Da je nach Bahnelementen nicht davon ausgegangen werden kann, dass diese Teilintervalle immer dieselbe Länge haben, müssen detaillierte Untersuchungen der Folge der Knotenlängenrestverschiebung auch im Fall von reproduzierbaren Bahnen durchgeführt werden.

Im Folgenden wird ein typisches Beispiel für die unterschiedliche Folge der Knotenlängenrestverschiebung während eines Reproduktionszyklus behandelt.

BEISPIEL 1: Verlangt seien kreisförmige Bahnen mit der Bahnneigung i=70°, die einen Reproduktionszyklus von K=7 Tagen haben sollen. Je nach Wahl der Anzahl N_d der drakonitischen Umläufe pro Zyklus stellt sich ein unterschiedliches Verhalten der Abfolge der Knotenlängenrestverschiebung ein. Damit kann die Aufgabe untersucht werden, wann die Verschiebung der Bahnebene in westlicher Richtung erfolgen soll: nach einem Tag, nach zwei Tagen usw.. In Bild 23-30 wird die Abfolge in Bezug auf das Referenzintervall $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ ergänzend zu den in Tabelle 23-1 berechneten Zahlenwerten veranschaulicht. Die Tabelle enthält die dem Zahlenpaar (K, N_d) zugeordnete Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf, die zugehörige große Bahnhalbachse nach Abschnitt 23.9.2, Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf nach Formel (23.298), sowie die kleinste mögliche Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_0}$. Außerdem ist die Reproduktionsdauer T_d berechnet, die von einem ganzen Tag abweicht, da die Bahn nicht sonnensynchron ist.

N_d	a[km]	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	$\overline{\Delta\lambda_0}$	T_d [d]
111	6640.552	-22°.702703	-3°.243243	-3°.243243	6.92425439
110	6681.551	-22°.909091	-6°.545454	-3°.272727	6.92545018
109	6723.161	-23°.119266	-9°.908257	-3°.302752	6.92663105
108	6765.401	-23°.33333	-13°.333334	-3°.333333	6.92779703
107	6808.286	-23°.551402	-16°.822430	-3°.364486	6.92894818
106	6851.831	-23°.773585	-20°.377358	-3°.396226	6.93008458

Tabelle 23-7: Charakteristika des Verhaltens des Knotens für einige nach 7 Knotenumläufen reproduzierbaren kreisförmigen Bahnen unter der Bahnneigung *i*=70°, für verschiedene Anzahlen N_d von drakonitischen Umläufen.

Die Bahn 7:111 liefert eine Verschiebung nach Westen von Tag zu Tag. Dagegen liefert die Bahn 7:106 eine entsprechende Verschiebung von Tag zu Tag nach Osten. Die Zwischenbahnen liefern Überdeckungen auf Lücke, die erst im Laufe des Reproduktionszyklus geschlossen werden. Damit können unterschiedliche Anforderungen an eine Überdeckungsfolge erfüllt werden. Die Bahnen 7:105 = 1:15 sowie 7:112=1:16 sind Integer Bahnen, mit denen somit eine Forderung nach vollständiger Überdeckung des Referenzintervalls und damit der gesamten Erdoberfläche nicht erfüllt werden kann. (vgl. auch in Bild 23-29).◄

Das letzte Beispiel legt nahe, die Überdeckungsfolge direkt anzugeben, also wie in der Beziehung (23.302) mit dem Verhältnis K_1/K_2 vorzugeben. In diesem Fall soll aber nach einem Knotenumlauf dieses Verhältnis zutreffen, d.h. nach $N_1 \le 16$ drakonitischen Umläufen. Die Zahl K_2 definiert dann den Reproduktionszyklus $K = K_2$. Die entsprechende Knotenlängenverschiebung errechnet sich dann statt (23.303) aus der Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{K_2 \cdot 360°}{K_2 \cdot N_1 - K_1} \quad . \tag{23.308}$$

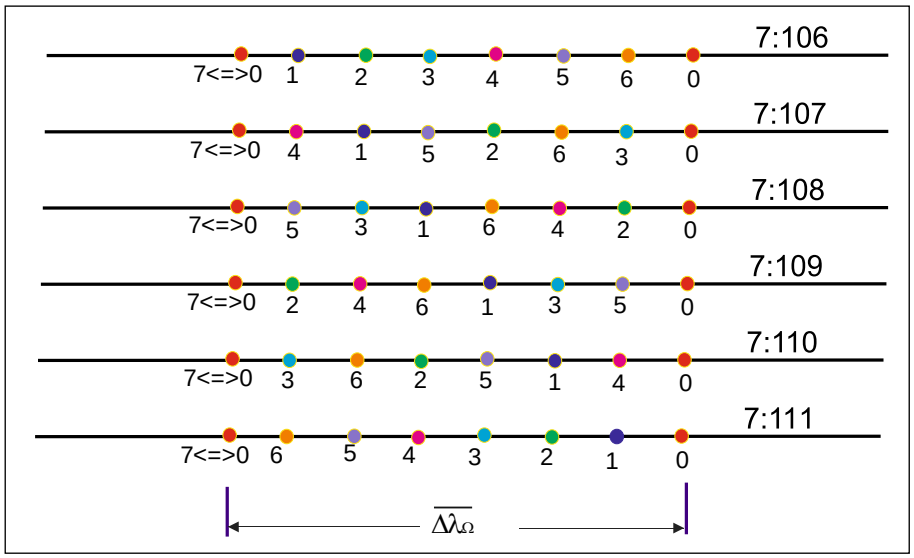


Bild 23-30: Die Anordnung der Knotenlängenrestverschiebung für einige nach 7 Tagen reproduzierbare kreisförmige Bahnen unter der Bahnneigung 70°

BEISPIEL 2: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination i=70°. Während des ersten Knotenumlaufs soll der Satellit N_1=16 drakonitische Umläufe ausführen. Die Knotenlängenrestverschiebung soll dem Verhältnis $K_1 / K_2 = 2:7$ unterliegen. Dies führt auf die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.909091$. Der Reproduktionszyklus umfasst $K = K_2 = 7$ Knotenumläufe. Nach Formel (23.231) folgt für die Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Zyklus $N_d = 110$. Diese Ergebnisse stimmen mit den Werten in Beispiel 1 überein.◀

BEISPIEL 3: Eine kreisförmige Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination $\overline{i_0} = 100°$ geneigt sei, soll nach einer Repetitionsdauer von etwa K=28 Tagen und nach N_d =415 drakonitischen Umläufen wieder eine reproduzierbare Bodenspur haben. Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -24°.289152$ sowie die Reproduktionsdauer $T_d = 28^d.06742972$. Das kleinste überdeckbare Intervall beträgt daher mit Formel (23.307) $\Delta\lambda_0 = -0°.86746971$. Die Knotenlängenrestverschiebung nach Formel (23.299) beträgt $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = -4°.33728$. Damit kann folgende Detailuntersuchung durchgeführt werden, welche das Auftreten dieses kleinsten möglichen Intervalls näher aufklären kann:

$$\Delta\lambda_1 = \ 6\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - \ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -1°.734528$$
$$\Delta\lambda_2 = 12\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 2\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -3°.469056 \triangleq 0°.868224$$
$$\Delta\lambda_3 = 17\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 3\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -0°.866304$$
$$\Delta\lambda_4 = 23\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 4\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -2°.600832 \triangleq 1°.736448$$
$$\Delta\lambda_5 = 28\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 5\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = 0°.0 \qquad .$$

Dies bedeutet, dass nach 12 Tagen das kleinste Intervall von Osten her, nach 17 Tagen von Westen her erreicht werden kann. ◄

BEISPIEL 4: Die Knotenlänge einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination 65° geneigt sei, werde nach einem Knotenumlauf um 5/11 der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf verschoben. Welche Kreisbahnhöhen sind möglich? Nach Formel (23.308) folgt die Knotenlängenverschiebung als Funktion der drakonitischen Umläufe N_1 pro erstem Knotenumlauf

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{3960°}{11N_1 - 5} \qquad .$$

Damit sind die in Tabelle 23-8 (auf Seite 209) gelisteten Bahnen möglich. ◄

23.9.4 Nachweis der Reproduzierbarkeit einer gegebenen Bahn

Für eine vorgegebene Bahn sei die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf bekannt. Auf numerischem Wege kann bestimmt werden, ob diese Bahn spurreproduzierbar ist. Dazu wird mit Formel (23.299)

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = N_d\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + K \cdot 360° \qquad \langle K = 1,2,3,\cdots \tag{23.309}$$

die Knotenlängenrestverschiebung durch Vorgabe der Knotenumlaufzahl *K* berechnet. Die zugehörige Anzahl N_d der drakonitischen Umläufe wird aus Formel (23.231)

$$N_d = \mathrm{int}\left[-\frac{K\ 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right] \tag{23.310}$$

erhalten. Mit wachsendem *K* wird dieser Vorgang so lange durchgeführt, bis die Knotenlängenrestverschiebung verschwindet, bzw. unter einer vorgegebenen Grenze ε_K liegt:

$$\left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \varepsilon_K \qquad . \tag{23.311}$$

Das zuletzt gefundene Zahlenpaar (K, N_d) definiert die Reproduzierbarkeit dieser Bahn. In letzterem Fall spricht man auch von „näherungsweiser Reproduzierbarkeit“. Um jedoch diesen Vorgang nicht beliebig auszudehnen, kann in jedem Schritt die Reproduktionsdauer $T_d = N_K\ \overline{P_d} / 86400\,[d]$ berechnet werden, wobei die drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}$ der gegebenen Bahn als bekannt angenommen werden kann. Falls T_d einen sinnvollen Wert übersteigt, kann der Vorgang abgebrochen und die Bahn als nicht reproduzierbar gedeutet werden.

Im Rahmen eine Satellitenbahnanalyse ist ein Jahr eine sinnvolle obere Grenze, die in der Praxis jedoch üblicherweise weit unterschritten wird. Dadurch kann der Einfluss möglicher „Störungen“ auf die Bahn berücksichtigt werden, welche die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn ohne Bahnkorrektur über längere Zeiträume ohnehin einschränken.

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine Bahn mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} =$ -25°.524320. Mit einer Genauigkeit von etwa 20“ für die Berechnung der geographischen Länge ergibt sich eine Reproduzierbarkeit nach K=2169 Knotenumläufen und N_d=30592 drakonitischen Umläufen. Das entsprechende kleinste Knotenlängenintervall ergibt sich zu $\overline{\Delta\lambda_0} = -0°.011768$. Dieser Fall dürfte allerdings in der Praxis keine Rolle spielen. ◄

N_1	N_d	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{P_d}\,[\mathrm{s}]$	$\bar{a}_0\,[\mathrm{km}]$	$\bar{H}\,[\mathrm{km}]$
16	171	-23°.157895	5489.577	6724.045	345.908
15	160	-24°.750000	5875.235	7035.562	657.425
14	149	-26°.577181	6317.033	7384.157	1006.020
13	138	-28°.695652	6828.421	7777.660	1399.523
12	127	-31°.181102	7427.513	8226.353	1848.216
11	116	-34°.137931	8139.292	8744.041	2365.904
10	105	-37°.714286	8999.213	9349.745	2971.608
9	94	-42°.127660	10059.325	10070.506	3692.369
8	83	-47°.710843	11399.270	10946.242	4568.105
7	72	-55°.000000	13147.367	12038.734	5660.597
6	61	-64°.918033	15524.493	13449.539	7071.402
5	50	-79°.200000	18945.907	15359.595	8981.458
4	39	-101°.538462	24295.377	18129.750	11751.613
3	28	-141°.428571	33845.478	22614.263	16236.126
2	17	-232°.941176	55750.823	31541.914	25163.777
1	6	-660°.000000	157966.912	63159.022	56780.885

Tabelle 23-8: Alle spurreproduzierbaren kreisförmigen Erdsatellitenbahnen mit der Bahnneigung i=65° und dem Knotenverhältnis $K_1 : K_2 = 5:11$ ◄

BEISPIEL 2: Ist die Kreisbahn mit der mittleren Bahnhöhe $\bar{H} = 796.211$ km und der Bahnneigung $\bar{i}_0 = 62°$ in der Subsatellitenbahn reproduzierbar? Mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7174.348$ km hat die Bahn mit Formel (23.161) oder (23.162) die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 6051.033$ s und mit den Formeln (23.224) und (23.227) die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°.454545$. Damit ergeben sich über die Ent-

wicklung der Knotenlängenrestverschiebung pro drakonitischem Umlauf die in Tabelle 23-9 aufgezeichneten Werte. Als Ergebnis kann geschlossen werden, dass eine Reproduzierbarkeit nach 7 Knotenumläufen (ungefähr 7 Tagen, genau $6^d\,22^h\,24^m\,12^s.267$) bzw. 99 drakonitischen Umläufen zu erwarten ist. Die Genauigkeit liegt bei etwa $0''.16$ in der Knotenlänge. ◄

K	N_d	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$
0	1	-25°.454545
1	15	-21°.818175
2	29	-18°.181805
3	43	-14°.545435
4	57	-10°.909065
5	71	-7°.272695
6	85	-3°.636325
7	99	-0°.000045

Tabelle 23-9: Die Entwicklung der Knotenlängenrestverschiebung der kreisförmigen Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H=796.211 km und der Neigung i=68°

23.9.5 Subzyklen

Für manche Beobachtungsaufgaben wird eine kleine Veränderung einer Bahn benötigt, wodurch eine andere Überdeckungsfolge oder Größe des Überdeckungsintervalls erreicht werden kann. Das Verhältnis der Zahlen $(K:N_d)$ wird nur wenig geändert, so dass die wesentlichen Bahnelemente Halbachse *a* und Inklination *i* kaum geändert werden. Die Reproduzierbarkeit der Bahn kann jedoch beträchtlich modifiziert werden. Entscheidend für die Auswahl eines Subzyklus ist die auf diese Weise erreichbare kleinste Knotenlängenverschiebung.

BEISPIEL 1: Im folgenden Bild 23-30 wird die Abhängigkeit der mittleren großen Bahnhalbachse von der mittleren Inklination kreisförmiger Bahnen für einige Reproduktionszyklen dargestellt. Gewählt wurde hier der Zyklus K=7, N_d=104 mit den Subzyklen K=35, N_d=512 sowie K=203, N_d=3019.

Die Relationen sind:

104:7=14.857142857, 512:35=14.628571429, 3019:203=14.87192118

Zu erkennen ist der große Einfluss einer Variation der Bahninklination auf die Bahnhalbachse. Entsprechende Einflüsse sind auch bei einer Variation der Exzentrizität zu erwarten. Als Konsequenz muss berücksichtigt werden, dass bei einem Manöver zur Variation eines dieser mittleren Bahnelemente auch mindestens eines der anderen Elemente durch ein gekoppeltes Manöver variiert werden muss um die gewünschte Reproduzierbarkeit erreichen zu können. ◄

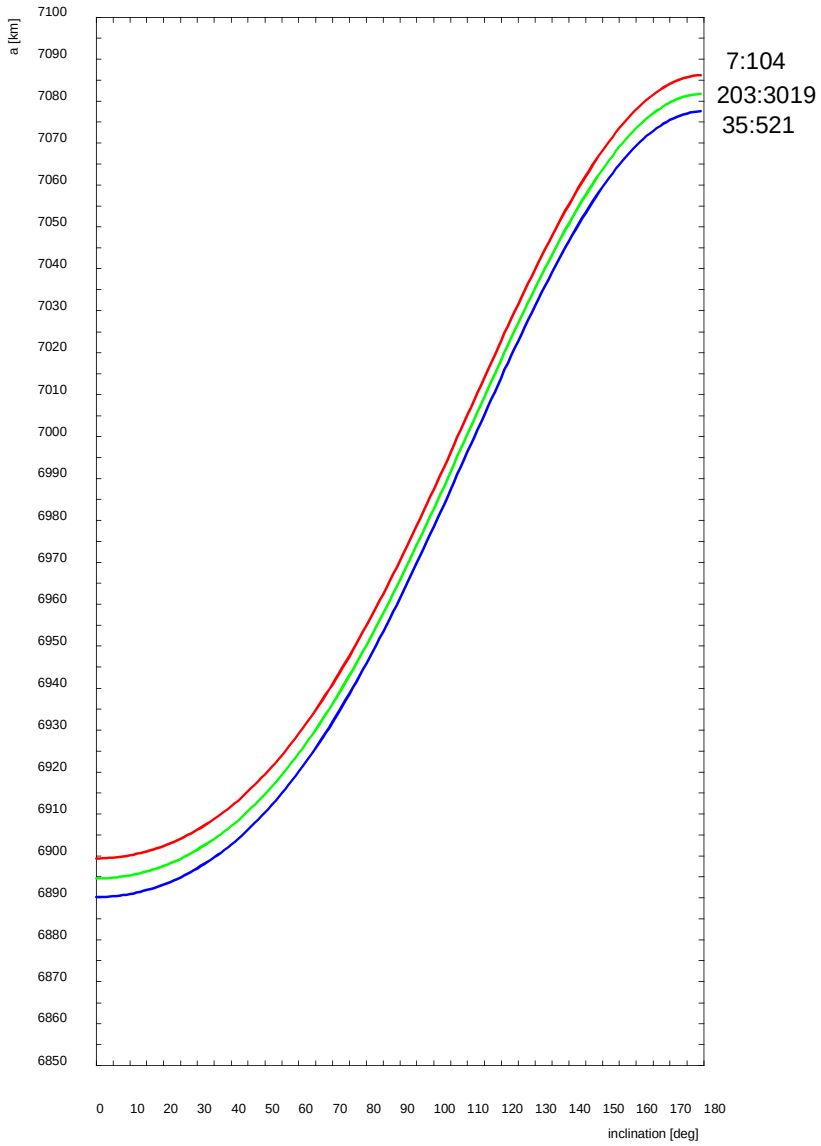


Bild 23-31: Verlauf der Abhängigkeit der Bahnhalbachse von der Inklination aller kreisförmigen Bahnen, die im Verhältnis K:N_d=7:104 reproduzierbar sind und für zwei Subzyklen

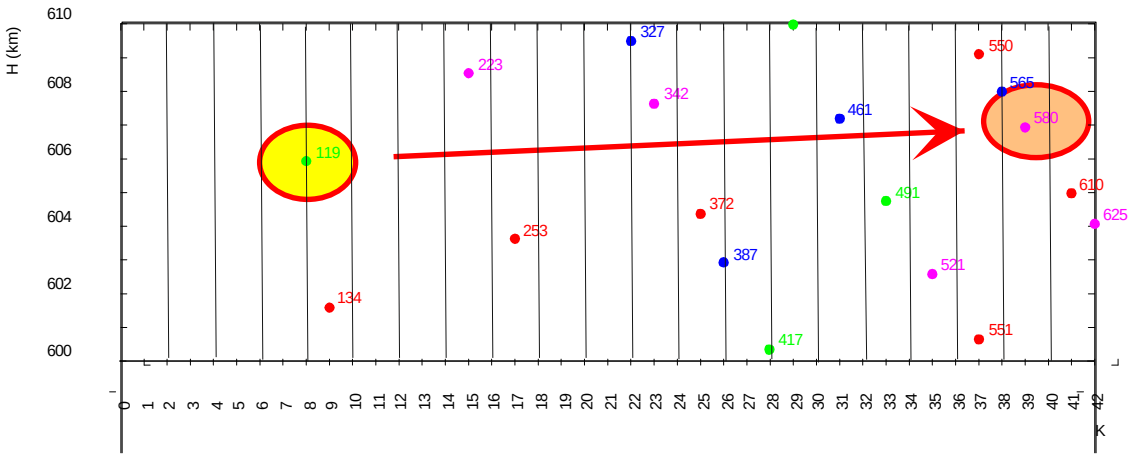


Bild 23-32: Suche nach einem geeigneten Subzyklus der kreisförmigen unter i=97°.8 geneigten 8:119 Bahn

Parameter	Basis Bahn	Subzyklus
Reproduzierbarkeit K:N_d	8:119	39:580
Reproduktionsverhältnis N_d:K	14.8750000	14.8717949
Große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$	6978.044 km	6979.049 km
Gemittelte Bahnhöhe $\tilde{H}$	605.916 km	606.934 km
Exzentrizität $\bar{e}_0$	0.0	0.0
Inklination $\bar{i}_0$	97°.811304	97°.815257
Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$	t.b.d.	t.b.d.
Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0$	(90°)	(90°)
Mittlere Epocheanomalie $\overline{M_{00}}$	t.b.d.	t.b.d.
Lokalzeit im aufsteigenden Knoten	t.b.d.	t.b.d.
Drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}$	96.80672 min	96.82759 min
Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Satellitenumlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$	-24°.201681 / $\overline{P_d}$	-24°.2069 / $\overline{P_d}$
Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	-3°.02521	-3°.1034
Kleinstes mögliches Verschiebungsintervall $\overline{\Delta\lambda_0}$	-3°.02521	-0°.6207

Tabelle 23-10: Mittlere *Kepler*sche Bahnelemente für eine im Verhältnis 8:119 reproduzierbare Basisbahn und für eine Bahn im Subzyklus 39:580 mit erheblich verfeinerter kleinster Knotenlängenverschiebung[1].

BEISPIEL 2: In einer Studie zur aktiven Beobachtung mit einem SAR Sensor[2] wird zunächst gefordert, dass eine interferometrische Beobachtung die gesamte Erdoberfläche in 8 Tagen überdeckt werden kann. Um von Knotenumlauf zum nächsten Knotenumlauf Überlappung der Beobachtungen zu erreichen, sind 119 drakonitische Umläufe pro Reproduktionszyklus erforderlich. Siehe die entsprechenden Bahndaten der Basis-Bahn in Tabelle 23-10. Die erreichbare kleinste Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_0} = -3°.02521$. In einem zweiten Projektabschnitt soll stereoskopische Beobachtung ermöglicht werden, wozu eine sehr enge

[1] Die hier betrachtete Bahn ist eine sonnensynchrone Bahn. Daher ist die Bahninklination der beiden Bahnen unterschiedlich.

[2] JOCHIM, E. F. et al. [2005]

Knotenabfolge benötigt wird[1]. Der Subzyklus 39:580 erlaubt das kleinste Knotenlängenintervall $\overline{\Delta\lambda_0} = -0°.6207$, womit die Beobachtungsbedingungen erfüllt werden können.

Wenn eine geeignete Übersicht über alle möglichen reproduzierbaren Bahnen wie in Bild 23-29 (auf Seite 204) zur Verfügung steht, kann wie in Bild 23-32 demonstriert wird eine vereinfachte Suche nach einem geeigneten Subzyklus gestartet werden. Das Bild zeigt, dass ein Subzyklus mit wenig abweichender großer Halbachse gefunden werden kann, weshalb nur ein wenig aufwendiges Bahnmanöver zum Übergang auf die Subzyklusbahn erforderlich wird.

In Bild 23-33 (auf Seite 213) wird die Überdeckungsfolge für die beiden reproduzierbaren kreisförmigen Bahnen demonstriert. Man beachte, dass die (mittlere) Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ in beiden Bahnen etwas unterschiedlich lang ist. Der Unterschied der Knotenlängenrestverschiebung in beiden Bahnen ist wie gewünscht beträchtlich.◀

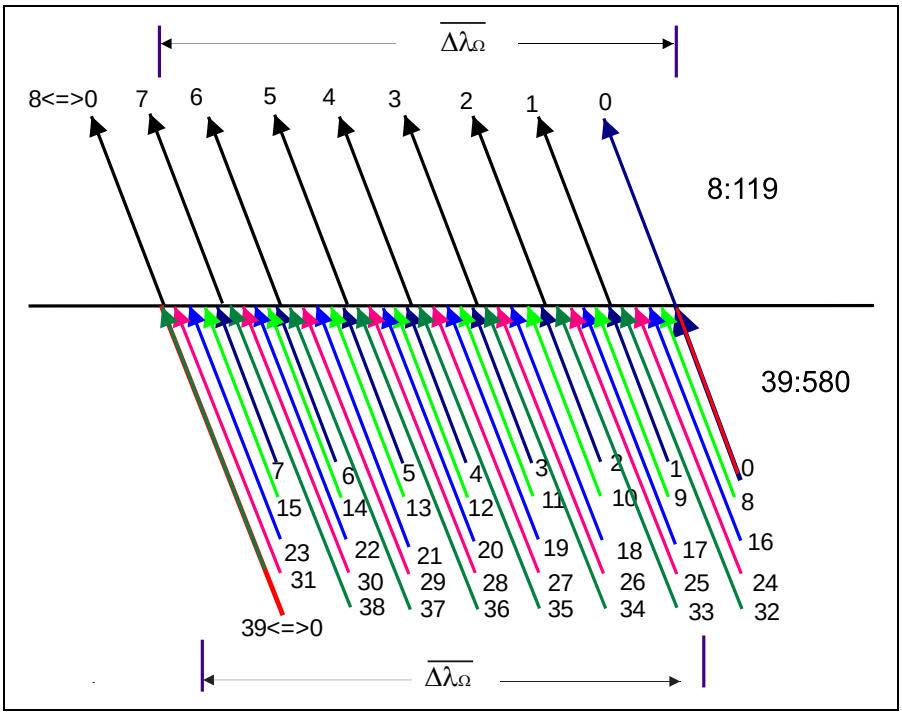


Bild 23-33: Veranschaulichung der Knotenlängenabfolge für die beiden Bahnen 8:119 und 39:580

Zusammenfassende allgemeine Aussagen zur Reproduzierbarkeit von Satellitenbahnen:

- *Die Repetitionsdauern reproduzierbarer Erdsatellitenbahnen sind nahezu ganze Tage.*
- *Reproduzierbare Satellitenbahnen sind eindeutig aus der Repetitionsdauer und der zugehörigen Anzahl der mittleren drakonitischen Umläufe bei gegebener Exzentrizität und Inklination bestimmt.*

[1] Es muss klar sein, dass eine derartige Knotenlängenabfolge nicht in aufeinanderfolgenden Umläufen, sondern systematisch nur während des gesamten Repetitionszyklus gefunden werden kann

- *Das Verhältnis von Knotenlängenrestverschiebung und Knotenlängenverschiebung erlaubt bei bekannter Exzentrizität und Inklination eine nur mehrdeutige Bahnfestlegung.*

23.9.6 Die Längen auf - und absteigender Knoten von reproduzierbaren Bahnen

Sei $\lambda_{\Omega 0}$ die momentane geographische Länge eines aufsteigenden Knotens einer in der Bodenspur reproduzierbaren Satellitenbahn. Der nächstfolgende absteigende Knoten nach einem halben drakonitischen Umlauf mit der Knotenlängenverschiebung $\Delta\lambda_\Omega$ hat die geographische Länge (vgl. Bild 23-34 auf Seite 214)

$$\lambda_{\mho 0} = \lambda_{\Omega 0} + 180° + \frac{\Delta\lambda_\Omega}{2} \quad . \tag{23.312}$$

Es wird im Folgenden untersucht, wie sich die Gesamtheit der geographischen Längen der mittleren auf - und absteigenden Knoten bei spur-reproduzierbaren Bahnen verhält.

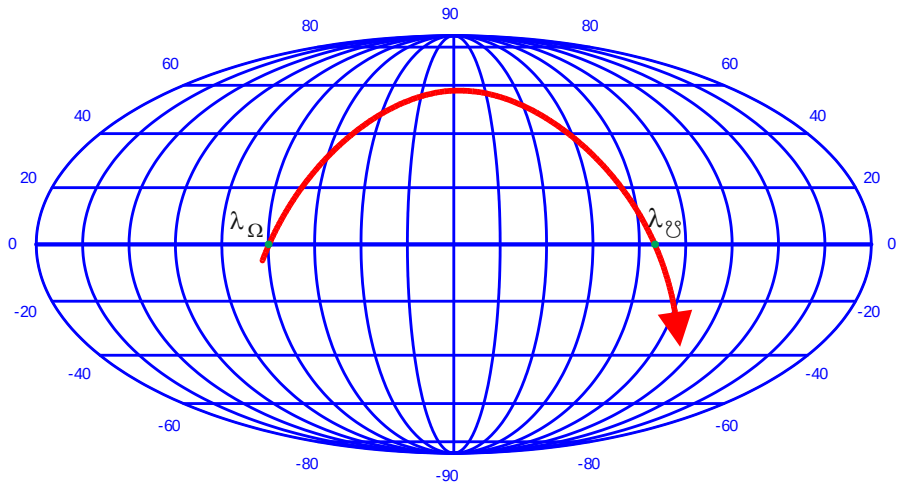


Bild 23-34**:** Die geographischen Längen von auf - und absteigenden Knoten einer auf die Oberfläche des zugehörigen Zentralkörpers projizierten Satellitenbahn. Beispiel: a=7528.155 km, e=0.0, i=57°.5, $\lambda_{\Omega 0} = 280°$, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -27°.38 / \overline{P_d}$, $\lambda_{\mho 0} = 61°.674$

Die Satellitenbahn habe bezüglich der Bodenspur den Reproduktionszyklus *K* und sei nach N_d drakonitischen Umläufen reproduzierbar. Die zugehörige mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt dann (nach Formel (23.305))

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{K}{N_d} \cdot 360° \quad . \tag{23.313}$$

Während eines Reproduktionszyklus *K* hat das mittlere kleinste Intervall zwischen zwei möglichen benachbarten aufsteigenden Knoten das geographische Längenintervall (siehe Formel (23.307))

$$\overline{\Delta\lambda_0} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{K} \quad , \tag{23.314}$$

sofern nur *K* und N_K nicht kommensurabel sind. Andernfalls muss das Verhältnis N_d / K so weit es geht gekürzt werden; das dann erhaltene neue *K* definiert die Länge des Intervalls $\overline{\Delta\lambda_0}$. Sei N_0 die Anzahl der (drakonitischen) Umläufe pro Knotenumlauf (das entspricht, wie vorher gezeigt wurde, in etwa einem Tag)[1]

$$N_0 \;=\; \mathrm{int}\left(\frac{N_d}{K}\right) \quad , \quad N_0 = 1, 2, 3, \ldots, 16 \quad . \tag{23.315}$$

Die Gesamtanzahl der drakonitischen Umläufe pro Reproduktionszyklus *K* kann dann in der Form

$$N_d = N_0 K + N_1 \quad , \quad \langle \text{mit} \;\; N_1 \in (1, 2, 3, \ldots, K-1) \tag{23.316}$$

dargestellt werden. Um jetzt einen mittleren aufsteigenden Knoten mit dem mittleren absteigenden Knoten der geographischen Länge

$$\overline{\lambda_{\mathfrak{V}}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} - 180° + \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{2} \tag{23.317}$$

in Verbindung zu bringen, wird der aufsteigende Knoten nach einem halben Knotenumlauf verglichen. Hierzu müssen grundsätzlich zwei Fälle betrachtet werden, je nachdem ob nach einem Knotenumlauf eine gerade oder eine ungerade Anzahl von drakonitischen Umläufen vollendet werden:

Fall (1) N_0 geradzahlig:

Setze $N_0 =: 2\, N_2 \,, \left(N_2 = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Der mittlere aufsteigende Knoten hat nach einem halben Knotenumlauf die geographische Länge

$$\overline{\lambda_{\Omega/2}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \quad ; \quad N_0 = 2\, N_2 \quad . \tag{23.318}$$

Die Differenz zwischen den geographischen Längen von auf - und absteigendem Knoten beträgt dann

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega/2}} - \overline{\lambda_{\mathfrak{V}}} \;=\; \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} + 180° - \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{2} \quad ,$$

mit den Beziehungen (23.313) und (23.316) auch

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} + \frac{360°}{2} - \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{2} = \frac{1}{2}\left[N_0 - 1 - \frac{N_d}{K}\right]\overline{\Delta\lambda_\Omega} \;,$$

somit schließlich

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; -\frac{1}{2}\left(\frac{N_1}{K} + 1\right)\overline{\Delta\lambda_\Omega} \quad ; \quad \langle \; N_0 = 2\, N_2 \quad . \tag{23.319}$$

---

[1] Die Funktion „int“ bezeichnet den ganzzahligen Anteil des folgenden Ausdrucks, 16 ist die Maximalzahl von N_0 für Erdsatelliten, der höchstens 16 mal pro Tag die Erde umfliegen kann.

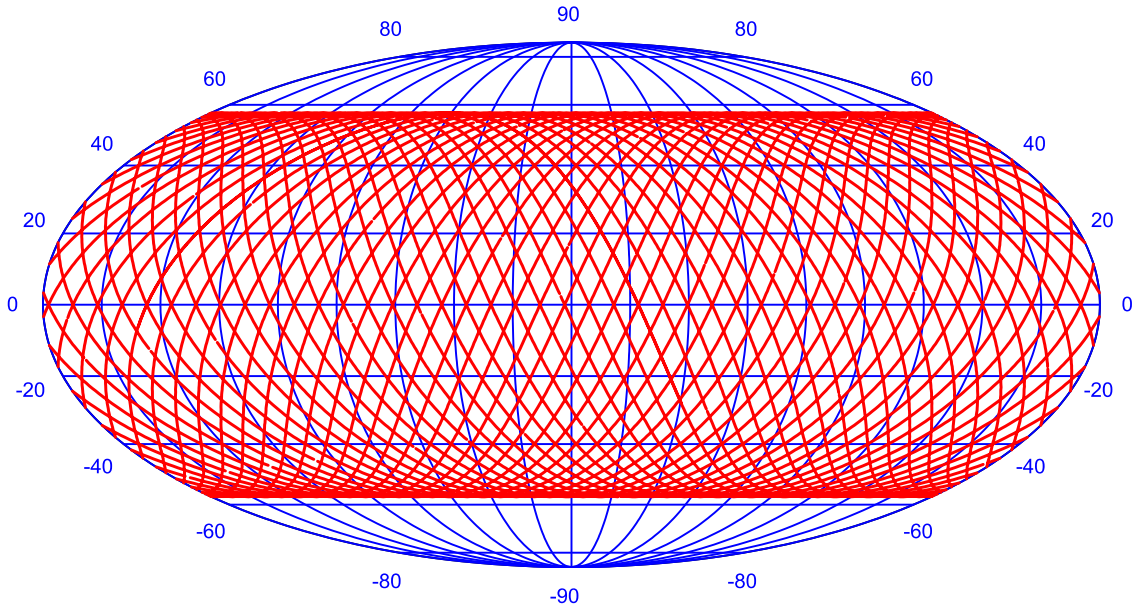


Bild 23-35**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten für die Bahn mit Reproduktionszyklus K = 3 nach N_d = 43 drakonitischen Umläufen, Inklination i = 57°, Kreisbahn

Fall (1.1) N_0 geradzahlig und K ungeradzahlig: Mit $K = 2\,K_1 - 1, (K_1 = 1,\ 2, 3, \ldots)$ wird mit Formel (23.314)

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= -\frac{1}{2}\,\frac{N_1 + 2\,K_1 - 1}{K}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{N_1 + 2\,K_1 - 1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \\ N_0 &= 2\,N_2 \quad , \quad K = 2\,K_1 - 1 \quad . \end{aligned} \tag{23.320}$$

Hier gibt es zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

Fall (1.1a) N_1 ungeradzahlig: Mit $N_1 = 2\,N_3 - 1,\ (N_3 = 1, 2, 3, \ldots)$ wird

$$\Delta\lambda = -(N_3 + K_1 - 1)\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 = 2\,N_2\,, \quad K = 2\,K_1 - 1, \quad N_1 = 2\,N_3 - 1 \quad . \tag{23.321}$$

Die Differenz $\Delta\lambda$ zwischen auf - und absteigendem Knoten ist ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten möglichen Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_0}$. Während eines Reproduktionszyklus werden alle aufsteigenden und alle absteigenden Knoten somit jeweils in einem Punkt zusammenfallen, jeder Punkt auf dem Äquator, der aufsteigender Knoten ist, wird während eines Zyklus auch einmal ein absteigender Knoten sein.

BEISPIEL: Seien $K = 3,\ N_0 = 14,\ N_1 = 1$ vorgegeben (vgl. Bild 23-35). Mit Formel (23.316) werden $N_d = 43$, $N_3 = 1,\ K_1 = 2$ und die (mittlere) Knotenlängenverschiebung beträgt mit Formel (23.313) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°.116279$. Mit der Inklination i =57° und für eine Kreisbahn (e = 0.0) liefert das in Abschnitt 23.5.3 ab Seite 178 hergeleitete Verfahren die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7098.043$ km , entsprechend die mittlere Kreisbahnhöhe $\overline{H}$ = 720 km. Bild 23-35 zeigt das Verhalten der Bodenspuren über der Erdoberfläche: auf - und absteigen-

de Knoten fallen jeweils zusammen. Es ist $\overline{\Delta\lambda_0} = -8°.372093$ und nach einem halben Knotenumlauf wird $\Delta\lambda = 33°.488372 \Leftrightarrow 33°.4883720 + \overline{\Delta\lambda_\Omega} = 8°.372093 = -\overline{\Delta\lambda_0}$.

Fall (1.1b) N_1 geradzahlig: Mit $N_1 = 2N_3$, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$) liefert die Beziehung (23.320) auf S. 216

$$\Delta\lambda = -\left(N_3 + K_1 + \frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \;;\; N_0 = 2N_2 \;,\; K = 2K_1 - 1 \;,\; N_1 = 2N_3 \quad . \tag{23.322}$$

Auf- und absteigende Knoten können niemals zusammenfallen, da ein absteigender Knoten stets genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten aufsteigenden Knoten zu liegen kommt.

BEISPIEL: Seien K = 3, N_0= 14, N_1= 2 vorgegeben (vgl. Bild 23-36). Mit Formel (23.316) werden N = 44, N_3= 1, K_1= 2 und die (mittlere) Knotenlängenverschiebung beträgt mit Formel (23.313) (auf Seite 214) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -24°.545454$. Mit der Inklination i = 57 und für eine Kreisbahn (e = 0.0) liefert Abschnitt 23.5.3 die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 6987.429\,\text{km}$, entsprechend die mittlere Kreisbahnhöhe $\bar{H} = 609\,\text{km}$. Bild 23-36 zeigt das Verhalten der Bodenspuren über einem äquatornahen Ausschnitt der Erdoberfläche: auf - und absteigende Knoten sind genau auf Lücke. Es ist $\overline{\Delta\lambda_0} = -8°.181818$ und nach einem halben Knotenumlauf wird $\Delta\lambda = -\frac{7}{2}\overline{\Delta\lambda_0} = 4°.090909$. ◄

Fall (1.2): Es seien N_0 =2 N_2 und K = 2 K_1 geradzahlig ($K_1 = 1, 2, 3, \ldots$). Dann liefert Formel (23.319) auf S. 215 mit Formel (23.314) auf S. 214

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{2}\frac{N_1 + 2K_1}{K}\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{N_1 + 2K_1}{2}\overline{\Delta\lambda_0} \;;\; N_0 = 2N_2 \;,\; K = 2K_1 \quad . \tag{23.323}$$

Auch hier gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall (1.2a) $N_1 = 2N_3$ geradzahlig, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$): In diesem Fall sind K und N_d kommensurabel. Es gilt mit der Bezeichnung $K_2 := K_1 N_0 + N_3$

$$\frac{K}{N_d} = \frac{2K_1}{2K_1 N_0 + 2N_3} = \frac{K_1}{K_1 N_0 + N_3} = \frac{\frac{K}{2}}{K_2} \quad . \tag{23.324}$$

Die Problemstellung wird auf den Reproduktionszyklus $K_1 = K/2$ zurückgeführt, während die Untersuchung wegen der kleinsten möglichen Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_0}$, die erreicht werden muss, wegen Formel (23.314) nur für den Zyklus K erfolgen darf. Dieser Fall ist also für die gegebene Aufgabenstellung nicht relevant.

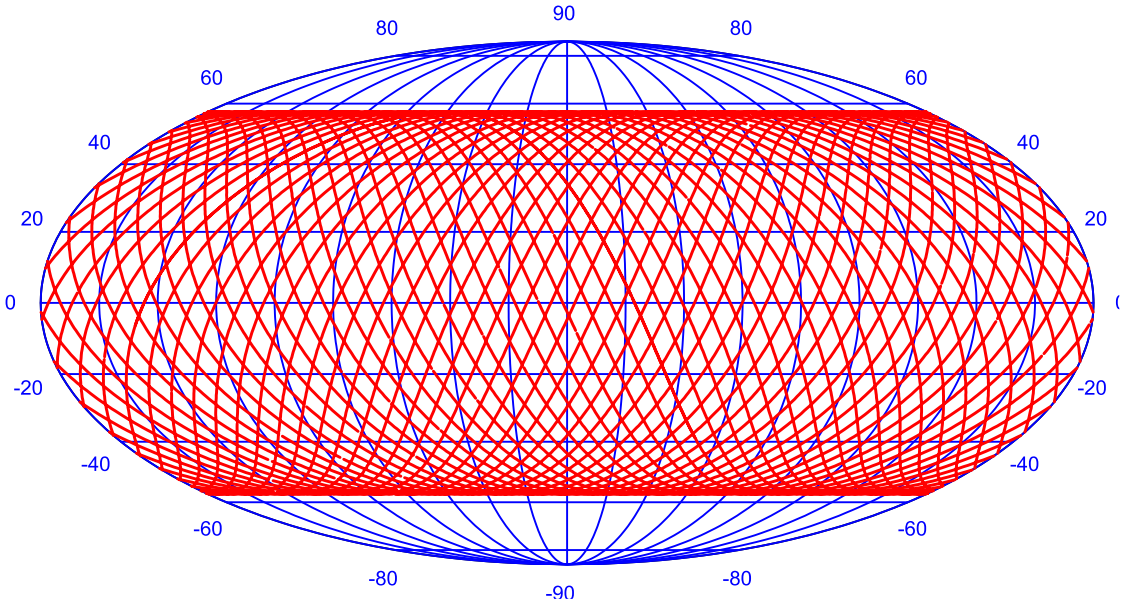


Bild 23-36: Auf- und absteigende Knoten auf Lücke für die Bahn mit Reproduktionszyklus $K = 3$ nach $N = 44$ drakonitischen Umläufen, Inklination $i = 57°$, Kreisbahn

Fall (1.2b) $N_1 = 2N_3 - 1$ ungeradzahlig, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$): Die Beziehung (23.323) auf Seite 217 liefert

$$\Delta\lambda \;=\; -\left(N_3 + K_1 - \frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2 \quad , \quad K \;=\; 2K_1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2N_3 - 1 \quad . \tag{23.325}$$

Auf- und absteigende Knoten fallen niemals zusammen, sondern sind stets um Vielfache von $\overline{\Delta\lambda_0}/2$ getrennt.

Fall (2) N_0 ungeradzahlig: $N_0 = 2N_2 - 1, \left(N_2 = 1, 2, 3, \ldots\right)$.

Der (mittlere) aufsteigende Knoten hat nach einem halben Knotenumlauf die geographische Länge

$$\overline{\lambda_\Omega} \;=\; \lambda_{\Omega 0} + \frac{N_0 + 1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2 - 1 \quad . \tag{23.326}$$

Die Differenz zwischen den geographischen Längen von auf - und absteigendem Knoten beträgt dann mit Gleichung (23.314) (auf Seite 214)

$$\Delta\lambda \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{N_1}{K}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \;=\; -\frac{1}{2}\,N_1\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2 - 1 \quad . \tag{23.327}$$

An dieser Gleichung ist bemerkenswert, dass die Zykluszahl K nicht mehr vorhanden ist, es muss jetzt also keine Unterscheidung gemacht werden, ob der Zyklus geradzahlig oder ungeradzahlig ist. An Unterscheidung bleibt daher:

Fall (2.1) N_1 ungeradzahlig. Mit $N_1 = 2N_3 - 1, \left(N_3 = 1, 2, 3, \ldots\right)$ wird

$$\Delta\lambda \;=\; -\left(N_3-\frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2-1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2N_3-1 \quad . \tag{23.328}$$

Auf- und absteigender Knoten fallen nicht zusammen, sondern sind um Vielfache von $\overline{\Delta\lambda_0}/2$ zueinander versetzt.

Fall (2.2) N_1 geradzahlig. Mit $N_1 = 2N_3, \left(N_3 = 1, 2, 3, \ldots\right)$ liefert die Beziehung (23.327) auf S. 218

$$\Delta\lambda \;=\; -N_3\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2-1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2N_3 \quad . \tag{23.329}$$

Auf- und absteigende Knoten fallen zusammen. Allerdings muss hier der Fall ausgeschlossen werden, dass der Zyklus geradzahlig ist: $K = 2K_1, \left(K_1 = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Dann gilt für das Verhältnis von Zykluszahl und Anzahl der drakonitischen Umläufe wie in dem Ausdruck (23.324)

$$\frac{K}{N_d} \;=\; \frac{K}{K\,N_0+N_1} \;=\; \frac{2K_1}{2K_1\left(2N_2-1\right)+2N_3} \;=\; \frac{K_1}{K_1\,N_0+N_3} \;=\; \frac{K_1}{K_2}$$

(mit $K_2 = K_1\,N_0 + N_3$). K und N_d sind also kommensurabel, der Fall scheidet wie Fall (1.2a) aus.

Die betrachteten Fälle sind in Tabelle 23-11 zusammengestellt.

Fall	K	N_0	N_1	Auf- und absteigende Knoten fallen zusammen
(1.1a)	$2K_1-1$	$2N_2$	$2N_3-1$	ja
(1.1b)	$2K_1-1$	$2N_2$	$2N_3$	nein
(1.2a)	$2K_1$	$2N_2$	$2N_3$	nicht relevant
(1.2b)	$2K_1$	$2N_2$	$2N_3-1$	nein
(2.1)	$2K_1-1$ oder $2K_1$	$2N_2-1$	$2N_3-1$	nein
(2.2a)	$2\,K_1 - 1$	$2N_2-1$	$2N_3$	ja
(2.2b)	$2K_1$	$2N_2-1$	$2N_3$	nicht relevant

Tabelle 23-11**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten spur-reproduzierbarer Bahnen

Zusammenfassung

- *Kreisförmige in der Bodenspur reproduzierbare Satellitenbahnen haben bei geradzahligem Reproduktionszyklus niemals zusammenfallende auf - und absteigende Knoten über dem rotierenden Zentralkörper. Die absteigenden Knoten befinden sich stets genau in der Mitte zwischen zwei aufsteigenden Knoten.*

- *Kreisförmige in der Bodenspur reproduzierbare Satellitenbahnen mit ungeradzahligem Reproduktionszyklus haben zusammenfallende auf - und absteigende Knoten über dem rotierenden Zentralkörper, wenn entweder die Anzahl N_0 der drakonitischen Umläufe pro Tag (genauer: pro Knotenumlauf) oder die Restzahl N_1 ungeradzahlig ist. Sonst sind die auf - und absteigenden Knoten auf Lücke zueinander angeordnet.*

23.10 Formstabile Bewegung

Die in der Literatur im Zusammenhang mit Beobachtungssatelliten bisweilen verwendeten sogenannten *eingefrorenen Bahnen* („Frozen Orbits“) sind ein Musterbeispiel dafür, wie elementare natürliche Eigenschaften von Satellitenbahnen für spezielle Anwendungen nutzbar gemacht werden können. Hier handelt es sich im Wesentlichen um Eigenschaften, die als Folge der Einwirkung der zonalen Harmonischen des Schwerefeldes des Zentralkörpers gedeutet werden können.

Die eingefrorenen Bahnen wurden von *Y. Kozai* [1959] entdeckt, der am Ende seiner Arbeit über die Integration der Bewegungsgleichungen erdnaher Satellitenbahnen den Fall sehr kleiner mittlerer Exzentrizitäten behandelte. *Kozai* fand im Fall von Erdsatelliten eine um das Argument des Perizentrums $\omega = 90°$ oszillierende langperiodische Bewegung des Perigäums. Für verschwindende mittlere Exzentrizitäten verschwindet diese langperiodische Bewegung: das gemittelte Perigäum wird für das Argument $\omega = 90°$ „eingefroren“. Variationen des Perigäums erfolgen dann ausschließlich im kurzperiodischen Bewegungsanteil. Die Bewegung über einem Rotationsellipsoid zeigt somit über einen drakonitischen Umlauf stets dasselbe Muster, die Bahnform ist pro drakonitischem Umlauf reproduzierbar. Sie kann deshalb in diesem Fall als *formstabil* bezeichnet werden.

Die Eigenschaft der Formstabilität kann im Fall von Beobachtungssatelliten genutzt werden: In jedem entsprechenden Bahnpunkt pro drakonitischem Umlauf herrschen im Wesentlichen dieselben körperzentrischen Beobachtungsbedingungen bezüglich der Oberfläche des Zentralkörpers. Der ozeanographische Beobachtungssatellit SEASAT A ist das erste bekannt gewordene Beispiel, für den expressis verbis eine „eingefrorene Bahn“ vorgeschlagen wurde[1]. Mittlerweile ist eine Flut von Veröffentlichungen zu weiteren Erdbeobachtungssatelliten und Marsbeobachtungs-Orbitern auf „eingefrorenen Bahnen“ aufgetaucht, die den Begriff der „eingefrorenen Bewegung“ nur unwesentlich zu vertiefen imstande waren. Lediglich in der Arbeit von *Coffey et.al.* [1994] wird eine systematische Untersuchung der eingefrorenen Bahnen als Bahnen auf Singularitäten um Gleichgewichtslagen untersucht. In diesem Zusammenhang bildet die kritische Inklination (für Inklinationen mit $\cos i = 1/\sqrt{5}$) eine wichtige Singularität[2].

Der Begriff *formstabile Bewegung* soll hier anstelle von „eingefrorene Bewegung“ verwendet werden, um auf die natürliche Eigenschaft dieser Bewegungsart im Rahmen der Grundformeln der Satellitenbahnmechanik hinzuweisen. Der Begriff ist eng mit der drakonitischen Bewegung gekoppelt, da er auf kreisnahe Bahnen von Beobachtungssatelliten eingeschränkt

---

1 CUTTING et al. [1977]. In dieser Arbeit taucht erstmals der Begriff „frozen orbit“ auf. Der Hinweis auf KOZAI, Y [1959] fehlt.

2 siehe hierzu auch in 'Orbit Design and Analysis for the Atmospheric and Environmental Research Satellite ATMOS', AAS / AIAA Astrodynamics Conference, Durango, Colorado, August, 19 - 22, 1991; AAS 91-363

ist, die im Wesentlichen im Rahmen der drakonitischen Bewegung untersucht werden können. Insbesondere reproduziert sich die Formstabilität exakt über einen drakonitischen Umlauf. Aus diesem Grund erfolgt die Behandlung der formstabilen Bewegung in diesem Kapitel. Der größere theoretische Zusammenhang der formstabilen Bewegung weist freilich über den Rahmen der drakonitischen Bewegung hinaus.

23.10.1 Notwendige Bedingung für eine formstabile Bewegung

In der Literatur finden sich verschiedene Wege zur Behandlung der formstabilen („eingefrorenen“) Bewegung. Auffallenderweise befindet sich darunter nicht die natürliche Herleitung aus den elementaren Ausdrücken für die *Kepler*elemente, wie sie etwa mutatis mutandis von *Y.Kozai* [1959] durchgeführt wurde.

Wir wollen die Herleitung mit der *Brouwer*schen [1959] Darstellung der *Kepler*elemente durchführen. Danach lassen sich die Elemente in jedem Zeitpunkt t zusammensetzen aus dem mittleren Wert zur Epoche t_0, dem säkularen, langperiodischen und kurzperiodischen Bewegungsanteil[1]. Für Exzentrizität und Argument des Perizentrums ist also

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}_0 + \dot{e}_s\,(t-t_0) + \delta e_l + \delta e_k \\ \omega &= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_l + \delta\omega_k \quad . \end{aligned} \tag{23.330}$$

Falls nur die Beschleunigungen durch die ersten zonalen Harmonischen J_2 , … , J_5 berücksichtigt werden, ist

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}_0 + \delta e_{lG} + \delta e_{kG} + \ldots \\ \omega &= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_{lG} + \delta\omega_{kG} + \ldots \end{aligned} \tag{23.331}$$

Der säkulare und langperiodische Anteil werde durch Vernachlässigung des kurzperiodischen Anteils (exakt: durch Mittelung über einen anomalistischen Umlauf) gebildet. Es mögen die folgenden Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned} e_l &:= \bar{e}_0 + \delta e_l \\ \omega_l &:= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_l \quad . \end{aligned} \tag{23.332}$$

Für kreisnahe Bahnen íst das Perizentrum einer Bahn im Allgemeinen nicht oder nur sehr ungenau bekannt. In einer drakonitischen Bewegung ist der Knoten klar definiert ist. So kann der 1. *Kepler*sche Vektor (er wird bekanntlich gelegentlich auch als „Exzentrizitätsvektor“ bezeichnet) im knotenbezogenen Bahnsystem

$$\mathbf{d} = \left(e\cos\omega, e\sin\omega, 0\right) \tag{23.333}$$

gegeben sein. Die Zerlegung in den säkular-langperiodischen und den kurzperiodischen Anteil liefert bei Bezug auf das Gravitationsfeld des Zentralkörpers

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= \left(e_l + \delta e_{kG}\right)\cos\left(\omega_l + \delta\omega_{kG}\right) + \ldots \\ e\sin\omega &= \left(e_l + \delta e_{kG}\right)\sin\left(\omega_l + \delta\omega_{kG}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{23.334}$$

Kann näherungsweise, wie bei Erdsatelliten der Fall,

---

[1] siehe in Abschnitt 20.3 (Band III)

$$\begin{aligned} \cos\delta\omega_{kG} &= O\left(J_2^2\right) \\ \sin\delta\omega_{kG} &= \delta\omega_{kG} + O\left(J_2^3\right) \\ \delta e_{kG}\,\delta\omega_{kG} &= O\left(J_2^4\right) \end{aligned} \tag{23.335}$$

angenommen werden, wird

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= e_l\cos\omega_l + \delta e_{kG}\cos\omega_l - e_l\,\delta\omega_{kG}\sin\omega_l + \ldots \\ e\sin\omega &= e_l\sin\omega_l + \delta e_{kG}\sin\omega_l + e_l\,\delta\omega_{kG}\cos\omega_l + \ldots \end{aligned} \tag{23.336}$$

mit den kurzperiodischen Anteilen

$$\begin{aligned} \left(e\cos\omega\right)_{kG} &= \delta e_{kG}\cos\omega_l - e_l\,\delta\omega_{kG}\sin\omega_l + \ldots \\ \left(e\sin\omega\right)_{kG} &= \delta e_{kG}\sin\omega_l + e_l\,\delta\omega_{kG}\cos\omega_l + \ldots \end{aligned} \tag{23.337}$$

Es bleibt (entsprechend Formel (23.332), im Erdschwerefeld gilt $\bar{e} \equiv \bar{e}_0$) mit

$$\begin{aligned} e_{lG} &= \bar{e} + \delta e_{lG} \\ \omega_{lG} &= \bar{\omega} + \delta\omega_{lG} \end{aligned} \tag{23.338}$$

und mit der Annahme

$$\begin{aligned} \cos\delta\omega_{lG} &= O\left(J_2^2\right) \\ \sin\delta\omega_{lG} &= \delta\omega_{lG} + O\left(J_2^3\right) \\ \delta e_{kG}\,\delta\omega_{lG} &= O\left(J_2^4\right) \end{aligned} \tag{23.339}$$

schließlich

$$\begin{aligned} e_{lG}\cos\omega_{lG} &= \bar{e}\cos\bar{\omega} + \delta e_{lG}\cos\bar{\omega} - \bar{e}\,\delta\omega_{lG}\sin\bar{\omega} + \ldots \\ e_{lG}\sin\omega_{lG} &= \bar{e}\sin\bar{\omega} + \delta e_{lG}\sin\bar{\omega} + \bar{e}\,\delta\omega_{lG}\cos\bar{\omega} + \ldots \end{aligned} \tag{23.340}$$

Im Fall mittlerer Kreisbahnen $\bar{e}_0 = \bar{e} \equiv 0$ lauten die langperiodischen durch die ersten 5 Harmonischen verursachten Variationen in Exzentrizität und Argument des Perigäums mit den Ausdrücken (20.23) und (20.33) (Abschnitt 20.2.2, Band III)

$$\begin{aligned} \delta e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega} - \\ &\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin\bar{\omega}+\ldots \quad , \end{aligned} \tag{23.341}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{e}\to 0}\left(\bar{e}\,\delta\omega_{lG}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\cos\bar{\omega} - \\ &\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\cos\bar{\omega}+\ldots \quad . \end{aligned} \tag{23.342}$$

Diese Ausdrücke werden im System (23.340) eingesetzt und ergeben

$$
\begin{aligned}
e_{lG}\cos\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= 0 \\
e_{lG}\sin\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i} - \\
&\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]+\ldots
\end{aligned}
\tag{23.343}
$$

Dieses System ist etwa erfüllt, wenn $\sin\bar{i} = 0$, und es wird $e_l = 0$. Falls jedoch $\sin\bar{i} \neq 0$, wie im Zusammenhang mit der drakonitischen Bewegung gefordert, muss

$$
\begin{aligned}
\cos\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= 0 \\
\sin\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= \pm 1
\end{aligned}
\tag{23.344}
$$

gefordert werden. Dies führt mit den Formeln (23.343) **notwendig** auf die **konstante** gemittelte Exzentrizität

$$
\begin{aligned}
e_F = e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] = \Bigg| & -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i} - \\
& -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]+\ldots\Bigg| \quad ,
\end{aligned}
\tag{23.345}
$$

die gelegentlich salopp als „*eingefrorene Exzentrizität*“ bezeichnet wird.

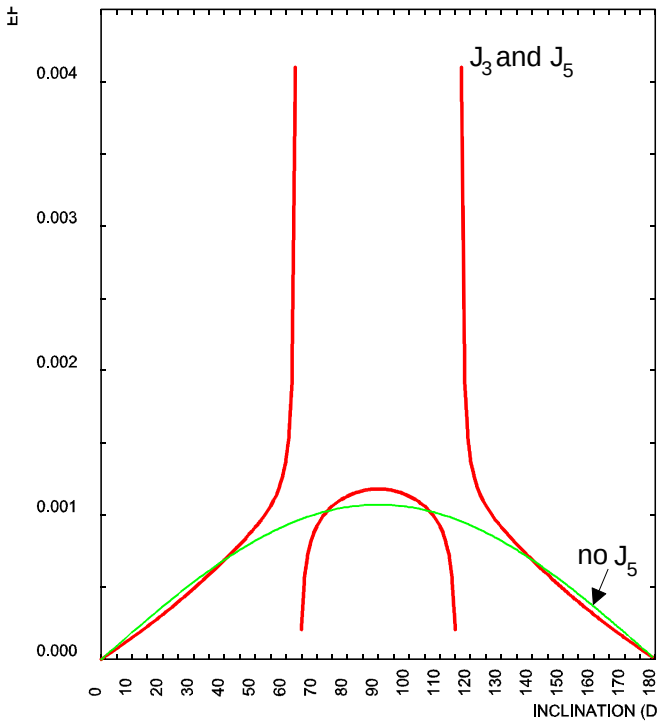


Bild 23-37: Gemittelte Exzentrizität einer formstabilen Bewegung in Abhängigkeit von der Inklination für die mittlere Bahnhalbachse $\bar{a}$ = 6978.140 km, für J_3 allein (durchgezogene Kurve) und unter Einschluss von J_5 (Kurve mit Polstellen).

Da für die Exzentrizität stets $e \geq 0$ gilt, bleiben für den gemittelten Anteil des Argumentes des Perizentrums, sofern $|J_3| > |J_i|, i = 5, 7, \ldots$,

$$\begin{aligned} J_3 &> 0 \quad \succ \quad \omega_{lG} = 90° \\ J_3 &< 0 \quad \succ \quad \omega_{lG} = 270° \quad , \end{aligned} \tag{23.346}$$

das gemittelte Perizentrum wird also für das Argument 90° oder 270° „eingefroren“. Das mittlere Argument des Perizentrums ist in diesem Fall (da $\bar{e} \equiv 0$) nicht erklärt, auch wenn es über $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s \, (t - t_0)$, da $\dot{\omega}_s$ bekannt ist, berechnet werden kann. Diese Berechnung ist jedoch sinnlos.

Die hier gewählte Herleitung zeigt, dass die so genannte eingefrorene Bahn nichts anderes als die natürliche Interpretation der mittleren Kreisbahn ist.

BEISPIEL: Gegeben sei ein Erdsatellit auf mittlerer kreisförmiger Bahn ($\bar{e} = 0$) mit der mittleren Bahnhalbachse $\bar{a}$ = 7253.134 km und der mittleren Inklination $\bar{i}$ = 98°.498. Es werden folgenden Konstanten verwendet: $J_2 = 1.082628 \cdot 10^{-3}$, $J_3 = -2.538 \cdot 10^{-6}$, $J_5 = -0.246 \cdot 10^{-6}$. Die gemittelte („eingefrorene“) Exzentrizität beträgt mit Formel (23.345) $e_F = e_{lG}\,[\bar{e}=0]$ = 0.001094938 + $O(J_7)$. Das gemittelte Perigäum wird für das Argument ω_{lG} = 90° eingefroren. ◀

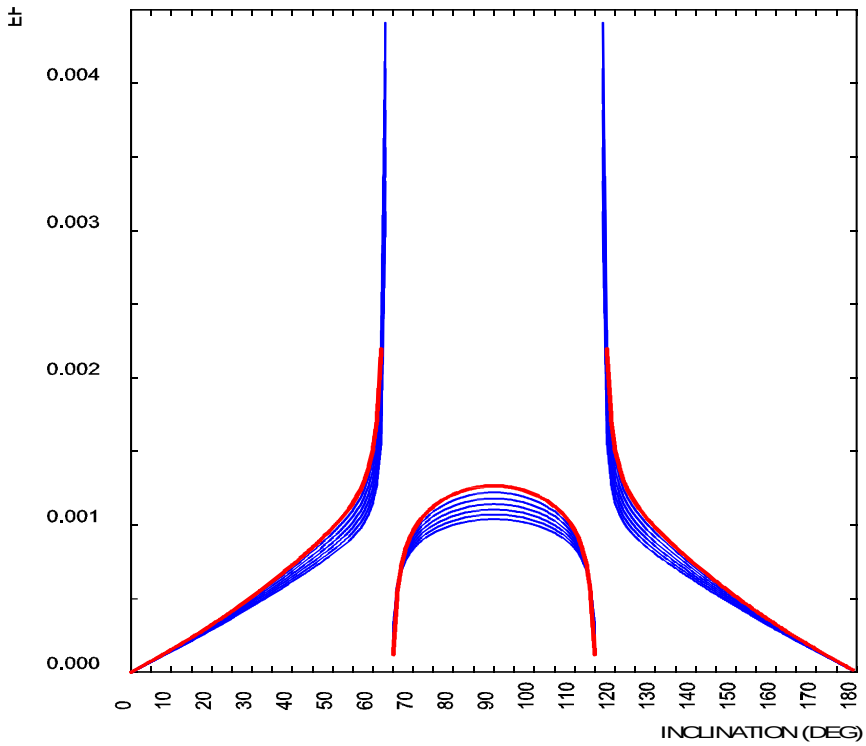


Bild 23-38 : Variation der eingefrorenen Exzentrizität über der Inklination für die großen Bahnhalbachsen *a* = 6578 km (äußere bzw. obere Kurve), 6778 km, 6978 km, 7178 km, 7378 km, 7578 km, 7778 km

Bild 23-37 zeigt die gemittelte Exzentrizität einer im Mittel kreisförmigen Bahn für die mittlere Halbachse $\bar{a}$ = 6978.140 km über die mittlere Inklination berechnet mit Formel (23.345). Die untere Kurve ist nur mit dem ersten Teil der Formel unter Einschluss des J_3 - Anteils berechnet, die Kurve mit den beiden Polstellen an den kritischen Neigungen enthält die ganze Formel unter Einschluss des J_5 - Anteils. Man sieht, dass in der Umgebung der kritischen Neigungen, also etwa im Bereich $60° < \bar{i} < 70°$ und $110° < \bar{i} < 120°$, die obige Formel keine brauchbaren Ergebnisse liefern kann. Dies gilt für jede Bahnhalbachse. Bild 23-38 zeigt den Verlauf der eingefrorenen Exzentrizität über der Inklination für verschiedene große Halbachsen erdnaher Bahnen. Der Wert der eingefrorenen Exzentrizität nimmt mit zunehmender Bahnhöhe nur sehr geringfügig ab.

23.10.2 Hinreichende Bedingungen für formstabile Bewegungen

Feinere Studien[1] zeigen, dass die höheren ungeradzahligen Harmonischen des Schwerefeldes der Erde den Wert von e_F leicht modifizieren können. Da in deren Größenordnungsbereich bereits die anderen auf die Bewegung eines Erdsatelliten einwirkenden Beschleunigungen, wie der Luftwiderstand, die Gravitationen dritter Körper, der Strahlungsdruck der Sonne usw. liegen, ist diese Aussage nur von theoretischem Wert.

23.10.3 Eigenschaften der formstabilen Bewegung

Die oskulierende Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn kann nach der Beziehung (20.58) mit dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\delta e_{kG}\left[\bar{e}=0\right] \;=\; \frac{1}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{a}^2}\Big\{-3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\cos\bar{\upsilon}+ \\ +\sin^2\bar{i}\,\left[4\cos\left(2\bar{u}-\bar{\upsilon}\right)+\cos\left(2\bar{u}\right)\cos\bar{\upsilon}\right]\Big\}+\;\ldots\end{aligned} \tag{23.347}$$

aus

$$e\left[\bar{e}=0\right]=e_F+\delta e_{kG}\left[\bar{e}=0\right]$$

berechnet werden, als Bahnwinkel das oskulierende mittlere Argument der Breite nach Formel (20.114) (Band III)

$$\delta\left(\omega+M\right)_{lG}\left[\bar{e}=0\right]\;=\;0\quad,$$

sowie mit der Beziehung (20.110)

$$\begin{aligned}\left(\delta\omega_{kG}+\delta M_{kG}\right)\left[\bar{e}=0\right] \;=\; -\frac{1}{8}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{a}^2}\Big\{\,6\left(1-5\cos^2\bar{i}\,\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}\right)- \\ -3\left(3-5\cos^2\bar{i}\,\right)\sin\left(2\bar{u}\right)\;\Big\}+\ldots\quad,\end{aligned} \tag{23.348}$$

---

1 siehe etwa H. KLINKRAD [1985]

somit

$$\omega+M \;=\; \overline{\omega+M}+\delta\left(\omega+M\right)_{kG}\left[\bar{e}=0\right] \quad .$$

Schließlich wird der oskulierende Bahnradius $r=\bar{r}+\delta r$ im Fall der Variationen durch das Gravitationspotential mit Formel (20.187) aus

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0\right] \;=\; & \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}R_E\sin\bar{i}\,\sin\bar{u}+ \\ & +\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^2}\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u}+ \\ & +\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}}\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\,\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \qquad (23.349)$$

erhalten. Mit Beziehung (23.345) folgt daraus die bemerkenswerte Darstellung

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0\right] \;=\; & -\bar{a}\,e_F\sin\omega_{lG}\sin\bar{u}+ \\ & +\frac{1}{4}J_2\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\,\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \qquad (23.350)$$

- *Der oskulierende Bahnradius enthält im Fall von mittleren Kreisbahnen* $\left(\bar{e}=0.0\right)$ *explizit die eingefrorene Exzentrizität* $\left(e_F\right)$ *als einen konstanten Parameter.*

BEISPIEL 1: Gegeben sei die mittlere Kreisbahn ($\bar{e}=0$) eines Erdsatelliten in 300 km mittlerer Äquatorhöhe. Ihre mittlere große Bahnhalbachse ist $\bar{a}_0=6678.140\,\mathrm{km}$. Beträgt die mittlere Inklination $\bar{i}_0=57°$, so hat die Bahn die gemittelte (= „eingefrorene“) Exzentrizität

$$e_F \;=\; e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] \;=\; 9.396229\times10^{-4}+2.802711\times10^{-4} \;=\; 0.00121989+O\left(J_7\right) \quad .$$

Den Verlauf der oskulierenden Exzentrizität über einen drakonitischen Umlauf (das Argument der Breite ist wie in der drakonitischen Bewegung üblich die unabhängige Variable) zeigt Bild 23-39. Die Exzentrizität verschwindet in diesem speziellen Fall für das Argument u = 90°.

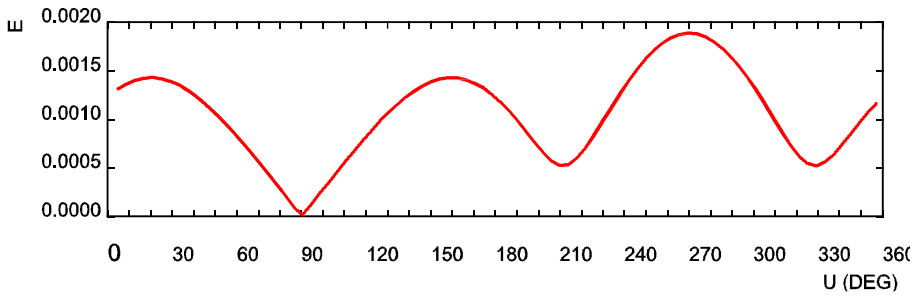


Bild 23-39: Variation der Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a}=6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e}=0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf.

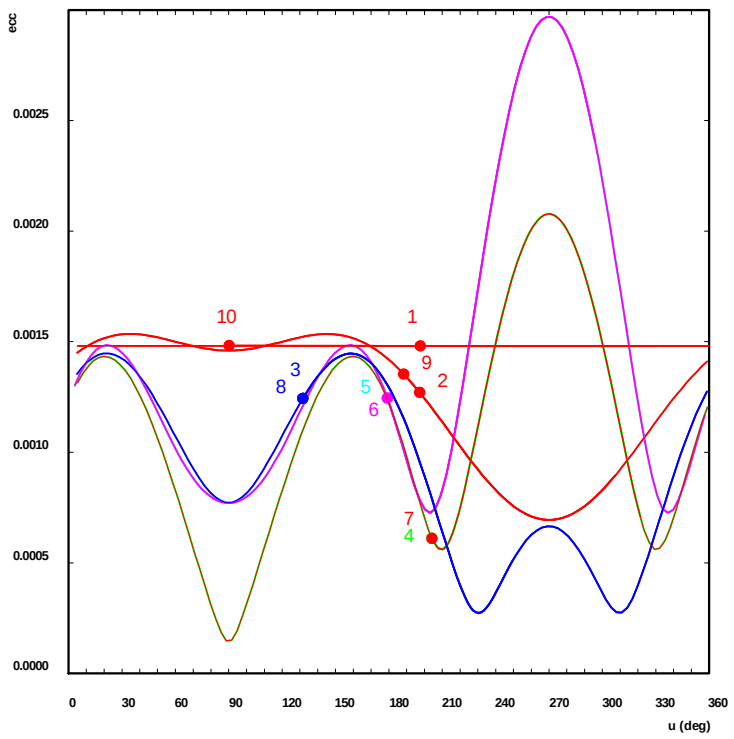


Bild 23-40: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, für verschiedene Inklinationen über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 1: *i*=0°, Kurve 2: *i*=20°, Kurve 3: *i*=40°, Kurve 4: *i*=60°, Kurve 5: *i*=80°, Kurve 6: *i*=100°, Kurve 7: *i*=120°, Kurve 8: *i*=140°, Kurve 9: *i*=160°, Kurve 10: *i*=180°. Die Kurven für die Inklinationen *i* und 180°-*i* sind identisch.

Parametrisierte Untersuchungen zeigen jedoch im Allgemeinen ein nicht überschaubares Verhalten der oskulierenden Exzentrizität: Variationen im mittleren Argument des Perigäums zur Epoche sowie in der mittleren Epocheanomalie beeinflussen nicht das Verhalten der oskulierenden Exzentrizität, wenn die Epocheexzentrizität verschwindet. Dagegen ist das Verhalten stark von der Inklination und der Bahnhöhe sowie der Exzentrizität abhängig. Bild 23-40 zeigt den Verlauf der oskulierenden Exzentrizität für Bahnen mit der verschwindender mittlerer Epocheexzentrizität für verschiedene Inklinationen jedoch derselben mittleren Bahnhalbachse. Es fällt auf, dass für das Argument der Breite u=90° jeweils ein relatives oder sogar absolutes Minimum besteht.

Im Fall einer schwachen Exzentrizität $\left(\bar{e} = 0.001\right)$ ist das Verhalten der oskulierenden Exzentrizität jedoch auch stark vom mittleren Anfangsargument des Perigäums abhängig (siehe Bild 23-41).

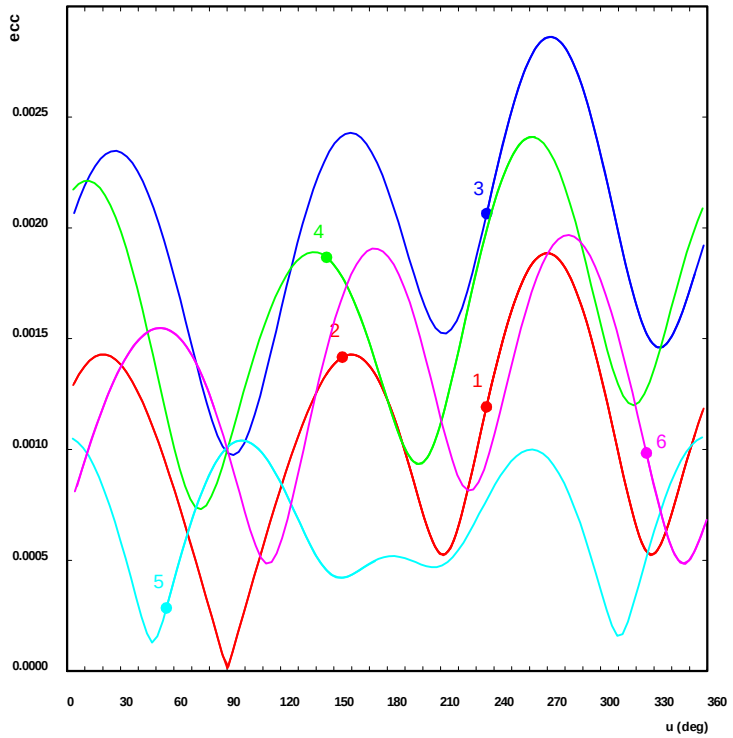


Bild 23-41: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität für eine Bahn mit mittleren Bahnhalbachse $\bar{a} = 6678.140\,\text{km}$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e} = 0.001$ und der mittleren Inklination $\bar{i}$ = 57°, für verschiedene mittlere Argumente des Perigäums über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 3: $\bar{\omega}$=180° , Kurve 4: $\bar{\omega}$=90° , Kurve 5: $\bar{\omega}$=0° , Kurve 6: $\bar{\omega}$=270° . In Ergänzung zeigen die Kurven 1 und 2 das Verhalten der Kreisbahn $\bar{e} = 0.0$ wie in Bild 23-39 für die Perigäumsargumente $\bar{\omega}$=180° (Kurve 1) bzw. $\bar{\omega}$=90° (Kurve 2, diese beiden Kurven sind identisch, werden aber in unterschiedlicher Reihenfolge durchlaufen) ◀

BEISPIEL 2:

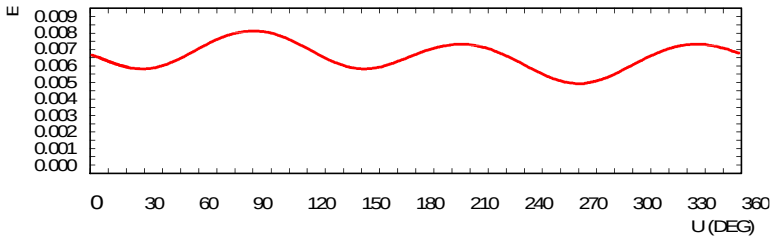


Bild 23-42: Variation der Exzentrizität einer mittleren kreisförmigen Umlaufbahn um den Mars mit der mittleren Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf

Gegeben sei die mittlere Kreisbahn eines Mars-Orbiters in der mittleren Äquatorhöhe $\bar{H} = 300\,\text{km}$. Die mittlere große Bahnhalbachse ist (mit den Werten von Tabelle 12 in Anhang E.7 (Band V)) $\bar{a} = 3697.2\,\text{km}$. Die mittlere Inklination sei $\bar{i} = 57°$. Da für den Mars $J_3 > 0$, wird das gemittelte Perimartium für das Argument $\bar{u} = 270°$ „eingefroren“. Die gemittelte Exzentrizität (vgl. Bild 23-42) beträgt

$$e_F = e_{lG}\left[\bar{e} = 0\right] = 7.062697 \times 10^{-3} - 3.6223439 \times 10^{-3} = 0.003440354 + O\left(J_7\right) \quad \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 3: Es werde das radiale Verhalten eines Erdsatelliten auf mittlerer Kreisbahn in 300 km mittlerer Äquatorhöhe betrachtet. Formel (23.349) liefert für zunächst beliebige Inklinationen:

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km}\right] \;=\;& -7.482\sin\bar{i}\,\sin\bar{u}\,- \\ & -0.826\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\,\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Im Fall der $\bar{i}$ = 57°-Bahn ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=57°\right] \;=\;& -6.275\sin\bar{u}\,- \\ & -1.872\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[0.330+0.703\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Die von J_3 stammende Variation des Radius ist mehr als 5 mal so groß wie die von J_2 stammende, die selbst noch von der von J_5 stammenden Variation übertroffen wird. Dies zeigt Bild 23-43. Hier bezeichnet „3“ die Kurve des mittleren Bahnradius, „2“ die Kurve mit den von J_2 stammenden Variationen, Kurve „1“ die mit allen Einflüssen (d.h. analytisch mit J_2, J_3, J_4). Man ersieht das Minimum des Bahnradius für das Argument der Breite $\bar{u}$ = 90°, die größere Variation von *r* über der Nordhälfte der Erde $\left(0°<\bar{u}<180°\right)$ sowie das dann völlig asymmetrische Verhalten über der Südhälfte. Der hier dargestellte oskulierende Verlauf des Bahnradius ist für jeden Umlauf identisch. Dies gilt bis auf höhere Einflüsse, derentwegen die Bahn eventuell von Zeit zu Zeit korrigiert werden muss (siehe hierzu den Abschnitt 23.10.5 auf Seite 235).

Zahlenwerte für eine polnahe Bahn:

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=96°\right] \;=\;& -7.441\sin\bar{u}\,- \\ & -0.738\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[2.902+0.989\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Die von J_3 herrührende Variation des Bahnradius mit Betrag 7.441 ist mehr als doppelt so stark wie der von J_2 stammende Anteil.

Im Fall einer äquatorialen Bahn artet auch der oskulierende Anteil des Bahnradius zu einem konstanten Wert aus, der Einfluss der ungeradzahligen Harmonischen verschwindet, der Satellit befindet sich (wie *Lyddane* [1963] als erster festgestellt hat) stets im Perigäum der Bahn:

$$\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=0°\right] \;=\; -9.893\left[\text{km}\right] \quad .$$

(Mehr zum Fall der äquatorialen Bewegung im Rahmen der meridianbezogenen Bewegung in Kapitel 26). ◄

BEISPIEL 4: Es werde zum Vergleich das radiale Verhalten eines Mars-Orbiters auf mittlerer Kreisbahn in 300 km mittlerer Äquatorhöhe betrachte. Formel (23.349) liefert für zunächst beliebige Inklinationen:

$$\begin{aligned}\delta r_{G\sigma}\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km}\right] \;=\;& 31.135\sin\bar{i}\,\sin\bar{u}\,- \\ & -0.5898\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.533\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\,\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right]\quad .\end{aligned}$$

Im Fall der $\bar{i}$ = 57°-Bahn ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta r_{G\sigma}\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=57°\right] \;=\;& 26.112\sin\bar{u}\,- \\ & -1.3336\sin\bar{u}\,+ \\ & +0.50635+1.0783\cos\left(2\bar{u}\right)+\ldots\left[\text{km}\right]\quad .\end{aligned}$$

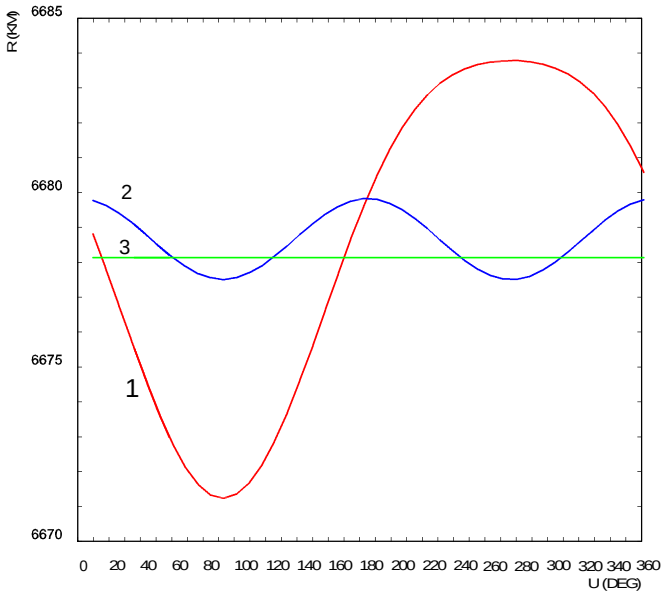


Bild 23-43: Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn über der Erdoberfläche der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1: Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der „Störungen“ durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur Störungen durch J_2 ; Kurve 3: „mittlere“ Bahn

Die entsprechenden Kurven ohne Anomalien im Schwerefeld des Mars (Kurve 3), mit dem Einfluss von J_2 allein (Kurve 2) und unter Einschluss der Einflüsse durch J_2 und J_3 (Kurve 1) sind in Bild 23-44 zu sehen. Es fällt auf, dass der Einfluss von J_3 noch wesentlich größer als bei der Erde ist, was auf den gegenüber der Erde um das 10fache höheren Wert zurückzuführen ist. Der Mittelwert der Variation im Fall von J_2 allein ist um einen konstante kleine Verschiebung von 0.5 km gegenüber dem konstanten Wert bei Vernachlässigung aller „Stör“-einflüsse. Da für den Mars J_3 einen positiven Wert hat, verläuft die Variation des Radius über der Nordhalbkugel positiv und über der Südhalbkugel negativ. Das Gesamtverhalten im Vergleich Nord- zu Südhalbkugel ist wie bei der Erde asymmetrisch. ◀

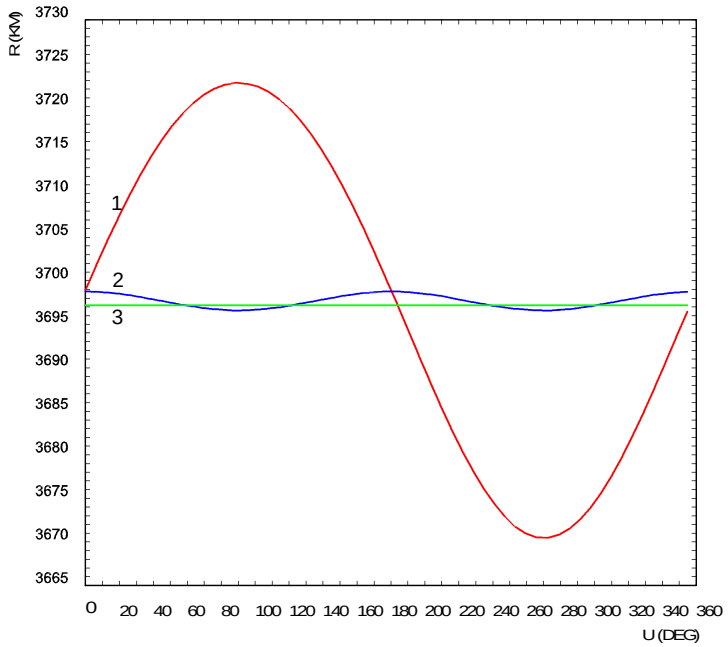


Bild 23-44: Bewegung eines Mars-Orbiters um das Massenzentrum des Mars (martiozentrische Bewegung): Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1: Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der Bewegungseinflüsse durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur mit J_2 ; Kurve 3: „mittlere Bahn.

23.10.4 Librationen um die formstabile Bewegung

Eine formstabile Bewegung wird erhalten, wenn die mittlere Exzentrizität $\bar{e}$ identisch verschwindet. Dieser Fall ist in der Praxis aus verschiedenen Gründen nicht zu erwarten. Es soll deshalb in diesem Abschnitt untersucht werden, was passiert, wenn die mittlere Exzentrizität kleine (konstante) von Null verschiedene Werte annimmt.

In diesem Fall ist das mittlere Argument des Perigäums $\bar{\omega}$ im Gegensatz zum eingefrorenen Fall $(\bar{e}=0)$ erklärt und kann das Intervall $\bar{\omega}\in[0°,360°]$ durchlaufen. Der langperiodische Anteil δe_{lG} der Exzentrizität nach Beziehung (20.24) und $\delta\omega_{lG}$ des Argumentes des Perigäums in Beziehung (20.33) führen für kleine mittlere Exzentrizitäten langperiodische Oszillationen um den Wert der eingefrorenen Exzentrizität e_F mit $\omega_L = 90°$ aus. Dies zeigt sich in einer Art Librationsbewegungen des langperiodischen Anteils e_l der Exzentrizität über dem langperiodischen Anteil ω_L des Argumentes des Perigäums.

Bild 23-45 zeigt ein Beispiel hierzu mit der gemittelten Bahnhöhe $\bar{H}=300\,km$, also der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}=6678.140\,km$ und der mittleren Inklination $\bar{i}=57°.0$. Hier wurde der Einfluss durch J_5 nicht berücksichtigt. Für die mittlere Exzentrizität $\bar{e}=0.00015$, was als Annahme für eine fehlerhafte mittlere Exzentrizität gewertet werden kann, schwankt der langperiodische Anteil der Exzentrizität im Intervall $e_l\in[0.000045,0.001825]$, sowie der langperiodische Anteil des Argumentes des Perigäums etwa für $\omega_L\in[17°,153°]$. Die Dauer

für eine solche Librationsbewegung wird aus der (konstanten) mittleren Bewegung $\dot{\omega}_s$ des Argumentes des Perigäums nach Formel (20.16) erhalten. Sie beträgt

$$P_{\omega_{lG}} = \frac{2\pi}{\dot{\omega}_{sG}} \quad , \tag{23.351}$$

im Fall von $\bar{e} = 0.0015$ somit $\dot{\omega}_s = 0.41028757\ 10^{-6}$ /s somit $P_{\omega_{lG}} = 177.2465\ d$.

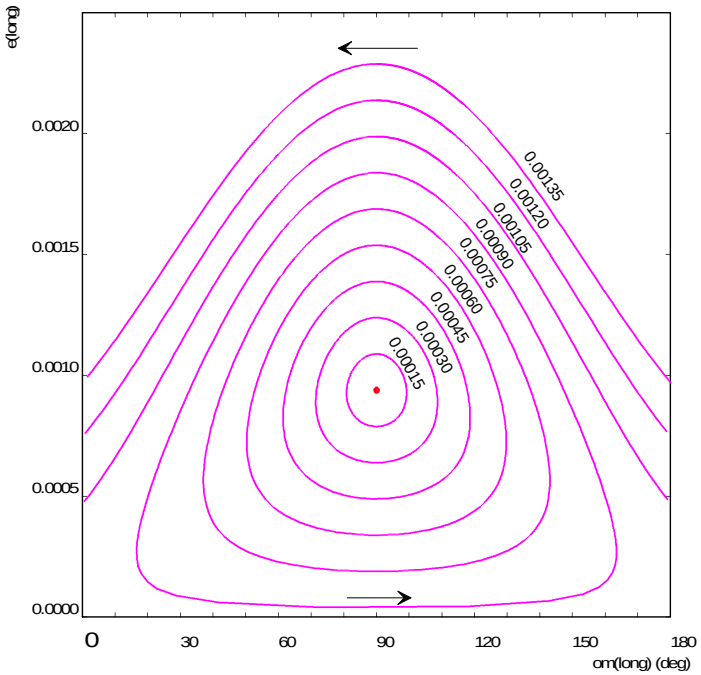


Bild 23-45: Librationen von kreisnahen Bahnen um die eingefrorene Bahn mit den Parametern Höhe $\bar{H}$ = 300 km (Bezug auf den Erdäquator $R_E = 6378.140\,km$), mittlere (*Brouwer*schen) Exzentrizität $\bar{e} = 0.0000$, Inklination $\bar{i} = 57°.0$. Das langperiodische Argument des Perigäums hat notwendig den Wert $\omega_l = 90°.0$. Für die Librationsbahnen wurde die jeweils vorgegebene mittlere Exzentrizität $\bar{e}$ variiert in Schritten von $\Delta e = 0.00015$. Die Abszisse enthält die langperiodische Bewegung des Argumentes des Perigäums, die Ordinate die langperiodische Variation der Exzentrizität unter Einschluss der Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4 . In diesem Modell hat die „eingefrorene" Exzentrizität den Wert $e_F = 0.000939$. Die entsprechende „eingefrorene" Bahn wird in diesem Bild durch einen Punkt in der Mitte der Librationskurven repräsentiert. Die Librationsperiode beträgt etwa 178 Tage.

Im Fall einer eingefrorenen Bahn zeigt die **oskulierende Exzentrizität**, d.h. unter Einschluss der kurzperiodischen Variationen in der *e* über ω - Ebene, ein eigentümliches Verhalten, wie es im Beispiel für dieselben Bahnparameter wie in Bild 23-45 durchgeführt in Bild 23-46 dargestellt wird. Hier zeigt sich eine mehrfache Schleifenbewegung um den Wert der eingefrorenen Bahn mit $e_F = 0.000939$ und $\omega_L = 90°$. Maximal kann die oskulierende Exzentrizität in diesem Fall Werte bis zu *e* = 0.00188 annehmen. Im Kurvenverlauf spiegeln sich die verschiedenen periodischen Anteile in den Beziehungen (20.58) für die Exzentrizität und (20.62) für das Argument des Perigäums wieder.

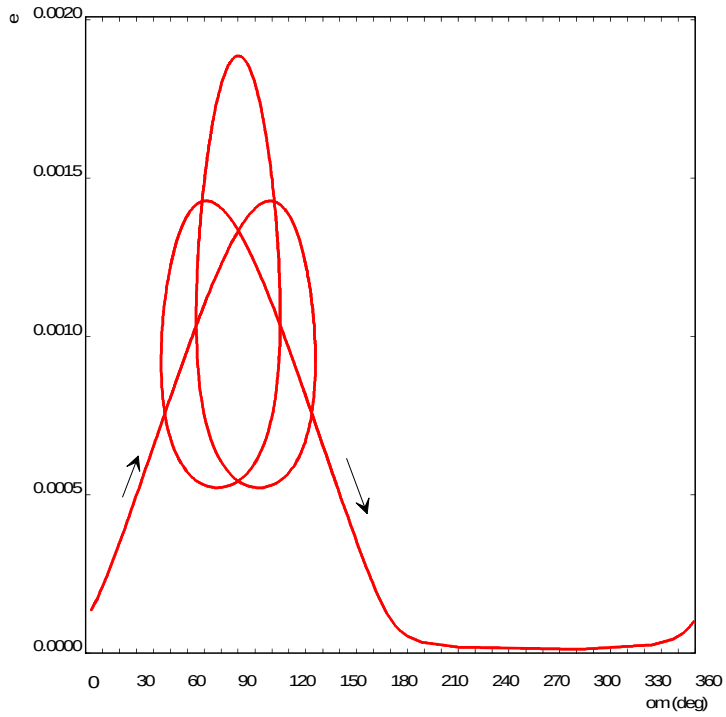


Bild 23-46: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine mittlere Kreisbahn mit den mittleren Bahnparametern $\overline{a}_0 = 6678.140\,km$, $\overline{e}_0 = 0.0$, $\overline{i}_0 = 57°.0$.

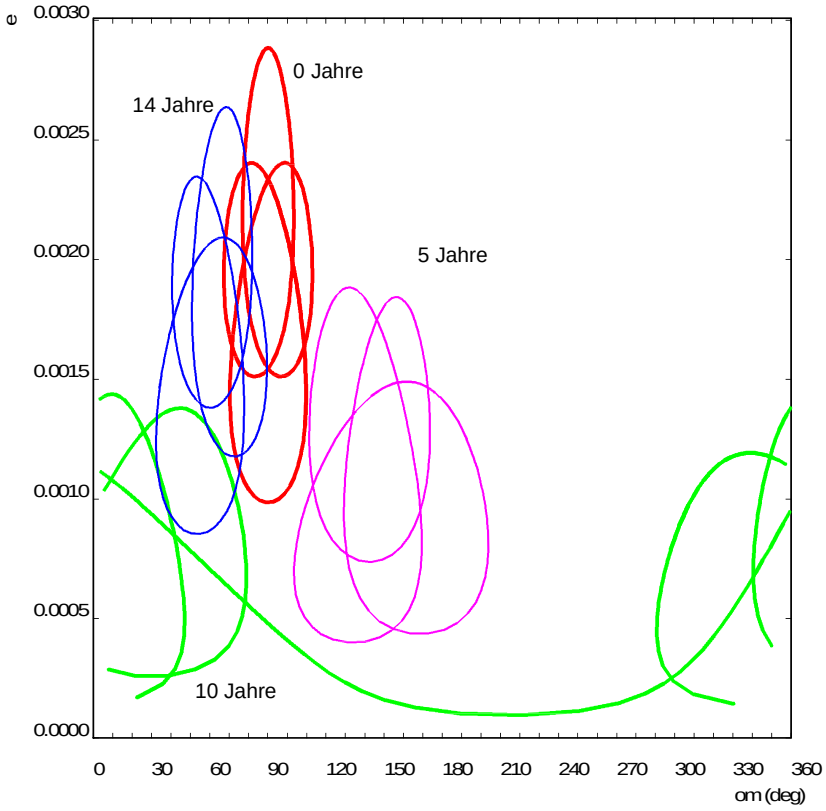


Bild 23-47: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine nichtkreisförmige Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\overline{a} = 6678.140\,km$, $\overline{e} = 0.001$, $i = 57°.0$, an der Epoche, nach 5, 10 und 14 Jahren

Zur Ergänzung zeigt Bild 23-47 die kurzperiodische Schleifenbewegung für eine schwach elliptische Bahn, die sich von den vorstehenden Beispielen nur durch die mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.001$ unterscheidet. Das Gebiet dieser Schleifen wandert im Verlauf eines längeren Zeitraumes über das ganze Bild. Hier dargestellt ist die Bewegung über einen drakonitischen Umlauf an der Epoche, nach 5 Jahren, 10 Jahren und 14 Jahren.

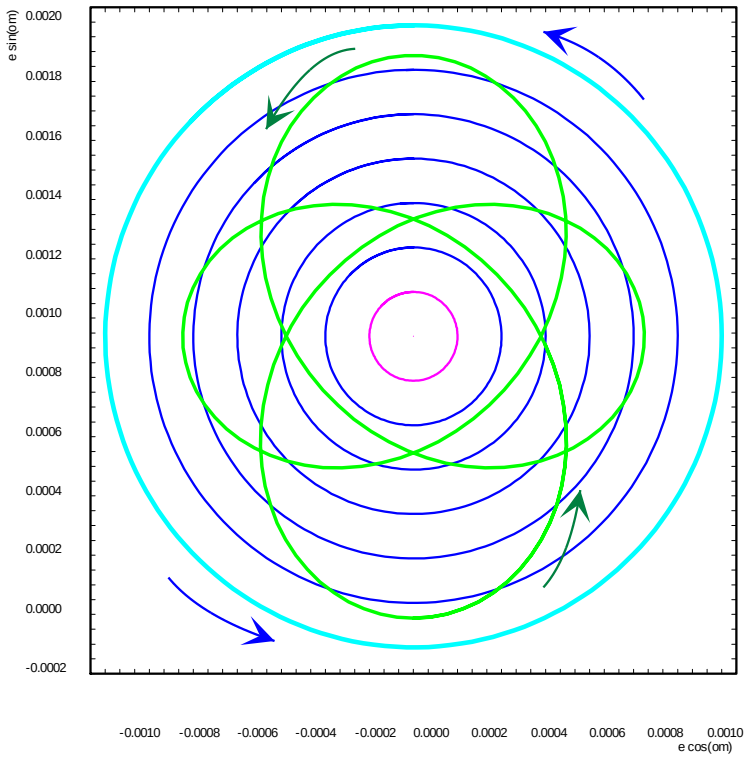


Bild 23-48: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.0, bzw. e_F =0.00939 , $\bar{a}_0$ = 6678.155 km . Die Librationsbewegung hat die Periode 178 Tage.

Ein grundsätzlich anderes Librationsverhalten zeigt Bild 23-49 für die sonnensynchrone Bahn in 629 km mittlere Bahnhöhe und die Inklination $\bar{i}_0 = 97°.93$. Man beachte vor allem den andersartigen Verlauf des Durchlaufsinnes sowie den Verlauf der kurzperiodischen Libration des Exzentrizitätsvektors.

Für kleine Exzentrizitäten etwa $\bar{e}_0$ = 0.00225, die Bahnhöhe H = 629 km und die sonnensynchrone Inklination $\bar{i}_0 = 97°.97$ zeigt Bild 23-49 das langperiodische Librationsverhalten über die Periode 111 Tage und überlagert im Abstand von 28 Tagen das kurzperiodische Verhalten über einen drakonitischen Umlauf. Der Bezug zur jeweiligen Stellung der langperiodischen Entwicklung ist als Mittelpunkt der kurzperiodischen Kurve klar zu erkennen. Die kurzperiodischen Variationen sind an der Kurve der langperiodischen Variationen wie an einer Perlenschnur aufgehängt.

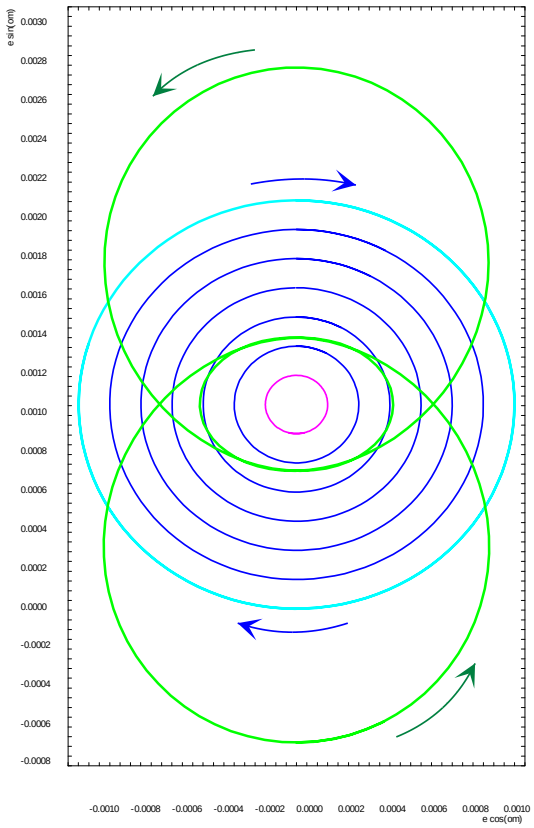


Bild 23-49: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\bar{i}_0$ = 97°.93: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.0, bzw. $e_F = 0.001057$. Die Librationsbewegung hat die Periode 111 Tage

23.10.5 Korrekturen der formstabilen Bewegung

Infolge der langperiodischen Bewegung des Argumentes des Perigäums um die formstabile Bahn für kleine Abweichungen der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität e_F spricht man gerne von einer passiven Kontrolle der Exzentrizität einer Satellitenbahn. Wird diese Abweichung jedoch zu groß, kann eine aktive Korrektur erforderlich werden. Dies ist insbesondere dann notwendig, wenn die Abweichung der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität so groß wird, dass keine Librationsbewegung mehr um die eingefrorene Bahn stattfindet, wie es in Bild 23-45 für die äußeren Kurven der Fall ist. In diesen Fällen wird eine Korrektur des Arguments des Perigäums durchgeführt, wie in Bild 23-47 an einem Beispiel gezeigt wird. In Tabelle 23-12 ist der Verlauf der *Kepler*schen Bahnparameter in der Umgebung einer eingefrorenen Bahn berechnet. Die zur eingefrorenen Bahn entsprechende Exzentrizität e_L auf der gegebenen Bahn wird für das Argument des Perigäums $\omega_L = 90°$ erhalten.

Um diesen Punkt herum, den höchsten Punkt der Kurve, wird das Manöver so gelegt, dass das Perigäum längs dieser Kurve vor Erreichen des Maximums beginnt und nach Durchgang durch das Maximum bis zu einem zum Anfangspunkt symmetrischen Wert driftet. Dort wird dann das Perigäumsmanöver durchgeführt. Entsprechend Tabelle 23-12 (auf Seite 236) sind in Tabelle 23-13 die Manöverparameter für die entsprechende Bahn mit den Formeln aus Ab-

schnitt 12.4.2 (Band III) berechnet. Man sieht in der ersten Spalte das Toleranzintervall $\pm\Delta\omega$, in der zweiten Spalte die Zeitdauer zwischen zwei Manövern, in der vorletzten Spalte das Geschwindigkeitsinkrement und in der letzten Spalte den Treibstoffverbrauch für einen bestimmten Satelliten der Masse *m* und ein Triebwerk mit vorgegebenem spezifischen Impuls c_e.

YEAR	MO	DA	HO	MI	SEC	a	e	i	Ω	ω
2003	7	31	12	0	0.000	7007.65953	0.0025013	97.93067	353.09792	103.29136
2003	8	1	0	0	0.000	7007.62220	0.0025079	97.93062	353.59089	102.33887
2003	8	1	12	0	0.000	7007.58488	0.0025141	97.93057	354.08386	101.38709
2003	8	2	0	0	0.000	7007.54756	0.0025197	97.93053	354.57683	100.43596
2003	8	2	12	0	0.000	7007.51023	0.0025249	97.93048	355.06982	99.48541
2003	8	3	0	0	0.000	7007.47291	0.0025295	97.93043	355.56281	98.53540
2003	8	3	12	0	0.000	7007.43559	0.0025337	97.93039	356.05580	97.58586
2003	8	4	0	0	0.000	7007.39826	0.0025374	97.93034	356.54881	96.63674
2003	8	4	12	0	0.000	7007.36094	0.0025406	97.93029	357.04181	95.68798
2003	8	5	0	0	0.000	7007.32362	0.0025433	97.93025	357.53483	94.73953
2003	8	5	12	0	0.000	7007.28629	0.0025455	97.93020	358.02785	93.79133
2003	8	6	0	0	0.000	7007.24897	0.0025473	97.93015	358.52088	92.84334
2003	8	6	12	0	0.000	7007.21165	0.0025485	97.93011	359.01391	91.89548
2003	8	7	0	0	0.000	7007.17432	0.0025493	97.93006	359.50695	90.94772
2003	8	7	12	0	0.000	7007.13700	0.0025495	97.93001	360.00000	90.00000
2003	8	8	0	0	0.000	7007.09968	0.0025493	97.92997	0.49305	89.05226
2003	8	8	12	0	0.000	7007.06235	0.0025485	97.92992	0.98611	88.10446
2003	8	9	0	0	0.000	7007.02503	0.0025473	97.92987	1.47918	87.15653
2003	8	9	12	0	0.000	7006.98771	0.0025456	97.92983	1.97225	86.20843
2003	8	10	0	0	0.000	7006.95038	0.0025434	97.92978	2.46533	85.26010
2003	8	10	12	0	0.000	7006.91306	0.0025407	97.92973	2.95841	84.31149
2003	8	11	0	0	0.000	7006.87574	0.0025375	97.92968	3.45150	83.36254
2003	8	11	12	0	0.000	7006.83841	0.0025338	97.92964	3.94460	82.41320
2003	8	12	0	0	0.000	7006.80109	0.0025296	97.92959	4.43770	81.46341
2003	8	12	12	0	0.000	7006.76377	0.0025250	97.92954	4.93081	80.51312
2003	8	13	0	0	0.000	7006.72644	0.0025198	97.92950	5.42393	79.56227
2003	8	13	12	0	0.000	7006.68912	0.0025142	97.92945	5.91705	78.61080
2003	8	14	0	0	0.000	7006.65180	0.0025080	97.92940	6.41018	77.65865
2003	8	14	12	0	0.000	7006.61447	0.0025014	97.92936	6.90332	76.70576
2003	8	15	0	0	0.000	7006.57715	0.0024943	97.92931	7.39646	75.75208
2003	8	15	12	0	0.000	7006.53983	0.0024868	97.92926	7.88961	74.79753
2003	8	16	12	0	0.000	7006.46518	0.0024702	97.92917	8.87592	72.88560
2003	8	17	0	0	0.000	7006.42786	0.0024612	97.92912	9.36909	71.92808
2003	8	17	12	0	0.000	7006.39054	0.0024517	97.92907	9.86226	70.96943
2003	8	18	0	0	0.000	7006.35321	0.0024417	97.92903	10.35544	70.00959

Tabelle 23-12: Langperiodische Ephemeride für eine Bahn in der Umgebung einer formstabilen Bahn unter Berücksichtigung des analytischen Erdmodells unter Einschluss von J_2, J_3, J_4. Die zugehörige mittlere Bahn hat die Parameter $\overline{a}_0 = 7007.137\,km$, $\overline{e}_0 = 0.001494$, $\overline{i}_0 = 97°.93$, $\overline{\omega}_0 = 90°.0$.

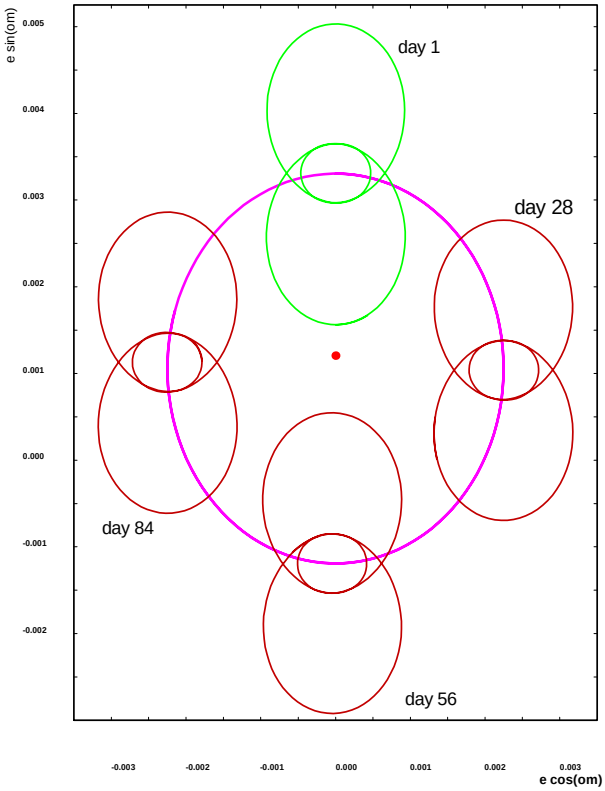


Bild 23-50: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\overline{i}_0$ = 97°.93 : Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreis: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ = 0.00111. Schleifenbewegungen: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die Bewegung mit $\overline{e}_0$ = 0.00111, bzw. $e_{(F)} = 0.00225$ an vier verschiedenen Tagen des Librationszyklus 111 Tage.

Fall	$\Delta\omega$	ΔT	$\omega_{L(begin)}$	υ_1	υ_2	$r_1 = r_2$
1	5°	2.6 d	92°.5	-2°.5	2°.5	6996.5415 km
2	10°	5.2 d	95°	-5°	5°	6996.5713 km
3	15°	7.9 d	97°.5	-7.5°	7.5°	6996.6208 km
4	20°	10.5 d	100°	-10°	10°	6996.6901 km
Fall	$\dot{r}_1$	$\dot{r}_2$	$V_1 = V_2$	γ	ΔV	Δm
1	-492 m/s	492 m/s	7.55355 km/s	0°.00747	0.985 m/s	0.0457 kg
2	-928 m/s	928 m/s	7.55352 km/s	0°.01492	1.967 m/s	0.0913 kg
3	-1471 m/s	1471 m/s	7.55346 km/s	0°.02234	2.945 m/s	0.1366 kg
4	-1957 m/s	1957 m/s	7.55339 km/s	0°.02967	3.912 m/s	0.1815 kg

Tabelle 23-13: Manöver zur Stabilisierung der Drift des Argumentes des Perigäums für die Bahn aus Tabelle 23-12 (auf Seite 236). Es wurden vier verschiedene Fälle für unterschiedliche zulässige Toleranzintervalle und Manöverzeiten gerechnet. Angenommen ist ein Satellit der Masse m = 130 kg und einem Heißgastriebwerk mit dem spezifischen Impuls c_e = 2800m/s.

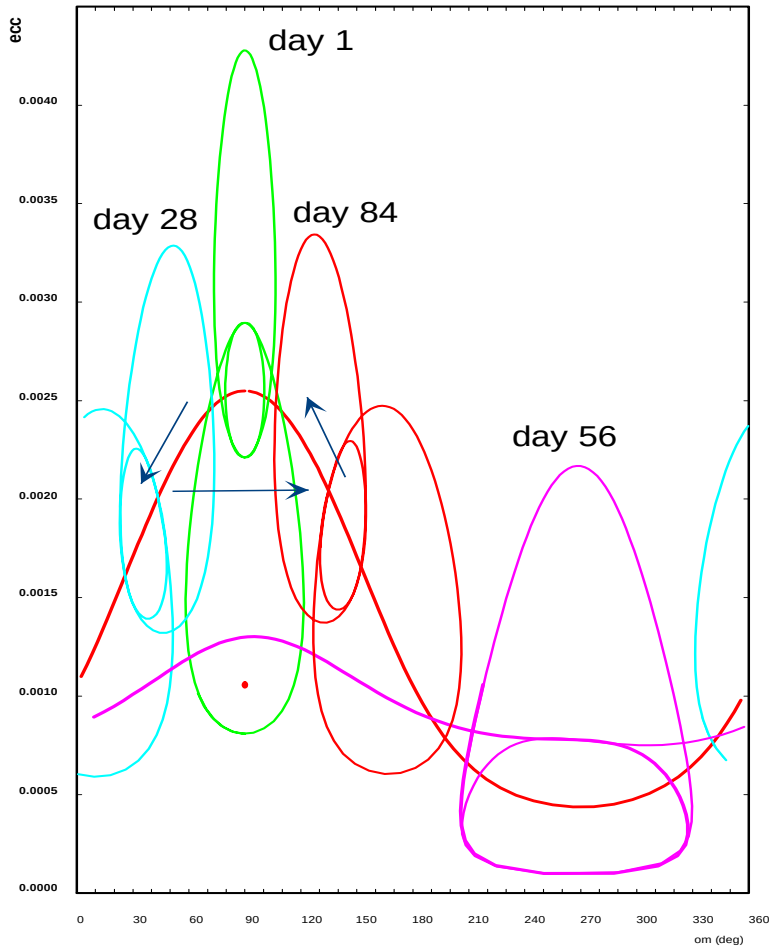


Bild 23-51: Langperiodische Bewegung der Exzentrizität e_L über dem Argument des Perigäums ω_L für die Bahn $\bar{a}_0 = 7007.137\,km$, $\bar{e}_0 = 0.001494$, $\bar{i}_0 = 97°.93$, $\bar{\omega}_0 = 90°.0$. Diese langperiodische Bewegung hat die Periode 111 Tage. Die Kurve der langperiodischen Bewegung ist überlagert mit den entsprechenden kurzperiodischen Verläufen über je einen drakonitischen Umlauf an den Tagen 1, 28, 56, 84 während des 111 tägigen Zyklus. Die Kurven für den jeweiligen kurzperiodischen Verlauf zeigen den typischen Doppel-Acht-Kurvenverlauf. Der Durchlaufsinn der langperiodischen Kurve ist angedeutet, ebenso das Manöver, das nötig ist, um die langperiodische Bewegung in der Nähe des zur formstabilen Bahn gehörigen Argumentes des Perigäums ω_L = 90° zu halten.[1]

23.11 Variationen der drakonitischen Bewegung durch Einschussfehler

Beim Einschuss eines Satelliten in seine Umlaufbahn sind stets Einschussfehler zu erwarten. Muss eine vorgegebene Zielbahn erreicht werden, müssen die Einschussfehler mit einem Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten korrigiert werden. Die hierzu benötigten Geschwindigkeitsinkremente wurden in den Abschnitten 12.1 bis 12.3 (Band III) hergeleitet. Wenn es jedoch kein Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten gibt, sei es aus Platzgründen, sei es aus Kostengründen oder zur Gewichtsminimierung, muss untersucht werden, wie sich die Einschussfehler über die geplante Lebensdauer des Satelliten auswirken. Erst dann kann beurteilt werden, ob die Missionsziele eines Satellitenprojektes auch bei Verzicht auf ein Bahnkorrektursystem erreicht werden können.

---

[1] aus: GSOC TN 2003-06, 0ctober 28, 2003

Diese für ein Satellitenprojekt fundamentalen Aussagen können mit sehr einfachen Hilfsmitteln erhalten werden. Es seien die zu erwartenden Einschussfehler in den *Kepler*elementen Δa , Δe , Δi , $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$ sowie einem Zeitfehler Δt_0 oder entsprechenden anderen Bahnparametern vorgegeben. Die Parameter $\overline{a}_n$, $\overline{e}_n$, $\overline{i}_n$, … seien die entsprechenden Nominalbahnelemente. Die Fehler Δa , Δe , … werden an den Nominalbahnelementen angebracht und jeweils die jetzt gültigen Bahnelemente

$$\overline{a} \;=\; \overline{a}_n \pm \Delta a \quad , \quad \overline{e} \;=\; \overline{e}_n \pm \Delta e \quad , \quad \overline{i} \;=\; \overline{i}_n \pm \Delta i \quad , \quad \dots$$

und die aus ihnen folgenden weiteren Bahnparameter, etwa die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = \overline{P_d}\left(\overline{a}, \overline{e}, \overline{i}, \dots\right)$, die mittlere Verschiebung der Knotenlänge $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}\left(\overline{a}, \overline{e}, \overline{i}, \dots\right)$ pro drakonitischem Umlauf usw. berechnet und auf die Nominalwerte $\overline{P_{d\,n}} = \overline{P_{d\,n}}\left(\overline{a}_n, \overline{e}_n, \overline{i}_n, \dots\right)$, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,n}} = \overline{\Delta\lambda_{\Omega\,n}}\left(\overline{a}_n, \overline{e}_n, \overline{i}_n, \dots\right)$ bezogen.

Nach N_d drakonitischen Umläufen beträgt der Fehler in der Zeit des Knotenüberfluges

$$\Delta t_\Omega \;=\; N_d \left(\overline{P_d} - \overline{P_{d\,n}}\right) \quad . \tag{23.352}$$

Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} \;=\; \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_d}$$

hängt von den Einschussbahnelementen ab. Es werde in diesem Abschnitt angenommen, dass die Bahnelemente nicht durch weitere („Stör“-) Einflüsse variiert werden, so dass allein der Einfluss der Einschussfehler untersucht werden kann[1]. Somit kann in diesem Fall die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ als konstant angenommen werden.

Es seien $\Delta\Omega$ der Fehler im ersten aufsteigenden Knoten und $\Delta t_{\Omega 0}$ der Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug. Der Fehler in der geographischen Knotenlänge infolge der Einschussfehler beträgt dann beim ersten Knotenüberflug unter Verwendung der Definition der Sternzeit Θ_G in Greenwich nach Formel (8.132) (Band II)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 \;&\coloneqq\; \overline{\lambda_{\Omega\,,0}} - \overline{\lambda_{\Omega\,n,0}} \;= \\
&=\; \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \overline{\lambda_{\Omega\,n}}\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \overline{\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \Theta_G\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \overline{\Omega}\left[t_{n0}\right] + \Theta_G\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \overline{\Omega}\left[t_{n0}\right] + \dot{\Omega}_s\, \Delta t_{\Omega 0} - \overline{\Omega}_n\left[t_{n0}\right] - \Theta_G\left[t_{n0}\right] - \dot{\Theta}\, \Delta t_{\Omega 0} + \Theta_n\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \Delta\Omega + \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \Delta t_{\Omega 0} \quad ,
\end{aligned}$$

somit schließlich mit der säkularen Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ der geographischen Länge des aufsteigenden Knotens

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 \;=\; \Delta\Omega + \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \Delta t_{\Omega 0} \quad . \tag{23.353}$$

[1] Der Einfluss einer weiteren Variation der Anfangsbahnelemente wird im nächsten Abschnitt 23.12 auf S. 242 untersucht

Mit den Einschussfehlern in den Bewegungsparametern und der fehlerhaften mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_d}$ beträgt der Fehler in der Knotenlänge nach einem drakonitischen Umlauf

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_1 &:= \overline{\lambda_{\Omega,1}} - \overline{\lambda_{\Omega n,1}} = \\
&= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \overline{P_d} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \overline{\lambda_{\Omega n}}\left[t_{n0} + \overline{P_{d\,n}}\right] = \\
&= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] + \dot\lambda_{\Omega s}\,\overline{P_d} - \overline{\lambda_{\Omega n}}\left[t_{n0}\right] - \dot\lambda_{\Omega s,n}\,\overline{P_{d\,n}} = \\
&= \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + \dot\lambda_{\Omega s}\,\overline{P_d} - \dot\lambda_{\Omega s,n}\,\overline{P_{d\,n}} = \\
&= \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + \overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega n}} \quad .
\end{aligned}$$

Allgemein gilt nach N_d drakonitischen Umläufen mit der Abkürzung

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_{N_d} := \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{N_d}\right] - \overline{\lambda_{\Omega n}}\left[t_{n,N_d}\right] \tag{23.354}$$

die Beziehung

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_{N_d} = \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + N_d\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega n}}\right) \quad , \tag{23.355}$$

wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_{N_d+1} &:= \overline{\lambda_{\Omega,N_d+1}} - \overline{\lambda_{\Omega n,N_d+1}} = \\
&= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{N_d+1}\right] - \overline{\lambda_{\Omega n}}\left[t_{n,N_d+1}\right] = \\
&= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{N_d}\right] + \dot\lambda_{\Omega s}\,\overline{P_d} - \overline{\lambda_{\Omega n}}\left[t_{n,N_d}\right] - \dot\lambda_{\Omega s,n}\,\overline{P_{d\,n}} = \\
&= \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + \left(N_d+1\right)\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega n}}\right) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Der Fehler in der Zeit wird in der Zeiteinheit angegeben, in der die Ephemeride gerechnet wird, bei Satelliten also gewöhnlich in Weltzeit (U.T.C.). Es muss beachtet werden, dass diese Zeit nichts mit der Stellung der Sonne zum Satellitenort, also mit der lokalen Zeit (= mittleren Sonnenzeit), zu tun hat, welche mit der Stellung des Satelliten bezüglich der Erdoberfläche überhaupt nichts zu tun hat. Die Auswirkung des Einschussfehlers auf die mittlere Sonnenzeit wird in Abschnitt 28.7 untersucht.

Die Verschiebung des aufsteigenden Knotens ist ein Maß dafür, wie fehlerhaft der gesamte Bahnverlauf ist, also insbesondere die Spur über der Erdoberfläche. Die Größe $\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_{N_d}$ kann daher als der mittlere Spurfehler nach N_d drakonitischen Umläufen bezeichnet werden.

BEISPIEL: Gegeben seien die Zielbahnelemente[1]

$$\bar a_n = 7266.47\,\mathrm{km} \quad , \quad \bar e_n = 0.0 \quad , \quad \bar i_n = 99°.007513 \quad , \quad \bar\omega_n = 90°.0 \quad .$$

1 aus DLR-GSOC 94-05 und AIAA 96-3659

Es handelt sich hier um eine ganzzahlige sonnensynchrone Bahn („integer orbit“) mit 14 drakonitischen Umläufen pro Tag. Als Einschussfehler werden für die Bahnhöhe und die Inklination

$$\Delta H = \pm 10\,\text{km} \quad , \quad \Delta i = \pm 0°.03 \quad , \quad \Delta\Omega = 0°.0 \quad , \quad \Delta t_{\Omega 0} = 0.0\,\text{s}$$

angenommen (diese Werte sind 3σ- Werte, die für eine Delta II 7320 gültig sind). Damit ergeben sich zunächst nur bei Berücksichtigung des Fehlers in der Bahnhöhe die sechs Bahnen in Tabelle 23-14.

Fall	H_1 [km]	H_2 [km]	$\bar{a}$ [km]	$\bar{e}$	$\bar{V}_1$ [km/s]
1.	$\bar{H}$	$\bar{H}$	7266.47	0.0	7.40640
2.	$\bar{H}$	$\bar{H} + \Delta H$	7271.47	0.00069	7.40895
3.	$\bar{H}$	$\bar{H} - \Delta H$	7261.47	0.00069	7.40385
2b.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H}$	7271.47	0.00069	7.40895
4.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H} + \Delta H$	7276.47	0.0	7.40137
5.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H} - \Delta H$	7266.47	0.00138	7.39621
3b.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H}$	7261.47	0.00069	7.41405
5b.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H} + \Delta H$	7266.47	0.00138	7.41660
6.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H} - \Delta H$	7256.47	0.0	7.41150

Tabelle 23-14**:** Mögliche Bahnen bei Berücksichtigung des Einschussfehlers in der Bahnhöhe bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

Die diesen Bahnen entsprechenden mittleren drakonitischen Umlaufzeiten $\overline{P_d}$ sind in Tabelle 23-15 enthalten. Hier wird auch der Fehler in der Inklination berücksichtigt, der sich allerdings in einem Umlauf kaum auswirkt.

	A	**B**	**C**
$\overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	6171.432 s	6171.437 s	6171.427 s
2.	6177.793 s	6177.798 s	6177.788 s
3.	6165.073 s	6165.078 s	6165.068 s
4.	6184.157 s	6184.162 s	6184.152 s
5.	6171.432 s	6171.437 s	6171.427 s
6.	6158.716 s	6158.721 s	6158.711 s

Tabelle 23-15: Auswirkungen der Einschussfehler auf die drakonitische Umlaufzeit bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

In Tabelle 23-16 ist der Zeitfehler $\Delta t_\Omega = N_d \left(\overline{P_d} - \overline{P_{d\,0}} \right)$ nach zwei Jahren berechnet. Je nach Einschussfehler, in erster Linie bei fehlerhafter Bahnhöhe, müssen nach zwei Jahren entsprechend N_d = 10226 drakonitischen Umläufen der Nominalbahn beträchtliche Abweichungen gegenüber den Nominalbahnwerten erwartet werden.

	A	**B**	**C**
Δt_Ω	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	0*s*.0	50*s*.9	–51*s*.1
2.	18*h* 4*m* 10*s*.7	18*h* 5*m* 1*s*.5	18*h* 3*m* 19*s*.6
3.	–18*h* 3*m* 48*s*.1	–18*h* 2*m* 57*s*.2	–18*h* 4*m* 39*s*.2
4.	36*h* 8*m* 43*s*.6	36*h* 9*m* 34*s*.4	36*h* 7*m* 52*s*.6
5.	0*s*.2	51*s*.1	–50*s*.8
6.	–36*h* 7*m* 14*s*.0	–36*h* 6*m* 23*s*.0	–36*h* 8*m* 5*s*.1

Tabelle 23-16**:** Zeitfehler nach etwa 2 Jahren N_d = 10266 drakonitischen Umläufen der Nominalbahn für verschiedene Einschussfehler in Bahnhöhe und Inklination bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

Wegen der Verschiebung der Knotenüberflugzeit ist auch die Erde „unter“ der Bahn weiterrotiert, eine erhebliche Abweichung in der überflogenen Spur muss erwartet werden. Um die Spurdrift berechnen zu können, wird die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ in den einzelnen fehlerhaften Bahnen nach Tabelle 23-17 benötigt.

	A	**B**	**C**
$\overline{\Delta\lambda_\Omega} / \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	–25°.714299	–25°.714553	–25°.713792
2.	–25°.740790	–25°.741043	–25°.740537
3.	–25°.687818	–25°.688072	–25°.687565
4.	–25°.767289	–25°.767542	–25°.767036
5.	–25°.714300	–25°.714533	–25°.714046
6.	–25°.661346	–25°.661600	–25°.661092

Tabelle 23-17**:** Fehler in der mittleren Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.0	–0°.000254	+0°.000507
2.	–0°.026491	–0°.026744	–0°.026238
3.	+0°.026481	+0°.026227	+0°.026734
4.	–0°.052990	–0°.053243	–0°.052737
5.	–0°.000001	–0°.000234	+0°.000253
6.	+0°.052953	+0°.052699	+0°.053207

Tabelle 23-18: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Gradmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0.000 km	–0.028 km	+0.056 km
2.	–2.949 km	–2.977 km	–2.921 km
3.	+2.948 km	+2.920 km	+2.976 km
4.	–5.899 km	–5.927 km	–5.871 km
5.	–0.000 km	–0.026 km	+0.026 km
6.	+5.895 km	+5.866 km	+5.923 km

Tabelle 23-19: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Längenmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / 2a$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.000	–2°.598	+5°.185
2.	–270°.907	–273°.494	–269°.240
3.	+270°.805	+268°.207	+273°.392
4.	–541°.896	–544°.483	–539°.309
5.	–0°.010	–2°.393	+2°.587
9.	+541°.518	+538°.920	+544°.115

Tabelle 23-20: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge nach 2 Jahren bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713 ◀

Die Abweichungen der mittlerem Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf, also die Spurdrift pro Umlauf $\left(\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)=\overline{\Delta\lambda_\Omega}-\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)$, sind in Tabelle 23-18 im Winkelmaß und in Tabelle 23-19 im Längenmaß berechnet. Die zu erwartenden Fehler am Ende von zwei Jahren sind schließlich in Tabelle 23-20 enthalten. Die Ergebnisse zeigen, dass ohne ein Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten, das imstande ist, Einschussfehler zu korrigieren, keine vorgeschriebene Bodenspur auch nur annähernd garantiert werden kann.

23.12 Variationen der drakonitischen Bewegung durch Bewegungseinflüsse

Die bisher hergeleiteten Beziehungen der drakonitischen Bewegung setzen voraus, dass die drakonitische Bewegung analytisch für alle Zeiten exakt darstellbar ist. Dies ist jedoch wegen der bekannten Einflüsse auf eine Bahn zumindest für langfristige Aussagen nur näherungsweise richtig. Die große Bahnhalbachse erdnaher Satellitenbahnen (Höhe < 1000 km) wird säkular durch den Luftwiderstand beeinflusst, die Inklination sonnensynchroner Bahnen durch die Gravitationseinwirkung der Sonne, je nach Bahntyp auch andere Bahnparameter durch weitere Einflüsse, die eine vorgegebene Sollbahn langfristig verändern. Bei Bedarf können diese Bahnänderungen wieder durch Bahnkorrekturen ausgeglichen werden. Diese Manöver können im Rahmen einer Bahnanalyse abgeschätzt werden. Damit wird es möglich, ein ausreichendes Bahnkorrektursystem – Triebwerk, Treibstoff, eventuell ein automatisches Steuersystem – an Bord eines Satelliten mitführen zu können. Während einer Mission werden die „Störeinflüsse“ auf die mittlere Sollbahn aus der Beobachtung der wahren Bahn ermittelt und daraus Korrekturzeitpunkt, Korrekturgröße, Richtung des Korrekturimpulses und eventuell weitere Manöverparameter berechnet.

Im Folgenden werden die Variationen einiger fundamentaler Größen der drakonitischen Bewegung in erster Ordnung in J_2 berechnet und ihre Wirkungen sowie ein eventuell aufzuwendender Korrekturaufwand an einigen Spezialfällen abgeschätzt.

23.12.1 Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Wir betrachten die genäherte mittlere drakonitische Umlaufzeit erster Ordnung nach Formel (23.162) auf Seite 148

$$\overline{P_d} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{\overline{a}^3}{\mu}}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) \quad . \text{(23.356)}$$

Da sie nur von den Elementen $\overline{a}$, $\overline{e}$, $\overline{i}$ abhängt und da stets

$$\left(\overline{a}\right)_s^{\cdot}=\dot{a}_s \quad , \quad \left(\overline{e}\right)_s^{\cdot}=\dot{e}_s \quad , \quad \left(\overline{i}\right)_s^{\cdot}=\left(i\right)_s^{\cdot} \quad , \quad \left(\overline{P_d}\right)_s^{\cdot}=\left(P_d\right)_s^{\cdot} \quad , \quad \text{(23.357)}$$

lautet ihre säkulare Variation

$$\left.\frac{d\overline{P_d}}{dt}\right|_s \;=\; \left(P_d\right)_s^{\cdot} \;=\; \frac{\partial\overline{P_d}}{\partial\overline{a}}\dot{a}_s+\frac{\partial\overline{P_d}}{\partial\overline{e}}\dot{e}_s+\frac{\partial\overline{P_d}}{\partial\overline{i}}\left(i\right)_s^{\cdot} \qquad \text{(23.358)}$$

mit

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{a}} = 3\pi \sqrt{\frac{\overline{a}}{\mu}} - \\ -\frac{3}{4}\pi J_2 \frac{R_E^2}{\sqrt{\mu \overline{a}^3}\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.359}$$

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{e}} = 3\pi J_2 \frac{\overline{e}\, R_E^2}{\sqrt{\mu \overline{a}}\left(1-\overline{e}^2\right)^3}\left[2+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(10+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.360}$$

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{i}} = 3\pi J_2 \frac{R_E^2\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)}{\sqrt{\mu \overline{a}}\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\cos\overline{i}\sin\overline{i}+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.361}$$

Im Fall im Mittel kreisförmiger Bahnen ($\overline{e} \equiv \overline{e}_0 = 0$) vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$\overline{P_d}\left[\overline{e}=0\right] = 2\pi \sqrt{\frac{\overline{a}^3}{\mu}}\left[1+\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}^2}\left(1-4\cos^2\overline{i}\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.362}$$

sowie

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{a}}\left[\overline{e}=0\right] = 3\pi\sqrt{\frac{\overline{a}}{\mu}}-\frac{3}{2}\pi J_2\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu a^3}}\left(1-4\cos^2\overline{i}\right)+O\left(J_2^2\right)$$

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{e}}\left[\overline{e}=0\right] = O\left(J_2^2\right) \tag{23.363}$$

$$\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{i}}\left[\overline{e}=0\right] = 24\pi J_2\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu a}}\cos\overline{i}\sin\overline{i}+O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Die Veränderung der mittleren drakonitischen Umlaufzeit verursacht langfristig einen Fehler in der Knotenüberflugzeit, der folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

Es sei $\overline{P}_{d\,0}$ die mittlere drakonitische Umlaufzeit, welche aus Formel (23.356) mit den Epocheelementen $\overline{a}_0 = \overline{a}\left(t_0\right)$, $\overline{e}_0 = \overline{e}\left(t_0\right)$ und $\overline{i}_0 = \overline{i}\left(t_0\right)$ berechnet werden kann. Linearisierung um diesen Wert liefert

$$\overline{P_d} \coloneqq \overline{P}_{d\,0} + \left(P_d\right)_s^{\cdot}\,(t-t_0)+\ldots \tag{23.364}$$

Falls $\left(P_d\right)_s^{\cdot} \neq 0$, die mittlere drakonitische Umlaufzeit also gestört wird, dauert der erste drakonitische Umlauf

$$\overline{P}_{d\,1} = t_{\Omega 1}-t_{\Omega 0} = \overline{P}_{d\,0}+\left(P_d\right)_s^{\cdot}\,(t_{\Omega 1}-t_{\Omega 0})$$

bzw.

$$\overline{P}_{d\,1} = \frac{\overline{P}_{d\,0}}{1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}} \quad . \tag{23.365}$$

Nach zwei drakonitischen Umläufen hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit den Wert

$$t_{\Omega 2}-t_{\Omega 1} = \overline{P}_{d\,1}+\left(P_d\right)_s^{\cdot}\,(t_{\Omega 2}-t_{\Omega 1}) \quad ,$$

somit

$$\overline{P}_{d\,2} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,1}}{1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,0}}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^2} \quad . \tag{23.366}$$

Der N_d-te drakonitische Umlauf hat die Dauer

$$\overline{P}_{d\,N_d} \;=\; t_{\Omega N_d} - t_{\Omega,N_d-1} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,0}}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{N_d}} \quad , \tag{23.367}$$

wie man leicht durch vollständige Induktion sieht:

$$\overline{P}_{d\,,N_d+1} \;=\; t_{\Omega,N_d+1} - t_{\Omega N_d} \;=\; \overline{P}_{d\,N_d} + \left(P_d\right)_s^{\cdot}\;\left(t_{\Omega,N_d+1} - t_{\Omega N_d}\right)$$

$$\overline{P}_{d\,,N+1} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,N}}{1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,0}}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{N+1}} \quad \text{q.e.d.}$$

Für kleine Variationen $\left(P_d\right)_s^{\cdot}$ kann näherungsweise

$$\frac{1}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \;\approx\; \left[1+\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu} \;\approx\; 1+\nu\left(P_d\right)_s^{\cdot} + O\left(\left(\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right)^2\right) \tag{23.368}$$

gesetzt werden. Damit hat der N_d-te drakonitische Umlauf nach Formel (23.367) näherungsweise die Dauer (= mittlere drakonitische Umlaufzeit)

$$\overline{P}_{d\,N_d} \;\approx\; \overline{P}_{d\,0}\left[1+N_d\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right] \quad . \tag{23.369}$$

Nach zwei drakonitischen Umläufen ist seit der Epoche $t_{\Omega 0}$ das Zeitintervall

$$t_{\Omega 2} - t_{\Omega 0} \;= \overline{P}_{d\,1} + \overline{P}_{d\,2} \;=\; \frac{\overline{P}_{d\,0}}{1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}}\left[1+\frac{1}{1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}}\right] \tag{23.370}$$

vergangen. Nach N_d drakonitischen Umläufen beträgt die Gesamtzeitdauer

$$t_{\Omega N_d} - t_{\Omega 0} \;=\; \overline{P}_{d\,0}\sum_{\nu=1}^{N_d}\frac{1}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \quad , \tag{23.371}$$

wie die vollständige Induktion zeigt:

$$t_{\Omega,N_d+1} - t_{\Omega 0} \;=\; t_{\Omega,N+1} - t_{\Omega N_d} + t_{\Omega N_d} - t_{\Omega 0} \;=\; \overline{P}_{d\,0}\sum_{\nu=1}^{N_d+1}\frac{1}{\left[1-\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \quad . \text{ q.e.d. } \blacktriangleleft$$

Das Zeitintervall für N_d drakonitische Umläufe errechnet sich mit der Näherung (23.369) aus

$$t_{\Omega N} - t_{\Omega 0} \;\approx\; \overline{P}_{d\,0}\left[N_d + \sum_{\nu=1}^{N_d}\nu\;\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right] + O\left(\left(\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right)^2\right) \quad ,$$

somit

$$t_{\Omega N_d} - t_{\Omega 0} \approx N_d \overline{P_{d\,0}} \left[1 + \frac{1}{2} (N_d + 1) (P_d)_s^{\cdot} \right] + O\left(\left((P_d)_s^{\cdot} \right)^2 \right) \quad . \tag{23.372}$$

Nach N_d drakonitischen Umläufen beträgt der Zeitfehler bei Knotenüberflug

$$\Delta t_\Omega \approx \frac{1}{2} N_d (N_d + 1) \overline{P_{d\,0}} (P_d)_s^{\cdot} \quad . \tag{23.373}$$

Für große N_d gilt die allgemeine Aussage:

- *Der Fehler in der Knotenüberflugzeit wächst quadratisch mit der Anzahl der drakonitischen Umläufe an.*

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen ergeben sich die Bahnelemente[1]

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498 \quad .$$

Mit den Variationen

$$\dot{a}_s = -1.28892 \times 10^{-7}\ \text{km/s} \quad ,$$

(was maximalem Solarfluss in der betreffenden Bahnhöhe entspricht[2]) und der Annahme[3]

$$(i)_s^{\cdot} = -9°.68737343 \times 10^{-5}\ \ 1/\text{d}$$

sowie der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\overline{Pd}_0 = 1^h\,40^m\,27^s.9 = 6027^s.9$$

folgen die partiellen Ableitungen nach den Formeln (23.359) und (23.361)

$$\left.\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \bar{a}}\right|_0 = 1^s.262\,\frac{1}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \bar{i}}\right|_0 = -9^s.089\,\frac{1}{\text{rad}} \quad ,$$

somit

$$\left(P_d\right)_s^{\cdot} = -1.62522 \times 10^{-7} \quad .$$

Nach $N_d = 5235$ Umläufen, also etwa einem Jahr, beträgt die mittlere drakonitische Umlaufzeit nach Formel (23.369) $5^s.12855$ weniger als zu Beginn, also nur noch

$$\overline{P_{d\,N_d}} = 6022^s.8 \quad .$$

Der Satellit überfliegt den Knoten infolge der säkularen Variationen in der großen Bahnhalbachse und der Inklination nach Formel (23.373) um

---

[1] siehe in Abschnitt 28.8.5

[2] nach CAPELLARI ET AL. [1976], p. 4-55

[3] aus H. KLINKRAD [1982]

$$\Delta t_\Omega \;=\; 7^h\,27^m\,33^s.1$$

früher als wenn die Bahnelemente nicht infolge von Bewegungseinflüssen („Störungen“) verändert würden. ◀

23.12.2 Die Spurdrift

Die vom Satelliten überflogene Bodenspur weicht infolge der langfristigen Variationen in den mittleren Elementen im Laufe der Zeit von einer Sollspur ab, welche durch die Vorgabe der mittleren Elemente ausgewählt wurde. Die oskulierenden Variationen der Spur pro drakonitischem Umlauf können in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden. Als Referenz der Spur einer Satellitenbahn wollen wir im Rahmen der drakonitischen Bewegung den Knotenüberflug wählen. Die charakterisierende Größe ist die mittlere geographische Länge $\overline{\lambda_\Omega}$ des aufsteigenden Bahnknotens. Sie werde um einen Anfangswert entwickelt

$$\overline{\lambda_\Omega} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \qquad (23.374)$$

Die Wanderung des aufsteigenden Knotens von $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$ zu $\overline{\lambda_\Omega}$ im Zeitintervall $t-t_0$ charakterisiert die Verschiebung der „Spur“ des Satelliten auf der Erdoberfläche, also die *„Spurdrift“* im Zeitintervall.

Die säkulare Drift der Knotenlänge zur Epoche t_0 ist nach Formel (23.224) auf (Seite 172) gegeben

$$\dot{\lambda}_{\Omega s0} \;=\; \dot{\Omega}_{s0} - \dot{\Theta} \quad . \qquad (23.375)$$

$\dot{\Omega}_{s0}$ ist die nominale säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, $\dot{\Theta}$ die tropische Rotation des Zentralkörpers. $\dot{\Omega}_{s0}$ enthält nach Formel (20.60) (Band III, Abschnitt 20.2.3) nur die Anfangs-*Kepler*lemente $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$. Somit hat die Variation der Knotenlängendrift infolge der langfristigen Variationen in den mittleren Epocheelementen die Form

$$\ddot{\lambda}_{\Omega s0} \;=\; \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{i}_0}\,(i)_s^{\cdot} \quad . \qquad (23.376)$$

Die hier benötigten partiellen Ableitungen lauten, wenn in $\dot{\Omega}_{s0}$ nur der Einfluss von J_2 berücksichtigt wird,

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{a}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{a}_0} \;=\; \frac{21}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + \ldots \qquad (23.377)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{e}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{e}_0} \;=\; -6\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\,\overline{e}_0}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}^2\right)^3}\cos\overline{i}_0 + \ldots \qquad (23.378)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{i}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{i}_0} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\sin\overline{i}_0 + \ldots \quad . \qquad (23.379)$$

Die partiellen Ableitungen wurden aus den Formeln (21.4) bis (21.6) erhalten. Wenn die mittlere Knotenlänge in Formel (23.374) nach dem Zeitraum $t-t_0$ den nominalen Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}(t-t_0)$ annimmt, ist

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) \;\coloneqq\; \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_{\Omega s0}(t-t_0)^2 + \ldots \tag{23.380}$$

der Anteil der Spurdrift, der eine Folge der Variationen der Anfangsbahnelemente ist. Er wird *Spurfehler* genannt. Für ihn gilt:

- *Der Spurfehler wächst quadratisch mit der Zeit.*

Nach dem Zeitintervall $t-t_0$ befindet sich der Satellit nicht notwendig wieder im aufsteigenden Knoten seiner Bahn, sondern kann sich an einer beliebigen anderen wenn auch wohldefinierten Stelle seiner Bahn aufhalten. Wird verlangt, dass der Satellit nach dem Zeitintervall $t-t_0$ wirklich den Knoten überfliegt, muss auch die Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit berücksichtigt werden. Die Berechnung der Spurdrift erfordert daher zunächst die Kenntnis der Variation der Knotenlängenverschiebung.

23.12.3 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängendrift

Die Anfangsepoche werde in den Moment des ersten Knotenüberflugs $t_{\Omega 0}$ gelegt. Die dann gültigen mittleren Bahnelemente definieren als Epocheelemente die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}}$ sowie die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$. Nach N_d drakonitischem Umläufen hat die mittlere Knotenlänge nach Formel (23.374) den Wert

$$\overline{\lambda_{\Omega\,N_d}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}(t_{\Omega N_d} - t_{\Omega 0}) + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_{\Omega s0}(t_{\Omega N_d} - t_{\Omega 0})^2 + \ldots \tag{23.381}$$

Mit dem Näherungsausdruck für das Zeitintervall über N_d drakonitische Umläufe aus Formel (23.372) lautet dieser Ausdruck

$$\overline{\lambda_{\Omega\,N_d}} \;= \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0} N_d \overline{P_{d\,0}}\left[1+\frac{1}{2}\left(N_d+1\right)\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right] + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_{\Omega s0} N_d^2 \overline{P_{d\,0}}^2\left[1+\frac{1}{2}\left(N_d+1\right)\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^2 + \ldots$$

Unter der Annahme

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_d\right)_s^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{23.382}$$

wird

$$\overline{\lambda_{\Omega\,N_d}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0} N_d \overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}_{\Omega s0} N_d \left(N_d+1\right)\overline{P_{d\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_{\Omega s0} N_d^2 \overline{P_{d\,0}}^2 + \ldots \tag{23.383}$$

Die Epocheelemente definieren den Sollwert der Knotenlänge nach N drakonitischen Umläufen mit dem Wert

$$\overline{\lambda_{\Omega N_d 0}} \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N_d\, \overline{P_{d0}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N_d\, \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \quad , \tag{23.384}$$

wobei die zur Epoche gültige Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf mit

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \;:=\; \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, \overline{P_{d0}} \tag{23.385}$$

bezeichnet werde. Die Variationen der Nominalbahnelemente verursachen somit die Drift der Knotenlänge bei Knotenüberflug

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega N_d}} - \overline{\lambda_{\Omega 0}} - N_d\, \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \tag{23.386}$$

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;=\; \frac{1}{2} N_d\, \overline{P_{d0}} \left[\dot{\lambda}_{\Omega s0} \left(N_d + 1\right) \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\, N_d\, \overline{P_{d0}} \right] \quad . \tag{23.387}$$

Das N_d-te Knotenlängenintervall hat daher die Länge

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}} \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega N_d}} - \overline{\lambda_{\Omega, N_d - 1}} \quad , \tag{23.388}$$

somit

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}} \;=\; \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N_d\, \overline{P_{d0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} \ddot{\lambda}_{\Omega s0} \left(2 N_d - 1\right) \overline{P_{d0}}^2 + \ldots \tag{23.389}$$

Die Veränderung des Wertes der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt dann nach N drakonitischen Umläufen

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;:=\; \overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \quad , \tag{23.390}$$

somit

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;=\; \left[\dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N_d \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} \left(2 N_d - 1\right) \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\, \overline{P_{d0}} \right] \overline{P_{d0}} + \ldots \tag{23.391}$$

23.12.4 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängenverschiebung

Die Kenntnis der Variation der Knotenlängenverschiebung kann für manche Untersuchungen und zur Klärung der Zusammenhänge von Nutzen sein. Sie wird daher im Folgenden hergeleitet und zu den bisher behandelten Variationen der drakonitischen Bewegung in Relation gestellt.

Nach N_d drakonitischen Umläufen hat die Knotenlängenverschiebung nach Formel (23.389) die Variation

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right)_s^{\cdot} &= \left(\Delta\lambda_{\Omega N_d}\right)_s^{\cdot} = \\ &= \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{d\,0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,N_d\,\overline{P_{d\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \\ &\quad + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,N_d\left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,N_d\left(P_d\right)_s^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}\,\dddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(2N_d - 1\right)\left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + \\ &\quad + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(2N_d - 1\right)\overline{P_{d\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot\cdot} + \ldots\end{aligned}$$

Hier dürfen neben den Näherungen

$$\begin{aligned}\left(P_d\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dddot{\lambda}_{\Omega s0} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_d\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{23.392}$$

angenommen werden. Es bleibt daher

$$\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right)_s^{\cdot} = \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{d\,0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots = \left(\Delta\lambda_{\Omega o}\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{23.393}$$

Die säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung durch die säkularen Variationen in den Elementen ist mit $\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ durch

$$\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{i}_0}\left(i\right)_s^{\cdot} \tag{23.394}$$

gegeben. Im Fall von Erdsatellitenbahnen ist die durch das Erdschwerefeld verursachte säkulare Variation $\dot{\Omega}_{s0}$ aus Formel (20.15) (Band III) und die mittlere drakonitische Umlaufzeit aus Formel (23.356) (auf S. 244) gegeben. Damit ergibt sich in erster Näherung der Ausdruck (es ist $\overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right), \overline{n}_0 = \sqrt{\mu/\overline{a}_0^3}$)

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} &= -3\pi\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 - \\ &\quad - 2\pi\,\frac{\dot{\Theta}}{\overline{n}_0}\left\{1 + \frac{3}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left[1 + \sqrt{1-\overline{e}_0^2} - \left(5 + 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\} + O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{23.395}$$

sowie für mittlere Kreisbahnen

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left[\overline{e}_0 = 0\right] &= -2\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}} - \\ &\quad - 3\pi\,J_2\,R_E^2\left[\frac{\cos\overline{i}_0}{\overline{a}_0^2} + \frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0}}\left(1 - 4\cos^2\overline{i}_0\right)\right] \\ &\quad + O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{23.396}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{a}_0} &= -3\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + \\
&\quad + \frac{3}{4}\pi J_2 \dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0^3}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right] + \\
&\quad + O\left(J_2^2\right)\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right] \qquad (23.397)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{e}_0} &= -12\pi J_2 \frac{\overline{e}_0 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}\cos\overline{i}_0 + \\
&\quad + 3\pi J_2 \frac{\overline{e}_0 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}\frac{\dot{\Theta}}{\overline{n}_0}\left[-\left(2+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)+\left(10+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right] + \\
&\quad + O\left(J_2^2\right) \qquad (23.398)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{i}_0} &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\sin\overline{i}_0 - \\
&\quad - 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\frac{\dot{\Theta}}{\overline{n}_0}\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos\overline{i}_0\sin\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad , \qquad (23.399)
\end{aligned}$$

im Fall kreisförmiger Bahnen ($\overline{e}_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{a}_0}\left[\overline{e}_0 = 0\right] &= -3\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}_0^3}\cos\overline{i}_0 + \\
&\quad + \frac{3}{2}\pi J_2 \dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0^3}}\left(1-4\cos^2\overline{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right)\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right] \\
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{e}_0}\left[\overline{e}_0 = 0\right] &= O\left(J_2^2\right) \qquad (23.400) \\
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left[\overline{e}_0 = 0\right] &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2}\sin\overline{i}_0 - 24\pi J_2 \dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0}}\cos\overline{i}_0\sin\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad .
\end{aligned}$$

Mit dem jetzt bekannten $\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ können die Formeln (23.383) bis (23.391) zur Berechnung der Knotenlänge bei Überflug des Satelliten sowie der Knotenlängenverschiebung und ihrer Driften umformuliert werden. Man erhält

$$\overline{\lambda_{\Omega N_d}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N_d\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N_d}}\right) \qquad (23.401)$$

mit dem Spurfehler

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N_d}}\right) = \frac{1}{2}N_d^2\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\,\overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}N_d\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \qquad (23.402)$$

sowie die Knotenlängenverschiebung im N_d-ten Umlauf

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}} \;=\; \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right) \tag{23.403}$$

mit der Abweichung vom Nominalwert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;=\; \left(N_d - \frac{1}{2}\right)\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\,\overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\,\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{23.404}$$

BEISPIEL: Für die Bahn (siehe auch Beispiel in Abschnitt 23.12.1)

$$\bar{a}_0 \;=\; 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 \;=\; 98°.498$$

wird

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 \;=\; -9.23669901\times10^{-5}\;\;\frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 \;=\; 8.68737343\times10^{-3} \quad .$$

Mit den säkularen Variationen

$$\dot{a}_s \;=\; -1.28892\times10^{-7}\;\;\text{km/s} \quad , \quad \left(i\right)_s^{\cdot} \;=\; -9°.68737343\times10^{-5}\;\;1/\text{d}$$

lautet die säkulare Variation der mittleren Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf zur Epoche nach Formel (23.394) (auf Seite 251)

$$\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \;=\; 0''.209238265\;\;1/\text{d} \quad .$$

Von besonderem Interesse sind hier die Anteile der Knotenlängenvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herrühren. Es ist

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 \dot{a}_s \;=\; 0''.212165562\;\;\frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 \left(i\right)_s^{\cdot} \;=\; -2''.927297344\times10^{-3}\;\;\frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Die Variation der Knotenlänge wird also im Wesentlichen durch die Variation der großen Bahnhalbachse beeinflusst. Entsprechend dem numerischen Beispiel in Abschnitt 23.11 (auf Seite 238) wird

$$\left(P_d\right)_s^{\cdot} \;=\; -1.62522\times10^{-7} \quad .$$

Mit der mittleren drakonitischen Epocheumlaufzeit $\overline{P_{d\,0}}$ = 6027*s*.9 lautet der Spurfehler nach 5235 drakonitischen Umläufen (ungefähr ein Jahr) mit Formel (23.402) (auf Seite 252)

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;=\; 55°.575 \quad ,$$

wobei der zweite Teil in Formel (23.402) nur den Wert 0°.011 ausmacht, also vernachlässigbar ist. Die Knotenlängenverschiebung hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ = –25°.116279 mit Formel (23.404) auf S. 253 um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N_d}}\right) \;=\; 0°.021228$$

entsprechend Formel (23.403) (auf Seite 253) auf

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega}_{N_d} = -25°.09051$$

geändert. ◄

Anmerkungen: Die in diesem Beispiel getrennt aufgeführten Variationsanteile können entgegengesetztes Vorzeichen und unter Umständen sogar dem Betrag nach nahezu gleich groß sein, so dass auch bei starker Einzelvariation nur eine schwache Gesamtvariation resultieren kann. Die Variation in der Inklination darf nur über einige Monate als konstante somit säkulare Variation aufgefasst werden. Im Allgemeinen ist sie jedoch langperiodisch. Ähnliches gilt auch für die Variation der großen Bahnhalbachse, die wegen der mehrfach periodischen Variabilität des Solarflusses ebenfalls über Monate, allenfalls ein bis zwei Jahre als konstant aufgefasst werden darf. Diese wechselseitigen Variabilitäten wirken sich auf die Drift der Knotenlänge sehr unterschiedlich aus, die für langfristige Analysen daher sehr sorgfältig mit berücksichtigt werden müssen.◄

Im operationellen Betrieb eines Satelliten werden die aktuelle Knotenlänge λ_Ω aus der beobachteten Bahn und die zugehörige mittlere Knotenlänge $\overline{\lambda_\Omega}$ ständig berechnet und mit der Solllänge $\overline{\lambda_{\Omega N}}$ verglichen, die aus den (mittleren) Sollwerten analytisch erhalten wird. Die wahre Abweichung beträgt also

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)_w := \overline{\lambda_\Omega} - \overline{\lambda_{\Omega N_d}} \quad , \tag{23.405}$$

wobei der Sollwert aus den gegebenen Nominalwerten

$$\overline{\lambda_{\Omega N_d}} := \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N_d\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \tag{23.406}$$

errechnet wird. Der mittlere Verlauf der Spurabweichung nach N_d drakonitischen Umläufen wird daher aus

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)_w = \overline{\lambda_\Omega} - \left(\overline{\lambda_{\Omega 0}} + N_d\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right) \tag{23.407}$$

erhalten, der entsprechende wahre Verlauf aus dem entsprechenden oskulierenden Wert $\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$. Diese Größe ist jetzt allerdings von dem für die Mittelung verwendeten analytischen Bahnmodell abhängig und muss daher im Vergleich mit der wahren Bewegung überwacht werden.

23.12.5 Korrekturzyklus für Spurstabilität

Überschreitet der wahre Fehler in der Knotenlänge $\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$ aus Formel (23.407) ein vorgesehenes Toleranzintervall $\Delta\lambda_k$

$$\left|\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w\right| > \left|\Delta\lambda_k\right| \quad ,$$

muss die Bahn korrigiert werden. Es wird angestrebt, möglichst selten korrigieren zu müssen, so dass die gesamte Toleranzbreite $\pm\Delta\lambda_k$ ausgenutzt werden kann.

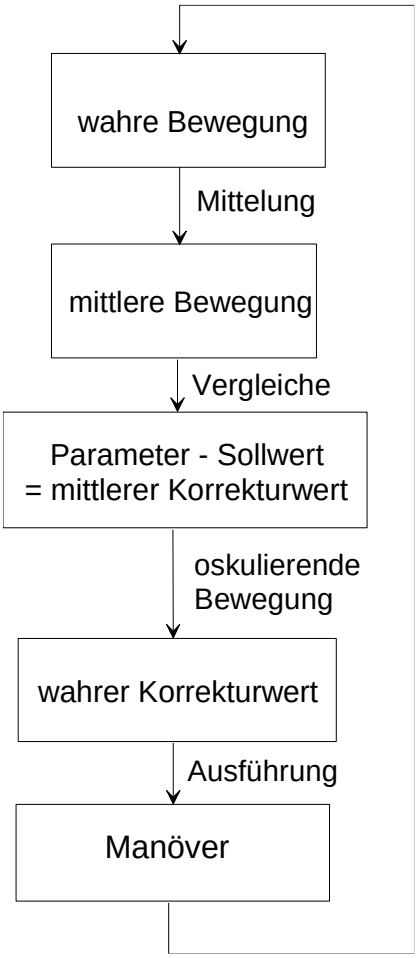


Bild 23-52: Berechnung von Manöver Parametern

Für eine Abschätzung des Zeitbedarfs, nach dem zu korrigieren ist, wird die wahre Abweichung $\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$ durch den vor der Mission abschätzbaren Spurfehler $\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right)$ aus Formel (23.402) ersetzt. Da das Korrekturintervall ohne Einschränkung in der Form $\pm\Delta\lambda_k$ angenommen werden darf und die säkularen Variationen der Elemente eine stetige Variation der Knotenlängendrift gemäß Formel (23.393) verursachen, kann man für einen Korrekturzyklus folgendermaßen vorgehen wie in Bild 23-53 (auf Seite 257) anschaulich dargestellt wird. Es seien $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$ und entsprechend $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$ die Sollwerte in großer Halbachse, Exzentrizität, Inklination und Knotenlänge. Die Anfangswerte für Halbachse, Exzentrizität und Inklination für einen Korrekturzyklus werden durch Änderungen der Sollwerte um gewisse noch zu berechnende Beträge $\Delta\bar{a}$, $\Delta\bar{e}$, $\Delta\bar{i}$ so gewählt, dass die Knotenlänge das eine Ende des erlaubten Knotenintervalls erreicht (Punkt 1 in Bild 23-53):

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \Delta\bar{a} \quad , \quad \bar{e}_1 = \bar{e}_0 + \Delta\bar{e} \quad , \quad \bar{i}_1 = \bar{i}_0 + \Delta\bar{i} \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 1}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\lambda_k \quad .$$

Für das einmalige Durchlaufen des gesamten erlaubten Toleranzintervalls $2\Delta\lambda_k$ kann mit Formel (23.402) die dazu benötigte Anzahl von drakonitischen Umläufen berechnet werden:

$$N_d = \frac{1}{\overline{P_{d\,0}}\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}}\left[-\frac{1}{2}\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \sqrt{\frac{1}{4}\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}^{2}\left(P_d\right)_s^{\cdot\,2} + 4\overline{P_{d\,0}}\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\Delta\lambda_k}\right] \quad . \qquad (23.408)$$

(In dieser Formel kann das negative Zeichen vor der Wurzel nicht stehen, da N_d stets als nicht negativ angenommen werden kann). Wird N_d in der Zeitformel (23.372) (auf Seite 247) eingesetzt, wird das benötigte Zeitintervall Δt_k zum einmaligen Durchlaufen des Toleranzintervalls erhalten. Somit wird das andere Ende des erlaubten Gesamtintervalls erreicht (Punkt 3 in Bild 23-53)

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_0 \quad , \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_0 \quad , \quad \bar{i}_3 = \bar{i}_0 \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 3}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} - \Delta\lambda_k \quad .$$

Die Elemente variieren nach weiteren $2\Delta\lambda_k$, da jetzt „unterhalb“ der Sollwerte, wieder im doppelten Längenintervall zurück bis zu den Werten (Punkt 5 in Bild 23-53)

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 - \Delta\bar{a} \quad , \quad \bar{e}_1 = \bar{e}_0 - \Delta\bar{e} \quad , \quad \bar{i}_1 = \bar{i}_0 - \Delta\bar{i} \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 5}} = \overline{\lambda_{\Omega 1}} \quad .$$

Erst jetzt werden die Bahnelemente korrigiert, und zwar die Halbachse um den Wert $2\Delta\bar{a}$, die Exzentrizität um $2\Delta\bar{e}$ und die Inklination um $2\Delta\bar{i}$. Da während eines Zyklus das Intervall $2\left|\Delta\lambda_k\right|$ zweimal durchlaufen wird, beträgt der gesamte Korrekturzyklus wegen der quadratischen Gleichung (23.380) das Doppelte des Zeitintervalls Δt_k , also

$$Z_\lambda = 2\Delta t_k \quad . \qquad (23.409)$$

Für Abschätzungen ist der Fehler nicht allzu groß, wenn in Formel (23.408) sowie in Formel (23.372) die Faktoren mit $\left(P_d\right)_s^{\cdot}$ vernachlässigt werden. Man erhält dann in guter Näherung die bekannte Formel

$$Z_\lambda \approx 4\sqrt{\frac{\left|\Delta\lambda_k\right|\overline{P_{d\,0}}}{\left|\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\right|}} \quad . \qquad (23.410)$$

In der Mitte des erlaubten Längenintervalls wird der Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$ erreicht (Punkt 2 bzw. Punkt 4 in Bild 23-53). Dies ist nach dem ersten Zeitintervall $\Delta t_k / \sqrt{2} \approx 0.3\Delta t$ der Fall bzw. vor Ende des Zyklus. Die wahre Knotenlänge ist also zu etwa 70 % in der „linken“ Intervallhälfte. Diese Aussagen können in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

- *Für positive Fehlerdriften $\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_s^{\cdot}$ liegt der Scheitel der Korrekturparabel im Westen, der Zyklus beginnt mit einer geographischen Länge östlich des Sollpunktes, zum halben Zyklus westlich, am Ende wieder im Osten. Während 70 % eines Korrekturzyklus liegt der wahre Knoten westlich des Sollpunktes.*

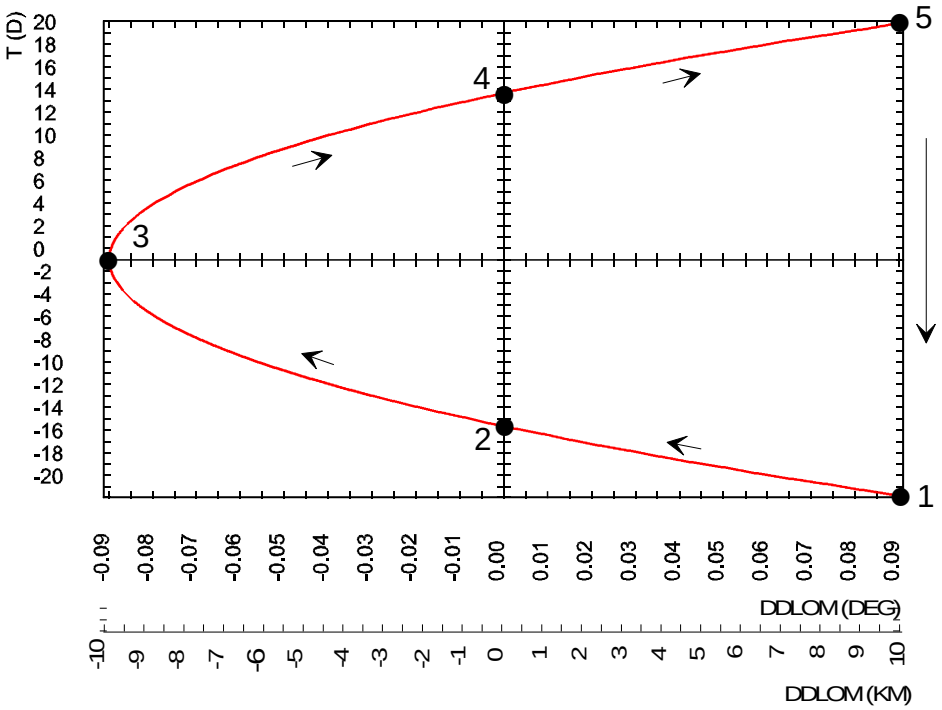


Bild 23-53: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Zeit für das Toleranz-Knotenlängenintervall ± 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

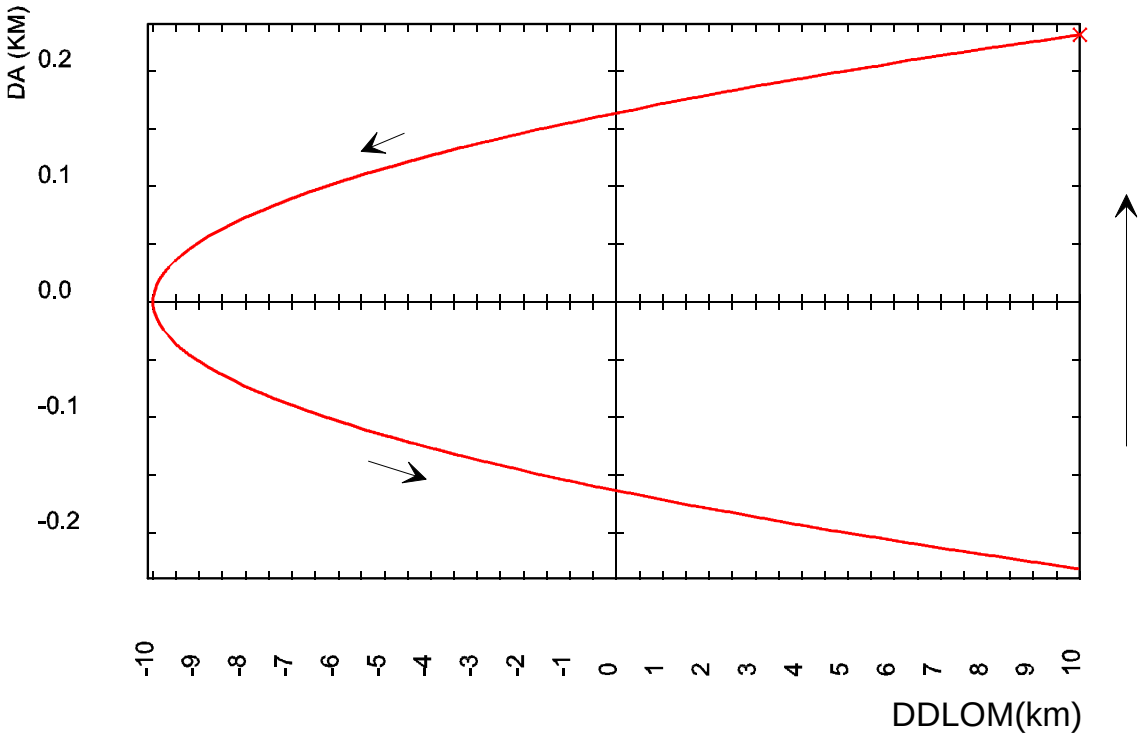


Bild 23-54: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Knotenlängenintervall ±10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

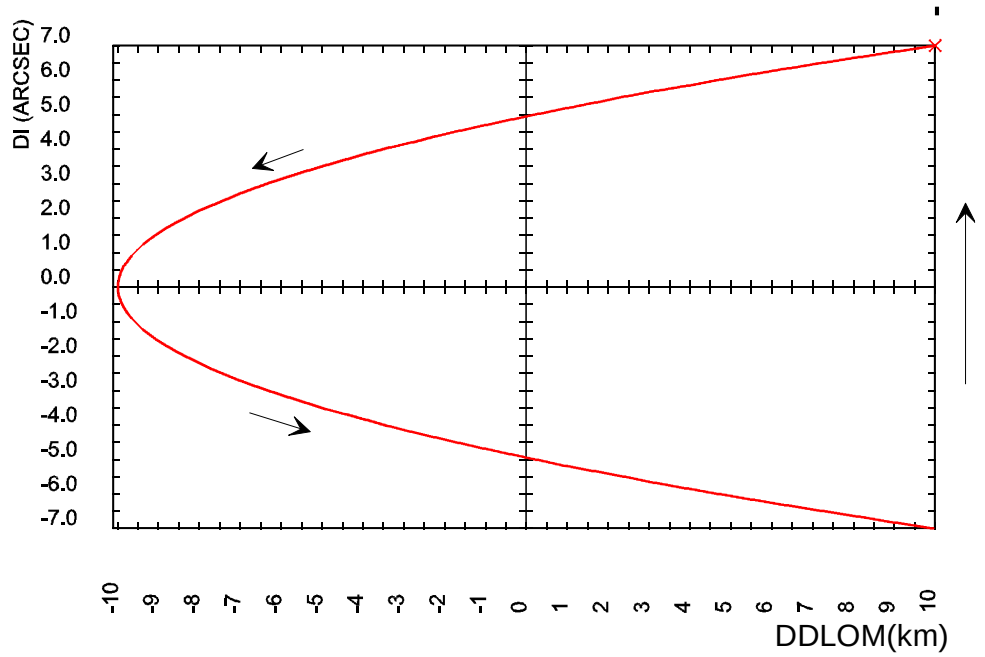


Bild 23-55: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Inklination für das Toleranz-Knotenlängenintervall ± 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn (siehe auch die vorhergehenden Beispiele) mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen mit den Soll-Bahnelementen

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

mit der Variation

$$\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} = 0''.209238265 \;\; 1/\text{d} \quad ,$$

der drakonitischen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{d\,0}} = 6027^s.9$ und dem vorgegebenen Toleranzintervall

$$\Delta\lambda_k = \pm 10\,\text{km} \cong 0°.0898$$

wird für den Korrekturzyklus nach Formel (23.410) $Z_\lambda = 41^d.53$ erhalten. ◄

In Bild 23-53 auf Seite 257 ist der Fehler in Knotenlänge (in Einheiten km bzw. im Gradmaß) auf die Mitte des erlaubten Knotenlängenintervalls $2\Delta\bar{\lambda}_k$ reduziert, entsprechend dem Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$. Das Zeitintervall umfasst das doppelte Durchlaufen des Toleranzintervalls, das vollständig ausgenutzt wird. Entscheidend ist somit die Wahl der Anfangsbahnelemente $\bar{a}_1$, $\bar{e}_1$, $\bar{i}_1$ bei Beginn des Zyklus in Punkt 1. Ergänzend zeigen Bild 23-54 auf Seite 257 und Bild 23-55 auf Seite 258 die entsprechenden Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination über dem Toleranzintervall. Der Verlauf der Korrektur nach Beendigung eines Zyklus ist jeweils durch einen Pfeil markiert.

Am Ende des Korrekturzyklus muss die Bahn korrigiert werden, die große Bahnhalbachse um den Wert

$$2\,\Delta\bar{a} \;=\; \dot{a}_s\, Z_\lambda \quad , \tag{23.411}$$

die Exzentrizität um

$$2\,\Delta\bar{e} \;=\; \dot{e}_s\, Z_\lambda \tag{23.412}$$

und die Inklination um

$$2\,\Delta\bar{i} \;=\; \left(i\right)_s^{\cdot}\, Z_\lambda \quad . \tag{23.413}$$

Die hier erforderlichen Bahnkorrekturen werden in transversaler und eventuell auch normaler Richtung durchgeführt. Die Bahnkorrekturen in transversaler Richtung werden am geschicktesten im Perizentrum der Bahn angebracht, da dann tangentialer und transversaler Richtungsvektor übereinstimmen. Aus dem absoluten Geschwindigkeitsvektor im *Leibniz*system[1]

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = V_R\,\mathbf{r}_0 + V_T\,\mathbf{q}_0 \tag{23.414}$$

folgt der Beschleunigungsvektor (4.303)

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \tag{23.415}$$

mit[2]

$$b_R = \dot{V}_R - \dot{\zeta}\,V_T \;\;,\;\; b_T = \dot{r}\,\dot{\zeta} + \dot{V}_T = \frac{\dot{G}}{r} \;,\; b_N = \dot{V}_N = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{23.416}$$

Wird das Korrekturmanöver im Perizentrum der Bahn durchgeführt, ist kein Manöver in radialer Richtung erforderlich. Es bleibt daher das Manöver in transversaler Richtung zu betrachten. Dazu wird

$$\dot{V}_T = -\frac{G}{r^2}\dot{r} + \frac{1}{r}\dot{G} \quad . \tag{23.417}$$

Mit den Beziehungen (11.68), (11.69) und (11.81) wird

$$\dot{G} = \frac{\mu}{2G}\left[\left(1-e^2\right)\dot{a} - 2\,a\,e\,\dot{e}\right] \tag{23.418}$$

und die (23.417) entsprechende Differenzengleichung lautet

$$\Delta V_T = -\frac{G}{r^2}\Delta r + \frac{\mu}{2\,r\,G}\left[\left(1-e^2\right)\left(2\,\Delta\bar{a}\right) - 2\,a\,e\left(2\,\Delta\bar{e}\right)\right] \quad . \tag{23.419}$$

Der Satellit hat im Perizentrum keine radiale Bahnänderung $\left(\Delta r\left[\upsilon = 0°\right] = 0\right)$ und die Geschwindigkeit (12.82) beträgt

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}} \quad . \tag{23.420}$$

Dies führt (im Rahmen einer *Kepler*bewegung) im Perizentrum auf das transversale Geschwindigkeitsinkrement im Rahmen der in diesem Abschnitt behandelten Manöver

---

1 Siehe etwa Formel (4.290) in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

2 Unter Verwendung der Beziehungen (4.304), (4.306), (4.307) und (4.315)

$$\Delta V_T\left[\upsilon = 0°\right] = \frac{\mu}{2a^2 V_P}\left(2\Delta\bar{a}\right) - \frac{eV_P}{\sqrt{1+e}}\left(2\Delta\bar{e}\right) \tag{23.421}$$

sofern Fehlergrößen in Halbachse und Exzentrizität vorgegeben sind.

Wird ein Bahnmanöver aus der Bahnebene heraus gewünscht, muss das Geschwindigkeitsinkrement in normaler Richtung ΔV_N bestimmt werden. Da (siehe Formel (4.391)) $(i)^{\cdot} = \dot{\eta}\cos u$ wird nach der letzten der Formeln in (23.416)

$$\Delta V_N = \frac{G}{r\cos u}\left(2\Delta\bar{i}\right) \quad . \tag{23.422}$$

und mit $G = \sqrt{\mu p}$ auch

$$\Delta V_N \;=\; \frac{p}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1}{\cos u}\left(2\Delta\bar{i}\right) \tag{23.423}$$

benötigt, wobei, um den Schub zu minimieren, in einem Knoten (also $\cos u = 1$) korrigiert werden sollte.

BEISPIEL: Es werden unterschiedliche Einflüsse auf das Spurverhalten der (schon in den vorhergehenden Beispielen behandelten) Bahn

$$\bar{a}_0 \;=\; 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 \;=\; 98°.498$$

abgeschätzt. Berücksichtigt wird maximale ($\rho_{\max}$) und minimale ($\rho_{\min}$) Luftdichte als Folge der Sonnenaktivität und unterschiedliche Einflüsse durch die Sonnengravitation. Entsprechend sind die säkularen Variationen in Halbachse bei

$$\rho_{\min} : \dot{a}_{s,I} \;=\; -1.12016\times10^{-8} \;\text{ km/s}$$
$$\rho_{\max} : \dot{a}_{s,II} \;=\; -1.28892\times10^{-7} \;\text{ km/s}$$

und in Inklination (berücksichtigend tageszeitliche [1, 2] bzw.[3, 4] und jahreszeitliche [1, 3] bzw. [2, 4] Schwankungen[1]):

$$(i)^{\cdot}_{s,1} \;=\; -4°.12\times10^{-5}\;\text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 11^h, \text{Juni}\right)$$
$$(i)^{\cdot}_{s,2} \;=\; -9°.36\times10^{-5}\;\text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 9^h\,40^m, \text{Juni}\right)$$
$$(i)^{\cdot}_{s,3} \;=\; -8°.00\times10^{-5}\;\text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 11^h, \text{Dezember}\right)$$
$$(i)^{\cdot}_{s,4} \;=\; -12°.12\times10^{-5}\;\text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 9^h\,40^m, \text{Dezember}\right)$$

Dies bewirkt die säkularen Variationen in der Knotenlänge im Winkelmaß

1 aus Klinkrad [1982]

$(\Delta\lambda_\Omega)_s^{\cdot}$	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	0".0171509 1/d	0".0155124 1/d	0".0159377 1/d	0".0143800 1/d
$\dot{a}_{s,II}$	0".2108769 1/d	0".2092383 1/d	0".2096637 1/d	0".2081062 1/d

Tabelle 23-21: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Bogensekunden infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

sowie im Längenmaß

$(\Delta\lambda_\Omega)_s^{\cdot}$	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	0.53 m/d	0.48 m/d	0.49 m/d	0.44 m/d
$\dot{a}_{s,II}$	6.52 m/d	6.47 m/d	6.48 m/d	6.44 m/d

Tabelle 23-22: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Meter infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

Für das Toleranzintervall $\Delta\lambda_k = 10\,\mathrm{km}$ ergeben sich mit Formel (23.410) die Korrekturzyklen

Z_λ	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	145*d*.1	152*d*.6	150*d*.5	158*d*.4
$\dot{a}_{s,II}$	41*d*.4	41*d*.5	41*d*.5	41*d*.7

Tabelle 23-23. Korrekturzyklus für Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Daher sind mit den Formeln (23.411) und (23.413) folgende Änderungen nötig in großer Bahnhalbachse

$2\,\Delta\bar{a}$	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	0.140 km	0.148 km	0.146 km	0.153 km
$\dot{a}_{s,II}$	0.461 km	0.462 km	0.462 km	0.464 km

Tabelle 23-24**:** Änderungen in der großen Bahnhalbachse zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

und in Inklination

$2\Delta\bar{i}$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	21“.5	51“.4	43“.3	74“.0
$\dot{a}_{s,II}$	6“.1	14“.0	12“.0	19“.5

Tabelle 23-25**:** Änderungen in der Inklination zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Der Korrekturbedarf kann mit den Formeln (23.421) und (23.423), da es sich um eine Kreisbahn handelt, näherungsweise aus

$$\Delta V_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}\left(2\Delta\bar{a}\right)$$

$$\Delta V_c = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}}\left(2\Delta\bar{i}\right)$$

abgeschätzt werden. Es ergeben sich die Werte für den Tangentialschub

ΔV_t	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.073 m/s	–0.077 m/s	–0.076 m/s	–0.080 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.241 m/s	–0.241 m/s	–0.241 m/s	–0.243 m/s

Tabelle 23-26**:** Halbachsenkorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Tangentialschub über eine erwartete Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_t	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.368 m/s/2a	–0.369 m/s/2a	–0.364 m/s/2a	–0.369 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–4.252 m/s/2a	–4.242 m/s/2a	–4.242 m/s/2a	–4.257 m/s/2a

Tabelle 23-27**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren

Für den Normalschub sind folgende Werte zu erwarten:

ΔV_c	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.779 m/s	–1.861 m/s	–1.333 m/s	–2.679 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.222 m/s	–0.506 m/s	–0.433 m/s	–0.705 m/s

Tabelle 23-28**:** Inklinationskorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente

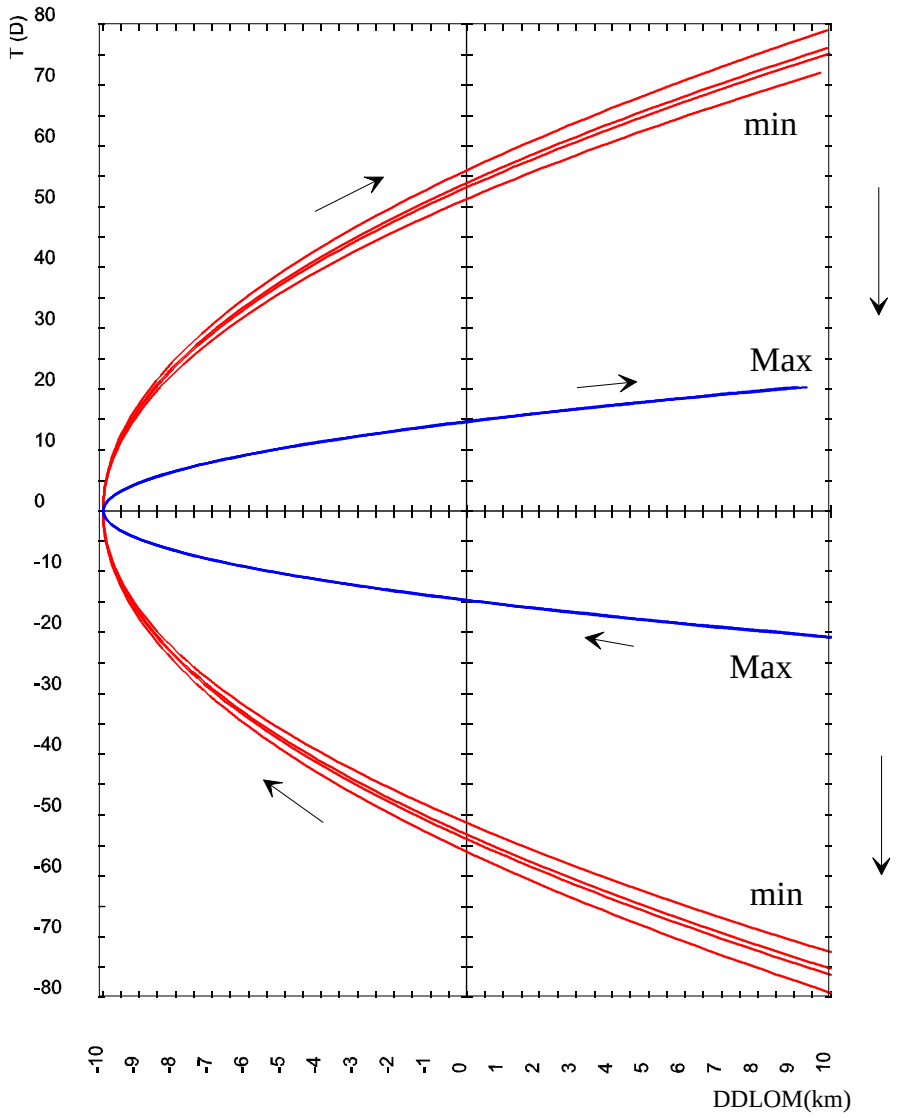


Bild 23-56**:** Korrekturzyklen zur Spurstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\overline{a}_0$ = 7153 km, $\overline{e}_0$ = 0.0, $\overline{i}_0$ = 98°.498. Die vier Kurven für minimalen Solarflux sind (von unten nach oben) folgenden Zeitpunkten für den Überflug des aufsteigenden Knotens zugeordnet: 9:40 Dezember, 9:40 Juni, 11:00 Dezember, 11:00 Juni

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Normalschub über eine Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_c	$(\dot{i})_{s,1}$	$(\dot{i})_{s,2}$	$(\dot{i})_{s,3}$	$(\dot{i})_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–3.922 m/s/2a	–8.908 m/s/2a	–6.470 m/s/2a	–12.353 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–3.917 m/s/2a	–8.907 m/s/2a	–7.622 m/s/2a	–12.350 m/s/2a

Tabelle 23-29**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren

Die vorstehenden Tabellen zeigen, dass die Inklinationskorrektur mehr Schub erfordern kann als die Halbachsenkorrektur. Der zu erwartende Gesamtschub beträgt im günstigsten Fall über 2 Jahre

$$|\Delta V| \approx 12\,\text{m/s/2a} \quad ,$$

im ungünstigsten Fall

$$|\Delta V| \approx 17\,\text{m/s/2a} \quad .$$

Bild 23-56 zeigt die Korrekturzyklen für die in diesem Beispiel behandelten Störeinflüsse. Die äußeren Kurven für minimalen Sonnenstrahlungsfluss (bezeichnet mit 'min') sind nach den unterschiedlichen Variationen in der Inklination aufgefächert, die inneren Kurven für maximalen Strahlungsfluss ('max') zeigen keine wesentlich signifikante Variation infolge der Sonnenanziehung auf die Bahninklination. ◀

23.12.6 Die relative Positionsbewegung

Wird eine Bahn durch äußere Einflüsse verändert, so dass sie nur durch einen Manöverzyklus stabilisiert werden kann, so wirkt sich dieser Vorgang auch auf den Ort eines Satelliten in seiner Bahn aus: seine wahre Position wird von der mittleren ("ungestörten") Position abweichen. Diese relative Abweichung kann in den Koordinaten eines mitgeführten Koordinatensystems als Längenfehler („longtrack error"), Querfehler („crosstrack error") und Höhenfehlers („height error"), also einem „H, C, L –System" berechnet werden. Am empfindlichsten zeigt sich dieser Effekt in einem Längenfehler, der im Folgenden berechnet werden soll. Die hier hergeleiteten Formeln können dann auch bei Untersuchung der relativen Bewegung zweier Satelliten in Formationsflug direkt verwendet werden[1].

Der „Fehlereinfluss" auf die Länge des Satelliten in seiner Bahn kann durch eine Variation der wahren Länge

$$\ell = \upsilon + \omega + \Omega \tag{23.424}$$

auf die Fehler in den Bahnelementen zurückgeführt werden:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{\partial \ell}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial \ell}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial \ell}{\partial i}\dot{(i)} + \ldots \; . \tag{23.425}$$

Diese Beziehung kann angenähert werden durch den Differenzen-Ausdruck

$$\Delta\ell = \frac{\partial \ell}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial \ell}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial \ell}{\partial i}\Delta i + \ldots . \tag{23.426}$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{\partial \upsilon}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial a} \tag{23.427}$$

mit

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial a} = \frac{\partial \upsilon}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial a} \quad . \tag{23.428}$$

Die mittlere Anomalie kann durch den Näherungsausdruck

---

[1] siehe etwa in: KIRSCHNER, M. et al. [2001] in: 'Flight Dynamics Aspects of the GRACE Formation Flying', 16th international symposium on Spaceflight Dynamics, Pasadena, CA, December 3-7, 2001

$$M = \bar{M}_0 + \dot{M}_{0s}\left(t-t_0\right) + \bar{n}_0\left(t-t_0\right) + \delta M \tag{23.429}$$

beschrieben werden. Somit wird

$$\frac{\partial M}{\partial a} \approx \frac{\partial \dot{M}_{0s}}{\partial \bar{a}_0}\left(t-t_0\right) + \frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0}\left(t-t_0\right) + \ldots . \tag{23.430}$$

Ferner ist (siehe etwa Anhang C1)

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial M} = \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}^3} = \frac{p^2}{r^2\sqrt{1-e^2}^3} \quad . \tag{23.431}$$

Aus $\mu = \bar{n}_0^2\,\bar{a}_0^3$ folgt die bekannte Relation

$$\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0} = \frac{d\bar{n}_0}{d\bar{a}_0} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0} \tag{23.432}$$

und näherungsweise auf die Differenzengleichung

$$\Delta\bar{n}_0 = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0}\,\Delta\bar{a}_0 \quad . \tag{23.433}$$

Speziell **für Kreisbahnen** $\left(\bar{e}_0 = 0.0\right)$ ist

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial M} \approx 1 \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0.0 \right.$$

und mit der Bezeichnung

$$\Delta t \coloneqq t - t_0$$

wird für die Variation der Länge in der Bahn

$$\Delta\ell \approx \frac{\partial \upsilon}{\partial M}\,\Delta a \approx \frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0}\left(t-t_0\right)\Delta a \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0.0 \right.$$

bzw. auch

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta t} \approx -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0}\,\Delta a \tag{23.434}$$

Im Fall erdnaher Kreisbahnen hat eine Strecke auf der Bahn die Länge

$$\Delta x = a\,\Delta\ell \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0.0 \right. \quad , \tag{23.435}$$

somit gilt auch der Näherungsausdruck

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{a}_0\frac{\Delta\ell}{\Delta t} \approx -\frac{3}{2}\bar{n}_0\,\Delta a \quad \left[\frac{km}{s}\right] \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0.0 \right. \quad . \tag{23.436}$$

Für kreisförmige Bahnen lautet die Variation der großen Bahnhalbachse (nach Formel (17.43), in Abschnitt 17.3.2, Band II)

$$\dot{a} \approx \dot{a}_s = -\rho\,\bar{a}_0\,B_D V_K \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0.0 \right. \quad , \tag{23.437}$$

wenn $V_K = \sqrt{\mu / a}$ die Kreisbahngeschwindigkeit ist. Hier bedeuten

B_D	Ballistischer Koeffizient = $c_D A_D/m$	[km^2/kg]
c_D	Luftwiderstandsbeiwert	
A_D	effektive Anströmfläche	[m^2]
m	Gesamtmasse des Satelliten	[kg]
ρ	Luftdichte am Ort des Satelliten	[g/km^3]

Nehmen wir nun an, dass zwei Satelliten nahe beieinander auf einer Kreisbahn fliegen und ihre relative Bewegung betrachtet wird. Dies schließt den Fall ein, dass einer der beiden Satelliten fiktiv als die Sollposition betrachtet wird, auf welche die wahre Bewegung des anderen Satelliten bezogen wird. Satellit 1 habe die Variation der großen Halbachse $\dot{a}_{1s}$ sowie den ballistischen Koeffizienten B_{D1}, Satellit 2 entsprechend die Werte $\dot{a}_{2s}$ und B_{D2}. Dann lautet die relative Variation der großen Halbachse nach Gleichung (23.437)

$$\Delta\dot{a}_s = \dot{a}_{1s} - \dot{a}_{2s} = -\rho\,\bar{a}_0 V_K \left(B_{D2} - B_{D1}\right) = -\rho\,\bar{a}_0 V_K\,\Delta B_D \quad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \tag{23.438}$$

woraus

$$\frac{d\left(\Delta a\right)}{dt} = -\rho\,\bar{a}_0 V_K\,\Delta B_D \quad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \tag{23.439}$$

wird. Setzt man diese Gleichung in den Ausdruck (23.436) ein, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\left(\Delta a\right)} = \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{\rho\,\bar{a}_0\,\Delta B_D} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{23.440}$$

Hier kann näherungsweise $\Delta B_D = const.$ gesetzt werden. Dann ergibt die Integration mit einem Anfangswert für die relative Position x_0 des Satelliten

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{3\left(\Delta a\right)^2}{4\,\rho\,\bar{a}_0\,\Delta B_D} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{23.441}$$

Wird wie ursprünglich in diesem Abschnitt gefordert, die Bewegung nur eines Satelliten relativ zu einer Sollbewegung betrachtet, kann $B_{D2} = 0$ gesetzt werden. Δa ist der halbe Korrekturwert um das Bahnmanöver durchzuführen. Wird ein Toleranzintervall für eine erlaubte Abweichung der wahren Bewegung des Satelliten von der Sollbewegung vorgegeben, kann daraus die Halbachsenkorrektur Δa für ein Bahnhaltungsmanöver berechnet werden:

$$\Delta a = \sqrt{\Delta x \frac{4\,\rho\,\bar{a}_0^{\,2}\,\Delta B_D}{3}} \quad . \tag{23.442}$$

Bei vorgegebenem Toleranzintervall Δx kann die benötigte Zykluszeit zur Durchführung des Manövers mit Gleichung (23.439) berechnet werden, wenn dort noch die für Kreisbewegungen gültige Beziehung $V = V_K = \bar{n}_0\,\bar{a}_0$ eingesetzt wird. Die zugehörige Differentialgleichung lautet dann

$$dt = -\frac{d(\Delta a)}{\rho\, \bar{a}_0^2\, \bar{n}_0\, \Delta B_D} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \tag{23.443}$$

mit der Lösung

$$t - t_0 = -\frac{2\,\Delta a}{\rho\, \bar{a}_0^2\, \bar{n}_0\, \Delta B_D} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{23.444}$$

Mit dem Halbachsenintervall Δa aus Gleichung (23.442) ergibt sich das entsprechende Zeitintervall

$$\Delta t = \frac{4}{\bar{a}_0\, \bar{n}_0} \sqrt{\frac{\Delta x}{3\,\rho\, \Delta B_D}} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{23.445}$$

Umgekehrt kann für eine vorgegebene Zykluszeit Δt und eine erlaubte Variation Δa in der großen Bahnhalbachse die erlaubte Variation im ballistischen Koeffizienten aus Formel (23.444) berechnet werden:

$$\left|\Delta B_D\right| = \frac{2\,\Delta a}{\rho \sqrt{\mu a}\, \Delta t} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{23.446}$$

BEISPIEL: Ein Kleinsatellit bewege sich auf kreisförmiger Bahn $(\bar{e}_0 = 0.0)$ mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7069.785\,\text{km}$ (d.h. nominale mittlere Äquator-bezogene Bahnhöhe j) auf einer sonnensynchronen Bahn (somit $\bar{i}_0 = 98°.16$). Der Satellit mit der Masse m_0 =150 kg und der (mittleren auf den Luftwiderstand wirkende) Querschnittsfläche A_D = 2 m^2 habe infolge einer um 1% vom Nominalwert B_D abweichenden ballistischen Koeffizienten B_D - ΔB_D ein fehlerhaftes Bahnverhalten. Es soll untersucht werden, welcher Treibstoffverbrauch im Fall eines Flüssigkeitstriebwerks (spezifischer Impuls c_e = 2800 m/s, Reduktionsfaktor C = 0.85) zur Korrektur eines Längenfehlers („long track error“) ΔL im Verlauf einer geplanten Lebensdauer von $L_T = 2^a$ zur Korrektur dieses Fehlers im Fall maximaler und minimaler Sonnenaktivität benötigt wird. Als Luftwiderstandsbeiwert werde der Wert c_D = 2.2 gewählt.

Der ballistische Koeffizient beträgt nach Formel (17.41) (Abschnitt 17.3.1, Band III)

$$B_D = c_D\, \frac{A_D}{m} = 2.2\, \frac{2\,m^2}{150\,kg} = 0.029333\; m^2 / kg \quad .$$

Der Fehler im ballistischen Koeffizienten bei 1% relativem Fehler beträgt

$$\Delta B_D = 0.00029333 m^2 / kg \quad .$$

Die Luftdichte ρ bei einer mittleren Höhe H = 700 km kann etwa aus Tabelle 17-12 (in Abschnitt 17.3.1, Band III) entnommen werden[1]. Als erlaubte Längenfehler werden die beiden Fälle ΔL =100 m und ΔL = 1.5 km betrachtet. Die Abnahme Δa der (mittleren) großen Bahnhalbachse wird aus Formel (23.442) erhalten, das Geschwindigkeitsinkrement ΔV, das zur Korrektur aufgebracht werden muss, aus Formel (12.90) (Abschnitt 12.4.4, Band III), der zugehörige Treibstoffbedarf aus Formel (12.219) (Abschnitt 12.10.2.2, Band III) mit $\Delta m = m_\text{T}$.

---

[1] Siehe auch in Anhang K (Band V)

Die Zykluszeit für ein Manöver beträgt $t_{cyc} = \Delta t$ aus Formel (23.445), der Gesamttreibstoff nach 2 Jahren somit schließlich

$$m_T = \frac{\Delta m}{t_{cyc}} \cdot 2 \cdot 364.25 \quad kg \quad .$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 23-30 zusammengefasst dargestellt. Wie zu erwarten ist der Gesamttreibstoffbedarf nach der gewünschten Lebensdauer vom jeweiligen Geschwindigkeitsinkrement bzw. der Zykluszeit unabhängig, d.h. auch unabhängig von dem zu korrigierenden Längenfehler.

	Solarmax		Solarmin	
Startmasse m_0	150 kg			
Luftdichte	0.2185 g/km^3		0.02043 g/km^3	
Ballistischer Koeffizient B_D	0.02933 m^2/kg			
Relativer Fehler $\Delta B_D / B_D$	1%			
Fehler im ball. Koeff. ΔB_D	0.0002933 m^2/kg			
Längenfehler ΔL	100 m	1500 m	100 m	1500 m
Fehler in Halbachse Δa	0.65 m	2.53 m	0.20 m	0.77 m
Geschwindigkeitsinkrement ΔV	0.69 m/s	2.69 m/s	0.21 m/s	0.82 m/s
Treibstoffbedarf Δm	0.037 kg	0.144 kg	0.011 kg	0.044 kg
Zyklus für Manöver t_{cyc}	4.5 d	17.2 d	14.5 d	56.3 d
Gesamttreibstoffbedarf nach 2 Jahren Δm[2a]	6.1 kg	6.1 kg	0.6 kg	0.6 kg

Tabelle 23-30: Beispiel zur Korrektur eines Längenfehlers auf Grund der Einwirkung des Luftwiderstandes auf einen Kleinsatelliten

23.12.7 Variation in Länge (alongtrack variation)

Im Verlauf eines Zyklus zur Bahnstabilisierung wird auch der Satellit in der Position seiner Bahn etwas verschoben, was sich in erster Näherung wieder in einer Bewegung auf einer Kurve zweiter Ordnung, also einer (relativen) Parabel, auswirkt. Diese Bewegung wird durch die Differenz im Argument der Breite u_2 des Satelliten auf der korrigierten Bahn und auf der nominalen „Sollbahn“ mit Argument u_1 erfasst. Die Differenz $\Delta u = u_2 - u_1$ wird dann gegen die Variation der großen Bahnhalbachse aufgetragen. Da die Bewegung als rechtläufig aufgefasst wird, das Koordinatensystem aber positiv in entgegengesetzter Richtung geozentrisch gesehen dargestellt wird, hat diese Differenz negative Werte.

Bild 23-57 zeigt als Beispiel den Verlauf der Abweichung in Alongtrack Δu in Abhängigkeit von der Variation der großen Bahnhalbachse für die Satellitenbahn a = 7007.140 km, e = 0.0, i = 97°.93.

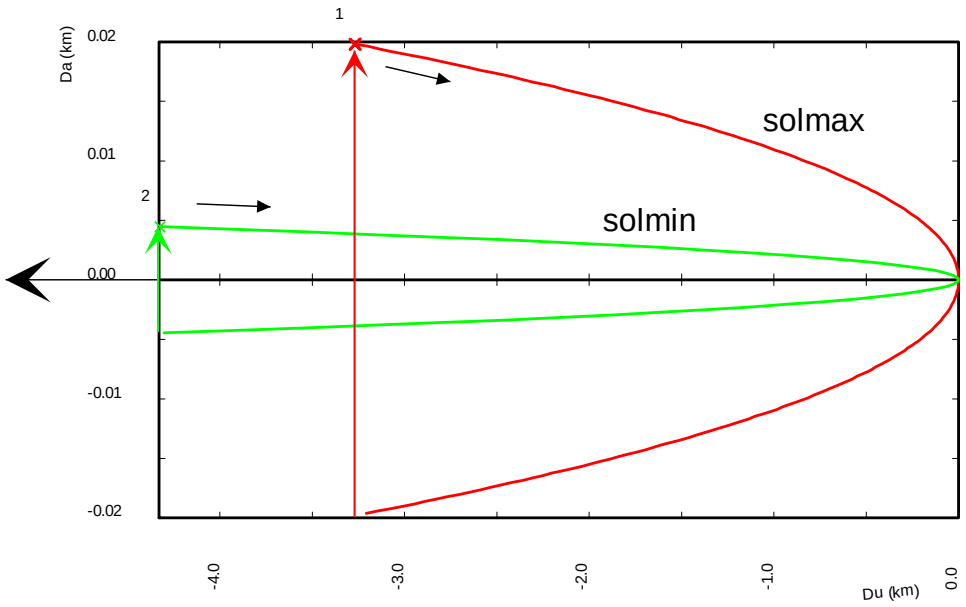


Bild 23-57: Verlauf der Abweichung der Position des Satelliten in Abhängigkeit vom Verlauf der großen Bahnhalbachse während eines Korrekturzyklus zur Bahnstabilisierung (Knotenüberflug). Die Satellitenbewegung erfolgt in rechtläufiger Richtung (großer Pfeil), die Alongtrackbewegung in entgegengesetzter Richtung. Der Pfeil für die Korrektur der großen Bahnhalbachse ist ebenfalls eingezeichnet

23.13Bewegungen im Formationsflug auf kreisnahen Bahnen

23.13.1 Satellitenkonstellationen mit kreisförmigen Bahnen nach *Walker*

Konstellationen mehrerer Satelliten mit der Aufgabe, eine gleichförmige Überdeckung der gesamten Erdoberfläche für Fernerkundungsaufgaben oder eines ausgewählten Teiles der Erdoberfläche etwa zu Kommunikationszwecken zu ermöglichen, stellen eine neue Herausforderung für die Satellitenbahnanalyse dar. *J. G. Walker*[1] hat einen Zugang zu einer Bahnanalyse von gleichmäßigen Satellitenkonstellationen durch Aufstellung der *Walkerkonstellation* gefunden. Dies gilt für die Annahme, dass alle Bahnebenen dieselbe Neigung gegenüber einer Referenzebene haben. Diese Referenzebene ist nicht notwendig die Äquatorebene, auch wenn sich diese in der Regel als Referenzebene anbietet. Außerdem wird angenommen, dass alle Satelliten in einer solchen Konstellation gleichförmig verteilt sind. Eine Walkerkonstellation lautet

$$T/P/F \tag{23.447}$$

Hier bedeuten

T = Anzahl der Satelliten der gesamten Konstellation

P = Anzahl der Bahnebenen einer Konstellation

F = Das Phasing, d.h. den Abstand eines Satelliten in der Grundkonstellation vom Äquator.

Hieraus können berechnet werden:

Der Abstand zwischen zwei Bahnebenen am Äquator beträgt

---

[1] J. G. WALKER [1970], J. G. WALKER [1984]

$$\Delta\Omega = \frac{360°}{P} \quad . \tag{23.448}$$

Der Winkelabstand zwischen zwei Satelliten in einer Bahnebene errechnet sich aus

$$\Delta u = \frac{360°}{\frac{T}{P}} \tag{23.449}$$

und der Phasenwinkel, d.h. der Winkelabstand des ersten Satelliten der ersten Bahnebene von der Bezugsebene (üblicherweise vom Äquator)

$$\Phi = F \frac{360°}{T} \quad .$$

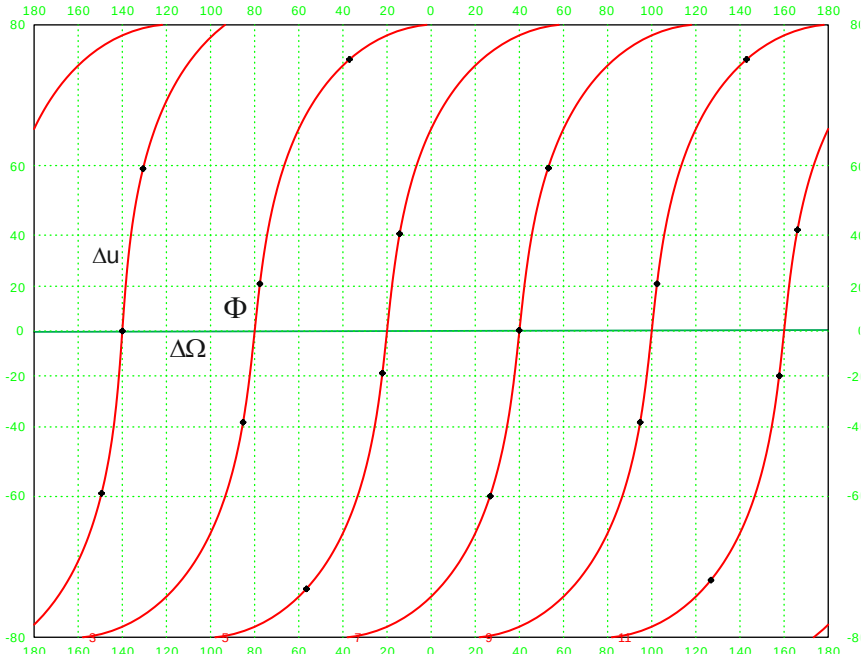


Bild 23-58: Beispiel einer *Walker*-Konstellation mit T/P/F = 18/6/1, somit Δu = 120°, ΔΩ = 60°, Φ = 20°

23.13.2 Relativbewegung zu einer Kreisbewegung

Als eine in der Satellitenbewegung von zunehmender Bedeutung wichtige Anwendung der kreisnahen und damit vor allem der drakonitischen Bewegung soll im Folgenden mit unterschiedlichen Genauigkeitsanforderungen untersucht werden, wie die Bewegung auf einer nach der *Kepler*bewegung verlaufenden elliptischen Bewegung relativ zu einer (im Mittel) kreisförmigen Bewegung mit derselben Umlaufzeit, also identischer mittlerer mittlerer Bewegung verläuft. Dies soll zunächst für eine exakte („ungestörte“) *Kepler*bewegung durchgeführt werden.[1]

Wir wollen annehmen, dass sich der erste Satellit („Master Satellit“) auf einer Kreisbahn mit Radius *a* bewege:

[1] Dieses Problem wurde z.B. behandelt in RUPPE, H. O. [1967] Vol.2, pp.76-78, es findet sich etwa auch schon in Roman-Form bei CLARKE, A. C.

$$\mathbf{r}_K = a\left(\mathbf{q}_1 \cos M + \mathbf{q}_2 \sin M\right) \quad . \tag{23.450}$$

Der zweite im Formationsflug befindliche Satellit auf einer elliptischen Bahn habe den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1 \cos\upsilon + \mathbf{q}_2 \sin\upsilon\right) \quad . \tag{23.451}$$

Die auf den ersten Satelliten bezogene Relativbewegung lautet daher allgemein

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_K = \mathbf{q}_1\left(r\cos\upsilon - a\cos M\right) + \mathbf{q}_2\left(r\sin\upsilon - a\sin M\right) \quad . \tag{23.452}$$

Die Relativbewegung des zweiten Satelliten wird in einem System dargestellt, das auf den ersten Satelliten bezogen ist. Dieses mitgeführte System hat – in der Bahnebene – die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \quad \mathbf{q}_1 \cos M + \mathbf{q}_2 \sin M \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1 \sin M + \mathbf{q}_2 \cos M \quad . \end{aligned} \tag{23.453}$$

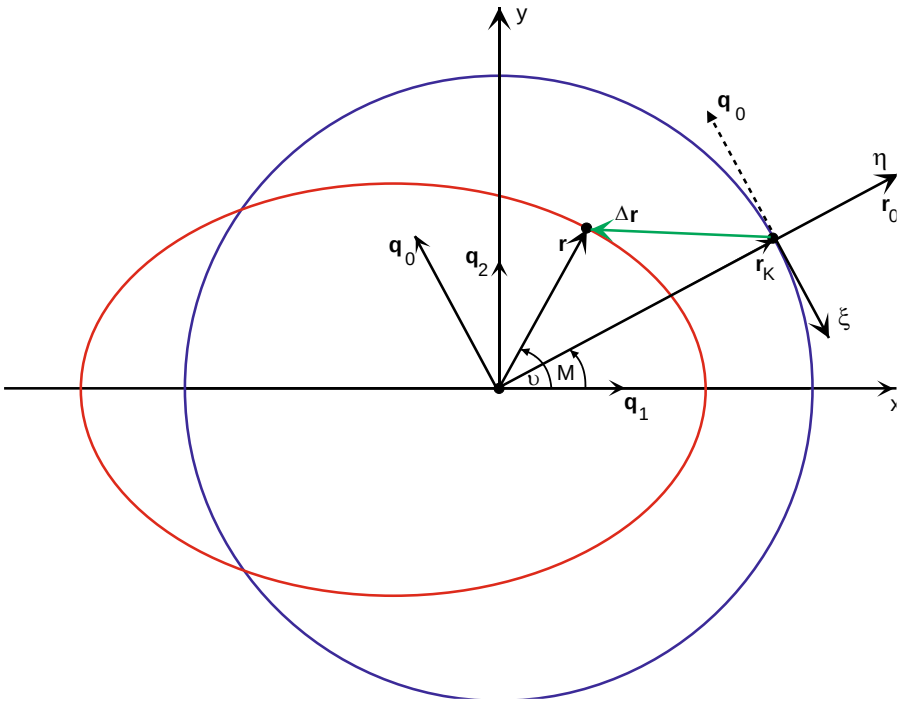


Bild 23-59: Relativbewegung zweier Satelliten in Formationsflug

In diesem System hat der relative Ortsvektor des zweiten Satelliten (entsprechend Bild 23-59) die Darstellung

$$\Delta\mathbf{r} = -\xi\,\mathbf{q}_0 + \eta\,\mathbf{r}_0 \quad . \tag{23.454}$$

Die Reihenentwicklungen des 2-Körperproblems für schwach elliptische Bewegungen ergeben in erster Ordnung in Exzentrizität[1]

[1] siehe etwa die Formeln (1.196) in Abschnitt 1.9.3.2, sowie (2.26) in Abschnitt 2.2.3 (Band I)

$$\begin{aligned} r\cos\upsilon &= -\frac{3ea}{2} + a\cos M + \frac{ea}{2}\cos 2M + O(e^2) \\ r\sin\upsilon &= a\sin M + \frac{ea}{2}\sin 2M + O(e^2) \quad . \end{aligned} \tag{23.455}$$

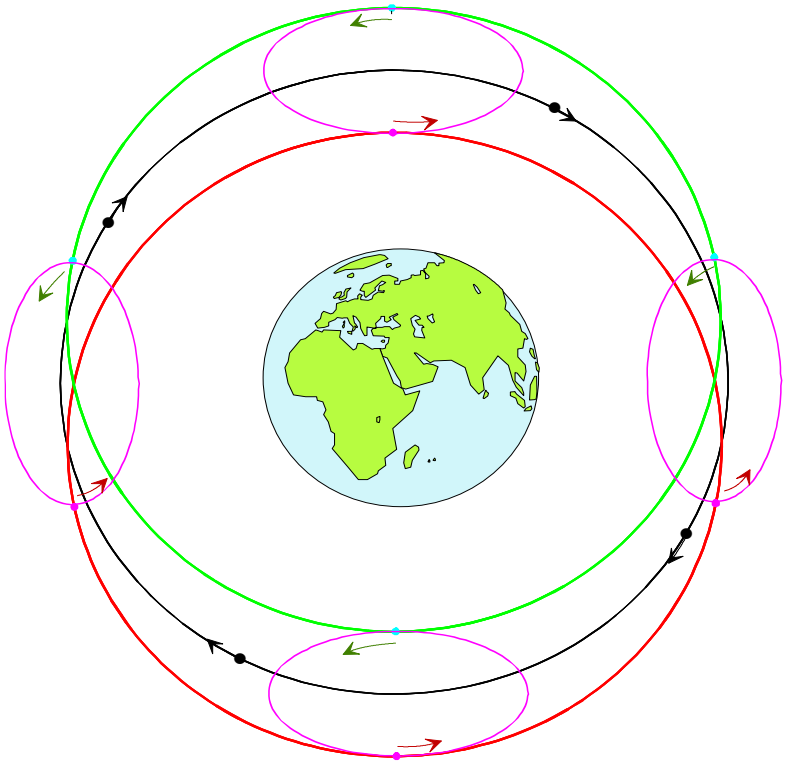


Bild 23-60: Die Relativbewegung zweier Slave-Satelliten in Bezug auf einen Master-Satelliten: Innerhalb der Master-Bahn bewegt sich einer der Slave-Satelliten schneller als der Master und eilt daher voraus. Deutlich zu erkennen ist das Achsenverhältnis 1:2 der Relativellipse. Man beachte die Bewegungsrichtung des Hauptsatelliten, die in Vergleich zu Bild 23-59 gegenläufig ist[1].

Werden diese Beziehungen in Gleichung (23.452) mit Berücksichtigung von (23.453) eingesetzt, folgt

$$\Delta\mathbf{r} = ea\left(-\mathbf{r}_0\cos M + 2\mathbf{q}_0\sin M\right) + O(e^2) \quad . \tag{23.456}$$

Dies ist die Gleichung einer Mittelpunktsellipse. Der zweite Satellit führt somit in erster Näherung, d.h. bei kleinen Exzentrizitäten der elliptischen Bewegung des zweiten Satelliten, eine elliptische Bewegung um den ersten (besser gesagt: relativ zum ersten Satelliten) aus. Für M=0° befindet sich der kleine Satellit auf der radialen Achse vom Master zum Erdmittelpunkt innerhalb der Masterbahn, für M = 90° in Bezug auf die Bewegungsrichtung des Master Satelliten vor dem Master auf der transversalen Achse (vgl. auch Bild 23-60).

---

[1] Bild aus einer Studie für das CartWheel Projekt, Februar 2001 [RUNGE, H., R. BAMLER, J. MITTERMAYER, E. F. JOCHIM, D. MASSONNET, E. THOUVENOT [2001]: 'The Interferometric CartWheel for Envisat', 3rd IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, April 2-6, 2001 Berlin, Germany]

23.13.3 Relativbewegung in der „CartWheel Ellipse“

Zur Durchführung von SAR interferometrischen Beobachtungen mit passiven (also nur beobachtenden Kleinsatelliten) und einem aktiven Sendersatelliten, hat *Massonet*[1] erstmals den Vorschlag gemacht, drei Kleinsatelliten zu verwenden. Nach seinem Vorschlag sollen diese Satelliten in ein und derselben Bahnebene mit kleiner Elliptizität fliegen, während der Hauptsatellit („Mastersatellite“) auf einer kreisförmigen Bahn mit derselben drakonitischen Umlaufzeit wie die Kleinsatelliten fliegen soll. Dadurch kann erreicht werden, dass die drei passiven Satelliten sich stets auf derselben relativen „CartWheel Ellipse“ bewegen, wobei sich der Mittelpunkt dieser Ellipse stets in gleichbleibendem mittlerem Abstand zum Master bewegt. Unterscheiden sich die Apsidenlinien der drei kleinen Satelliten um je 120°, durchlaufen diese Satelliten die relative Ellipse in gleichem Abstand (siehe Bild 23-61). Durch Zusammenschaltung von je zwei dieser Satelliten kann jederzeit eine geeignete Basislinie („effective baseline“) zur interferometrischen Beobachtung erhalten werden.

Der Aufbau einer Satellitenkonstellation nach dem CartWheel („CTW“) Prinzip wird im Folgenden angedeutet:

Zunächst muss die mittlere Bahnhalbachse der absoluten CTW Bahnen der vorgegebenen drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$ der Masterbahn angepasst werden. Da die CartWheel Ellipsen eine andere Bahnexzentrizität haben als der Mastersatellit, muss sich auch ihre mittlere große Bahnhalbachse ändern. Dies wird mit den Methoden durchgeführt, die in Abschnitt 23.3.3 ab Seite 152 besprochen werden. Die neue Bahnhalbachse sei $\bar{a}_{SL} = \bar{a}_0 + \Delta\bar{a}_{SL}$.

Die Exzentrizität der Bahnen der passiven Kleinsatelliten in der CartWheel Konfiguration wird aus der Beziehung

$$e_{SL} = \frac{b_{CTW}}{\bar{a}_{SL}} \tag{23.457}$$

berechnet, wobei b_{CTW} die kleine Halbachse in der relativen CartWheel Ellipse ist, während $\bar{a}_{SL}$ ihre große Bahnhalbachse der Referenzbahn ist. Die Größe b_{CTW} wird aus der geforderten Basislinie für die interferometrischen Beobachtungen errechnet und ist vom verwendeten Frequenzband abhängig. Entsprechend der Näherung (23.456) ist

$$b_{CTW} = \frac{a_{CTW}}{2} \quad . \tag{23.458}$$

Zur Abschätzung der großen Halbachse a_{ctw} der CartWheel Ellipse seien die drei passiven Satelliten entsprechend Bild 23-62 in der CartWheel Ellipse angeordnet: ein Satellit im maximalen Erdabstand (die Erde ist „unten“ im Bild zu denken), die beiden anderen symmetrisch zur kleinen Halbachse (näherungsweise im Abstand $\gamma_0 = 30°$ zur großen Halbachse).

---

[1] MASSONNET, D. [1999], ‘Capabilities and Limitations of the Interferometric CartWheel’ , paper presented at the CEOS Workshop, Toulouse

VACARESSE, ANGELIQUE, BROUSSE, PASCAL, [2000]: ‘Analyse de mission “Roue Interférométrique” associée au satellite japonais ALOS’, CNES Département de Mission de Mécanique Spatiale, Division Mathématiques Spatiales, Sema Group , Octobre 2000

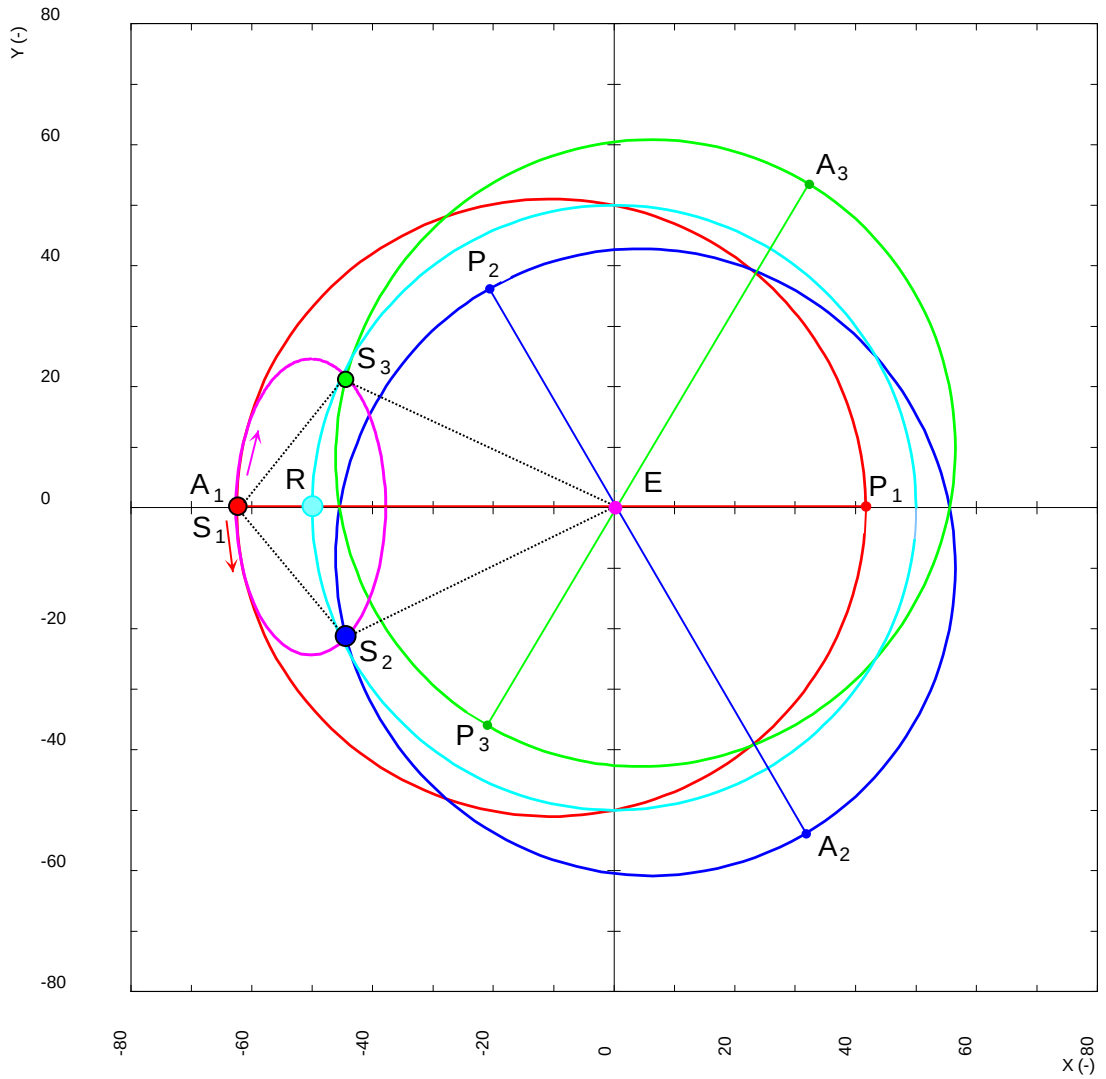


Bild 23-61: Absolute und relative Bewegung der drei CartWheel Satelliten: Trennung der Apsidenlinien der drei CTW Ellipsen um 120°.

Die effektive Basislänge wird auf die kleine Halbachse der CartWheel Ellipse projiziert und ergibt die Referenzlänge

$$B_{ref} = b_{CTW} + z_0 \quad . \tag{23.459}$$

Da es sich um eine Mittelpunktellipse handelt, können die in Kapitel 37 (Band V) hergeleiteten Formelsysteme verwendet werden. Die beiden unteren Satelliten in Bild 23-62 haben mit Formel (37.31) die zentrische Distanz

$$R'_{\gamma'} = a_{CTW} \sqrt{\frac{1-e_{CTW}^2}{1-e_{CTW}^2 \cos^2 \gamma'}} \quad . \tag{23.460}$$

Die Strecken x_0 und z_0 sind dann aus den Beziehungen (37.28) bekannt:

$$x_0 = R'_{\gamma'} \cos\gamma' \quad , \quad z_0 = R'_{\gamma'} \sin\gamma' \quad . \tag{23.461}$$

Im Fall der genäherten CartWheel Ellipse hat deren Exzentrizität stets den Betrag

$$e_{CTW} = \sqrt{1 - \frac{b_{CTW}^2}{a_{CTW}^2}} = \sqrt{0.75} = 0.866025404. \qquad (23.462)$$

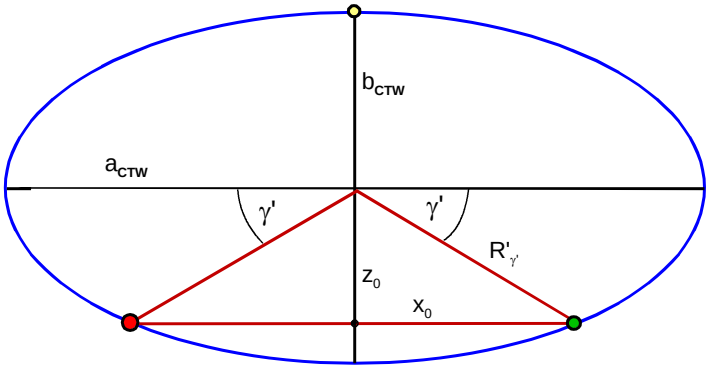


Bild 23-62: Zu Berechnung der großen Halbachse der relativen CartWheel Ellipse aus der effektiven Basislänge für SAR Interferometrie

Somit hat die effektive Basislänge die Größe

$$B_{ref} = a_{CTW}\left(\sin\gamma' \sqrt{\frac{1-e_{CTW}^2}{1-e_{CTW}^2\cos^2\gamma'}} + 0.5\right) \quad . \qquad (23.463)$$

Mit einer Annahme für den Winkel γ' (etwa zu 30°) kann aus dieser Beziehung a_{CTW} berechnet werden, damit auch b_{CTW} und aus Beziehung (23.457) die Exzentrizität der (absoluten) CartWheel Bahn um den Erdmittelpunkt. Die weiteren (mittleren) Bahnelemente sind in Tabelle 23-31 zusammengestellt.

Die sich ergebenden (absoluten) Bahnen der drei CartWheel Satelliten sind symptomatisch (d.h. mit übertriebenen Exzentrizitäten) in Bild 23-63 veranschaulicht.

Um den Treibstoffbedarf abzuschätzen, der für den Aufbau einer CartWheel Konfiguration benötigt wird, werde im Folgenden eine Einschussprozedur entsprechend Bild 23-61 verwendet. Alle drei Kleinsatelliten sollen bei gemeinsamem Start in die Position R der kreisförmig angenommen Masterbahn eingeschossen werden. Anschließend werden die drei Kleinsatelliten auf folgende Weise in ihre Position auf der relativen CartWheel Ellipse gebracht:

S_1 wird in das Apogäum A_1 seiner Bahnellipse durch ein Δa Manöver gebracht und anschließend auf seine elliptische Bewegung durch ein Δe Manöver. Die Apsidenlinien der beiden anderen CartWheel Satelliten unterscheiden sich gegenüber der Apsidenlinie des ersten Satelliten um die Zentralwinkel ±120°. Die Positionen dieser beiden Satelliten auf der CartWheel Ellipse in dem Augenblick, wenn sich S_1 in der Position A_1 befindet, liegen auf dem Schnittpunkt ihrer absoluten (elliptischen) Bahnen mit der relativen CartWheel Ellipse. Die Berechnung dieser Schnittpunkte wird dadurch erleichtert, dass diese Punkte in erster Näherung mit den Schnittpunkten der kreisförmig angenommenen Masterbahn mit der CartWheel Ellipse zusammentreffen.

	Große Bahnhalbachse	Exzentrizität	Inklination	Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Argument des Perigäums	Mittlere Anomalie zur Epoche
Master	$\bar{a}_0$	$\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 0°$	$\overline{M_{00}} = \Delta\upsilon$
Sat 1	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 0°$	$\overline{M_{00}} = 0°$
Sat 2	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 120°$	$\overline{M_{00}} = 240°$
Sat 3	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 240°$	$\overline{M_{00}} = 120°$

Tabelle 23-31: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes

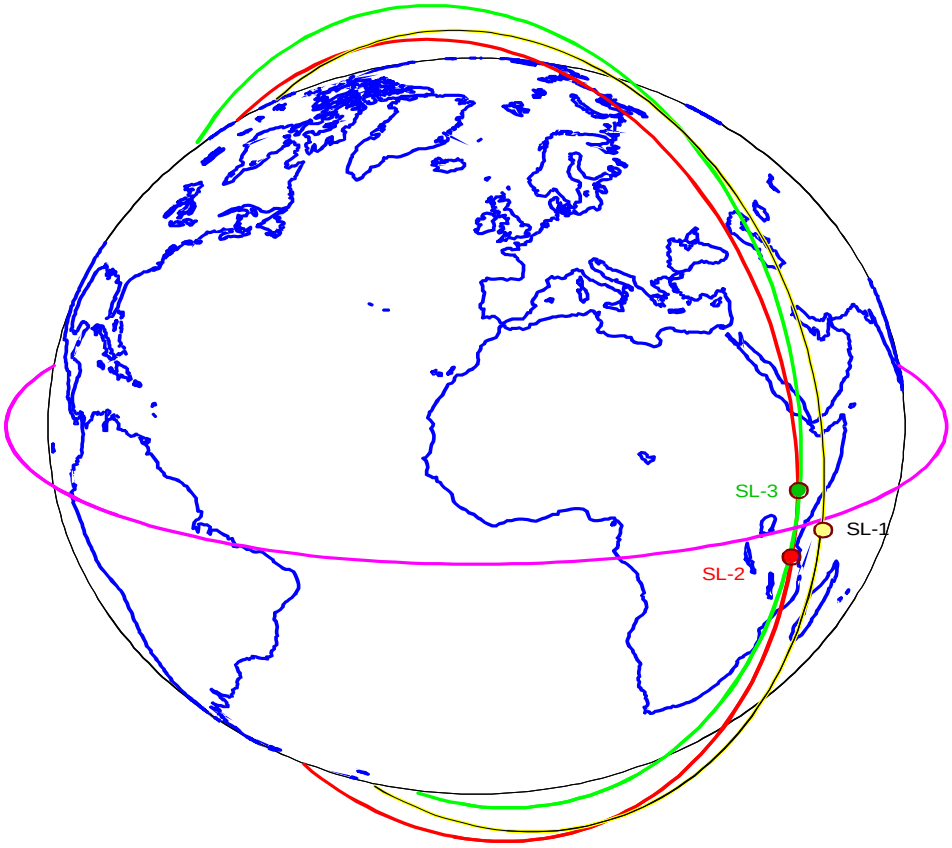


Bild 23-63: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der CartWheel-Konstellation über einen drakonitischen Umlauf. Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhöhe 7000 km und die Inklination 97°.5. und verlaufen in derselben Bahnebene, die Exzentrizitäten der drei Bahnen haben den Wert $\bar{e}_0 =$ 0.05. Dargestellt ist Satellit $SL-1$ im Moment des Apogäumsdurchganges, der in den aufsteigenden Knoten gelegt ist. Alle drei Satelliten bewegen sich auf der relativen CartWheel Ellipse im Verlauf eines drakonitischen Umlaufes

Deshalb kann folgender Vorgang zum Aufbau der CartWheel Formation empfohlen werden: bewege den Satelliten S_2 vorwärts (d.h. in Bewegungsrichtung von S_1) und S_3 rückwärts längs der Masterbahn bis die entsprechenden Positionen von S_2 and S_3 auf der relativen CartWheel Ellipse erreicht sind. Baue anschließend die absoluten Bahnellipsen dieser beiden Satelliten

durch erreichen der Apsidenlinien $\overline{A_2P_2}$ bzw. $\overline{A_3P_3}$ auf, sowie durch Einstellung der Bahnexzentrizitäten $e_2 = e_3 = e_1 = e_{CTW}$. Die wesentliche Aufgabe besteht nun darin zu erreichen, dass die drei Satelliten zum selben Zeitpunkt ihre relativen Positionen in der relativen CartWheel Ellipse einnehmen.

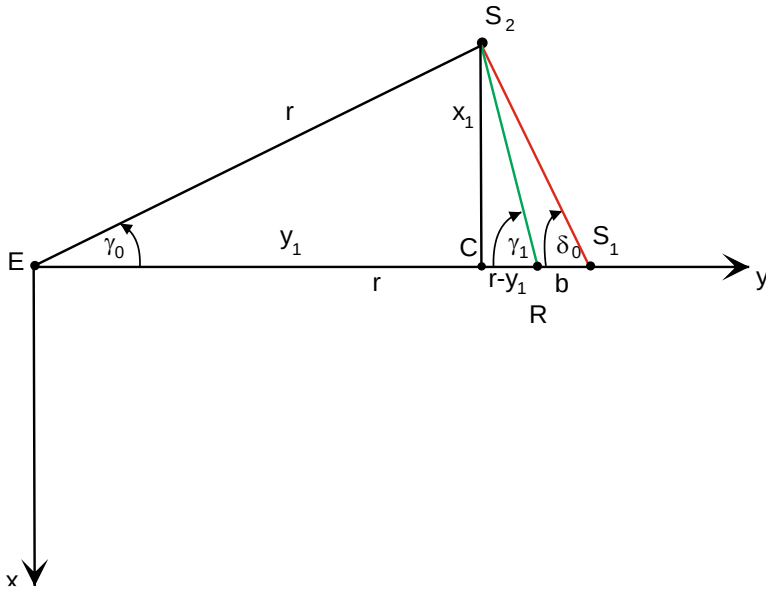


Bild 23-64: Geometrie zur Definition der Positionierung der drei CartWheel Satelliten innerhalb der relativen CartWheel Ellipse

Die Berechnung der Verschiebung der Satelliten 2 und 3 wird entsprechend der Skizze in Bild 23-64 durchgeführt. In einem mitbewegten ebenen *x*-*y*-Koordinaten System wird die CartWheel Ellipse durch die Beziehung

$$\frac{x^2}{a_{CTW}^2} + \frac{\left(y - \overline{a_0}\right)^2}{b_{CTW}^2} = 1 \tag{23.464}$$

beschrieben, wobei für nahezu kreisförmige Bahnen

$$a_{CTW} \approx 2\, b_{CTW} \tag{23.465}$$

gilt. Der Ort S_2 mit den kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) muss die Bedingung

$$x_1^2 + y_1^2 = \overline{a_0}^2 \tag{23.466}$$

erfüllen. Dies führt auf

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(4\overline{a_0} - \sqrt{\overline{a_0}^2 + 3a_{CTW}^2}\right) \quad , \quad x_1 = \pm\sqrt{\overline{a_0}^2 - y_1^2} \quad . \tag{23.467}$$

(Die zweite Lösung für y_1 liegt außerhalb der kreisförmigen Masterbahn und kann deshalb vernachlässigt werden). Der Satellit muss längs der kreisförmigen Masterbahn um den Zentralwinkel γ_0 verschoben werden. In Bezug auf den Erdmittelpunkt E wird dieser Winkel aus der Beziehung

$$\tan\gamma_0 = \frac{x_1}{y_1} \tag{23.468}$$

berechnet. Außerdem werden die Winkel γ_1 und δ_0 aus den Beziehungen

$$\tan\gamma_1 = \frac{x_1}{\bar{a}_0 - y_1} \quad , \quad \tan\delta_0 = \frac{x_1}{\bar{a}_0 - y_1 + b_{CTW}} \quad . \tag{23.469}$$

erhalten.

Numerisches BEISPIEL[1]:

	Große Bahnhalbachse	Exzentrizität	Inklination	Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Argument des Perigäums	Mittlere Anomalie zur Epoche
Master	6878.137 km	0.0	97°.42472	0°.0	0°.0	$\Delta\upsilon$
Sat 1	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	0°.0	0°.0
Sat 2	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	120°.0	240°.0
Sat 3	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	240°.0	120°.0

Tabelle 23-32: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes als Beispiel für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\text{km}$.

SL-Sat	Orbit Acquisition	Orbit Maintenance	Formation Acquisition	Formation Maintenance	Total fuel requirement
1	0.004485 kg	5.738 kg	0.103512 kg	0.587 kg	6.433 kg
2	0.004485 kg	5.738 kg	0.311775 kg	0.587 kg	6.641 kg
3	0.004485 kg	5.738 kg	0.312759 kg	0.587 kg	6.642 kg

Tabelle 23-33: Treibstoffbedarf für Positionierung sowie Bahn- und Formationshaltung eines Kleinsatelliten mit Startmasse 130 kg, der Luftwiderstandsangriffsfläche 2m^2 über die Lebensdauer 2 Jahre. Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten gelten für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\text{km}$. Der Treibstoffbedarf wurde für Heißgastriebwerke mit der Ausströmgeschwindigkeit

$$c_e = 2800\,\text{m/s} \text{ gerechnet}^2 \blacktriangleleft$$

Nach der Positionierung der Satelliten in ihren Positionen S_2 und S_3 werden die Exzentrizitäten ihrer absoluten Bahnellipsen entsprechend Formel (12.92) eingestellt, die Rotation der Apsidenlinien schließlich entsprechend dem Vorgang, der in Kapitel 12.4.2 (Band III) beschrieben wird.

Der Zeitaufwand um die relativen Positionen der drei CartWheel Satelliten zu erreichen ist eine äußerst empfindliche Größe. Es muss erwartet werden, dass deshalb nach einer Positionierung sofort eine Fehlerkorrektur zu erfolgen hat. Diese kann allerdings im Rahmen einer Bahnanalyse nur grob abgeschätzt werden und wird in einer ersten Analyse vernachlässigt.

---

1 aus: JOCHIM, E.F., H. FIEDLER, G. KRIEGER [2011] *Acta Astronautica* **68**, pp. 1002-1014

2 siehe in Tabelle 12-2 in Abschnitt 12.10.2.1 (Band III)

23.13.4 Formationsflug dreier Satelliten mit unterschiedlichen Knoten und Perigäen

Als Alternative zu dem vorstehenden CartWheel Konzept wurden verschiedene „Pendulum“ Formationen vorgeschlagen[1], von denen das hier beschriebene „Trinodal Pendulum Concept“ das vielversprechendste Projekt zu sein scheint. Auch in diesem Konzept werden die drei kleinen passiven Radarsatelliten (slave satellites) als abwechselnde interferometrische Empfänger von Radarechos verwendet, welche von einem aktiven Hauptsatelliten (Master satellite) ausgesandt wurden. Der Hauptsatellit wird auf einer im Mittel kreisförmigen Bahn mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.0$ und der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ angenommen. Die Bahnen der drei kleinen Satelliten werden folgendermaßen definiert:

Im Äquator befinden sich diese Satelliten auf der kreisförmig angenommenen Bahnhöhe des Masters in den Abständen $\Delta\Omega_1$ und $\Delta\Omega_2$. Diese Winkelabstände werden üblicherweise durch vorgegebene Abstände definiert, welche einen Zusammenstoß der Satelliten vermeiden, jedoch eine SAR Interferometrie durch eine geeignete Basislinie (baseline) erlauben sollen.



Bild 23-65: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der Dreiknoten-Pendulum-Konstellation (Trinodal Pendulum Constellation) über einen drakonitischen Umlauf. Bahn 2 ist eine (mittlere) Kreisbahn, Bahn 1 mit kleiner Exzentrizität hat ihr Perigäum in der nördlichen Wende, Bahn 3 mit derselben Exzentrizität wie Bahn 1 hat ihr Perigäum in der südlichen Wende. (Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhalbachse 6883.495 km und Inkli-

[1] MOREIRA, A., G. KRIEGER, J. MITTERMAYER [2002], Satellite Configuration for Interferometric and/or Tomographic Remote Sensing by Means of Synthetic Aperture Radar (SAR), US Patent 6,677,884, July 2002; siehe auch: DLR TN GSOC 2004-03/update 2006

nation 97°.425. Die Abstände am Äquator betragen $\Delta\Omega_1$=-10° bzw. $\Delta\Omega_2$=5°, die Exzentrizitäten der Bahnen 1 und 3 haben den Wert $\bar{e}_0 = 0.05$)

Satellit 2 wird auf einer mittleren Kreisbahn mit denselben Parametern $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ wie der Master angenommen. In der nördlichen Wende, also für das Argument der Breite u=90°, soll sich Satellit 1 in seinem Perigäum befinden im Abstand $\Delta H = \bar{a}_{SL}\,\bar{e}_{SL}$ unter dem ersten Satelliten. Bei vorgegebener Distanz ΔH kann daraus die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_{SL}$ dieses Satelliten berechnet werden. Der dritte Satellit soll sich in der nördlichen Wende im Apogäum seiner Bahn befinden, das sich um den Abstand $\Delta H = \bar{a}_{SL}\,\bar{e}_{SL}$ über der Position des ersten Satelliten befinden soll. Somit hat auch die Bahn des dritten Satellit die Exzentrizität $\bar{e}_{SL}$. Für alle drei Satelliten wird gefordert, dass sie gleichzeitig wieder den Knoten überfliegen, dass ihre drakonitische Umlaufzeit also identisch ist. Dies kann nach den Formeln in Abschnitt 23.3.3 ab Seite 152 nur erreicht werden, wenn neben einer Modifikation der Exzentrizität auch der Wert der großen Bahnhalbachse so angepasst wird, so dass die (mittlere) drakonitische Umlaufzeit (23.161) (auf Seite 148) unverändert bleibt: $\bar{a}_{SL} = \bar{a}_0 + \Delta a$. Dieser Prozess muss iterativ durchgeführt werden. In der Praxis bei sehr kleinen Höhendifferenzen ΔH kann eine Variation der großen Bahnhalbachse von wenigen Metern vernachlässigt werden. In diesem Fall haben die drei Kleinsatelliten die in Tabelle 23-34 gelisteten Epoche Bahnelemente.

	Große Bahnhalbachse	Exzentrizität	Inklination	Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Argument des Perigäums	Mittlere Anomalie zur Epoche
Master	$\bar{a}_0$	0.0	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M_{0\,0}} = 270° + \Delta\upsilon$
Sat 1	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0 + \Delta\Omega_1$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M_{0\,0}} = 270°$
Sat 2	$\bar{a}_0$	0.0	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M_{0\,0}} = 270°$
Sat 3	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0 + \Delta\Omega_2$	$\bar{\omega}_0 = 270°$	$\overline{M_{0\,0}} = 90°$

Tabelle 23-34: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten im Fall des Trinodal Pendulum Konzeptes. Als Referenz sind die Bahnparameter des aktiven Bezugssatelliten (Master Satellite) eingefügt

Die spezielle Auswahl der Bahnparameter der drei Satelliten hat als Folge, dass sie stets eine Minimaldistanz zueinander aufweisen, also keine Kollisionsgefahr besteht, jedoch eine geeignete Baseline für die interferometrische Beobachtung zur Verfügung steht. Dies wird exemplarisch in Bild 23-66 gezeigt. Hier sind die relativen Abstände zwischen je zwei der drei Satelliten über einen drakonitischen Umlauf dargestellt. Der Minimalabstand in der nördlichen bzw. südlichen Wende wird nicht unterschritten. Die Abstände bei Knotenüberflug sind etwas größer als gefordert, was eine Folge der elliptischen Bewegung und des verwendeten Bahnmodells ist. Dies zeigt sich auch in den unterschiedlichen Minima während der nördlichen bzw. der südlichen Wende.

Es zeigt sich nun, dass wegen der elliptischen Bewegung der Satelliten 1 und 3 für diese beiden Satelliten sogar derselbe aufsteigende Knoten verwendet werden darf. Dies zeigt Bild

23-67. Kurve 2 zeigt den relativen Abstand der Satelliten 1 und 3, der offensichtlich über eine ausreichende Sicherheitsmarge verfügt.

Es liegt nahe zu untersuchen, ob auch für alle drei Satellitenbahnen derselbe aufsteigende Knoten ohne Kollisionsgefahr verwendet werden kann. Bild 23-68 zeigt den Verlauf der relativen Abstände im gewählten Beispiel über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 2 zeigt den relativen Abstand der Satelliten 1 und 3 auf ihren elliptischen Bahnen, während der Verlauf der Abstände der kreisförmigen Satellitenbahn 2 zu den beiden anderen auf identischen Kurven verläuft, ein Hinweis auf das symmetrische Verhalten der Bahnen.

Der nächste Schritt einer Modifikation der Bahndaten einer Dreier – Konstellation kann sein, auch für die Bahn des Satelliten 1 eine Elliptizität anzunehmen. Falls für alle drei Satellitenbahnen dieselbe Exzentrizität gewählt wird, wird das im vorstehenden Abschnitt beschriebene CartWheel Konzept erhalten, das somit als ein Spezialfall einer großen Familie von geeigneten Bahnen von Dreier - Satellitenkonstellationen angesehen werden kann.

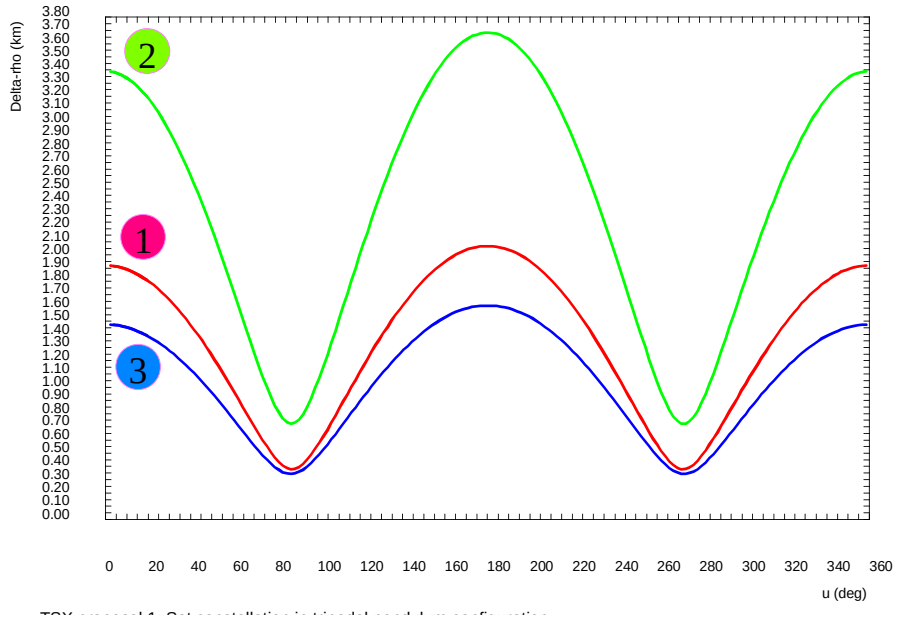


Bild 23-66: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand von Satellit 2 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_2$=1.426 km, der Abstand des dritten Satelliten vom ersten $\Delta\Omega_1$=1.9 km. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den beiden Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

Im Rahmen einer Bahnauswahl kann man sich deshalb darauf konzentrieren herauszufinden, welches Bahnsystem am besten geeignet ist, eine vorgegebene Aufgabe zu lösen, wozu im Fall von SAR Interferometrie der Unterschied zwischen einer along track und einer cross track baseline gehören wird. Weiter muss der Aufwand für den Aufbau der Satellitenkonstellation und deren Bahnhaltung abgeschätzt werden.

Von besonderem Interesse ist der Fall des dritten Satelliten, dessen Perigäum in der südlichen Wende (u=270°) liegen soll. Die Entwicklung des langperiodischen Anteils der Exzentrizität in Bild 23-69 zeigt eine Librationsbewegung um die eingefrorene Exzentrizität, welche für die große Bahnhalbachse und Inklination dieser Bahnen gültig ist. Dies zeigt, dass das Bahnverhalten auch der Bahn des dritten Satelliten formstabil ist. Bild 23-70 zeigt den Verlauf des kurzperiodischen Anteils der Exzentrizität, der sich über die Lebensdauer dieses Satelliten nur unwesentlich ändern wird.

Die Installation der Satellitenkonstellation im Fall zweier oder dreier verschiedener Knoten kann folgendermaßen erfolgen: Gemeinsamer Einschuss der drei Satelliten, Änderung des

Knotens in der nördlichen oder südlichen Wende entsprechend den Formeln in Abschnitt 12.3.1 oder 12.3.3 (Band III), außerdem Aufbau der elliptischen Bahn in der nördlichen bzw. südlichen Wende durch einen *Hohmann* Transfer mit zwei tangentialen Manövern (entsprechend Abschnitt 12.4.3).

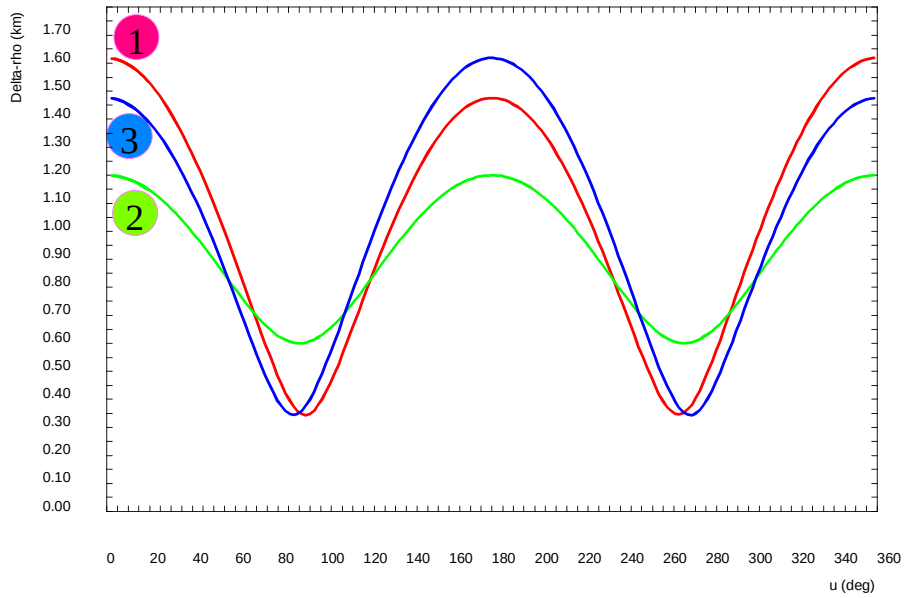


Bild 23-67: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand der Satelliten 2 und 3 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_1$=1.426 km.. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

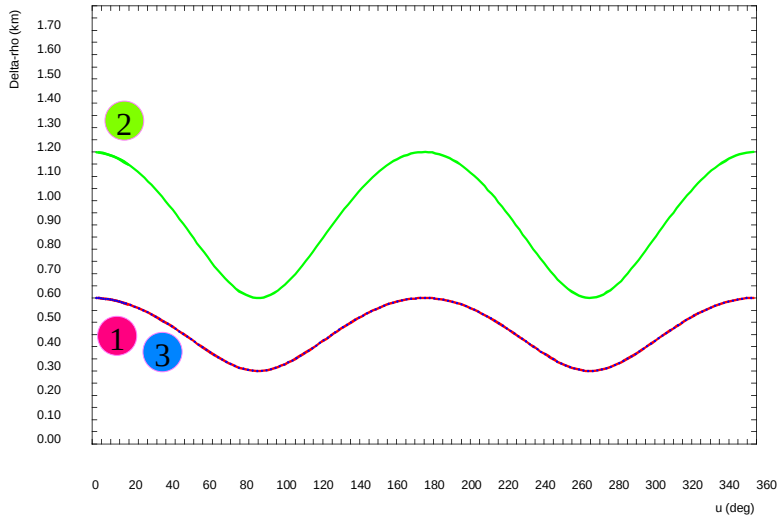


Bild 23-68: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Alle drei Satellitenbahnen haben denselben aufsteigenden Knoten. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

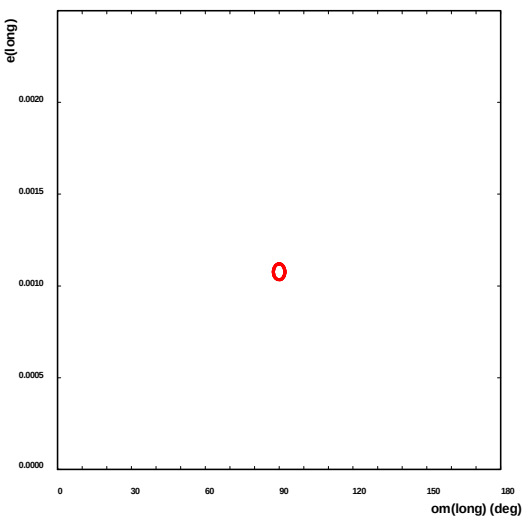


Bild 23-69-SL3-prop-1.cdr: Langperiodische Librationsbewegung des gemittelten Argumentes des Perigäums für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums 270° positioniert wurde. Die Librationsbewegung erfolgt auch in diesem Fall um die eingefrorene Exzentrizität. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

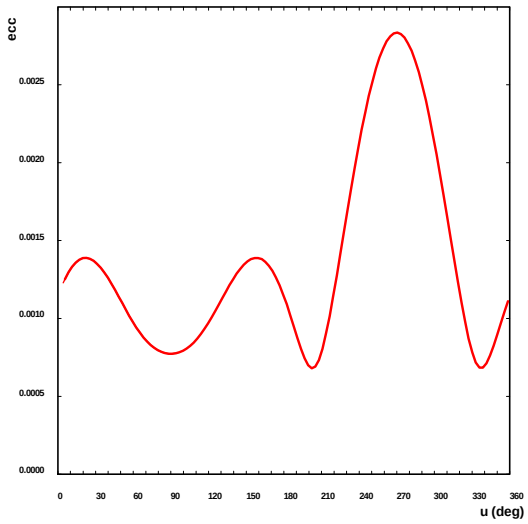
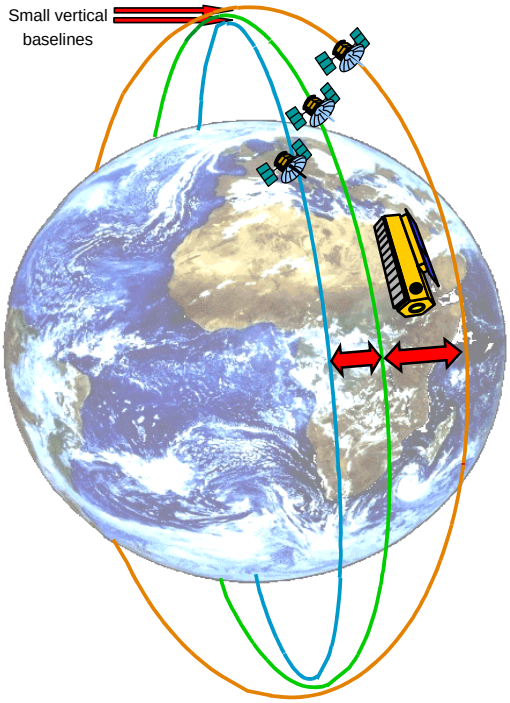


Bild 23-70: Kurzperiodischer Verlauf der Exzentrizität für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 270°$ positioniert wurde. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495km, \bar{i}_0 = 97°.425$)



Artist view of the Trinodal Pendulum with a small eccentric offset. The large horizontal baselines remain the same with an additional small vertical offset at the northern and southern turns.

Bild 23-71: Ergänzende Darstellung einer Trinodal Pendulum Konstellation (Doppel-Helix)[1]

[1] Kopie aus: FIEDLER, H., G. KRIEGER, F. JOCHIM [2003]: Analysis of TerraSAR-L CartWheel Constellations, Amendment to WP 2100, Doc. No. TSLC-TN 2101, 27th November 2003

Eine iterative Verbesserung um die Anfangsbedingungen besser zu erfüllen kann durch leichte Verschiebung der Satellitenörter längs ihrer Bahn um wenige Meter erreicht werden. Die Verhältnisse sind sehr empfindlich, was darauf hindeutet, dass beim Aufbau der Konstellationen mit sehr kleinen Schüben gearbeitet werden muss.

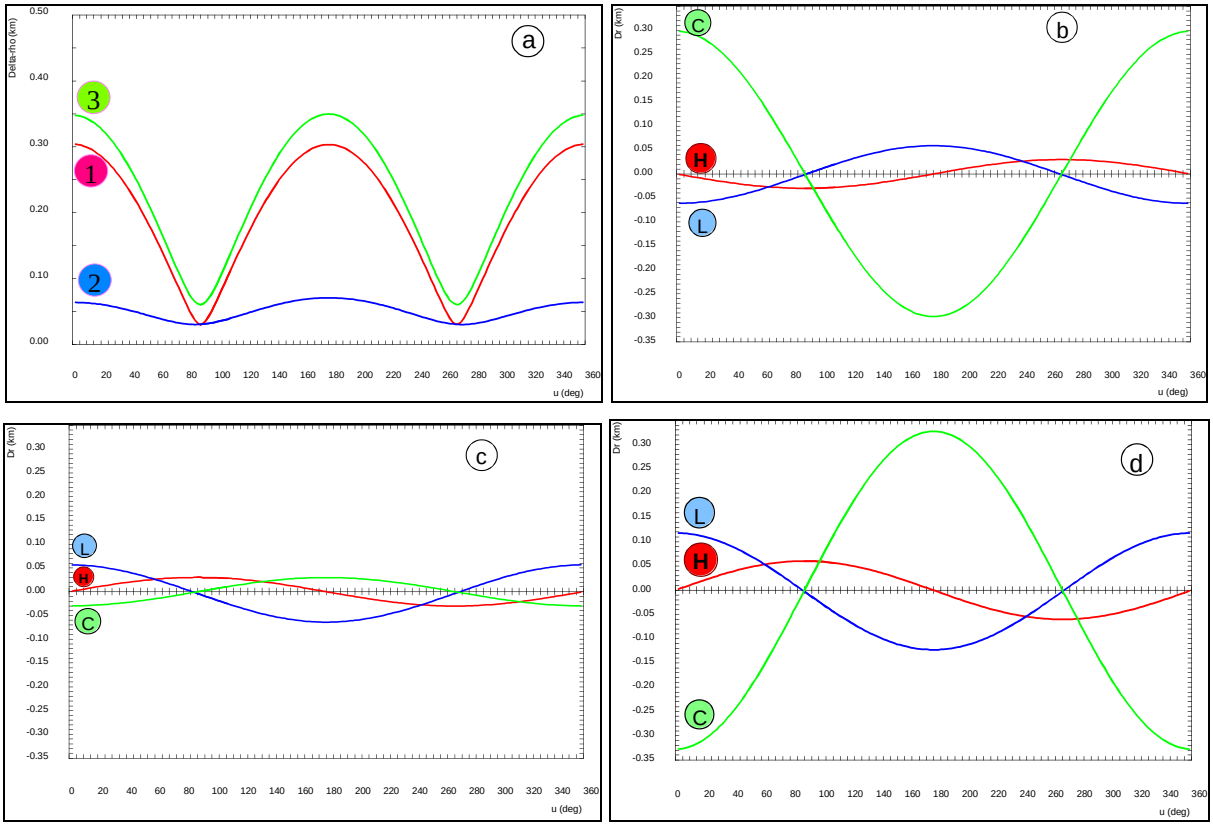


Bild 23-72: Das Bahnverhalten der drei Satelliten im Trinodal Pendulum Konzept: Bild (a) zeigt die jeweiligen Abstände zwischen den drei Satelliten über einen drakonitischen Umlauf, Kurve 1 den Abstand zwischen Satellit 1 und 2, Kurve 2 zwischen Sat 3 und Sat 2, sowie Kurve 3 zwischen den Satelliten 1 und 3 auf ihren schwach elliptischen Bahnen; die Bilder (b) – (d) zeigen die Zerlegung der jeweiligen Distanzvektoren in einem HCL-System (H – radiale, L-transversale, C – normale Komponente) eines Bezugssatelliten, in Bild (b) Sat 1 in Bezug auf Sat 2, in Bild (c) Sat 3 in Bezug auf Sat 2, in Bild (d) Sat 3 in Bezug auf Sat1. Die pendelnde Bewegung der drei Satelliten umeinander ist in diesen Darstellungen gut zu erkennen.

Als numerisches BEISPIEL werde eine Dreierkonstellation unter den folgenden Randbedingungen untersucht: Die Bahn in etwa 500 km mittlerer Bahnhöhe sei sonnensynchron. Die mittlere Bahn des zweiten Satelliten werde als kreisförmige Referenzbahn angenommen. Die Bahn des ersten Satelliten habe im aufsteigenden Knoten gegenüber der Bahn des zweiten Satelliten den Abstand 300m in westlicher Richtung und in nördlicher Richtung einen Abstand von 30m unter der Bahn des zweiten Satelliten. Dies bedeutet, dass sich der erste Satellit in der nördlichen Wende in seinem Perigäum befindet. Der dritte Satellit habe im aufsteigenden Knoten den Abstand 30m zum zweiten Satelliten in östlicher Richtung, in der nördlichen Wende befinde er sich 30m über dem zweiten Satelliten, er nehme dort somit sein Apogäum ein. Um die Bedingung der exakten Positionierung übereinander in der nördlichen Wende zu erreichen, werden die Satellitenörter um einige Meter in ihren jeweiligen Bahnen

verschoben. Damit haben die drei Bahnen die in Tabelle 23-35 gelisteten mittleren *Kepler*elemente[1].

Das zugehörende Bahnverhalten ist in Bild 23-72 zusammenfassend dargestellt. Die Bilder zeigen die relativen Bewegungen im mitgeführten Bahnsystem, in dem sich die Pendelbewegung der Bahnen umeinander gut zu erkennen gibt. Wegen dieser relativen Bewegungsform wird diese Bewegung gelegentlich auch als „*Doppel-Helix-Bewegung*“ bezeichnet. ◀

	$\bar{a}_0$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0$	$\overline{M_0}$
Sat 1	6868.136	0.0000043799737	97°.38691	359°.997497497	90°	-0°.000166845
Sat 2	6868.136	0.0	97°.38691	0°.0	90°	0°.000166845
Sat 3	6868.136	0.0000043799737	97°.38691	0°.0002502678	270°	180°.000166845

Tabelle 23-35: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten für das Trinodal Pendulum Konzept im Fall des numerischen Beispiels

23.13.5 Formationsflug zweier Satelliten in Helix-Konfiguration

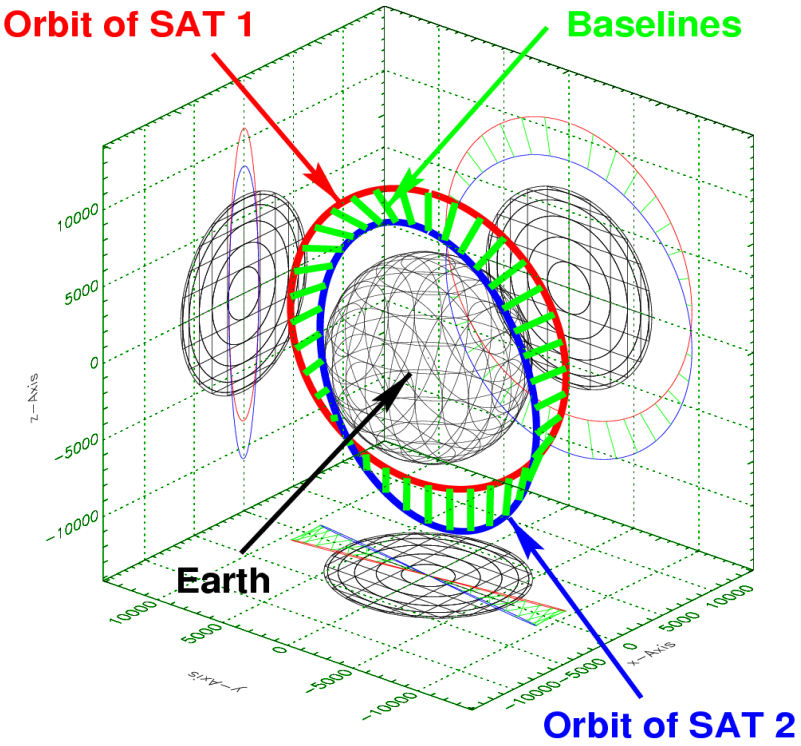


Bild 23-73: Demonstration einer Helix-Konfiguration[2]

---

[1] Aus: ENDERLE, W. et al. [2006]

[2] Kopie aus: FIEDLER, H., G. KRIEGER, M. WENDLER, J. MITTERMAYER, F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002]: *Analysis of Satellite Configurations for Spaceborne SAR Interferometry*, DLR Microwave and Radar Institute, Präsentationsfolien für Vortrag, Oktober 2002. Siehe auch FIEDLER, H. et. al. [2002 a]

Oskulierende Elemente	TerraSAR-X	TanDEM-X
Große Bahnhalbachse	6883.5019 km	6883.5005 km
Exzentrizität	0.0012503369	0. 0011922565
Inklination	97° 26′ 49″.655	97° 26′ 49″.737
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	241° 25′ 39″.169	241° 65′ 14″.611
Argument des Perigäums	89° 48′ 32″.988	89° 48′ 58″.173
Mittlere Anomalie	160° 19′ 50″.560	160° 19′ 38″.143

Tabelle 23-36: Die mittleren *Kepler*elemente von TerraSAR-X und TanDEM-X für den Zeitpunkt 22. August 2016, 12:00:23.8 UTC[1]

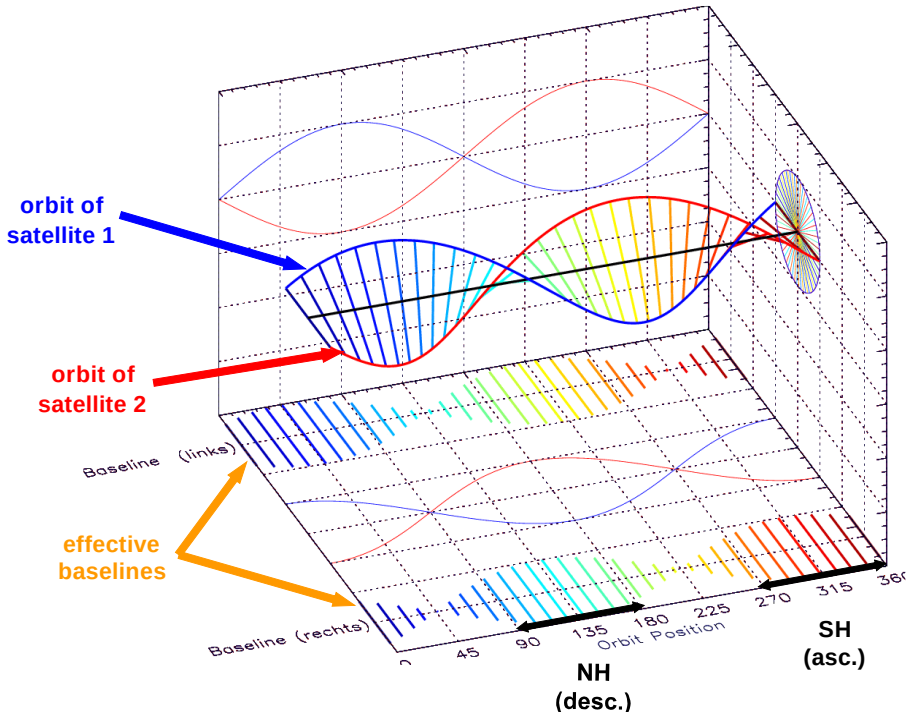


Bild 23-74: Das Bahnverhalten der zwei Satelliten in einer Helix Formation, dargestellt in Aufriss, Seitenriss und Grundriss. Eingezeichnet ist die effektive Basislinie für SAR Interferometrie[2]

Das Trinodal Pendulum Konzept wurde als Alternative zum CartWheel Konzept entwickelt um mit Hilfe von drei kleinen Hilfssatelliten SAR Interferometrie betreiben zu können, wozu ein separat fliegender Mastersatellit als Beleuchter dient. Die Bahnen der drei kleinen Satelliten winden sich scheinbar umeinander, so dass dieses Konzept den Namen Doppel-Helix erhielt. Abgeleitet davon wurde das Konzept von zwei eng beisammen fliegenden Satelliten

[1] Die Bahnelemente wurden von *Ralph Kahle* (DLR-RB) zur Verfügung gestellt (2016-Sep-22). Es zeigte sich, dass in diesem Fall die von NORAD zur Verfügung gestellten 2-line Elements wegen der nicht aktuellen Aktualisierungsrate unbrauchbar sind.

[2] Kopie aus: FIEDLER, H. et. al. [2002], siehe auch Bild 23-73

entwickelt, deren Abstand als Basislinie für die SAR Interferometrie dienen soll. Um eine möglichst gleichbleibende Basislinie zu erreichen, aber auch eine Kollisionswahrscheinlichkeit zu minimieren, wurden wie im Fall des Trinodal Pendulum für beide Bahnen bei gleichbleibender Bahnhalbachse und Inklination die Exzentrizität und die Rektaszension des aufsteigenden Knotens etwas verändert. Dadurch wird erreicht, dass die beiden Satellitenbahnen sich scheinbar umeinander wie eine Helix winden, so dass für dieses Prinzip der Name Helix-Konzept gewählt wurde.

BEISPIEL: Das Helix-Prinzip wurde erfolgreich bei den Projekten TerraSAR-X (gestartet am 15. Juni 2007) und dem baugleichen Satelliten TanDEM-X (gestartet am 21. Juni 2010) realisiert. Die beiden Satelliten bewegen sich seit Oktober 2010 in unterschiedlichen Helix-Formationen, die je nach Beobachtungszielen durch verschiedene Manöver eingestellt werden.

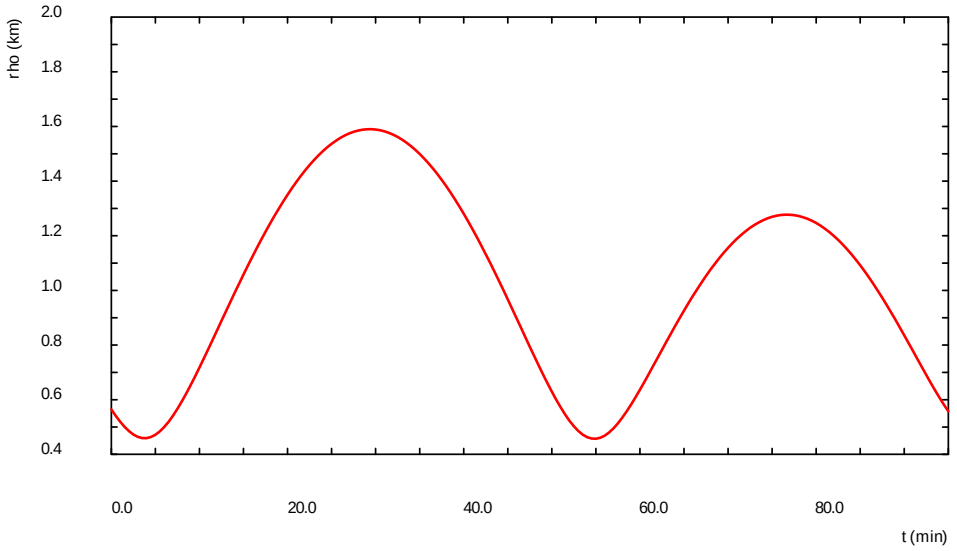


Bild 23-75: Verlauf der relativen Distanz der beiden Satelliten TerraSAR-X und TanDEM-X in Helix Formation über einen drakonitischen Umlauf (Epoche: 22. August 2016, Elemente aus Tabelle 23-36, gerechnet ab 12 Uhr UTC über 95 Minuten) ◀

23.13.6 Formationsflug mit Kreisbewegung in einer Bahnebene

Eine globale tägliche Überdeckung der Erdoberfläche ist mit mehreren Satelliten möglich, die in ein und derselben („inertialen“) Bahnebene angeordnet sind. Um dies zu untersuchen, wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Anordnung der Satelliten innerhalb der (inertialen) Bahnebene und dem Spurversatz der Bodenspuren bezüglich der Erdoberfläche berechnet.

Die Anordnung der Satelliten in der Bahnebene wird durch eine Längendifferenz ΔL beschrieben, der eine Differenz ΔM in mittlerer Anomalie zugeordnet ist. Diese Anomaliedifferenz ist einer Zeitdifferenz über die Beziehung

$$\Delta t = \frac{\Delta M}{n_K} \tag{23.470}$$

zugeordnet , wenn n_K die mittlere *Kepler*sche Bewegung der Satelliten ist. Mit der Fundamentalbeziehung (23.227) (auf Seite 172) beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung im Zeitintervall Δt

$$\overline{\delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\Delta t = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\overline{P_d}}\Delta t \quad . \tag{23.471}$$

Hier ist $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ die säkulare Knotenlängenvariation nach Formel (23.224). Zwei benachbarte Bodenspuren der Satellitenbahnen sind voneinander um genau die Längenverschiebung $\overline{\delta\lambda_\Omega}$ getrennt.

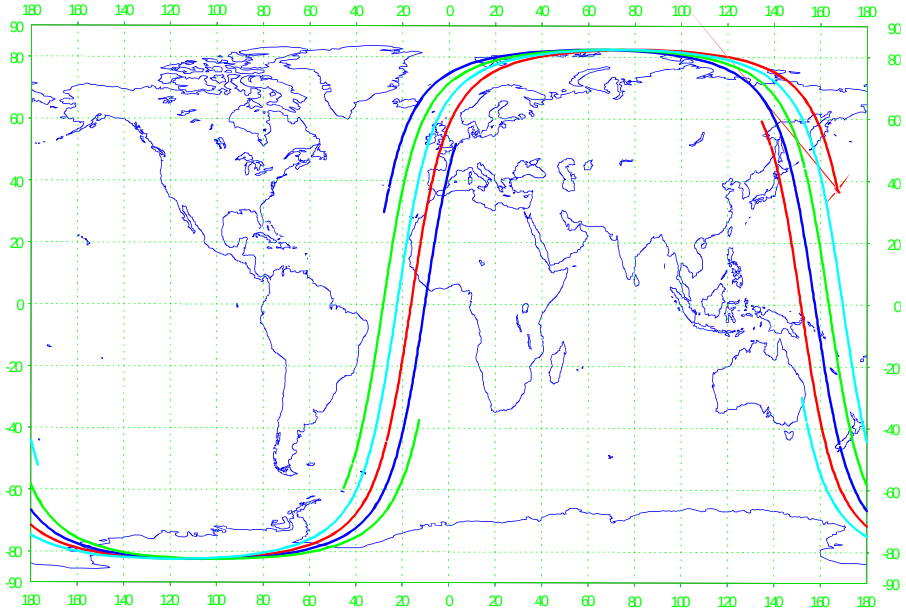


Bild 23-76: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen drakonitischen Umlauf

Als BEISPIEL sei eine gleichmäßige Verteilung von *N* Satelliten in der einen („inertialen“) Bahnebene angenommen. Die Winkelverteilung längs der Bahn bei (idealer) kreisförmiger Bewegung ist dann

$$\Delta M = \frac{360°}{N} \quad , \tag{23.472}$$

die zugehörige Zeitdifferenz, mit der Satelliten hintereinander herfliegen, beträgt

$$\Delta t = \frac{\overline{P_d}}{N} \tag{23.473}$$

und die Knotenlängendifferenz zwischen den Bodenspuren auf der Erdoberfläche

$$\overline{\delta\lambda_\Omega} = \Delta t \cdot \dot{\lambda}_{\Omega s} = \Delta t\,\frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{N} \quad . \tag{23.474}$$

Als numerisches BEISPIEL werde die sonnensynchrone 1:15 Integer Bahn (Halbachse a = 6939.142 km, Inklination i = 97°.659) betrachtet, auf der vier gleichartige Satelliten gleichverteilt fliegen sollen.

Bild 23-76 zeigt die um jeweils die Knotenlängendifferenz $\overline{\delta\lambda_\Omega} = -6°$ versetzten Bodenspuren über einen drakonitischen Umlauf. Zu erkennen ist der um ein Viertel der mittleren dra-

konitischen Umlaufzeit ($\overline{P_d} = 5760\,\text{sec}$) versetzte Beginn der Bewegung auf der jeweiligen Bodenspur. Ergänzend zeigt Bild 23-77 die Bodenspuren über einen ganzen Tag. Da es sich um Integer Bahnen handelt, sind die jeweiligen Spuren geschlossen. ◀

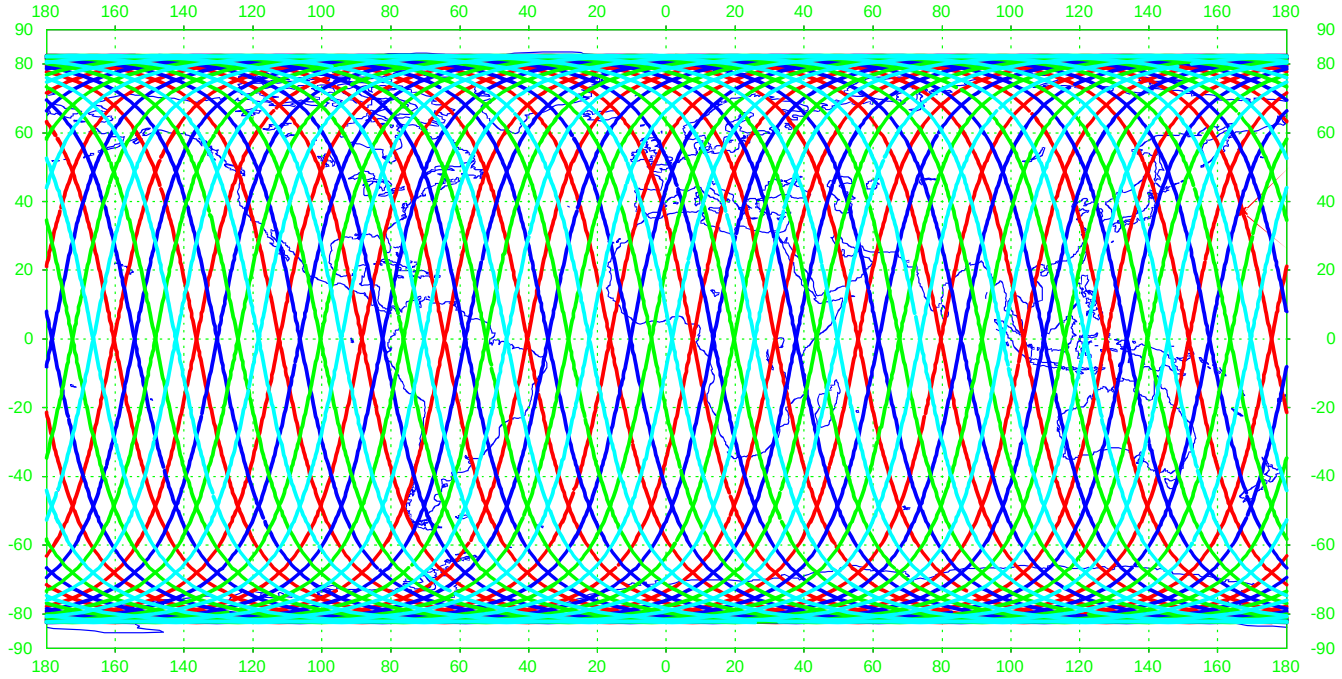


Bild 23-77: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen ganzen Tag

23.13.7 Formationsflug mit Kreisbewegung über einer Bodenspur

Mehrere Satelliten sollen über derselben Bodenspur hintereinander herfliegen. Dies ist die umgekehrte Aufgabe des vorhergehenden Abschnitts.

Die Satelliten, welche sich alle abgesehen vom aufsteigenden Knoten dieselben *Kepler*schen Bahnelemente haben sollen, überfliegen dieselbe mittlere Referenzlänge $\overline{\lambda_\Omega}$ zu verschiedenen Zeiten *t*. Die Knotenlänge ist über die auf den Nullmeridian (auf der Erde der Meridian durch Greenwich) bezogene Sternzeit Θ_G (entsprechend Formel (23.217) mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens verbunden

$$\overline{\lambda_\Omega} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\left(t - t_0\right) = \overline{\Omega} - \Theta_G = \overline{\Omega}_0 + \Theta_{G0} + \left(\dot{\Omega}_s + \dot{\Theta}\right)\left(t - t_0\right) \quad . \qquad (23.475)$$

Da von jedem Satelliten derselbe Knoten bezüglich der Erdoberfläche überflogen werden soll, muss für Satellit-1 und Satellit-2 die Bedingung

$$\overline{\lambda_{\Omega 2}} = \overline{\lambda_{\Omega 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Omega}_2 - \Theta_{G2} = \overline{\Omega}_1 - \Theta_{G1} \qquad (23.476)$$

erfüllt sein. Mit vorgegebenem Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen zwei Satelliten mit derselben Bodenspur kann die Differenz in Rektaszension $\Delta\Omega$ des aufsteigenden Knotens berechnet werden, um die Bahnelemente des zweiten Satelliten relativ zum ersten Satelliten festzulegen,. Der zweite Satellit hat dann die Rektaszension des aufsteigenden Knotens

$$\bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_1 + \dot{\Theta}\left(t_2 - t_1\right) \quad . \tag{23.477}$$

Hier ist $\dot{\Theta}$ die säkulare tropische Rate der Erdrotation (siehe den Zahlenwert in Formel (23.218)).

24 Die tropische Bewegung

Unter tropischer Bewegung wird in der Himmelsmechanik die Darstellung der Bewegung eines Himmelskörpers in Bezug auf den Frühlingspunkt verstanden. In der Himmelsmechanik der Bewegungen der Körper des Sonnensystems ist die Basisebene die Ekliptik als intermediäre Ebene des Sonnensystems, der Pol dieses Systems der ekliptikale Nordpol. In der Erdsatellitenbahnmechanik ist die Basisebene die Erdäquatorebene. Dies ist das aus der sphärischen Astronomie bekannte „bewegliche Äquatorsystem“[1]. Es ist gegenüber der als fest gedachten Erde im täglichen Umschwung des Sternhimmels als Folge der Erdrotation scheinbar „beweglich“. In diesem System, das für eine Epoche als fest angesehen wird, derzeit ist J2000.0 die zugehörige Fundamentalepoche, müssen die Integrationen einer Satellitenbewegung durchgeführt werden. Damit ist dieses System auch das Fundamentalsystem zur Untersuchung einer Satellitenbewegung. Dazu benötigt dieses System einen fest definierten Bezugspunkt. Als solcher wird der mittlere Frühlingspunkt angesehen, der Schnittpunkt des festgehaltenen Äquators mit der mittleren scheinbaren Sonnenbahn um die Erde, der Ekliptik.

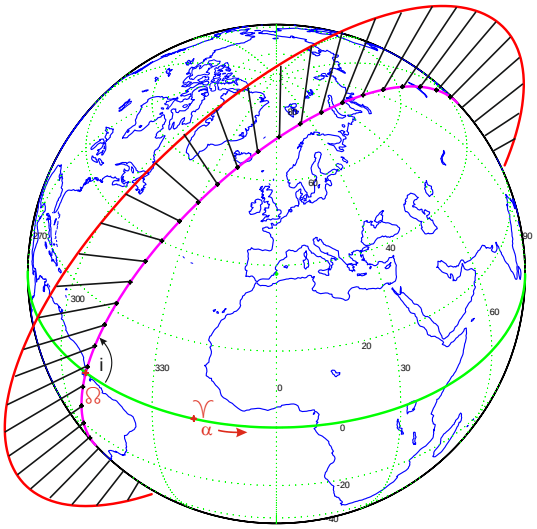


Bild 24-1: Oskulierende wahre und zugehörende Subsatellitenbahn ohne Rotation der Erde über einen tropischen Umlauf bei Bezug auf den Frühlingspunkt ♈ (Bahndaten: a=8578 km, e=0.15154, i=75°, ω=240°)

Für eine Satellitenbahnanalyse ist dieses System allerdings nicht von primärer Bedeutung. Es zeigt sich, dass im Rahmen der Untersuchung einer mittleren Satellitenbewegung und der damit verbundenen Auslegung einer Satellitenbahn, die auf den Frühlingspunkt bezogene, also tropische Bewegung logisch auf die in den vorstehenden Kapiteln behandelten Bewegungsarten bezogen werden kann.

[1] Ausführliche Beschreibung dieses Systems in Abschnitt 8.1 (Band II)

24.1 Das geozentrische Frühlingspunkt bezogene Äquatorsystem

24.1.1 Basissystem und Fundamentalsystem

Das Äquatorsystem habe die orthonormierte Basis $\mathbf{p}_i$. $\mathbf{p}_1$ weise zum Frühlingspunkt (in der oben gegebenen Definition), $\mathbf{p}_2$ auf dem Äquator in rechtläufiger Richtung, $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$ zum Nordpol. Ein kartesisches System hat die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{24.1}$$

der zugehörige absolute Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{24.2}$$

Der bezüglich dieses Äquatorsystems relative Geschwindigkeitsvektor werde mit

$$\dot{\mathbf{r}}_P := \dot{x}^i \mathbf{p}_i \tag{24.3}$$

bezeichnet. Das System hat den zu diesem System relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_P := D_p{}^i \mathbf{p}_i \tag{24.4}$$

und es gelten für die Variationen der Basisvektoren die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i{}^j \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_P \times \mathbf{p}_i \tag{24.5}$$

mit

$$D_{P1} = p_{23} \ , \ D_{P2} = p_{31} \ , \ D_{P3} = p_{12} \quad . \tag{24.6}$$

Mit diesen Zuordnungen können die Gleichungen (24.5) als die *Frenet*schen Gleichungen des Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems bezeichnet werden.

Wenn im Rahmen der Satellitenbahnmechanik die Eigenbewegung des Äquatorsystems vernachlässigt wird, wird das so festgehaltene System als ein Fundmentalsystem betrachtet. In einem solchen System erfolgt die Integration einer Satellitenbahn, alle externen Einflüsse auf die Bahn werden vernachlässigt. Diese Tatsache muss bei der Auswertung von Satellitendaten im Auge behalten werden. Der Eigenbewegungsvektor wird in diesem Fall als Nullvektor gedeutet. Der absolute Geschwindigkeitsvektor ist in diesem Fall gleich dem relativen Geschwindigkeitsvektor:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_P \quad \Leftarrow \quad \mathbf{D}_P = 0 \quad . \tag{24.7}$$

Anmerkung: Diese Bedingung ist nicht notwendig und hinreichend, da im Fall eines *Hansen-System*s absoluter und relativer Geschwindigkeitsvektor grundsätzlich identisch sind[1]. ◄

Wird ein Eigenbewegungsvektor eines Systems ausschließlich auf die Basisvektoren dieses Systems bezogen, wird er als „absoluter Eigenbewegungsvektor“ bezeichnet. Wird der Eigenbewegungsvektor auf ein anderes System bezogen, wird der Eigenbewegungsvektor als relativ bezeichnet, wenn dieses System selbst kein Fundamentalsystem ist. Wenn dieses System je-

[1] Siehe etwa als Folge von Satz H16 (nach Formel (4.330)) in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

doch ein Fundamentalsystem ist, wird der Eigenbewegungsvektor auch in diesem Fall als absolut bezeichnet[1].

24.1.2 Bezug auf ein *Hansen*-System

Das Basissystem für die Untersuchung einer Bewegung in der Bahnebene ist ein *Hansen*-System. Das Basissystem für die Integration einer Bewegung im inertialen Raum ist das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem. Die Relation zwischen diesen beiden Systemen ist daher von grundlegender Bedeutung und soll daher hier überblickmäßig referiert werden[2].

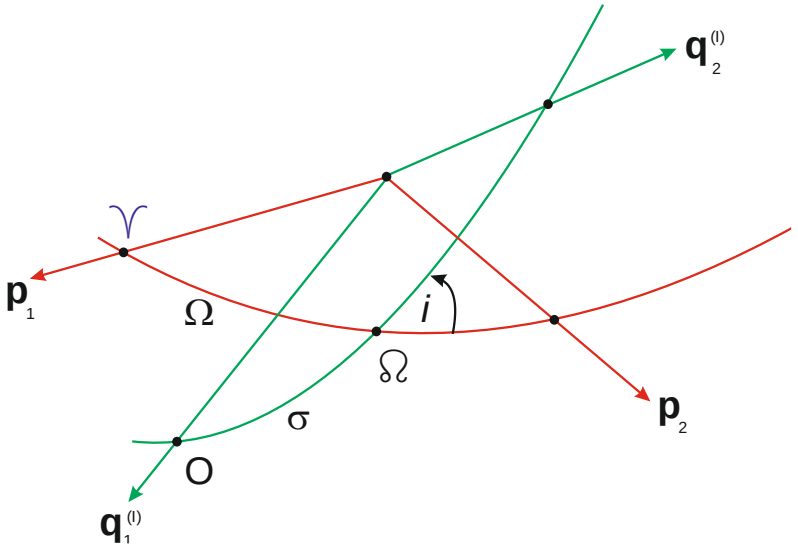


Bild 24-2: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem und einem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System mit Drehungen um die drei *Euler*winkel (Ω, i, σ), bezogen auf den Frühlingspunkt ♈ als Bezugspunkt des (tropischen) Frühlingspunkt bezogenen Äquatorsystems, den aufsteigenden Knoten ☊, den (willkürlich auf der Bahnebene festgelegten) Anfangspunkt O des *Hansen*-Systems

Das *Hansen*-System habe die orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ $(i =, 1, 2, 3)$. Die Drehung zwischen den beiden Systemen erfolgt mit den Eulerwinkeln Ω (Rektaszension des aufsteigenden Knotens), i (Inklination der Bahnebene bezüglich des Äquators), σ (Länge des aufsteigenden Knotens in der Bahnebene bezogen auf den Ursprung O des *Hansen*-Systems). Mit den Koeffizienten

---

[1] Siehe in Abschnitt 8.1.3 (Band II)

[2] Die ausführliche Herleitung dieser Beziehungen findet sich in Abschnitt 8.12.2 (Band II), Formeln (8.423) – (8.431)

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega \\
a_{12} &= -\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega \\
a_{13} &= -\sin i \sin\sigma \\
a_{21} &= -\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma \cos\Omega \\
a_{22} &= \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega \\
a_{23} &= \sin i \cos\sigma \\
a_{31} &= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned}
\tag{24.8}
$$

lauten die Transformationsformeln zwischen einem *Hansen*-System und dem auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

$$
\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{24.9}
$$

Die Variationen der *Euler*winkel nach der Zeit bei Bezug auf ein Frühlingspunktbezogenes Äquatorsystem, das nicht notwendig als ein Fundamentalsystem angenommen werden darf, sind aus den Variationsgleichungen (8.441) bekannt[1]

$$
\begin{aligned}
(i)^{\cdot} &= \dot\eta \cos(\zeta - \sigma) - p_{31} \sin\Omega - p_{23} \cos\Omega \\
\dot\Omega \sin i &= \dot\eta \sin(\zeta - \sigma) - p_{12} \sin i - (p_{31} \cos\Omega - p_{23} \sin\Omega) \cos i \\
\dot\sigma \sin i &= \dot\eta \sin(\zeta - \sigma) \cos i - p_{31} \cos\Omega + p_{23} \sin\Omega \quad .
\end{aligned}
\tag{24.10}
$$

Hier genügen die Basisvektoren des Äquatorsystems den *Frenet*schen Gleichungen

$$
\dot{\mathbf{p}}_i = p_i{}^j \mathbf{p}_j \qquad \langle p_{ii} = 0 \, , \; p_{ij} = -p_{ji} \quad . \tag{24.11}
$$

Die Variationen der Basisvektoren der beiden Systeme haben die Beziehungen

$$
\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = \dot a_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} + a^j{}_i \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \tag{24.12}
$$

mit den Variationen der Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
\dot a_{11} &= -(i)^{\cdot} a_{31} \sin\sigma - \dot\sigma a_{21} - \dot\Omega \, a_{12} \\
\dot a_{12} &= -(i)^{\cdot} a_{32} \sin\sigma - \dot\sigma a_{22} + \dot\Omega a_{11} \\
\dot a_{13} &= (i)^{\cdot} a_{33} \sin\sigma - \dot\sigma a_{23} \\
\dot a_{21} &= (i)^{\cdot} a_{31} \cos\sigma + \dot\sigma a_{11} - \dot\Omega a_{22} \\
\dot a_{22} &= (i)^{\cdot} a_{32} \cos\sigma + \dot\sigma a_{12} + \dot\Omega a_{21} \\
\dot a_{23} &= (i)^{\cdot} a_{33} \cos\sigma + \dot\sigma a_{13} \\
\dot a_{31} &= (i)^{\cdot} a_{33} \sin\Omega - \dot\Omega \, a_{32} \\
\dot a_{32} &= -(i)^{\cdot} a_{33} \cos\Omega + \dot\Omega \, a_{31} \\
\dot a_{33} &= -(i)^{\cdot} \sin i \quad .
\end{aligned}
\tag{24.13}
$$

[1] In Abschnitt 8.12.3 (Band II)

Die normale Beschleunigung b_N lautet in Bezug auf den zweiten *Hansen*schen Bahnwinkel[1]

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad . \tag{24.14}$$

Ein besonders interessanter Zusammenhang kann mit Hilfe der *Frenet*schen Gleichungen des *Hansen*-Systems (4.325) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(I)} \sin\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(I)} \cos\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\, (\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{24.15}$$

Es bestätigt sich, dass abgesehen von der Eigenbewegung des Äquatorsystems, alle Variationen zwischen dem Äquator- und dem *Hansen*-System ausschließliche Folgen einer normalen Beschleunigung auf die Bahnebene des Satelliten sind.

24.1.3 Fundamentalsystem und *Hansen*-System

In der Praxis wird das Äquatorsystem, auf das eine Bewegung bezogen wird, als ein Fundamentalsystem definiert. Es wird zu einem Zeitpunkt (etwa der zur Zeit noch gültigen Fundamentalepoche J2000.0) und entsprechende mittlere Parameter (Präzession, Nutation[2], usw.) festgehalten. Auf ein inertiales System kann nach Satz H14 bei eventuellen hochgenauen Messungen des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ geschlossen werden[3]. Wenn die Variationsgleichungen der Eulerwinkel statt (24.10) (mit $u = \zeta - \sigma$) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{di}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta} \cos(\zeta - \sigma) \\ \frac{d\Omega}{d\zeta} \sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta} \sin(\zeta - \sigma) \qquad \langle \mathbf{D}_p = 0 \\ \frac{d\sigma}{d\zeta} \sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta} \sin(\zeta - \sigma) \cos i \end{aligned} \tag{24.16}$$

verwendet werden, muss man grundsätzlich im Auge behalten, dass feinere Beobachtungen, die $\mathbf{D}_p \neq 0$ zur Folge haben können, die Berechnungen entscheidend zu beeinflussen.

24.2 Der Bahnwinkel der tropischen Bewegung

Dir tropische Bewegung wird auf den Frühlingspunkt bezogen. Daher ist es sinnvoll diese Bewegung in äquatorialen Koordinaten darzustellen.

---

[1] nach Formel (4.307) in Abschnitt 4.4.4, Band II

[2] Siehe hierzu in Kapitel 9 vor allem in den Abschnitten 9.3 und 9.4)

[3] Abschnitt 4.3.16 (Band II)

24.2.1 Die äquatorialen Koordinaten eines Satelliten

Die Richtung eines Ortes S auf der Bahnebene hat in äquatorialen Koordinaten (α,δ) die Darstellung

$$\begin{aligned}\cos\alpha\ \cos\delta &= -\cos i\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\\ \sin\alpha\ \cos\delta &= \ \ \cos i\sin u\cos\Omega+\cos u\sin\Omega\\ \sin\delta &= \ \ \sin i\sin u\end{aligned}\quad . \tag{24.17}$$

bzw. relativ im Dreieck ΩFS

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \cos u\\ \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \sin u\cos i\\ \sin\delta &= \sin u\sin i\end{aligned}\quad . \tag{24.18}$$

Das Argument der Breite u kann auch direkt berechnet werden aus

$$\begin{aligned}\cos u &= \cos(\alpha-\Omega)\cos\delta\\ \sin u &= \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta\cos i+\sin\delta\sin i\end{aligned}\quad . \tag{24.19}$$

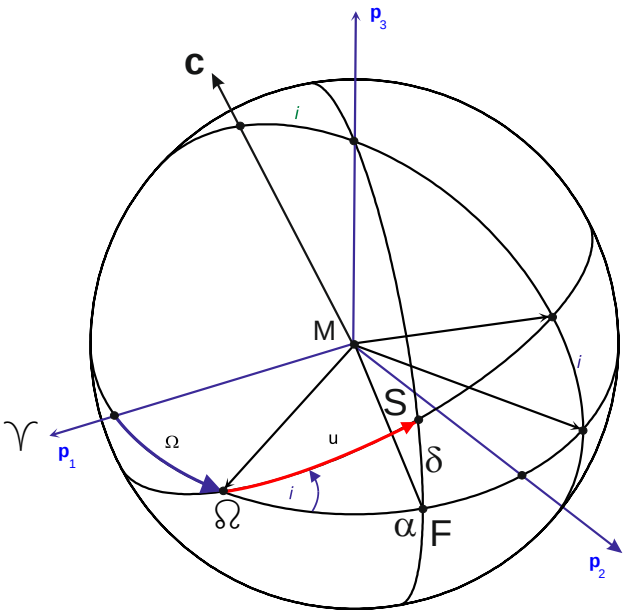


Bild 24-3: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt Υ bezogenen Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten α (Rektaszension) und δ (Deklination) und der Satellitenbahn mit dem Argument der Breite u, Ω – aufsteigender Knoten, S – Ort des Satelliten, F-Fußpunkt auf Äquator, M-Mittelpunkt der Sphäre, **c** – Normalenvektor der Bahnebene

Die zugehörenden Variationen sind[1]

$$\begin{aligned}\dot\alpha &= \dot\Omega+\frac{\dot u\cos i-(i)^{\bullet}\sin i\sin u\cos u}{\cos^2\delta}\\ \dot\delta &= \frac{\dot u\cos u\sin i+(i)^{\bullet}\sin u\cos i}{\cos\delta}\end{aligned}\quad . \tag{24.20}$$

[1] vgl. in Abschnitt 23.1.2 (auf Seite 120)., insbesondere die Formeln (23.31) und (23.32)

Mit den Variationsgleichungen (24.16), bzw. (11.70), (11.71) und (11.79)[1] werden diese Variationsausdrücke zurückgeführt auf

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\zeta}\,\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G}{r^2}\,\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G}{r^2}\,\frac{\cos i}{1-\sin^2 u\sin^2 i}\\ \dot{\delta} &= \dot{\zeta}\,\frac{\cos u\sin i}{\cos\delta} = \frac{G}{r^2}\,\frac{\cos u\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 u\sin^2 i}} \quad .\end{aligned} \tag{24.21}$$

bzw. in Abhängigkeit vom (ersten) *Hansen*schen Bahnwinkel auf

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\zeta} &= \frac{\cos i}{\cos^2\delta} \quad = \frac{\cos i}{1-\sin^2(\zeta-\sigma)\sin^2 i}\\ \frac{d\delta}{d\zeta} &= \frac{\cos u\sin i}{\cos\delta} = \frac{\cos(\zeta-\sigma)\sin i}{\sqrt{1-\sin^2(\zeta-\sigma)\sin^2 i}} \quad .\end{aligned} \tag{24.22}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die tropische Bewegung für polare Bahnen nicht sinnvollerweise untersucht werden kann.

Anmerkung: Die vorstehenden Formeln gelten in dieser Form unabhängig von der Orientierung der Bahnebene, ob direkt $(0° \le i < 90°)$ oder retrograd $(90° < i \le 180°)$.◄

Aus der ersten der Formeln (24.21) folgt noch die wichtige allgemeingültige Beziehung zwischen der Richtung der Variation der Rektaszension und Recht- bzw. Rückläufigkeit der Satellitenbahn

$$\operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) = \operatorname{sgn}(\cos i) \quad . \tag{24.23}$$

24.2.2 Der tropische Bahnwinkel

Als Bahnwinkel der tropischen Bewegung wird der Knickwinkel „Länge in der Bahn“

$$l := \Omega + u \tag{24.24}$$

bezeichnet. Er wird in dieser Form in gleicher Weise für rechtläufige wie rückläufige Bahnen definiert. Die zugehörige Variationsgleichung kann mit den Variationsgleichungen (11.71) und (11.79) (Band III) abgeleitet werden:

$$\frac{dl}{dt} = \dot{\zeta} + \frac{r\sin u(1-\cos i)}{G\,\sin i}\,b_N \quad \left\langle \sin i \neq 0\,,\quad \dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad . \right. \tag{24.25}$$

Mit den Variationsgleichungen (4.297) und (4.307) (Band II) kann diese Variation der Länge in der Bahn auf den *Hansen*schen Bahnwinkel bezogen werden:

$$\frac{dl}{d\zeta} = 1 + \frac{\sin(\zeta-\sigma)(1-\cos i)}{\sin i}\,\frac{d\eta}{d\zeta} \quad \langle \sin i \neq 0 \quad . \tag{24.26}$$

[1] In Abschnitt 11.1.5 (Band II)

24.2.3 Die mittlere tropische mittlere Bewegung

Die mittlere tropische mittlere Bewegung wird so definiert, dass ein sich auf dem Äquator bewegender fiktiver Satellit gleichförmig derart bewegt, dass er sich mit dem wahren in seiner Bahn bewegenden Satelliten nach einem tropischen Umlauf wieder in einem Anfangspunkt $l(t)=l(t_0)$ trifft. Mit den Ausdrücken (22.20) und (23.43) führt die Entwicklung (23.42) auf

$$\begin{aligned} l = l(t) = \overline{M_0}(t_0) + \bar{\omega}(t_0) + \bar{\Omega}_0 \; + \left\{ \overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{\Omega}_{s0} \right\} (t - t_0) + \\ + \delta M_0[t,t_0] + \delta\omega[t,t_0] + \delta\Omega[t,t_0] \quad . \end{aligned} \tag{24.27}$$

Die Variation der Länge in der Bahn nach der Zeit ergibt bei Bezug auf die Epocheparameter

$$\frac{dl}{dt} = \overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{\Omega}_{s0} + \frac{d}{dt}\left\{ \delta M_0[t,t_0] + \delta\omega[t,t_0] + \delta\Omega[t,t_0] \right\} \quad . \tag{24.28}$$

Damit kann die mittlere tropische mittlere Bewegung zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf Anfangsparameter zum Zeitpunkt einer Epoche t_0 dargestellt werden

$$\overline{n_t}[t,t_0] := \overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{\Omega}_{s0} \quad . \tag{24.29}$$

In vereinfachter Schreibweise lautet dann der Bezug zur mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung, zu mittleren anomalistischen mittleren Bewegung sowie zur mittleren drakonitischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_t} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \tag{24.30}$$

$$\overline{n_t} = \overline{n_a} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \tag{24.31}$$

$$\overline{n_t} = \overline{n_d} + \dot{\Omega}_s \quad . \tag{24.32}$$

Als eine Anwendung dieser Formelsysteme soll untersucht werden, wann bei einer Erdsatellitenbahn die tropische gleich der *Kepler*schen mittleren Bewegung ist. Dies bedeutet, dass nach Formel (24.30) die Bedingung

$$(M_0)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{n_t} = \overline{n_K} \tag{24.33}$$

erfüllt sein muss. Wir wollen dies für den Fall der Bewegungseinflüsse erster Ordnung für Erdsatelliten durch die zonale Harmonische J_2 untersuchen. Aus den Ausdrücken[1] (20.15), (20.16) und (20.17) folgt die nur von der Exzentrizität, nicht von der Bahnhöhe, abhängige (näherungsweise) Bedingung

$$\cos i_{t1/t2} = \frac{1}{5 + 3\sqrt{1-e^2}} \left(1 \pm \sqrt{6 + 8\sqrt{1-e^2} + 3\left(1-e^2\right)} \right) \quad . \tag{24.34}$$

BEISPIEL 1: Für Kreisbahnen haben nach Formel (24.34) alle Bahnen mit den Inklinationen $i_{t1} = 50°.1792$, sowie $i_{t2} = 112°.9787$ dieselbe tropische mittlere Bewegung wie die *Kepler*sche mittlere Bewegung. ◄

[1] in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

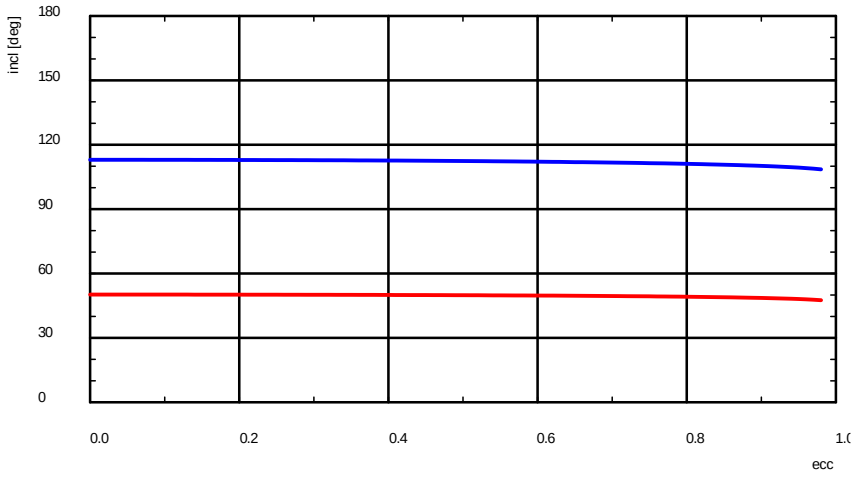


Bild 24-4: Die Lösungen von Gleichung (24.34)

BEISPIEL 2: Ein Überblick über die Bahnen, welche die Bedingung (24.34) erfüllen, zeigt Bild 24-4. Aufgetragen ist die Inklination über der Exzentrizität für alle Bahnen mit der mittleren Perigäumshöhe H_P = 200 km. Die Darstellung erfasst alle diese Bahnen, da Formel (24.34) von der Bahnhöhe unabhängig ist. Die Grafik zeigt, dass der Einfluss der Exzentrizität sehr gering ist. ◄

24.2.4 Bewegung des Knotens und Bewegung eines Satelliten

Die Eigenbewegung des Knotens wird bei der Untersuchung der Bahnen von Erdsatelliten nach den Formeln (20.15), (20.31) und (20.60) im Wesentlichen durch die säkulare Variation erster Ordnung

$$\dot{\Omega}_s = -\frac{3}{2}\overline{n_K}\, J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 + \cdots \tag{24.35}$$

geprägt. Wird ein aufeinanderfolgender Knotenüberflug betrachtet, d.h. nach einem drakonitischen Umlauf, verschiebt sich die Rektaszension des aufsteigenden Knotens um den Bogen

$$\Delta\alpha \approx \overline{n_d}\,\overline{P_d} + \operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\dot{\Omega}_s\,\overline{P_d} = 360° + \operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\dot{\Omega}_s\,\overline{P_d}\ . \tag{24.36}$$

Da für rechtläufige Bahnen die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens negativ ist, bewegt sich der Knoten nach Westen, während der Satellit nach Osten fliegt, nach einem Umlauf kommt also der Knoten dem Satelliten entgegen. Gleiches gilt für retrograde Bahnen: der Satellit fliegt nach Westen, der Knoten bewegt sich nach Osten. Damit gilt der Satz:

- *Der Knoten einer Erdsatellitenbahn bewegt sich stets dem Satelliten entgegen.*

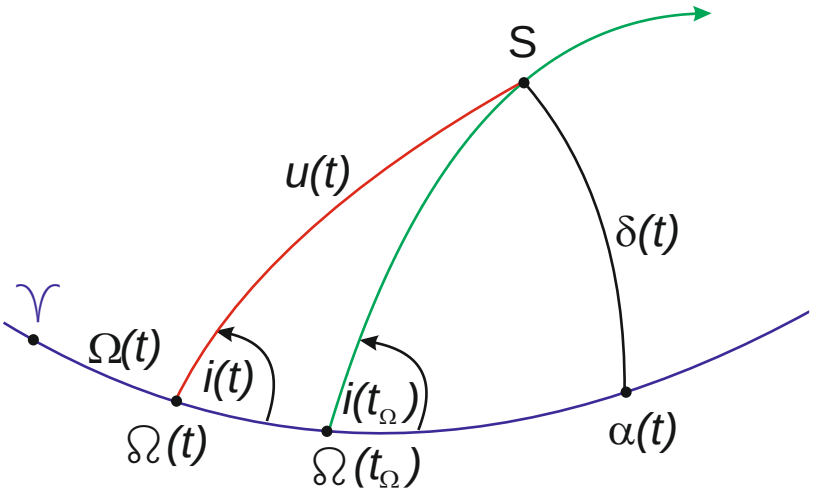


Bild 24-5: Oskulierender Knoten und oskulierendes Argument der Breite für erdnahe Satellitenbahnen, wahre Bahn in grün, oskulierende Bahn in rot

BEISPIEL: Die kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H=705 km, der Neigung i=98° hat die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = 1°.112033\times10^{-5}\left[1/s\right]$ und die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 5939.9\,\mathrm{s}$. Da in diesem Fall $\mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = -1$, befindet sich der Satellit (im Mittel) wieder im Knoten, wenn er den Rektaszensionsbogen $\Delta\alpha = 359°.9340$ durchflogen hat. Entsprechend ist die Aussage: der aufsteigende Knoten hat sich während eines drakonitischen Umlaufs längs des Äquators um die Rektaszension $\Delta\Omega = 0°.0660$ in östlicher Richtung verschoben dem von Osten auf retrograder Bahn kommenden Satelliten entgegen. ◄

24.2.5 Die Reduktion auf den Äquator

Um die tropische Bewegung eines Satelliten in seiner Bahn auf eine gleichförmige mittlere Bewegung zurückführen zu können, wird der Bahnwinkel der tropischen Bewegung, die Länge in der Bahn, in die Äquatorebene projiziert. Der Begriff „Reduktion auf den Äquator“ geht auf *Hipparch* zurück, der im Zusammenhang mit seinen Beobachtungen der Mondbewegung periodische Schwankungen der Mittelpunktsgleichung mit der Periode eines halben Monats feststellte. Diese Beobachtung, die von *Ptolemäus* vertieft untersucht worden war, konnte als „Reduktion auf die Ekliptik“ beschrieben werden[1].

Wird das Argument der Breite u auf den Äquator projiziert, erhält man als knotenbezogene Rektaszension den Winkel $\alpha_\Omega := \alpha - \Omega$ (siehe Bild 24-3). Als Reduktion auf den Äquator wird der Differenzwinkel $\left(\alpha - \Omega\right) - u$ bezeichnet. Die ersten beiden Gleichungen (24.18) ergeben

$$\tan\left(a - \Omega\right) = \tan u \cos i \quad . \tag{24.37}$$

Damit wird

[1] STUMPFF, K. [1959], p. 27

$$\tan\left[\left(\alpha-\Omega\right)-u\right]=-\frac{\left(1-\cos i\right)\tan u}{1+\cos i\tan^2 u} \quad . \tag{24.38}$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Identität

$$\tan^2\frac{i}{2}=\frac{1-\cos i}{1+\cos i} \tag{24.39}$$

umgeschrieben werden in

$$\tan\left[\left(\alpha-\Omega\right)-u\right]=-\frac{\tan^2\frac{i}{2}\sin 2u}{1+\tan^2\frac{i}{2}\cos 2u} \quad . \tag{24.40}$$

Die Verwendung des halben Winkels der Inklination hat hier den Vorteil, dass unabhängig von der Orientierung der Bahn (ob recht- oder rückläufig) die Größe

$$Q:=\tan^2\frac{i}{2} \tag{24.41}$$

stets der Einschränkung

$$0\le Q<1 \qquad\qquad \langle i<180° \tag{24.42}$$

unterliegt. Wird deshalb (24.40) umgeformt in

$$\alpha=\Omega+u-\arctan\left(\frac{Q\sin 2u}{1+Q\cos 2u}\right) \tag{24.43}$$

kann dieser Ausdruck entwickelt werden in die Potenzreihe

$$\alpha=\Omega+u-\arctan\left[Q\sin 2u\left(1-Q\cos 2u+Q^2\cos^2 2u+\cdots\right)\right] \quad . \tag{24.44}$$

Eine Entwicklung der arctan-Funktion führt auf den Näherungsausdruck

$$\alpha=\Omega+u-Q\sin 2u+\frac{Q^2}{2}\sin 4u-\frac{Q^3}{3}\sin 6u+O\left(Q^4\right) \quad . \tag{24.45}$$

Das Argument der Breite u kann mit der Mittelpunktsgleichung nach Ausdruck[1] (23.41) im Fall einer elliptischen Bewegung auf die mittlere Anomalie M bezogen werden. Dies führt schließlich auf den Näherungsausdruck[2]

$$\begin{aligned}\alpha=\bar{M}+\bar{\omega}+\bar{\Omega}+2\bar{e}_0\sin\bar{M}-\\ -\tan^2\frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right)+2\bar{e}_0\sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right)-2\bar{e}_0\sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\right]+\\ +O\left(\tan^4\frac{\bar{i}_0}{2}\right)+O\left(\bar{e}_0^2\right)+\delta M+\delta\omega+\delta\Omega \quad .\end{aligned} \tag{24.46}$$

Dieser Ausdruck spielt im Rahmen der sphärischen Astronomie eine besondere Rolle. In ihm wird die doppeltperiodische Variation des Verhaltens eines Himmelskörpers bei Bezug auf

---

[1] In Abschnitt 23.2.1 (auf Seite 124)

[2] Siehe etwa in DANJON, A. [1980], pp.43-45 et pp. 64-65; CAPDEROU, MICHEL [2003], pp.152-153z

die Ekliptik bzw. eines Satelliten auf den Äquator augenscheinlich[1]. Mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator kann die tropische Bewegung mit Hilfe der Rektaszension α beschrieben werden. Dies ist in allen Fällen möglich, auch wenn die Bahn nicht geneigt ist. Im Fall geneigter Bahnen kann die Bahn mit Hilfe der knotenbezogenen Rektaszension α_Ω unabhängig vom Knoten Ω und damit unabhängig von einem Anfangszeitpunkt untersucht werden. Der Zeitbezug wird dann erst ad hoc nach einer Bahnauswahl bestimmt.

Die Variation der Rektaszension zur Beschreibung einer tropischen Bewegung lautet im Hinblick auf die Reduktion auf den Äquator

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = \overline{n_t} &+ \frac{d}{dt}\left\{2\bar{e}_0 \sin \bar{M}\right\} - \\ &- \frac{d}{dt}\left\{\tan^2\frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\right]\right\} + \\ &+ \frac{d}{dt}\left\{O\left(\tan^4\frac{\bar{i}_0}{2}\right) + O\left(\bar{e}_0^2\right) + \delta M + \delta\omega + \delta\Omega\right\} \quad .\end{aligned} \tag{24.47}$$

Für direkte Bahnen mit Inklinationen $i < 90°$ bewegt sich ein Satellit mit wachsender Rektaszension, für retrograde Bahnen mit abnehmender Rektaszension, wie unmittelbar aus der ersten der Beziehungen (24.21) hervorgeht. Da in der tropischen mittleren Bewegung (24.30) die *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_K}$ die säkularen Variationen der anderen Parameter dominiert

$$\overline{n_K} > \left|\left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\right| \geq 0 \quad , \tag{24.48}$$

bleibt die tropische mittlere Bewegung (24.30) stets eine positive Größe:

$$\overline{n_t} > 0 \ . \tag{24.49}$$

Als mittlere Rektaszension eines Satelliten kann unter Vernachlässigung der periodischen Bewegungseinflüsse der nur säkularen Variationen unterliegende Anteil der Rektaszension in der Entwicklung (24.46)

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} := \bar{M} + \bar{\omega} + \bar{\Omega} + 2\bar{e}_0 \sin \bar{M} - \tan^2\frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\right] - \\ + O\left(e^2 \tan^4\frac{\bar{i}_0}{2}\right) + O\left(\bar{e}_0^2\right)\end{aligned} \tag{24.50}$$

verstanden werden. Entsprechend lautet die säkulare Variation der Rektaszension

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\alpha}} = \overline{n_t} &+ \frac{d}{dt}\left\{2\bar{e}_0 \sin \bar{M}\right\} - \\ &- \frac{d}{dt}\left\{\tan^2\frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\right]\right\} + \cdots .\end{aligned} \tag{24.51}$$

[1] Die Verwendung dieser Formel bei Untersuchungen der scheinbaren Bewegung der Sonne und damit zusammenhängend der Zeitgleichung wird in den Abschnitten 28.2 (auf Seite 404) und 28.3 demonstriert.

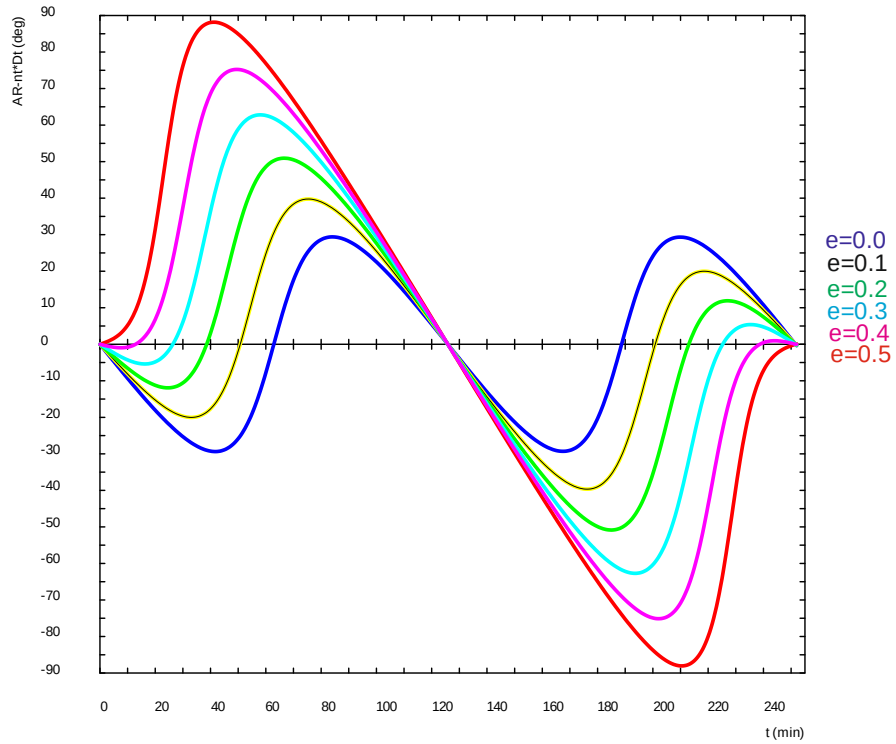


Bild 24-6: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten längs des Äquators für verschiedene Exzentrizitäten während eines tropischen Umlaufs. Bahndaten: a=13200 km, i= 70°.

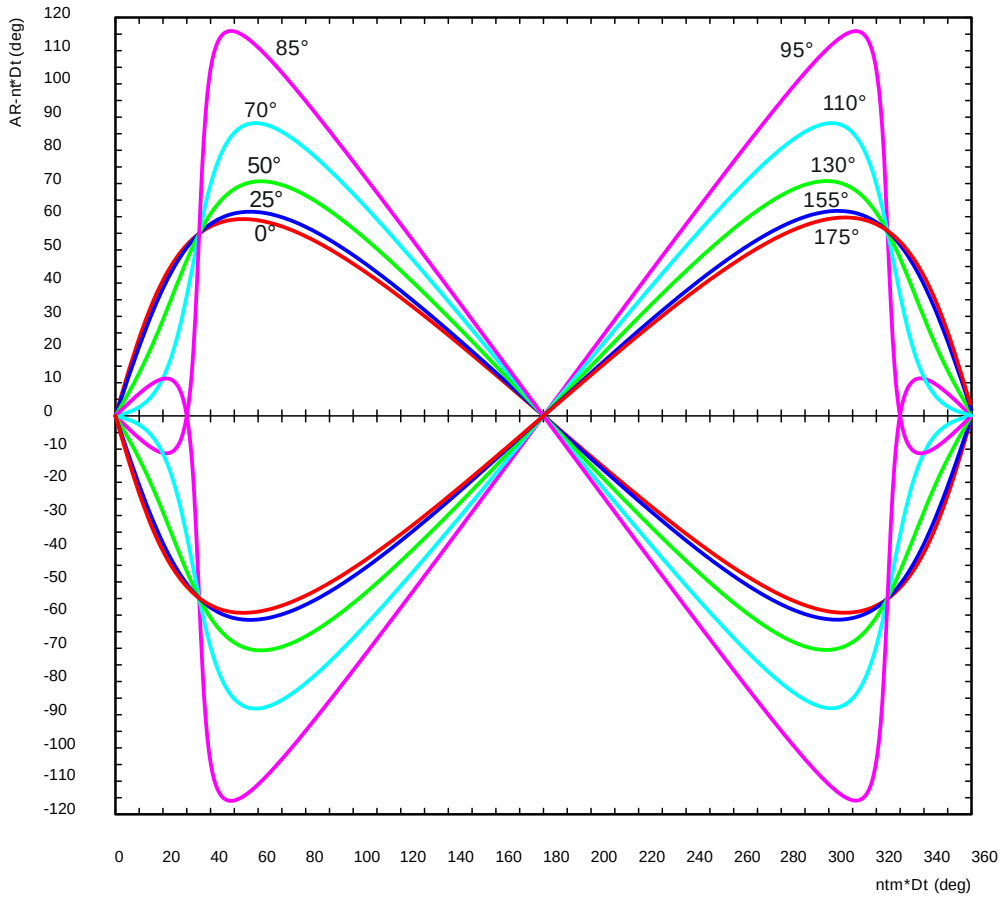


Bild 24-7: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten längs des Äquators für verschiedene Inklinationen. Bahndaten: a=13200 km, e= 0.5.

Das Vorzeichen der Bewegung wird in diesem Ausdruck im Wesentlichen durch den Anteil der Reduktion auf den Äquator geprägt.

Im Fall einer Satellitenbahnanalyse interessiert auch im Rahmen der tropischen Bewegung eine langfristig gültige mittlere Bewegung. Hierzu wird die wahre Bewegung des Satelliten in seiner Bahn durch die gleichmäßige Bewegung eines fiktiven Satelliten auf dem Äquator ersetzt. Diese Bewegung hat dieselbe mittlere tropische Umlaufzeit wie der wahre Satellit auf seiner Bahn. Um den Unterschied dieser beiden Bewegungen darzustellen, wird die oskulierende Rektaszension α des Satelliten für einen gewissen Zeitpunkt *t* mit dem Ort des fiktiven Satelliten zum selben Zeitpunkt verglichen. Dazu wird die mittlere mittlere Anomalie durch die tropische mittlere Bewegung des auf dem Äquator sich bewegenden fiktiven Satelliten berechnet. Der Unterschied der wahren Bewegung in Rektaszension bezogen auf die mittlere tropische Bewegung beträgt mit der mittleren Rektaszension aus (24.50)

$$\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha} \quad . \tag{24.52}$$

Hier ist als Epoche t_0 ein Anfangszeitpunkt gewählt, zu dem der wahre und der fiktive Satellit dieselbe Position einnehmen. Für genaue Berechnungen kann die exakte Formel (24.43) verwendet werden, womit die in Formel (24.46) verwendeten Näherungen und Vernachlässigungen der periodischen Bewegungsanteile der wahren Bewegung umgangen werden können. Für eine Beurteilung des Verlaufs der Reduktion auf den Äquator ist der Näherungsausdruck (24.46) nützlich. Er zeigt den Unterschied zwischen den beiden betrachteten Bewegungen mit einer zweimal doppelperiodischen Variation, als Folge der Reduktion auf den Äquator und als Folge der Exzentrizität der wahren Bahn.

BEISPIEL 1: Bild 24-6 zeigt den Verlauf der Reduktion auf den Äquator über der Zeit für einen drakonitischen Umlauf für eine Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 13200\,\mathrm{km}$, mittlerer Inklination $\bar{i}_0 = 70°$ sowie für verschiedene Exzentrizitäten. ◄

BEISPIEL 2: Bild 24-7 zeigt den Verlauf der Reduktion auf den Äquator über der mittleren Anomalie des fiktiven Satelliten auf dem Äquator für einen drakonitischen Umlauf $\overline{P_d}$ für die Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 13200\,\mathrm{km}$, mittlerer Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.5$ und für verschiedene Inklinationen. Die Schnittpunkte der Kurven bei $\bar{n}_t\,\overline{P_d} \approx 35°.8$ bzw. $\bar{n}_t\,\overline{P_d} \approx 144°.2$ und Ordinaten $\alpha - \bar{n}_t\,\overline{P_d} \approx \pm 55°.2$ lassen sich damit erklären, dass für diese Werte in dem Näherungsausdruck (24.46) das Argument bei $\tan^2 i/2$ verschwindet. An diesen Punkten wirkt sich somit ausschließlich die Exzentrizität aus, nicht die Inklination. ◄

24.3 Die tropische Umlaufzeit von Erdsatelliten

Dir tropische Bewegung wird auf den mittleren Frühlingspunkt bezogen. Die Position des mittleren Frühlingspunktes wird durch die lunisolare Präzession bestimmt, ist also eine Folge der Präzession der Erdachse[1]. Im Rahmen der tropischen Bewegung wird der Frühlingspunkt als fester Bezugspunkt betrachtet.

[1] Siehe hierzu Abschnitt 9.3, Band II

24.3.1 Definition der tropischen Umlaufzeit

Der Bahnwinkel der tropischen Bewegung ist die Länge in der Bahn $l = \Omega + u$. Die tropische Umlaufzeit wird daher definiert als der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch denselben (Anfangs-) Bahnwinkel l_0:

$$P_t := \int_{l_0}^{l_0+2\pi} \frac{1}{\frac{dl}{dt}} dt \quad . \tag{24.53}$$

Die zeitliche Variation der Länge in der Bahn ist aus Formel (24.25) bekannt.

Mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator (24.43), bzw. dem Näherungsausdruck (24.46) kann die tropische Umlaufzeit auch mit Bezug auf die Rektaszension des Satellitenortes definiert werden:

$$P_t := \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \tag{24.54}$$

Die zeitbezogene Variation der Rektaszension ist aus der ersten der Beziehungen (24.20) bekannt. Bei Existenz eines geeigneten Ephemeridenprogramms kann die tropische Umlaufzeit iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(P_t) \equiv \sin\left[l(t_0 + P_t) - l(t_0) \right] = 0 \tag{24.55}$$

berechnet werden. Als Anfangswert der Iteration kann etwa die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_t^{(0)} := P_K = \sqrt{\mu / a^3}$ verwendet werden. In gleicher Weise kann auch die Funktion

$$fct(P_t) \equiv \sin\left[\alpha(t_0 + P_t) - \alpha(t_0) \right] = 0 \tag{24.56}$$

angewendet werden. Hier wird die Rektaszension α an Stelle der Länge in der Bahn l als Bahnwinkel der tropischen Bewegung verwendet.

24.3.2 Die mittlere tropische Umlaufzeit

Wird eines der Integrale (24.53) oder (24.54) in eine Reihe nach der mittleren Anomalie entwickelt, kann (in der üblichen Weise) ein mittlerer Anteil der tropischen Umlaufzeit abgespalten werden:

$$\overline{P_t} = \frac{2\pi}{\overline{n_t}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(\overline{M_0}\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s} \quad . \tag{24.57}$$

Entsprechend ihrer Zuordnungen sind die bisher behandelten (mittleren) Umlaufzeiten von zum Teil beträchtlichem quantitativem Unterschied. Das relative Verhalten dieser Umlaufzeiten wird im Folgenden betrachtet.

24.3.3 Die mittlere tropische Umlaufzeit und andere mittlere Umlaufzeiten

Symptomatisch für den Vergleich der tropischen Umlaufzeit mit einer anderen ist die Relation zur drakonitischen Umlaufzeit. Der Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen nach Formel (24.32) mit

$$\overline{n_t} = \overline{n_d} + \dot{\Omega}_s \tag{24.58}$$

zeigt, dass nach Rechtläufigkeit bzw. Rückläufigkeit der Bewegungsrichtung des Satelliten unterschieden werden muss. Der Unterschied ist eine Folge der säkularen Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach Formel (24.35). Diese kann auch in der Form

$$\dot{\Omega}_s = -\frac{3}{2}\overline{n}_K J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 + \cdots = -\operatorname{sgn}(\cos i)\left|\dot{\Omega}_s\right| \tag{24.59}$$

geschrieben werden. Die Relation zwischen der mittleren tropischen und der mittleren drakonitischen Umlaufzeit lautet mit der Relation (24.32)

$$\overline{P}_t = \frac{2\pi}{\overline{n}_d - \operatorname{sgn}(\cos i)\left|\dot{\Omega}_s\right|} = \frac{\overline{P}_d}{1 - \operatorname{sgn}(\cos i)\dfrac{\left|\dot{\Omega}_s\right|}{\overline{n}_d}} = \frac{\overline{P}_d}{1 - \operatorname{sgn}(\cos i)\overline{P}_d\dfrac{\left|\dot{\Omega}_s\right|}{2\pi}} \quad . \tag{24.60}$$

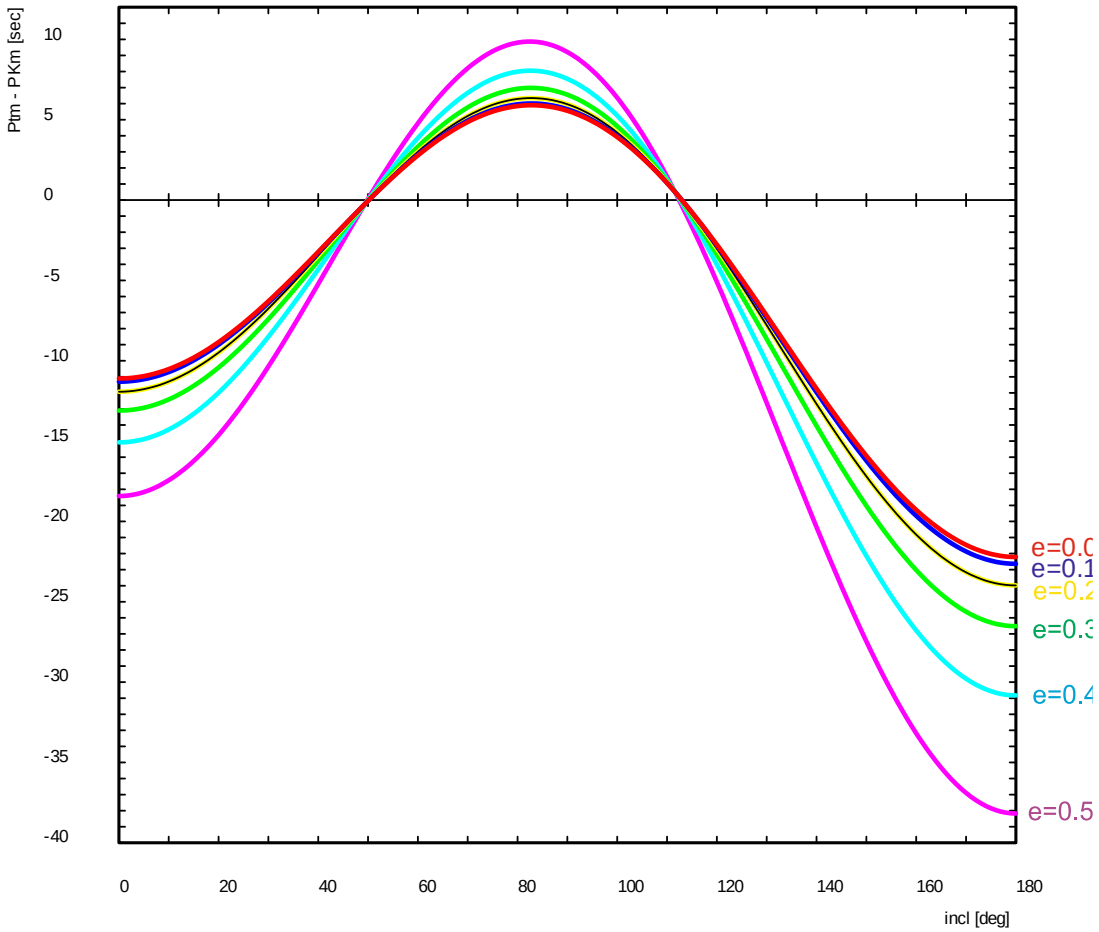


Bild 24-8: Der Unterschied der mittleren tropischen Umlaufzeit bei Bezug auf die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit für Bahnen mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten

Damit gilt bei $0° \le i < 90°$ für die mittleren Bewegungen die Relation $\overline{n}_t < \overline{n}_d$, bei $90° < i \le 180°$ dagegen $\overline{n}_t > \overline{n}_d$. Somit ist für rechtläufige Bahnen die mittlere tropische Umlaufzeit größer als die mittlere drakonitische Umlaufzeit, für rückläufige kleiner. Als Konsequenz wird hierdurch (in vollständiger Allgemeinheit) die Aussage von Abschnitt 24.2.4 bestätigt:

➢ *Ein Erdsatellit durchfliegt stets eher seinen Knoten als dieselbe Rektaszension nach einem tropischen Umlauf. Dies impliziert weiterhin die Aussage: Ein Erdsatellit kann nach einem tropischen Umlauf (abgesehen von Äquator- und Polbahnen) nicht dieselbe Deklination überfliegen.*◄

BEISPIEL 1: Die Differenz der mittleren tropischen Umlaufzeit im Verhältnis zur mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit wird für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$, für einige Exzentrizitäten über der Inklination in Bild 24-8 (auf Seite 306) dargestellt. Das Bild bestätigt das mit Formel (24.34) erhaltene Ergebnis, dass für **alle** Bahnen die mittlere tropische und die mittlere Keplersche Umlaufzeit für die Inklinationen $i_{t1} = 50°.1792$ und $i_{t2} = 112°.9787$ übereinstimmen. Diese Inklinationen, die sich nach Bild 24-4 (auf Seite 299) nur geringfügig mit wachsender Exzentrizität ändern, haben also einen im Wesentlichen allgemeingültigen Charakter für Erdsatellitenbahnen.

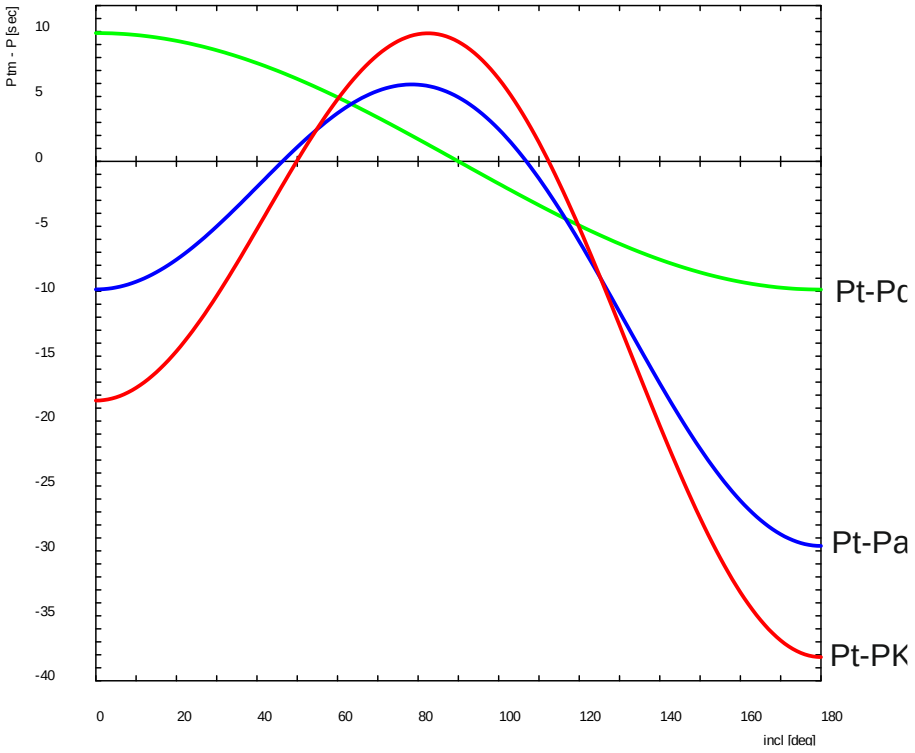


Bild 24-9: Die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P}_t$ in Relation zur mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit $\overline{P}_K$, zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P}_a$ und zur mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_d$ für Bahnen mit dem mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ und Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.5$ über der Inklination

BEISPIEL 2: Die Bahn mit den mittleren Epocheelementen $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$, $\overline{\text{e}}_0 = 0.5$, $\overline{i}_0 = 60°.0$ hat die mittleren Umlaufzeiten:

*Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P}_K = 16485.5346\,\text{s}$,
anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P}_a = 16486.6045\,\text{s}$,
drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P}_d = 16485.3777\,\text{s}$,
tropische Umlaufzeit	$\overline{P}_t = 16490.3159\,\text{s}$ .. ◄

BEISPIEL 3: Die Bahn mit den mittleren Epocheelementen $\bar{a}_0 = 12000\,\text{km}$ $\bar{e}_0 = 0.2$, $\bar{i}_0 = 105°.0$ hat die mittleren Umlaufzeiten:

*Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P_K} = 13082.2622\,\text{s}$,
anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P_a} = 13084.8114\,\text{s}$,
drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_d} = 13086.9774\,\text{s}$,
tropische Umlaufzeit	$\overline{P_t} = 13085.2925\,\text{s}$ .. ◀

BEISPIEL 4: Die Differenzen der mittleren tropischen Umlaufzeit in Bezug auf die mittleren *Kepler*sche, die mittleren anomalistische und die mittleren drakonitische Umlaufzeit sind in Bild 24-9 für Bahnen mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 14000\,\text{km}$ und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.5$ über der Inklination aufgetragen. Der Bezug auf die *Kepler*sche Umlaufzeit entspricht Bild 24-8. ◀

24.3.4 Bahnauswahl mit der mittleren tropischen Umlaufzeit

Auch im Fall der tropischen Bewegung kann durch Vorgabe einer mittleren tropischen Umlaufzeit $\overline{P_t}$ ein Bahnparameter bestimmt werden, wenn die anderen benötigten Parameter vorgegeben sind. Dies gilt etwa für die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}$. Eine nullte Näherung kann mit Hilfe der *Kepler*schen Umlaufzeit erhalten werden:

$$\overline{a_t}^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_t}\right)^2}{4\pi^2}} \quad .. \tag{24.61}$$

Eine erste Verbesserung wird erreicht, wenn für den Fall von Erdsatelliten im Ausdruck der mittleren tropischen mittleren Bewegung (24.30) die entsprechenden säkularen Ausdrücke erster Ordnung aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) eingesetzt werden. Dazu wird die Vorgabe einer mittleren Exzentrizität $\bar{e}$ und einer mittleren Inklination $\bar{i}$ benötigt. Dann erhält man

$$\Delta\overline{a_t}^{(1)} = \frac{J_2 R_E^2}{2\,\overline{a_t}^{(0)}\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\left[\cos^2\bar{i}\left(3\sqrt{1-\bar{e}^2}+5\right)-\left(1+\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)-2\cos\bar{i}\right]+O\left(\overline{a_t}^{(0)}\,J_2^2\right) . \tag{24.62}$$

Dies führt auf den verbesserten Wert

$$\overline{a_t}^{(1)} = \overline{a_t}^{(0)} + \Delta\overline{a_t}^{(1)} \quad . \tag{24.63}$$

Die Korrektur (24.62) verschwindet, wenn die vorgegebenen Exzentrizität und Inklination die Bedingung (24.34) erfüllen, wenn also mittlere tropische und mittlere Keplersche Bewegung zusammenfallen. Eine weitere Verbesserung kann iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion (24.56)

$$fct\left(\overline{a_t}\right) \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0+P_t;\overline{a_t}^{(\nu)}\right)-\alpha\left(t_0;\overline{a_t}^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{24.64}$$

gefunden werden. Als wesentlicher Parameter kann hier neben der mittleren tropischen Umlaufzeit $\overline{P_t}$ auch die wahre tropische Umlaufzeit P_t eingesetzt werden, die sich durch Wahl des benutzten Bahnmodells unterscheiden.

BEISPIEL: Gegeben sei eine Erdsatellitenbahn durch Vorgabe der tropischen Umlaufzeit $P_t = 6000\,\mathrm{s}$, die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.08$ und die mittlere Inklination $\overline{i}_0 = 10°$. Wird die gegebene Umlaufzeit als mittlere aufgefasst, liefern die Formeln (24.61) - (24.64) für die Auswahl der mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\overline{a}_0^{(0)} = 7136.635456\,\mathrm{km}, \Delta\overline{a}_0^{(1)} = 17.979897, \overline{a}_0^{(1)} = 7154.615352\,\mathrm{km}, \overline{a}_0^{(2)} = 7147.501763.$$

Der letzte, iterativ erhaltene Wert, liefert die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_t} = 5998.778643\,\mathrm{s}$, erst die Iteration mit Hilfe der überlagerten Funktion in Formel (24.56) ergibt mit den säkularen Bewegungseinflüssen (J_2, J_4) als säkulare tropische Umlaufzeit den vorgegebenen Sollwert $\overline{P_{t,\mathrm{sec}}} = 5999.999999\,\mathrm{s}$. Die Berechnung wurde mit den a-priori Fehlergrenzen $\Delta t = 10^{-8}\,\mathrm{s}, \Delta(\mathrm{fct}) = 10^{-8}, \Delta a = 10^{-6}\,\mathrm{km}$ durchgeführt.

Wird dagegen der vorgegebene Zahlenwert für die tropische Umlaufzeit als wahre Umlaufzeit aufgefasst, wird unter Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse durch (J_2, J_3, J_4) die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(2)} = 7147.500564\,\mathrm{km}$ mit Hilfe der überlagerten Funktion (24.64) erhalten. Auch hier muss zur Bestätigung des vorgegebenen Wertes die Iteration mit Hilfe der Funktion (24.56) durchgeführt werden. ◄

25 Die siderische Bewegung

Aus der sphärischen Astronomie ist der Begriff des siderischen Umlaufs bekannt, dessen Übertragung in die Satellitenbahnmechanik kurz angedeutet sei. Der Frühlingspunkt bewegt sich infolge der Präzession der Erdachse gegenüber dem als fest betrachteten Fixsternhimmel. Wird der Umlauf eines Satelliten nicht auf den Frühlingspunkt sondern auf den Fixsternhimmel bezogen, wird die so definierte siderische Bewegung von der auf den Frühlingspunkt bezogenen tropischen Bewegung abweichen. Um den Unterschied zwischen der siderischen und der tropischen Bewegung zu berechnen, wird die Kenntnis der Präzession benötigt.

25.1 Zur Definition der siderischen Bewegung eines Erdsatelliten

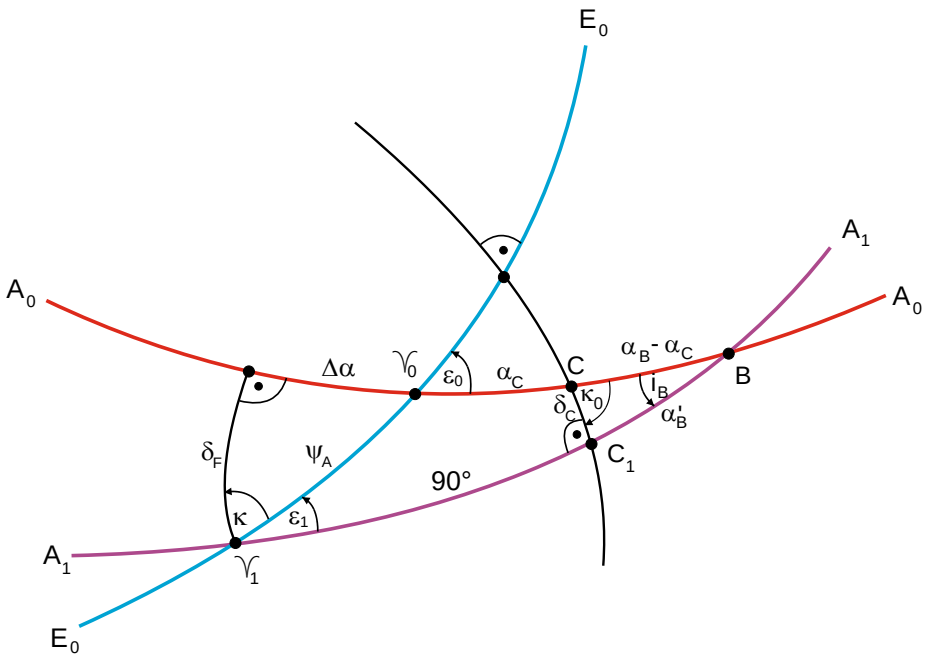


Bild 25-1: Transformation des Äquatorsystems als Folge der lunisolaren Präzession[1]

Der Hauptanteil der Präzession ist die lunisolare Präzession: der Frühlingspunkt bewegt sich längs der als fest angenommenen Ekliptik im Zeitintervall Δt um den Winkel (vgl. Bild 25-1)

$$\psi_A = p_L\left(t_1 - t_0\right) = p_L\,\Delta t \ . \tag{25.1}$$

Pro Jahr beträgt diese Verschiebung etwa $p_L \approx 50''$ in westlicher Richtung. Im IAU (1976) System der astronomischen Konstanten wird der Wert

$$p_L = 5029''.0966 \text{ pro Julianischem Jahrhundert} \tag{25.2}$$

[1] Kopie von Bild 9-6, Abschnitt 9.3.1, Band II

verwendet[1]. Allerdings ist dieser Parameter nicht konstant, sondern unterliegt (zumindest) säkularen Veränderungen im Verlauf von julianischen Jahrhunderten[2].

Der lunisolaren Präzession um den Winkel ψ_A entspricht auf dem Äquator die Differenz in Rektaszension $\Delta\alpha$, die nach Bild 25-1 aus den Formeln

$$\begin{aligned} \cos\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \cos\psi_A \\ \sin\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \sin\psi_A\ \cos\varepsilon_0 \\ \sin\delta_F &= \sin\psi_A\ \sin\varepsilon_0 \end{aligned} \tag{25.3}$$

berechnet werden kann. Hier ist ε_0 die momentane Schiefe der Ekliptik zum Anfangszeitpunkt t_0.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird der siderische Umlauf eines Satelliten längs einer oskulierenden Äquatorebene gerechnet, wobei die relative Verschiebung des Frühlingspunktes um $\Delta\alpha$ berücksichtigt wird. Wegen der im Vergleich zur langsamen Verschiebung des Frühlingspunktes kurzen Umlaufzeit eines Erdsatelliten, kann die Deklination δ_F des neuen Frühlingspunktes Υ_1 als sehr klein, somit $\cos\delta_F \approx 1$, aufgefasst werden. Nach der ersten der Gleichungen (25.3) kann daher in diesem Zusammenhang

$$\Delta\alpha \approx \psi_A \tag{25.4}$$

gesetzt werden. Die säkulare Variation infolge der lunisolaren Präzession bei der Berechnung der mittleren Bewegung eines Erdsatelliten ist daher auf den Wert p_L aus Formel (25.1) zurückführbar. Die mittlere siderische mittlere Bewegung kann in Ergänzung der mittleren tropischen mittleren Bewegung (24.26) angesetzt werden[3] zu

$$\overline{n_{sid}} = \overline{n_t} + p_L = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s + p_L \quad . \tag{25.5}$$

Die mittlere tropische Umlaufzeit lautet dann

$$\overline{P_{sid}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{sid}}} \quad . \tag{25.6}$$

25.2 Numerische Abschätzungen der siderischen Satellitenbewegung

Für einen erdnahen Satelliten mit etwa 7000 sec Umlaufzeit bewirkt die lunisolare Präzession eine Verschiebung des Frühlingspunktes um etwa $\Delta\alpha \approx 0''.01$, für einen geosynchronen Satelliten mit 24^h ist $\Delta\alpha \approx 0''.14$ zu erwarten.

Für das Rechnen in einer Satellitenbahnanalyse wird die Rate der lunisolaren Präzession in Radian pro Sekunde benötigt:

$$p_L = \frac{5029''.0966 \times \pi \times 1°1^d}{180° \times 3600'' \times 36525^d \times 86400^s} = 7.76261098 \times 10^{-12}\ /\ s \quad . \tag{25.7}$$

---

[1] SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 103 und p. 696

[2] Siehe näheres in Abschnitt 9.3.1, Band II

[3] In Abschnitt 24.2.3

Damit kann im Beispiel der Unterschied der mittleren siderischen Umlaufzeit gegenüber einer mittleren tropischen Umlaufzeit abgeschätzt werden: In Abschnitt 24.3.2 wird für die Bahn $\bar{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}, \bar{e}_0 = 0.5, \bar{i}_0 = 60°.0$ die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_t} = 16469.292\,\mathrm{s}$ mit der mittleren tropischen mittleren Bewegung $\overline{n_t} = 3.81509133 \times 10^{-4}/s$. Die mittlere siderische Bewegung beträgt nach Formel (25.5) $\overline{n_{sid}} = 3.81509140 \times 10^{-4}/s$, somit die mittlere siderische Umlaufzeit $\overline{P_{sid}} = 16469.29166\,\mathrm{s}$.

25.3 Einfluss der Präzession durch die Planeten

Der Vollständigkeit halber sei noch der Einfluss durch die Präzession durch die Planeten diskutiert[1]. Dieser Effekt verändert im Gegensatz zur lunisolaren Präzession auch die inertiale Lage der Ekliptik. Die Präzession durch die Planeten bewirkt eine Verschiebung des Frühlingspunktes im julianischen Jahrhundert um $12''$ und eine Abnahme der Schiefe der Ekliptik im Jahrhundert um $47''$. Da sich schon die lunisolare Präzession so gut wie nicht auf Aussagen der Satellitenbewegung auswirkt, kann die mehr als 400 mal so kleine Präzession durch die Planeten quantitativ keinen Einfluss auf Aussagen einer Satellitenbahnanalyse ausüben.

Diese Aussage trifft allerdings nicht für astronomische Beobachtungen zu, die mit äußerster Präzision durchgeführt werden müssen[2].

[1] siehe etwa in Abschnitt 9.3.2 (Band II)

[2] etwa nach Abschnitt 9.3.4

26 Die Meridian-bezogene Bewegung

Als Meridian-bezogene Umlaufzeit wird die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden gleichartigen Durchgängen des Satelliten durch ein- und denselben Meridian auf der Erdoberfläche definiert.

Die Untersuchung einer Satellitenbewegung bei Bezug auf einen Meridian über der Erdoberfläche ist insbesondere für äquatornahe Bahnen, vor allem bei geosynchronen Bahnen, von besonderem Interesse (Abschnitt 26.6). Hier kann beobachtet werden, wann ein Satellit wieder sichtbar wird. In der englisch-sprachigen Literatur wird die entsprechende Umlaufzeit deshalb auch als „revisiting period“ bezeichnet[1]. Die Meridian-bezogene Bewegung ist somit für alle Bahnen von Interesse, für die weder eine drakonitische noch eine anomalistische Bewegung definiert werden können (Abschnitt 26.3 und 26.4).

Es darf im Allgemeinen nicht erwartet werden, dass nach einem meridian-bezogenen Umlauf auch dieselbe geographische Breite überflogen wird, also derselbe Ort auf der Erdoberfläche getroffen werden kann. Infolge der Erdrotation erscheint die Bewegung eines Satelliten anders als er sich in seiner Bahn bewegt. Die Meridian-bezogene Bewegung ist daher grundlegend für die Untersuchung der scheinbaren Satellitenbewegung. Ein interessanter Spezialfall sind die scheinbar stationären Bahnpunkte (Abschnitt 26.7).

26.1 Das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem

Soll eine Satellitenbewegung auf einen Meridian auf der Erdoberfläche bezogen werden, kann als Bezugsmeridian der 0-Meridian durch Greenwich gewählt werden, der Ortsmeridian durch einen bestimmten Beobachtungsort, oder einen beliebigen Meridian, den der Satellit zu einem bestimmten Zeitpunkt überfliegt. Ein Ortsmeridian hat zu einem bestimmten Zeitpunkt in Bezug auf den Frühlingspunkt als Winkelabstand den Stundenwinkel Θ, der in diesem Zusammenhang als Sternzeit des Ortsmeridians bezeichnet wird. Für die Untersuchung einer Satellitenbewegung bei Bezug auf die Erdoberfläche ist die Sternzeit Θ_G des 0-Meridians von grundlegender Bedeutung.

Nach Abschnitt 8.4.2 (Band II) errechnet sich die Sternzeit des 0-Meridians bei Bezug auf die Sternzeit Θ_{G_0}, die in Greenwich um $0^h\,[\text{U.T.1}]$ gültig ist. Dieser Wert wird in Formel (8.130) zur Verfügung gestellt. Die Sternzeit in Greenwich zu einem beliebigen Zeitpunkt $t\,[\text{U.T.1}]$ wird mit Formel (8.132) berechnet

$$\Theta_G = \Theta_{G_0} + \dot{\Theta} t \quad , \tag{26.1}$$

wenn t das Zeitintervall in Bezug auf Mitternacht in Greenwich ist. Hier ist der Faktor $\dot{\Theta}$ der Variation der Sternzeit die tropische Rotationsgeschwindigkeit der Erde, gegeben nach (8.133) durch den Zahlenwert

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} \;=\; & 1.002737909350795 + 5.9006\times10^{-11}\,T_U + 5.9\times10^{-15}\,T_U^2 \\ & \left[\text{Umläufe pro mittlerem Sonnentag}\right] \quad . \end{aligned} \tag{26.2}$$

[1] Dies ist auch der Grund, weshalb die Meridian-bezogene Bewegung im vorliegenden Bericht mit dem Index „R“ charakterisiert wird.

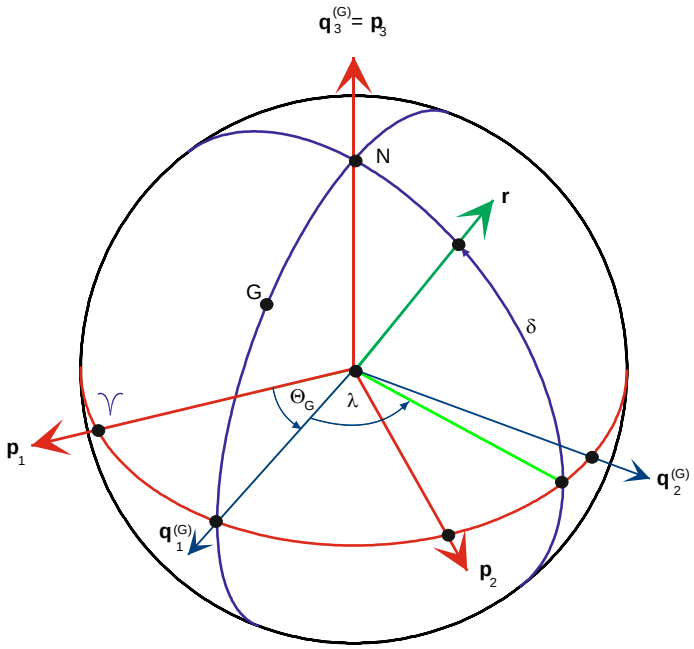


Bild 26-1: Das Meridian bezogene geozentrische erdfeste Koordinatensystem

Diese die Erdrotation beschreibende Größe ist somit der entscheidende Faktor zur Umrechnung vom Frühlingspunkt-orientierten Äquatorsystem zu einem erdfesten Äquatorsystem. Sei die Rektaszension α eines Satellitenortes berechnet, so kann seine (östliche) geographische Länge λ bezogen auf den Greenwich Meridian (nach Bild 26-1) aus der Beziehung

$$\lambda = \alpha - \Theta_G \tag{26.3}$$

erhalten werden. Für die zeitliche Variation der geographischen Länge

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} \tag{26.4}$$

kann mit der Variation der Rektaszension aus Formel (24.21)

$$\dot{\lambda} = \dot{\zeta}\,\frac{\cos i}{\cos^2 \delta} - \dot{\Theta} \tag{26.5}$$

gebildet werden. Die Größe $\dot{\lambda}$ ist somit die wahre auf einen Meridian bezogene Bewegung eines Satelliten. $\dot{\zeta}$ ist die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels, für die der Flächensatz $r^2\,\dot{\zeta} = G$ gilt.

26.2 Die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung

Da die geographische Länge λ als Bezugswinkel der Meridian-bezogenen Bewegung längs des Äquators gezählt wird, kann auch in diesem Fall die Reduktion auf den Äquator (24.46) verwendet werden:

$$\begin{aligned}\lambda = \alpha - \Theta = \\ = \bar{M} + \bar{\omega} + \bar{\Omega} - \Theta + \\ + 2\bar{e}_0 \sin \bar{M} - \\ - \tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega} + \bar{M}\right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + 3\bar{M}\right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + \bar{M}\right)\right] + \\ + O\left(e^2 \tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2}\right) + \delta M + \delta\omega + \delta\Omega \quad .\end{aligned} \tag{26.6}$$

Um die entsprechende Bewegung untersuchen zu können, muss der Differentialquotient gebildet werden, der mit Hilfe der tropischen Bewegung in Ausdruck (24.50) bei Bezug auf die Projektion auf den Äquator hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} = \operatorname{sgn}(\cos i)\,\overline{n_t} - \dot{\Theta} + \\ + \operatorname{sgn}(\cos i)\frac{d}{dt}\left\{2\bar{e}_0 \sin \bar{M}\right\} - \\ - \operatorname{sgn}(\cos i)\frac{d}{dt}\left\{\tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2\left(\bar{\omega} + \bar{M}\right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + 3\bar{M}\right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + \bar{M}\right)\right]\right\} + \\ + \operatorname{sgn}(\cos i)\frac{d}{dt}\left\{O\left(e^2 \tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2}\right) + \delta M + \delta\omega + \delta\Omega\right\} \quad .\end{aligned} \tag{26.7}$$

Aus diesem Ausdruck wird die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung mit Bezug zur mittleren tropischen mittleren Bewegung erhalten:

$$\overline{n_R} := \operatorname{sgn}(\cos i)\ \overline{n_t} - \dot{\Theta} \quad . \tag{26.8}$$

Der Bezug zur mittleren anomalistischen mittleren Bewegung lautet

$$\overline{n_R} = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\left[\overline{n_a} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\right] - \dot{\Theta} \tag{26.9}$$

und zur mittleren drakonitischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_R} = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\left[\overline{n_d} + \dot{\Omega}_s\right] - \dot{\Theta} \quad . \tag{26.10}$$

sowie zur mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung

$$\overline{n_R} = \operatorname{sgn}(\cos i)\left[\overline{n_k} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\right] - \dot{\Theta} \quad . \tag{26.11}$$

26.3 Die Meridian-bezogene Umlaufzeit

Der Bezug der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung zu einem Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$, in der ein Satellit das Intervall in geographischer Länge $\lambda - \lambda_0$ durchfliegt, wird durch das Integral

$$t = t_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\dot{\lambda}} \tag{26.12}$$

beschrieben. Die Lösung dieses Integrals kann durch eine iterative Lösung der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\Delta t\right) \equiv \lambda\left(t_0 + \Delta t\right) - \lambda\left(t\right) = 0 \tag{26.13}$$

bzw. die überlagerte Funktion

$$fct\left(\Delta t\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + \Delta t\right) - \lambda\left(t\right)\right] = 0 \tag{26.14}$$

erhalten werden. Als Anfangslösung für den Iterationsprozess kann aus dem säkularen Anteil in Gleichung (24.46)

$$\left(\Delta t\right)^{(0)} := \frac{\overline{n_R}}{\left|\lambda - \lambda_0\right|} \tag{26.15}$$

errechnet werden. Der Betragsstrich ist erforderlich, wenn im Fall rückläufiger Bahnen die Längendifferenz negativ wird, das Zeitintervall jedoch auch dann als positiv angenommen werden muss.

Ein Spezialfall des Zeitbezugs ist die Meridian-bezogene Umlaufzeit, die aus dem Integral

$$P_R = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + 360^\circ} \frac{d\lambda}{\left|\dot{\lambda}\right|} \tag{26.16}$$

berechnet werden kann. Auch hier kann unter Anwendung einer Ephemeridenrechnung mit einem gegebenen Bahnmodell die überlagerte Funktion

$$fct\left(P_R\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\right) - \lambda\left(t\right)\right] = 0 \tag{26.17}$$

verwendet werden. Als Anfangslösung kann die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit dienen. Da wegen des Bezugs auf die rotierende Erdoberfläche erwartet werden muss, dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit von der *Kepler*schen, aber auch den anderen bisher betrachteten Umlaufzeit beträchtlich abweicht, ist es geschickter, die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit als Anfangsnäherung zu verwenden. Diese wird mit der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung (26.11) aus

$$\overline{P_R} = \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\right|} = \frac{2\pi}{\left|\operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\left[\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\right] - \dot{\Theta}\right|} \tag{26.18}$$

erhalten. Damit kann $P_R^{(0)} := \overline{P_R}$ als Ausgangsnäherung der Iteration (26.17) gewählt werden.

Aus Formel (26.18) kann abgelesen werden: Je nach Bewegungssinn eines Satelliten unterscheidet sich die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit beträchtlich. Ein Satellit auf einer rechtläufigen Bahn läuft nach einem Umlauf der ebenfalls rechtläufigen Erddrehung hinterher, erreicht also den Ausgangsmeridian erheblich später als den Bezugspunkt einer anderen Bewegungsart. Umgekehrt läuft ein Satellit auf einer retrograden Bahn der Erddrehung nach einem Umlauf entgegen, seine Meridian-bezogene Bewegung ist somit kürzer als in Bezug auf eine der anderen Bewegungsarten. Wir können zusammenfassen:

- *Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit ist auf rechtläufigen Bahnen größer als die* Kepler*sche (anomalistische bzw. drakonitische, tropische, siderische)Umlaufzeit, kürzer auf retrograden Bahnen. Sie ist auf Grund der Herleitung mit der Reduktion auf den Äquator exakt nur für Äquatorbahnen definiert.*

BEISPIEL 1: Die folgende Tabelle 26-1 zeigt das Verhalten der säkularen Meridian-bezogenen Umlaufzeit, die somit nur mit den säkularen Bewegungseinflüssen durch $\left(J_2, J_4\right)$ mit Hilfe der überlagerten Funktion (26.17) gerechnet wird, für verschiedene Satellitenbahnen mit unterschiedlichen Bahnhöhen, Exzentrizitäten und Inklinationen.

Inkl.	$P_{R,\mathrm{sec}}$			
	a=7000 km	a=12000 km	a=42166.273 km	a=51600 km
	e=0.0			
	$\overline{P_K}$ =5828.5166 s	$\overline{P_K}$ =13082.2622 s	$\overline{P_K}$ =86170.5329 s	$\overline{P_K}$ =116650.2121 s
i=0°	$P_{R,\mathrm{sec}}$ =6233.2720 s	$P_{R,\mathrm{sec}}$ =15407.4109 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	$P_{R,\mathrm{sec}}$ =329739.1940 s
30°	6300.9877 s	15543.0488 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	333456.6677 s
60°	6581.0911 s	15908.4931 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	341255.9151 s
90°	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°	5208.5062 s	10778.1187 s	43083.6456 s	47466.8402 s
150°	5405.5128 s	11223.9941 s	43082.7904 s	49101.2701 s
180°	5445.4091 s	11348.7549 s	43082.0535 s	49556.8910 s
		e=0.2	e=0.6	e=0.5
i=0°		$P_{R,\mathrm{sec}}$ =14612.3745 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	$P_{R,\mathrm{sec}}$ =305711.6262 s
30°		14726.1582 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	304977.0711 s
60°		15060.7714 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	303286.8733 s
90°		(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°		11412.5047 s	43084.0063 s	49557.4649 s
150°		11753.6937 s	43081.3181 s	49555.3606 s
180°		11847.5680 s	43079.0895 s	46508.7527 s
		e=0.4	e=0.8	e=0.8
i=0°		$P_{R,\mathrm{sec}}$ =13993.4659 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	$P_{R,\mathrm{sec}}$ =329979.0423 s
30°		14073.7894 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	329850.9103 s
60°		14327.6775 s	$P_{R,\mathrm{sec}} \approx \infty$	329612.7849 s
90°		(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°		11983.1674 s	43087.3446 s	44091.0563 s
150°		12216.4042 s	43078.3944 s	44733.3762 s
180°		12279.1289 s	43070.9454 s	44949.6705 s

Tabelle 26-1: Beispiele für die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für einige Satellitenbahnen mit unterschiedlichen Bahnhöhen, Exzentrizitäten und Inklinationen

Aus dieser Tabelle lässt sich folgern: die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\mathrm{sec}}$ hängt im Wesentlichen von der großen Bahnhalbachse ab, der Einfluss von Exzentrizität und Inklination ist (erwartungsgemäß) gering. Das Verhalten bezüglich der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zeigt sich hier deutlich, insbesondere bei höheren Bahnen: wesentlich größer bei

rechtläufigen, wesentlich kleiner bei rückläufigen Bahnen. Ein Sonderfall sind die – eigentlich in Bezug auf die Meridian-bezogenen Umläufe nicht betrachteten – Polarbahnen: Nach genau einer Erdrotation bewegt sich der gewählte Meridian wieder „unter“ der Polarbahn hindurch. So dass dieser Moment die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit in diesem Fall definiert. Dies kann aus Formel (26.18) ersehen werden: da $\operatorname{sgn}\left(\cos 90°\right) = 0$, ergibt sich die Umlaufzeit aus

$$\overline{P_R}\left[i = 90°\right] = 2\pi / \dot{\Theta} = 86164.09054\,\mathrm{s} \quad .\blacktriangleleft \tag{26.19}$$

- *Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit eines Erdsatelliten auf einer Polbahn ist von der Bahnhöhe unabhängig und (in erster Näherung) stets einem mittleren Sterntag gleich.*

BEISPIEL 3: Die retrograde Erdsatellitenbahn mit den mittleren Bahnelementen $\overline{a}_0$=6883.502 km, $\overline{e}_0$= 0.00125034, $\overline{i}_0$=97°.447126 hat die Umlaufzeiten:

mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P_K}$	5683.621454 s
säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit	$P_{H.\mathrm{sec}}$	5691.131161 s
wahre *Hansen*sche Umlaufzeit	P_H	5691.131161 s
mittlere anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P_a}$	5687.383742 s
säkulare anomalistische Umlaufzeit:	$P_{a.\mathrm{sec}}$	5687.383742 s
wahre anomalistische Umlaufzeit	P_a	5686.502031 s
mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_d}$	5691.011371 s
säkulare drakonitische Umlaufzeit	$P_{d.\mathrm{sec}}$	5691.005813 s
wahre drakonitische Umlaufzeit	P_d	5691.005813
mittlere tropische Umlaufzeit	$\overline{P_t}$	5689.985060 s
säkulare tropische Umlaufzeit	$P_{t.\mathrm{sec}}$	5698.914558 s
wahre tropische Umlaufzeit	P_t	5698.903445 s
mittlere Meridian bezogene Umlaufzeit	$\overline{P_R}$	5337.513742 s
säkulare Meridian bezogene Umlaufzeit	$P_{R.\mathrm{sec}}$	4594.086429 s
wahre Meridian bezogene Umlaufzeit	P_R	4594.724949 s

Tabelle 26-2: Vergleich der Umlaufzeiten bei unterschiedlichen Beziehungen für die Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\overline{a}_0$=6883.502 km, $\overline{e}_0$= 0.00125034, $\overline{i}_0$=97°.447126 ◄

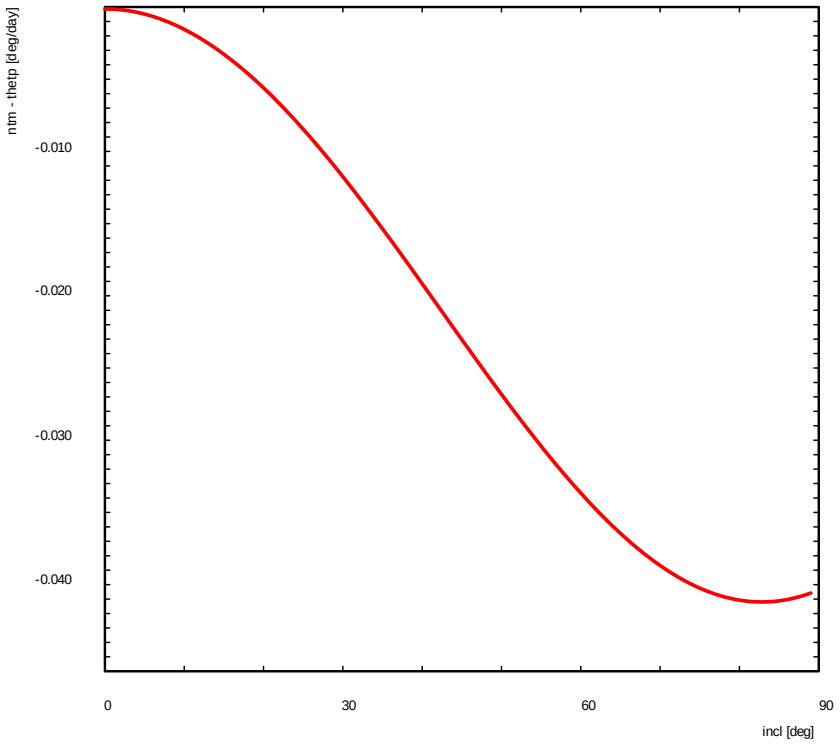


Bild 26-2: Der Unterschied $\left(\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right)$ zwischen einer rechtläufigen tropischen mittleren Satellitenbewegung und der tropischen Erdrotation für die geosynchrone Bahn $\overline{a}_0 = 42166.27133$ und $\overline{e}_0 = 0.0$ über alle Inklinationen $0° \le i < 90°$

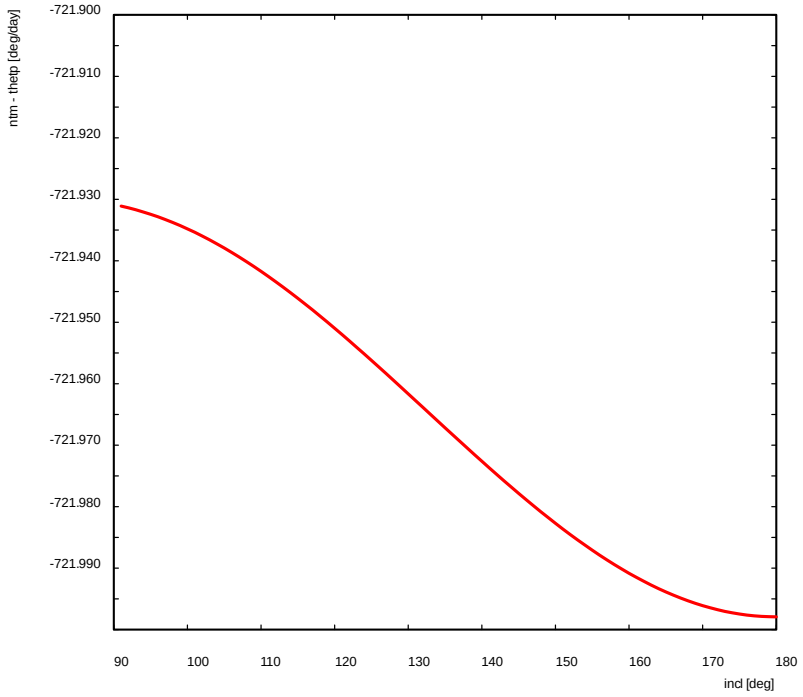


Bild 26-3: Der Unterschied $\left(\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right)$ zwischen einer rückläufigen tropischen mittleren Satellitenbewegung und der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ für die geosynchrone Bahn $\overline{a}_0 = 42166.27133$ und $\overline{e}_0 = 0.0$ über alle Inklinationen $90° < i \le 180°$

BEISPIEL 4: Das Verhalten der kreisförmigen geosynchronen Bahnen über der Inklination wird in Bild 26-2 für rechtläufige Bahnen, sowie in Bild 26-3 für rückläufige Bahnen dargestellt. Die Meridian-bezogene Umlaufzeit der rechtläufigen Bahnen wird als unendlich groß verstanden, da der Satellit sich in seiner mittleren Bahn nicht bezüglich des Referenzmeridians bewegt. Anders ist es auf der rückläufigen Bahn: hier bewegt sich der Satellit mit derselben Geschwindigkeit rückläufig wie der Meridian rechtläufig. Die Begegnung erfolgt daher exakt nach einem halben Umlauf, d.h. nahezu nach einem halben Tag. Die Meridian-bezogene Umlaufzeit beträgt in diesem Fall $\overline{P_R}\left[\overline{n_R} = -\dot{\Theta}\right] = 43080.456366\ \mathrm{s}$. Die Meridian-bezogene mittlere Bewegung des Satelliten auf seiner rückläufigen Bahn beträgt dann etwa 2 Umläufe pro Tag ($\overline{n_R} = -721°.1931110\ /\mathrm{d}$ auf Äquatorbahnen). ◄

26.4 Bahnauswahl aus Meridian-bezogener Satellitenbewegung

Auf Äquatorbahnen ist die drakonitische Bewegung nicht definiert. Stattdessen kann die Meridian-bezogene Bewegung zur Charakterisierung eines Satellitenumlaufs herangezogen werden. Sie charakterisiert, wann ein Satellit wieder einen ausgewählten Meridian schneidet. Im Fall von Äquatorbahnen besagt sie den Zeitpunkt, zu dem ein Satellit wieder über einem ausgewählten Punkt auf dem Äquator zu sehen ist. Dies ist der Grund, dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit in der englischsprachigen Literatur als „*Revisiting Period*“ bezeichnet wird. Allgemeiner kann die Aufgabe beantwortet werden, welche Bahnelemente eine Satellitenbahn haben muss, dass ein Satellit nach einem bestimmten Zeitintervall wieder denselben Meridian überfliegt.

Wie in den vorhergehenden Kapiteln behandelten Bewegungsbezügen kann durch Vorgabe von Bewegungsparametern, etwa der Umlaufzeit, ein *Kepler*parameter der Bahn bestimmt werden. Im vorliegenden Fall ist die Meridian-bezogene Umlaufzeit P_R als bestimmender Parameter vorgegeben. Entsprechend Formel (26.18) müssen die *Kepler*elemente Exzentrizität und Inklination bekannt sein, wenn mit Hilfe einer Umlaufzeit die große Bahnhalbachse berechnet werden soll. Mit Vorgabe der Inklination ist auch der Durchlaufsinn der Bahn, ob recht- oder rückläufig, bekannt. Der Lösungsvorgang kann nur iterativ erfolgen.

Aus der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung (26.11) wird die Bedingungsgleichung in der Form

$$\frac{2\pi}{P_R} + \dot{\Theta} \approx \overline{n_R} + \dot{\Theta} = \operatorname{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)\left[\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\right] \tag{26.20}$$

zugrunde gelegt. Eine Ausgangsnäherung für die gesuchte große Bahnhalbachse wird aus der Näherungsbedingung

$$\frac{2\pi}{P_R} + \dot{\Theta} =: \left(\overline{n_R}\right)^{(0)} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \tag{26.21}$$

erhalten. Als nullte Näherung wird sodann mit Hilfe der *Kepler*schen Umlaufzeit und unter Vernachlässigung der Variationen in den Bahnelementen nach Formel (26.18)

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left[\frac{2\pi}{P_R} + \dot{\Theta}\right]^2}} \tag{26.22}$$

gebildet. Eine verbesserte Näherung erster Ordnung folgt mit dem Ansatz

$$\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \quad . \tag{26.23}$$

Mit den säkularen Variationen (20.15), (20.16) und (20.17)[1] wird aus der Gleichung (26.20) für die erste Verbesserung der Ansatz

$$\sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^3}} \left\{1 - \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + 1 - 5\cos^2\bar{i}_0 + 2\cos\bar{i}_0\right]\right\} \tag{26.24}$$

erhalten. Linearisierung mit (26.23) ergibt die erste Verbesserung

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\left(5 + 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i} - \left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) - 2\cos\bar{i}_0\right] + O\left(\bar{a}_0^{(0)} J_2^2\right) . \tag{26.25}$$

Diese Korrektur stimmt mit der entsprechenden Korrektur bei einer Bahnauswahl im Rahmen der tropischen Bewegung (Formel (24.62)) überein, da die zugehörigen Bedingungsgleichungen für die erste Näherung identisch sind. Allerdings ist in beiden Fällen die nullte Näherung völlig unterschiedlich und auch die weitere iterative Verbesserung mit einer überlagerten Funktion verschieden. Im Fall der Meridian-bezogenen Bewegung ist die geographische Länge die Bezugsgröße. Somit lautet die Bedingungsfunktion

$$fct\left(P_R; \bar{a}_0\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R; \bar{a}_0^{(\nu)}\right) - \lambda\left(t_0; \bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{26.26}$$

Für die Meridian-bezogene Umlaufzeit kann hier mit dem je nach Genauigkeitsanforderung verwendetem Bahnmodell die mittlere, die säkulare oder die wahre Umlaufzeit erhalten werden.

BEISPIEL 1: Gegeben sei die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\mathrm{sec}} = 10000\,\mathrm{s}$ für eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.2$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 50°$. Mit den obigen Formeln folgen zur Berechnung der entsprechenden mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)} = 9323.985778\,\mathrm{km},\ \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.038421\mathrm{km},\ \bar{a}_0^{(1)} = 9324.024199\ \mathrm{km} \ .$$

Die Iteration mit der überlagerten Funktion (26.26) ergibt als endgültige Lösung

$$\bar{a}_0^{(2)} = 9395.010202\,\mathrm{km}\,.$$

[1] in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Dieser Wert entspricht der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 9664.1528069\,\mathrm{s}$. Diese kann als Anfangswert für eine Iteration mit (26.17) genommen werden. Mit der a-priori Genauigkeit $\Delta t = 10^{-5}\,\mathrm{sec}$ ergibt sich schließlich $P_{R,\mathrm{sec}}^{(2)} = 10000.000009\,\mathrm{s}$.

Wird dagegen der obige Wert bei Bezug auf die Epoche 2016-11-27/20:43:0.0 als wahre Meridian-bezogenen Umlaufzeit $P_R = 10000\,\mathrm{s}$ vorgegeben, ergibt sich die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(2)} = 9395.159356\,\mathrm{km}$, der Kontrollwert lautet $P_{R,\mathrm{sec}}^{(2)} = 100000.000023\,\mathrm{s}$. ◄

BEISPIEL 2: Gegeben sei wieder die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\mathrm{sec}} = 10000\,\mathrm{s}$ für eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.2$, jedoch für die retrograde Bahn mit der mittleren Inklination $\bar{i}_0 = 130°$. Mit den obigen Formeln folgen zur Berechnung der entsprechenden mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)} = 9323.985778\,\mathrm{km},\ \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 6.627418\ \mathrm{km},\ \bar{a}_0^{(1)} = 9330.613196\ \mathrm{km}\ .$$

Die Iteration mit der überlagerten Funktion (26.26) ergibt als endgültige Lösung

$$\bar{a}_0^{(2)} = 10790.170902\,\mathrm{km}.$$

Die Meridian-bezogene mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_R} = -0.63665227\times10^{-3}\,\mathrm{rad/s}$, entsprechend der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 2\pi / \left|\overline{n_R}\right| = 9869.100542\ \mathrm{s}$, der Kontrollwert für die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit mit Hilfe der überlagerten Funktion (26.17) beträgt $P_{R,\mathrm{sec}}^{(2)} = 10000.000008\ \mathrm{s}$. ◄

26.5 Scheinbare Satellitenbewegung mit Meridian-bezogener Bewegung

Mit Erddrehung und Satellitenbewegung überlagern sich zwei unabhängige Bewegungen. Von der rotierenden Erdoberfläche aus gesehen kann die Bewegung eines Satelliten anders erscheinen als in der Satellitenbahn selber. Die scheinbare Satellitenbewegung kann mit der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung klassifiziert werden, was in diesem Abschnitt erarbeitet wird. Eine ergänzende Untersuchung bei Bezug auf die Bewegung in geographischen Koordinaten wird im Hinblick auf kreisnahe Bahnen in Abschnitten 26.7 durchgeführt. Die Klassifikation mit Rückgriff auf die topozentrische Beschreibung der Satellitenbewegung wird in Kapitel 27 behandelt.

Mit Hilfe von Definition (26.11) kann keine einheitliche Aussage zur Beschreibung einer scheinbaren Bewegung gemacht werden. Vielmehr müssen unterschiedliche Fälle betrachtet werden:

1. <u>Rechtläufige Bahnen mit sgn(cos*i*) =1</u>:

Hier ist mit Beziehung (26.8)

$$\overline{n_R} = \overline{n_t} - \dot{\Theta} \qquad \langle \mathrm{sgn}(\cos i) = +1 \quad . \tag{26.27}$$

Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

1.1 Wenn $\overline{n_t} > \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} > 0$ sein und somit

$$0 < \overline{n_R} < \overline{n_t} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.28}$$

Die Bewegung des Satelliten ist in Bezug auf seine Bahn rechtläufig und auch scheinbar rechtläufig. Bedingung (26.27) führt mit den Definitionen der mittleren Meridian-bezogenen und mittleren tropischen Umlaufzeit auf die Beziehung zwischen diesen beiden Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} = \frac{\overline{P_t}}{1 - \overline{P_t}\dfrac{\dot{\Theta}}{2\pi}} = \frac{\overline{P_t}}{1 - \dfrac{\dot{\Theta}}{\overline{n_t}}} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.29}$$

Dies bestätigt die Aussage nach Formel (26.18):

$$\overline{P_R} > \overline{P_t} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.30}$$

Somit gilt: ein Satellit erreicht auf einer rechtläufigen Bahn einen Bezugspunkt auf dem Äquator (etwa den Frühlingspunkt) bei gegebener Rektaszension eher als den Bezugsmeridian. Nach (26.29) gilt auch die äquivalente Beziehung

$$\overline{P_t} < \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1,\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.31}$$

Von Interesse ist auch die Relation der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit in Bezug auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit. Aus Beziehung (26.10) folgt mit der Definition der Drift der Knotenlänge nach Formel (23.224) (in Abschnitt 23.5.1)

$$\overline{n_R} = \overline{n_d} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = \overline{n_d} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\ ,\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.32}$$

Da die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ für Erdsatelliten stets eine negative Größe ist, ist

$$\overline{n_R} < \overline{n_d} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.33}$$

Für die Relation der mittleren Umlaufzeiten gilt

$$\overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_R}} = \frac{\overline{P_d}}{1 + \dfrac{\dot{\lambda}_{\Omega s}}{\overline{n_d}}} = \frac{\overline{P_d}}{1 - \overline{P_d}\dfrac{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|}{2\pi}} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\ ,\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.34}$$

Im vorliegenden Fall ist daher die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit größer als die mittlere drakonitische Umlaufzeit

$$\overline{P_R} > \overline{P_d} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.35}$$

Ein Satellit durchfliegt den aufsteigenden Knoten seiner Bahn bei rechtläufiger Bewegung stets früher, bevor er den Bezugsmeridian erreicht. Die äquivalente Aussage lautet

$$\overline{P_d} < \frac{2\pi}{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\ ,\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.36}$$

1.2 Wenn $\overline{n_t} = \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} = 0$ sein. Somit ist

$$0 = \overline{n_R} < \dot{\Theta} = \overline{n_t} \quad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.37}$$

Da die mittlere tropische mittlere Bewegung gleich der tropischen Erdrotation ist, scheint der Satellit stationär und zwar „im Mittel geostationär“ zu sein. Dies schließt auch den Fall der geosynchronen Bewegung ein[1].

Der Satellit verharrt im Mittel auf dem gewählten Bezugsmeridian, seine mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit ist daher unendlich groß

$$\overline{P_R} \to \infty \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.38}$$

Das Verhalten der drakonitischen Bewegung im Fall einer scheinbar stationären Bewegung folgt unmittelbar aus Beziehung (26.32):

$$\overline{n_d} = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\ ,\ \overline{n_t} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.39}$$

Entsprechend hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit in diesem Fall den Betrag

$$\overline{P_d} = \frac{2\pi}{\overline{n_d}} = \frac{2\pi}{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\ ,\ \overline{n_t} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.40}$$

1.3 Wenn $\overline{n_t} < \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} < 0$ sein. Somit ist

$$\overline{n_R} < 0 < \overline{n_t} < \dot{\Theta} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.41}$$

Die wahre Satellitenbewegung ist rechtläufig, die auf einen Meridian bezogene mittlere Bewegung ist dagegen negativ, der Satellit bewegt sich scheinbar rückläufig.

Da $\overline{n_R}$ negativ ist, müssen für eine Abschätzung in (26.27) die Beträge angewendet werden:

$$\left|\overline{n_R}\right| = \left|\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right| \quad . \tag{26.42}$$

Da die mittlere tropische mittlere Bewegung stets eine positive Größe ist, gilt die Relation

$$\left|\overline{n_R}\right| < \overline{n_t} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \right. \tag{26.43}$$

und somit für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} > \overline{P_t} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.44}$$

In Bezug auf die drakonitische Bewegung folgt aus der Beziehung

$$\left|\overline{n_R}\right| = \left|\overline{n_d} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right| = \left|\overline{n_d} - \dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \tag{26.45}$$

die Relation

$$\left|\overline{n_R}\right| < \overline{n_d} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \right. \tag{26.46}$$

und somit für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} > \overline{P_d} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.47}$$

[1] Näheres in Abschnitt 26.6

BEISPIEL 1: Die Satellitenbahn mit den mittleren Bahnelementen $\bar{a} = 55000\,\text{km}$, $\bar{e} = 0.5$, $\bar{i} = 60°$ hat die mittlere tropische mittlere Bewegung $\overline{n_t} = 0.4894594349792 \times 10^{-4}$ rad/sec, die mittlere drakonitische mittlere Bewegung $\overline{n_d} = 0.4894689364572 \times 10^{-4}$ rad/sec und die Meridian-bezogene mittlere Bewegung $\overline{n_R} = -0.2397520796915 \times 10^{-4}$ rad/sec. Die Bahn ist rechtläufig, allerdings bewegt sich der Satellit scheinbar rückläufig. Die zugehörigen mittleren Umlaufzeiten sind

$$\overline{P_t} = 128369.888\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 35^h\,39^m\,29^s.888,\ \overline{P_d} = 128367.843\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 35^h\,39^m\,27^s.843,$$
$$\overline{P_R} = 2\pi / \left|\overline{n_R}\right| = 262070.107\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 72^h\,47^m\,50^s.107\,.$$

Die Meridian-bezogene säkulare und die (auf die Epoche 2017-01-31/12:00:0. bezogene) wahre Umlaufzeit betragen

$$P_{R,\text{sec}} = 251116.149196\ \text{s}\ ,\ P_R = 251116.462151\ \text{s} \quad . \ \blacktriangleleft$$

2. Rückläufige Bahnen mit $\text{sgn}(\cos i) = -1$:

Hier ist mit Beziehung (26.8)

$$\overline{n_R} = -\overline{n_t} - \dot{\Theta} \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \quad (26.48)\text{bzw.}$$

$$\left|\overline{n_R}\right| = \left|\overline{n_t} + \dot{\Theta}\right| \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \qquad (26.49)$$

Somit besteht die Relation zur mittleren tropischen mittleren Bewegung

$$\left|\overline{n_R}\right| > \overline{n_t} \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \qquad (26.50)$$

und daher für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} < \overline{P_t} \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \qquad (26.51)$$

Die Beziehung zur drakonitischen Bewegung kann aus

$$\left|\overline{n_R}\right| = \left|\overline{n_d} + \dot{\Omega}_s + \dot{\Theta}\right| \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \qquad (26.52)$$

hergeleitet werden: da für retrograde Bahnen $\dot{\Omega}_s > 0$, ist sicherlich

$$\left|\overline{n_R}\right| > \overline{n_d} \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \qquad (26.53)$$

und daher für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} < \overline{P_d} \qquad \langle \text{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \qquad (26.54)$$

Die vorstehenden Überlegungen werden in Tabelle 26-3 systematisch zusammenfasst.

BEISPIEL 2: Siehe hierzu die unterschiedlichen Umlaufzeiten einer rückläufigen Satellitenbahn im numerischen BEISPIEL 2 des vorhergehenden Abschnitts 26.3. ◄

BEISPIEL 3: Um ein Gefühl dafür zu bekommen, welche untere Schranke der Meridian-bezogenen Umlaufzeit zu erwarten ist, wird in Tabelle 26-4 für rückläufige Kreisbahnen mit

der großen Bahnhalbachse $\bar{a} = R_E + 200\,\text{km} = 6578.140\,\text{km}$ die Umlaufzeit für verschiedene Inklinationen berechnet. Die zum Vergleich berechnete mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit ist von der Inklination unabhängig. Der Vergleich zur entsprechenden mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zeigt (entsprechendes gilt für mittlere anomalistische, drakonitische und tropische Umlaufzeit), dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit wesentlich kürzer sein kann, auf rückläufigen Bahnen kann ein Satellit daher viel eher „gesehen“ werden, als die entsprechende Umlaufzeit angibt. ◄

Wahre Bewegung	rechtläufig			rückläufig
Inklination	$0° \le i < 90°$			$90° < i \le 180°$
Mittlere Meridian-bezogene Bewegung	$\overline{n_R} > 0$	$\overline{n_R} = 0$	$\overline{n_R} < 0$	
	Scheinbar rechtläufig	Scheinbar stationär	Scheinbar rückläufig	
Relation $\overline{n_R}$ zu $\overline{n_t}$	$\overline{n_t} > \dot{\Theta}$	$\overline{n_t} = \dot{\Theta}$	$\overline{n_t} < \dot{\Theta}$	$\left\|\overline{n_R}\right\| \le \overline{n_t} + \dot{\Theta}$
	$0 < \overline{n_R} < \overline{n_t}$	$\overline{n_R} = 0$	$\left\|\overline{n_R}\right\| < \overline{n_t}$	$\left\|\overline{n_R}\right\| > \overline{n_t}$
Relation $\overline{P_R}$ zu $\overline{P_t}$	$\overline{P_R} > \overline{P_t}$	$\overline{P_R} \to \infty$	$\overline{P_R} > \overline{P_t}$	$\overline{P_R} < \overline{P_t}$
	$\overline{P_t} < \frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\overline{P_t} = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\overline{P_t} > \frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	--------
Relation $\overline{n_R}$ zu $\overline{n_d}$	$\overline{n_R} < \overline{n_d}$	$\overline{n_R} = 0$	$\left\|\overline{n_R}\right\| < \overline{n_d}$	$\left\|\overline{n_R}\right\| > \overline{n_d}$
	$\overline{n_d} > \left\|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right\|$	$\overline{n_d} = -\dot{\lambda}_{\Omega s}$	$\overline{n_d} < \left\|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right\|$	--------
Relation $\overline{P_R}$ zu $\overline{P_d}$	$\overline{P_R} > \overline{P_d}$	$\overline{P_R} \to \infty$	$\overline{P_R} > \overline{P_d}$	$\overline{P_R} < \overline{P_d}$
	$\overline{P_d} < \frac{2\pi}{\left\|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right\|}$	$\overline{P_d} = \frac{2\pi}{\left\|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right\|}$	$\overline{P_d} > \frac{2\pi}{\left\|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right\|}$	--------

Tabelle 26-3: Übersicht über das Verhalten der scheinbaren mittleren Satellitenbewegung

$\overline{P_K}$	5309.6470 s
Inklination	$P_{R,\sec}$
91°	4036.990943 s
110°	4641.429831s
135°	4898.459376 s
170°	4983.805444 s
180°	4987.022077s

Tabelle 26-4: Die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für rückläufige Kreisbahnen in 200 km Bahnhöhe

26.6 Geosynchrone Bahnen

Besonderes Interesse verdienen scheinbar stationäre mittlere Bahnen, die im Rahmen der Meridian-bezogenen Bewegung auf den Äquator bezogen werden können.

Wenn eine mittlere Bahn scheinbar stationär ist, kann ihre mittlere große Bahnhalbachse nach Formel (26.22) wegen $\overline{n_R} = 2\pi / \overline{P_R} = 0$ unter der Annahme einer ungestörten *Kepler*bewegung berechnet werden zu[1]

$$\bar{a}_R^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 42164.1712397\,\mathrm{km} \quad . \tag{26.55}$$

Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit $\overline{P_R}$ wächst in diesem Fall über alle Grenzen.

Die Verbesserung erster Ordnung nach Formel (26.25) hängt von den verwendeten *Kepler*elementen Exzentrizität und Inklination ab. Entsprechend den Berechnungen (26.23) - (26.26) ist für jedes Elementepaar (*e, i*) eine eigene große Bahnhalbachse auch in diesem Zusammenhang zu erwarten.

Bahnen, auf denen sich ein fiktiver mittlerer Satellit mit der Erdrotation mitbewegt, werden als geosynchrone Bahnen bezeichnet. Es gilt die Aussage:

- *Die mittlere große Bahnhalbachse geosynchroner Bahnen hat näherungsweise den Wert* $\bar{a}_{gs} = 42164.1712397$ km .

26.6.1 Einige Beispiele geosynchroner Satellitenbahnen

Ein Satellit auf einer geosynchronen Bahn ist nicht notwendig scheinbar stationär, auch wenn der zugehörige fiktive mittlere Satellit auf einer solchen Bahn stationär ist. Dies zeigen anschaulich folgende Beispiele:

BEISPIEL 1: In Bild 26-5 sind kreisförmige geosynchrone Bahnen mit Inklinationen i = 10° bis i = 80° dargestellt. Die Korrektur nach Formel (26.25) ist hier nahezu vernachlässigbar. Im Fall i=80° lautet sie $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.00007039110204\,\mathrm{km}$ und die modifizierte Halbachse beträgt

[1] Zahlenwert für $\dot{\Theta}$ in Anhang E.2, Tabelle 7, Band V

$\bar{a}_0^{(1)} = 42164.17175\,\mathrm{km}$. Bild 26-4 zeigt in realistischen Größenverhältnissen die kreisförmige geosynchrone Satellitenbahn mit der Inklination *i*=80°, sowie in Bild 26-5 im Vergleich mit unterschiedlichen Inklinationen.

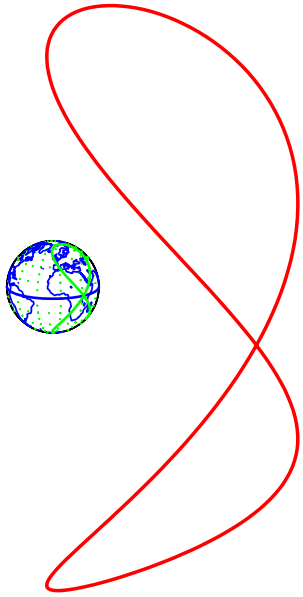


Bild 26-4: Kreisförmige geosynchrone Bahn mit der Inklinationen i=80° (Aufsichtpunkt der Parallelprojektion: λ=350°, φ=15°

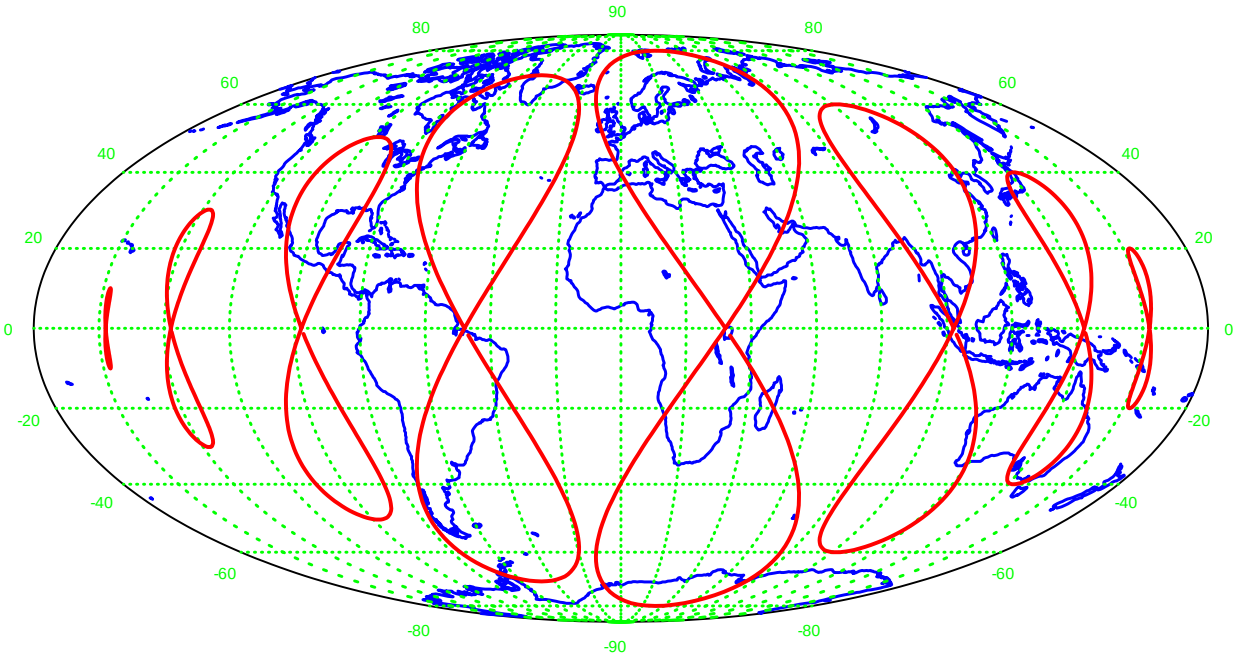


Bild 26-5: Kreisförmige geosynchrone Bahnen mit den Inklinationen (von links): i=10°, 30°, 50°, 70°, 80°, 60°, 40°, 20°

BEISPIEL 2: Eine besondere Herausforderung sind elliptische geosynchrone Bahnen, für die in den folgenden Bildern Bild 26-6, Bild 26-7 und Bild 26-8 einige Beispiele gegeben werden. Das scheinbare Bewegungsverhalten bezüglich der Erdoberfläche hängt nicht nur von der Exzentrizität der Bahn ab, sondern wesentlich auch vom Argument des Perigäums. In den

räumlichen Darstellungen ist außerdem die Blickrichtung entscheidend zur Beurteilung einer Satellitenbahn.

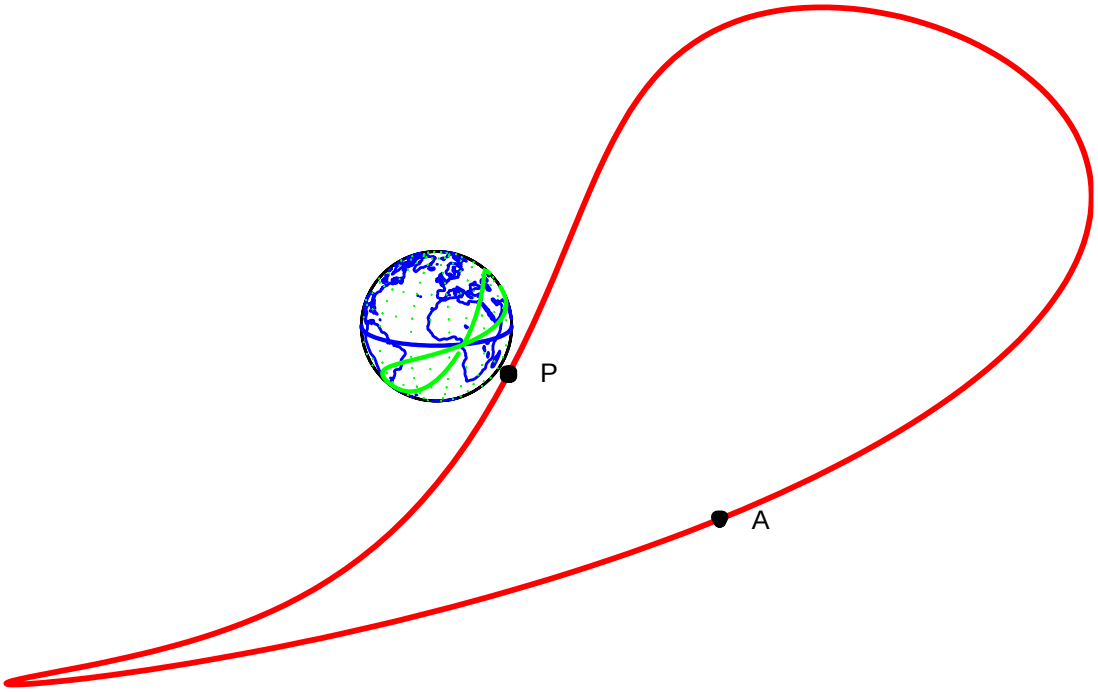


Bild 26-6: Geosynchrone Bahn mit Inklinationen i= 50° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 230°$. Räumliche Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung $\lambda = 350°, \varphi = 15°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A.

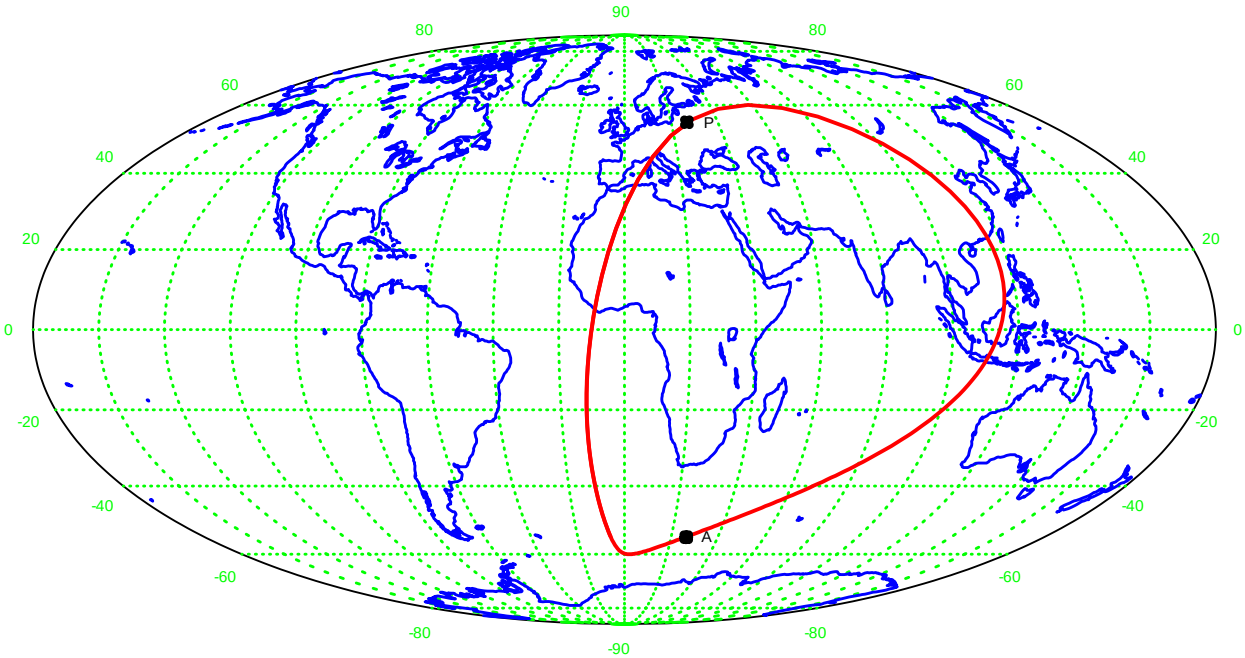


Bild 26-7: Geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A.

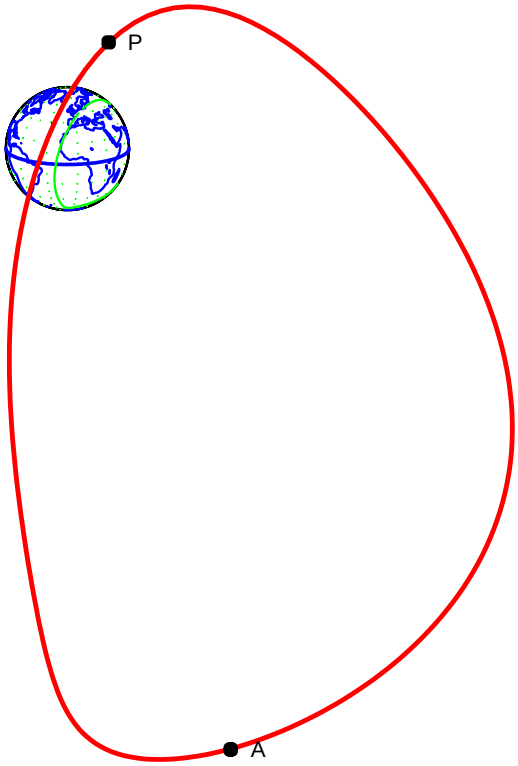


Bild 26-8: Wahre geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A. Dieselbe Bahn wie in Bild 26-7, jedoch in räumlicher Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung: $\lambda = 350°, \varphi = 15°$.

26.6.2 Einige Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen

Aus der Beziehung (26.40) für scheinbar stationäre und damit auch den Fall geosynchroner Bewegungen wird im Fall rechtläufiger Bahnen für die mittlere drakonitische Umlaufzeit die Beziehung

$$\overline{P_d}\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| = 360° \tag{26.56}$$

erhalten. Da mit Beziehung (23.227) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \overline{P_d}\,\dot{\lambda}_{\Omega s}$, ist im Fall geosynchroner Bewegungen

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 360° \quad . \tag{26.57}$$

Die Knotenlängenverschiebung einer geosynchronen Bahn ist im Mittel genau ein Vollkreis. Im Fall retrograder Bewegung ist nach (26.52) und wegen (20.15) $\overline{n_d} = \left|-\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right| = \left|\left|\dot{\Omega}_s\right| - \dot{\Theta}\right| = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|$, somit auch $\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| = 360°$. Demnach kann eine mittlere geosynchrone Bahn als spurreproduzierbar nach einem drakonitischen Umlauf bezeichnet werden[1].

Die tropische Umlaufzeit einer mittleren geosynchronen Bewegung beträgt nach Beziehung (26.8)

[1] Sogenannte „integer orbit“, siehe in den Abschnitten 23.8 und 23.9

$$\overline{P_t} = \frac{2\pi}{\overline{n_t}} = \frac{2\pi}{\left|\dot{\Theta}\right|} = 86164.0906\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 23^h\ 56^m\ 04^s.0906 \quad . \tag{26.58}$$

Dies ist die Dauer eines mittleren Sterntages[1].

Damit können im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik einige notwendige und hinreichende Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen zusammengestellt werden:

Eine Satellitenbahn ist genau dann eine mittlere geosynchrone Bahn, wenn

- *ihre mittlere tropische Umlaufzeit genau ein mittlerer Sterntag ist,*
- *ihre Meridian-bezogene mittlere Bewegung identisch verschwindet,*
- *ihre drakonitische mittlere Bewegung gleich der mittleren Knotenlängendrift ist,*
- *ihre mittlere Knotenlängenverschiebung genau ein Vollkreis ist,*
- *sie ein „integer orbit" mit genau einem drakonitischen Umlauf pro Knotenumlauf ist,*
- *sie Spur-reproduzierbar mit dem Repetitionszyklus 1 ist,*
- *sie Spur-reproduzierbar mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit als Repetitionsdauer ist.*

26.7 Scheinbares Verhalten von Kreisbahnen

Den folgenden Untersuchungen wird die äquatoriale Satellitenbewegung entsprechend der in Kapitel 24 behandelten tropischen Bewegung zugrunde gelegt. Dies führt zu einer Verallgemeinerung der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung, die auf eine auf den Äquator ausgerichtete Bewegung konzentriert ist.

26.7.1 Scheinbares Bewegungsverhalten und scheinbar stationäre Bahnpunkte

Das scheinbare Bewegungsverhalten eines Satelliten über der Erdoberfläche werde durch die geographischen Koordinaten geographische Länge λ und Deklination δ und ihre Variationen (26.4)

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} \tag{26.59}$$

und $\dot{\delta}$ beschrieben. Diese vier Parameter können als Ergebnisse einer Ephemeridenrechnung als bekannt angenommen werden.

Die Variation $\dot{\delta}$ der Deklination des Satellitenortes beschreibt die scheinbare Bewegung des Satelliten in Nord-Süd-Richtung. Die Variation $\dot{\lambda}$ in geographischer Länge beschreibt die scheinbare Bewegung in Ost-West-Richtung, die gemäß Tabelle 26-5 klassifiziert werden kann.

[1] Siehe dazu Abschnitt 9.1.2.1, Formel (9.24), Band II

Bedingung		Scheinbare Satellitenbewegung in Ost-West-Richtung		
$\dot{\lambda} > 0$	$\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$	von West nach Ost	rechtläufig	schneller als Erddrehung
$\dot{\lambda} = 0$	$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	Stillstand		schnell wie Erddrehung
$\dot{\lambda} < 0$	$\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$	von Ost nach West	rückläufig	langsamer als Erddrehung

Tabelle 26-5: Klassifizierung der scheinbaren Bewegung von Erdsatelliten in Ost-West-Richtung

Dieses Schema stellt eine Verallgemeinerung der Klassifizierung einer scheinbaren Satellitenbewegung auf Basis einer Meridian-bezogenen Bewegung in Abschnitt 26.4 dar. Wird zusätzlich die Nord-Süd-Bewegung eines Satelliten berücksichtigt, kann das scheinbar stationäre Verhalten einer Satellitenbewegung verfeinert klassifiziert werden. Ein Satellit ist dann und nur dann echt stationär, wenn auch die Nord-Süd-Drift mit $\dot{\delta} = 0$ verschwindet. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Satellitenbewegung geostationär sein muss. Solche Bahnpunkte können auch außerhalb des Äquators auftreten. Sie stellen Spitzen der scheinbaren Bahn dar. Falls jedoch eine Satellitenbewegung im Fall $\dot{\lambda} = 0$ eine nicht verschwindende Nord-Süd-Drift aufweist mit $\dot{\delta} \neq 0$, befindet sich der Satellit in einem Umkehrpunkt seiner Bahn: die Bewegung geht aus einer Ost-West in eine West-Ost-Drift über oder umgekehrt. Es gibt auch ausgeartete Fälle, derart dass die Längendrift für einige Zeit verschwindet, der Satellit also scheinbar stillsteht, bevor er sich wieder in derselben Richtung weiter bewegt wie vorher. In diesem Zusammenhang kann auch der Fall betrachtet werden, dass der Satellit keine verschwindende Längendrift aufweist, während jedoch die Breitendrift verschwindet $\dot{\delta} = 0$. In diesem Fall befindet sich die scheinbare Satellitenbahn in ihrem nördlichen oder südlichen Wendepunkt, wie es für jede geneigte Bahn zu erwarten ist. Diese Überlegungen werden in Tabelle 26-6 zusammengefasst.

Drift in Rektaszension	Drift in Deklination	Deklination	Scheinbarer Bahnpunkt
$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	$\dot{\delta} \neq 0$	$\delta \neq 0$	Scheinbarer östlicher oder westlicher Wendepunkt
		$\delta = 0$	Stillstandpunkt
	$\dot{\delta} = 0$	$\delta = 0$	Geostationärer Punkt
		$\delta \neq 0$	Spitzenpunkt
$\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$			Scheinbarer nördlicher oder südlicher Wendepunkt, kein scheinbar stationärer Punkt
$\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$			Keine scheinbar stationären Punkte

Tabelle 26-6: Besondere Punkte im Bewegungsverhalten eines Satelliten bei Bezug auf die Erdoberfläche

Die vorstehenden Überlegungen werden im Folgenden mit Hilfe der zugehörenden Variationsgleichungen formelmäßig vertieft. *r* ist der geozentrische Radius des Satellitenortes mit dem Argument der Breite *u* und unter der Bahnneigung *i*. Gemäß den Formeln (24.18)) haben

die Bahnparameter zu den Koordinaten im Frühlingspunkt bezogenen Koordinatensystem die Beziehungen (siehe auch Bild 24-3)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \cos u \\ \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \sin u\cos i \\ \sin\delta &= \sin u\sin i \quad . \end{aligned} \tag{26.60}$$

Der Flächenparameter *G* ist im Fall einer elliptischen *Kepler*bewegung mit den Bahnparametern *a* und *e* durch den Flächensatz in der Form $G=\sqrt{\mu\, p}=\sqrt{\mu\left(1-e^2\right)}$ verknüpft. Für die Variation des zugehörigen (ersten) *Hansen*schen Bahnwinkels gilt der allgemeine Flächensatz $r^2\dot{\zeta}=G$. Somit lauten die Variationen der äquatorialen Winkelkoordinaten (nach (24.21)) ohne Einschränkung auf den Äquator (was in den Abschnitten 26.5 und 26.6 grundlegend ist) außer in den Polen

$$\dot{\alpha}=\dot{\zeta}\frac{\cos i}{\cos^2\delta}=\frac{G}{r^2}\frac{\cos i}{\cos^2\delta}=\frac{\sqrt{\mu\, p}}{r^2}\frac{\cos i}{1-\sin^2 u\sin^2 i} \tag{26.61}$$

$$\dot{\delta}=\dot{\zeta}\frac{\cos u\sin i}{\cos\delta}=\frac{G}{r^2}\frac{\cos u\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 u\sin^2 i}} \quad . \tag{26.62}$$

Besondere Punkte bei scheinbarer Nord-Süd-Bewegung

Ein Satellit befindet sich im nördlichen bzw. im südlichen Wendepunkt seiner Bahn, wenn seine Deklination maximalen Betrag annimmt, wenn sie also verschwindet: $\dot{\delta}=0$. Für nichtäquatoriale Bahnen ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\dot{\delta}=0 \;\Rightarrow\; \alpha-\Omega=u=90°,\ \text{bzw.}\ =270° \qquad \langle i\neq 0,\ i\neq 180° \quad . \tag{26.63}$$

Nach der dritten der Gleichungen (26.60) hat die Bahn im nördlichen Wendepunkt die Deklination $\delta=i$, im südlichen Wendepunkt $\delta=-i$. Für äquatoriale Bahnen ist dagegen notwendig und hinreichend

$$\dot{\delta}\equiv 0 \quad\Leftrightarrow\quad i=0° \quad \text{bzw.} \quad \text{i=180°} \quad . \tag{26.64}$$

Diese Überlegungen führen auf die folgende allgemeingültige Aussage:

- *Scheinbar stationäre Bahnpunkte einer Erdsatellitenbahn können außer auf Äquatorbahnen nur im nördlichen oder südlichen Wendepunkt der Bahn vorkommen.*

Besondere Punkte bei scheinbarer Ost-West-Bewegung

Zunächst folgt aus Formel (24.23)

$$\operatorname{sgn}(\dot{\alpha})=\operatorname{sgn}(\cos i) \quad . \tag{26.65}$$

Da für retrograde Bahnen stets $\dot{\alpha}<0$, ist nach (26.59) auch $\dot{\lambda}=\dot{\alpha}-\dot{\Theta}<0$. Dies führt auf die Aussage:

- *Retrograde Bahnen von Erdsatelliten sind stets scheinbar rückläufig*.

Entsprechend gilt die Aussage auch für Polbahnen: da nach (26.61) für i=90° stets $\dot{\alpha}=0$, ist mit (26.59) in diesem Fall $\dot{\lambda}<0$ und es gilt

- *Polbahnen von Erdsatelliten sind stets scheinbar rückläufig*.

(26.61) zeigt somit auch:

- *scheinbar stationäre Punkte können nur auf rechtläufigen Bahnen vorkommen.*

Dies bedeutet: Notwendig für die Existenz von stationären Punkten ist zusammen mit $\dot{\delta} = 0$ und mit[1] $\dot{\zeta} = \dot{u} + \dot{\Omega}\cos i$ die Bedingung

$$\dot{\Theta} = \dot{\alpha} = \left(\dot{u} + \dot{\Omega}\cos i\right)\frac{\cos i}{1 - \sin^2 i \sin^2 u} \Rightarrow \text{scheinbar stationäre Bahnpunkte möglich .} \quad (26.66)$$

26.7.2 Besondere scheinbare Bahnpunkte auf Kreisbahnen

Die Untersuchungen werden im Hinblick auf die charakterisierenden mittleren Bewegungen durchgeführt. Alle periodischen Variationen in den Bahnparametern werden zu diesem Zweck vernachlässigt. Aus der Zerlegung[2] (23.42) für das Argument der Breite

$$u = u(t) = \overline{M_{0\,0}} + \bar{\omega}_0 + \left(\overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \cdots\right)(t - t_0) + \delta u = \overline{M_{0\,0}} + \bar{\omega}_0 + \overline{n_d}\,(t - t_0) + \delta u \quad (26.67)$$

folgt für die Variation des Argumentes der Breite zunächst der Ausdruck

$$\dot{u} = \overline{n_d} + \frac{d(\delta u)}{dt} \quad . \quad (26.68)$$

Bei Vernachlässigung aller periodischen Störeffekte auf eine *Kepler*bahn wird dann aus der Bedingungsgleichung (26.66)

$$\dot{\Theta} = \left(\overline{n_d} + \dot{\Omega}_s \cos \bar{i}_0\right)\frac{\cos \bar{i}_0}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 u} + \delta(\dot{\alpha}) \quad . \quad (26.69)$$

Diese Zerlegung in einen säkularen und einen periodischen Anteil muss stets beachtet werden, wenn bei Vorgabe der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ diesem Wert ein Bahnparameter unter Vernachlässigung der periodischen Variationen $\delta(\dot{\alpha})$ zugeordnet werden soll: es handelt sich immer um einen mittleren Epocheparameter, um den die wahren Bahnparameter periodische (oder auch quasiperiodische) Variationen ausführen.

26.7.2.1 Äquatoriale Kreisbahnen mit stationären Punkten

Rechtläufige äquatoriale Kreisbahnen[3] haben nach Formel (26.61) mit der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels unter Verwendung der säkularen Störungen einer *Kepler*bewegung[4] die Variation in Rektaszension

---

[1] etwa nach Formel (4.257), Abschnitt 4.3.16, Band II

[2] aus Abschnitt 23.2.1

[3] Da rückläufige und Polbahnen (mit Inklinationen $\bar{i}_0 \geq 90°$) stets scheinbar rückläufig sind und nach Tabelle 26-6 auf Seite 330 keine scheinbar stationären Punkte haben können, werden sie hier nicht berücksichtigt

[4] In Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\dot{\alpha} = \dot{\zeta} = \overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{\Omega}_{s0} + \cdots = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\left[1 + 3\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2}\right] + \cdots \quad \left\langle \overline{e}_0 = 0, \overline{i}_0 = 0° \right. \quad . \tag{26.70}$$

Um stationäre Punkte zu finden, wird mit Formel (26.69) die aus Tabelle 26-3 (Abschnitt 26.4.2) bekannte Beziehung erhalten

$$\dot{\alpha} \triangleq \dot{\Theta} = \overline{n_d} + \dot{\Omega}_s + \frac{d\left(\delta\alpha\right)}{dt} = \overline{n_t} + \frac{d\left(\delta\alpha\right)}{dt} \quad , \tag{26.71}$$

die notwendig für eine geosynchrone Bewegung ist. Für eine mittlere geosynchrone Bewegung bleibt die Bedingung

$$\dot{\alpha} \triangleq \dot{\Theta} = \overline{n_{t\,0}} = \overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{\Omega}_{s0} + \cdots \quad , \tag{26.72}$$

die in erster Näherung im Fall einer äquatorialen Kreisbahn lautet

$$\dot{\alpha} \triangleq \dot{\Theta} = \dot{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\left[1 + 3\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2}\right] + \cdots \quad \left\langle \overline{e}_0 = 0, \overline{i}_0 = 0° \right. \quad . \tag{26.73}$$

Um die entsprechende Bahnhalbachse zu berechnen wird wie in den Formeln (26.22) - (26.25) wie in (26.55) eine nullte Näherung (entsprechend einer ungestörten *Kepler*bewegung) aus

$$\overline{a}_G^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 42164.172366\,\text{km} \tag{26.74}$$

erhalten. Eine erste Verbesserung folgt mit $\overline{e}_0 = 0.0$, $\overline{i}_0 = 0°.0$ mit der Korrektur (26.25) aus

$$\Delta\overline{a}_G^{(1)} = 2\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{a}_G^{(0)}} = 2.089067\,\text{km} \quad . \tag{26.75}$$

Dies führt auf die verbesserte Lösung

$$\overline{a}_G^{(1)} = \overline{a}_G^{(0)} + \Delta\overline{a}_G^{(1)} = 42166.261432\,\text{km} \quad . \tag{26.76}$$

Eine Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (26.26) ist in diesem Fall nicht möglich, da die entsprechende mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit über alle Schranken wächst. Stattdessen bietet sich eine iterative Verbesserung mit der notwendigen Bedingung $\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$ an. Die Bedingungsfunktion lautet dann

$$fct\left(\overline{a}_G^{(\nu)}\right) \equiv \dot{\Theta} - \dot{\alpha}\left(\overline{a}_G^{(\nu)}\right) = 0 \quad \left\langle \nu = 2,3,\cdots \right. \quad . \tag{26.77}$$

Zur Berechnung von $\dot{\alpha}$ können hier alle bekannten höheren Störungen einer *Kepler*bahn berücksichtigt werden. Die mittlere große Bahnhalbachse der geostationären Bahn hat dann mit der a-priori Genauigkeit $\Delta a = 10^{-7}$ km den Betrag

$$\overline{a}_G := \overline{a}_G^{(\nu)} = 42166.261432\ \text{km} \quad . \tag{26.78}$$

Die so gefundene Bahn erfüllt die Bedingungen:

$$\lambda \text{ beliebig}, \ \dot{\lambda} = 0°/\text{s}, \ \ \delta \equiv 0°.0, \ \ \dot{\delta} = 0°/\text{s} \quad \Leftrightarrow \quad \text{geostationäre Bahn} \quad . \tag{26.79}$$

Der Satellit scheint über einem Punkt über dem Äquator mit den geographischen Koordinaten $\left(\lambda \text{ beliebig}, \ \delta = \varphi = 0°\right)$ festzustehen.

Vergleich mit der großen Halbachse einer geostationären Bahn $a_G = \bar{a}_0^{(1)}$ in Formel (26.76) und von Formel (26.73) führt auf die Klassifikation in Tabelle 26-7.

Um der Frage nachzugehen, ob geostationäre Punkte auch auf elliptischen Äquatorbahnen mit der Exzentrizität $\bar{e}_0 \neq 0.0$ vorkommen können, werden die hierzu notwendigen Bedingungen $\dot{\alpha} \equiv \dot{\Theta}$ und $i \triangleq \bar{i}_0 = 0°.0$ in die Variation der Rektaszension in (26.61) eingesetzt:

$$\dot{\Theta} \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_G^3 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}} \left(1+\bar{e}_0 \cos\upsilon\right)^2 \quad \left\langle \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\ \dot{\delta} = 0°.0/\mathrm{s},\ \delta \equiv 0°.0 \right. \quad .$$

Hier ist die wahre Anomalie υ die einzige Variable, während alle anderen Parameter konstant sind. Diese Identität lässt sich also nur erfüllen, wenn die Exzentrizität identisch verschwindet.

$\bar{a}_0 < a_G$	$\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$	Scheinbar rechtläufig
$\bar{a}_0 = a_G$	$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	geostationär
$\bar{a}_0 > a_G$	$\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$	Scheinbar rückläufig

Tabelle 26-7: Scheinbares Bewegungsverhalten auf rechtläufigen äquatorialen Kreisbahnen. a_G ist die große Bahnhalbachse einer geostationären Bahn

Zusammenfassung einiger Eigenschaften geostationärer Satellitenbahnen:

- *Eine Erdsatellitenbahn ist genau dann geostationär, wenn sie eine äquatoriale Kreisbahn und in jedem Bahnpunkt stationär ist.*
- *Wenn eine Satellitenbahn geostationär ist,*
  - *ist ihre mittlere tropische Umlaufzeit ein mittlerer Sterntag:* $\bar{P}_t = 86164.09054\mathrm{s}$,
  - *beträgt ihre mittlere drakonitische Umlaufzeit* $\bar{P}_d = 86160.49456\mathrm{s}$,
  - *verschwindet ihre Meridian-bezogene mittlere Bewegung identisch* $\bar{n}_R \equiv 0.01/\mathrm{s}$,
  - *wächst ihre mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit über alle Schranken,*
  - *ist ihre drakonitische mittlere Bewegung gleich der mittleren Knotenlängendrift* $\bar{n}_d = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|$,
  - *ist ihre mittlere Knotenlängenverschiebung genau ein Vollkreis:* $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 360°$,
  - *ist sie ein „integer orbit" mit genau einem mittleren drakonitischen Umlauf pro Knotenumlauf,*
  - *ist sie reproduzierbar mit dem Reproduktionszyklus K= 1,*
  - *ist sie reproduzierbar mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit als Reproduktionsdauer:* $T_K = \bar{P}_d$,
  - *beträgt die Tagesumlaufzahl* $N_0 = 24^h / \bar{P}_d = 1.002779759$.

Anmerkungen: Der Zusammenhang der geostationären Bahn mit der Bewegung der Sonne wird im Zusammenhang der Sonnen-bezogenen synodischen Bewegung in Kapitel 28 unter-

sucht. Weitere Eigenschaften der geostationären Bahn werden in diesem Kapitel nicht untersucht[1]. ◄

26.7.2.2 Besonderheiten einer Satellitenbewegung auf kreisförmigen Äquatorbahnen

Bei der Auswertung der Bewegung geostationärer Satelliten fiel der befremdliche Effekt auf, dass die oskulierende große Bahnhalbachse während eines Meridian-bezogenen Umlaufs stets um einige Kilometer größer als der (mehr oder weniger) konstante Bahnradius ist. Nähere Untersuchungen[2] zeigten, dass dieser Effekt, der erstmals von *R. H. Lyddane*[3] entdeckt worden war, eine Folge der Erdabplattung ist, die sich auf äquatoriale Bahnen infolge der Symmetrie des Erdkörpers in erster Näherung auswirkt. Dieser Effekt und seine Genauigkeits-Einschränkungen werden in diesem Abschnitt untersucht.

Um zunächst der allgemeinen Frage nachzugehen, ob es prinzipiell kreisförmige Erdsatellitenbahnen geben kann, werde der Radius einer Satellitenbahn unter dem Einfluss des Erdgravitationsfeldes untersucht. Die Störungen einer *Kepler*bewegung werden unter Vernachlässigung der Bewegungseinflüsse durch den Luftwiderstand und anderer für erdnahe Bahnen wenig wirksamer Einflüsse etwa durch Sonne und Mond durchgeführt. In der *Brouwer*schen Satellitentheorie hat der Bahnradius unter Einschluss der sphärischen Harmonischen bis zu J_5 die Darstellung[4] (20.187)

$$\begin{aligned}\delta r_G \;=\; & -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\overline{p}}\frac{\overline{e}\sin^2\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\overline{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\overline{i}\right)\right]\cos\left(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon}\right)+\\ & +\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}R_E\sin\overline{i}\,\sin\overline{u}+\\ & +\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{p}}\left\{\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[1+\frac{2\overline{r}}{\overline{a}\sqrt{1-\overline{e}^2}}+\frac{\overline{e}\cos\overline{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\overline{e}^2}}\right]+\sin^2\overline{i}\,\cos 2\overline{u}\right\}+\\ & +\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^2}\sin\overline{i}\left\{\left(1-9\cos^2\overline{i}-\frac{24\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right)\left[\left(4+3\overline{e}^2\right)\sin\overline{u}+6\overline{e}^2\sin\overline{\upsilon}\cos\overline{\omega}\right]-\right.\\ & \left.-\frac{7}{6}\left[1-5\cos^2\overline{i}-\frac{16\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]\overline{e}^2\sin\left(\overline{\upsilon}+3\overline{\omega}\right)\right\}+\ldots\quad .\end{aligned} \tag{26.80}$$

Die hier verwendeten mittleren Bahnparameter $\overline{p}=\overline{a}\left(1-\overline{e}^2\right),\overline{a},\overline{e},\overline{i}$ unterliegen im Erdgravitationsfeld keinen säkularen Störungen und können somit als Anfangswerte $\overline{a}=\overline{a}_0$, $\overline{e}=\overline{e}_0$, $\overline{i}=\overline{i}_0$ festgehalten werden. Man darf davon ausgehen, dass eine wahre Kreisbahn nahe an einer kreisförmigen *Kepler*bahn liegt. Es wird deshalb $\overline{e}=\overline{e}_0=0.0$ angenommen. Dies führt auf die mittleren Beziehungen $\overline{r}=\overline{p}=\overline{a}=\overline{a}_0$. Setzt man dies in den obigen Ausdruck für die

---

[1] Dazu sei etwa verwiesen auf etwa E. M. SOOP [1983]

[2] JOCHIM, E. F. and M. C. ECKSTEIN [1979], JOCHIM, E. F. M. [2015**]**, FLURY, W. [1973], FLURY, W. [1976]

[3] LYDDANE, R. H. [1963]

[4] Abschnitt 20.2.4.13 (Band III)

periodischen Variationen des Bahnradius ein, sieht man, dass in den Gliedern mit J_3 und J_5 abhängig von der Inklination $\bar{i}$ erhebliche Schwankungen für den Bahnradius

$$r = \bar{r} + \Delta r = \bar{a}_0 + \Delta r \tag{26.81}$$

auftreten können. Um auch diese Schwankungen auszuschließen, reduzieren wir die Untersuchung auf kreisförmige Äquatorbahnen. Dann bleibt

$$\Delta r = \delta_{rG}[\bar{e} = 0, \bar{i} = 0°.0] = -\frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0} \quad . \tag{26.82}$$

Dieser Wert ist konstant, somit auch der Bahnradius *r*. Er ist kleiner als die einer ungestörten *Kepler*bewegung entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$. Dies kann so gedeutet werden, dass sich der Satellit stets im Perizentrum einer Ellipse befindet, die sich mit dem Satelliten um die Erde bewegt (vgl. Bild 26-9, links). Sei Δe die Exzentrizität dieser Ellipse, so hat der Bahnradius den konstanten Betrag $r = \bar{a}_0 (1 - \Delta e)$. Daraus ergibt sich für die Exzentrizität

$$\Delta e = -\frac{\Delta r}{\bar{a}_0} = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{\bar{a}_0} \right)^2 \quad . \tag{26.83}$$

Zur vertieften Untersuchung dieses Verhaltens werden die lang- und kurzperiodischen Störungen einer *Kepler*bewegung mit den für erdnahe Satelliten gültigen Formeln in Abschnitt 20.2.2 (Band III) betrachtet. Mit den mittleren Epochewerten $\bar{e}_0 = 0.0$ und $\bar{i}_0 = 0°$ zeigt der Ausdruck (20.23), dass in diesem Fall keine langperiodischen Störungen existieren, während die kurzperiodischen Störungen nach (20.57) oder (20.58) einen nicht verschwindenden Betrag annehmen:

$$\delta e_{Gl} = 0.0 \quad , \quad \delta e_{Gk} = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{\bar{a}_0} \right)^2 \cos \bar{\upsilon} \quad . \tag{26.84}$$

Vergleich mit (26.83) führt notwendig auf $\cos \bar{\upsilon} \equiv 1$, somit $\bar{\upsilon} \equiv 0°$. Dies bestätigt die Aussage, dass sich in diesem Fall der Satellit stets im Perizentrum seiner oskulierenden Bahnellipse befindet.

Formel (26.82) zeigt: mit abnehmender Bahnhöhe wächst die Abweichung der Bahn von der zugehörigen großen Bahnhalbachse beträchtlich, ebenso die zugehörende scheinbare Bahnellipse. Die entsprechenden Zahlenwerte können aus Bild 26-9, rechts, abgelesen werden.

Die mittlere Bewegung auf einer solchen Bahn kann mit dem Flächensatz

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu \bar{a}_0^{(1)} \left[1 - (\Delta e)^2 \right]}}{\left(\bar{a}_0^{(1)} + \Delta r \right)^2} \tag{26.85}$$

berechnet werden. Hier ist ζ der *Hansen*sche Bahnwinkel. Seine Variation $\dot{\zeta}$ ist in diesem Fall konstant. Somit kann dieser Ausdruck als die *Hansen*sche mittlere Bewegung einer kreisförmigen Äquatorbahn bezeichnet werden.

BEISPIEL: Eine geostationäre Bahn hat nach Formel (26.76) die „gestörte“ große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(1)} = 42166.2603154\,\text{km}$. . Der Bahnradius hat mit der Korrektur (26.82) $\Delta r = -1.566729128\,\text{km}$ den konstanten Betrag $r = 42164.6935863\,\text{km}$. Die zugehörige ellip-

tische Bahn hat mit Formel (26.83) die Exzentrizität $\Delta e = 3.71559896 \times 10^{-5}$. Der Satellit bewegt sich nach Formel (26.85) mit der in diesem Fall konstanten *Hansen*schen Bewegung $\dot{\zeta} = 7.29211594 \times 10^{-5}$ rad/sec.

Zum Vergleich: die ungestörte *Kepler*sche mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_K} = \dot{\Theta} = 7.29211585468 \times 10^{-5}$ rad/sec. Sie muss kleiner als die Bewegung auf der gestörten Bahn sein, das sie „weiter außen" liegt. Entsprechend beträgt die zugehörende Geschwindigkeit auf der oskulierenden Bahn $V = \sqrt{\mu / r} = 3.074641220\,\text{km/s}$. Sie würde dagegen auf der Nominalbahn (erster Ordnung) $V = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^{(1)}} = 3.074584099\,\text{km/s}$ betragen. ◄

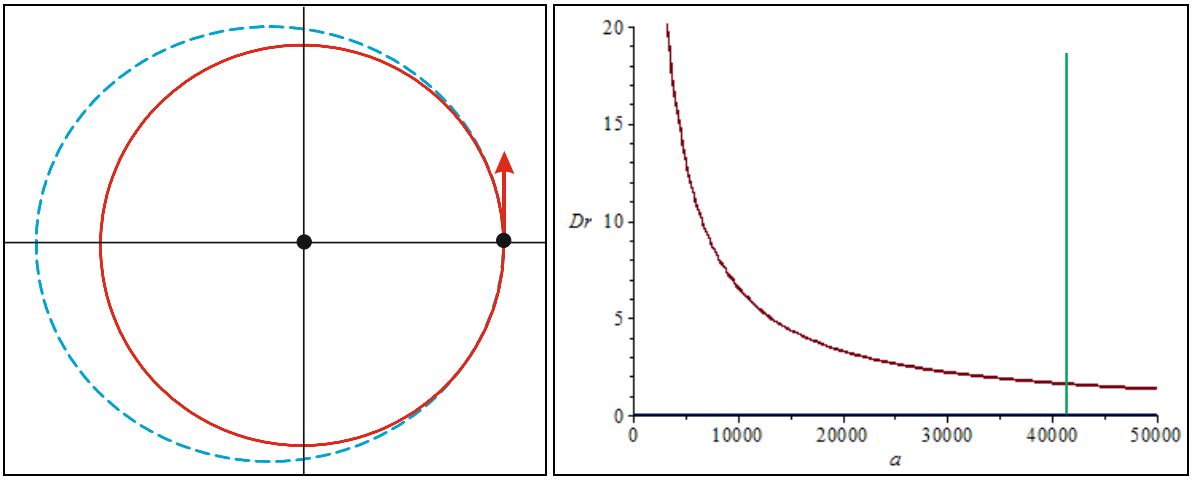


Bild 26-9: Die Bewegung eines Satelliten auf einer äquatorialen Kreisbahn im Gravitationsfeld seines Zentralkörpers mit Störeinfluss allein durch die zonale Harmonische J_2: Der bewegte Körper befindet sich stets im Perizentrum seiner elliptischen Bahn (blau gestrichelt). Dieses bewegt sich mit dem Körper längs seiner kreisförmigen Bahn (rote Kurve). Das rechte Bild zeigt die entsprechenden Zahlenwerte für den Fall von Erdsatelliten, die Abweichung $\Delta r\,[\text{km}]$ des Bahnradius von der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}\,[\text{km}]$. Grüne Linie: geostationäre Bahn.

Anmerkungen:

1. Für kreisförmige Äquatorbahnen verschwindet die Variation Δa der großen Bahnhalbachse, siehe die Formeln (20.53) und (20.54) (Abschnitt 20.2.3, Band III). ◄

2. In den Theorien zur Beschreibung der Erdsatellitenbewegung von H. KRAUSE [1956 a] wie auch von Y. KOZAI [1959] wurde gegenüber dem ungestörten Wert eine konstante Verschiebung der großen Bahnhalbachse beobachtet, um welche die wahre Halbachse oszilliert. Der Betrag dieser Verschiebung ist in beiden Theorien im Fall einer kreisförmigen Äquatorbahn identisch, weicht jedoch von der Verschiebung Δr in Formel (26.82) um den Faktor 2/3 ab. Dies könnte gedeutet werden, dass eine fiktive große Halbachse a im Fall einer solchen Bahn als theoretischer Bezug angenommen werden könnte. In der am häufigsten in der Satellitenbahnmechanik verwendeten analytischen Theorie nach D. BROUWER [1959] wird jedoch im Fall der kreisförmigen Äquatorbahnen auch bei Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse durch das Erdschwerefeld kein Unterschied zwischen mittlerer und oskulierender Bahnhalbachse gemacht. ◄

3. Nach Formel (26.82) wird die konstante Abweichung des Bahnradius zur großen Bahnhalbachse ausschließlich durch die Abplattung repräsentiert und durch die zonale Harmonische J_2 beschrieben. Diese Tatsache wird gelegentlich als eine Resonanz zwischen den *Hansen*winkeln der Bewegung des Satelliten in seiner Bahn und des Perizentrums der Bahn gedeutet. ◄

26.7.2.3 Spitzenpunkte auf geneigten Kreisbahnen

Da retrograde und Polbahnen stets scheinbar rückläufig sind, werden die folgenden Untersuchungen wieder ausschließlich für rechtläufige Bahnen $\bar{i}_0 \in (0°, 90°)$ durchgeführt.

Können auf solchen Bahnen scheinbar stationäre Punkte auftreten, wie kann man sie berechnen?

Als erste Bedingung für stationäre Punkte folgt mit der Variationsgleichung (26.62)

$$\dot{\delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos u = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 = 90° \,,\; u_2 = 270° \,,\; \sin u = \pm 1 \,. \tag{26.86}$$

Aus der zweiten Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit der Variationsgleichung (26.61) folgt im Fall einer im Mittel kreisförmigen Bewegung $\bar{e}_0 = 0.0$ und für beliebige Inklinationen $\bar{i}_0 < 90°$

$$\dot{\Theta} \cos \bar{i}_0 = \dot{\zeta} \quad \left\langle \dot{\delta} = 0 \;,\; \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\; \sin \bar{i}_0 \neq 0 \quad . \right. \tag{26.87}$$

Hierzu wird der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit den säkularen Variationen der Elemente $\overline{M_0, \omega, \Omega}$ verwendet:

$$\dot{\zeta}\left[\bar{e}_0 = 0.0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) \right] + O\left(J_2^2\right) + \delta\left(\dot{\zeta}\right) \quad . \tag{26.88}$$

Bei Vorgabe einer Inklination $\bar{i}_0 < 90°$ kann mit Hilfe der Zuordnung (26.87) die entsprechende mittlere Bahnhalbachse berechnet werden. Als erste Näherung kann der Wert

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\dot{\Theta} \cos \bar{i}\right)^2}} \tag{26.89}$$

verwendet werden. Eine erste Verbesserung mit Hilfe der Linearisierung $\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta \bar{a}_0^{(1)}$ ergibt die Korrektur

$$\Delta \bar{a}_0^{(1)} = -J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) \quad . \tag{26.90}$$

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv \dot{\Theta} \cos \bar{i}_0 - \dot{\zeta}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \tag{26.91}$$

iterativ erreicht werden, wenn für $\dot{\zeta}$ der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit allen bekannten höheren säkularen Störungen auf die *Kepler*bewegung entsprechend (26.70) berücksichtigt wird.

Mit diesem Verfahren einer Bahnauswahl ist eine spezielle Familie von Kreisbahnen gefunden, welche sich durch scheinbare Spitzenpunkte in der nördlichen und der südlichen Wende

auszeichnet. Da es sich um Kreisbahnen handelt, sind die wesentlichen *Kepler*elemente wie häufig im Falle einer Bahnauswahl durch eine Relation zwischen der großen Bahnhalbachse und der Inklination gekennzeichnet. In Bild 26-10 ist diese Relation durch die obere (rote) Kurve dargestellt. Sie beginnt in der geostationären Bahn und verläuft asymptotisch zur Polbahn (grüne Kurve für i=90°).

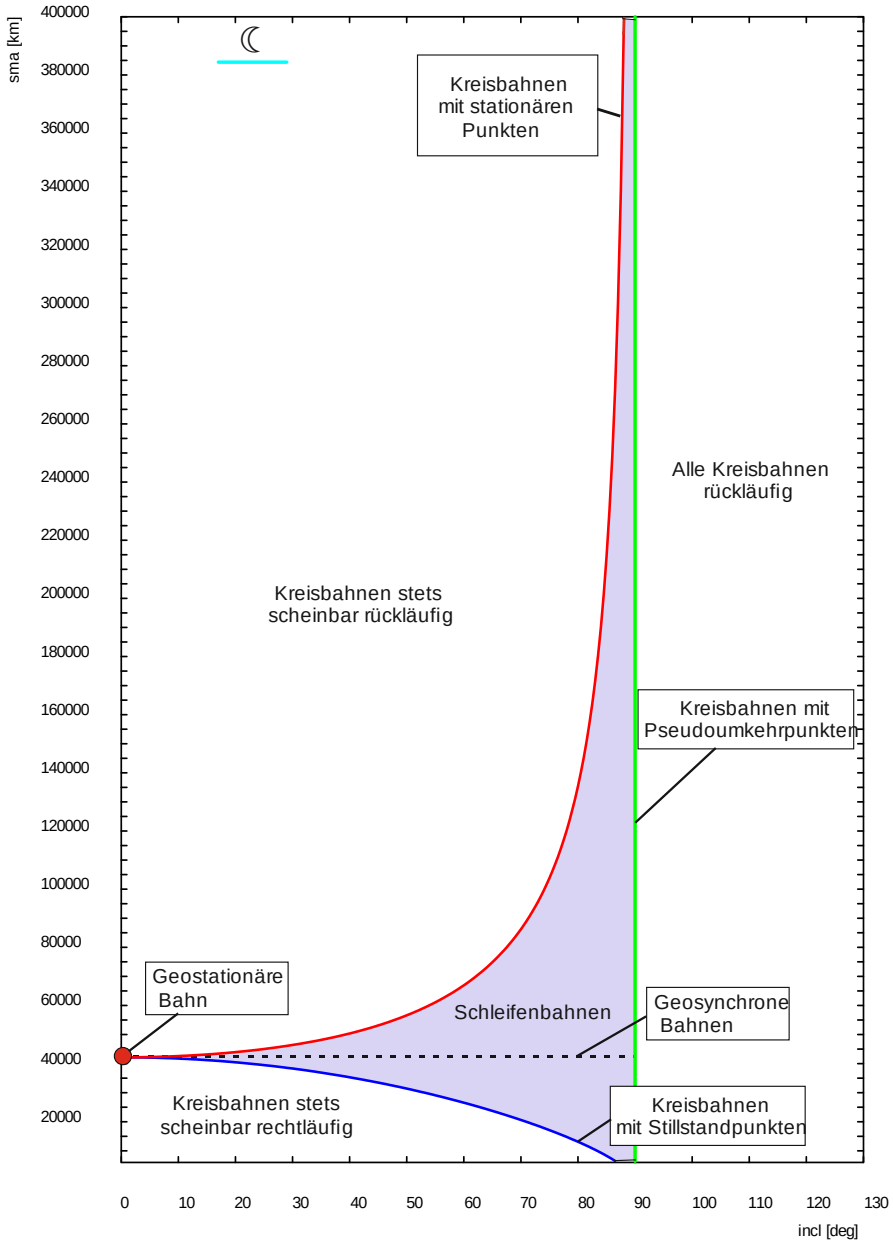


Bild 26-10: Familien von Kreisbahnen mit stationären Punkten (rote Kurve oben) und Stillstandpunkten (blaue Kurve unten), sowie Polbahnen mit Pseudoumkehrpunkten (grüne Kurve). Die Bahn des Mondes wird als scheinbare Erdsatellitenbahn gedeutet (in gleicher Weise auch die Sonne).

Für eine weitere Abschätzung werde die Lösung (26.91) mit $a_{ok} := \overline{a}_0^{(\nu)}$ bezeichnet. Für Halbachsen $a > a_{ok}$ wird mit einer als fest angenommenen Inklination $\overline{i}_0$ die Relation

$$\dot{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{ok}^3}}\,\frac{1}{\cos\overline{i}_0} > \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,\frac{1}{\cos\overline{i}_0} = \dot{\alpha}\left[\sin^2 u = 1\right] > \dot{\alpha}\left[\sin^2 u = 0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\cos\overline{i} \quad \langle \overline{e}_0 = 0.0 \quad (26.92)$$

erhalten. Das bedeutet: für alle Bahnen oberhalb der Kurve mit Bahnen mit scheinbar stationären Punkten ist $\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$, sie sind somit alle scheinbar rückläufig. Auch der Erdmond kann als ein Erdsatellit aufgefasst werden, wenn seine mittlere geozentrische Entfernung[1] $a_{\leftmoon} = 384408\,\text{km}$ als große Bahnhalbachse gedeutet wird. Der Mond bewegt sich also scheinbar rückläufig um die Erde (siehe in Bild 26-10). Dasselbe kann auch für die Sonne festgestellt werden, da die Bewegung der Sonne mathematisch als die eines Erdsatelliten um die Erde gedeutet werden kann. Damit bewegt sich also auch die Sonne scheinbar rückläufig um die Erde. Abgesehen von den stationären Punkten ist eine derartige Bahn stets scheinbar rückläufig.

BEISPIEL: Berechne die große Bahnhalbachse einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn unter der Neigung i=50°, wenn die Bahn scheinbar stationäre Bahnpunkte aufweisen soll.

Die erste Näherung aus (26.89) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 56610.707453\,\text{km}$, mit der Verbesserung (26.90) $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.186347\,\text{km}$ lautet die Lösung $\bar{a}_0^{(1)} = 56610.893900\,\text{km}$. Die Iteration (26.91) mit der Genauigkeit $\left|\Delta fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right| < 4\times10^{-10}\,\text{rad/s}$ führt zu keiner weiteren Verbesserung. Die Projektion dieser Bahn auf die Erdoberfläche in Bild 26-11 zeigt die typischen Spitzen für die Argumente der Breite $u_1 = 90°, u_2 = 270°$. Außerhalb dieser beiden Punkte sind keine scheinbar stationären Bahnpunkte auf derartigen Kreisbahnen möglich. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}560°.060578\ /\overline{P_d}$. ◄

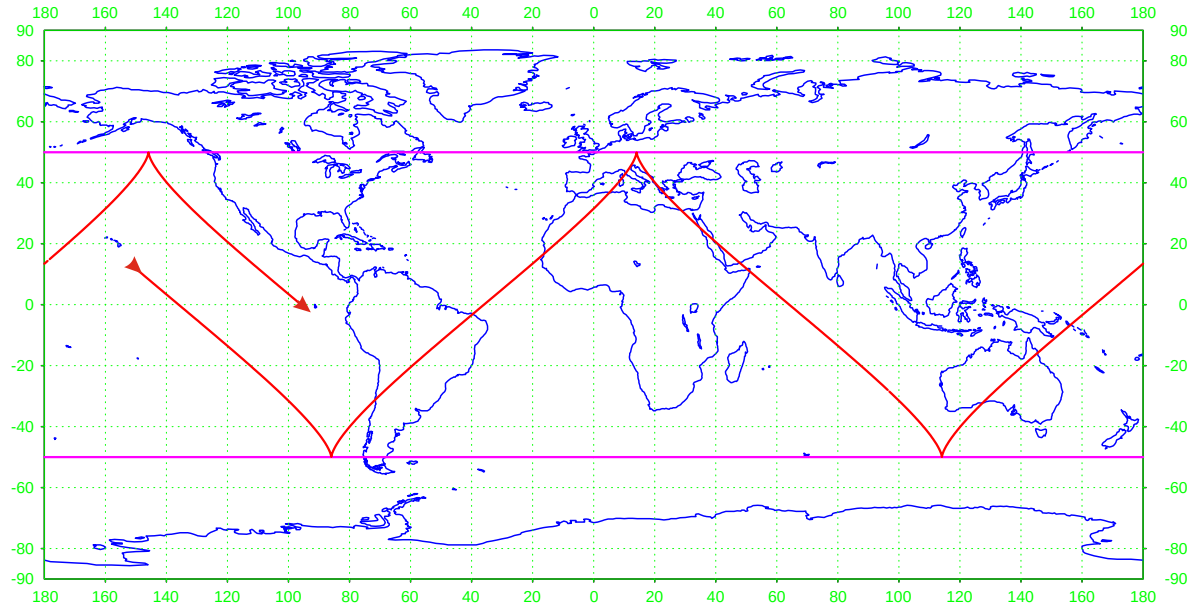


Bild 26-11: Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbar stationären Bahnpunkten (Spitzenpunkte), große Bahnhalbachse $\bar{a} = 56610.894\,\text{km}$

[1] Anhang E.3, Band V

26.7.2.4 Wendepunkte auf geneigten Kreisbahnen

Für eine weitere Gruppe besonderer Bahnpunkte sei die Bedingung $\dot{\delta} = 0.0/\mathrm{s}$ beibehalten, jedoch $\dot{\alpha} \neq \dot{\Theta}$ zugelassen. Auf geneigten Bahnen kommen derartige Bahnpunkte nach der Variationsgleichung (26.62) nur dann vor, wenn $\cos u = 0$, d.h. in der nördlichen und südlichen Wende der Bahn wie im Fall der Spitzenpunkte. Jedoch findet wegen $\dot{\alpha} \neq \dot{\Theta}$ keine Stationarität statt.

26.7.2.5 Stillstandpunkte auf geneigten Kreisbahnen

Eine weitere Bahnfamilie erhalten wir, wenn die Satelliten eine Nord-Süd-Drift erfüllen $\left(\dot{\delta} \neq 0\right)$, jedoch Stillstand in Ost-West Richtung annehmen sollen. Aus der Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ kann die Variationsgleichung (26.61) (auf Seite 333) im Fall einer im Mittel kreisförmigen Bewegung $\bar{e}_0 = 0.0$ und für beliebige Inklinationen $\bar{i}_0 \leq 90°$ nach dem Argument der Breite

$$\sin u = \pm \frac{1}{\sin \bar{i}_0 \sqrt{\dot{\Theta}}} \sqrt{\dot{\Theta} - \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0} \tag{26.93}$$

aufgelöst werden. Stationäre Bahnpunkte können somit nur dann auftreten, wenn die Bedingung

$$\dot{\Theta} \geq \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0 \tag{26.94}$$

erfüllt wird. Die Grenzkurve lautet in diesem Fall

$$\dot{\Theta} = \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0 \quad \left\langle \dot{\delta} \neq 0,\ \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\ \sin \bar{i}_0 \neq 0 \right. \quad . \tag{26.95}$$

Sie folgert, dass die besonderen Bahnpunkten wegen $\sin u = 0$ auf dem Äquator liegen, mithin im auf- bzw. absteigenden Bahnknoten. Um die entsprechende mittlere Bahn zu erhalten, wird wie in der Beziehung (23.54) der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit den säkularen Variationen der Elemente $\overline{M_0}, \omega, \Omega$ verwendet:

$$\dot{\zeta}\left[\bar{e}_0 = 0.0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) \right] + O\left(J_2^2\right) + \delta\left(\dot{\zeta}\right) \quad . \tag{26.96}$$

Bei Vorgabe einer Inklination $\bar{i}_0 < 90°$ kann mit Hilfe der Zuordnung (26.95) die entsprechende mittlere Bahnhalbachse berechnet werden. Als erste Näherung erhalten wir

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu \cos^2 \bar{i}}{\dot{\Theta}^2}} \quad . \tag{26.97}$$

Eine erste Verbesserung mit Hilfe der Linearisierung $\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta \bar{a}_0^{(1)}$ ergibt wieder die Korrektur

$$\Delta \bar{a}_0^{(1)} = -J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) \quad . \tag{26.98}$$

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv \dot{\Theta} - \dot{\zeta}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) \cos \bar{i}_0 \cos \bar{i}_0 = 0 \quad \left\langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \right. \tag{26.99}$$

iterativ erhalten werden, wenn für $\dot{\zeta}$ der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit allen bekannten höheren säkularen Störungen auf die *Kepler*bewegung entsprechend (26.70) berücksichtigt wird.

Beim Äquatordurchgang ($\sin u = 0$) hat der Satellit nach Vorgabe keine Ost-West-Drift, jedoch wegen $\dot{\delta} \neq 0$ eine Nord-Süd-Drift. Auf Kreisbahnen ist die Drift des *Hansen*schen Bahnwinkels konstant: $\dot{\zeta} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3} = \text{const.}$. Bewegt sich der Satellit vom Äquator weg, folgt aus der Variationsgleichung (26.61) der Rektaszension im Fall rechtläufiger Bahnen $\left(\cos \bar{i}_0 > 0\right)$, dass die Drift der Rektaszension dann größer als die tropische Erdrotation ist: $\dot{\Theta} < \dot{\alpha}$, in den Knoten ist $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ die untere Grenze der Drift der Rektaszension. Da dann[1] $\dot{\lambda} > 0$, ist die Bahn des Satelliten außerhalb der Knoten stets auch scheinbar rechtläufig. Dies gilt für die nördliche wie die südliche Erdhälfte. In den Knoten kommt die Ost-West-Drift zum Stillstand, die Knoten müssen also orthogonal zum Äquator überflogen werden. Wenn in der Bedingungsgleichung (26.95) $\sin \bar{i}_0 \to 0$ wird $\dot{\Theta} = \dot{\zeta}$, d.h. der Satellit bewegt sich so schnell wie die Erde rotiert, das bedeutet: der geostationäre Fall ist der Grenzfall der erhaltenen Bahnfamilie.

Die hier vorgestellte Bahnauswahl führt auf eine neue Familie von geneigten Kreisbahnen, welche sich durch scheinbare Stillstandpunkte bei Knotenüberflügen auszeichnet. Da es sich um Kreisbahnen handelt, sind die wesentlichen *Kepler*elemente auch in diesem Fall wie häufig im Falle einer Bahnauswahl durch eine Relation zwischen der großen Bahnhalbachse und der Inklination gekennzeichnet. In Bild 26-10 ist diese Relation durch die untere (grüne) Kurve dargestellt. Sie beginnt in der geostationären Bahn und verläuft asymptotisch zur Polbahn (grüne Kurve für *i*=90°). Abgesehen von den Stillstandpunkten sind derartige Bahnen stets auch scheinbar rechtläufig.

Wegen $\dot{\Theta} < \dot{\alpha}$ sind alle Bahnen unterhalb dieser Kurve rechtläufig. Dies kann ersehen werden, wenn mit der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels im Fall kreisförmiger Satellitenbahnen $\dot{\zeta} = \sqrt{\mu / a^3}$ bei konstanter Inklination Halbachsen eingesetzt werden, die kleiner als die entsprechende Halbachse $a_{uK} := \bar{a}_0^{(\nu)}$ der Bahnen mit Stillstandpunkten aus den Iterationen (26.97) - (26.99). Nach Variationsgleichung (26.61) folgt daraus:

$$\dot{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{uk}^3}} \cos \bar{i} < \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \bar{i} < \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\cos \bar{i}}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 u} \quad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \qquad (26.100)$$

BEISPIEL: Berechne die große Bahnhalbachse einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn unter der Neigung i=50°, wenn die Bahn scheinbare Stillstandpunkte in den Knoten aufweisen soll. Die Näherungsformel (26.97) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 31404.260983\ \text{km}$. Mit der Verbesserung (26.98) $\Delta \bar{a}_0^{(1)} = 0.335918\ \text{km}$ wird der Wert $\bar{a}_0^{(1)} = 31404.596900\ \text{km}$ erhalten. Die Iteration (26.99) bringt keine weitere Verbesserung. Diese Bahn ist in Bild 26-12 dargestellt. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}231°.412636\ / \overline{P_d}$. ◄

[1] Siehe etwa Tabelle 26-5 auf Seite 330

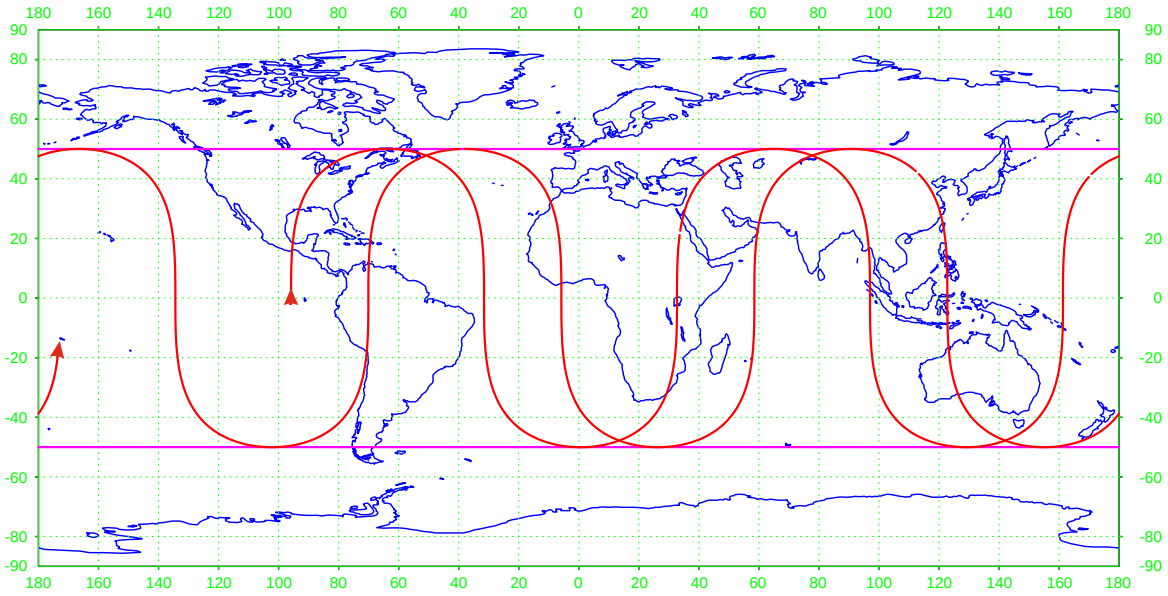


Bild 26-12: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbaren Stillstandbahnpunkten (d.h. keine Ost-West-Drift) in den Bahnknoten, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 31404.597$ km

26.7.2.6 Kreisförmige Schleifenbahnen

Unter dem Begriff „Schleifenbahnen“ wollen wir Bahnen verstehen, die zwischen scheinbar rechtläufigen und rückläufigen Bahnabschnitten bestehen.

Aus der Bedingung (26.66) $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ für stationäre Punkte in Ost-West-Richtung folgt die Gleichung (26.93) zur Berechnung dieser Punkte über die Lösung des zugehörigen Argumentes der Breite. Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Aufgabe gelöst, wenn die Wurzel auf der rechten Seite verschwindet, was zur Familie der Bahnen mit Stillstandpunkten führte. Welche Aussagen lassen sich machen, wenn statt (26.95) die Relation

$$\dot{\Theta} > \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0 \tag{26.101}$$

zugelassen wird? In diesem Fall kann das Argument der Breite aus der zentralen Bedingungsgleichung (26.93) berechnet werden. Es ergeben sich pro Satellitenumlauf vier Lösungen $\left(u_\nu, \nu = 1,2,3,4\right)$. Die zugehörigen knotenbezogenen Rektaszensionen (bzw. Längendifferenzen zu dem jeweiligen aufsteigenden Knoten) und Deklinationen folgen analog den Beziehungen (26.60) aus

$$\begin{aligned} \cos\left(\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}\right)\cos\delta_\nu &= \cos u_\nu \\ \sin\left(\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}\right)\cos\delta_\nu &= \sin u_\nu \cos i_\nu \qquad \langle \nu = 1,2,3,4 \quad . \\ \sin\delta_\nu &= \sin u_\nu \sin i_\nu \end{aligned} \tag{26.102}$$

Hier bedeuten die Indizes ν für die Bahnparameter Inklination *i* und geographische Länge des aufsteigenden Knotens λ_Ω deren Zeitabhängigkeit beim Durchlaufen der vier scheinbar stationären Punkte. Im Fall einer Bahnauslegung wird diese Zeitabhängigkeit üblicherweise vernachlässigt und die mittleren Epocheelemente verwendet ($i_\nu \triangleq \bar{i}_0, \lambda_{\Omega\nu} \triangleq \bar{\Omega}_0 - \Theta_{G0}$).

Mit Hilfe der Variation der Rektaszension (26.61) kann eine Analyse des scheinbaren Bewegungsverhaltens derartiger Bahnen durchgeführt werden. Da in diesem Fall die Bedingung für stationäre Punkte

$$\dot{\Theta} = \dot{\zeta}\,\frac{\cos \bar{i}_0}{\cos \delta_\nu} \tag{26.103}$$

erfüllt ist, ist für alle Punkte oberhalb der stationären Punkte die Bedingung

$$\dot{\alpha} > \dot{\Theta} \quad \langle |\delta| > |\delta_\nu| \quad , \cos\delta < \cos\delta_\nu \tag{26.104}$$

erfüllt. In diesem Teil der Bahn bewegt sich der Satellit scheinbar rechtläufig. Unterhalb dieser Punkte, also näher zum Äquator hin, bewegt sich der Satellit scheinbar rückläufig:

$$\dot{\alpha} < \dot{\Theta} \quad \langle |\delta| < |\delta_\nu| \quad , \cos\delta > \cos\delta_\nu \quad . \tag{26.105}$$

Dies führt auf die allgemeingültige Aussage:

- *Ein Satellit auf einer kreisförmigen Bahn mit scheinbar stationären Punkten außerhalb des Äquators und der nördlichen oder südlichen Wende bewegt sich bei Äquatorüberflug stets scheinbar rückläufig, im nördlichen und südlichen Wendepunkt stets scheinbar rechtläufig.* ◄

Eine kreisförmige Schleifenbahn kann nur vorkommen, wenn sich das Parameterpaar (a,i) im Zwischenbereich der Kurven für stationäre Punkte und Stillstandpunkte entsprechend Bild 26-10 befindet. Außerhalb dieses Gebiets kann es keine kreisförmigen Schleifenbahnen geben. Dies zeigen die folgenden Abschätzungen:

1. Kreisbahnen mit Spitzenpunkten sind wegen $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit Bedingung (26.61) durch $\sin u = \pm 1$ gekennzeichnet. Sie haben nach (26.89) - (26.91) die große Bahnhalbachse $a_{oK} = \bar{a}_0^{(\nu)}$. Nach Beziehung (26.92) sind Kreisbahnen oberhalb der Kurve der Bahnen mit Spitzenpunkten, d.h. für Bahnen mit den großen Halbachsen $a > a_{oK}$, stets scheinbar rückläufig: $\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$. Sie können also keine stationären Bahnpunkte enthalten.
2. Kreisförmige Polbahnen haben nach Gleichung (26.93) stationäre Punkte ebenfalls für $\sin u = \pm 1$, d.h. über den Polen. Da für Polbahnen stets $\dot{\alpha} = 0$, sind Polbahnen wegen $\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} \le 0$ stets scheinbar rückläufig, wenn hier auch der Fall $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ zugelassen wird. Die Pole zeigen sich als ein Grenzfall. Deshalb werden die Pole in diesem Zusammenhang als „Pseudoumkehrpunkte“ bezeichnet. Die Polbahnen, auf denen kein Wechsel zwischen rechtläufigen und rückläufigen Bahnabschnitten stattfinden kann, sind in Bild 26-10 durch die Kurve i=90° (grüne Kurve) dargestellt.
3. Kreisbahnen mit Stillstandpunkten sind wegen $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit Bedingung (26.61) durch $\sin u = 0.0$ gekennzeichnet. Sie haben nach (26.97) - (26.99) die große Bahnhalbachse $a_{uK} = \bar{a}_0^{(\nu)}$. Nach Beziehung (26.100) sind Kreisbahnen unterhalb der Kurve der Bahnen mit Stillstandpunkten, d.h. für Bahnen mit den großen Halbachsen $a < a_{uK}$, stets scheinbar rechtläufig: $\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$. Sie können also keine stationären Bahnpunkte enthalten.
4. Retrograde Bahnen wurden bereits als stets scheinbar rückläufig deklariert (siehe etwa in Tabelle 26-6 auf Seite 332). Diese Aussage kann auch mit Hilfe der Gleichung (26.93) bestätigt werden: für retrograde kreisförmige Bahnen ist (da auch immer $\dot{\zeta} > 0$)

$$\sin u = \left| \pm \frac{1}{\sin \bar{i}_0} \sqrt{1 + \frac{\dot{\zeta} \left| \cos \bar{i}_0 \right|}{\dot{\Theta}}} \right| > 1 \qquad \left\langle \bar{i}_0 > 90° \right. \quad , \tag{26.106}$$

es kann also keine Lösung für $\sin u$ geben, somit keine stationären Punkte mit $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$.

Zusammenfassung:

- *Kreisförmige Schleifenbahnen können nur dann auftreten, wenn das Parameterpaar* $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ *aus dem Zwischenbereich der Kurven für Bahnen mit stationären Punkten, Stillstandpunkten und Pseudoumkehrpunkten genommen wird*. ◄

Das Parameterpaar $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ für kreisförmige Schleifenbahnen kann aus Bild 26-10 auf Seite 341 abgelesen werden. Die oberen und unteren Grenzen für das Vorkommen solcher Bahnen sind für einige Inklinationen in Tabelle 26-8 auf Seite 347 zusammengestellt.

Zur Erläuterung werden einige solcher Bahnen in den folgenden Beispielen dargestellt. Die relativen geographischen Koordinaten der hier auftretenden scheinbar stationären Bahnpunkte werden mit Hilfe der Formeln (26.102) berechnet. Die Differenz in geographischer Länge kann hier auch berechnet werden aus

$$\tan\left(\lambda_\nu - \lambda_\Omega\right) = \tan u_\nu \sin \bar{i}_0 \tag{26.107}$$

Inklination	a [stationäre Punkte]	a [Stillstandpunkte]
0°	42166.261 km	42166.261 km
10°	42598.673 km	41738.053 km
20°	43951.061 km	49453.248 km
30°	46408.863 km	38310.130 km
40°	50363.202 km	35301.343 km
50°	56610.894 km	31404.597 km
60°	66931.287 km	26561.350 km
70°	86213.270 km	20619.692 km
80°	135465.270 km	13120.671 km
85°	214492.693 km	8283.275 km

Tabelle 26-8: Die großen Halbachsen kreisförmiger Satellitenbahnen mit stationären Punkten bzw. mit Stillstandpunkten über der Inklination. Randpunkte des Bereichs kreisförmiger Schleifenbahnen (siehe in Bild 26-10, auf Seite 341)

Eine zentrale Rolle innerhalb der Familien kreisnaher Schleifenbahnen nehmen die **kreisnahen geosynchronen Bahnen** ein. Dies lässt sich schon in Bild 26-10 durch die gestrichelte Linie ersehen, welche die Familie der kreisnahen geosynchronen Bahnen enthält.

Die Bewegung der Knotenlänge wird durch

$$\lambda_\Omega[t] = \lambda_{\Omega 0} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\left(t - t_0\right) + \delta[\lambda_\Omega] \quad \left\langle \lambda_{\Omega 0} \coloneqq \lambda_\Omega[t_0] \right. \tag{26.108}$$

beschrieben. Die säkulare Drift der Knotenlänge[1] ist aus

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\overline{P_d}} \tag{26.109}$$

bekannt, wenn $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf $\overline{P_d}$ ist. Mittlere geosynchrone Bahnen sind durch die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360° \triangleq -2\pi$ gekennzeichnet[2]. Nach einem halben drakonitischen Umlauf beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung nach (26.108)

$$\lambda_\Omega - \lambda_{\Omega 0} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \frac{\overline{P_d}}{2} = -180°. \tag{26.110}$$

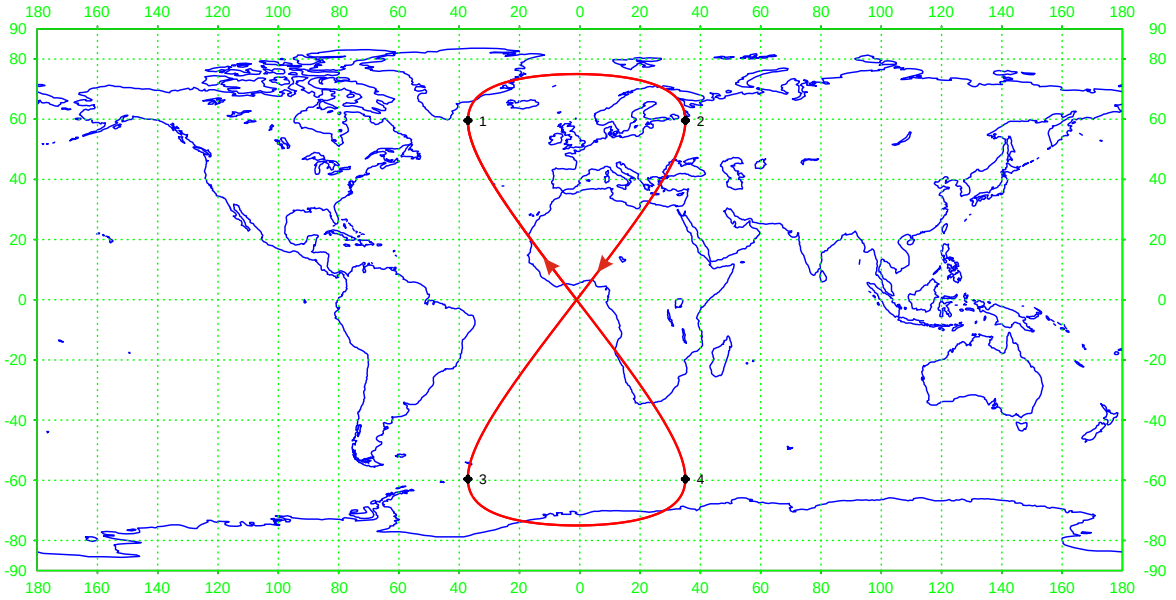


Bild 26-13: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\overline{a} = 42166.2614$ km. Die vier Umkehrpunkte sind gekennzeichnet

Die geographische Länge der Position eines Satelliten auf einer kreisnahen geosynchronen Bahn nach einem halben Umlauf kann mit $u = 180°$ aus den Transformationsformeln (26.102) berechnet werden: $\lambda[u = 180°] = \lambda_\Omega + 180°$. Bei Bezug auf einen Anfangswert zum Zeitpunkt t_0 mit Anfangsknotenlänge $\lambda_{\Omega 0}$ bedeutet dies, dass der Knoten der Bahn nach einem halben Umlauf die geographische Länge

$$\lambda = \lambda_\Omega - 180° = (\lambda_{\Omega 0} - 180°) + 180° = \lambda_{\Omega 0} \tag{26.111}$$

beträgt. Die Konsequenz ist:

- *Auf kreisnahen geosynchronen Satellitenbahnen haben aufsteigender und absteigender Knoten stets dieselbe geographische Länge.* ◄

[1] nach Formel (23.228), Abschnitt 23.5.1

[2] Siehe in Abschnitt 26.6.2 die Formeln (26.56) und (26.57)

Die Folge dieser Aussage ist die Bahnform der stehenden 8 für alle kreisnahen geosynchronen Bahnen.

BEISPIEL 1: Die geosynchrone kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a}_G^{(1)} = 42166.261432\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 39341.834\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 72401.971\ \text{s}$. Die Bahn (siehe Bild 26-13) hat pro Umlauf die scheinbar stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_ν ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
63°.037080	26°.965840	322°.906349	59°.419410	59°.444873
116°.962920	153°.034160	35°.044918	59°.423552	59°.449012
243°.037080	206°.965840	322°.888040	-59°.422924	-59°.448385
296°.962920	333°.034160	35°.026600	-59°.423632	-59°.449093

◀

Die kreisnahe geosynchrone Satellitenbahn kann als Idealfall einer Schleifenbahn angesehen werden. Bei Bahnen mit größerer Bahnhalbachse wird der Betrag der Knotenlängenverschiebung gegenüber der geosynchronen Bahn wachsen[1]: $\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| > 360°$. Daraus folgt, dass nach einem halben Umlauf der Betrag der Knotenlängendifferenz gegenüber dem Fall der geosynchronen Bahn größer ist, der absteigende Knoten ist somit gegenüber dem aufsteigenden Knoten nach Westen verschoben. Solange die Bahn unterhalb der Bahnen mit Spitzenpunkten liegt, hat sie zwei Umkehrpunkte, es muss somit eine Schleifenbildung mit Überschneidung stattfinden:

- *Auf kreisförmigen Satellitenbahnen mit Umkehrpunkten, deren große Bahnhalbachse größer als die der geosynchronen Bahn ist, durchläuft der Satellit Schleifen mit Überschneidungen.* ◀

Der Grenzfall ist die kreisförmige geosynchrone Bahn, deren Überschneidung über dem Äquator liegt. Bei den höheren Kreisbahnen mit zwei Umkehrpunkten kann der Überschneidungspunkt berechnet werden, wenn zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_1, t_2 die geographischen Koordinaten der Satellitenbahn die Bedingung

$$\lambda(t_1) = \lambda(t_2) \quad , \quad \delta(t_1) = \delta(t_2) \tag{26.112}$$

erfüllen. Im ersten Punkt wächst die geographische Breite, es muss $\dot{\delta}_1 > 0$ sein, im zweiten Punkt muss $\dot{\delta}_2 < 0$ sein. Infolge der Kreisbahn ist der Betrag dieser Variationen gleich

$$\dot{\delta}(t_2) = -\dot{\delta}(t_1) \quad . \tag{26.113}$$

Wegen Variationsgleichung (26.62) gilt somit für die entsprechenden Argumente der Breite

$$\cos u_2 = -\cos u_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 180° - u_1 \quad . \tag{26.114}$$

[1] Vgl. etwa Formel (23.228) und die entsprechenden Ausdrücke für die säkulare Knotenlängendrift und die mittlere drakonitische Umlaufzeit

Aus Symmetriegründen hat dann der Überschneidungspunkt zum vorhergehenden aufsteigenden Knoten die Längendifferenz

$$\Delta\lambda_K = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{4} \quad . \tag{26.115}$$

Habe der aufsteigende Knoten die geographische Länge $\lambda_{\Omega 0}$, so hat der Überschneidungspunkt die Länge

$$\lambda(t_1) = \lambda_{\Omega 0} - \frac{\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right|}{4} \quad . \tag{26.116}$$

Analog erfolgt die Berechnung eines Überschneidungspunktes über der südlichen Hemisphäre. Zur Berechnung der entsprechenden Deklination wird das Argument der Breite $u_1 = u(t_1)$ benötigt, wozu die Zeit t_1 mit folgender Überlegung berechnet werden kann:

Wegen der ersten Bedingung (26.112) folgt mit den Formeln (26.1) und (26.3) für die Rektaszension $\alpha_{1/2} = \lambda_{1/2} + \Theta_{G1/2}$ und damit

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \dot{\Theta}(t_2 - t_1) \ . \tag{26.117}$$

Das Zeitintervall $(t_2 - t_1)$ wird zum Durchlaufen der Schleife von einem Überschneidungspunkt und zu diesem zurück benötigt. Da der Satellit sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen soll, ist dieses Zeitintervall mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit in Bezug auf die Knotendurchgangszeit t_Ω und aus Symmetriegründen berechenbar:

$$t_2 - t_1 = \frac{\overline{P_d}}{2} - 2(t_1 - t_\Omega) \quad . \tag{26.118}$$

Die Differenz in Rektaszension wird mit Hilfe der Transformationsformeln (26.60) berechnet:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{1/2} - \Omega)\cos\delta &= \cos u_{1/2} \\ \sin(\alpha_{1/2} - \Omega)\cos\delta &= \sin u_{1/2}\cos\bar{i}_0 \\ \sin\delta &= \sin u_1 \sin\bar{i}_0 \quad . \end{aligned} \tag{26.119}$$

Mit Hilfe der Zuordnung (26.114) folgt

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\cos^2\delta = \sin(2u_1)\cos\bar{i}_0 \quad . \tag{26.120}$$

Wegen der gleichmäßigen Bewegung des Satelliten ergibt sich das Argument der Breite mit der mittleren drakonitischen Bewegung[1] zu

$$u_1 = \overline{n_d}(t_1 - t_\Omega) \quad . \tag{26.121}$$

Die Bedingungsgleichung zur Berechnung des Zeitintervalls $(t_1 - t_\Omega)$ lautet dann:

$$\sin\left[\dot{\Theta}\left(\frac{\overline{P_d}}{2} - 2(t_1 - t_\Omega)\right)\right]\left[1 - \sin^2\bar{i}_0 \sin^2\left(\overline{n_d}(t_1 - t_\Omega)\right)\right] = \cos\bar{i}_0 \sin\left[2\overline{n_d}(t_1 - t_\Omega)\right] \quad . \tag{26.122}$$

[1] siehe etwa Formel (23.48) in Abschnitt 23.2.1

Da die Knotendurchgangszeit t_Ω als bekannt angesehen werden kann, wird nach Berechnung des Zeitintervalls $(t_1 - t_\Omega)$ auch der benötigte Zeitpunkt t_1 erhalten. Damit kann das gesuchte Argument der Breite u_1 mit dem gegebenen Bahnmodell berechnet werden, mit Hilfe der dritten Gleichung (26.119) auch die gesuchte Deklination des Überschneidungspunktes. Falls gewünscht, liefert Gleichung (26.118) auch den zweiten Zeitpunkt t_2.

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\overline{a} = 70000.000\,\text{km}$ und Inklination $\overline{i}_0 = 70°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 184315.202\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 161804.488\,\text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -770°.084252 / \overline{P_d}$. Die Bahn (siehe Bild 26-14) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u	$\lambda_v - \lambda_\Omega$	λ_v	δ	φ
77°.264767	56°.5433809	92°.274634	66.429721	66°.442560
102°.735233	123°.456619	104°.697998	66°.432201	66°.445040
257°.264767	236°.543381	247°.232520	-66°.429111	-66°.441952
282°.735233	303°.456619	259°.655877	-66.429768	-66.442608

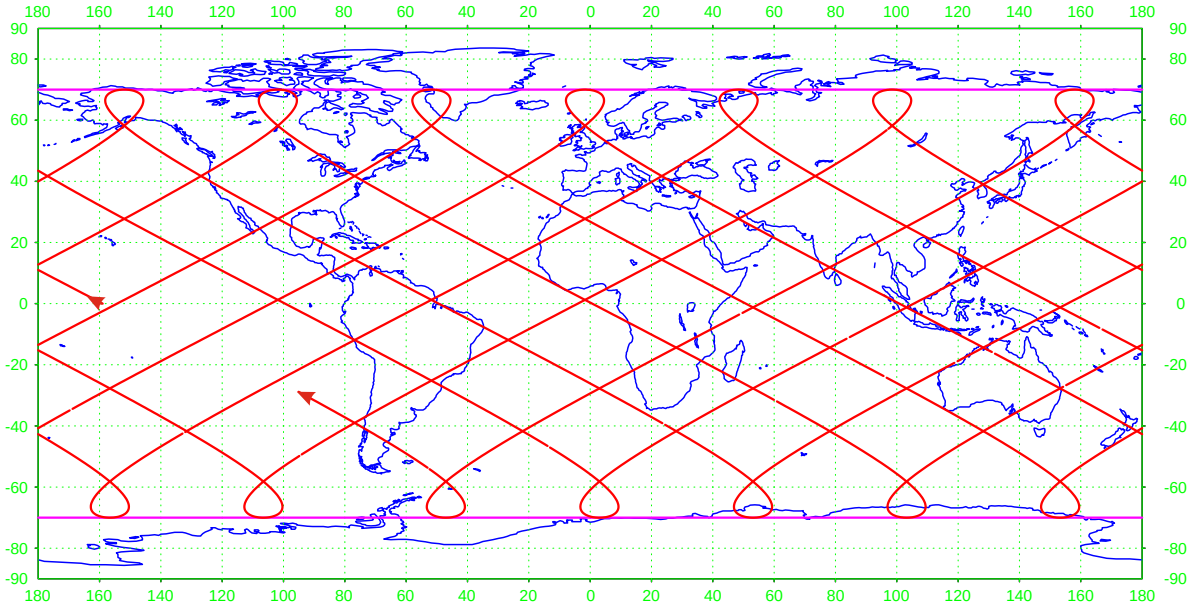


Bild 26-14: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=70° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\overline{a} = 70000.000\,\text{km}$. ◀

BEISPIEL 3: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 45000.000\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 50°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 94999.322\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 926276.293\,\text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -396°.921765/\overline{P_d}$. Die Bahn (siehe Bild 26-15) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u	$\lambda_v - \lambda_\Omega$	λ_v	δ	φ
57°.456127	45°.207559	255°.846144	40°.220747	40°.247594
122°.543873	134°.792441	273°.665208	40°.221066	40°.247913
237°.456127	225°.207559	237°.385283	-40°.246244	-40°.219398
302°.543873	314°.792441	255°.204346	-40°.249261	-40°.222414

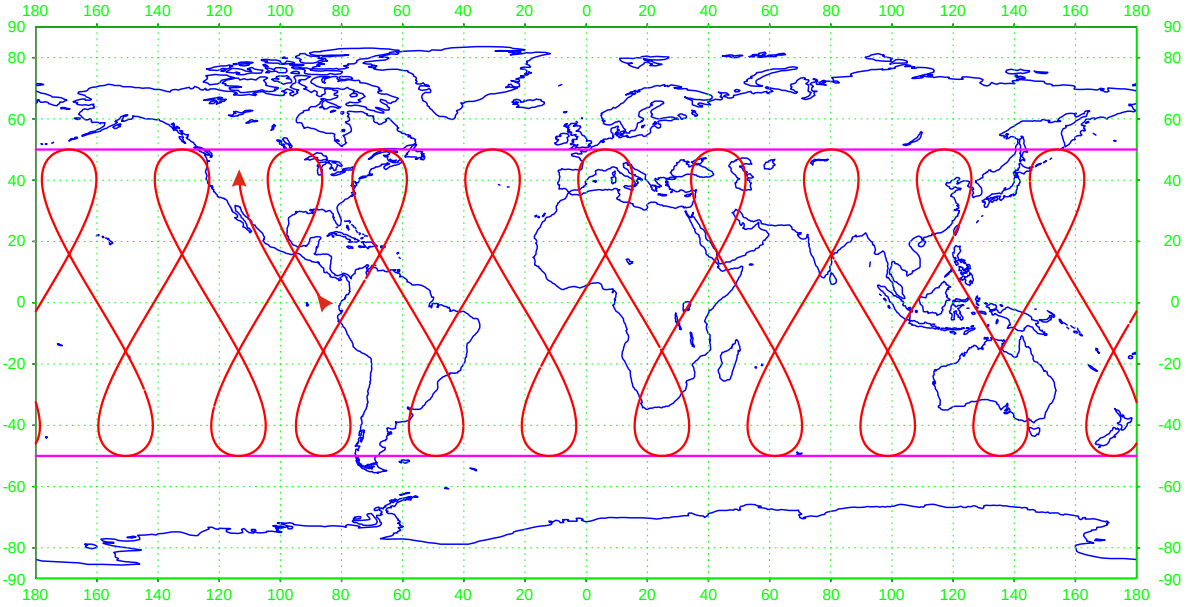


Bild 26-15: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 45000.000\,\text{km}$ ◄

BEISPIEL 4: Auch kreisförmige Bahnen mit Halbachsen unterhalb der geosynchronen Bahnen können scheinbare Schleifenbahnen mit Überschneidung aufweisen. Die Bahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 39000.000\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 76651.6838\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 76651.6839\,\text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -320°.260471/\overline{P_d}$. Die Bahn (siehe Bild 26-16) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
42°.947166	13°.544852	158°.949357	57°.348644	57°.377198
137°.052834	166°.455148	237°.310189	57°.349539	57°.378092
222°.947166	193°.544852	178°.837590	-57°.359252	-57°.387792
317°.052834	346°.455148	257°.161516	-57°.358845	-57°.387385

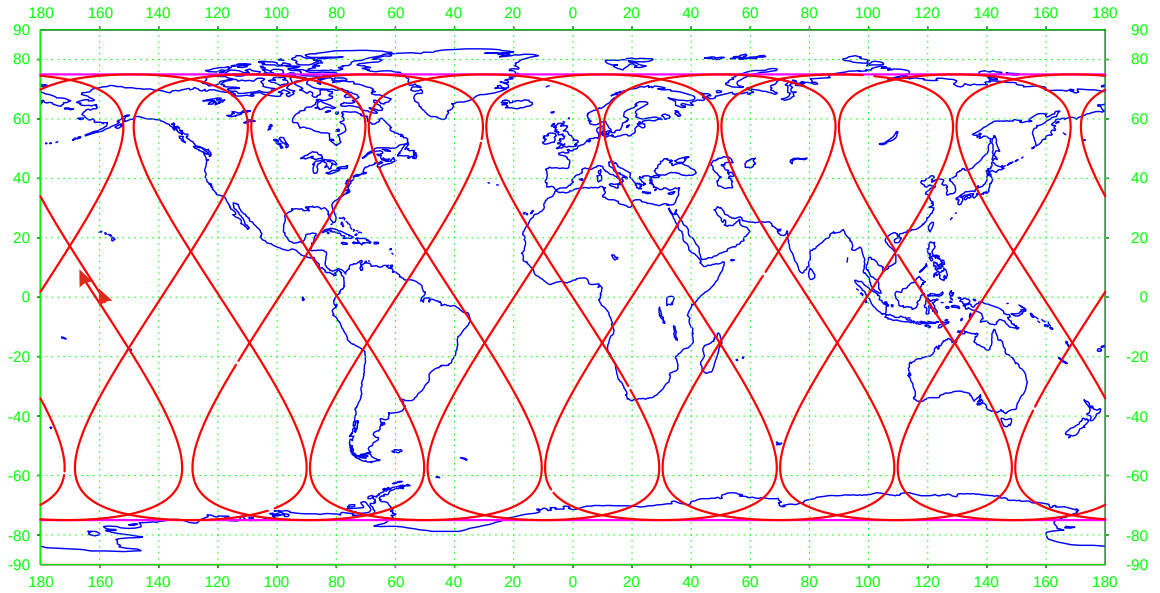


Bild 26-16: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 39000.000$ km ◄

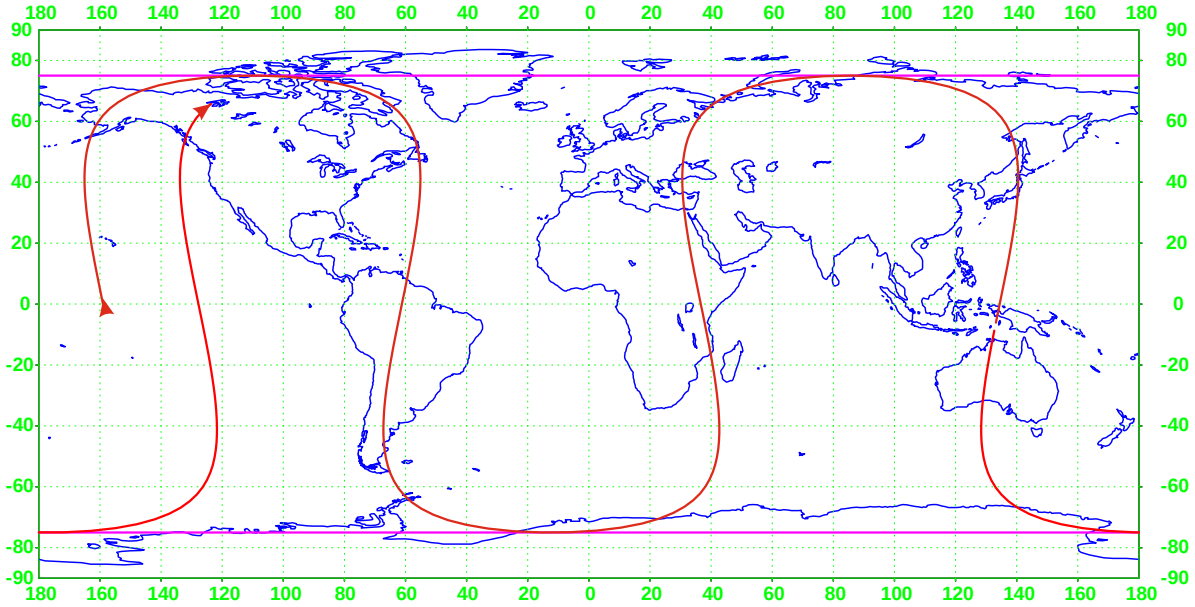


Bild 26-17: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 25000.000$ km ◄

BEISPIEL 5: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 25000.000\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 39341.834\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 72401.971\ \text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}164°.382948/\overline{P_d}$. Die Bahn (siehe Bild 26-17) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u	$\lambda_v - \lambda_\Omega$	λ_v	δ	φ
60°.663450	24°.727087	194°.944867	41°.151137	41°.199705
119°.336550	155°.272913	304°.881056	41°.160534	41°.209105
240°.663450	204°.727087	292°.753401	-41°.209015	-41°.160445
299°.336550	335°.272913	42°.689590	-41°.208390	-41°.159819

BEISPIEL 6: Konstruiere eine kreisförmige Schleifenbahn mit der mittleren Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30°/\overline{P_d}$. Nach Bedingung (26.94) muss $\dot{\Theta} > \dot{\zeta}\cos\bar{i}_0$ sein. Etwa nach Beziehung kann

$$\dot{\Theta} = \frac{\Theta_G - \Theta_{G0}}{t - t_0} = \frac{\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right|}{\overline{P_d}}$$

gesetzt werden. Im Fall von Kreisbahnen und Einschränkung auf mittlere Bewegungen kann die *Hansen*sche Bewegung angenähert werden durch[1]

$$\dot{\zeta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \triangleq \frac{360°}{\overline{P_{K0}}} \quad .$$

Wenn außerdem $\overline{P_{K0}} \approx \overline{P_d}$ angenommen wird, kann die Bedingung $\dot{\Theta} > \dot{\zeta}\cos\bar{i}_0$ ersetzt werden durch

$$\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| > 360°\cos\bar{i}_0 \quad .$$

Diese Bedingung kann also nur erfüllt werden, wenn mit der vorgegebenen Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30°/\overline{P_d}$ die Bahninklination die Bedingung $\bar{i}_0 \geq 85°.220$ erfüllt. Werde die Inklination $\bar{i}_0 = 87°$ gewählt, kann mit der in Abschnitt 23.5.3 geschilderten Methode die mittlere große Bahnhalbachse berechnet werden: $\bar{a} = 8035.461\,\text{km}$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_d} = 7175.73429\,\text{s}$, die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit $\overline{P_R} = 7828.07377\ \text{s}$. Die Bahn (siehe Bild 26-18) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte (die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf, die in der Tabelle berechneten Punkte sind auf 1 Sekunde genau berechnet. Wegen der schnellen Satelli-

[1] vgl. die Beziehung (21.56) in Abschnitt 21.2.3

tenbewegung und der Berücksichtigung periodischer Bewegungseinflüsse können die erhaltenen Breitenwerte nicht exakt übereinstimmen):

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
37°.580506	2°.306384	7°.859103	37°.486000	37°.633407
142°.419494	177°.693617	174°.517404	37°.481059	37°.628459
217°.580506	182°.306384	172°.873116	-37°.560531	-37°.707871
322°.419494	357°.693618	339°.503399	-37°.592257	-37°.739640

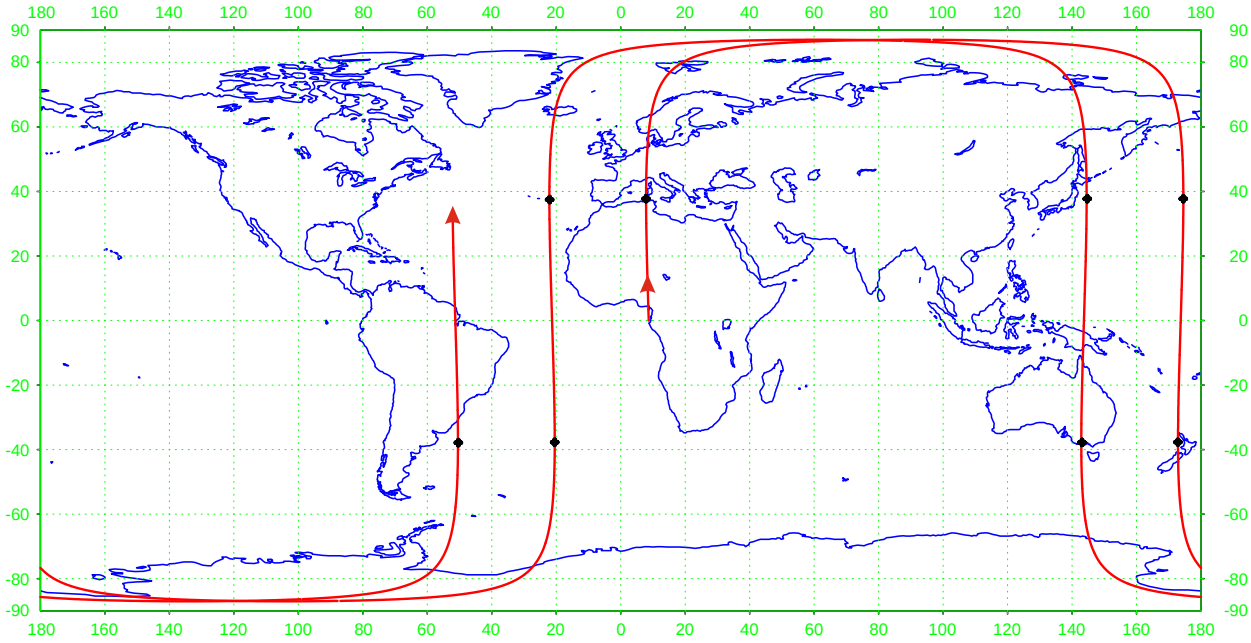


Bild 26-18: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30°$, der Bahnneigung i=87° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Umkehrpunkte sind markiert ◀

26.8 Scheinbares Bewegungsverhalten auf elliptischen Bahnen

26.8.1 Allgemeine Darstellung

Auch auf elliptischen Bahnen kann es nach Variationsgleichung (26.62) für die Deklination scheinbar stationäre Bahnpunkte nur in der nördlichen und südlichen Wende geben. Eine tiefer gehende Diskussion des scheinbaren Bewegungsverhaltens ist für elliptische Bahnen nicht mehr so übersichtlich wie im Fall von Kreisbahnen. Dies zeigen die Variationsgleichungen (26.61) und (26.62), die neben den Parametern große Bahnhalbachse a und Inklination i jetzt auch die Exzentrizität e und das Argument des Perigäums ω als unabhängige Parameter enthalten:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^2\right)^3}}\,\frac{\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]^2\cos i}{1-\sin^2 u\sin^2 i} \tag{26.123}$$

$$\dot{\delta} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^2\right)^3}}\,\frac{\cos u \sin i\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]^2}{\sqrt{1-\sin^2 u \sin^2 i}} \quad . \tag{26.124}$$

Eine Übersicht lässt sich nicht mehr zweidimensional wie in Bild 26-10 auf Seite 341 geben, sondern muss vierdimensional durchgeführt werden. Um aus der Variationsgleichung (26.123) das Argument der Breite *u* berechnen zu können, für das mit der Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ Stillstandpunkte oder Umkehrpunkte auftreten, wird durch zweimalige Quadrierung eine algebraische Gleichung vierter Ordnung erhalten;

$$fct\left(\sin u\right) \equiv A_4 \sin^4 u + A_3 \sin^3 u + A_2 \sin^2 u + A_1 \sin u + A_0 = 0 \quad . \tag{26.125}$$

Mit den mittleren Bahnparametern zur Epoche $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\omega}_0\right)$ und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_0 &:= \sqrt{\frac{\mu}{\overline{p}_0^3}}\cos\overline{i}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{\cos\overline{i}_0}{\sqrt{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}} \\ B_1 &:= \dot{\Theta} - B_0 - \overline{e}_0^2\, B_0 \cos^2\overline{\omega}_0 \\ B_2 &:= -\dot{\Theta}\sin^2\overline{i}_0 + \overline{e}^2\, B_0 \cos 2\overline{\omega}_0 \\ B_3 &:= -2\,\overline{e}_0\, B_0 \sin\overline{\omega}_0 \end{aligned} \tag{26.126}$$

lauten die fünf Parameter

$$\begin{aligned} A_4 &:= B_2^2 + \overline{e}_0^4\, B_0^2 \sin^2 2\overline{\omega}_0 \\ A_3 &:= 2\,B_2\,B_3 + 4\,\overline{e}_0^3\, B_0^2 \sin 2\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 \\ A_2 &:= B_3^2 + 2\,B_1\,B_2 - \overline{e}_0^4\, B_0^2 \sin^2 2\overline{\omega}_0 + 4\,\overline{e}_0^2\, B_0^2 \cos^2\overline{\omega}_0 \\ A_1 &:= 2\,B_1\,B_3 - 4\,\overline{e}_0^3\, B_0^2 \sin 2\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 \\ A_0 &:= B_1^2 - 4\,\overline{e}_0^2\, B_0^2 \cos^2\overline{\omega}_0 \quad . \end{aligned} \tag{26.127}$$

In der Praxis wird man mit den vorgegebenen Bahnparametern die Existenz reeller Wurzeln $\left(u_\nu, \nu = 1,2,3,4\right)$ überprüfen[1]. Wenn die $u_\nu = 90°$ oder $u_\nu = 270°$ sind, erhält man wie im Fall kreisnaher Bahnen scheinbar stationäre Punkte, wenn $u_\nu = 0°$ oder $u_\nu = 180°$ scheinbare Stillstandpunkte. Das weitere Verhalten muss im Einzelfall studiert werden, etwa durch das Verfolgen einer Ephemeride.

Eine spezielle einheitliche Aussage, wie im Fall von Umkehrpunkten, die bei kreisnahen Bahnen bei Äquatordurchgang stets scheinbar rückläufig sind, ist im Fall elliptischer Bahnen nicht möglich. Dies zeigt etwa folgender Spezialfall.

[1] Üblicherweise mit der *Descartes*schen Zeichenregel oder der *Sturm*schen Kette (z.B. in BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962] II-II-B-8

26.8.2 Bahnen mit Perigäum auf dem Äquator

Unter der Annahme, dass Perigäum (bzw. Apogäum) über dem Äquator liegen $\left(\sin\bar{\omega}_0 = 0\right)$, verschwinden die Parameter $A_1 = A_3 = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die Berechnung[1] des Argumentes der Breite für mögliche Umkehrpunkte aus (26.125)

$$\sin u = \pm\sqrt{\frac{2\,A_0}{-A_2 - \mathrm{sgn}\left(A_2\right)\sqrt{A_2^2 - 4\,A_4\,A_0}}} \quad . \tag{26.128}$$

Die Existenz reeller Umkehrpunkte setzt als erstes die Bedingung für die innere Wurzel

$$A_2^2 \geq 4\,A_4\,A_0 \tag{26.129}$$

voraus, außerdem dass auch unter der äußeren Wurzel keine negative Zahl steht.

Dieser Fall spielt in der Praxis der Astronautik eine wichtige Rolle im Fall von Transferbahnen eines Kommunikationssatelliten in eine geostationäre Bahn. Da die geostationäre Position im Äquator liegt, ist es sinnvoll, auch für eine optimale Transferbahn Perigäum und Apogäum über dem Äquator zu wählen.

Die geographische Position der Umkehrpunkte kann auch in diesem Fall mit den Transformationsformeln (26.102) auf Seite 345 berechnet werden, sofern die geographische Länge des ersten aufsteigenden Knotens nach Einschuss des Satelliten in die Transferbahn aus den Anfangsbahnelementen vorgegeben ist.

BEISPIEL: Der erste europäische Kommunikationssatellit SYMPHONIE-A hat die mittleren Bahnparameter $\bar{a}_0 = 25646.172\,\mathrm{km}$, $\bar{e}_0 = 0.73578634$, $\bar{i}_0 = 13°.27$, $\bar{\Omega}_0 = 314°.8397166$, $\bar{\omega}_0 \approx 180°$, $\overline{M_{0\,0}} = 4°.11$, Epoche: 1974-12-19/03:12:0.0 (UTC)[2].

Die Hilfsgrößen (26.126) haben die Werte:

$B_0 = 0.0004817304865$, $B_1 = -0.0001480093433$, $B_2 = 0.0002569578724$, $B_3 = 0.0$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung (26.125) lauten:

$A_4 = 6.602734819*10^{(-8)}$, $A_3 = 0.0$, $A_2 = 1.584184518*10^{(-7)}$, $A_1 = 0.0$,

$A_0 = -5.41645772*10^{(-8)}$.

Damit ist Bedingung (26.129) erfüllt: $A_2^2 - 4\,A_4\,A_0 = 3.940177946*10^{(-14)} > 0$ und das Argument der Breite für die Umkehrpunkte kann aus (26.128) berechnet werden. Es ergeben sich folgende Zahlenwerte (die Berechnung wurde mit Berücksichtigung der periodischen Störungen durchgeführt):

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
326.569817	327°.278911	118°.347343	-7°.220125	-7°.230166
33°.430183	32°.721089	73°.898473	7°.308719	7°.318878

[1] Auflösung der quadratischen Gleichung hier nach PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986], p. 145

[2] Siehe etwa Beispiel 5 in Abschnitt 22.4.4 auf Seite 45

146°.569817	147°.278911	307°.775153	-7°.159090	-7°.169049
213.430183	212.721089	263°.326714	7°.369473	7°.379714

Das Beispiel zeigt eine Bahn bei der sich ein Satellit unterschiedlich beim Äquatorüberflug verhält: rückläufig im aufsteigenden Knoten, rechtläufig im absteigenden Knoten.

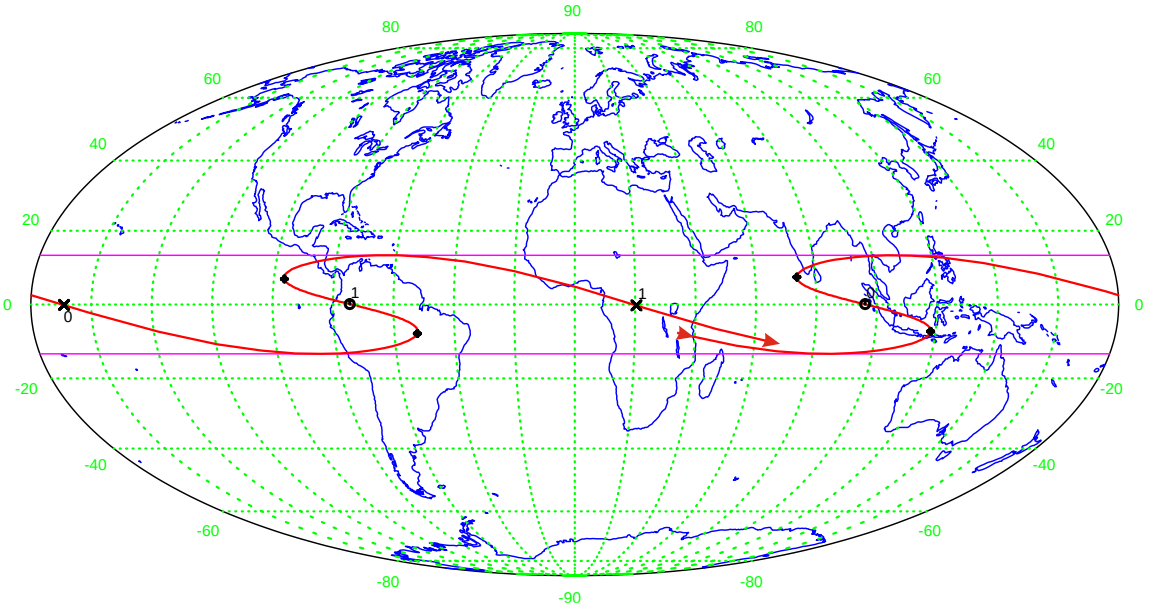


Bild 26-19: Scheinbare Bewegung einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel der ersten beiden Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Apsiden und die Umkehrpunkte sind markiert

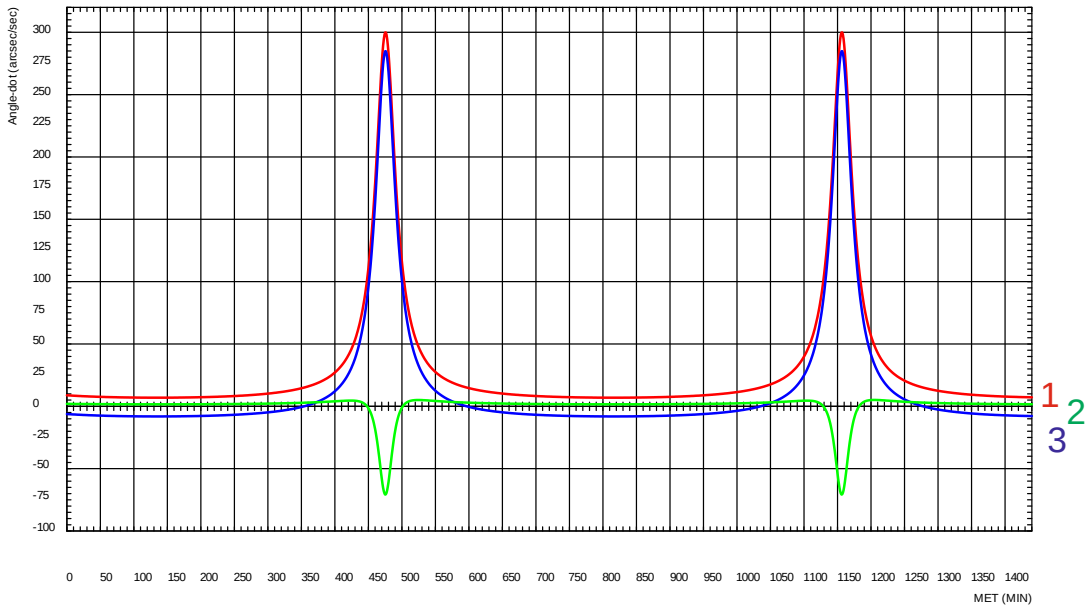


Bild 26-20: Das Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel zweier Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Variation der Rektaszension $\dot{\alpha}$ (Kurve 1, rot), der Deklination $\dot{\delta}$ (Kurve 2, grün), der geographischen Länge $\dot{\lambda}$ (Kurve 3, blau)

Das Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Bahn bezüglich der Erdoberfläche kann mit Hilfe des Verlaufs der Variationen der geographischen Länge und der geodätischen Breite, bzw. der Deklination, untersucht werden. Bild 26-20 zeigt den Verlauf der Variation der Rektaszension $\dot{\alpha}$, der geographischen Länge $\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta}$ und der Deklination $\dot{\delta}$ der Transferbahn des Satelliten SYMPHONIE-A über zwei Umläufe, d.h. über einen ganzen Tag. Klar zu erkennen sind die Bewegungsspitzen beim Durchlaufen des Perigäums, wie auch dem Bahnverlauf in Bild 26-19 zugeordnet werden kann. In der Nähe des Apogäums ist eine Veränderung der Variationen extrem gering, was sich auf eine sehr langsame Änderung der scheinbaren Satellitenposition auswirkt. Die Variationen von Rektaszension und geographischer Länge unterscheiden sich nur um den konstanten Betrag der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$.

Während aber die Rektaszension stets rechtläufig verläuft, wird die Variation der geographischen Länge in der Umgebung des Apogäums unter die Null-Linie gedrückt, d.h. die Bewegung erfolgt scheinbar rückläufig, nur in der Umgebung des Perigäums kurzfristig extrem rasch rechtläufig. Entsprechend verläuft die Kurve für die Variation der Deklination nur kurzzeitig in negativer Richtung, wenn die Kurve das Perigäum durchläuft, nimmt danach an Betrag ab und wird weitgehend konstant im positiven Bereich. Der Verlauf der Kurve über der Zeit zeigt, dass die scheinbare Position des Satelliten in der Umgebung des Apogäums nahezu unverändert bzw. sich nur sehr gering verändert.

Die scheinbare Darstellung dieser Transferbahn gesehen von einer Beobachtungsstation aus, wird im Beispiel in Abschnitt 27.4 ab Seite 369 behandelt. ◀

BEISPIEL 2: Das scheinbare Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Erdsatellitenbahn kann für gezielte Beobachtungen oder für Zwecke einer gesicherten Kommunikation genutzt werden. Ein Beispiel sind die *Molnija* Bahnen mit einer drakonitischen Umlaufzeit von 12 Stunden (siehe Bild 23-24 und Bild 23-25 auf Seite 181).

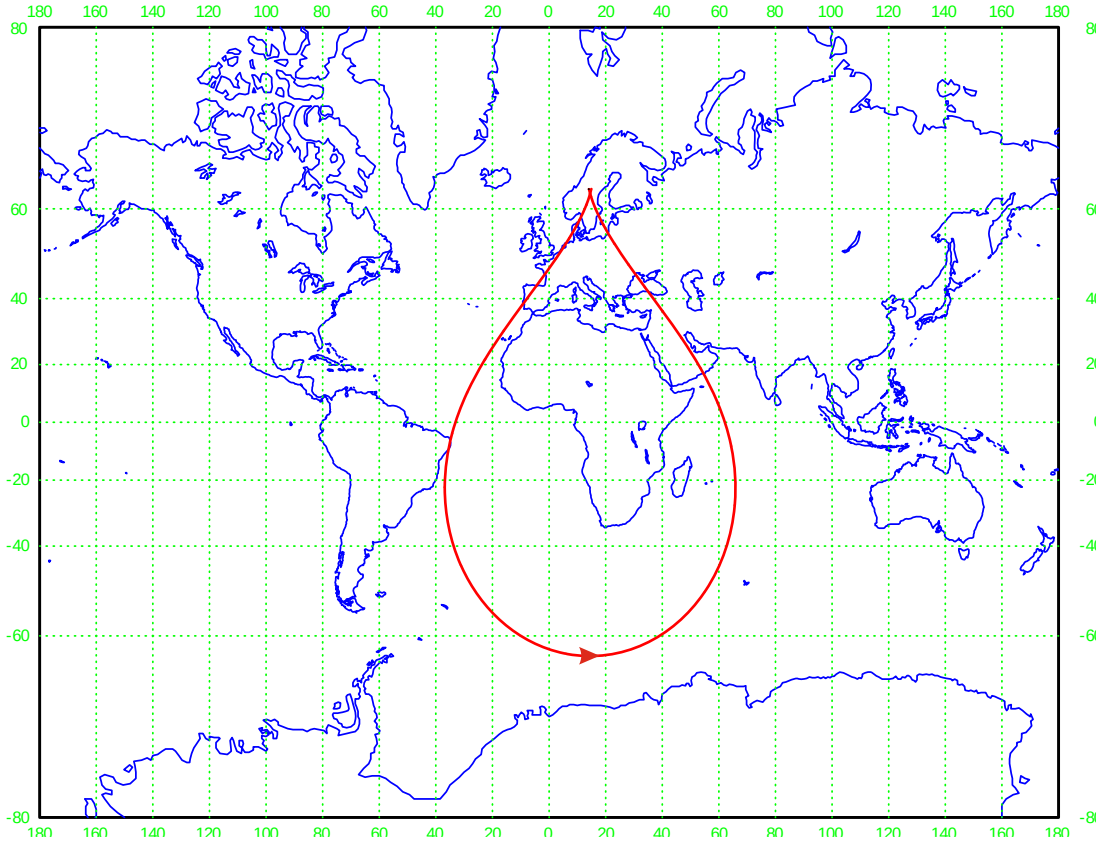


Bild 26-21: Das scheinbare Bewegungsverhalten einer *Tundra* Bahn über einen drakonitischen Umlauf

Ein vergleichbares weiteres Beispiel sind die *Tundra* Bahnen, die wie die *Molnija* Bahnen als Bahnneigung die kritische Inklination haben und somit keine säkulare Drift des Perigäums aufweisen, jedoch die drakonitische Umlaufzeit 24 Stunden haben sollen. Bild 26-21 zeigt eine *Tundra* Bahn, die mit der Exzentrizität e = 0.4239 und der kritischen Inklination i = 63°.4349488 ausgelegt ist (vgl. Abschnitt 22.8.1 auf Seite 77). Entsprechend der Herleitung in Abschnitt 23.3.5.1 (auf Seite 157) ergibt sich notwendig die große Bahnhalbachse a = 42240.815 km. Die a posteriori Genauigkeit ist besser als $\Delta t = 0.001\text{sec}$. Das Perigäum habe den Wert ω = 270°, der Einschuss erfolge über dem geographischen Ort λ = 15°, φ = 63°.4349488, also genau über der nördlichen Wende. Zur Epoche 1998-01 01/00:00:00.00 ergeben sich die Bahnparameter Ω = 22°.08924835, M_0 = 183°.35653632. In der nördlichen Wende zeigt sich eine verschwindende Schleife, die zu einer Spitze schrumpft. Die Apogäumshöhe in diesem Punkt beträgt H_A = 53730.543 km, die Perigäumshöhe über der südlichen Wende H_P = 17994.814 km. Die drakonitische Umlaufzeit stimmt mit der anomalistischen Umlaufzeit in der obigen Genauigkeit überein. Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit beträgt P_H = 86402.120 sec, die tropische Umlaufzeit P_t = 86402.122 sec. ◄

26.8.3 Bahnen mit scheinbaren Überflugwinkeln

Eine weitere Vertiefung der Untersuchung des scheinbaren Bewegungsverhaltens von beliebigen Satellitenbahnen findet in Abschnitt 33.2.6 (Band V) statt: Hier wird untersucht, welche Bahnen gefunden werden können, für die der scheinbare Überflugwinkel über einem sphärischen Breitenkreis vorgegeben wird. Hier können Bahnen mit scheinbar stationären Punkten, scheinbare Schleifenbahnen, Bahnen mit scheinbarem Stillstand u. ä. auch für beliebige elliptische Bahnen gefunden werden.

27 Topozentrische Bewegung

Die Untersuchung der Bewegung eines Satelliten bei Bezug auf ein erdfestes Topozentrum ist eine Erweiterung und Verallgemeinerung der im vorhergehenden Kapitel 26 behandelten Meridian-bezogenen Bewegung. Überschneidungen der Darstellungen in diesem Kapitel mit denen des vorhergehenden sind unvermeidlich. Die hier benötigten relativen Bewegungsdaten können zu jedem Zeitpunkt aus einer Ephemeridenrechnung berechnet werden. Damit ist es möglich eine auf die feste Erdoberfläche und damit auf jeden beliebigen Punkt auf der Oberfläche bezogene Satellitenbewegung zu charakterisieren.

Im vorliegenden Kapitel werden die benötigten Formelsysteme auf der Basis der in Kapitel 8 (Band II) zusammengestellten Koordinatensysteme entwickelt. Dies führt zu einer verallgemeinerten Darstellung der scheinbaren Satellitenbewegung, insbesondere zu einer vertieften Betrachtung der geostationären Bewegung.

Die Darstellung der topozentrischen Bewegung wird erweitert und ergänzt mit der Entwicklung von Formeln der Beobachtungsgeometrie in Band V, insbesondere Kapitel 35 und 36. Der Fall, dass das betrachtete Topozentrum auf einem Satelliten liegt, von dem aus ein anderer Satellit beobachtet werden soll, wird im Zusammenhang mit der synodischen Bewegung zweier Satelliten in Kapitel 31 untersucht.

27.1 Topozentrische Koordinaten

Die Bewegung eines Erdsatelliten wird auf den Erdmittelpunkt bezogen. Um von diesem auf ein Topozentrum („Bodenstation“) schließen zu können, muss ein erdfestes System verwendet werden. Es ist naheliegend dazu das geozentrische Greenwich-System $\mathbf{q}_j^{(G)}\left[\,j=1,2,3\right]$ als Basissystem zu verwenden[1]. Seine $\mathbf{q}_1^{(G)}$-Achse weist zum Schnittpunkt des Meridians durch Greenwich mit dem Erdäquator, die $\mathbf{q}_3^{(G)}$-Achse zum Nordpol, die Achse $\mathbf{q}_2^{(G)}=\mathbf{q}_3^{(G)}\times\mathbf{q}_1^{(G)}$ liegt in der Äquatorebene und ergänzt das System zu einem orthonormierten Rechtssystem.

Ein Topozentrum auf der Erdoberfläche, die durch ein Rotationsellipsoid angenähert werden möge, hat in diesem System die geographische Länge λ_B und die geographische Breite φ_B. Bei Bezug auf das Rotationsellipsoid mit der Abplattung f entspricht der geographischen Breite φ_B die geozentrische Deklination δ_B aus[2]

$$\tan\delta_B=\left(1-f\right)^2\tan\varphi_B$$

$$\sin\delta_B=\frac{\left(1-f\right)^2\sin\varphi_B}{\sqrt{\cos^2\varphi_B+\left(1-f\right)^4\sin\varphi_B}}\quad,\quad\cos\delta_B=\frac{\cos\varphi_B}{\sqrt{\cos^2\varphi_B+\left(1-f\right)^4\sin\varphi_B}}\quad. \tag{27.1}$$

Mit dem mittleren Äquatorradius R_E des Referenzellipsoids[3] hat das Topozentrum den geozentrischen Radius[1]

---

[1] im Detail zusammengestellt in Abschnitt 8.5 (Band II)

[2] etwa nach Formeln (37.36) und (37.42), Kapitel 37 (Band V)

[3] z.B. im WGS84 System

$$R_B = R_E \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^4 \sin^2 \varphi_B}{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_B}} \quad . \tag{27.2}$$

Der entsprechende Ortsvektor lautet[2]

$$\mathbf{R}_B = y_B^{(G)j}\, \mathbf{q}_j^{(G)} := R_B \left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\delta_B \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\delta_B \sin\lambda_B + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\delta_B \right] \quad . \tag{27.3}$$

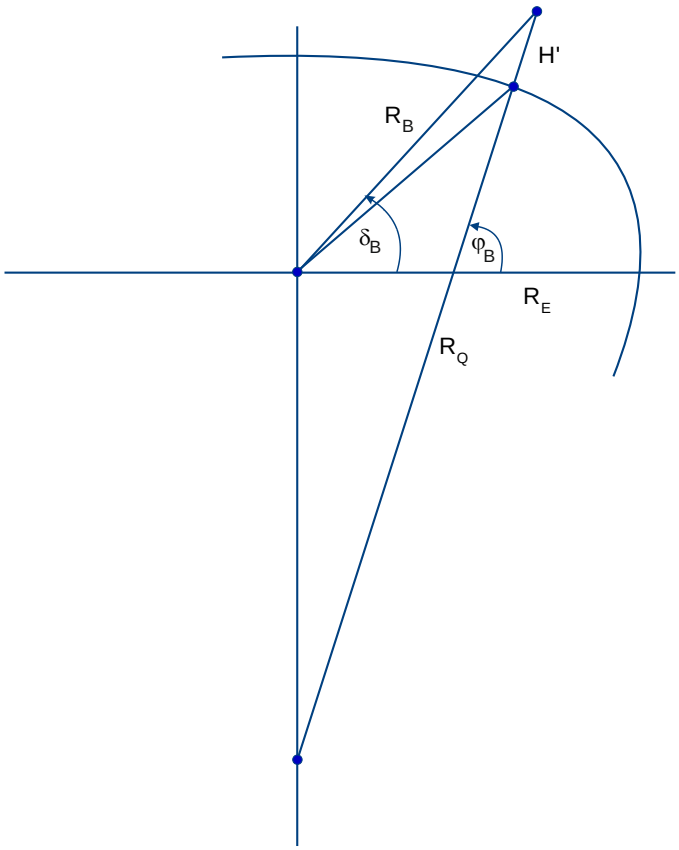


Bild 27-1: Beziehungen im geographischen System[3] (φ_B – geodätische Breite des Topozentrums, δ_B – Deklination des Topozentrums, R_B – geozentrische Distanz des Beobachters, R_Q – Querkrümmungsradius, H' – Höhe des Beobachters über dem Referenzellipsoid)

Der Ort des Satelliten sei zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* im geozentrischen Frühlingspunkt-orientierten Koordinatensystem aus einer Ephemeridenrechnung durch die Polarkoordinaten $r(\alpha,\delta)$ bekannt. Diese sind auf das Frühlingspunkt bezogene $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem[4] bezogen. In diesem System hat mit dem Querkrümmungsradius

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_B}} \tag{27.4}$$

und der lokalen Sternzeit

---

[1] Formel (8.193) bzw. (37.54)

[2] vgl. auch Formel (8.266)

[3] Kopie von Bild 8-9 (Band II)

[4] Abschnitt 8.1 (Band II)

$$\Theta_B = \Theta_G + \lambda_B \tag{27.5}$$

der Beobachtungsort den geozentrischen Ortsvektor

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_B = {} & \mathbf{p}_1\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi_B \cos\Theta_B + \\ & + \mathbf{p}_2\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi_B \sin\Theta_B + \\ & + \mathbf{p}_3\left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\sin\varphi_B \quad .\end{aligned} \tag{27.6}$$

Mit der zum Beobachtungszeitpunkt geltenden Sternzeit Θ_G in Greenwich[1] hat der Satellit die geographische Länge

$$\lambda = \alpha - \Theta_G \quad . \tag{27.7}$$

Im Greenwich System beträgt seine Ortskoordinate

$$\mathbf{r} = y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} := r\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta\sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta\right] \quad . \tag{27.8}$$

Der topozentrische Ortsvektor lautet

$$\mathbf{r}_T := \mathbf{r} - \mathbf{R}_B = \rho\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta_T\cos\lambda_T + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta_T\sin\lambda_T + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta_T\right] \quad . \tag{27.9}$$

Hier sind $\rho = \left|\mathbf{r}_T\right|$ die topozentrische Schrägentfernung, $\left(\lambda_T, \delta_T\right)$ die topozentrische geographische Länge bzw. Deklination des Satelliten. Diese werden berechnet aus

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_B + R_B^2} \tag{27.10}$$

$$\begin{aligned}\rho\cos\lambda_T\cos\delta_T &= r\,\cos\lambda\cos\delta\; - R_B\,\cos\lambda_B\cos\delta_B \\ \rho\sin\lambda_T\cos\delta_T &= r\sin\lambda_T\cos\delta_T - R_B\,\sin\lambda_B\cos\delta_B \\ \rho\sin\delta_T &= r\,\sin\delta\qquad\quad - R_B\,\sin\delta_B \quad .\end{aligned} \tag{27.11}$$

Der Kontakt von einem Topozentrum zu einem Satelliten wird durch den lokalen Horizont limitiert. Um diesen berechnen zu können, wird der topozentrische Ortsvektor in horizontalen Koordinaten benötigt[2]. Die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(H)}$ des Horizontsystems werden auf das Greenwich-System zurückgeführt durch

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3^{(H)} &= \;\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda_B\cos\varphi_B + \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda_B\cos\varphi_B + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\varphi_B \\ \mathbf{q}_2^{(H)} &= -\mathbf{q}_1^{(G)}\sin\lambda_B \qquad\quad + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\lambda_B \\ \mathbf{q}_1^{(H)} &= -\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda_B\sin\varphi_B - \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda_B\sin\varphi_B + \mathbf{q}_3^{(G)}\cos\varphi_B = \mathbf{q}_3^{(H)}\times\mathbf{q}_2^{(H)} \quad .\end{aligned} \tag{27.12}$$

Der Satellit hat im Horizontsystem die Polarkoordinaten $\rho\left(A,h\right)$ mit Azimut *A* und Elevation („Höhe“) *h*. Die Winkelkoordinaten des Satelliten im Horizontsystem können aus den topozentrischen Greenwich-bezogenen Winkelkoordinaten berechnet werden[3]

---

[1] siehe in Abschnitt 8.4.2, Formeln (8.129) – (8.133), sowie Abschnitt 9.1.2 (Band II)

[2] aus Abschnitt 8.9 (Band II)

[3] System (8.280)

$$\begin{aligned}\cos A\cos h &= -\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\sin\varphi_B+\sin\delta_T\cos\varphi_B\\ \sin A\cos h &= -\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\\ \sin h &= \cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\cos\varphi_B+\sin\delta_T\sin\varphi_B\quad .\end{aligned}\tag{27.13}$$

Der topozentrische Ortsvektor lautet im Horizontsystem[1]

$$\mathbf{r}_T=\rho\left[\mathbf{q}_1^{(H)}\cos h\cos A+\mathbf{q}_2^{(H)}\cos h\sin A+\mathbf{q}_3^{(H)}\sin h\right]\quad .\tag{27.14}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Greenwich-Systems ist hier dem relativen Eigenbewegungsvektor bei Bezug auf ein inertiales Fundamentalsystem $\left(\dot{\mathbf{p}}_i\equiv 0\right)$ gleich:

$$\mathbf{D}_{q^{(G)}p}\;=\;\dot{\Theta}_G\,\mathbf{q}_3^{(G)}\qquad .\tag{27.15}$$

In diesem Fall lautet der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Topozentrums

$$\dot{\mathbf{R}}_B\;\approx\;\mathbf{D}_{q^{(G)}p}\times\mathbf{R}_B\;=\;\dot{\Theta}\left(-y_2^{(G)}\,\mathbf{q}_1^{(G)}+y_1^{(G)}\,\mathbf{q}_2^{(G)}\right)\quad .\tag{27.16}$$

27.2 Bahnabschätzung aus topozentrischer Bewegung

Ein sehr einfaches aber auch effizientes Beispiel für die Nutzung der topozentrischen Bewegungsdarstellung ist bei großen Einschussdispersionen die im Wesentlichen allein mögliche Erstbahnabschätzung. Dazu ist folgende Problemstellung vorgegeben: Ein Satellit wird mit einer Rakete gestartet, die (weil Feststoffrakete) eine sehr große Einschussungenauigkeit aufweist. Diese Ungenauigkeit zeigt sich in erster Linie in einer großen Variation der Perigäumshöhe und vor allem der Apogäumshöhe, während die anderen Bahnparameter (Inklination, Knoten, Argument des Perizentrums, Mittlere Anomalie) geringer beeinflusst werden. Auch wenn Trackingdaten (Radarbeobachtungen) nach dem Einschuss vorliegen, kann wegen der üblicherweise großen Unsicherheit (Rauschen) dieser Beobachtungen keine zuverlässige (bzw. überhaupt konvergierende) Bahnbestimmung durchgeführt werden. Die erste Beobachtungsstation am Boden werde einige Zeit nach Einschuss überflogen, so dass erst dann die Qualität des Einschusses überprüft werden kann. Hierzu können zunächst nur Winkeldaten (Azimut, Elevation) ausgewertet werden. Mit diesen Daten ist es nämlich möglich, eine erste zuverlässige Bahnbestimmung (Apogäums- und Perigäumshöhe bzw. große Bahnhalbachse und Exzentrizität) aus einer graphischen Darstellung zu erhalten, welche die Einschussdispersionen berücksichtigt. Dazu wird der wahre topozentrische Bahnverlauf verglichen mit den gezeichneten Kurven und den entsprechenden Bahnparametern zugeordnet.

BEISPIEL: Die japanische Rakete M3-SII hat folgende 3σ-Dispersionen:

Apogäumshöhe	$H_A\in[-140\text{ km}, +160\text{ km}]$
Perigäumshöhe	$H_P\in[-20\text{ km}, +5\text{ km}]$
Inklination	$i\in[\pm 0°.2]$

Es soll folgende Bahn erreicht werden:

[1] Formel (8.278)

Nominalbahn (2)	H_A = 398.930 km, H_P = 209.912 km

Ferner sollen folgende Nominalbahnelemente gelten:

Inklination	i = 31°.072
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω = 31°.072
Argument des Perigäums	ω = 31°.072
Mittlere Anomalie	M_0 = 31°.072
Epoche	t_0 : 1995, Jan, 15/13^h : 53^{m}0^s.0 :
Startgelände	Kagoshima (Japan)

Mit den möglichen Einschussdispersionen ergeben sich folgende extremale Bahnen:

Niedrige Bahn (1)	H_A = 258.930 km, H_P = 289.962 km
Hohe Bahn (3)	H_A = 558.934 km, H_P = 214.965 km

Die erste Bodenstation, die nach Einschuss des Satelliten in seine Bahn überflogen wird, liegt in Santiago de Chile (λ = 70°.669 West, φ = –33°.149, H = 681 m). Die topozentrische Beobachtung von dieser Station aus ist für die drei ausgewählten Bahnen in Bild 27-2 für den Verlauf der Elevation über der Zeit und in Bild 27-3 für den Verlauf der Elevation über dem Azimut aufgetragen. Wird die wahre Bahn von Santiago aus beobachtet (wobei in Ermangelung einer geeigneten Ephemeride zur Nachführung der Antenne mit Skintracking, also mit automatischer Nachführung beobachtet werden muss), können aus diesen Kurven mit einer gewissen Zuverlässigkeit die wahren Bahnparameter (Apogäumshöhe, Perigäumshöhe) abgeschätzt werden. Diese Parameter werden dann für eine folgende Bahnbestimmung als Ausgangsschätzparameter verwendet.

Bild 27-3 zeigt darüber hinaus, dass die Antenne in eine Richtung von etwa A = 282° am Horizont eingestellt werden muss, um den Satelliten bei seinem Aufgang auch aufnehmen zu können, wenn die Halbwertsbreite der Antenne genügend groß (etwa 2°) ist. Oder aber bei kleinerer Halbwertsbreite muss den Horizont entlang mit abnehmendem Azimut und in zeitlich wohldefinierter Weise gesucht werden, wodurch das Auffinden des Satelliten gesichert werden kann. Voraussetzung ist nur, dass die erwarteten Einschussgenauigkeiten auch eingehalten werden. Diese sind im vorliegenden Fall allerdings ohnehin sehr großzügig angenommen.

Die gezeichneten Bahnkurven wurden mit der mittleren Inklination i= 31°.072 gerechnet. Wird auch die Einschussgenauigkeit in der Inklination $\Delta i = \pm 0°.2$ berücksichtigt, werden die drei Kurven jeweils etwas verbreitert. An der wesentlichen Struktur der topozentrischen Bewegung wird jedoch nichts geändert. Die wahre Inklination kann also aus den Kurven nicht abgelesen werden, sondern muss mit dem nominalen Wert als Ausgangsschätzung dann im Bahnbestimmungsvorgang mit geschätzt werden. Das Beispiel zeigt, dass in diesem Fall der Plot Elevation über der Zeit (Bild 27-2) geeigneter ist, um eine zuverlässige Qualifizierung der Einschussgenauigkeit zu erlauben. ◄

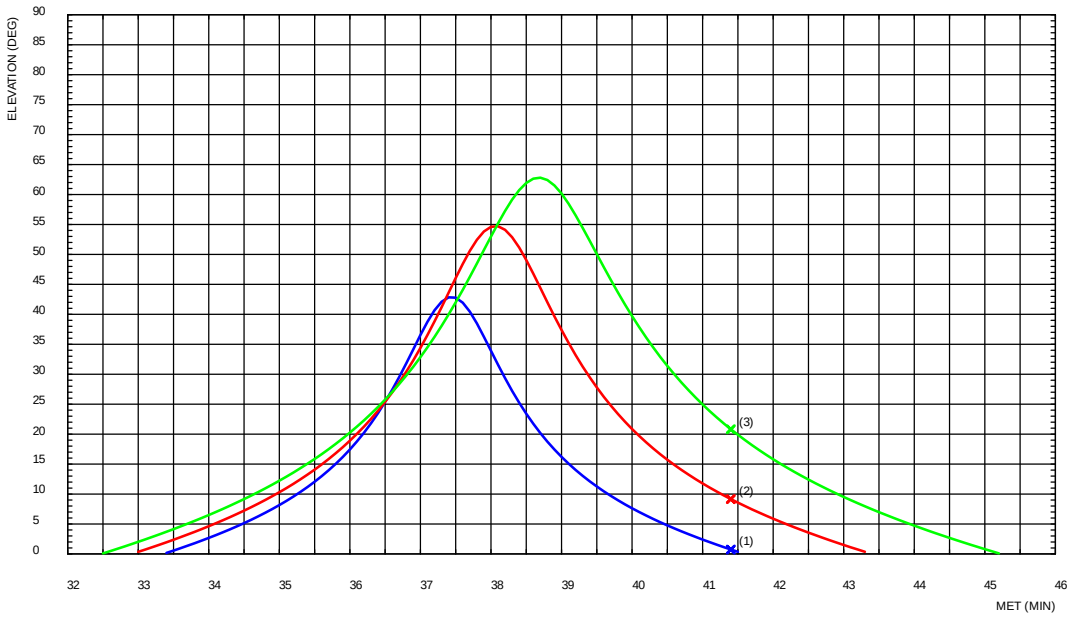


Bild 27-2: Verlauf der Elevation dreier Satelliten über der Zeit, Beurteilung einer Einschussdispersion

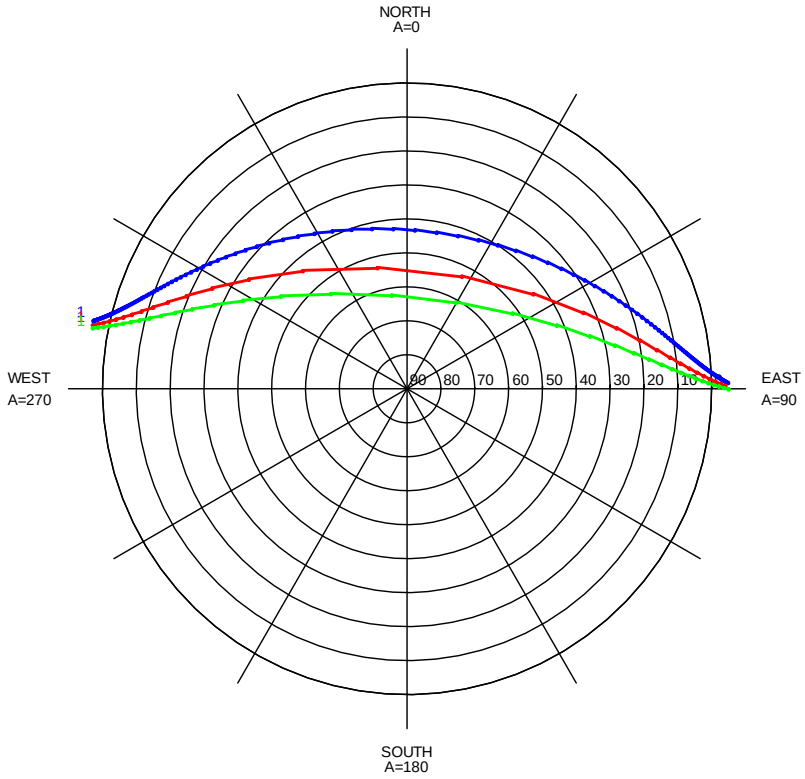


Bild 27-3: Sichtwinkelplot zur Beurteilung der Einschussgenauigkeit eines Satelliten unter Berücksichtigung der nominalen Einschussdispersion: mittlere Kurve (rot) Nominalbahn, obere Kurve (blau): Bahn zu tief, untere Kurve (grün): Bahn zu hoch[1].

[11] Dieses Beispiel ist auch im Zusammenhang mit der Beschreibung der Sichtwinkelplots in Abschnitt 36.2.1 (BEISPIEL 36.3) aufgenommen

27.3 Topozentrische Bewegungsgrößen

Um das topozentrische Bewegungsverhalten eines Erdsatelliten untersuchen zu können, werden zu jedem Zeitpunkt *t* die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren benötigt. Im vorliegenden Abschnitt werden die benötigten Formeln nach Abschnitt 8.6.1 (Band II) zitiert.

Das Bewegungsverhalten des Greenwich-Systems wird wesentlich durch die Erdrotation mit der tropischen Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ geprägt. Bezogen auf eine Epoche t_0 lautet die mittlere Sternzeit zu einem Zeitpunkt *t*

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\left(t - t_0\right) \quad . \tag{27.17}$$

Die tropische Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ ist selber zeitabhängig[1], was aber im Zusammenhang mit Untersuchungen der Satellitenbewegung vernachlässigt werden kann.

Das Topozentrum, auf das die Bewegung eines Satelliten bezogen werden soll, ist nicht notwendig auf einen festen Punkt auf dem Rotationsellipsoid bezogen. Werde angenommen, dass das Topozentrum die Höhe H' über dem Erdellipsoid habe und seien $\left(R_B, \lambda_B, \varphi_B\right)$ die geodätischen Koordinaten des Topozentrums, errechnet sich die Höhe aus[2]

$$H' = R_B\,(\cos\varphi_B \cos\delta_B + \sin\varphi_B \sin\delta_B) - R_E \sqrt{1 - \left[1 - (1-f)^2\right] \sin^2\varphi_B} \quad . \tag{27.18}$$

Die Basisvektoren des Greenwich-Systems haben die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_j^{(G)}$, die bei Bezug auf ein äquatoriales Bezugssystem nach Formel (8.159) berechnet werden können. Wird das Bezugssystem als ein Fundamentalsystem aufgefasst (was im Rahmen einer Satellitenbahnmechanik häufig stillschweigend angenommen wird[3]), ist

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} = \dot{\Theta}\,\mathbf{q}_2^{(G)} \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} = -\dot{\Theta}\,\mathbf{q}_1^{(G)} \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} = 0 \quad \langle \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0, \quad i = 1,2,3 \quad . \tag{27.19}$$

Hier wird auch der „Querkrümmungsradius“ benötigt[4]

$$R_Q = R_B \frac{\cos\delta_B}{\cos\varphi_B} - H' \qquad (\cos\varphi_B \neq 0) \quad . \tag{27.20}$$

Unter der Annahme, dass das Topozentrum selbst bewegt ist (Auto, Flugzeug, Ballon, usw.) mit den eigenen Bewegungen $\left(\dot{H}', \dot{\lambda}_B, \dot{\varphi}_B\right)$, und zusätzlichen Änderungen des Erdellipsoids $\left(\dot{R}_E, \dot{f}\right)$ errechnet sich die Variation des Querkrümmungsradius aus

$$\dot{R}_Q\, R_Q \;=\; \frac{R_E}{\left[1 - (1-f)^2\right] \sin^2\varphi} \left[\dot{R}_E - \frac{\dot{f}\, R_E\,(1-f)}{1-(1-f)^2} - \frac{\dot{\varphi}\, R_E \cos\varphi}{\sin\varphi} \right] \quad . \tag{27.21}$$

Für die Hilfsgröße e_f gilt

$$e_f^2 \;=:\; 1 - (1-f)^2 \quad , \quad \dot{e}_f\, e_f \;=\; \dot{f}\,(1-f) \quad . \tag{27.22}$$

---

[1] siehe die exakte Formel in (8.133), sowie in Abschnitt 9.1.2.1 mit den Zahlenwerten in verschiedenen Einheiten in Tabelle 9-2

[2] Formel (8.191)

[3] Kann das Frühlingspunkt-bezogene Basissystem nicht als fundamental angenommen werden, hat es also eine nicht vernachlässigbare Eigenbewegung, müssen die Formeln (8.159) (Band II) verwendet werden

[4] Die Herleitung findet sich in Abschnitt 37.2.12 (Band V)

Der geozentrische Ortsvektor des Topozentrums hat unter diesen allgemeingültigen Annahmen den Geschwindigkeitsvektor[1]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_B &= \left(R_Q + H'\right) \quad \cos\varphi_B \left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} \left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right] \sin\varphi_B + \\ &+ \dot{R}_Q \left[\cos\varphi_B \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \mathbf{q}_3^{(G)}\,(1-f)^2 \sin\varphi_B\right] + \\ &+ \dot{H}' \left[\cos\varphi_B \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi_B\right] - \\ &- \dot{f}\;\; 2\,\mathbf{q}_3^{(G)}\, R_Q\,(1-f) \sin\varphi_B + \\ &+ \dot{\lambda}\;\; \left(R_Q + H'\right) \cos\varphi_B \left[-\mathbf{q}_1^{(G)} \sin\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\lambda_B\right] + \\ &+ \dot{\varphi}\;\; \left\{-\left(R_Q + H'\right) \sin\varphi_B \left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right] + \right. \\ &\qquad \left. + \mathbf{q}_3^{(G)} \left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right] \cos\varphi_B\right\} \quad .\end{aligned} \tag{27.23}$$

Die Variation des geozentrischen Radius des Topozentrums lautet[2]

$$\begin{aligned}\dot{R}_B &= \left[\left(\dot{R}_Q + \dot{H}'\right)\cos\varphi_B - \dot{\varphi}_B \left(R_Q + H'\right)\sin\varphi_B\right] \cos\delta_B + \\ &+ \left\{\left[\dot{R}_Q\,(1-f)^2 - 2\,\dot{f}\,(1-f)\,R_Q + \dot{H}'\right]\sin\varphi_B + \dot{\varphi}_B \left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right]\cos\varphi_B\right\} \sin\delta_B \quad .\end{aligned} \tag{27.24}$$

Die Variation der Deklination des Topozentrums wird erhalten aus

$$\begin{aligned}&\dot{\delta}_B\; R_B \cos(\varphi_B - \delta_B)\sqrt{1-e_f^2 \sin^2\varphi_B} \;\; = \\ &= \dot{\varphi}_B \;\; \left\{R_B \cos(\varphi_B - \delta_B)\sqrt{1-e_f^2 \sin^2\varphi_B} - \frac{e_f^2\, R_B \sin(\varphi_B - \delta_B)\sin 2\varphi_B}{\sqrt{1-e_f^2 \sin^2\varphi_B}} - e_f^2\, R_E \cos 2\varphi_B\right\} + \\ &+ \dot{R}_B \sin(\varphi_B - \delta_B)\sqrt{1-e_f^2 \sin^2\varphi_B} - \dot{R}_E \quad \frac{e_f^2}{2} \sin 2\varphi_B - \\ &- \dot{e}_f \;\; e_f \left[\frac{\sin^2\varphi_B}{\sqrt{1-e_f^2 \sin^2\varphi_B}} + R_E \sin 2\varphi_B\right] \quad .\end{aligned} \tag{27.25}$$

Die Variation $\dot{\lambda}_B$ der geographischen Länge des Beobachters muss aus seiner Eigenbewegung als bekannt vorausgesetzt werden. Auch bei einem auf der Erdoberfläche feststehenden Beobachter (Antenne) kann es prinzipiell eine Eigenbewegung geben (etwa durch ein Erdbeben oder eine andere Verrückung der Position des Beobachters). Diese Eigenbewegungen können jedoch nicht mit allgemeingültigen Formelsystemen erfasst werden.

Der Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\right)$ des Satelliten sei aus einer Ephemeride bekannt. Der topozentrische Zustandsvektor lautet

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B \;\; , \;\; \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}_B \quad . \tag{27.26}$$

Die Schrägentfernung des Satelliten hat nach (27.10) bezogen auf die Eigenbewegung des Beobachters die Entfernungsänderung („range rate“)

---

[1] Formel (8.198) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

[2] Formeln (8.201) und (8.202)

$$\rho\,\dot{\rho} = r\,\dot{r} + R_B\,\dot{R}_B - \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{R}_B - \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{R}}_B \quad . \tag{27.27}$$

Die Transformationsformeln (27.11) führen auf die Variationsgleichungen für die topozentrischen Winkelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\rho\,\dot{\lambda}_T\cos\delta_T &= \left[\dot{r}\sin\left(\lambda-\lambda_T\right)+r\,\dot{\lambda}\cos\left(\lambda-\lambda_T\right)\right]\cos\delta - r\,\dot{\delta}\sin\left(\lambda-\lambda_T\right)\sin\delta - \\
&\quad -\left[\dot{R}_B\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)+R_B\,\dot{\lambda}_B\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\right]\cos\delta_B + R_B\,\dot{\delta}_B\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\sin\delta_B \qquad (27.28)\\
\rho\,\dot{\delta}_T\sin\delta_T &= \dot{r}\sin\delta + r\,\dot{\delta}\cos\delta - \dot{R}_B\sin\delta_B + R_B\,\dot{\delta}_B\cos\delta_B - \dot{\rho}\sin\delta_T \quad .
\end{aligned}$$

Die Variationen der horizontalen Winkelkoordinaten (A,h) können aus den Transformationsformeln (27.13) erhalten werden:

$$\begin{aligned}
\dot{A}\cosh &= \left(\dot{\lambda}_B-\dot{\lambda}_T\right)\left[-\sin\varphi_B\sin A\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)-\cos A\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\right]\cos\delta_T + \\
&\quad +\dot{\delta}_T\left\{\left[-\sin\varphi_B\sin A\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)+\cos A\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\right]\sin\delta_T - \right. \\
&\quad \left. -\sin A\cos\delta_T\cos\varphi_B\right\} + \\
&\quad +\dot{\varphi}_B\left[\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\cos\varphi_B+\sin\delta_T\sin\varphi_B\right]
\end{aligned} \tag{27.29}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}\cosh &= -\left(\dot{\lambda}_B-\dot{\lambda}_T\right)\sin\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\cos\varphi_B - \\
&\quad -\dot{\delta}_T\left[\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\sin\delta_T\cos\varphi_B-\cos\delta_T\sin\varphi_B\right] - \\
&\quad -\dot{\varphi}_B\left[\cos\left(\lambda_B-\lambda_T\right)\cos\delta_T\sin\varphi_B-\sin\delta_T\cos\varphi_B\right] \quad .
\end{aligned} \tag{27.30}$$

In der Praxis können üblicherweise die kartesischen Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten im horizontalen System als Ergebnis einer Ephemeridenrechnung unter Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells unter Einschluss aller Systemvariationen erhalten werden[1]:

$$\mathbf{r}_T = y_T^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} \;,\; \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{y}_T^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} + y_T^{(H)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(H)} \tag{27.31}$$

$$y_{T1}^{(H)} = \rho\cos h\cos A,\; y_{T2}^{(H)} = \rho\cos h\sin A, y_{T3}^{(H)} = \rho\sin h \quad . \tag{27.32}$$

Die Variationen der horizontalen Winkelkoordinaten werden dann erhalten aus

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{y_T^{(H)i}\,\dot{y}_{Ti}^{(H)}}{\rho} \\
\dot{A} &= \frac{y_{T1}^{(H)}\,\dot{y}_{T2}^{(H)} - y_{T2}^{(H)}\,\dot{y}_{T1}^{(H)}}{\rho^2\cos^2 h} \quad , \quad \langle\!\langle \left|\rho\cos h\right| > 0, \rho > 0 \qquad (27.33)\\
\dot{h} &= \frac{1}{\rho^2}\left[-\left(y_{T3}^{(H)}\,\dot{y}_{T1}^{(H)} - y_{T1}^{(H)}\,\dot{y}_{T3}^{(H)}\right)\cos A + \left(y_{T2}^{(H)}\,\dot{y}_{T3}^{(H)} - y_{T3}^{(H)}\,\dot{y}_{T2}^{(H)}\right)\sin A\right] \quad .
\end{aligned}$$

27.4 Bewegung eines Satelliten gesehen von einem Topozentrum aus

Die klassische optische Beobachtung einer Satellitenbewegung mit Hilfe etwa einer Baker-Nunn-Kamera[1] ergibt den Verlauf einer Satellitenspur in Azimut *A* und Elevation („Höhe“) *h*.

[1] Sieh in Abschnitt 8.9.1m Formeln (8.258)-(8.264)

Doch bereits bei der Beobachtung der ersten Erdsatelliten wurden vornehmlich wetterunabhängige Radarbeobachtungen eingesetzt[2].

27.4.1 Darstellung einer topozentrischen Bewegung

Die topozentrische Beobachtung von Satellitenbahnen kann in Sichtwinkelplots veranschaulicht werden[3]. In Kreisen um den Zenit werden die Höhen (Elevationen) dargestellt, in Radien das Azimut. Durch Zeittaktung kann neben dem geometrischen Verlauf auch der Zeitbezug in die Veranschaulichung einbezogen werden.

Die topozentrische Bewegung eines Satelliten über einem Beobachter kann mit Hilfe der Ephemeride der Polarkoordinaten (A,h) verfolgt werden. Falls der Beobachter selbst relativ zur Erdoberfläche bewegt ist, ist statt eines Sichtwinkelplots die Darstellung der Sichtwinkel in einem Diagramm Elevation über dem Azimut und insbesondere Elevation über der Zeit sinnvoller bzw. im Hinblick auf eine Missionsanalyse übersichtlicher.

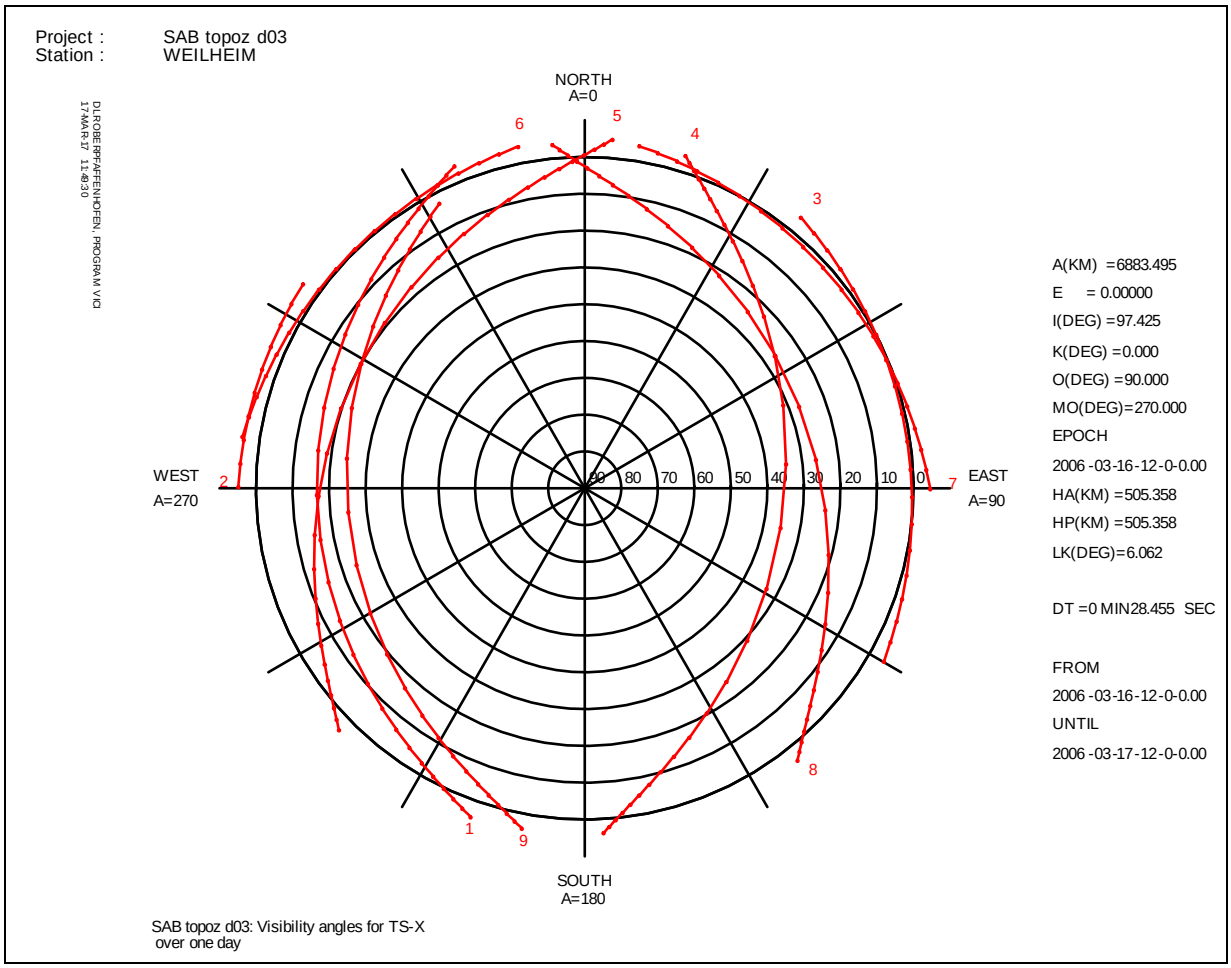


Bild 27-4: Sichtwinkelplot des Satelliten TerraSar-X gesehen von der Bodenstation in Weilheim aus über einen Tag. Die Sichtbarkeit beginnt mit der Elevation h=-10° ◀

---

[1] Etwa in R. H. Giese [1966], pp. 153-159

[2] Siehe hierzu etwa in Abschnitt 2.10.7 (Band I), insbesondere Tabelle 2-1

[3] Weitere Details zu den Sichtwinkelplots und Herleitung ihrer mathematische Formulierung siehe in Abschnitt 36.2 (Band V). Dort auch weitere Beispiele zur topozentrischen Beobachtung

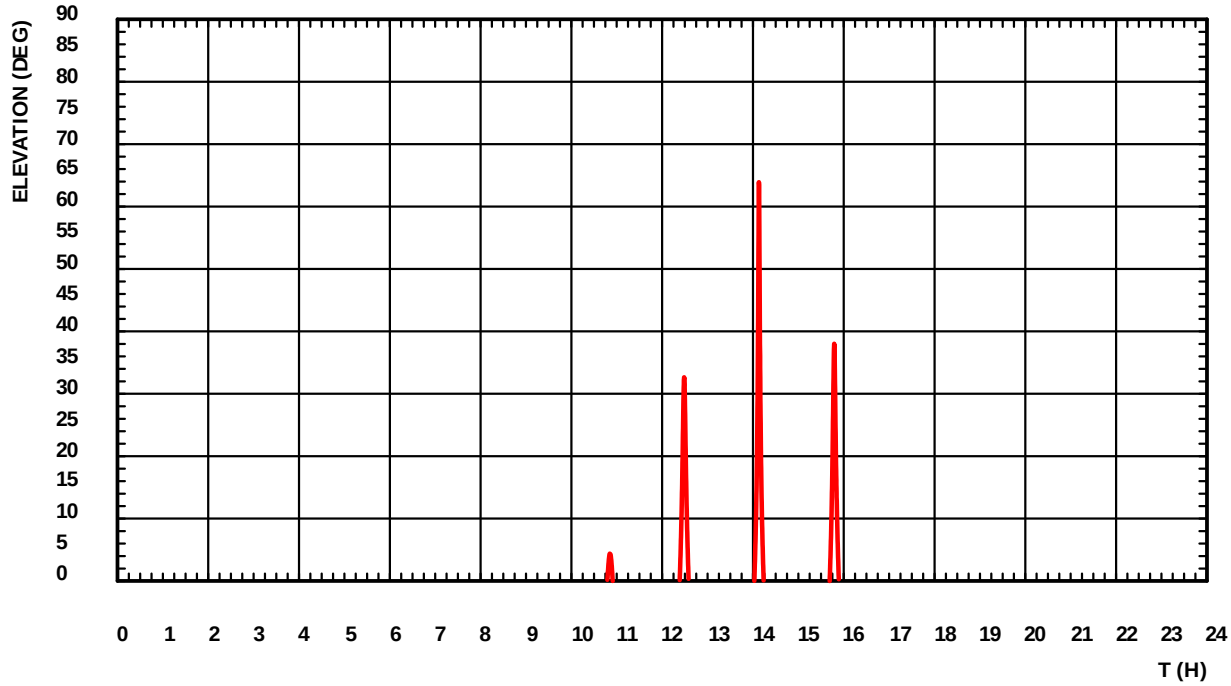


Bild 27-5: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) eines Satelliten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn (Höhe zwischen 527 km und 556 km, i = 53°) über einen Tag, beobachtet von der Bodenstation bei Weilheim ◀

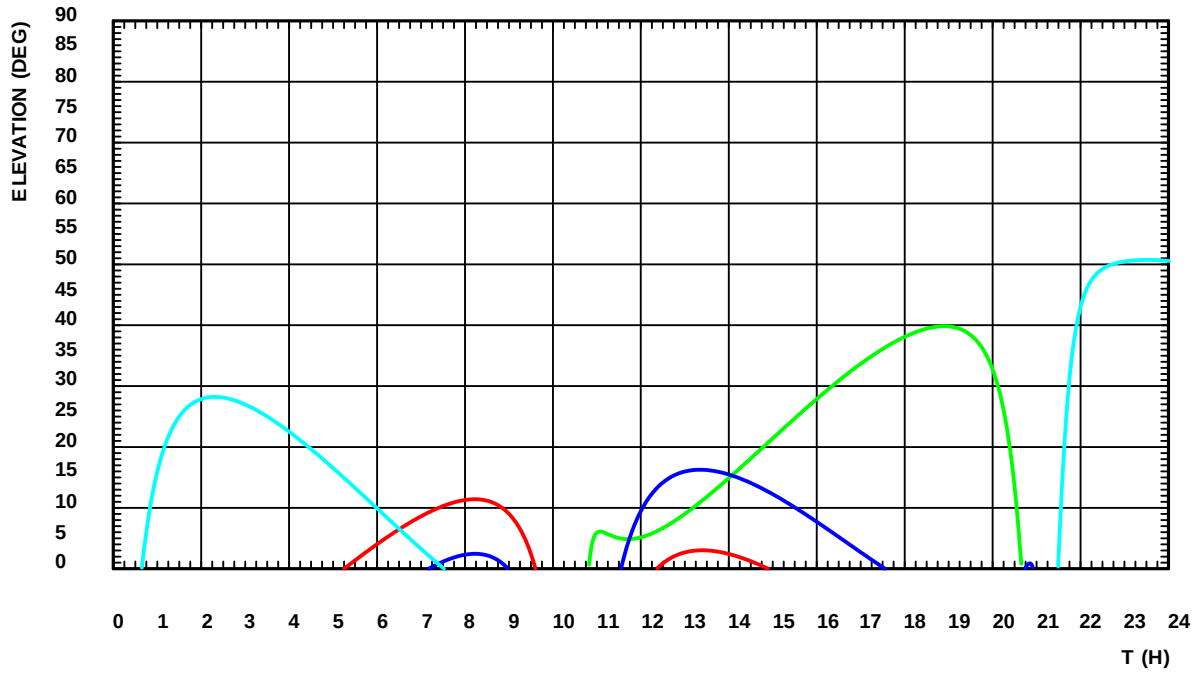


Bild 27-6: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) für eine Transferbahn (GTO) in eine geostationäre Position über einen Tag beobachtet von verschiedenen Bodenstationen: Weilheim (rot), Madrid (blau), Goldstone (grün), Canberra (hellblau). Eine lückenlose Überwachung der Transferbahn ist mit den ausgewählten Bodenstationen nicht erreichbar.

BEISPIEL 1: Die Sichtwinkel des TerraSAR-X Satelliten über der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau ist in Bild 27-4 über einen Tag dargestellt. Da auf Grund der Refraktion die Akquisition des Satelliten bereits möglich sein kann, wenn der Satellit noch unter dem Horizont ist, wurden in diesem Plot die Sichtwinkel ab der der Elevation h=-10° berechnet. Da TerraSAR-

X in enger Konstellation mit dem Schwestersatelliten TanDEM-X fliegt[1], ist die Beobachtung mit einer zweiten unabhängigen Antenne erforderlich. Die Darstellung in einem Sichtwinkelplot ist zu grob, um die Bewegung der beiden Satelliten unabhängig darstellen zu können.

BEISPIEL 2: Bild 27-5 zeigt die Folge der Sichtbarkeiten eines Satelliten auf einer kreisnahen, erdnahen Bahn (a=6904.252km, e=0.00136340, i=52°.992833, Ω= 24°.191391, ω=123°.142840, M_0=237°.088386, Epoche: 2000-5-4/2:43:6.86, (unkontrollierte Bahn des ROSAT nach Beendigung der Mission) gesehen von der Bodenstation in Weilheim im Verlauf eines Tages. ◄

BEISPIEL 3: Im Rahmen einer Missionsanalyse für den Einschuss eines Satelliten in eine geostationäre Bahn wird eine geeignete Sichtbarkeit zur Kommandierung des Apogäumsmotors gesucht. Dazu wird im Tagesverlauf der Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation über der Zeit) für verschiedene Bodenstationen untersucht.

Die Transferbahn ist durch die folgenden Einschussbahnelemente gegeben (für die fiktive Epoche t_0: 2002-03-01/00^h:00^m:0^s.0):

Apogäumshöhe : H_A=35975 km , Perigäumshöhe: H_P=200 km

Inklination: i = 7°.0,

Geographische Länge des ersten absteigenden Knotens: $\lambda_{\Im} = -11°.0$

Argument des Perigäums: $\omega = 178°.0$, Mittlere Anomalie zur Epoche : $M_0 = 0°.0$.

Daraus ergeben sich die *Kepler*elemente:

a=24465.637 km, e=0.73112750, i=7°.0, Ω=327°.62921424, ω=178°, $M_0 = 0°.0$.

Bild 27-6 zeigt den Verlauf der Elevation der Transferbahn über einen Tag für das Stationskonzept Weilheim, Madrid (NASA), Goldstone, Canberra. ◄

27.4.2 Entfernung und Lichtzeit

Der topozentrische Abstand[2] ρ eines Satelliten von einer Bodenstation wird heute vornehmlich mit Radar[3], bei optischem Kontakt hochgenau mit Laser vermessen. Die topozentrische Entfernungsänderung[4] $\dot{\rho}$ kann mit Hilfe einer *Doppler*messung bestimmt werden[5]. Sei f_0 die bekannte Trägerfrequenz, mit der ein Signal vom Satelliten aus gesandt wird, f_B die Frequenz, mit der das Signal von der Bodenstation empfangen wird, c die Vakuum-

[1] Siehe in Abschnitt 23.13.5

[2] in der englischsprachigen Literatur „range“, gelegentlich auch „slant range“ genannt

[3] Neuere Verfahren sind Range-Tone („side-tone“)-Verfahren, PN-Verfahren u.a.. Allgemeine Übersicht in PH. HARTL [1977], Kapitel 5, *Funktechnische Verfahren*, insbesondere Seite 168 (siehe auch in: HARTL, PHILIPP: *Fernwirktechnik der Raumfahrt*, Springer 1988, ISBN 13-3978-3-540-18881-3.)

[4] „range rate“

[5] in Abschnitt 27.5 ab Seite 379 wird die Berechnung unter Berücksichtigung mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie präziser untersucht. Siehe auch in Abschnitt 8.17 (Band II)

Lichtgeschwindigkeit, gilt näherungsweise (d.h. unter Vernachlässigung relativistischer Effekte)

$$\dot{\rho} = c\frac{f_B - f_0}{f_0} \quad . \tag{27.34}$$

Aus Messungen von ρ und $\dot{\rho}$ bzw. allein $\dot{\rho}$ kann eine Satellitenerstbahnbestimmung durchgeführt werden[1].

Der topozentrische Zustandsvektor $(\mathbf{r}_T, \dot{\mathbf{r}}_T)$ eines Satelliten[2] hat mit den Größen ρ und $\dot{\rho}$ die Zusammenhänge

$$\mathbf{r}_T = \rho\mathbf{r}_{T0} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}\mathbf{r}_{T0} + \rho\dot{\mathbf{r}}_{T0} \quad \langle |\mathbf{r}_{T0}| = 1, \dot{\mathbf{r}}_{T0} = \dot{\zeta}_B \mathbf{q}_{T0}, \dot{\zeta}_B = |\dot{\mathbf{r}}_{T0}|, |\mathbf{q}_{T0}| = 1 \quad . \tag{27.35}$$

Aufgabe der Bahnbestimmung ist es, über mehrere Messungen den noch unbekannten Richtungsvektor $\mathbf{r}_{T0}$ und seine Variation $\dot{\mathbf{r}}_{T0}$ zu bestimmen. Dann ist

$$\rho = |\mathbf{r}_T| \quad . \quad \dot{\rho} = \frac{\mathbf{r}_T \cdot \dot{\mathbf{r}}_T}{\rho} \quad . \tag{27.36}$$

Die Größe

$$V_{tB} := |\dot{\mathbf{r}}_T| \tag{27.37}$$

ist die topozentrische Geschwindigkeit eines Satelliten, wie sie für einen Beobachter erscheint. Als weitere interessante topozentrische Beobachtungsgröße ist die transversale Komponente des topozentrischen Geschwindigkeitsvektors berechenbar aus

$$\dot{\mathbf{r}}_{T0} = \frac{1}{\rho}(\dot{\mathbf{r}}_T - \dot{\rho}\mathbf{r}_{T0}) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_T}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\mathbf{r}_T \quad . \tag{27.38}$$

Die topozentrische Entfernungsvariation bedingt auch eine entsprechende Laufzeitänderung eines Signals zwischen Satellit und Bodenstation. Die Laufzeit eines solchen Signals, die als Lichtzeit bezeichnet wird, ist der topozentrischen Distanz ρ proportional und beträgt mit der Vakuumslichtgeschwindigkeit c näherungsweise, d.h. unter Vernachlässigung der Abweichung der Lichtgeschwindigkeit von c bei Durchlaufen eines Mediums um den Erdkörper,

$$\tau = \frac{\rho}{c} \quad . \tag{27.39}$$

Abschätzungen (siehe in den folgenden Beispielen) lassen folgern, dass die Berücksichtigung der Lichtzeit für die gewöhnlichen Aufgabenstellungen der Bahnbestimmung und der Ephemeridenrechnung uninteressant ist. Dagegen ist ihre Kenntnis wichtig etwa zur Entzerrung von Bildern bei der Bildverarbeitung von Satellitenaufnahmen in der Meteorologie oder der Fernerkundung der Erde (oder einer Planetenoberfläche usw.). Da sich der Satellit während der Bildübertragung bewegt, ändert sich mit der topozentrischen Distanz nach Formel (27.39) die Lichtzeit τ. Dies bedingt die Laufzeitänderung

$$d\tau = \frac{d\rho}{c} \quad . \tag{27.40}$$

---

[1] siehe etwa in ESCOBAL, R. P. [1965], Abschnitt 8.3.

[2] Der Bezug auf das Horizontsystem des Beobachtungsortes wird in Abschnitt 8.9 (Band II) untersucht

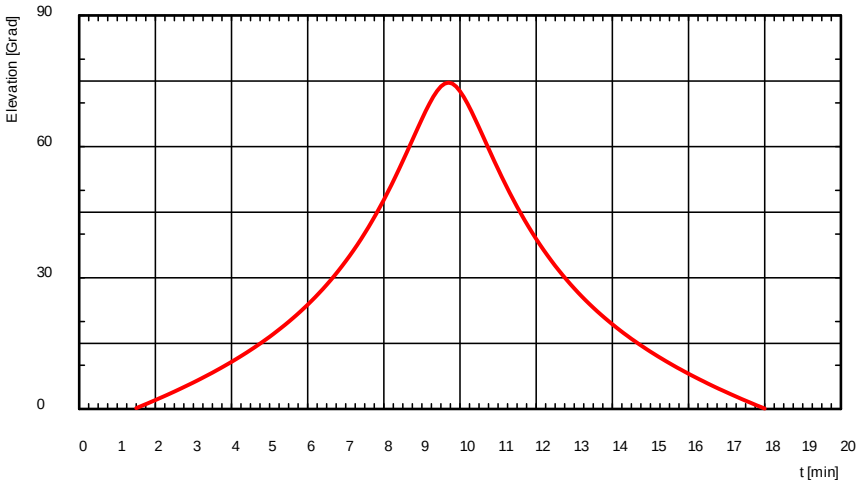


Bild 27-7: Verlauf der Elevation („Höhe“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

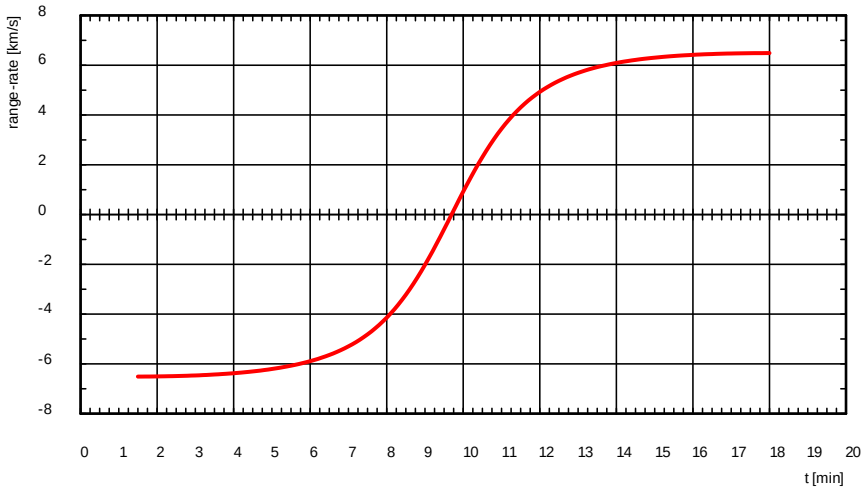


Bild 27-8: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

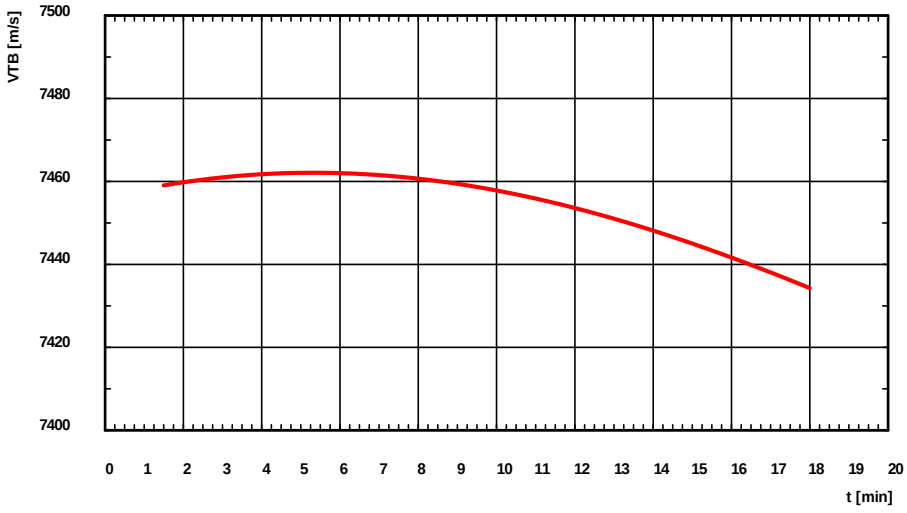


Bild 27-9: Verlauf der topozentrischen Geschwindigkeit des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

Die Entfernungsänderung $d\rho$ kann bei Kenntnis der topozentrischen Distanzen an zwei unterschiedlichen Zeitpunkten t_1, t_2 als Differential $d\rho \approx \rho_2 - \rho_1$ aufgefasst werden. Falls andererseits an einem Zeitpunkt nur die aus einer Beobachtung abgeleitete Entfernungsänderung $\dot{\rho}$ bekannt ist, lässt sich näherungsweise schreiben

$$d\tau \approx \frac{\dot{\rho}\, dt}{c} \quad . \tag{27.41}$$

BEISPIEL 1: Zur Abschätzung typischer Größenordnungen der Lichtzeit sei eine kreisnahe sonnensynchrone Erdbeobachtungsmission mit den *Kepler*parametern (LANDSAT-A) a=7298.160 km, e=0.0, i=99° untersucht. Für eine derartige Mission aus etwa 919 km Bahnhöhe (Bild 27-7 bis Bild 27-11) unterliegt die Lichtzeit während eines Überflugs der Bodenstation Schwankungen zwischen 3 und 12 ms. Entsprechend später kommt ein Signal vom bzw. bei einer Kommandierung beim Satelliten an. Dies muss für hochgenaue Beobachtungen während einer Beobachtungspassage berücksichtigt werden. Dem entspricht längs der genannten Bahn eine Ortsverschiebung von 22 m bzw. 90 m, was den geozentrischen Winkeln $0''.6$ bzw. $2''.5$ proportional ist. Diesen Werten sind (im Beispiel bei Bezug auf die Bodenstation in Weilheim) die topozentrischen Winkel in äquatorialen Koordinaten $\Delta\alpha = 2''.02 \,\text{bzw.}\, 0''.14$, in topozentrischen Winkelkoordinaten $\Delta A = 12''.35 \,\text{bzw.}\, 0''.00$, $\Delta h = 4''.14 \,\text{bzw.}\, 0''.61$ zugeordnet. Im Fall eines geostationären Satelliten der Position $\lambda = 11°.3$ und der Entfernung zur Bodenstation in Weilheim $\rho = 38170\,\text{km}$ betragen die entsprechenden Werte mit der Lichtzeit $\tau = 127.3\,\text{ms}$ etwa das 10-fache (siehe das nächste Beispiel mit Bild 27-15 und Bild 27-16). Bild 27-8 zeigt den typischen Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) für eine erdnahe Kreisbahn.

Die Darstellung der topozentrischen Geschwindigkeit V_{TB} in Bild 27-9 zeigt im Vergleich mit den vorhergehenden Bildern, dass das Maximum dieser Geschwindigkeit nicht im Moment des nahesten Vorbeiflugs $\left(\dot{\rho} = 0.0\,\text{m/s}\right)$ stattfindet. Der Verlauf der Lichtzeit und der Entfernung in Bild 27-10 und Bild 27-11 sind identisch. Sie können daher durch Anpassung der richtigen Dimensionierung ineinander übergeführt werden. ◄

BEISPIEL 2: Ein völlig anderes Bild der topozentrischen Bewegung stellt eine hochexzentrische Bahn dar. Als Beispiel werde eine Transferbahn in eine geostationäre Bahn (GTO) gewählt (Daten des SYMPHONIE-A Satelliten). Die *Kepler*elemente dieser Bahn seien bei Einschuss in die Transferbahn a=24465.637 km, e=0.73112750, i=7°.0, Ω=327°.629214, ω=178.0°, M_0=0°.0. Ausgewählt wurde eine Passage mit 10h Sichtbarkeit von der Bodenstation in Weilheim aus (Bild 27-12 bis Bild 27-16). Diese Passage enthält fast eine ganze Transferphase bis in die geostationäre Bahnhöhe.

Während der Elevationsverlauf und der Verlauf der Entfernungsänderung ein anomales Verhalten zeigen, sind die Verläufe der topozentrischen Geschwindigkeit sowie der Lichtzeit bzw. der topozentrischen Distanz trotz der Überlagerung der nicht korrelierten Eigenbewegung des Satelliten und der Station sehr ebenmäßig.

Das hier vorgestellte Beispiel eines GTO wird im nächsten Abschnitt unter anderem Gesichtspunkt wieder aufgenommen. Allerdings wird dort ein anderer Zeitraum betrachtet, was im Unterschied des Elevationsverlaufs (Bild 27-12 im Vergleich zu Bild 27-19) zum Ausdruck kommt. ◄

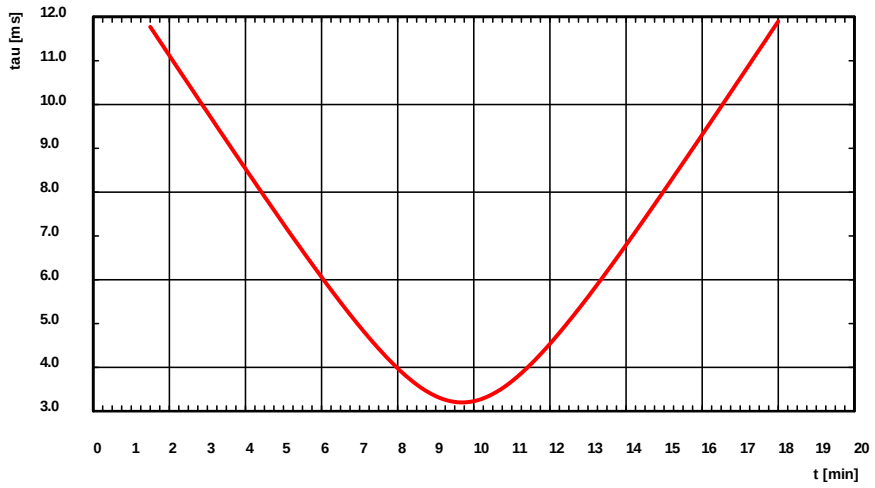


Bild 27-10: Verlauf der Lichtzeit zwischen dem Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° und der Bodenstation Weilheim für einen Überflug der Station

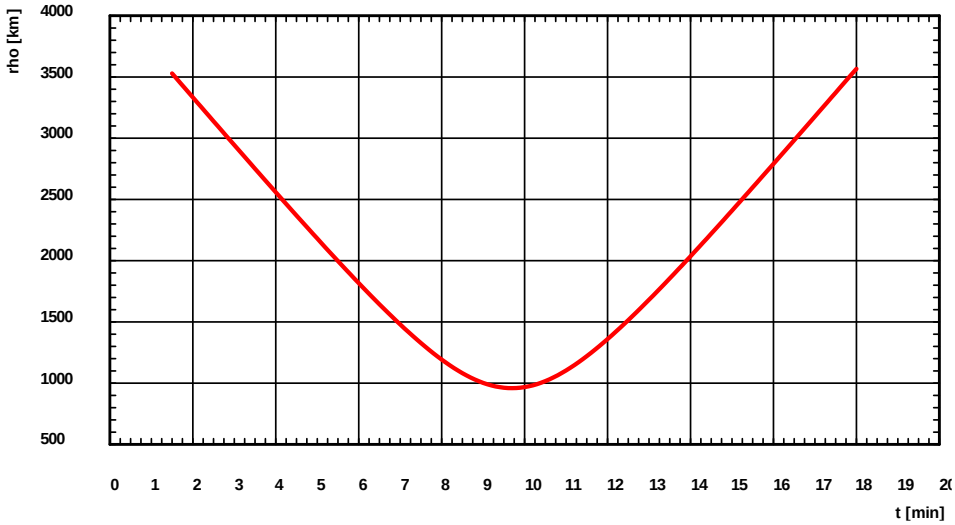


Bild 27-11: Verlauf der Entfernung („slant range“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug von der Bodenstation Weilheim

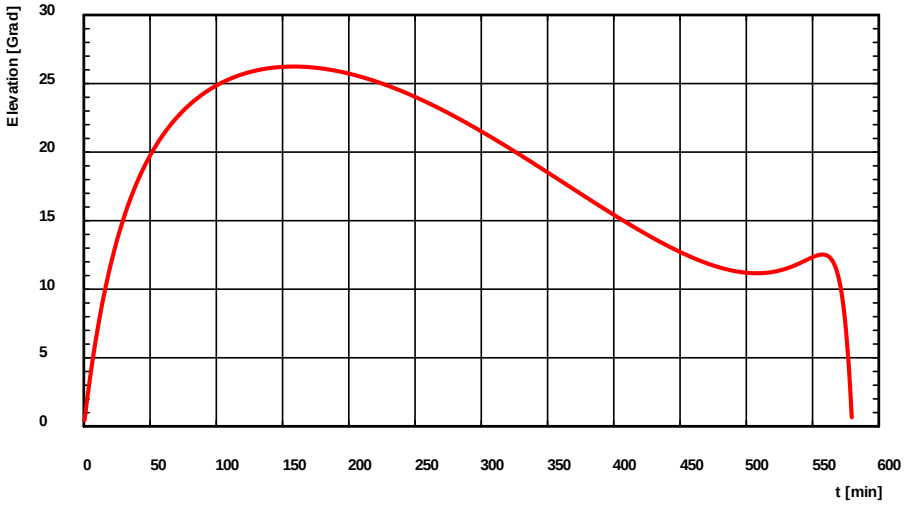


Bild 27-12: Verlauf der Elevation („Höhe“) einer geostationären Transferbahn beobachtet von der Bodenstation in Weilheim über eine Sichtbarkeitspassage von etwa 10h Dauer.

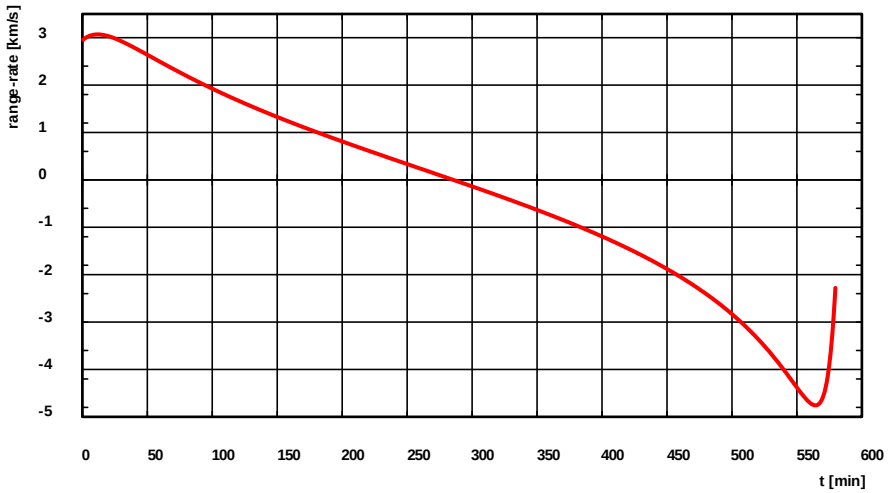


Bild 27-13: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) einer hochexzentrischen GTO Bahn: Annäherung an die Station über fast die ersten 5 Stunden des Bodenkontaktes, danach Entfernung.

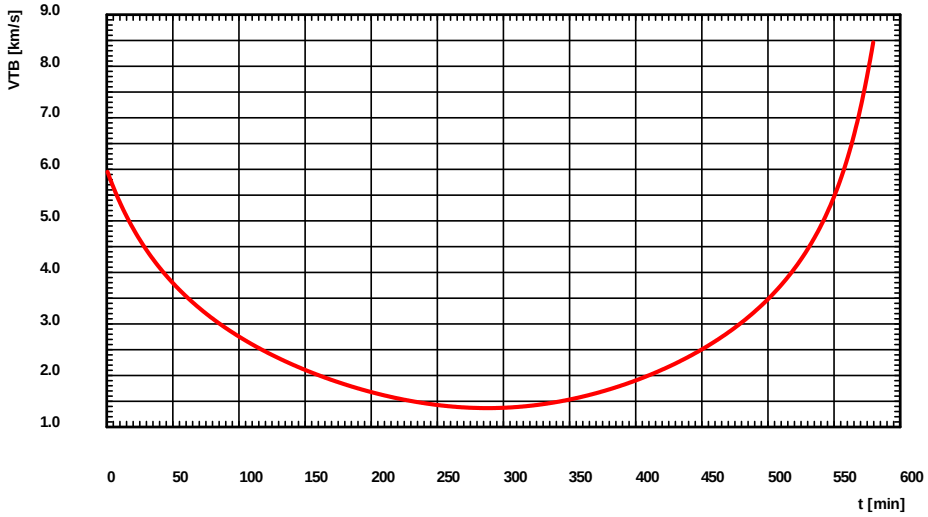


Bild 27-14: Die topozentrische Geschwindigkeit des Satelliten auf einer GTO über den gesamten Verlauf des Bodenkontaktes mit Weilheim: die geringste Geschwindigkeit wird im Apogäum durchlaufen.

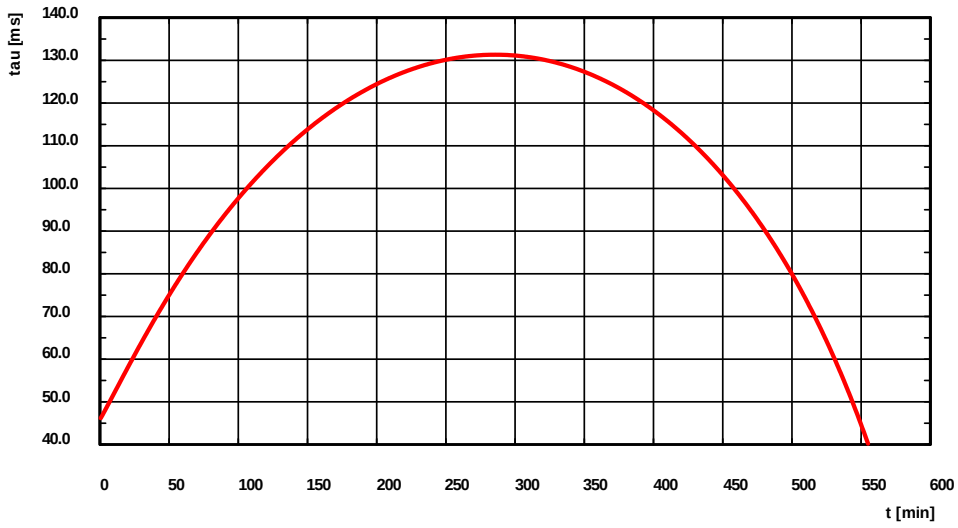


Bild 27-15: Verlauf der Lichtzeit vom Satelliten auf einer GTO zu Weilheim.

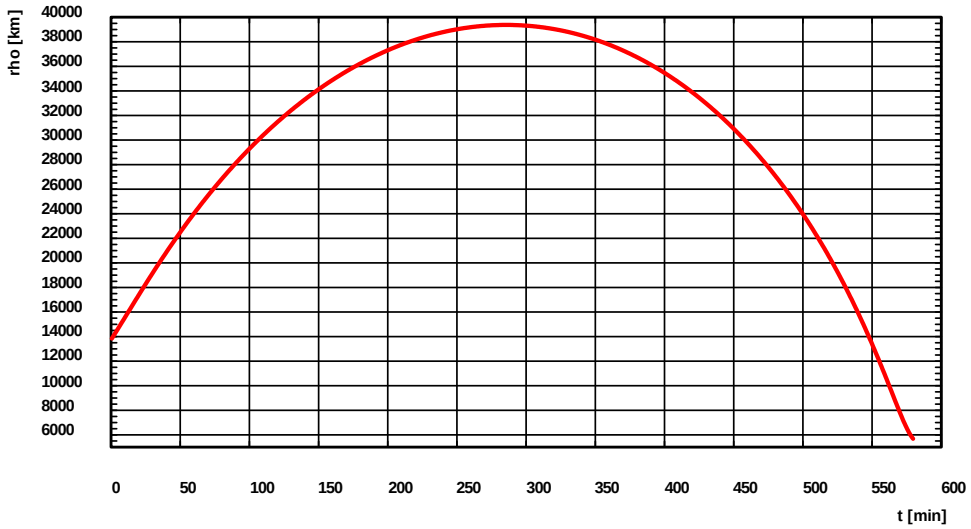


Bild 27-16: Verlauf der topozentrischen Distanz („slant range“) vom Satelliten auf einer GTO.

27.4.3 Spezielle Punkte der scheinbaren topozentrischen Bewegung

Die von einem Topozentrum aus zu beobachtende Bewegung kann mit dem Verlauf des topozentrischen Geschwindigkeitsvektors $\left(\dot{\rho}, \dot{A}, \dot{h}\right)$ verfolgt werden. Besondere Ereignisse wie scheinbar stationäre Punkte, Stillstandpunkte, Wendepunkte, Überschneidungspunkte, wie sie im Rahmen der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung erhalten wurden, können ähnlich auch im Rahmen der topozentrischen Bewegung erarbeitet werden.

Scheinbar stationäre Punkte müssen die Bedingung $\left(\dot{A}=0, \dot{h}=0\right)$ erfüllen, dazu zählen auch scheinbare Spitzenpunkte, wenn diese Bedingung für einen Moment erreicht wird. Eine Übersicht über spezielle Punkte der topozentrischen Bewegung in Tabelle 27-1 (auf Seite 379) zusammengestellt.

Eine Auswahl von Bahnen mit einem gewünschten topozentrischen Bewegungsverhalten kann numerisch mit Hilfe der Variationsgleichungen (27.29), (27.30) durchgeführt werden. Eine Beurteilung des topozentrischen Bewegungsverhaltens kann mit Hilfe einer Ephemeride und Darstellung des Verlaufs der horizontalen Winkelkoordinaten sowie deren Variationen über der Zeit erhalten werden. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL: Es wird die topozentrische Darstellung einer Transferbahn in eine geostationäre Bahn mit den Bahndaten des SYMPHONIE-A Satelliten gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau untersucht. Die scheinbare Bewegung auf dieser Bahn wurde in Bezug auf die Erdoberfläche in Abschnitt 26.8.2 auf Seite 357 sowie in Bild 26-19 und Bild 26-20 untersucht. Das Erscheinungsbild gesehen von der Bodenstation aus ist völlig anders, wie der Sichtwinkelplot in Bild 27-17 demonstriert. Dies ist eine Folge davon, dass die Bewegung des Satelliten nur über dem Horizont mit unterschiedlicher Blickrichtung und mit spezieller vom Breitenkreis der Station bedingten Eigenbewegung beobachtet werden kann. Charakteristisch ist die langsame rückläufige Bewegung bis zu einem plötzlichen spitzen Umkehrpunkt, von dem aus der Satellit sich rasch rechtläufig zum Untergang bewegt.

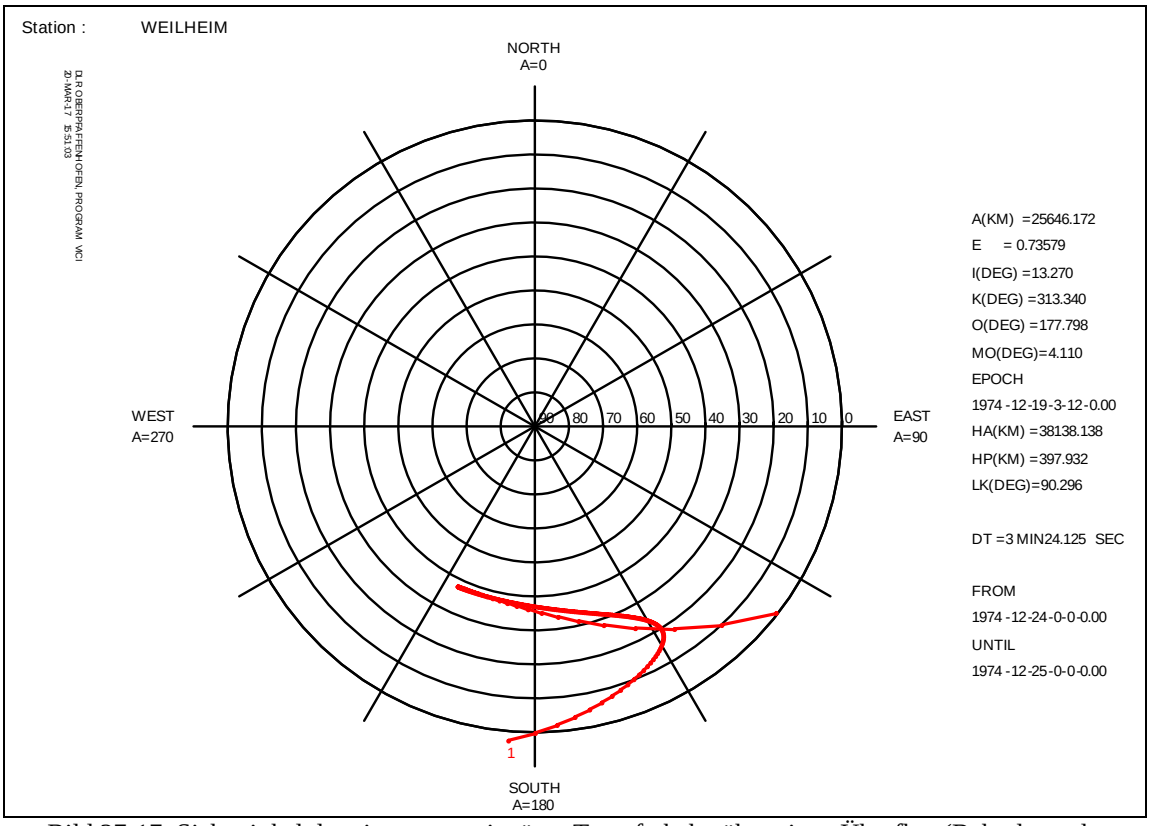


Bild 27-17: Sichtwinkelplot einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau aus

Schrägentfernung	Azimut	Elevation	Spezieller Punkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} < 0$	$\dot{h}$ beliebig	Scheinbar rechtläufig
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} > 0$	$\dot{h}$ beliebig	Scheinbar rückläufig
$\dot{\rho}_{\min}$	$\dot{A}$ beliebig	$\dot{h}$ beliebig	Kürzester Abstand, „Vorbeiflug“
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} = 0$	$\dot{h} = 0$	Stationärer Punkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} = 0$	$\dot{h} \neq 0$	Stillstandpunkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} \neq 0$	$\dot{h} = 0$	Wendepunkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} \neq 0$	h=90°	Über Kopf Bewegung („cone of silence problem“)

Tabelle 27-1: Spezielle Punkt der topozentrischen Satellitenbewegung

Ausgewählt für diese Untersuchungen wurde eine Passage mit optimaler Sichtbarkeit von der Station aus. Es ist geplant, während einer solchen Passage, in der sich der Satellit im Apogäum seiner Bahn befindet, die Kommandos zum Zünden des Apogäumsmotors zu senden.

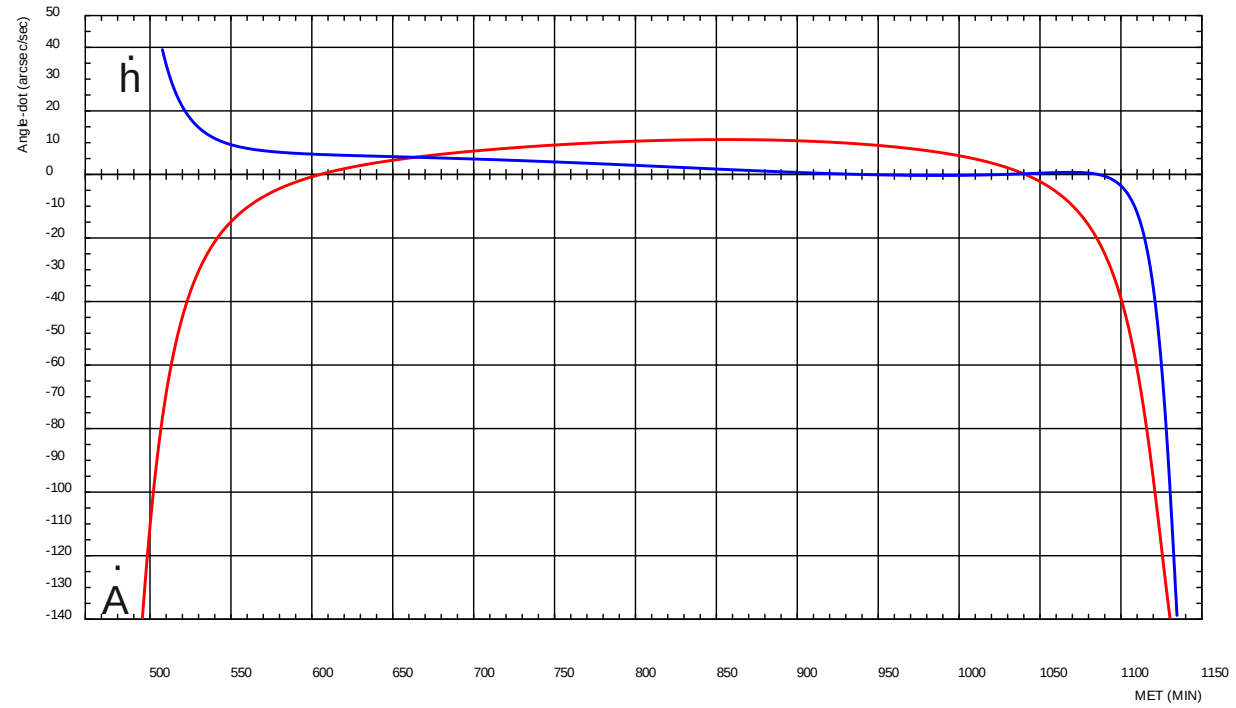


Bild 27-18: Verlauf der Variation des Azimuts $\dot{A}$ (rote Kurve) und der Elevation $\dot{h}$ (blaue Kurve) einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau

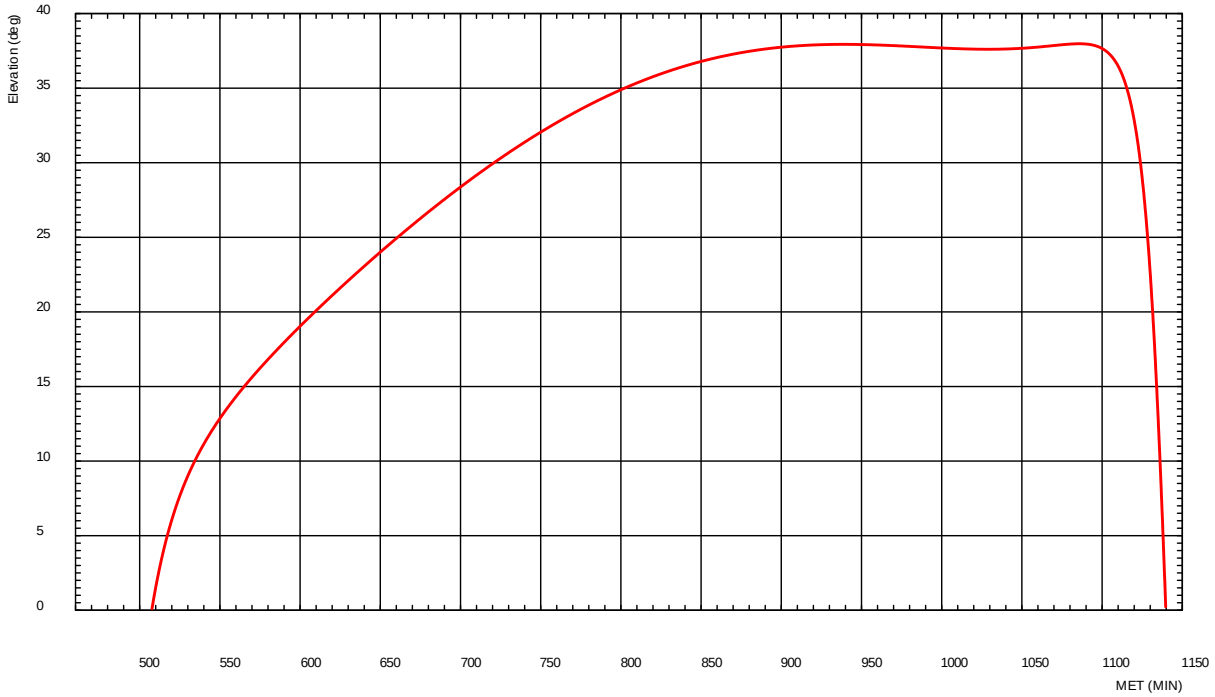


Bild 27-19: Verlauf der Elevation h einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten)

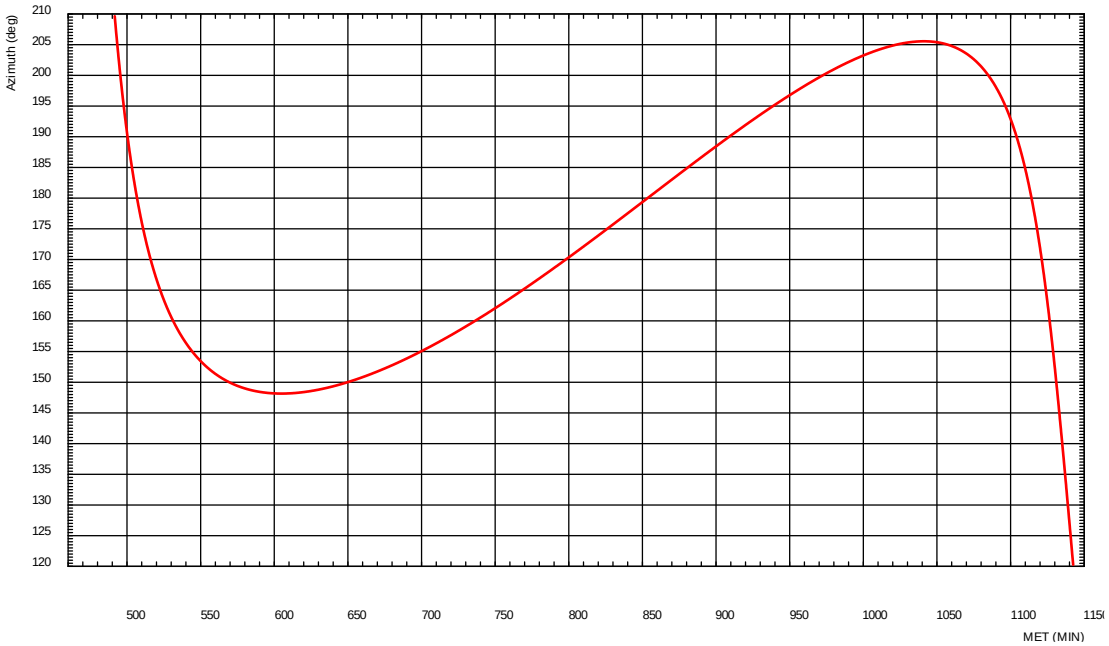


Bild 27-20: Verlauf des Azimut *A* einer geostationären Transferbahn über einen Durchgang (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten)

Wenn der Satellit über dem Horizont aufsteigt, unterliegt seine Elevation maximaler Geschwindigkeit, die mit zunehmender Höhe über dem Horizont rasch abnimmt. Diese Höhe erreicht über einen langen Zeitraum ein nahezu konstantes Niveau, um dann plötzlich rasch an Höhe zu verlieren und unter dem Horizont zu verschwinden. Bild 27-18 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf der Elevation, die Elevation selbst ist in Bild 27-19 dargestellt.

Völlig anders verhält sich das Azimut. Da das Azimut im Horizontalsystem von Nord über Ost nach Süd und dann nach Westen definiert ist, bewegt sich der Satellit dann rechtläufig, wenn sein Azimut abnimmt, rückläufig bei zunehmendem Azimut. Die Variation des Azimut kann aus Bild 27-18 abgelesen werden: fast während der gesamten Passage bewegt sich der Satellit rückläufig, der westliche scharfe Umkehrpunkt, der im Sichtwinkelplot deutlich zu erkennen ist, ist aus dem Verlauf der Variation des Azimut und dem Betrag des Azimut nach Bild 27-20 nicht ablesbar. Die Beurteilung einer solchen Bewegung muss also aus verschiedenen Darstellungen begründet werden. ◀

27.5 Doppler Beobachtungen

Doppler Beobachtungen von erdgebundenen und interplanetaren Raumfahrtkörpern erlauben Aussagen über topozentrische Geschwindigkeiten und ihre Variationen. Diese Parameter können zur Bahnbestimmung dieser Körper verwendet werden und sind etwa 1000-mal besser als die Berechnungen aus Entfernungsmessungen[1].

Die Frequenz eines Signals, das von einem Objekt ausgesandt wird, das die (absolute) Geschwindigkeit *V* hat, hat bei einem Beobachter den Wert[2]

[1] siehe etwa in HARTL, P. [1973], p. 17, auch in Abschnitt 16.1.6 (Band III)

[2] Weiteres zur hier benötigten *Lorentz*-Transformation in Abschnitt 8.17 (Band II)

$$f_B = f_0 \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\beta} \quad , \tag{27.42}$$

wobei f_0 die Frequenz beim Aussenden ist („Trägerfrequenz“), c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und β der Winkel zwischen topozentrischem Orts- und Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes. Die radiale Geschwindigkeit ist dann bekannt aus der Beziehung

$$V_R = \dot{\rho} = V\cos\beta \quad . \tag{27.43}$$

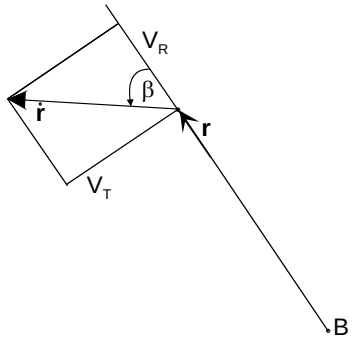


Bild 27-21: Beobachtung von radialer ($V_R = \dot{\rho}$) und transversaler (V_T) Geschwindigkeit eines Objektes mit Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, gesehen von einem Beobachter B aus

Sie kann somit berechnet werden bei bekannter Träger-Frequenz f_0 und gemessener Frequenz f_B aus

$$\dot{\rho} = c\left(\frac{f_0}{f_B}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - 1\right) \quad . \tag{27.44}$$

Ein Spezialfall ist die Variation der Frequenz zwischen einem etwa erwarteten und einem empfangenen Signal, die beide durch den Dopplereffekt gegenüber der Trägerfrequenz beeinflusst sind. Die „erwartete“ Frequenz sei f_{BC}, die zugehörige (absolute) Geschwindigkeit V_C und die Entfernungsvariation $\dot{\rho}_C$. Die Abweichung in der Entfernungsvariation beträgt somit

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_C = c\, f_0\left[\frac{1}{f_B}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{1}{f_{BC}}\sqrt{1-\frac{V_C^2}{c^2}}\right] \quad . \tag{27.45}$$

Schrittweise Näherungsausdrücke:

In der Praxis ist häufig die absolute Geschwindigkeit V bzw. V_C nicht bekannt, sondern nur die radiale Geschwindigkeit (27.43) $\dot{\rho}, \dot{\rho}_C$. Mit $V \cong V_R = \dot{\rho}$ ergibt dann Formel (27.44)

$$\dot{\rho} = -c\,\frac{f_B^2 - f_0^2}{f_B^2 + f_0^2} + \cdots \quad . \tag{27.46}$$

Mit der Zuweisung $\Delta f_B := f_B - f_0$ wird

$$\dot{\rho} = -c\,\frac{\Delta f_B}{f_0}\,\frac{2+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}}{2+2\dfrac{\Delta f_B}{f_0}+\left(\dfrac{\Delta f_B}{f_0}\right)^2}+\cdots \quad . \tag{27.47}$$

Bei Vernachlässigung des quadratischen Terms $\left(\Delta f_B / f_0\right)^2$ und Entwicklung des Nenners wird

$$\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f_B}{f_0}\,\frac{2+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}}{2\left(1+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}\right)}+\cdots = -c\frac{\Delta f_B}{f_0}\frac{1}{2}\left(2+\frac{\Delta f_B}{f_0}\right)\left(1-\frac{\Delta f_B}{f_0}\right)+\cdots \quad . \tag{27.48}$$

Nochmalige Vernachlässigung der quadratischen Terme führt schließlich auf die bekannte Form

$$\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f_B}{f_0}+\cdots \quad . \tag{27.49}$$

Im Fall des erwarteten Wertes wird $\Delta f_{BC} := f_{BC} - f_0$, somit

$$\dot{\rho}_C = -c\frac{\Delta f_{BC}}{f_0}+\cdots \quad . \tag{27.50}$$

Wird jetzt die Differenz in der Entfernungsvariation zwischen beobachtetem und erwartetem Wert berechnet

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_C \quad , \quad \Delta f := f_B - f_{BC} \quad , \tag{27.51}$$

erhält man die Formel

$$\Delta\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f}{f_0}+\cdots \quad . \tag{27.52}$$

Bei Anwendung dieser Formel muss also stets berücksichtigt werden, dass vier Näherungsschritte bzw. Annahmen zu ihrer Herleitung benötigt wurden[1].

27.6 Anmerkungen zur Genauigkeit einer geostationären Bahn

Der Sonderfall geostationärer Bewegung als kreisförmige Äquatorbahn wurde mit Hilfe der Entwicklung (26.80) bis einschließlich der zonalen Harmonischen J_5 hergeleitet. Höhere Effekte können im Fall geostationärer Bahnen vernachlässigt werden, da andere Effekte auf den Betrag der großen Bahnhalbachse, etwa durch lunisolare Attraktionen im Bereich von etwa -704 m bis -264 m, wesentlich größer angenommen werden müssen[2]. Diese wirken sich auch auf die Position eines geostationären Satelliten aus, wie in Bild 27-22 für den Fall einer topozentrischen Beobachtung demonstriert wird. Entsprechend muss in regelmäßigen Ab-

[1] Beispiele z.B. in dem Paper: JOCHIM, E. F.: On one-way Doppler measurements of space craft and celestial objects , *Acta Astronautica* **66** (2010) 309-330

[2] Zahlenwerte nach W. FLURY [1973]

ständen die Bahn eines solchen Satelliten sowohl längs seiner Bahn („in plane manoeuvre“) wie aus der Bahnebene heraus („out of plane manoeuvre“) korrigiert werden. Diese Berechnungen sind nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes[1].

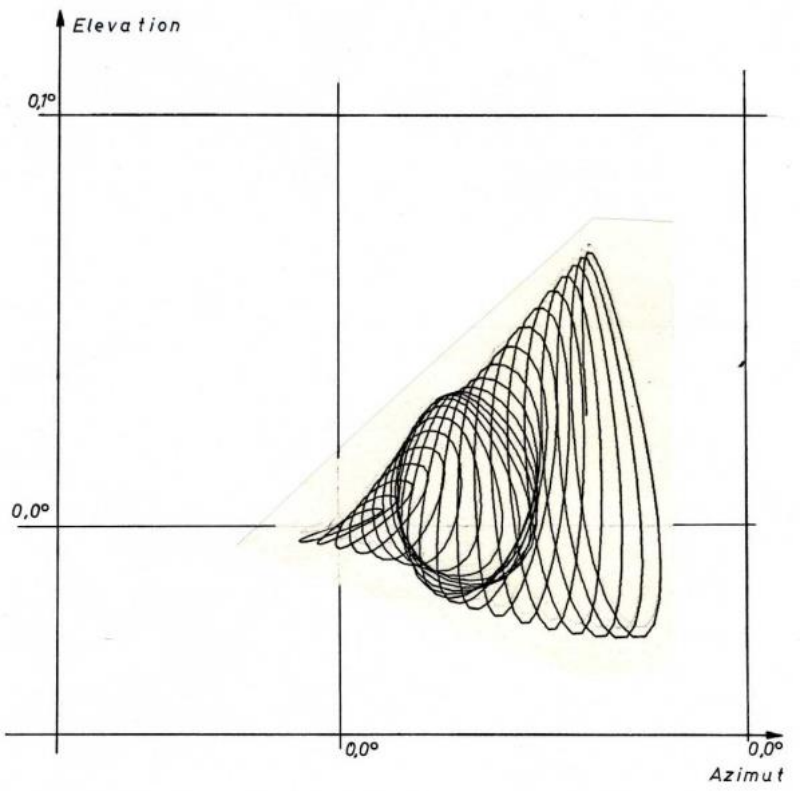


Bild 27-22: Topozentrische Bewegung des Satelliten SYMPHONIE-A in horizontalen Koordinaten infolge Störungen durch Sonne und Mond, gesehen von der ZdBS in Weilheim-Lichtenau aus, im Zeitraum 15.3.1975 bis 7.4.1975[2].

[1] Hierzu ist eine sehr umfangreiche Literatur vorhanden, siehe etwa in E. M. SOOP [1983]

[2] Zeichnungen auf Grund von Berechnungen von *M. C. Eckstein* (1975)

Synodische Bewegungen

28 Sonnenbezogene synodische Bewegung

Nach einem zusammenfassenden Überblick über die Beschreibung der Bewegung der scheinbar die Erde umlaufende Sonne in den Abschnitten 28.1 und 28.2, sowie ihres Bezuges zur Sonnenzeit in Abschnitt 28.3 und des topozentrischen Bezugs der Sonne zu einem Ort auf der Erdoberfläche oder einem bewegten Objekt auf oder über der Erde in Abschnitt 28.4 wird als zentraler Begriff die synodische Bewegung eines Satelliten bei Bezug auf die Sonne ausführlich ab Abschnitt 28.5 auf Seite 422 diskutiert. Mit Kenntnis der sonnensynodischen Bewegung lassen sich Beziehungen zu anderen Bewegungsarten herstellen, die besonders wichtige Familie der sonnensynchronen Bahnen definieren (Abschnitt 28.8 Seite 475), spezielle Typen der Satellitenbahnauswahl finden, verschiedene Arten von Aspektwinkeln im System Satellit – Bezugskörper (Erde) – Sonne definieren (Abschnitte 28.11 und 28.12) und insbesondere die Schattenverhältnisse untersuchen (Abschnitt 28.10 auf Seite 497). Eine Verallgemeinerung des Begriffs der reproduzierbaren sonnensynchronen Bewegung wird in Abschnitt 28.9.3 (auf Seite 495) hergeleitet. Bahnkorrekturen, die im Zusammenhang mit der sonnensynodischen Bewegung stehen, werden in den Abschnitten 28.13 und 28.14 behandelt.

28.1 Die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde

Die Bewegung der Erde um die Sonne kann wie jede Planetenbewegung als allgemeine („gestörte“) *Kepler*bewegung dargestellt werden. Zu ihrer Beschreibung werden die folgenden Bahnelemente verwendet:

Große Bahnhalbachse (= mittlere Distanz)	$a_{♁☉}$
Exzentrizität	$e_{♁☉}$
Inklination bezüglich Ekliptik	$i_{♁☉}$
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\Omega_{♁☉}$
Länge des Perihels	$\Gamma_{♁☉} = \Omega_{♁☉} + \omega_{♁☉}$
Mittlere Länge in der Bahn	$L_{♁☉}$
Mittlere Anomalie	$M_{♁☉} = L_{♁☉} - \Gamma_{♁☉}$

Tabelle 28-1: Die *Kepler*schen Elemente der Erdbahn

Um die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde (genauer des Baryzentrums des Sonnensystems um das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems) darzustellen, wird die Bewegung der Erde um die Sonne linear in das Erdzentrum transformiert. Der absteigende Knoten der heliozentrischen Erdbahn wird zum aufsteigenden Knoten der geozentrischen Sonnenbahn, dem *Frühlingspunkt*. Die Länge des Perihels der Erdbahn unterscheidet sich demnach von der Länge des Perigäums der Sonnenbahn um 180°. Die übrigen Bahnelemente stimmen identisch überein. Sie sind in Tabelle 28-2 gelistet.

Entsprechend unterscheiden sich auch die Zustandsvektoren dieser beiden Bewegungen nur durch das Vorzeichen. Die ekliptikalen Polarkoordinaten von Sonne und Erde unterscheiden sich in der ekliptikalen Länge um 180°, in der ekliptikalen Breite um das Vorzeichen.

Große Bahnhalbachse (= mittlere Distanz)	$a_\odot = a_{♁}$
Exzentrizität	$e_\odot = e_{♁}$
Inklination bezüglich Ekliptik	$i_\odot = i_{♁}$
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\Omega_\odot = \Omega_{♁} + 180°$
Länge des Perigäums	$\Gamma_\odot = \Gamma_{♁}$
Mittlere Länge in der Bahn	$L_\odot = L_{♁}$
Mittlere Anomalie	$M_\odot = L_\odot - \Gamma_\odot = M_{♁}$

Tabelle 28-2: Die *Kepler*schen Elemente der scheinbaren Sonnenbahn

Die **mittlere** Bahnebene der Erdbewegung um die Sonne wird als *Ekliptik* bezeichnet. Die **wahre** Bahnebene weicht von der Ekliptik etwas ab, was eine Folge der beschleunigenden Einwirkungen („Störungen“) der übrigen Planeten auf die Bewegung der Erde ist. Für die Beobachtung der scheinbaren Sonne von der Erde aus bleibt der Betrag dieser Abweichung, also der ekliptikalen Breite der Sonne, stets unter 1”. Er kann also für fast alle Anwendungen insbesondere im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse vernachlässigt werden. Im Folgenden werden einige Berechnungsarten unterschiedlicher Genauigkeit der Bewegung der scheinbaren Sonne zusammengestellt.

28.1.1 Die Sonnenephemeride

Sei $\mathbf{x}_{♁}$ der Sonnensystem-baryzentrische Ortsvektor der Erde, so lautet die Bewegungsgleichung[1] der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne in der Formulierung als allgemeine („gestörte“) *Kepler*bewegung

$$\ddot{\mathbf{x}}_{♁} = -\mu_\odot \frac{\mathbf{x}_{♁}}{r_{♁}^3} + \mathbf{R}_{♁} \quad . \tag{28.1}$$

Hier ist $\mu_\odot$ die heliozentrische Gravitationskonstante und $\mathbf{R}_{♁}$ der „Stör-„ Vektor, in dem alle weiteren beschleunigenden Einflüsse auf die Erdbahn durch die Attraktionen von den anderen Planeten und weiterer Einflüsse, wie etwa den Solardruck und den Sonnenwind, zusammengefasst sind. Die Integration wird in baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) als gleichförmiger auf das Baryzentrum des Sonnensystems bezogener Zeit durchgeführt[2]. In der astronomischen Beobachtung wird derzeit als beste Ephemeride die numerisch vom JPL integrierte und abgespeicherte Ephemeride DE200/LE200 (bzw. eine neue verbesserte Version) verwendet,

[1] Siehe dazu die allgemeinen Aussagen etwa in Kapitel 17 (Band III), insbesondere ab Abschnitt 17.4

[2] Beschreibung der Zeiten in Abschnitt 9.1 (Band II)

die seit 1984 auch dem *astronomischen Almanach* zugrunde liegt[1]. Hier wird als Zustandsvektor der baryzentrische Zustandsvektor $\mathbf{x}_{\overset{+}{\odot}}$ der Erde bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium J2000.0 in TDB angeboten.

Für die Beobachtung der Sonne wird der geozentrische Ortsvektor des Sonnenmittelpunktes bezogen auf den mittleren Äquator und das Äquinoktium der Fundamentalepoche J2000.0 mit den $\mathbf{p}_i$ – Basisvektoren aufgelistet[2]. Daraus können wahre geozentrische geometrische Distanz $r_{\odot g}$, Rektaszension $\alpha_{\odot g}$ und Deklination $\delta_{\odot g}$ der scheinbaren Sonne berechnet werden:

$$\mathbf{x}_{\odot g} = x^i_{\odot g}\,\mathbf{p}_i = r_{\odot g}\left(\mathbf{p}_1 \cos\delta_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g} + \mathbf{p}_2 \cos\delta_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g} + \mathbf{p}_3 \sin\delta_{\odot g}\right) \quad . \tag{28.2}$$

Insbesondere ist

$$r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} = \sqrt{x^2_{\odot g1} + x^2_{\odot g2}} \quad . \tag{28.3}$$

Falls auch der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}_{\odot g}$ bekannt ist mit

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{\odot g1} &= \dot{r}_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\alpha}_{\odot g}\, r_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} \\
\dot{x}_{\odot g2} &= \dot{r}_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} + \dot{\alpha}_{\odot g}\, r_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} \\
\dot{x}_{\odot g3} &= \dot{r}_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} + \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} \quad ,
\end{aligned} \tag{28.4}$$

bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\odot g}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{\odot g} &= r_{\odot g}\,\dot{r}_{\odot g} \\
\dot{\alpha}_{\odot g} &= \frac{-\dot{x}_{\odot g1}\sin\alpha_{\odot g} + \dot{x}_{\odot g2}\cos\alpha_{\odot g}}{r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g}} \\
\dot{\delta}_{\odot g} &= \frac{\dot{x}_{\odot g3} - \dot{r}_{\odot g2}\sin\delta_{\odot g}}{r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.5}$$

Da die scheinbare Bewegung der Sonne geozentrisch aufgefasst wird, muss als Zeiteinheit für diese Ephemeride die terrestrische dynamische Zeit TDT gewählt werden. Die hier berechneten Koordinaten sind „geometrische“ Daten, d. h. aus der Rechnung folgende, die zwar die wahren geometrischen Verhältnisse wiedergeben, aber für die geozentrische Beobachtung noch korrigiert werden müssen:

1. auf den Zeitpunkt der Beobachtung durch Korrektur der Zeit und um die Präzession[3]

2. auf die geozentrische scheinbare Rektaszension und Deklination durch Korrektur um Nutation, die jährliche Aberration und die Lichtzeit[4].

Im astronomischen Jahrbuch werden als weitere Ephemeride die *geometrische geozentrische ekliptikale Länge* $l_\odot$ (mit einer Genauigkeit von etwa $|\Delta l_\odot| < 0''.001$) und die *geometrische geozentrische ekliptikale Breite* $b_\odot$ (mit einer Genauigkeit von $|\Delta b_\odot| < 0''.01$) angeboten be-

[1] AA 1984, pp. C1–C24

[2] Abschnitt 8.1 (Band II)

[3] Abschnitt 9.3 (Band II)

[4] Abschnitte 9.4 bis 9.9 (Band II)

zogen auf das mittlere Äquinoktium und die mittlere Ekliptik[1]. Die *scheinbare* geozentrische ekliptikale Länge $l_{\odot a}$ wird daraus durch Korrektur um die Nutation in Länge $\Delta\psi$ und die Aberration errechnet:

$$l_{\odot a} = l_{\odot} + \Delta\psi - \frac{\kappa}{r_{\odot}} \quad , \tag{28.6}$$

wobei κ die Aberrationskonstante[2] und $r_{\odot}$ die wahre geozentrische Distanz des Sonnenmittelpunktes ist. Die *scheinbare geozentrische ekliptikale Breite* der Sonne ist der geometrischen im Rahmen der Genauigkeit dieser Ephemeride gleich[3].

Schließlich werden die *scheinbare geozentrische Rektaszension* $\alpha_{\odot}$ und *Deklination* $\delta_{\odot}$ der Sonne in einer weiteren Ephemeride bezogen auf den wahren Äquator und das wahre Äquinoktium des Beobachtungszeitpunktes in TDT angeboten, in der also die obigen Korrekturen bereits berücksichtigt sind[4].

Anmerkung: Das Wort „scheinbar“ wird in diesem Abschnitt in zweierlei Sinn verwendet:

1. zur Beschreibung der „scheinbaren“ Bewegung der Sonne um die Erde,
2. im üblichen Sinn der sphärisch-trigonometrischen Bezeichnung des geozentrischen Ortes eines Objektes, in dem die Korrekturen durch Präzession, Nutation, jährliche Aberration und Lichtzeit berücksichtigt sind. ◄

Für die Zwecke einer Satellitenbahnanalyse ist die hochgenaue JPL-Ephemeride oft nicht geeignet, sei es, dass das JPL-Band auf einem vorhandenen Rechner nicht verfügbar ist, sei es, dass die hier angebotene Genauigkeit für missionsanalytische Überlegungen überdimensioniert ist oder eine handlichere und durchsichtigere Aufarbeitung der Sonnenephemeride wünschenswert ist. Dazu können die in den folgenden beiden Unterabschnitten behandelten Formeln für die mittlere Sonne sowie die Entwicklung nach *Newcomb* für die wahre Sonne von Nutzen sein.

28.1.2 Die mittlere Sonne

Der Begriff „mittlere Sonne“ wird in unterschiedlichem Sinne verwendet, was zu Verwirrung und Fehlern führen kann. In der sphärischen Astronomie wird unter mittlerer Sonne eine *„fiktive mittlere Sonne“* verstanden, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Erdäquatorebene mit der Umlaufzeit ein tropisches Jahr scheinbar die Erde umläuft. Diese fiktive mittlere Sonne dient als Grundlage zur Berechnung der Sonnenzeit und ist daher auch in der Satellitenbahnmechanik von fundamentaler Bedeutung.

In himmelsmechanischem Sinne wird unter der mittleren Sonne jedoch die in ihrer (mittleren) Bahnebene also der Ekliptik umlaufende *gemittelte* scheinbare Sonne verstanden, deren periodische Bewegungsanteile durch Mittelung vernachlässigt werden und die als Umlaufzeit auch genau ein (mittleres) tropisches Jahr hat. Die mittlere scheinbare Sonne wird somit (wie

---

[1] „mean of date ecliptic system“

[2] siehe Anhang E1 (Band V)

[3] AA 1984, p. C2

[4] „true of date equatorial system“

auch in der Satellitenbahntheorie) durch Berücksichtigung aller säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) in den Elementen berechnet. Die säkular variierten („gestörten“) Elemente bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0 TDB[1] sind in Tabelle 28-3 zusammengestellt.

Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_\odot} = 1.000000979 + 12.5\times10^{-13}\,T\,[AU]$
Mittlere Exzentrizität	$\overline{e_\odot} = 0.0167092449 - 4.180\times10^{-5}\,T - 1.26\times10^{-7}\,T^2$
Mittlere Inklination	$\overline{i_\odot} \equiv 0°.0$
Mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\overline{\Omega_\odot} \equiv 0°.0$
Mittlere ekliptikale Länge des Perigäums	$\overline{\Gamma_\odot} = 282°.9383461 + 1°.719457222\,T - 0°.03350556\,T^2 - 3°.333\times10^{-6}\,T^3$
Mittlere mittlere Anomalie	$\overline{M_\odot} = 357°.5277233 + 35999°.05034\,T - 1°.60277777\times10^{-4}\,T^2 - 3°.33333\times10^{-6}\,T^3$
Geometrische mittlere Länge	$L_\odot = 280°.4660694 + 36000°.769797222\,T - 3°.5108333\times10^{-3}\,T^2 + 0°.0\,T^3$

Tabelle 28-3: Mittlere Bahnelemente der scheinbaren Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0

Hier ist T die Zeit in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0 in TDT:

$$T = \frac{(JD - 2451545.0)}{36525} \quad , \tag{28.7}$$

wenn JD das julianische Datum zum Beobachtungszeitpunkt in TDT bedeutet[2].

Die Berechnung des Beobachtungsortes der mittleren scheinbaren Sonne wird dadurch erleichtert, dass wegen $\overline{i_\odot} \equiv 0$ und $\overline{\Omega_\odot} \equiv 0$ die Bahnebene der mittleren scheinbaren Sonne für jeden Zeitpunkt in der momentanen Ekliptik verläuft, also die *ekliptikale Breite* der mittleren Sonne identisch verschwindet, also

$$\overline{b_\odot} \equiv 0 \quad . \tag{28.8}$$

Für die geometrische mittlere Länge der Sonne gilt nach Tabelle 28-3 die Beziehung

$$L_\odot = \overline{\Gamma_\odot} + \overline{M_\odot} \quad . \tag{28.9}$$

Entsprechend ergibt sich die *ekliptikale Länge* der mittleren scheinbaren Sonne aus

$$\overline{l_\odot} = \overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot} \quad . \tag{28.10}$$

[1] Anhang E6 (Band V)

[2] Anhang F (Band V)

Die wahre Anomalie der mittleren Sonne $\overline{\upsilon_\odot}$ kann mit Hilfe der exzentrischen Anomalie $\overline{E_\odot}$ unter Anwendung des üblichen Systems[1]

$$\begin{aligned} \overline{M_\odot} &= \overline{E_\odot} - \overline{e_\odot} \sin \overline{E_\odot} \\ \tan \frac{\overline{\upsilon_\odot}}{2} &= \sqrt{\frac{1+\overline{e_\odot}}{1-\overline{e_\odot}}} \tan \frac{\overline{E_\odot}}{2} \end{aligned} \tag{28.11}$$

oder

$$\cos \overline{\upsilon_\odot} = \frac{\cos \overline{E_\odot} - \overline{e_\odot}}{1 - \overline{e_\odot} \cos \overline{E_\odot}} \quad , \quad \sin \overline{\upsilon_\odot} = \frac{\sin \overline{E_\odot} \sqrt{1 - \overline{e_\odot}^2}}{1 - \overline{e_\odot} \cos \overline{E_\odot}} \tag{28.12}$$

berechnet werden.

Falls nicht allzu große Forderungen an die Genauigkeit gestellt werden, kann die Lösung der *Kepler*gleichung in diesen beiden Ausdrücken durch die *Mittelpunktsgleichung*[2]

$$\overline{\upsilon_\odot} = \overline{M_\odot} + 2\overline{e_\odot} \sin \overline{M_\odot} + \frac{5}{4} \overline{e_\odot}^2 \sin 2\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^3\right) \tag{28.13}$$

angenähert werden. Der Fehler beträgt dann größenordnungsmäßig maximal 1".

Die *geozentrische Distanz* der mittleren scheinbaren Sonne beträgt mit Formel (10.4) und wegen der angenommenen elliptischen Bewegung (mit dem elliptischen Kegelschnittparameter $p = a\left(1-e^2\right)$)

$$\overline{r_\odot} = \frac{\overline{a_\odot}\left(1 - \overline{e_\odot}^2\right)}{1 + \overline{e_\odot} \cos \overline{\upsilon_\odot}} \quad . \tag{28.14}$$

Bevor die scheinbaren geozentrischen Koordinaten der mittleren scheinbaren Sonne berechnet werden können, muss die Lichtzeit zur Berechnung der scheinbaren, also im Moment der Beobachtung gültigen Richtung berücksichtigt werden, da ja die Erde in der Lichtzeit ein Stück auf ihrer Bahn weitergewandert ist. Dies muss iterativ geschehen. Die Lichtzeit errechnet sich aus

$$\overline{\Delta t_\odot} = c\,\overline{r_\odot} \quad . \tag{28.15}$$

Mit diesem Wert werden $\overline{l_\odot}$ und $\overline{r_\odot}$ mit $\overline{b_\odot} = 0$ für den jeweils neuen Zeitpunkt $JD - \overline{\Delta t_\odot} \rightarrow JD$ so lange berechnet, bis sich diese Werte in einem vorgegeben Genauigkeitsrahmen nicht mehr ändern.

Der Iterationsprozess kann folgendermaßen ablaufen:

Gegeben sei der Beobachtungszeitpunkt t_B. Der Zeitpunkt für die reale Position der Sonne sei im n-ten Iterationsschritt $t^{(n)} = t_B - \overline{\Delta t_\odot}^{(n)}$. Der Anfangswert für die Zeitdifferenz aus (28.15) wurde mit $\overline{r_\odot} = \overline{r_\odot}(t_B)$ berechnet. Zum neuen Zeitpunkt werden aus (28.10) die ekliptikale Länge $\overline{l_\odot}\left(t^{(n)}\right)$ berechnet, über die Formeln (28.11) bis (28.14) die neue Entfernung $\overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)$

[1] siehe etwa in Abschnitt 10.1.3, Band III

[2] Formel (10.86) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

und damit die Zeitkorrektur $\overline{\Delta t_\odot}^{(n+1)} = c\,\overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)$. Der nächste Iterationsschritt geht von der korrigierten Zeit $t^{(n+1)} = t_B - \overline{\Delta t_\odot}^{(n+1)}$ aus. Der Iterationsprozess endet, wenn für einen vorgegeben Schranke Δ die Bedingung $\left|\overline{r_\odot}\left(t^{(n+1)}\right) - \overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)\right| < \Delta$ erfüllt ist.

Die erhaltene korrigierte geometrische ekliptikale Länge der mittleren scheinbaren Sonne $\overline{l_{\odot c}} := \overline{l_\odot}\left(t^{(n+1)}\right)$ mit der korrigierten Distanz $\overline{r_{\odot c}} := \overline{r_\odot}\left(t^{(n+1)}\right)$ wird entsprechend Formel (28.6) mit der Nutation in Länge $\Delta\psi$ auf den scheinbaren Wert korrigiert

$$\overline{l_{\odot a}} \;=\; \overline{l_{\odot c}} + \Delta\psi - \frac{\kappa}{\overline{r_{\odot c}}} \quad . \tag{28.16}$$

Die *scheinbare (geozentrische) Deklination* der mittleren scheinbaren Sonne beträgt dann[1] mit der Näherung (28.8)

$$\sin\overline{\delta_\odot} \;=\; \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \quad , \tag{28.17}$$

wobei $\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$ die wahre Schiefe der Ekliptik ist, die sich aus der mittleren Schiefe $\overline{\varepsilon}$ und der Nutation in Schiefe[2] $\Delta\varepsilon$ ergibt. Nach Anhang E.3 (Band V) ist bezogen auf J2000.0 TDT

$$\overline{\varepsilon} = 23°.439291111 - 0°.013004417\,T - 1°.63889\times10^{-6}\,T^2 - 5°.036\times10^{-7}\,T^3 + \cdots . \tag{28.18}$$

Mit

$$\cos\overline{\delta_\odot} \;=\; \sqrt{1-\sin^2\overline{\delta_\odot}}$$

folgt die *scheinbare (geozentrische) Rektaszension* der mittleren scheinbaren Sonne aus

$$\begin{aligned} \sin\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon \\ \cos\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.19}$$

Diese Koordinaten beziehen sich auf das wahre $\mathbf{p}_i$ − Äquatorsystem, d.h. das Koordinatensystem mit wahrem Äquator und wahrem Äquinoktium zum Beobachtungszeitpunkt[3]. In diesem System lautet der geozentrische Ortsvektor der mittleren scheinbaren Sonne

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{x}_{\odot a}} = \overline{r_\odot}\left[\overline{\alpha_\odot}, \overline{\delta_\odot}\right] = x^i\,\mathbf{p}_i = \\ &= \overline{r_\odot}\left\{\cos\overline{\delta_\odot}\cos\overline{\alpha_\odot}\,\mathbf{p}_1 + \cos\overline{\delta_\odot}\sin\overline{\alpha_\odot}\,\mathbf{p}_2 + \sin\overline{\delta_\odot}\,\mathbf{p}_3\right\} = \\ &= \overline{r_\odot}\left\{\cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\mathbf{p}_1 + \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon\,\mathbf{p}_2 + \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon\,\mathbf{p}_3\right\} \quad . \end{aligned} \tag{28.20}$$

Die mit den Daten der mittleren Sonne erreichbare Genauigkeit beträgt[4]

---

[1] Siehe etwa Formel (8.72) in Abschnitt 8.2.2 (Band II)

[2] siehe in Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[3] „true of date system“

[4] Nach SEIDELMANN, ed. [1992], p. 316

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_\odot &= 20'' \quad (\Leftrightarrow 15000\ \mathrm{km}) \\ \Delta\delta_\odot &= 5'' \quad (\Leftrightarrow 4000\ \mathrm{km}) \\ \Delta r_\odot &= 20'' \quad (\Leftrightarrow 15000\ \mathrm{km}) \quad . \end{aligned} \tag{28.21}$$

Die *Keplersche mittlere Bewegung* der mittleren scheinbaren Sonne ergibt mit dem obigen Wert für $\overline{a_\odot}$ den Wert

$$\overline{n_{\odot,Kep}} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{\overline{a_\odot}^3}} = 1.990983\times10^{-7}\ /\ s = 0°.985607335\ /\ d \quad . \tag{28.22}$$

Falls das Geschwindigkeitsverhalten der Sonne benötigt wird, können die Ableitungen $\dot{l}, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, \dot{x}_\odot$ mit den vorstehenden Ausdrücken abgeleitet werden. Zunächst wird der Geschwindigkeitsvektor gebildet

$$\dot{\overline{\mathbf{r}}}_{\odot a} = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{28.23}$$

Die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors sind

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\overline{r_\odot})^{\cdot}_s \cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) - \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\cdot}_s + (\upsilon_\odot)^{\cdot}_s\right]\sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \\ \dot{x}_2 &= (\overline{r_\odot})^{\cdot}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon - \overline{r_\odot}\,\dot{\varepsilon}_s\,\sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon + \\ &\quad + \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\cdot}_s + (\upsilon_\odot)^{\cdot}_s\right]\cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon \\ \dot{x}_3 &= (\overline{r_\odot})^{\cdot}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon + \overline{r_\odot}\,\dot{\varepsilon}_s\,\sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon + \\ &\quad + \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\cdot}_s + (\upsilon_\odot)^{\cdot}_s\right]\cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.24}$$

Die hier benötigten säkularen Variationen der *Kepler*elemente der scheinbaren Sonnenbewegung sind nach Tabelle 28-3

$$\begin{aligned} (a_\odot)^{\cdot}_s &= 12.5\times10^{-13}\,[AU\ /\ \text{Jahrh.}]\,(M_0)^{\cdot}_s \\ (e_\odot)^{\cdot}_s &= -4.180\times10^{-5} - 2.52\times10^{-7}\,T + \cdots\ [1\ /\ \text{Jahrh.}] \\ (\Gamma_\odot)^{\cdot}_s &= 1°.719457222 - 0°.06701112\,T^2 - 9°.999\times10^{-6}\,T^2 + \cdots\ [1\ /\ \text{Jahrh.}] \\ (M_\odot)^{\cdot}_s &= 35999°.05034 - 3°.20355554\times10^{-3}\,T - 9°.99999\times10^{-6}\,T^2 + \cdots\ [1\ /\ \text{Jahrh.}] \\ (L_\odot)^{\cdot}_s &= 36000°.769797222 - 7°.016666\times10^{-3}\,T + 0°.0\,T^2 + \cdots\ [1\ /\ \text{Jahrh.}] \quad . \end{aligned} \tag{28.25}$$

Aus der Mittelpunktsgleichung (28.13) folgt die säkulare Variation der wahren Anomalie auf Grund der Variation der Bahnparameter

$$\begin{aligned} (\upsilon_\odot)^{\cdot}_s &= (M_\odot)^{\cdot}_s\left[1 + 2\,\overline{e_\odot}\cos\overline{M_\odot} + \frac{5}{2}\,\overline{e_\odot}^2\cos 2\,\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^3\right)\right] + \\ &\quad + (e_\odot)^{\cdot}_s\left[2\sin\overline{M_\odot} + \frac{5}{2}\,\overline{e_\odot}\sin 2\,\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^2\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{28.26}$$

Die entsprechende säkulare Variation des Bahnradius lautet

$$\left(r_\odot\right)^{\cdot}_s = \frac{1}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}}\left\{\left(a_\odot\right)^{\cdot}_s\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right)-\left(e_\odot\right)^{\cdot}_s\left[2\,\overline{a_\odot}\,\overline{e_\odot}+\frac{\overline{a_\odot}\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right)\cos\overline{\upsilon_\odot}}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}}\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\upsilon_\odot\right)^{\cdot}_s\frac{\overline{a_\odot}\,\overline{e_\odot}\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right)\sin\overline{\upsilon_\odot}}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}}\right\}. \qquad (28.27)$$

Die säkularen Variationen der Schiefe der Ekliptik folgen aus der Entwicklung (28.18)

$$\dot{\varepsilon}_s = -0^\circ.013004417 - 3^\circ.27778\times10^{-6}\,T - 1^\circ.4108\times10^{-6}\,T^2 + \cdots\left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right]. \qquad (28.28)$$

Damit sind alle Variationen bekannt, die benötigt werden um den mittleren Geschwindigkeitsvektor der Sonne (28.23) mit den relativen Koeffizienten (28.24) berechnen zu können. Die säkulare Variation der (geometrischen) ekliptikalen Länge der Sonne ist aus $\left(L_\odot\right)^{\cdot}_s$ in (28.25) gegeben. Die säkularen Variationen der äquatorialen Winkelkoordinaten können mit den Ausdrücken (28.17) und (28.19) gebildet werden:

$$\left(\alpha_\odot\right)^{\cdot}_s\cos\overline{\delta_\odot} = \left[\left(\Gamma_\odot\right)^{\cdot}_s+\left(\upsilon_\odot\right)^{\cdot}_s\right]\left\{\cos\varepsilon\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\overline{\alpha_\odot}+\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\overline{\alpha_\odot}\right\}-$$
$$-\dot{\varepsilon}_s\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \qquad (28.29)$$
$$\left(\delta_\odot\right)^{\cdot}_s\cos\overline{\delta_\odot} = \left[\left(\Gamma_\odot\right)^{\cdot}_s+\left(\upsilon_\odot\right)^{\cdot}_s\right]\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon+\dot{\varepsilon}_s\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon \quad .$$

28.1.3 Wahre geozentrische Sonnenbewegung nach Newcomb

S. Newcomb [1898] veröffentlichte eine analytische Beschreibung der Sonnenbewegung durch Reihen, welche auch periodische Terme der Erdbewegung (Zweikörperbewegung) sowie periodische Einflüsse durch die Planeten enthält. Diese Theorie war lange Zeit die Basis für die Berechnung der Sonnenephemeriden in den *Astronomical Ephemeris*[1].

Mit modernen Rechnermethoden wurde die originale *Newcomb*sche Theorie auf die neue Fundamentalepoche J2000.0 umgerechnet, auf die baryzentrische dynamische Zeit TDB bezogen und an die entsprechende JPL-Ephemeride (DE200) bzw. die VSOP87-Theorie angepasst[2]. Die Ergebnisse der neuen Theorie werden aus Referenzgründen in diesem Abschnitt ohne eigene Herleitung wiedergegeben. Alle Größen der Theorie bilden wie bei der Originalarbeit ein in sich abgeschlossenes System, sie dürfen daher nicht durch andere (vielleicht „verbesserte“) Einzelwerte ersetzt werden. Gibt es neuere analytische Werte für die Erd- und Planetenbewegung sowie einen verbesserten Bezug auf ein Fundamentalsystem, muss die gesamte Theorie geschlossen angepasst werden.

---

[1] ausführlicher Titel bis 1980: *The American Ephemeris and Nautical Almanac* sowie: *The Astronomical Ephemeris*, ab 1981: *The Astronomical Almanac*

[2] siehe hierzu in: P. STUMPFF [1981], P. STUMPFF und J. H. LIESKE [1984] , P. BRETAGNON and G. FRANCOU [1988]. Die hier verwendete Umrechnung der *Newcomb*schen Daten auf die Epoche J2000.0 wurde von *O. Montenbruck* (1995) erstellt.

Die Entwicklungen lauten für die geozentrische ekliptikale Länge $l_\odot$, die geozentrische ekliptikale Breite $b_\odot$ und die geozentrische Distanz $r_\odot$ [*AU*] bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium zum gegebenen Datum

$$\begin{aligned} l_\odot &= M_3 + \Gamma_\odot + \Delta l_P + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 + \Delta l_6 + \Delta l_M + \Delta l_{\text{VSOP87}} \\ b_\odot &= \Delta b_2 + \Delta b_3 + \Delta b_4 + \Delta b_5 + \Delta b_6 + \Delta b_M \\ r_\odot &= 1.0001398 - 0.0000007 \times T + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6 + \Delta r_M \quad . \end{aligned} \tag{28.30}$$

In der hier verwendeten (modifizierten) *Newcomb*schen Sonnentheorie wird die geozentrische Position der Sonne mit folgender Genauigkeit garantiert:

im Mittel (RMS)	$\overline{\Delta l_\odot} = \pm 0''.4$	,	$\overline{\Delta b_\odot} = \pm 0''.1$	, $\overline{\Delta r_\odot} = \pm 1 \times 10^{-16}\ AU$
maximal	$\lvert\Delta l_\odot\rvert < 1''$	,	$\lvert\Delta b_\odot\rvert < 0''.2$	, $\lvert\Delta r_\odot\rvert < 2 \times 10^{-6}\ AU$.

Die einzelnen Terme werden wie folgt berechnet:

Die Zeiteinheit *T* wird in julianischen Jahrhunderten (TDB) in Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 gegeben. Wenn Jd die julianische Tagesnummer und *t* die Tageszeit in Sekunden sind, ist

$$T := \left(Jd - J_{2000} + \frac{t - t_{2000}}{86400} \right) \frac{1}{36525} \quad , \tag{28.31}$$

wobei die Fundamentalepoche gegeben ist zu

$$J_{2000} = 2451545 \quad , \quad t_{2000} = 43200 \quad . \tag{28.32}$$

Die **mittlere Anomalie der Erde** (= mittlere Anomalie der Sonne; mit $1^r \mathrel{\hat{=}} 360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$) beträgt[1]

$$\begin{aligned} M_3 &= \overline{M_\odot} = 0^r.9931266 + 99^r.9973604 \times T + \cdots = \\ &= 357°.5277233 + 35999°.05034\,T - 1°.60277777 \times 10^{-4}\,T^2 - 3°.33333 \times 10^{-6}\,T^3 \quad . \end{aligned} \tag{28.33}$$

Die **geometrische mittlere Länge des Perigäums der Sonne** lautet in der *Newcomb*schen Theorie[2]

$$\overline{\Gamma_\odot} = 282°.94031 + 6191''.2 \times T + 1''.1 \times T^2 \quad . \tag{28.34}$$

Im Korrekturglied Δl_P ist eine **langperiodische Korrektur** der ekliptikalen Länge der Sonne durch wechselseitige Einflüsse der Planeten enthalten:

$$\begin{aligned} \Delta l_P = {} & 6''.40 \sin\left(0^r.6983 + 0^r.0561 \times T\right) + 1''.87 \sin\left(0^r.5764 + 0^r.4174 \times T\right) + \\ & + 0''.27 \sin\left(0^r.4189 + 0^r.3306 \times T\right) + 0''.20 \sin\left(0^r.3581 + 2^r.4814 \times T\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.35}$$

[1] Der Index 3 bezieht sich auf den dritten Planeten des Sonnensystems

[2] Die in der *Newcomb*schen Theorien verwendeten Zahlenwerte haben geringfügige Abweichungen zu moderneren Werten, die in Tabelle 28-3 auf Seite 387 gelistet sind

Die Terme $\Delta l_j, \Delta b_j, \Delta r_j \; (j = 2, 3, 4, 5, 6)$ enthalten die kurzperiodischen Einflüsse der Erdbahn (die sogenannten *Kepler*-Terme, die aus der Mittelpunktsgleichung stammen) und der Planeten.

Die Erdterme sind

$$\begin{aligned}
\Delta l_3 &= -\left(0''.22 + 0''.06 \times T + 0''.01 \times T^2\right) \cos M_3 + \\
&\quad + \left(6892''.76 - 17''.35 \times T - 0''.05 \times T^2\right) \sin M_3 + \\
&\quad + \left(71''.98 - 0''.36 \times T\right) \sin 2M_3 + \\
&\quad + 1''.04 \sin 3M_3 \\
\Delta b_3 &= 0''.00 \qquad (28.36) \\
\Delta r_3 \frac{10^6}{AU} &= \left(-16707.37 + 42.04 \times T + 0.13 \times T^2\right) \cos M_3 - \\
&\quad - \left(0.54 + 0.15 \times T + 0.02 \times T^2\right) \sin M_3 + \\
&\quad + \left(-139.57 + 0.70 \times T\right) \cos 2M_3 - \\
&\quad - 1.75 \cos 3M_3 \quad .
\end{aligned}$$

Für die **Planetenterme** wird jeweils die auf J2000.0 bezogene mittlere Anomalie M_j $(j = 2, 4, 5, 6)$ benötigt. Damit können die Korrekturterme durch die Planeten berechnet werden.

Venus

Mittlere Anomalie:

$$M_2 = 0^r.1387306 - 162^r.5485917 \times T = 49°.943016 - 58517°.49301 \times T \qquad (28.37)$$

Korrektur in Länge:

$$\begin{aligned}
\Delta l_2 &= + 0''.03 \cos M_2 - 0''.07 \sin M_2 + \\
&\quad + 2''.35 \cos\left(M_3 - M_2\right) - 4''.23 \sin\left(M_3 - M_2\right) - \\
&\quad - 0''.10 \cos\left(M_3 - 2M_2\right) + 0''.06 \sin\left(M_3 - 2M_2\right) - \\
&\quad - 0''.06 \cos\left(2M_3 - M_2\right) - 0''.03 \sin\left(2M_3 - M_2\right) - \\
&\quad - 4''.70 \cos\left(2M_3 - 2M_2\right) + 2''.90 \sin\left(2M_3 - 2M_2\right) + \\
&\quad + 1''.80 \cos\left(3M_3 - 2M_2\right) - 1''.74 \sin\left(3M_3 - 2M_2\right) - \\
&\quad - 0''.67 \cos\left(3M_3 - 3M_2\right) + 0''.03 \sin\left(3M_3 - 3M_2\right) + \\
&\quad + 0''.03 \cos\left(4M_3 - 2M_2\right) - 0''.03 \sin\left(4M_3 - 2M_2\right) + \\
&\quad + 1''.51 \cos\left(4M_3 - 3M_2\right) - 0''.40 \sin\left(4M_3 - 3M_2\right) - \qquad (28.38) \\
&\quad - 0''.19 \cos\left(4M_3 - 4M_2\right) - 0''.09 \sin\left(4M_3 - 4M_2\right) + \\
&\quad + 0''.76 \cos\left(5M_3 - 3M_2\right) - 0''.68 \sin\left(5M_3 - 3M_2\right) - \\
&\quad - 0''.14 \cos\left(5M_3 - 4M_2\right) - 0''.04 \sin\left(5M_3 - 4M_2\right) -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -0''.05\cos(5M_3-5M_2) && -0''.07\sin(5M_3-5M_2)+\\
& +0''.15\cos(6M_3-4M_2) && -0''.04\sin(6M_3-4M_2)-\\
& -0''.03\cos(6M_3-5M_2) && -0''.03\sin(6M_3-5M_2)-\\
& && -0''.04\sin(6M_3-6M_2)-\\
& -0''.12\cos(7M_3-5M_2) && -0''.03\sin(7M_3-5M_2)
\end{aligned}
$$

Korrektur in Breite:

$$
\begin{aligned}
\Delta b_2 \;=\; & +0''.02\cos M_2 && +0''.02\sin M_2+\\
& +0''.02\cos(M_3-2M_2) && +\\
& +0''.01\cos(2M_3-M_2) && -0''.09\sin(2M_3-M_2)+\\
& +0''.01\cos(2M_3-M_2) && -0''.01\sin(2M_3-2M_2)+\\
& +0''.04\cos(3M_3-2M_2) && -0''.06\sin(3M_3-2M_2)+\\
& +0''.01\cos(3M_3-3M_2) && +\\
& +0''.01\cos(4M_3-2M_2) && -0''.01\sin(4M_3-2M_2)+\\
& +0''.18\cos(4M_3-3M_2) && -0''.10\sin(4M_3-3M_2)+\\
& +0''.01\cos(5M_3-3M_2) && -\\
& -0''.03\cos(5M_3-4M_2) && +\\
& +0''.01\cos(6M_3-4M_2) && -\\
& -0''.01\cos(6M_3-5M_2) && -\\
& -0''.02\cos(7M_3-5M_2) && -0''.01\sin(7M_3-5M_2)
\end{aligned}
\qquad (28.39)
$$

Korrektur in Entfernung:

$$
\begin{aligned}
\Delta r_2\,\frac{10^6}{AU} \;=\; & -0.16\cos M_2 && +0.07\sin M_2-\\
& -4.75\cos(M_3-M_2) && -2.64\sin(M_3-M_2)+\\
& +0.12\cos(M_3-2M_2) && +0.20\sin(M_3-2M_2)+\\
& +0.20\cos(2M_3-M_2) && -0.01\sin(2M_3-M_2)+\\
& +8.28\cos(2M_3-2M_2) && +13.42\sin(2M_3-2M_2)-\\
& -1.44\cos(3M_3-2M_2) && -1.57\sin(3M_3-2M_2)+\\
& +0.11\cos(3M_3-3M_2) && +2.43\sin(3M_3-3M_2)+\\
& +0.10\cos(4M_3-2M_2) && +0.09\sin(4M_3-2M_2)-\\
& -0.88\cos(4M_3-3M_2) && -3.36\sin(4M_3-3M_2)-
\end{aligned}
\qquad (28.40)
$$

$$
\begin{aligned}
&-0.38\cos\left(4M_3-4M_2\right)+0.77\sin\left(4M_3-4M_2\right)+\\
&+0.30\cos\left(5M_3-3M_2\right)+0.37\sin\left(5M_3-3M_2\right)-\\
&-0.11\cos\left(5M_3-4M_2\right)+0.43\sin\left(5M_3-4M_2\right)-\\
&-0.31\cos\left(5M_3-5M_2\right)+0.21\sin\left(5M_3-5M_2\right)-\\
&-0.06\cos\left(6M_3-4M_2\right)-0.21\sin\left(6M_3-4M_2\right)-\\
&-0.09\cos\left(6M_3-5M_2\right)+0.09\sin\left(6M_3-5M_2\right)-\\
&-0.18\cos\left(6M_3-6M_2\right)+0.02\sin\left(6M_3-6M_2\right)-\\
&-0.08\cos\left(7M_3-5M_2\right)+0.31\sin\left(7M_3-5M_2\right)
\end{aligned}
$$

Mars:

Mittlere Anomalie:

$$M_4 = 0^r.0543250+53^r.1666028\times T = 19°.557000-19139°.97701\times T \quad (28.41)$$

Korrektur in Länge:

$$
\begin{aligned}
\Delta l_4 = &-0''.22\cos\left(M_3-M_4\right) &&+0''.17\sin\left(M_3-M_4\right)-\\
&-1''.66\cos\left(M_3-2M_4\right) &&+0''.62\sin\left(M_3-2M_4\right)+\\
&+1''.96\cos\left(2M_3-2M_4\right) &&+0''.57\sin\left(2M_3-2M_4\right)+\\
&+0''.40\cos\left(2M_3-3M_4\right) &&+0''.15\sin\left(2M_3-3M_4\right)+\\
&+0''.53\cos\left(2M_3-4M_4\right) &&+0''.26\sin\left(2M_3-4M_4\right)+\\
&+0''.05\cos\left(3M_3-3M_4\right) &&+0''.12\sin\left(3M_3-3M_4\right)-\\
&-0''.13\cos\left(3M_3-4M_4\right) &&-0''.48\sin\left(3M_3-4M_4\right)-\\
&-0''.04\cos\left(3M_3-5M_4\right) &&-0''.20\sin\left(3M_3-5M_4\right)-\\
& &&-0''.03\sin\left(4M_3-4M_4\right)+\\
&+0''.05\cos\left(4M_3-5M_4\right) &&-0''.07\sin\left(4M_3-5M_4\right)-\\
&-0''.10\cos\left(4M_3-6M_4\right) &&+0''.11\sin\left(4M_3-6M_4\right)-\\
&-0''.05\cos\left(5M_3-7M_4\right) &&+\\
&+0''.05\cos\left(5M_3-8M_4\right) &&+0''.01\sin\left(5M_3-8M_4\right)
\end{aligned}
\quad (28.42)
$$

Korrektur in Breite:

$$
\begin{aligned}
\Delta b_4 = & &&+0''.01\sin\left(2M_3-2M_4\right)+\\
&+0''.01\cos\left(3M_3-4M_4\right)
\end{aligned}
\quad (28.43)
$$

Korrektur in Entfernung:

$$\begin{aligned}\Delta r_4 \frac{10^6}{AU} \;=\; & -0.21\cos\left(M_3-M_4\right) \quad -0.27\left(M_3-M_4\right)+\\ & +0.16\cos\left(M_3-2M_4\right) \quad +0.28\sin\left(M_3-2M_4\right)-\\ & -1.32\cos\left(2M_3-2M_4\right) \quad +4.55\sin\left(2M_3-2M_4\right)-\\ & -0.17\cos\left(2M_3-3M_4\right) \quad +0.46\sin\left(2M_3-3M_4\right)+\\ & +0.09\cos\left(2M_3-4M_4\right) \quad -0.22\sin\left(2M_3-4M_4\right)-\\ & -0.35\cos\left(3M_3-3M_4\right) \quad +0.15\sin\left(3M_3-3M_4\right)+\\ & +1.06\cos\left(3M_3-4M_4\right) \quad -0.29\sin\left(3M_3-4M_4\right)+\\ & +0.20\cos\left(3M_3-5M_4\right) \quad -0.04\sin\left(3M_3-5M_4\right)+\\ & +0.10\cos\left(4M_3-4M_4\right) \quad +0.04\sin\left(4M_3-4M_4\right)+\\ & +0.20\cos\left(4M_3-5M_4\right) \quad +0.14\sin\left(4M_3-5M_4\right)-\\ & -0.23\cos\left(4M_3-6M_4\right) \quad -0.22\sin\left(4M_3-6M_4\right)+\\ & +0.01\cos\left(5M_3-7M_4\right) \quad -0.14\sin\left(5M_3-7M_4\right)-\\ & -0.02\cos\left(7M_3-8M_4\right) \quad +0.10\sin\left(7M_3-8M_4\right)\end{aligned} \tag{28.44}$$

Jupiter

Mittlere Anomalie:

$$M_5 \;=\; 0^r.0551750+8^r.4293972\times T \;=\; 19°.863000-3034°.582992\times T \tag{28.45}$$

Korrektur in Länge:

$$\begin{aligned}\Delta l_5 \;=\; & +0''.01\cos\left(M_3+M_5\right) \quad -0''.07\sin\left(M_3+M_5\right)-\\ & -0''.31\cos M_5 \quad -2''.58\sin M_5-\\ & -7''.21\cos\left(M_3-M_5\right) \quad -0''.06\sin\left(M_3-M_5\right)-\\ & -0''.54\cos\left(M_3-2M_5\right) \quad -1''.52\sin\left(M_3-2M_5\right)-\\ & -0''.03\cos\left(M_3-3M_5\right) \quad -0''.21\sin\left(M_3-3M_5\right)-\\ & -0''.16\cos\left(2M_3-M_5\right) \quad +0''.05\sin\left(2M_3-M_5\right)+\\ & +0''.14\cos\left(2M_3-2M_5\right) \quad -2''.73\sin\left(2M_3-2M_5\right)+\\ & +0''.07\cos\left(2M_3-3M_5\right) \quad -0''.55\sin\left(2M_3-3M_5\right)+\\ & +0''.02\cos\left(2M_3-4M_5\right) \quad -0''.08\sin\left(2M_3-4M_5\right)+\\ & +0''.01\cos\left(3M_3-2M_5\right) \quad -0''.07\sin\left(3M_3-2M_5\right)-\\ & -0''.16\cos\left(3M_3-3M_5\right) \quad -0''.03\sin\left(3M_3-3M_5\right)-\\ & -0''.04\cos\left(3M_3-4M_5\right) \quad -0''.01\sin\left(3M_3-4M_5\right)\end{aligned} \tag{28.46}$$

Korrektur in Breite:

$$\begin{aligned}\Delta b_5 \;=\;& +0''.02\sin\left(M_3+M_5\right)+\\ &+0''.02\cos M_5 \;-\\ &-0''.02\sin\left(M_3-M_5\right)+\\ &+0''.01\cos\left(M_3-2M_5\right)\;-0''.17\sin\left(M_3-2M_5\right)-\\ &-0''.02\sin\left(M_3-3M_5\right)+\\ &+0''.01\cos\left(2M_3-M_5\right)+\\ &+0''.01\cos\left(2M_3-3M_5\right)\end{aligned} \tag{28.47}$$

Korrektur in Entfernung:

$$\begin{aligned}\Delta r_5\,\frac{10^6}{AU} \;=\;& +0.18\cos\left(M_3+M_5\right)\;+0.02\sin\left(M_3+M_5\right)+\\ &+0.52\cos M_5 \;-0.34\sin M_5+\\ &+0.13\cos\left(M_3-M_5\right)\;-16.27\sin\left(M_3-M_5\right)+\\ &+3.09\cos\left(M_3-2M_5\right)\;-1.12\sin\left(M_3-2M_5\right)+\\ &+0.38\cos\left(M_3-3M_5\right)\;-0.06\sin\left(M_3-3M_5\right)-\\ &-0.18\cos\left(2M_3-M_5\right)\;-0.31\sin\left(2M_3-M_5\right)+\\ &+9.23\cos\left(2M_3-2M_5\right)\;+0.48\sin\left(2M_3-2M_5\right)+\\ &+1.83\cos\left(2M_3-3M_5\right)\;+0.25\sin\left(2M_3-3M_5\right)+\\ &+0.25\cos\left(2M_3-4M_5\right)\;+0.06\sin\left(2M_3-4M_5\right)+\\ &+0.16\cos\left(3M_3-2M_5\right)\;+0.04\sin\left(3M_3-2M_5\right)+\\ &+0.08\cos\left(3M_3-3M_5\right)\;-0.64\sin\left(3M_3-3M_5\right)+\\ &+0.03\cos\left(3M_3-4M_5\right)\;-0.17\sin\left(3M_3-4M_5\right)\end{aligned} \tag{28.48}$$

Saturn

Mittlere Anomalie:

$$M_6 \;=\; 0^r.8816500+3^r.3938722\times T \;=\; 317°.394000-1221°.793992\times T \tag{28.49}$$

Korrektur in Länge:

$$\begin{aligned}\Delta l_6 \;=\;& -0''.32\sin M_6-\\ &-0''.08\cos\left(M_3-M_6\right)\;-0''.41\sin\left(M_3-M_6\right)+\\ &+0''.04\cos\left(M_3-2M_6\right)\;+0''.10\sin\left(M_3-2M_6\right)+\\ &+0''.04\cos\left(2M_3-2M_6\right)\;+0''.10\sin\left(2M_3-3M_6\right)\end{aligned} \tag{28.50}$$

Korrektur in Breite:

$$\Delta b_6 \;=\; -0''.01\sin\left(M_3-M_6\right) \tag{28.51}$$

Korrektur in Entfernung:

$$\begin{aligned}\Delta r_6 \frac{10^6}{AU} &= +0.01\cos M_6 + \\ &\quad +0.97\cos(M_3-M_6) \quad -0.18\sin(M_3-M_6) - \\ &\quad -0.23\cos(M_3-2M_6) \quad +0.10\sin(M_3-2M_6) - \\ &\quad -0.35\cos(2M_3-2M_6) \quad +0.13\sin(2M_3-2M_6)\end{aligned} \tag{28.52}$$

Die bisher zusammengestellten Terme beziehen sich auf das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems. Um auf den Erdmittelpunkt zu reduzieren, werden die folgenden Terme benutzt:

$$\begin{aligned}\Delta l_M &= +6''.45\sin D_{\leftmoon} - 0''.42\sin(D_{\leftmoon}-M_{\leftmoon}) + 0''.18\sin(D_{\leftmoon}+M_{\leftmoon}) + \\ &\quad +0''.17\sin(D_{\leftmoon}-M_3) - 0''.06\sin(D_{\leftmoon}+M_3)\end{aligned} \tag{28.53}$$

$$\Delta b_M = 0''.576\sin F_{\leftmoon} \tag{28.54}$$

$$\begin{aligned}\Delta r_M \frac{10^6}{AU} &= 30.76\cos D_{\leftmoon} - 3.06\cos(D_{\leftmoon}-M_{\leftmoon}) + 0.85\cos(D_{\leftmoon}+M_{\leftmoon}) - \\ &\quad -0.58\cos(D_{\leftmoon}+M_3) + 0.57(D_{\leftmoon}-M_3) \quad .\end{aligned} \tag{28.55}$$

Hier bedeuten[1] $D_{\leftmoon}$ die mittlere Elongation des Mondes von der Sonne (das „Mondalter“), $M_{\leftmoon}$ die mittlere Anomalie des Mondes und $F_{\leftmoon}$ das mittlere Argument der Breite des Mondes

$$\begin{aligned}D_{\leftmoon} &= 0^r.8274 + 1236^r.8531\times T = 297°.864 + 445267°.1160\times T \\ M_{\leftmoon} &= 0^r.3749 + 1325^r.5524\times T = 134°.964 + 477198°.8640\times T \\ F_{\leftmoon} &= 0^r.2591 + 1342^r.2278\times T = 93°.276 + 483202°.0080\times T \quad .\end{aligned} \tag{28.56}$$

Schließlich wird noch eine Korrektur in Länge benötigt, um die Sonnenephemeride auf die DE200-Ephemeride bzw. die VSOP87-Theorie beziehen zu können:

$$\Delta l_{\mathrm{VSOP87}} = 0''.87 + 1''.26\times T \quad . \tag{28.57}$$

Um die trigonometrischen Funktionen jeweils nur einmal auswerten zu müssen, werden die Additionstheoreme benutzt:

[1] vgl. die Bezeichnungen in Anhang E.3 (Band V)

$$
\begin{aligned}
\sin 2M_j &= 2\sin M_j \cos M_j \qquad (j = 2, 3, 4, 5, 6)\\
\cos 2M_j &= 2\cos^2 M_j - 1\\
\sin 3M_j &= \sin M_j \left(3 - 4\sin^2 M_j\right)\\
\cos 3M_j &= \cos M_j \left(4\cos^2 M_j - 3\right)\\
\sin 4M_j &= 4\sin M_j \cos M_j \left(2\cos^2 M_j - 1\right) = 2\sin 2M_j \cos 2M_j\\
\cos 4M_j &= 8\cos^4 M_j - 8\cos^2 M_j + 1 = 2\cos^2 2M_j - 1\\
\sin 5M_j &= \sin 3M_j \cos 2M_j + \cos 3M_j \sin 2M_j\\
\cos 5M_j &= \cos 3M_j \cos 2M_j - \sin 3M_j \sin 2M_j\\
\sin 6M_j &= \sin 3M_j \cos 3M_j + \cos 3M_j \sin 3M_j\\
\cos 6M_j &= \cos 3M_j \cos 3M_j - \sin 3M_j \sin 3M_j\\
\sin 7M_j &= \sin 4M_j \cos 3M_j + \cos 4M_j \sin 3M_j\\
\cos 7M_j &= \cos 4M_j \cos 3M_j - \sin 4M_j \sin 3M_j \quad .
\end{aligned}
\tag{28.58}
$$

Entsprechend können Ausdrücke der Art verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(k_3 M_3 - k_j M_j\right) &= \sin\left(k_3 M_3\right)\cos\left(k_j M_j\right) - \cos\left(k_3 M_3\right)\sin\left(k_j M_j\right)\\
\cos\left(k_3 M_3 - k_j M_j\right) &= \cos\left(k_3 M_3\right)\cos\left(k_j M_j\right) + \sin\left(k_3 M_3\right)\sin\left(k_j M_j\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{28.59}
$$

Werden die in diesem Abschnitt zusammengestellten Korrekturterme zur Berechnung der (scheinbaren) Sonnenbewegung näher betrachtet, zeigt sich unmittelbar, dass sich die Erde nicht in der Ekliptik bewegt, sondern von dieser durch Werte (in Breite $b_\odot$) abweicht, die durch die periodischen Einflüsse der Planeten stammen. Um die Ekliptik als Bezugsebene zu erhalten, muss also die wahre Bewegung der Erde relativ zur Sonne um die periodischen Einflüsse in Breite durch die Planeten reduziert werden.

Die hier wiedergegebenen Entwicklungen der *Newcomb*schen Theorie gestatten nur den Ort, nicht die Geschwindigkeit der Sonne, also nicht den aktuellen Zustand der Sonnenbewegung zu berechnen. Dazu können aber nach den Formeln (28.30) durch Differentiation die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
\dot{l}_\odot &= \dot{M}_3 + \dot{\Gamma}_\odot + \left(\Delta l_P\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_M\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_{\mathrm{VSOP87}}\right)^{\cdot}\\
\dot{b}_\odot &= \left(\Delta b_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_M\right)^{\cdot}\\
\dot{r}_\odot &= -0.0000007 \times \dot{T} + \left(\Delta r_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_M\right)^{\cdot}
\end{aligned}
\tag{28.60}
$$

gebildet werden, in denen die entsprechenden Variationsausdrücke aus den Beziehungen (28.31) bis (28.59) erhalten werden können. Für die Variation des Zeitintervalls ist

$$
\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{86400 \times 36525} \quad , \tag{28.61}
$$

die Variation der mittleren Anomalie der Erde nach Formel (28.33)

$$
\dot{M}_3 = 99^r.9973604 \times \dot{T} = 35999°.04974 \times \dot{T} \quad , \tag{28.62}
$$

die Variation der mittleren Länge des Sonnenperigäums[1] nach (28.34)

[1] Vgl. die leichte Abweichung dieses Wertes in den Werten (28.25)

$$\dot{\Gamma}_{\odot} = \left(6191''.2 + 2''.2 \times T\right)\dot{T} \tag{28.63}$$

usw.

Die Ergebnisse, die mit den bisher vorgestellten Ausdrücken erhalten werden, beziehen sich auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium zum gegebenen Zeitpunkt t (TDB). Für einen einheitlichen Vergleich mit anderen im Rahmen der sphärischen Astronomie erhaltenen Größen sowie zur Weiterverarbeitung werden die Ergebnisse in Bezug auf die Fundamentalepoche bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium benötigt. Dazu müssen die Ergebnisse mit Hilfe der Präzession auf die Fundamentalepoche und mit Hilfe einer geeigneten Drehung in das äquatoriale System transformiert werden. Dies wird in zwei Schritten durchgeführt: Drehung in das VSOP87-System und Drehung in das FK5-Referenzsystem.

Falls eine häufige Auswertung der gesamten *Newcomb*schen Sonnentheorie erforderlich ist, kann dies vorzugsweise mit Hilfe von *Tschebyscheff*-Approximationen (siehe in Anhang C (Band V)) durchgeführt werden. Es werden dazu in einem gewissen Zeitintervall, für die Sonne genügt erfahrungsgemäß etwa ein Monat (32 Tage), die *Tschebyscheff*-Koeffizienten c_k (siehe die Formeln (C.24) – (C.26)) berechnet, mit deren Hilfe zu jedem Zeitpunkt t (TDB) innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls der Funktionswert sowie die Ableitung mit den Koeffizienten c'_k aus Formel (C.35) und der Approximation in Formel (C.40) erhalten werden können. Damit kann die direkte Berechnung der Geschwindigkeitsanteile nach den Ausdrücken (28.60) vermieden werden.

28.1.4 Jahreslängen

Der Umlauf der wahren bzw. mittleren scheinbaren Sonne um die Erde wird als Jahr bezeichnet. Je nach Bezug sind unterschiedliche Jahresdefinitionen in Gebrauch.

28.1.4.1 Tropisches Jahr

Das tropische Jahr ist auf den Frühlingspunkt bezogen. Der Frühlingspunkt ist zugleich der aufsteigende Knoten der Sonnenbahn bezüglich des Erdäquators. Die Zeitdauer, welche die Sonne auf ihrer jährlichen Wanderung von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt benötigt, ist somit ein tropisches Jahr. Dieses ist zugleich die Zeitdauer, welche die in der Erdäquatorebene sich bewegende fiktive mittlere Sonne für einen Umlauf benötigt.

Wenn mit der wahren geometrischen Länge der Sonne $l_{\odot}$ etwa nach Abschnitt 28.1.3 auch deren Variation $dl_{\odot} / dt =: (l_{\odot})^{\cdot}$ gegeben ist, kann die Länge des wahren tropischen Jahres berechnet werden aus

$$P_{\odot,t} = \int_0^{2\pi} \frac{dl_{\odot}}{(l_{\odot})^{\cdot}} \quad . \tag{28.64}$$

Die Herleitung in Abschnitt 28.1.3 lässt vermuten, dass diese Jahreslänge nicht konstant ist, sondern säkularen und periodischen Variationen unterworfen ist.

Das mittlere tropische Jahr wird aus der säkularen mittleren Änderung der geometrischen mittleren Länge $L_{\odot}$ berechnet. Nach Tabelle 28-3 (auf Seite 389) hat die mittlere tropische Bewegung der Sonne (mit der Zeitdauer T in julianischen Jahrhunderten)

$$n_\odot = n_{\odot s} - \frac{3°.5108\times10^{-3}}{T}T^2 + \cdots = 0.017202792 - 1.6776186\times10^{-9}\,T + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \quad (28.65)$$

Damit ergibt sich die Dauer des mittleren tropischen Jahres in mittleren Sonnentagen zu

$$\overline{P_{\odot,t}} = \frac{2\pi}{n_\odot} = 365.242189933\left[1 + 4.2187725\times10^{-15}\,T + \cdots\right]d \quad . \quad (28.66)$$

Der Zahlenwert zeigt eine allmähliche Vergrößerung des tropischen Jahres als Folge einer Vergrößerung des mittleren Abstandes der Erde zur Sonne[1] (vgl. den Wert für die große Bahnhalbachse $\overline{a_\odot}$ in Tabelle 28-3).

28.1.4.2 Sternjahr

Im astronomischen Sinn bedeutend ist der Begriff des *Sternjahres*[2]: hierbei handelt es sich um die Anzahl der Rotationen der Erde im Verlauf eines tropischen Jahres. Der mittlere Sonnentag ist auf den Frühlingspunkt bezogen. Da die Erde sich in einem tropischen Jahr einmal um die Sonne bewegt kommt noch eine Rotation dazu. Das Sternjahr umfasst somit eine Rotation mehr. Die Dimension sind mittlere Sterntage[3]. Bei Vernachlässigung der säkularen Veränderung in Ausdruck (28.66) hat das Sternjahr den Betrag

$$\overline{P_{St}} = 1 + \overline{P_{\odot,t}} = 366.242189933 \quad . \quad (28.67)$$

Die Anzahl der Rotationen der Erde in Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt während eines tropischen Jahres lässt die tropische Rotationsgeschwindigkeit der Erde berechnen aus

$$\dot\Theta = \frac{\overline{P_{st}}}{\overline{P_{\odot,t}}} = 1 + \frac{1}{\overline{P_{\odot,t}}} = 1.0027379092649 \quad \left[\text{Erdrotationen/d}\right]. \quad (28.68)$$

Da eine vollständige Rotation den Winkel 360° umfasst, kann man auch setzen[4]

$$\dot\Theta = 360°\left(1 + \frac{1}{\overline{P_{\odot,t}}}\right) = 360°.9856473354 \quad [1/\text{d}] = 4°.17807461937\times10^{-3}[1/s] = \\ = 7.29211585468\times10^{-5}[1/s] \quad . \quad (28.69)$$

Da die mittlere tropische Bewegung der Sonne nach Beziehung (28.66) auch in der Form $n_\odot = 360°/\overline{P_{\odot.t}}$ geschrieben werden kann, gilt auch

$$\dot\Theta = 1 + n_\odot\left[\text{Erdrotationen/Zeit}\right] = \frac{360°}{86400\,\text{s}} + n_\odot\left[\text{Grad/s}\right] \quad . \quad (28.70)$$

---

[1] Achtung: Diese Aussage ist in der Literatur umstritten. Etwa nach SEIDELMANN P. K. et al. [1992], p. 576 vergrößert sich die Länge im julianischen Jahrhundert um 0.00000615359 d.

[2] mehr dazu in Abschnitt 9.1.2 (Band II)

[3] Achtung: im englischen Sprachgebrauch wird der Begriff „sidereal" in leicht zu verwechselnden unterschiedlichen Bezügen verwendet: „sidereal time" ist die Sternzeit, welche die Rotation der Erde bei Bezug auf den Frühlingspunkt beschreibt. „sidereal year, sidereal month, sidereal motion" stellt dagegen die Bewegung eines Objektes bei Bezug auf den Fixsternhimmel dar. Der Unterschied zwischen den Bezügen muss sorgfältig beachtet werden.

[4] Weitere Zahlenwerte in unterschiedlichen Dimensionen in Anhang E2, Tabelle 7 (Band V)

Diese Beziehung ist bei Untersuchungen der sonnensysnodischen Bewegung von Erdsatelliten von zentraler Bedeutung.

28.1.4.3 Siderisches Jahr

Da sich der Frühlingspunkt auf Grund der Präzession längs der Ekliptik in westlicher Richtung verschiebt, also der Sonnenbewegung entgegenkommt, dauert ein siderischer auf den Fixsternhimmel bezogener Umlauf länger als ein tropischer. Entsprechend ist die siderische Bewegung der Sonne langsamer als die tropische. Mit den Beziehungen in Kapitel 25 lautet die siderische Bewegung der Sonne mit der (allgemeinen) Präzession $p_a = p_L + \cdots$

$$l_{\odot,sid} = (l_\odot)^{\cdot} - p_a \quad . \tag{28.71}$$

Die Präzessionskonstante pro julianischem Jahrhundert beträgt[1]

$$p_L = 5029''.0966 + 2''.22226T - 0''.000042T^2 + \cdots = 6.67531828 \times 10^{-7} / d + \cdots \quad . \tag{28.72}$$

Die mittlere siderische Bewegung der Sonne beträgt dann mit Formel (28.65)

$$\overline{n_{\odot,sid}} = n_\odot - p_L = 0.0172021245 / d + \cdots \; . \tag{28.73}$$

Das mittlere siderische Jahr beträgt dann

$$\overline{P_{\odot,sid}} = \frac{2\pi}{n_{\odot,sid}} = 365.256356492\, d + \cdots \quad . \tag{28.74}$$

28.1.4.4 Anomalistisches Jahr

Das anomalistische Jahr ist die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der (scheinbaren) Sonne durch das Perigäum. Der Bezug auf das Perigäum wird durch die mittlere Anomalie $M_\odot$ erfasst. Um das mittlere anomalistische Jahr zu berechnen, wird nach Tabelle 28-3 (auf Seite 389) von der säkularen Variation der mittleren mittleren Anomalie ausgegangen

$$\overline{n_{\odot,anom}} = \left(M_\odot\right)^{\cdot}_s = 35999°.05034 / T + \cdots = 0.017201970 / d \; + \cdots \; . \tag{28.75}$$

Das mittlere anomalistische Jahr hat somit den Betrag

$$\overline{P_{\odot,anom}} = \frac{2\pi}{\left(M_\odot\right)^{\cdot}_s} = 365.259635344 + \cdots \; . \tag{28.76}$$

Das anomalistische Jahr ist länger als das mittlere tropische Jahr. Grund dafür ist, dass das Perigäum sich, wie aus der Formel für $\overline{M_\odot}$ in Tabelle 28-3 abzulesen ist, in positiver Richtung längs der Sonnenbahn bewegt, also der Sonne vorausläuft. Dieser Effekt wird auf planetare Einflüsse („Störungen“) zurückgeführt[2].

---

[1] P. K. SEIDELMANN et al. [1992], p.104

[2] siehe etwa GREEN, R. M. [1985], p.241

28.1.4.5 Finsternis Jahr

In der Berechnung der Sonnen und Mondfinsternisse spielt das Finsternisjahr[1] eine besondere Rolle: Es ist der Zeitraum, wann die Sonne zweimal nacheinander den Bahnknoten des Mondes durchläuft. Nur wenn sich die Sonne in der Nähe eines Mondknotens befindet, kann eine Finsternis stattfinden.

Pro Tag bewegt sich die Sonne[2] im Mittel um $n_{\odot} = 0°.985647240/d + \cdots$. Der Mondknoten[3] bewegt sich pro Tag um $\dot{\Omega}_{\mathbb{C}s} = 0°.052953765/d + \cdots$. Die relative Bewegung zwischen Sonne und Mondknoten beträgt dann, da sich beide in derselben Richtung bewegen,

$$n_{\odot/\mathbb{C}_\Omega} := n_{\odot} + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}s} = 1°.038600965/d + \cdots \quad . \tag{28.77}$$

Das Finsternisjahr hat dauert daher

$$P_{eclipse} = \frac{2\pi}{n_{\odot/\mathbb{C}_\Omega}} = 364.620128551d + \cdots \quad . \tag{28.78}$$

28.1.4.6 Das Besselsche Jahr

Aus historischen Gründen sei auf das *Bessel*sche Jahr (auch genannt „annus fictus“, bisweilen auch „astronomisches Jahr“) hingewiesen, das in der Astronomie bis zum Ende des 20. Jahrhunderts als grundlegender Bezug verwendet wurde. Als Beginn des *Bessel*schen Jahres wurde der Zeitpunkt gewählt, wenn die fiktive mittlere Sonne[4] die Rektaszension

$$\alpha_{\bar{\odot}B} = 280° \triangleq 18^h\,40^m\,0^s.0 \tag{28.79}$$

durchläuft. Dieser exakt definierte Zeitpunkt ist von allen Unregelmäßigkeiten eines gewählten Zeitmaßes unabhängig. Da dieser Zeitpunkt stets in der Nähe des Beginns des bürgerlichen Jahres liegt, wurde er durch die Schreibweise[5] B1975.0, B1976.0, usw. bezeichnet.[6]

Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch die Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}B}$ wird als *Bessel*sches Jahr bezeichnet. Der Unterschied zu einem tropischen Jahr ist quantitativ sehr klein.

BEISPIEL: Der Beginn des *Bessel*schen Jahres 1975.0 hat das Datum 1974-12-32/23:20:37.9.

Anmerkung: weitere Definitionen eines Jahres:

- Weitere Begriffe spielen in der sphärischen Astronomie und damit auch der Satellitenbahnanalyse keine Rolle (siehe hierzu in Band I: ägyptisches Jahr, bürgerliches Jahr, julianisches Jahr, Mondjahr (12 Monate zu 30 Tagen), Schaltjahr, Kalenderjahr, usw.).◄

---

[1] Englisch: „Eclipse year“

[2] Zahlenwert aus Tabelle 9-1 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

[3] Zahlenwert aus Formel (29.19) in Abschnitt 29.1.3.2

[4] siehe in Abschnitt 28.2.1

[5] wenn keine Verwechslungen zu befürchten waren, wurde meist der Buchstabe „B“ zur Kennzeichnung der *Bessel*schen Epoche weggelassen. Man muss dies berücksichtigen, wenn heutige auf die julianische Epoche J2000.0 bezogene Zahlenwerte mit früheren Zahlenwerten verglichen werden sollen.

[6] Weiteres zur *Bessel*schen Epoche in Anhang F.2 (Band V)

28.2 Die näherungsweise Sonnenbewegung bezogen auf den Erdäquator

Die Kenntnis der Bewegung der Sonne ist essentiell für das Leben auf der Erde, insbesondere für die Zeiteinteilung (Abschnitt 28.3) sowie bei Untersuchungen der sonnensynodischen Bewegung von Erdsatelliten (Abschnitt 28.5). Die Bezugsebene ist in diesen Fällen die Erdäquatorebene. Wie für Erdsatelliten, deren Bezug zur Äquator durch den aufsteigenden Knoten festgelegt wird, ist auch für die scheinbare Bewegung der Sonne deren aufsteigender Knoten der Bezugspunkt, nämlich der Frühlingspunkt. Die Projektion der Sonnenbewegung auf den Äquator liefert das Kriterium für eine Relation zur Satellitenbewegung wie auch der Bezug der Satellitenbewegung zum Äquator ein fundamentaler Bezug für eine Bahnanalyse ist. Allgemeiner Bezug ist eine fiktive gleichförmig im Äquator um die Erde umlaufende Pseudosonne, die im Folgenden beschrieben wird. Anschließend wird der Bezug der wahren Sonne zu dieser fiktiven unter verschiedenen Genauigkeitsaspekten untersucht.

28.2.1 Die fiktive mittlere Sonne

Die fiktive mittlere Sonne ist ein gedachter Punkt, der sich längs des Äquators völlig gleichförmig mit der mittleren tropischen Geschwindigkeit $n_\odot$ der wahren Sonne bewegt (siehe in Tabelle 28-3 auf Seite 389). Die fiktive mittlere Sonne vollendet einen Umlauf um die Erde in genau einem tropischen Jahr wie die wahre Sonne auf ihrer Bahn.

Die fiktive mittlere Sonne hat die Rektaszension

$$\alpha_{\bar{\odot}} = \alpha_{\bar{\odot},0} + n_\odot \left(t - t_0\right) \ , \tag{28.80}$$

wenn $\alpha_{\bar{\odot},0}$ ein bekannter Anfangswert zu einer Epoche t_0 ist. Die Berechnung kann etwa nach Tabelle 28-3 (auf Seite 389) mit Hilfe der geometrischen mittleren Länge erfolgen:

$$\alpha_{\bar{\odot}} = L_\odot \ = \overline{\Gamma_\odot} + \overline{M_\odot} \quad . \tag{28.81}$$

Bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 ist, wenn T die Zeit in julianischen Jahrhunderten ist:

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{\odot}} &= 18^h 41^m 51^s.856656 + 8640184^s.75135\,T - 0^s.014706\,T^2 = \\ &= 280°.4660694 + 36000°.769797222\,T - 3°.5108333 \times 10^{-3}\,T^2 = \\ &= 4.895056351 + 628.331966214\,T - 0.000061276\,T^2 \quad . \end{aligned} \tag{28.82}$$

BEISPIEL 1: Am 21. März 1998, um $5^h31^m0^s.0$ U.T. lautet bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 die Zeitdifferenz T = -0.037817115 julianische Jahrhunderte. Die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne beträgt $\alpha_{\bar{\odot}} = 359°.015069$.◄

BEISPIEL 2: Frühlingsanfang findet definitionsgemäß statt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt durchläuft, wenn ihre Rektaszension den Wert $\alpha_\odot = 0°.0$ annimmt. Im Jahr 1967 findet dieses Ereignis nach den Zahlenangaben im astronomischen Jahrbuch zu dem Zeitpunkt 1967-03-21/07:37:42.89 U.T. statt. ◄

28.2.2 Übersicht über die Bewegung der Sonne in der Ekliptik

Die geozentrischen ekliptikalen Koordinaten Länge $l_\odot$, Breite $b_\odot$ und Radius $r_\odot$ seien nach einer der Methoden in Abschnitt 28.1.1 oder 28.1.3 oder aus der JPL-Ephemeride bekannt. Mit der Nutation in Länge[1] $\Delta\psi$ und der jährlichen Aberration $-K/r_\odot$ ($K = 20''.49552$ ist die Aberrationskonstante[2] haben ekliptikale Länge und Breite die Werte

$$l_{\odot,a} = l_\odot + \Delta\psi - \frac{K}{r_\odot} \quad , \quad b_{\odot,a} = b_\odot \quad . \tag{28.83}$$

Um einen Überblick über das Bewegungsverhalten der ekliptikalen Sonne zu bekommen, wird die Bewegung auf die mittlere durch die mittlere Anomalie $M_\odot$ geprägte Bewegung bezogen. Dazu wird die wahre Anomalie der Sonne benötigt, die auf das Perigäum der Sonne mit dem Argument des Perigäums $\Gamma_\odot$ bezogen ist. Die wahre Anomalie kann berechnet werden aus

$$\upsilon_\odot = l_{\odot,a} - \Gamma_\odot = M_\odot + 2e_\odot \sin M_\odot + \frac{5}{4}e_\odot^2 \sin 2M_\odot + O\left(e_\odot^3\right) \quad . \tag{28.84}$$

Als Mittelpunktsgleichung[3] wird der Ausdruck

$$M_g := \upsilon_\odot - M_\odot \tag{28.85}$$

bezeichnet. Im Fall der Sonnenbewegung mit der Exzentrizität der Sonnenbahn[4] $e_\odot = 0.0167092 + \cdots$ folgt der Näherungswert

$$M_g = \upsilon_\odot - M_\odot \approx 114'.8840 \sin M_\odot + \cdots \quad . \tag{28.86}$$

Die wahre Sonne kann also maximal um 2 Grad der mittleren Sonne in der Ekliptik vorauseilen bzw. hinter dieser zurückbleiben.

Anmerkung:

Vergleichswerte[5]: *Ptolemäus:* $\left(\upsilon_\odot - M_\odot\right)_{\max} = 143'$, *Kopernikus:* $\left(\upsilon_\odot - M_\odot\right)_{\max} = 111'$.◀

Einen Überblick über die Bewegung der wahren Sonne vermittelt die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der wahren Sonne. Die Entwicklung (28.84) liefert

$$\frac{dl_{\odot,a}}{dt} \approx \frac{dl_\odot}{dt} = n_\odot\left(1 + 2e_\odot \cos M_\odot + \frac{5}{2}e_\odot^2 \cos 2M_\odot + \cdots\right) \quad . \tag{28.87}$$

Mit dem Zahlenwert der mittleren tropischen Sonnenbewegung[6] und der Exzentrizität der Sonnenbahn wird näherungsweise

---

[1] Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] Abschnitt 9.8.4 (Band II)

[3] siehe im Fall der mittleren Bewegung in Formel (28.13) auf Seite 388, sowie allgemein Formel (10.87) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

[4] die genauen Zahlenwerte in Anhang E.6 (Band V)

[5] aus A. DANJON [1980], p. 63

[6] etwa nach Tabelle 9-1 (Abschnitt 9.1.1.1, Band II)

$$\frac{dl_\odot}{dt} = 3548''.330065 + 118''.509880\cos M_\odot + \cdots \quad . \tag{28.88}$$

Tabelle 28-4 gibt einen Überblick über den in einem (mittleren Sonnen-) Tag zurückgelegten Bahnbogen der Sonne längs der Ekliptik. Man sieht: Im Nordwinter hat die Sonne es am eiligsten, was dadurch begründet ist, dass sie sich dann in der Nähe des Perigäums befindet.

	Perigäum		Apogäum	
$M_\odot$	0°	90°	180°	270°
Datum	2. Januar	3. April	3. Juli	2. Oktober
υ	0°	91°55′	180°	268°5′
$dl_\odot / dt$	61°7″	59°8″	57°9″	59°8″

Tabelle 28-4: der tägliche Bahnbogen der Sonne längs der Ekliptik

28.2.3 Die Reduktion der wahren Sonne auf den Äquator

Den scheinbaren ekliptikalen Koordinaten $(l_{\odot a}, b_{\odot a})$ sind die äquatorialen Winkelkoordinaten $(\alpha_{\odot a}, \delta_{\odot a})$ nach Drehung um die wahre Schiefe der Ekliptik ε mit Transformation (8.72) zugeordnet[1]

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \cos l_{\odot a}\cos b_{\odot a} \\ \sin\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\cos\varepsilon - \sin b_{\odot a}\sin\varepsilon \\ \sin\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\sin\varepsilon + \sin b_{\odot a}\cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.89}$$

Da die ekliptikale Breite der Sonne im Bogensekundenbereich ist, kann diese Transformation durch folgenden Ausdruck ersetzt werden, wenn die Breite der Sonne in Bogensekunden gegeben ist:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \cos l_{\odot a} \\ \sin\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\cos\varepsilon - 19.29\, b''_\odot 10^{-7} \\ \sin\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\sin\varepsilon + 44.48\, b''_\odot 10^{-7} \quad . \end{aligned} \tag{28.90}$$

Um einen anschaulichen Eindruck von der Bewegung der Sonne und ihrer Deutung im alltäglichen Leben zu bekommen, wird die Bewegung der Sonne mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator auf den Erdäquator bezogen. Dazu wird die ekliptikale Breite der Sonne vernachlässigt und statt der vorstehenden Transformation der Ausdruck

$$\tan\alpha_\odot = \cos\varepsilon\tan l_\odot \tag{28.91}$$

[1] Abschnitt 8.2.2 (Band II)

verwendet. Dieser wird wie in Abschnitt 24.2.5 (auf Seite 300) nach dem Argument der Breite der Sonne in ihrer Bahn entwickelt. Da das Argument der Breite im Fall der Sonne der ekliptikalen Länge der Sonne gleich ist, ergibt der Ausdruck (24.45)

$$\alpha_\odot = l_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2l_\odot + \frac{1}{2}\tan^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4l_\odot - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\varepsilon}{2}\sin 6l_\odot + \cdots \quad . \tag{28.92}$$

Setzt man hier um einen größenordnungsmäßigen Näherungsausdruck zu erhalten den Wert der mittleren Schiefe der Ekliptik ein, wird

$$\alpha_\odot \approx l_\odot - 147'.9114\sin 2l_\odot + 3'.2\sin 4l_\odot - 5''.0\sin 6l_\odot + \cdots \quad . \tag{28.93}$$

Als Reduktion auf den Äquator wird der Ausdruck bezeichnet

$$R_{red} := \alpha_\odot - l_\odot \quad . \tag{28.94}$$

28.2.4 Die Bewegung der wahren Sonne bezogen auf den Äquator

Die Kombination aus Mittelpunktsgleichung und Reduktion auf den Äquator führt auf den direkten (allerdings näherungsweisen) Bezug der Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne und über die mittlere Anomalie $M_\odot = M_{\odot 0} + n_\odot\left(t - t_0\right) + \cdots$ zur Zeit *t*. Dazu wird die ekliptikale Länge mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung (28.84) in die Reduktion auf den Äquator (28.92) eingesetzt.

Um einen übersichtlichen Näherungsausdruck zu erhalten werden in der Entwicklung (28.93) die Ausdrücke $\sin 2l_\odot$, $\sin 4l_\odot$ nach Potenzen der Exzentrizität $e_\odot$ entwickelt, wobei alle Glieder mit Potenzen $e_\odot^2$ und höher vernachlässigt werden. Dann ergibt sich etwa

$$\begin{aligned}
\sin 2l_\odot &= \sin\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) + 4e_\odot\sin M_\odot + \cdots\right] = \\
&= \sin\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right]\cos\left[4e_\odot\sin M_\odot\right] + \cos\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right]\sin\left[4e_\odot\sin M_\odot\right] + \cdots = \\
&= \sin\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right] + 4e_\odot\cos\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right]\sin M_\odot + \cdots = \\
&= \sin\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right] + \\
&+ 2e_\odot 2\cos\left[\frac{1}{2}\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot + 2\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right]\sin\left[\frac{1}{2}\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot - 2\Gamma_\odot - M_\odot\right)\right] + \cdots = \\
&= \sin\left[2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right)\right] + 2e_\odot\sin\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) - 2e_\odot\sin\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{28.95}$$

Damit ist es nun möglich, die Rektaszension der Sonne näherungsweise nach der mittleren Anomalie der Sonne zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
\alpha_\odot = \Gamma_\odot + M_\odot + 2e_\odot\sin M_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) - \\
- 2e_\odot\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) + 2e_\odot\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{28.96}$$

Dieser Ausdruck erlaubt die Interpretation, dass die Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der Sonne bei Bezug auf den Äquator in erster Näherung Amplituden von 4 Monaten, einem halben Jahr und einem ganzen Jahr haben. Werden noch die letzten beiden Glieder wegen ihrer sehr kleinen Koeffizienten vernachlässigt, bleibt der Näherungsausdruck

$$\alpha_\odot = \Gamma_\odot + M_\odot + 114'.3569\sin M_\odot - 147'.9114\sin 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \quad . \tag{28.97}$$

Einen Überblick über das Bewegungsverhalten der in den Äquator projizierten wahren Sonne vermittelt ihre scheinbare Winkelgeschwindigkeit längs des Äquators:

$$\frac{d\alpha_\odot}{dt} = n_\odot\left(1 + 2e_\odot\cos M_\odot + \frac{5}{2}e_\odot^2\cos 2M_\odot - 2\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots\right) \quad . \quad (28.98)$$

Um die Extrema dieser Bewegung zu finden, wird der Differentialquotient des vorstehenden Bewegungsausdrucks gleich Null gesetzt:

$$fct\left(M_\odot\right) \equiv -e_\odot\sin M_\odot + 2\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) = 0 \quad . \quad (28.99)$$

Im Fall der Sonne gelten folgende Zahlenwerte, wobei ($e_\odot$, ε, $\Gamma_\odot$) als Konstante angenähert werden:

$$fct\left(M_\odot\right) \equiv -57'.2\sin M_\odot + 295'.8\sin 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) = 0 \quad . \quad (28.100)$$

$M_\odot$	$82°16'21''.5$	$165°21'04''.248$	$251°28'18''.552$	$347°54'44''.820$
Tage nach Perigäum	83.47066 d	167.75896 d	255.13366 d	352.97863 d
Datum	26. März	18. Juni	14. Sep.	20. Dez.
$\alpha_\odot$	$0^h\,27^m\,6^s.62$	$5^h\,56^m\,00^s.49$	$11^h\,34^m\,04^s.145$	$18^h\,03^m\,18^s.426$
Tage nach Frühlingspunkt	6.87628 d	90.29806 d	176.04397 d	274.77046 d
$d\alpha_\odot / dt$	$217^s.6343/d$	$249^s.27371$/d	$214^s.04369$/d	$264^s.58915$
$\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot$	$-18^s.9211/d$	$12^s.71834$/d	$-22^s.51168$/d	$28^s.03379$
wahre Sonne	langsam (rel. Min.)	schnell (rel. Max.)	am langsamsten (abs. Min.)	am schnellsten (abs. Max.)
Wahrer Sonnentag	$23^h\,59^m\,41^s.08$	$24^h\,0^m\,12^s.72$	$23^h\,59^m\,37^s.49$	$24^h\,0^m\,28^s.03$

Tabelle 28-5: Die Extremalwerte des täglichen Bahnbogens der Sonne längs des Äquators[1] und die extremale Dauer des Rotationssonnentages

[1] die Zahlenwerte können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern. Aktuelle Zahlenwerte für 2018

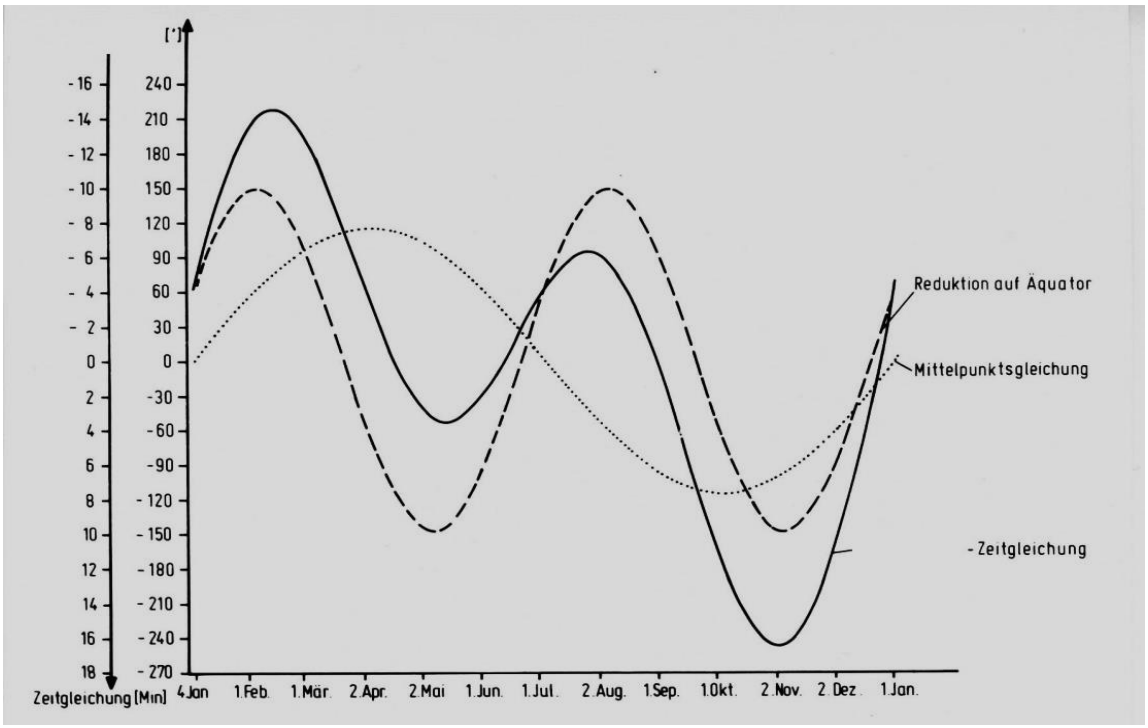


Bild 28-1: Die überlagerte jährliche Variation der Rektaszension der wahren Sonne bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\odot} - \alpha_{\bar{\odot}}$ im Verlauf eines Jahres. Der negative Wert dieser Differenz entspricht zugleich dem Unterschied aus wahrer und mittlerer Sonnenzeit, somit der Zeitgleichung.

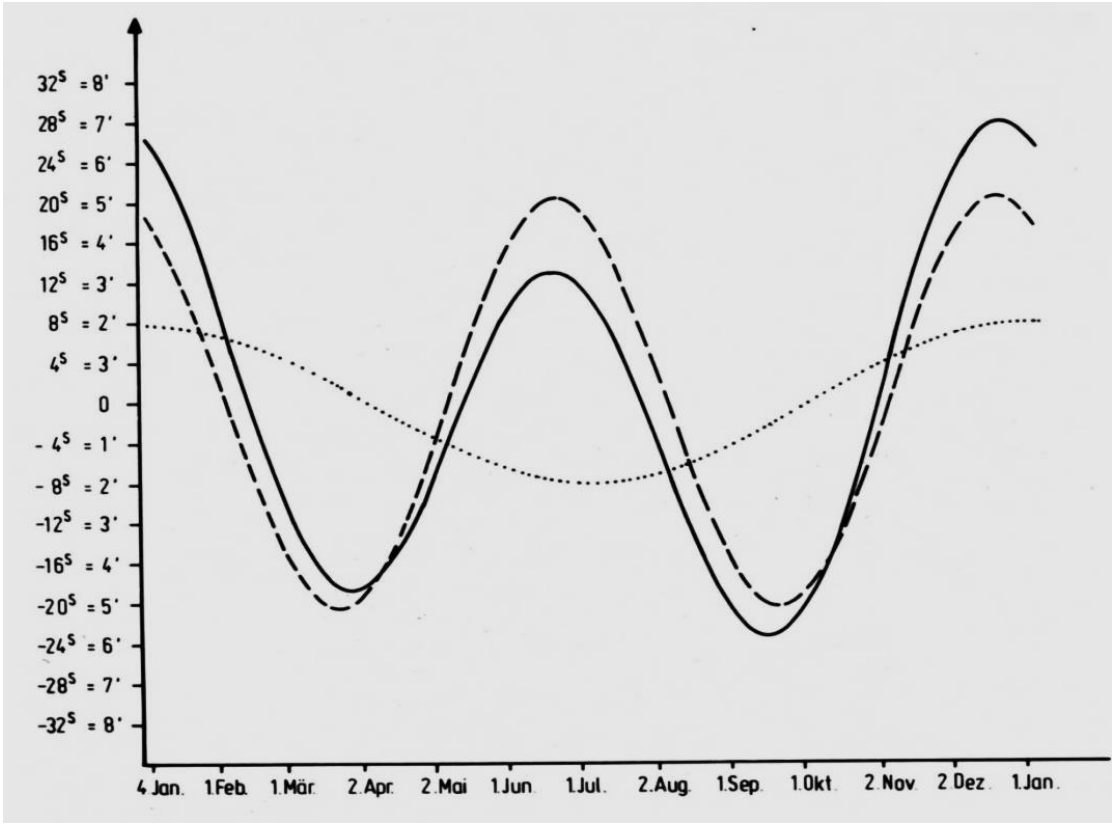


Bild 28-2: Die überlagerte jährliche Variation der wahren Sonnenbewegung gegenüber der mittlere Sonnenbewegung $\dot{\alpha}_{\odot} - n_{\odot}$, punktiert: Mittelpunktsgleichung, gestrichelt: Reduktion auf den Äquator, durchgezogene Linie: Gesamtvariation

28.3 Die Sonnenzeit

Das tägliche Leben wird von der Bewegung der Sonne bestimmt. Entsprechend hängt von dieser auch die Sonnenzeit ab, die das tägliche Leben einteilt. Die wahre Sonnenzeit wird durch die Sonnenuhr angezeigt. Sie hängt von der täglichen Bewegung der scheinbaren Sonne ab[1] und wird deshalb auf die Rotation der Erde bezogen. Man spricht daher von *Rotationssonnenzeit*. Da die - scheinbare - Sonne sich auf der Ekliptik bewegt, also „schräg“ zur täglichen Rotation der Erde und im Jahresverlauf ungleichmäßig lange Tage verursacht, wurde zur Einteilung einer gleichförmigen Zeit ein künstlicher Körper als Bezugspunkt zur Definition einer Sonnenzeit eingeführt. Die Beschreibung der Sonnenbewegung bezieht sich auf den Frühlingspunkt. Je nach Anforderung muss der Unterschied zwischen wahrem und mittlerem Frühlingspunkt beachtet werden. Der Unterschied wird durch die Nutation in Länge $\Delta\psi$ geprägt[2].

28.3.1 Wahre Sonnenzeit

Die Sonnenzeit an einem bestimmten Ort wird auf den Ortsmeridian bezogen. Dazu wird die wahre scheinbare Sonne, die sich auf der (wahren) Ekliptik mit der ekliptikalen Länge $l_\odot$ bewegt, auf den Äquator projiziert. Nach Bild 28-3 ist

$$\begin{aligned} \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \cos l_\odot \\ \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \sin l_\odot \cos\varepsilon \\ \sin\delta_\odot &= \sin l_\odot \sin\varepsilon \ . \end{aligned} \tag{28.101}$$

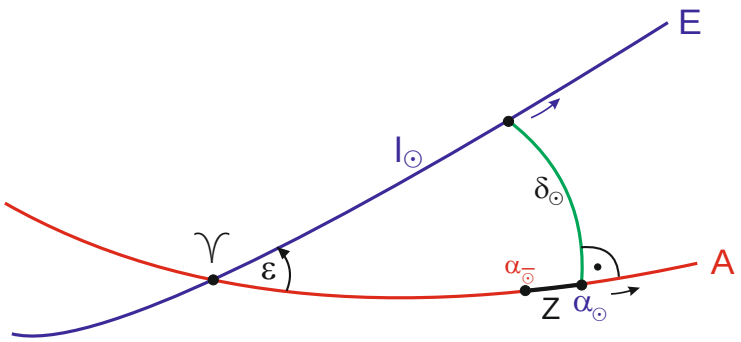


Bild 28-3: Die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar\odot}$ auf dem Erdäquator A und die Rektaszension $\alpha_\odot$ der wahren scheinbaren Sonne, die sich mit der ekliptikalen Länge $l_\odot$ längs der Ekliptik bewegt

Sei Θ_G die Sternzeit des Greenwich Meridians und habe der Ortsmeridian die östliche geographische Länge λ, wird

$$\Theta = \Theta_G + \lambda \ . \tag{28.102}$$

---

[1] der Begriff leitet sich von der Beobachtung ab, nach der die Sonne sich „scheinbar“ um die Erde bewegt. In diesem Sinne ist stets der Begriff „scheinbare Sonne“ zu verstehen: mathematisch gesehen kann die Sonne als Erdsatellit aufgefasst werden. Der Begriff „scheinbar“ wird in der astronomischen Zeitbestimmung seit 1965 nicht mehr benutzt (siehe etwa E. W. WOOLARD and G. M. CLEMENCE [1966], p. 360), bringt jedoch im Zusammenhang mit dem täglichen Leben und vor allem auch mit einer Satellitenbahnanalyse vorstellungsmäßig Vorteile

[2] Abschnitt 9.4.1 (Band II).

Die Sonnenzeit wird im bürgerlichen Leben auf die untere Kulmination der Sonne bezogen. Die wahre Sonnenzeit beträgt daher

$$T_w = \vartheta_w + 12^h = \Theta - \alpha_\odot + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_\odot + 12^h \quad . \tag{28.103}$$

28.3.2 Mittlere Sonnenzeit

Die mittlere Sonnenzeit wird auf die mittlere fiktive Sonne mit der Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}}$ aus Entwicklung (28.82) bezogen. Sei ϑ_m der Stundenwinkel der mittleren fiktiven Sonne, beträgt die mittlere Ortssonnenzeit

$$T_m = \vartheta_m + 12^h = \Theta - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.104}$$

Die mittlere Sonnenzeit des Greenwich Meridians wird als Weltzeit („Universal Time, U.T.“) bezeichnet[1].

28.3.3 Die Zeitgleichung

Als Zeitgleichung wird in der klassischen Himmelsmechanik der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Sonne bezeichnet. Die wahre Sonnenzeit an einem bestimmten Ort wird dort durch die Sonnenuhr angezeigt. Aus den Beziehungen (28.103) und (28.104) folgt

$$Z = T_W - T_M = \vartheta_W - \vartheta_M = -\alpha_\odot + \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.105}$$

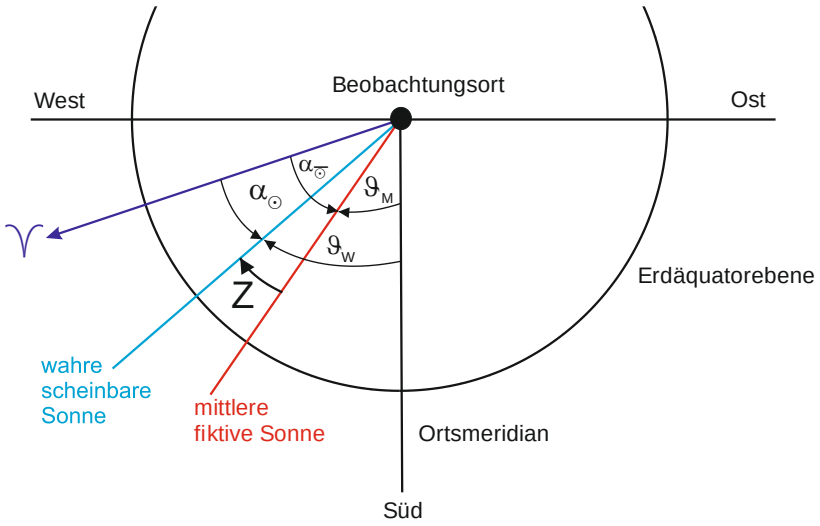


Bild 28-4: Der Unterschied von wahrer scheinbarer und mittlerer fiktiver Sonne bezogen auf die Erdäquatorebene und die Zeitgleichung

Die Zeitgleichung ist gleich dem negativen Ausdruck (28.96). Werden hier die periodischen Anteile der mittleren Anomalie $M_\odot$ der Sonne und des Argumentes des Perigäums $\Gamma_\odot$ ver-

[1] Vertiefendes zu den Zeitdefinitionen in Abschnitt 9.1 (Band II)

nachlässigt, kann mit Beziehung (28.81) $\alpha_{\bar{\odot}} = \overline{M_\odot} + \overline{\Gamma_\odot} \approx M_\odot + \Gamma_\odot$ die Zeitgleichung näherungsweise berechnet werden aus

$$Z = -\Big[2\,e_\odot \sin M_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) - \\ -2\,e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) + 2\,e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) \; + \; \cdots \Big] \quad . \tag{28.106}$$

Der Verlauf der Zeitgleichung kann aus Bild 28-1 (auf Seite 411) abgelesen werden, wobei wegen Beziehung (28.105) die Funktionswerte für Z nach unten aufgetragen sind. Die wahre Sonnenuhr „geht nach“ vor dem 18. April, zwischen dem 15. Juni und 1. September und nach dem 27. Dezember[1]. Sie geht „am meisten nach“ am 15. Februar um 14.5 Minuten (mittlerer Sonnenzeit), „am meisten vor“ am 2. November um 16.5 Minuten. Tabelle 28-6 enthält die entsprechenden Näherungswerte.

Datum	15. Feb.	16. Mai	28. Juli	2. Nov
$M_\odot$	41°.4	130°.1	202°.1	269°.7
$\alpha_\odot$	$21^h.84$	$3^h.45$	$8^h.41$	$14^h.34$
$\alpha_\odot - \alpha_{\bar{\odot}}$	$14^m.84$	$-3^m.8$	$6^m.4$	$-16^m.5$
Z	$-14^m.84$	$3^m.8$	$-6^m.4$	$16^m.5$
wahre Sonne	geht vor (abs. Max)	geht nach (rel. Min)	geht vor (rel. Max)	geht nach (abs. Min)
Wahre Sonnenzeit	geht nach (abs. Min)	geht vor (rel. Max)	geht nach (rel. Min)	geht vor (abs. Max)

Tabelle 28-6: Die Extrema im Jahresverlauf und die Auswirkung auf die wahre Sonnenzeit

Der Verlauf der Zeitgleichung über ein tropisches Jahr kann somit ebenfalls aus Bild 28-1 auf Seite 411 abgelesen werden.

Von besonderem Interesse ist der Verlauf des Standes der wahren Sonne zu einer gewissen mittleren täglichen Sonnenzeit im Verlauf eines tropischen Jahres. Dies führt zur Darstellung eines Analemma, einer Kurve welche die doppelte Periodizität der jährlichen Bewegung der Sonne in Bezug auf einen bestimmten Beobachtungsort auf der Erdoberfläche wiederspiegelt. In Bild 28-5 (auf Seite 415) ist das Analemma der Sonne für den mittleren Zeitpunkt 12^h (MEZ = UT-1) für einen bestimmten Beobachtungsort aufgetragen. Zur zeitlichen Orientierung sind bestimmte Daten markiert. In Ergänzung zeigt Bild 28-6 die Analemmata für denselben Beobachtungsort zu verschiedenen Tageszeiten.

[1] Diese Daten können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern.

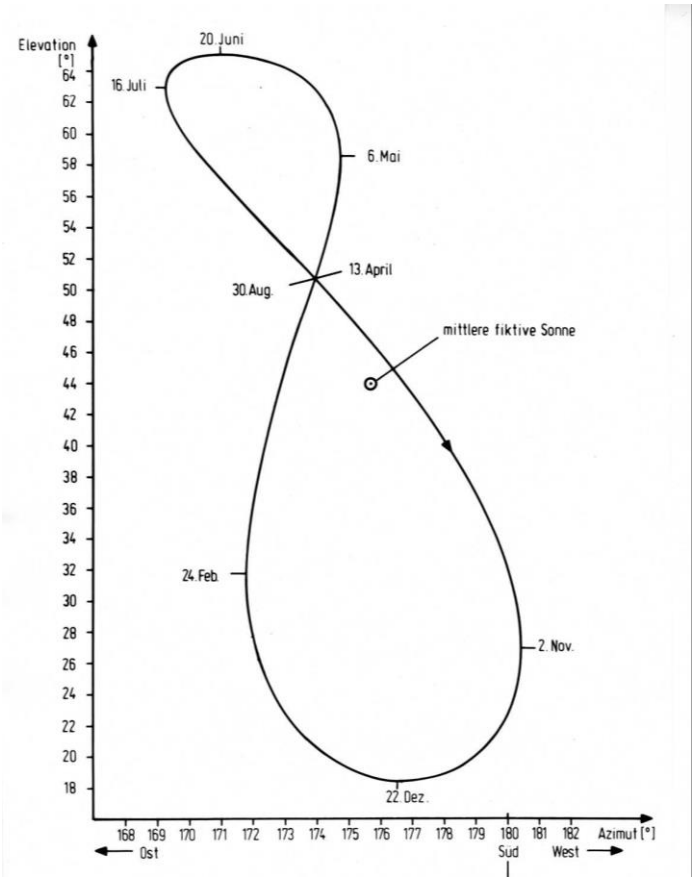


Bild 28-5: Die Analemma der Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres: die wahre Sonnenzeit jeweils um 12 Uhr MEZ gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau

28.3.4 Länge des wahren Sonnentages

Die Länge des wahren Sonnentages kann unterschiedlich definiert werden, je nachdem ob die Bewegung der Sonne in ihrer Bahn oder die Rotation der Erde zum Bezug gewählt wird.

28.3.4.1 Der wahre Sonnentag als Bogen der Sonnenbahn

Um von den Störungen der ungleichförmigen Erdrotation unabhängig bei der Zeitbestimmung zu sein, kann man von der Erdrotation abstrahieren und als Sonnentag den Bogen definieren, den die in den Äquator projizierte scheinbare Sonne an einem Tag zurücklegt. Bezugssystem ist nach Formel (28.66) als mittlerer Sonnentag der $\left(1/\overline{P_{\odot,t}}\right)$-te Teil eines tropischen Jahres bei Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0. Mit diesem abstrakten und absolut gleichförmigen Zeitbegriff wird die mittlere Zeit TDT gerechnet. In Bezug auf diese Zeit wird die tägliche mittlere Bewegung[1] $n_\odot = 236^s.555/d$ als Vergleichswert gewählt. Mit der täglichen Variation $d\alpha_\odot / dt$ (etwa aus dem Näherungsausdruck (28.98)) kann der tägliche Bahnbogen der scheinbaren Sonne errechnet werden. Die Abweichung von der mittleren Sonne beträgt

[1] aus Tabelle 9-3 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

$$\Delta t = \frac{\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot}{n_\odot} 86400\,s \quad , \tag{28.107}$$

wenn $d\alpha_\odot / dt$ wie in Tabelle 28-5 auf Seite410 410 in Sekunden pro Tag berechnet ist.

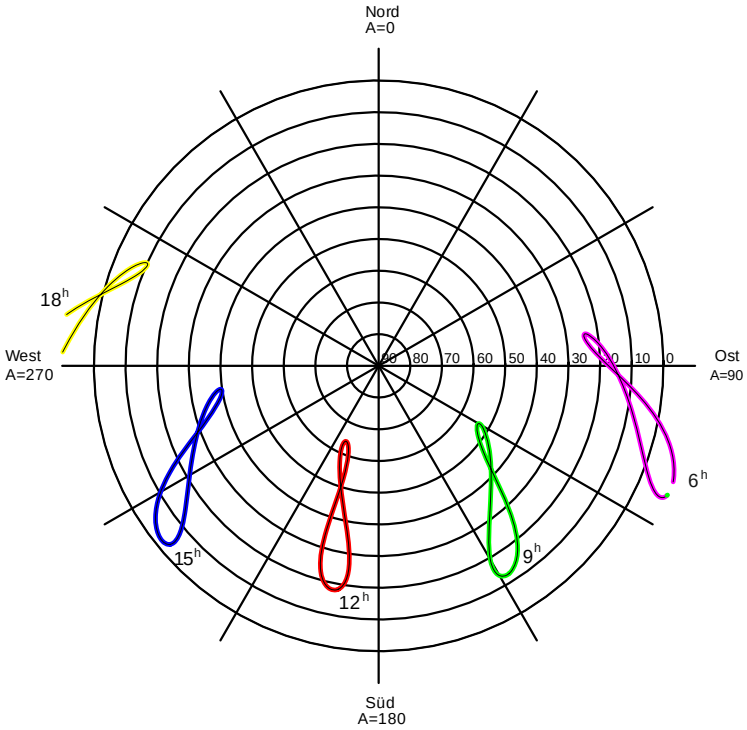


Bild 28-6: Analemma in horizontalen Koordinaten: die Beobachtungswinkel Azimut und Elevation der wahren Sonne jeweils um 6, 9, 12, 15, 18 Uhr UT gesehen von der Beobachtungsstation Weilheim aus jeweils im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Elevation ist bis zu 10° unter den Horizont eingezeichnet.

$\alpha_\odot$	$0^h\,27^m\,6^s.62$	$5^h\,56^m\,00^s.49$	$11^h\,34^m\,04^s.145$	$18^h\,03^m\,18^s.426$
$\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot$	$-18^s.9211/d$	$12^s.71834/\mathrm{d}$	$-22^s.51168/\mathrm{d}$	$28^s.03379$
Unterschied wahrer zu mittlerem Sonnentag	$-1^h\,52^m\,0^s.5$	$1^h\,17^m\,25^s.3$	$-2^h\,17^m\,2^2.3$	$2^h\,50^m\,39^2.1$

Tabelle 28-7: Die Extremalwerte der Abweichung in der Tageslänge der wahren Sonne von der mittleren Sonnen bezogen auf den täglichen Bahnbogen der Sonne längs des Äquators[1].

Für die Extremalwerte in dieser Tabelle ergeben sich für die Abweichung in der Tageslänge nach der hier gegebenen Definition die angegebenen Zahlenwerte. Sie geben den Zeitbedarf an, den die wahre Sonne benötigt um die Differenz aus mittlerem und wahrem Bahnbogen zu durchlaufen.

[1] die Zahlenwerte können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern. Aktuell in dieser Tabelle für 2018

28.3.4.2 Der Rotationssonnentag

Im täglichen Leben wird die Rotation der Erde der Definition eines wahren Sonnentages zugrunde gelegt. Die Länge eines wahren (Rotations-) Sonnentages wird bezogen auf zwei aufeinanderfolgende untere Kulminationen der wahren Äquatorsonne[1]. Sie ist vom Bezugsort auf der Erdoberfläche abhängig, also keine globale Größe wie der mittlere Sonnentag.

Zur Bestimmung der Dauer des wahren Sonnentages müssen auch die ungleichförmige Bewegung der Erdrotation und eventuell auch die des Frühlingspunktes als Bezugspunkt der Sternzeit berücksichtigt werden. Die so definierte „Rotationssonnenzeit" ergibt eine andere Länge des wahren Sonnentages als die auf den zurückgelegten Bahnbogen der Sonne bezogene wie im vorhergehenden Abschnitt besprochen.

Die wahre Sonnenzeit unterscheidet sich nach Definition (28.105) um die Zeitgleichung Z. Einem mittleren Zeitintervall ΔT_M entspricht das wahre Zeitintervall

$$\Delta T_W = \Delta T_M + \Delta Z \approx \Delta T_M + \frac{dZ}{dt} = \Delta T_M - \left(\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot \right) \quad . \tag{28.108}$$

Unter Vernachlässigung der Variationen in $e_\odot, \varepsilon, \Gamma_\odot$, d.h. bei Bezug der Zahlenwerte auf die Fundamentalepoche J2000.0, lautet die Variation der Zeitgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = -n_\odot \Big[& 2\,e_\odot \cos M_\odot - 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) - \\ & -6\,e_\odot \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) + 2\,e_\odot \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \Big] \quad . \end{aligned} \tag{28.109}$$

Für Überschlagsrechnungen kann die Näherung verwendet werden

$$\frac{dZ}{dt} = -7^s.854 \cos M_\odot + 20^s.360 \cos\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) + \cdots \quad . \tag{28.110}$$

Die entsprechenden Zahlenwerte sind in der Graphik Bild 28-2 auf Seite 411, die Extremwerte in Tabelle 28-5 auf Seite 410 bzw. in Tabelle 28-7 enthalten.

Zur Deutung von Beziehung (28.108): wenn für ΔT_M die Dauer eines mittleren Sonnentages angenommen ist und wenn dZ / dt negativ ist, bedeutet das, dass der wahre Sonnentag noch nicht vollendet ist, somit länger als der mittlere Sonnentag dauert. Die Zahlenwerte für $d\alpha_\odot / dt - n_\odot$ geben somit genau den Betrag an, um den ein wahrer Rotationssonnentag länger bzw. kürzer als ein mittlerer Rotationssonnentag ist.

Anmerkungen: Die in den vorstehenden Abschnitten besprochenen Bewegungen der Sonne sind veranschaulichende Näherungen, wie sie für die Beobachtung im täglichen Leben aber auch in den meisten Anwendungen einer Satellitenbahnanalyse ausreichend sind. Für hochgenaue Untersuchungen, insbesondere im Rahmen der astronomischen Zeitbestimmung, müssen die seit etwa 1965 erfolgenden Verfeinerungen und Umdefinitionen berücksichtigt werden. An Stelle der Zeitgleichung wird in diesem Zusammenhang der Bezug der wahren Sonnenzeit

[1] bis 1925 wurde der wahre Sonnentag wie in der Astronomie üblich auf die obere Kulmination der Sonne bezogen, d.h. auf den wahren Mittag. (siehe etwa STRÖMGREN, E. und STRÖMGREN, B. [1933])

auf den Transit der wahren Sonne durch den Meridian eines Beobachtungsortes zu einem bestimmten Zeitpunkt in TDT gewählt[1].

28.4 Die topozentrische Beobachtung der wahren Sonne

Die ungleichförmige Bewegung der wahren Sonne hat für die Bahnanalyse von Erdbeobachtungssatelliten weitreichende Folgen. Die variable Rektaszension und vor allem die von Tag zu Tag sich verändernde Deklination der Sonne schließen völlig gleichartige Beobachtungsbedingungen eines bestimmten Beobachtungsgebietes auf der Erdoberfläche im Jahresverlauf aus. Einen Eindruck von diesen veränderlichen Stellungen der Sonne bezüglich dieses Beobachtungsgebietes wird erhalten, wenn der Verlauf der Sonnenbewegung von einem Referenzpunkt dieses Gebietes mit den geographischen Koordinaten (λ, φ) aus betrachtet wird.

28.4.1 Die horizontalen Koordinaten der Sonne

Dazu werden die horizontalen Koordinaten Azimut $A_\odot$ und Elevation $h_\odot$ benötigt, die aus den scheinbaren geozentrischen Örtern der Sonne $(r_{\odot g}, \alpha_{\odot g}, \delta_{\odot g})$ berechnet werden können. Bevor die Umrechnung erfolgen kann, müssen an die Örter der Sonne Korrekturen angebracht werden[2]:

1. *Korrektur um die tägliche Parallaxe*: Wenn zum Beobachtungszeitpunkt der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{R}_T$ des Beobachtungsortes bekannt ist, kann der topozentrische Ortsvektor der Sonne aus $\mathbf{r}_{\odot T} = \mathbf{r}_{\odot \mathrm{g}} + \mathbf{R}_T$ erhalten werden. Damit ist die tägliche Parallaxe exakt erfasst. Dieser Vorgang ist im Fall von Erdsatelliten unentbehrlich. Da jedoch die Sonne im Vergleich mit Erdsatelliten relativ weit entfernt ist, wird der Fehler sehr klein sein, wenn die Winkelkoordinaten der Sonne mit den Methoden der sphärischen Astronomie modifiziert werden. Dazu wird die geozentrische Breite φ' des Beobachtungsortes aus Formel[3] (8.265) $\tan\varphi' = (1-f)^2 \tan\varphi$ benötigt. Die momentane Horizontalparallaxe der Sonne errechnet sich aus

$$P_{\odot \mathrm{g}} = \frac{R_E}{r_{\odot g}} \frac{180}{\pi} \frac{1}{3600} [\text{Bogensekunden}] \quad . \tag{28.111}$$

   Wird hier statt der momentanen geozentrischen Sonnenentfernung $r_{\odot g}$ die Astronomische Einheit 1AU eingesetzt, erhält man die Sonnenparallaxe $\pi_\odot$ als einer der astronomischen Fundamentalkonstanten[4]. Der topozentrische Sonnenort hat bezogen auf den Beobachtungsort den Stundewinkel

$$\vartheta = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\odot g} = \Theta - \alpha_{\odot g} \quad , \tag{28.112}$$

---

[1] weitere Details siehe etwa in WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966], p.360; GREEN, R. M. [1985], p.251; SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], pp.308-310

[2] siehe dazu in den Abschnitten 9.6 und 9.8 in Band II

[3] Abschnitt 8.9.2 (Band II)

[4] Anhang E1 (Band V)

wenn Θ_G die Sternzeit für den Greenwich-Meridian und Θ die für den Beobachtungsort ist. Die Korrektur der Winkelkoordinaten der Sonne infolge der täglichen Parallaxe lautet dann (näherungsweise)

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\odot\mathrm{P}} &= P_{\odot g}\, r_{\odot g} \sin\vartheta \frac{\cos\varphi'}{\cos\delta_{\odot g}} \\ \Delta\delta_{\odot P} &= P_{\odot g}\, r_{\odot g} \left[\sin\varphi' \cos\delta_{\odot g} - \cos\varphi' \cos\vartheta \sin\delta_{\odot g} \right] \quad . \end{aligned} \tag{28.113}$$

Die um die tägliche Parallaxe korrigierten topozentrischen Winkelkoordinaten der Sonne sind

$$\alpha_{\odot TP} = \alpha_{\odot g} - \Delta\alpha_{\odot P} \quad , \quad \delta_{\odot TP} = \delta_{\odot g} - \Delta\delta_{\odot P} \quad . \tag{28.114}$$

2. *Korrektur um die tägliche Aberration:* Der um die tägliche Parallaxe modifizierte Stundenwinkel ist $\vartheta_P = \Theta - \alpha_{\odot TP}$. Die tägliche Aberrationskonstante der Erde lautet $K = V_0 / c = 0''.320$, wenn V_0 die Rotationsgeschwindigkeit des Erdäquators ist. Die Korrektur der Sonnenkoordinaten auf Grund der täglichen Aberration bezogen auf einen Ort der geozentrischen Breite φ' lautet

$$\Delta\alpha_{\odot A} = K\, r_{\odot g} \cos\vartheta_P \frac{\cos\varphi'}{\cos\delta_{\odot TP}} \quad , \quad \Delta\delta_{\odot A} = K\, r_{\odot g} \sin\vartheta_P \cos\varphi' \sin\delta_{\odot TP} \quad . \tag{28.115}$$

Die äquatorialen Winkelkoordinaten der Sonne lauten mit den sphärischen Korrekturen

$$\alpha_{\odot T} = \alpha_{\odot TP} + \Delta\alpha_{\odot A} \quad , \quad \delta_{\odot T} = \delta_{\odot TP} + \Delta\delta_{\odot A} \quad . \tag{28.116}$$

Die scheinbaren horizontalen Koordinaten der Sonne werden berechnet aus[1]

$$\begin{aligned} \cos A_\odot \cosh_\odot &= -\cos\vartheta_P \cos\delta_{\odot T} \sin\varphi + \sin\delta_{\odot T} \cos\varphi \\ \sin A_\odot \cosh_\odot &= -\sin\vartheta_P \cos\delta_T \\ \sinh_\odot &= \cos\vartheta_P \cos\delta_{\odot T} \cos\varphi + \sin\delta_{\odot T} \sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{28.117}$$

BEISPIELE zur topozentrischen Bewegung der Sonne sind in Bild 28-5 (auf Seite 415) und Bild 28-6 enthalten. In ihnen ist der Verlauf des Sonnenstandes zu je einer mittleren täglichen Sonnenzeit im Verlauf eines Jahres in Form eines Analemma dargestellt. Dies spiegelt für einen beliebigen Beobachtungsort auf der Erde den Verlauf der Zeitgleichung wieder. ◄

28.4.2 Der Polarkreis

Aus den Transformationsformeln (8.293) kann für die obere Kulmination eines Sternes mit $\vartheta_T = 0°$, sowie die untere Kulmination mit $\vartheta_T = 180°$ unmittelbar auf die extremale Höhe („Elevation“) dieses Objektes gesehen von einem Ort mit der geodätischen Breite φ geschlossen werden:

$$h_{\max} = 90° - \varphi + \delta \quad , \quad h_{\min} = 90° - \varphi - \delta \quad . \tag{28.118}$$

[1] Mit den Formeln (8.293) in Abschnitt 8.9.3.2 (Band II)

Diese Beziehungen sind näherungsweise auch für Sonne und Mond gültig, jedoch nicht für Erdsatelliten wegen deren rascher relativer Bewegung, wodurch die maximale bzw. minimale Elevation gewöhnlich außerhalb eines Ortsmeridians stattfindet.

Die geographische Breite des Polarkreises ist eine Funktion der Schiefe der Ekliptik. Die Sonne erreicht ihre maximale Deklination, wenn diese der Schiefe der Ekliptik gleich ist. Gesehen vom Polarkreis aus befindet sich die Sonne dann genau im Horizont. Nach Formel (28.118) hat der Polarkreis die geodätische Breite

$$\varphi_P = 90° - \varepsilon = 90° - \left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) \quad . \tag{28.119}$$

Da die Schiefe der Ekliptik keine konstante Größe ist, variiert auch die geodätische Breite des Polarkreises im Laufe der Jahre[1].

BEISPIEL: Schiefe der Ekliptik und geodätische Breite des Polarkreises für einige Zeitpunkte

Zeitpunkt	wahre Schiefe der Ekliptik	Geodätische Breite des Polarkreises
1950-01-01	23°26′53″.2	66°33′06″.8
2000-01-01	23°26′15″.7	66°33′44″.3
2050-01-01	23°25′52″.7	66°34′07″.3

◀

28.4.3 Sonnenkontaktzeiten

Aus einer Ephemeride der topozentrischen Sonnenbewegung können besondere Stellungen der Sonne, maximale und minimale Elevation, wie Auf- und Untergangszeiten berechnet werden. Diese Zahlenwerte können im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse von besonderem Interesse sein: wann, wie und wie lange wird das zu beobachtende Gebiet von der Sonne beschienen. Da die Ephemeride auch das Azimut der Sonne liefert, kann die Einfallsrichtung der Sonnenstrahlung unentbehrliche Aussagen für bestimmte Untersuchungen liefern[2].

Die Sonnenephemeride ist auf den Mittelpunkt der Sonne bezogen. Da die Sonne jedoch ein flächenhaftes Objekt mit scheinbarem Durchmesser von durchschnittlich $30'$ ist, und um den Einfluss der Refraktion größenordnungsmäßig mit einzubeziehen[3], ist es sinnvoll, bei der Berechnung von Auf- und Untergangszeiten etwa eine Toleranz von $-50'$ unter dem Horizont zuzulassen. Damit kann auch eine Dämmerung erfasst werden, was vor allem in polnahen Gegenden von Interesse ist. Hier kann im Gegensatz zu äquatornahen Gebieten die Bewegung der Sonne auf einer relativ schleifenden Bahn erfolgen. Es kann passieren, dass die Sonne gar nicht über den Horizont aufsteigt, jedoch stundenlang unterhalb des Horizontes entlang

[1] Zahlenwert der mittleren Schiefe $\bar{\varepsilon}$ in Anhang E.3 (Band V), der Nutation in Schiefe $\Delta\varepsilon$ in Formel (9.123), Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] Weitere Aussagen zu Beobachtungsbedingungen insbesondere auch im Zusammenhang mit der Sonnenbewegung finden sich in Band V (etwa in Abschnitt 38.4.9)

[3] Eine allgemeingültige Abschätzung der Refraktion ist nicht möglich, da sie vom Luftdruck, der Temperatur und weiteren klimatischen und atmosphärischen Einflüssen abhängig ist (vgl. Abschnitt 9.9, Band II)

schleift. Eine Aussage über die dadurch verursachten Dämmerungen kann in den nördlichen bzw. südlichen Gegenden von Interesse sein.

BEISPIEL 1: Die Esrange bei Kiruna hat die geographischen Koordinaten $\lambda = 21°.0463$, $\varphi = 67°.8776$, $H = 480\text{m}$. Sie liegt also nördlich des Polarkreises. Der Polarkreis hat die geodätische Breite[1] $\varphi_P = 66°.563044$. Am 7. Dezember 1981 hatte die Sonne dort folgende Kontaktdaten:

Zeitpunkt (U.T.)	Azimut	Elevation	Ereignis
1981-12-07/09;42:26.8	169°.908	-0°.8333	Sonnenaufgang
1981-12-07/10:25:58.8	179°.950	-0°.4748	Maximale Elevation
1981-12-07/11:09:33.1	189°.995	-0°.8333	Sonnenuntergang
1981-12-07/22:26:32.4	0°.041	-44°.7747	Minimale Elevation

Der Sonnenmittelpunkt befindet sich etwa $28'.5$ unter dem Horizont, ein Segment des Sonnenrandes könnte also etwas über den Horizont scheinen. Das Azimut zeigt, dass die maximale Sonnenelevation genau im Süden zu erwarten ist, die Richtungen zu den berechneten Kontaktzeiten sind nur etwa 10° davon entfernt. Die minimale Sonnenelevation findet, wie zu erwarten ist, genau in nördlicher Richtung statt. Bereits am 11. Dezember beträgt die maximale Sonnenelevation $-52'.1$, es ist nur noch mit einer kurzen Dämmerung zu rechnen, die Polarnacht hat begonnen. ◀

BEISPIEL 2: Von besonderem Interesse ist es, die Bewegung der Sonne von den Polen aus zu beobachten. Nach (28.118) ist dann die maximale bzw. die minimale Elevation eines Objektes gleich dessen Deklination. Insbesondere im Fall der extremalen Sonnendeklination mit $\delta_\odot = \pm\varepsilon$ wird daher die maximale Sonnenelevation $h_{\odot,\max} = \varepsilon$, die minimale Sonnenelevation $h_{\odot,\min} = -\varepsilon$ betragen. Vom Nordpol aus gesehen ist die Südrichtung (vom Südpol aus gesehen die Nordrichtung) unbestimmt, da es in jede Richtung nach Süden geht. Um den Verlauf der Sonnenelevation zu verfolgen, wird man eine Referenzrichtung und damit auch eine Bezugsrichtung für das Azimut willkürlich festlegen. An den Polen ist ein halbes Jahr Tag, ein halbes Jahr Nacht. Für den Nordpol gelten etwa folgende Zahlenwerte:

Nahe der Wintersonnenwende: der geringe Unterschied in der Elevation der Sonne ist der Bewegung der Sonne längs ihrer Bahn geschuldet. Sonst dürfte sich die Elevation nicht ändern.

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2017-12-21/00:01:15.300	0°.550924	-23°.436522	Minimum
2017-12-21/11:59:17.349	179°.997557	-23°.437049	Maximum

[1] Etwa mit Formel (8.193) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

Nahe der Frühlings-Tag und Nachtgleiche: Als Kriterium für Kontakt der Sonne mit dem Horizont wird der Moment gewählt, in dem der Sonnenmittelpunkt 50′ untern dem Horizont liegt. Je nach Wirkung der Refraktion kann dann der Sonnenrand bereits über den Horizont hochkommen. Dieser Zeitpunkt findet daher einige Tage vor der Tag- und Nachtgleiche statt. Die Zahlenwerte für Azimut und Elevation beziehen sich auf den Sonnenmittelpunkt.

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2018-03-16/00:11:29.739	0°.446872	-1°.747693	Minimum
2018-03-16/12:09:31.788	179°.990795	-1°.550402	Maximum
2018-03-17/00:11:12.591	0°.446614	-1°.352467	Minimum
2018-03-17/12:09:14.640	179°.990946	-1°.155102	Maximum
2018-03-18/00:10:55.260	0°.446396	-0°.957117	Minimum
2018-03-18/07:41:09.306	113°.027577	-0°.833333	Kontakt Beginn
2018-03-18/07:41:09.306	113°.027577	-0°.833333	Kontakt Ende
2018-03-18/12:08:57.309	179°.991096	-0°.759728	Maximum
2018-03-19/00:10:37.769	0°.446224	-0°.561745	Minimum
2018-03-19/12:08:39.818	179°.991248	-0°.364381	Maximum
2018-03:20/00:10:20.138	0°.446102	-0°.166449	Minimum
2018-03-20/12:08:22.188	179°.991408	0°.030841	Maximum
2018-03-21/00:10:02.390	0°.446033	0°.228672	Minimum
2018-03-21/12:08:04.440	179°.991580	0°.425837	Maximum

Analog der Wintersonnenwende verhält sich die Sonnenelevation zur Sommersonnenwende:

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2018-06-21/00:04:52.568	0°.513108	23°.432828	„Minimum“
2018-06-21/12:02:54.617	179°.994400	23°.432662	„Maximum“

Ein Unterschied zwischen den „extremalen“ Sonnenelevationen lässt sich hier nicht ausmachen. Das Minimum wird definiert für die im „nördlichen“ Azimut stattfindende Elevation, das Maximum für das „südliche“ Azimut. ◄

28.5 Sonnensynodische Bewegung eines Satelliten

Der Begriff des (sonnen) synodischen Umlaufs ist aus der Mondtheorie bekannt und bedeutet hier die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichartigen geozentrischen Stellungen (etwa „Konjunktionen“) des Mondes zur Sonne. Ein Beispiel ist die Zeitdauer von Neu-

mond zu Neumond, die auch als „Lunation“ bezeichnet wird. Dabei wird die Bewegung der beiden Himmelskörper auf die Ekliptik bezogen.

Bei Erdsatelliten erfolgt der Bezug zwischen Satelliten- und Sonnenbewegung prinzipiell auf die Ebene des Erdäquators. Die Differenz in Rektaszension von Sonne $\alpha_\odot$ und Satellit α ändert sich normalerweise ständig. Alternativ zum synodischen Bezug der beiden Körper auf den Äquator könnte der Bezug auch auf die Ekliptik oder die momentane Bahnebene des Satelliten erfolgen. Die unterschiedlichen Auswirkungen dieser Beziehungen werden in den späteren Unterabschnitten des vorliegenden Abschnittes angedeutet um eine Beurteilung für andersartige Aussagen zu ermöglichen.

In der Astronautik ist es üblich, die Umlaufzeit eines Erdsatelliten in Bezug auf die Sonne als „synodischen Umlauf“ zu bezeichnen. Im vorliegenden Bericht werden jedoch auch andere synodische Bezüge zu anderen Himmelskörpern diskutiert. Um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, wird in diesem Kapitel der Bezug auf die Sonne stets berücksichtigt.

28.5.1 Die Sonnensynodische Bewegung in Bezug auf den Erdäquator

Der grundlegende Bezug der sonnenbezogenen Bewegung eines Erdsatelliten wird in Bezug auf den Erdäquator hergestellt. Dazu werden zunächst die grundlegenden allgemeingültigen Begriffe erläutert und dann die für eine Satellitenbahnanalyse unentbehrlichen Einschränkungen und Näherungen behandelt.

28.5.1.1 Der wahre sonnensynodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator

Um eine wohldefinierte Stellung von Sonne und Erdsatellit zueinander untersuchen zu können, wird der *Sonnenwinkel*

$$\tau := \alpha - \alpha_\odot \tag{28.120}$$

eingeführt. Dieser Winkel wird entgegen dem Stundenwinkel ϑ im festen Äquatorsystem positiv nach Osten gezählt und stets auf die Rektaszension der Sonne bezogen.

Es sei der Ort eines Satelliten im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem gegeben[1]

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i = r\left(\mathbf{p}_1\cos\delta\cos\alpha + \mathbf{p}_2\cos\delta\sin\alpha + \mathbf{p}_3\sin\delta\right) \quad . \tag{28.121}$$

Die Rektaszension wird eindeutig berechnet aus

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r\cos\delta}\ ,\ \sin\alpha = \frac{x_2}{r\cos\delta}\ \ ,\ \ r = \sqrt{x^i\,x_i}\ \ ,\ \ \sin\delta = \frac{x_3}{r}\ ,\ \cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta}\ . \tag{28.122}$$

Die geozentrische geometrische Rektaszension der Sonne kann aus dem geozentrischen Ortsvektor (28.2) (auf Seite 387) berechnet werden[2]

[1] Abschnitt 8.1, Band II

[2] Im Zusammenhang mit der Satellitenbahnanalyse wird der Index *g* zur Angabe des Bezugs des Sonnenvektors auf den Erdmittelpunkt weggelassen, da auf diesen alle weiteren Aussagen bezogen sind.

$$r_\odot = \sqrt{x_\odot^i\, x_{\odot i}} \quad , \quad \sin\delta_\odot = \frac{x_{\odot 3}}{r_\odot} \quad , \quad \cos\delta_\odot = \sqrt{1-\sin^2\delta_\odot} \quad ,$$
$$\cos\alpha_\odot = \frac{x_{\odot 1}}{r_\odot \cos\delta_\odot} \, , \; \sin\alpha_\odot = \frac{x_{\odot 2}}{r_\odot \cos\delta_\odot} \quad . \tag{28.123}$$

Ein Satellit befindet sich in *Konjunktion* mit der Sonne, wenn $\tau = 0°$, in *Opposition* wenn $\tau = 180°$. Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen (analog Oppositionen) wird als *sonnensynodische Umlaufzeit* P_S bezeichnet. Ausgehend von einem Anfangszeitpunkt t_0 und in Bezug auf den Erdäquator lautet die Bedingungsgleichung für einen sonnensynodischen Umlauf

$$\tau\left(t_0 + P_S\right) - \tau\left(t_0\right) = 0 \quad . \tag{28.124}$$

Um eine numerisch stabile Lösung dieser Gleichung zu ermöglichen, ist es sinnvoll die überlagerte Funktion[1]

$$fct\left(P_S; t_0\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{28.125}$$

zu verwenden. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit verwendet werden, oder besser die in Abschnitt 28.5.1.2 hergeleitete mittlere Sonnensynodische Umlaufzeit:

$$P_S^{(0)} = \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_S^{(0)} = \overline{P_S} \quad . \tag{28.126}$$

Die *Sonnendrift* eines Satelliten wird durch die Beziehung

$$\dot\tau = \dot\alpha - \dot\alpha_\odot \tag{28.127}$$

beschrieben. Sie kann berechnet werden, wenn die Variationen der Rektaszension von Satellit und Sonne bekannt sind. Diese können etwa hergeleitet werden, wenn die jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren bekannt sind. Hierzu sei angenommen, dass das Bezugssystem ein Fundamentalsystem sei mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$. Für Erdsatelliten lautet der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot x^i \mathbf{p}_i + x^i \dot{\mathbf{p}}_i \mathrel{\hat{=}} \dot x^i \mathbf{p}_i \quad . \tag{28.128}$$

Alternativ kann auch die Ephemeride einer Bahn mit den Bahnparametern Flächenparameter *G*, Inklination *i*, Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω, Argument der Breite *u* gegeben sein. Die Variation der Rektaszension lautet mit den Formeln (8.9), bzw. (24.20) und (24.21)

$$\dot\alpha = \frac{x_1\dot x_2 - x_2\dot x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \dot\zeta \frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G\cos i}{r^2\cos^2\delta} = \dot\Omega + \frac{\dot u\cos i - (i)^{\cdot}\sin i\sin u\cos u}{1-\sin^2 i\sin^2 u} \quad . \tag{28.129}$$

Entsprechendes gilt für die geozentrische Bewegung der Sonne. Ist der geozentrische Geschwindigkeitsvektor der Sonne bekannt, kann die Variation $\dot\alpha_\odot$ der Rektaszension der Sonne etwa mit Formel (28.5) (auf Seite 387) berechnet werden.

Mit bekannter Sonnendrift $\dot\tau$ kann die wahre sonnensynodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten bei Bezug auf den Erdäquator berechnet werden mit dem Integral

$$P_S = \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \frac{1}{\dot\tau}\, d\tau \quad . \tag{28.130}$$

[1] Siehe in Abschnitt 21.3 auf Seite 20

Die Formulierung des Integrals zeigt, dass die Umlaufzeit P_S eine Funktion des Anfangswertes τ_0 ist, somit keineswegs als eine konstante Zahl erwartet werden darf.

28.5.1.2 Der mittlere sonnensynodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator

Für bahnanalytische Untersuchungen sind Näherungen, die einen guten Einblick in die zu bearbeitenden Aufgabenstellungen erlauben, unentbehrlich. Dazu wird die Rektaszension von Erdsatelliten durch den säkularen Anteil der Entwicklung (24.46) angenähert[1]:

$$\bar{\alpha} = \bar{M} + \bar{\omega} + \bar{\Omega} \quad . \tag{28.131}$$

Der Vergleich dieser Näherung mit der ursprünglichen Entwicklung zeigt, dass es sich hierbei um einen erheblichen Eingriff handelt, dessen Rechtfertigung stets im Auge behalten werden muss. Entsprechendes gilt für den Anteil der Entwicklung der Sonnenbewegung. Im Rahmen einer Satellitenbahnauslegung wird dazu die Bewegung der wahren Sonne durch die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ ersetzt. Auch hierbei handelt es sich um einen erheblichen Eingriff, der bei der Beurteilung aller mit diesen Näherungen erzielten Aussagen berücksichtigt werden muss. Dies trifft im Besonderen auf die Beschreibung des Bewegungsvorganges mit Hilfe der Sonnendrift zu. Werden alle periodischen Einflüsse in der Variation der Rektaszension in der Entwicklung (24.47) vernachlässigt und die Bewegung der Sonne durch die gleichförmige Bewegung (28.80) der fiktiven mittleren Sonne ersetzt, wird an Stelle der Sonnendrift (28.127) die mittlere sonnensynodische mittlere Bewegung erhalten:

$$\overline{n_S} := \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\odot} \quad . \tag{28.132}$$

Sie hat folgende Beziehungen zu anderen bisher behandelten mittleren Bewegungen:

$$\overline{n_S} := \overline{n_a} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\odot} \quad . \tag{28.133}$$

$$\overline{n_S} := \overline{n_d} + \dot{\Omega}_s - n_{\odot} \quad . \tag{28.134}$$

$$\overline{n_S} := \overline{n_t} - n_{\odot} \quad . \tag{28.135}$$

Die mittlere Sonnensynodische Umlaufzeit wird mit Hilfe der mittleren Sonnensynodischen mittleren Bewegung berechnet:

$$\overline{P_S} = \frac{2\pi}{\overline{n_S}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\odot}} \quad . \tag{28.136}$$

Die hier benötigten mittleren *Kepler*elemente[2] sind mittlere Anfangselemente $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$, d.h. mittlere Bahnparameter zur Epoche t_0.

Eine detaillierte Untersuchung der sonnensynodischen Umlaufzeit, wie sie beispielhaft in Bild 28-7 zu erkennen ist, zeigt, dass der Gebrauch des Begriffes „mittlerer“ stets kritisch hinterfragt werden muss. Das Bild zeigt den Verlauf eines wahren synodischen Umlaufs über einen mittleren synodischen Umlauf. Die Kurve ist für jeden Zeitpunkt durch Iteration mit der Be-

[1] Abschnitt 24.2.5 auf Seite 298

[2] siehe etwa in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

dingungsgleichung (28.125) im Rahmen einer angestrebten Genauigkeit (im Beispiel $\Delta t = 0.001\text{sec}$) berechnet. Als Bahnmodell wurde das zur Verfügung stehende analytische Ephemeridenprogramm mit nur säkularen Variationen sowie nochmals mit allen periodischen Variationen gerechnet. Der Unterschied zwischen diesen beiden Ergebnissen im Bereich von $\pm 0.01\text{sec}$ kann in der Darstellung nicht erkannt werden. Das bedeutet: die beträchtliche Variation des Verlaufs der sonnensynodischen Umlaufzeit ist eine Folge der unterschiedlichen wechselseitigen Stellung von Sonne und Satellit, also nicht der periodischen Variationen der Bahnparameter. Wenn also von einer „mittleren Bewegung“ gesprochen wird, die durch Vernachlässigung der periodischen Variationen erhalten, ist das etwas ganz anderes als die „mittlere Umlaufzeit“, wie sie aus der Formel (28.136) mit Anfangsparametern errechnet werden kann. Im Beispiel beträgt diese $\overline{P_S} = \overline{P_S}(t_0) = 7531.072743$ sec. Sie kann daher nur als Anhaltswert dienen. Die „mittlere Umlaufzeit“ wird bei Vernachlässigung der periodischen Parameter berechnet zu $P_S = 7539.721180$ sec, die „wahre Umlaufzeit“ unter Einschluss der periodischen Variationen zu $P_S = 7539.712391$ sec.

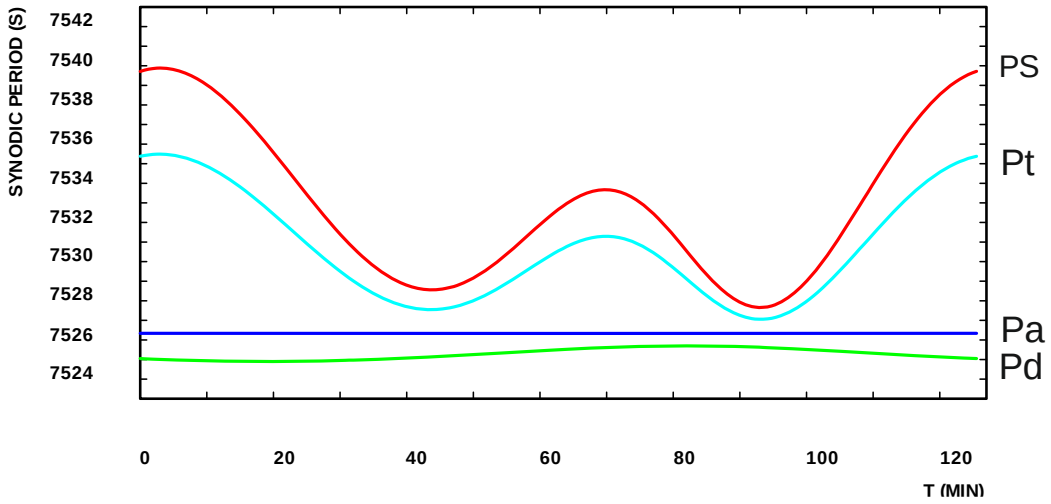


Bild 28-7: Vergleich der Äquator-bezogenen sonnensynodischen Umlaufzeit P_S mit der tropischen Umlaufzeit P_t, der drakonitischen Umlaufzeit P_d und der anomalistischen Umlaufzeit P der Erdsatellitenbahn a=8300 km, e=0.2, i=60° über einen Umlauf P_S

Der Vergleich der sonnensynodischen Umlaufzeit in Bild 28-7 mit den entsprechenden Kurven der anomalistischen, der drakonitischen sowie der tropischen Umlaufzeit zeigt, dass die Kurve der Umlaufzeit einen umso größeren Ausschlag haben kann, je mehr der Bezug von der Bahn entfernt ist. Im vorliegenden Fall handelt es sich um den Bezug auf den Äquator sowie die Eigenbewegung der Sonne.

Eine zweite vergleichende Untersuchung der sonnensynodischen Umlaufzeit ist ihrer Abhängigkeit von der Bahninklination gewidmet. Das entsprechende Beispiel in Bild 28-8 zeigt zunehmende Ausschläge der über einen Umlauf berechneten Umlaufzeiten für rechtläufige Bahnen, geringe Ausschläge für retrograde Bahnen. Die hier gewählte Bahninklination von etwa i=103° liegt in der Nähe einer sonnensynchronen Bahn. Der geringe Ausschlag der entsprechenden Kurve macht bereits die Bedeutung dieses Bahntyps ersichtlich[1].

[1] Weiteres dazu ab Abschnitt 28.8 auf Seite 473

Als drittes Beispiel wird die Abhängigkeit der Sonnensynodischen Umlaufzeit während eines Umlaufs von der Exzentrizität untersucht. Die Variation pro Umlauf nimmt mit zunehmender Exzentrizität erheblich zu. Der Unterschied zwischen „mittlerer“, d.h. nur mit säkularen Einflüssen gerechneter, und „wahrer“, also mit allen bekannten periodischen Einflüssen gerechneter Umlaufzeit ist in dieser Darstellung nicht zu erkennen.

Anmerkung: Eine Abhängigkeit vom Knoten sowie von der Jahreszeit wurde nicht beobachtet. ◄

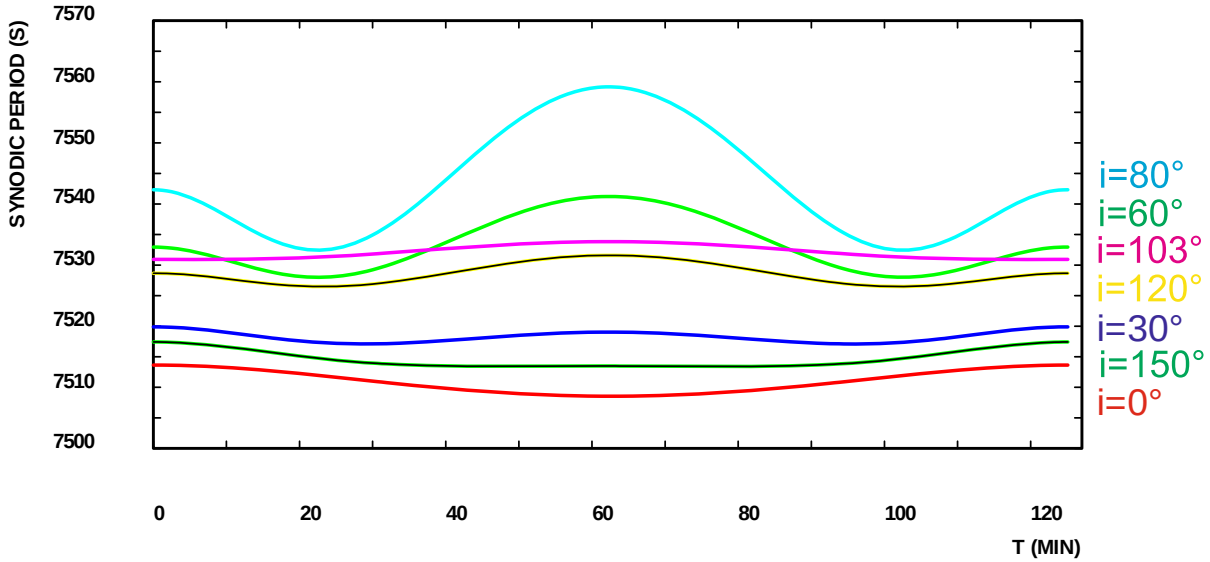


Bild 28-8: Die Äquator-bezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen a=8300 km, e=0.2, i=0°, 30°, 60°, 80°, 103°, 150° über einen Umlauf P_S

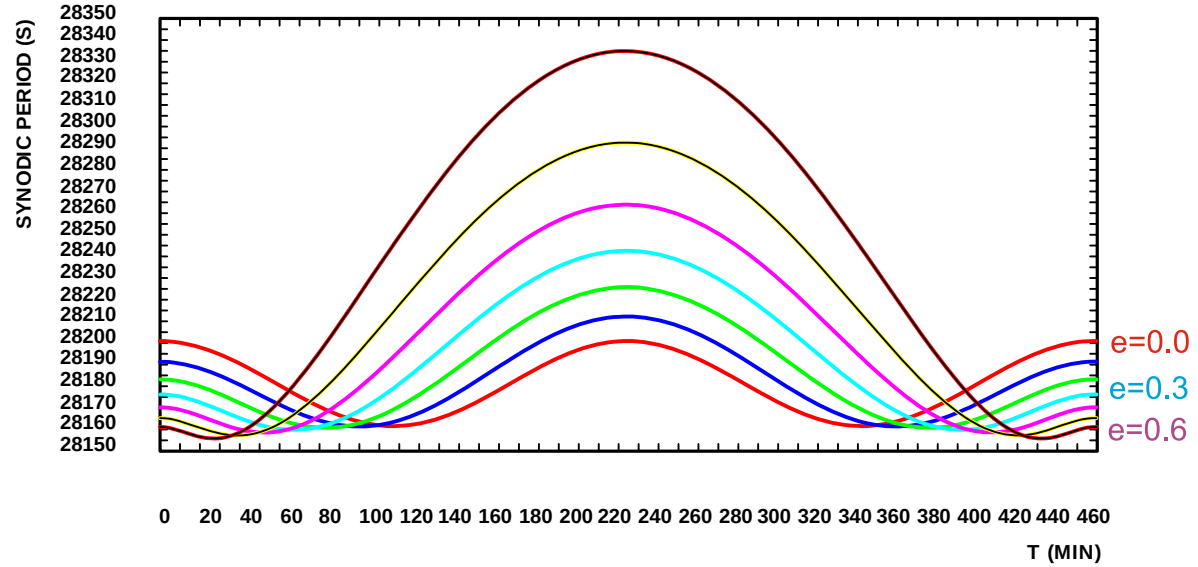


Bild 28-9: Die Äquator-bezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen a=20000 km, i= 60°, für verschiedene Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, über einen Umlauf P_S

28.5.1.3 Berechnung einer Referenz-Konjunktion

Um eine Liste mit Konjunktionen und Oppositionen zwischen Erdsatellit und Sonne erstellen zu können, muss zunächst der Zeitpunkt t_{CO} der ersten Konjunktion nach einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_A gefunden werden. Als Bedingungsgleichung kann die überlagerte Funktion

$$fct\left(t_{CO}\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_{CO}\right)\right] = \sin\left[\alpha\left(t_{CO}\right) - \alpha_{\odot}\left(t_{CO}\right)\right] = 0 \tag{28.137}$$

verwendet werden. Um den Iterationsprozess starten zu können, muss zunächst ein Anfangszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}$ gesucht werden. Da sich die Rektaszension $\alpha_{\odot}$ der Sonne während eines Satellitenumlaufs nur geringfügig ändert, kann nach Bedingung (28.137) für die Rektaszension des Satelliten

$$\alpha\left(t_{CO}^{(0)}\right) \approx \alpha_{\odot}\left(t_A\right) \tag{28.138}$$

angenommen werden. Mit bekannter Inklination i und Knoten Ω der Satellitenbahn kann das zugehörige Argument der Breite u berechnet werden nach Bild 28-10 mit Hilfe der Deklination aus

$$\begin{aligned} &\tan\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right] = \sin\left[\alpha\left(t_{CO}^{(0)}\right) - \Omega\left(t_A\right)\right] \\ &\sin\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right] = \frac{\tan\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}{\sqrt{1+\tan^2\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}} \quad , \quad \cos\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}} \end{aligned} \tag{28.139}$$

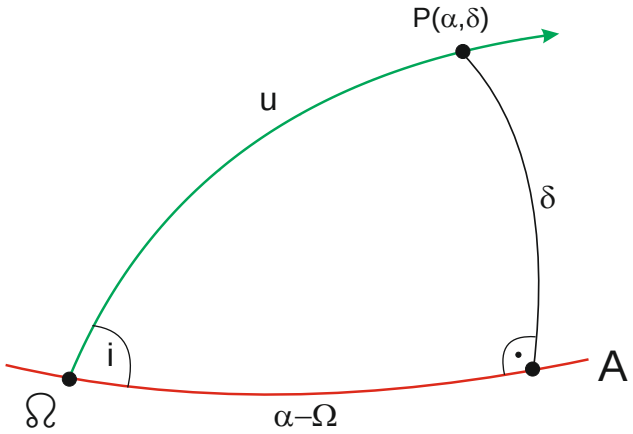


Bild 28-10: Berechnung des Argumentes der Breite aus vorgegebener Rektaszension

und damit

$$\begin{aligned} &\cos\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right] = \cos\left[\alpha_{\odot}\left(t_A\right) - \Omega\left(t_A\right)\right]\cos\left[\delta_{\odot}\left(t_A\right)\right] \\ &\sin\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right] = \sin\left[\alpha_{\odot}\left(t_A\right) - \Omega\left(t_A\right)\right]\cos\left[\delta_{\odot}\left(t_A\right)\right]\cos\left[i\left(t_A\right)\right] + \sin\left[\delta_{\odot}\left(t_A\right)\right]\sin\left[i\left(t_A\right)\right] \end{aligned} \tag{28.140}$$

Alternativ kann ohne den Umweg über die Deklination das Argument der Breite auch direkt erhalten werden aus

$$\cos\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{\cos\left[i\left(t_A\right)\right]\cos\left[\alpha_\odot\left(t_A\right)-\Omega\left(t_A\right)\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i\left(t_A\right)\right]+\sin^2\left[\alpha_\odot\left(t_A\right)-\Omega\left(t_A\right)\right]\sin^2\left[i\left(t_A\right)\right]}}$$
$$\sin\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{\sin\left[\alpha_\odot\left(t_A\right)-\Omega\left(t_A\right)\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i\left(t_A\right)\right]+\sin^2\left[\alpha_\odot\left(t_A\right)-\Omega\left(t_A\right)\right]\sin^2\left[i\left(t_A\right)\right]}}\quad . \tag{28.141}$$

Damit folgen die wahre Anomalie $\upsilon\left(t_{CO}^{(0)}\right)=u\left(t_{CO}^{(0)}\right)-\omega\left(t_A\right)$ und mit Hilfe der *Kepler*formeln und der *Kepler*gleichung auch die mittlere Anomalie $M\left(t_{CO}^{(0)}\right)$ des Satelliten zum gesuchten Näherungszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}$. Die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[1] $\overline{n_a}=\overline{n_K}+\left(M_0\right)_s^{\cdot}$, sowie die mittlere Anomalie $M\left(t_A\right)$ des Satelliten können als bekannt angenommen werden.

Der gesuchte Näherungszeitpunkt wird dann zum Start der Iteration (28.137) erhalten aus der Beziehung[2]

$$t_{CO}^{(0)}=t_A+\frac{M\left(t_{CO}^{(0)}\right)-M\left(t_A\right)}{\overline{n_a}}\quad . \tag{28.142}$$

Die Iteration kann mit einem sicheren aber langsamen Verfahren der fortgeschrittenen Halbierung durchgeführt werden. Eine schnellere Iteration ist bei sicherem Konvergenzkreis mit Hilfe eines *Newton*-Verfahrens möglich:

$$t_{CO}^{(n+1)}=t_{CO}^{(n)}-\frac{\tan\left[\tau\left(t_{CO}^{(n)}\right)\right]}{\dot\alpha\left(t_{CO}^{(n)}\right)-\dot\alpha_\odot\left(t_{CO}^{(n)}\right)}\qquad \langle n=0,1,2,\cdots\quad . \tag{28.143}$$

BEISPIEL: Die Satellitenbahn a=12000.000 km, e=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M_0=0° mit Epoche t_0: 2018-04-27/00:00:00.0 hat bezogen auf den Anfangszeitpunkt $t_A=13^h$ mit Hilfe der Beziehung (28.142) den Näherungszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}:14^h\,30^m\,19^s.226$. Der zugehörige Sonnenwinkel beträgt $\tau_{CO}^{(0)}=324°.598183$. Der Iterationsprozess (28.137) ergibt für die erste Konjunktion des Satelliten mit der Sonne nach $t_A=13^h$ den Zeitpunkt $t_{CO}:14^h\,52^m\,49^s.571$. Die Kontrolle ergibt den Sonnenwinkel $\tau_{CO}=360°.0000000$. ◄

28.5.1.4 Zeit aus Sonnenwinkel

Vorgegeben seien ein Sonnenwinkel τ_0, der auf eine vorgegebene Konjunktion zum Zeitpunkt t_{CO} bezogen sei. Gesucht ist der τ_0 zugeordnete Zeitpunkt t_τ, der auf diese Konjunktion folgt.

Ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt werde mit der Rektaszension der Sonne zum Zeitpunkt der Konjunktion eine näherungsweise Rektaszension des Satelliten gebildet:

---

[1] aus Formel (22.35) (Abschnitt 22.2.2 auf Seite 31)

[2] vergleiche auch die Berechnung der Zeit bei vorgegebener wahrer Anomalie in Abschnitt 22.2.4 auf Seite 37

$$\alpha_\tau^{(0)} := \tau_0 + \alpha_\odot(t_{CO}) \quad . \tag{28.144}$$

Wie in den Umrechnungen (28.141) kann auf der gegebenen Satellitenbahn das der Knotenbezogenen Rektaszension $\alpha_\tau^{(0)} - \Omega(t_{CO})$ zugeordnete Argument der Breite berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\cos\left[u\left(t_\tau^{(0)}\right)\right] &= \frac{\cos\left[i(t_{CO})\right]\cos\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i(t_{CO})\right] + \sin^2\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]\sin^2\left[i(t_{CO})\right]}} \\
\sin\left[u\left(t_\tau^{(0)}\right)\right] &= \frac{\sin\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i(t_{CO})\right] + \sin^2\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]\sin^2\left[i(t_{CO})\right]}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.145}$$

Mit der wahren Anomalie $\upsilon\left(t_\tau^{(0)}\right) = u\left(t_\tau^{(0)}\right) - \omega(t_{CO})$, der zugehörenden mittleren Anomalie $M\left(t_\tau^{(0)}\right)$, der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung $\overline{n_a} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s$ und der mittleren Anomalie $M(t_{CO})$ des Satelliten kann ein Näherungszeitpunkt erhalten werden

$$t_\tau^{(0)} = t_{CO} + \frac{M\left(t_\tau^{(0)}\right) - M(t_{CO})}{\overline{n_a}} \quad . \tag{28.146}$$

Mit diesem Näherungszeitpunkt kann der Sonnenwinkel $\tau\left(t_\tau^{(0)}\right)$ als Startwert für die iterative Berechnung des gesuchten Zeitpunktes t_τ mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(t_\tau) \equiv \sin\left[\tau(t_\tau) - \tau_0\right] = 0 \tag{28.147}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Auf der Satellitenbahn des vorhergehenden Beispiels a=12000.000 km, e=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M_0=0° mit Epoche t_0: 2018-04-27/00:00:00.0, werde nach der Bezugskonjunktion t_{CO} : $2018-04-27/14^h\,52^m\;49^s.571$ der Zeitpunkt gesucht, an dem der Sonnenwinkel den Wert $\tau_0 = 50°$ annimmt. Um eine Anfangsnäherung zu erhalten wird mit Beziehung (28.144) die knotenbezogene Rektaszension $\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO}) = 85°.553$, die wahre Anomalie $\upsilon\left(t_\tau^{(0)}\right) = 80°.311$ und die mittlere Anomalie $M\left(t_\tau^{(0)}\right) = 58°.441$ gebildet. Die Beziehung (28.146) liefert mit der Näherung $t_\tau^{(0)} - t_{CO} = 890.914\,\text{sec}$ den Näherungszeitpunkt $t_\tau^{(0)}$: $2018-04-27/15^h\,07^m\;40^s.485$. An diesem Zeitpunkt lautet der Sonnenwinkel $\tau_\tau^{(0)} = 45°.594285$. Die Iteration (28.147) ergibt schließlich den endgültigen Zeitpunkt t_τ : $2018-04-27/15^h\,0^m\;52^s.263$. Zur Kontrolle wird für diesen Zeitpunkt der Sonnenwinkel neu ausgerechnet: $\tau_\tau^{(n)} = 50°.000041$. Die Genauigkeit ist von der Ordnung 10^{-1} sec.◀

28.5.1.5 Konjunktionen und Oppositionen

Die in den beiden vorstehenden Abschnitten hergeleiteten Verfahren erlauben die Berechnung einer Liste mit Konjunktionen und Oppositionen zwischen einem Erdsatelliten und der Sonne.

Für eine vorgegebene Satellitenbahn wird nach Abschnitt 28.5.1.3 eine Referenzkonjunktion hergeleitet. Mit der Methodik in Abschnitt 28.5.1.4 werden sodann die Konjunktionen und Oppositionen hergeleitet. Dazu wird zur Berechnung einer Konjunktion der Sonnenwinkel $\tau_{CO} = 0°$, für die Opposition der Sonnenwinkel $\tau_{OP} = 180°$ als Zielmarke gesetzt. Das Verfahren ist stabil.

BEISPIEL: Gegeben sie wie in den vorhergehenden Beispielen die elliptische rechtläufige Satellitenbahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M_0=0°, zur Epoche 2018-04-27 00:00: 0.00. Die Berechnung der Zeiten wird mit der Genauigkeit $\Delta t = \pm 10^{-3}\,\text{sec}$ durchgeführt. Die Tabelle gibt an wieviele sonnensynodische Satellitenumläufe seit der Epoche zurückgelegt wurden und wieviele Tage M vergangen sind. Nach dem Datum in U.T. für die Konjunktionen und Oppositionen wird die Lokalzeit im Subsatellitenpunkt angegeben. Wenn der Subsatellitenpunkt die geographische Länge λ hat, beträgt die lokale Sonnenzeit für diesen Meridian, wenn λ im Gradmaß gegeben ist,

$$T = \text{mod}\left(t + \lambda \times 240{,}86400\right) \quad . \tag{28.148}$$

Synodic periods

==========

CO Conjunction Satellite-Sun
OP Opposition Satellite-Sun
N Number of synodic period wrt epoch
M Number of days after epoch
L Eastern geographic longitude of sat (deg)
D Declination (deg) of satellite
RAS Right ascension (deg) of Sun
DES Declination (deg) of Sun)
PS True synodic period (s)
tau solar angle
Time in U.T. and local time
Mean synodic period PSM = 13090.933 s = 3 h 38 m 10.933 s
Accuracy in time : EPST = 0.00100 s
Satellite Orbit Model including:
- Analyt. secular perturbations of second order due to J2, J3, J4
- Analyt. short periodic perturbations of first order due to J2
- Analyt. long periodic perturbations of second order due to J2, J3, J4

Time interval from 2018, 4,27,13, 0, 0.00 until 2018, 4,29,13, 0, 0.00

CO	OP	N	M	YEAR MO DA HO MI SE	HO MI SE	L(deg)	D(deg)	RAS	DES	PS(s)	TAU
CO		4	0	2018 4 27 14 52 49.571	11 58 35.391	316.441	45.201	35.197	14.027	13088.655	360.000
	OP	4	0	2018 4 27 17 3 14.051	23 58 34.576	103.836	-45.290	35.283	14.058	13092.422	180.000
CO		5	0	2018 4 27 18 30 58.225	11 58 34.035	261.899	45.363	35.341	14.075	13088.627	360.000
	OP	5	0	2018 4 27 20 41 26.474	23 58 33.234	49.278	-45.452	35.427	14.106	13092.354	180.000
CO		6	0	2018 4 27 22 9 6.851	11 58 32.691	207.358	45.524	35.485	14.123	13088.599	360.000
	OP	6	0	2018 4 28 0 19 38.828	23 58 31.893	354.721	-45.613	35.571	14.154	13092.285	180.000
CO		7	1	2018 4 28 1 47 15.449	11 58 31.347	152.816	45.684	35.629	14.170	13088.570	360.000
	OP	7	1	2018 4 28 3 57 51.113	23 58 30.566	300.164	-45.772	35.715	14.201	13092.218	180.000
CO		8	1	2018 4 28 5 25 24.019	11 58 30.036	98.275	45.843	35.772	14.218	13088.542	360.000
	OP	8	1	2018 4 28 7 36 3.332	23 58 29.254	245.608	-45.929	35.858	14.249	13092.152	180.000
CO		9	1	2018 4 28 9 3 32.561	11 58 28.731	43.734	46.000	35.916	14.265	13088.514	0.000
	OP	9	1	2018 4 28 11 14 15.483	23 58 27.953	191.052	-46.086	36.002	14.296	13092.085	180.000
CO		10	1	2018 4 28 12 41 41.074	11 58 27.429	349.193	46.155	36.060	14.313	13088.487	360.000
	OP	10	1	2018 4 28 14 52 27.567	23 58 26.660	136.496	-46.241	36.146	14.344	13092.020	180.000
CO		11	1	2018 4 28 16 19 49.561	11 58 26.146	294.652	46.310	36.204	14.360	13088.459	360.000
	OP	11	1	2018 4 28 18 30 39.587	23 58 25.383	81.941	-46.394	36.290	14.391	13091.956	180.000
CO		12	1	2018 4 28 19 57 58.020	11 58 24.881	240.112	46.463	36.348	14.407	13088.433	0.000
	OP	12	1	2018 4 28 22 8 51.542	23 58 24.119	27.386	-46.547	36.434	14.438	13091.891	180.000
CO		13	1	2018 4 28 23 36 6.452	11 58 23.612	185.572	46.615	36.492	14.454	13088.404	360.000
	OP	13	1	2018 4 29 1 47 3.435	23 58 22.868	332.831	-46.698	36.579	14.485	13091.827	180.000
CO		14	2	2018 4 29 3 14 14.858	11 58 22.368	131.031	46.765	36.636	14.501	13088.378	0.000
	OP	14	2	2018 4 29 5 25 15.262	23 58 21.621	278.276	-46.848	36.723	14.532	13091.766	180.000
CO		15	2	2018 4 29 6 52 23.236	11 58 21.124	76.491	46.914	36.780	14.548	13088.352	360.000
	OP	15	2	2018 4 29 9 3 27.027	23 58 20.390	223.722	-46.996	36.867	14.579	13091.702	180.000
CO		16	2	2018 4 29 10 30 31.589	11 58 19.908	21.951	47.062	36.925	14.595	13088.325	0.000
	OP	16	2	2018 4 29 12 41 38.731	23 58 19.182	169.169	-47.144	37.011	14.626	13091.641	180.000

Tabelle 28-8: Liste mit Konjunktionen und Oppositionen Satellit-Sonne für die Satellitenbahn a=12000 km, SAB-Sonne-b10.venie=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M0=0°, Epoche 2018.04.27 00:00: 0.00

Entsprechend zeigt Tabelle 28-8 bei Konjunktionen lokalen Mittag, bei Oppositionen lokale Mitternacht[1]. Die weiteren Spalten zeigen die geographischen wie die äquatorialen Koordinaten des Satelliten an. Die vorletzte Spalte enthält die zum jeweiligen Datum wahre Sonnensynodische Umlaufzeit. Zur Kontrolle wird in einer letzten Spalte der Sonnenwinkel für das jeweils erhaltene Datum berechnet. Bemerkenswert ist außerdem die Beobachtung, dass die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen nur kaum von der berechneten mittleren Sonnensynodischen Umlaufzeit abweicht. Entsprechendes gilt auch für die Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionen. ◀

28.5.1.6 Bahndefinition aus mittlerem Äquator-bezogenem sonnensynodischer Umlauf

Ähnlich wie auch bei anderen Bewegungsbezügen kann bei Vorgabe der mittleren sonnensynodischen Umlaufzeit eine *Kepler*bahn definiert werden. Da bei der Berechnung der säkularen Einflüsse durch das Erdfeld nur die mittleren *Kepler*elemente $\overline{a},\overline{e},\overline{i}$ vorkommen, kann auch eines dieser Parameter bei Vorgabe der anderen beiden und der Umlaufzeit bestimmt werden. Wir wollen dies im Fall der großen Bahnhalbachse demonstrieren[2]. Die sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ und die mittleren Elemente $\overline{e},\overline{i}$ seien vorgegeben. Eine nullte Näherung kann durch Verzicht auf die säkularen Variationen der *Kepler*elemente aus Gleichung (28.136) (auf Seite 425) gefunden werden:

$$\overline{a_S}^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\frac{2\pi}{\overline{P_S}} + n_\odot\right)}} \quad . \tag{28.149}$$

Eine erste Korrektur kann genau wie in Abschnitt 24.3.4 (auf Seite 308) Formel (24.62) gefunden werden:

$$\Delta\overline{a_S}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{J_2 R_E^2}{\overline{a_S}\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\left[\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i} - \left(1+\sqrt{1-\overline{e}^2}\right) - 2\cos\overline{i}\right] + O\left(\overline{a_S}^{(0)}\, J_2^2\right) . \tag{28.150}$$

Damit kann eine erste Näherung erhalten werden:

$$\overline{a_S}^{(1)} = \overline{a_S}^{(0)} + \Delta\overline{a_S}^{(1)} \quad . \tag{28.151}$$

Bezogen auf eine Epoche t_0 kann eine weitere Verbesserung iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion in Abhängigkeit vom Sonnenwinkel τ

$$fct\left(\overline{a_S}\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S; \overline{a_S}^{(\nu)}\right) - \tau\left(t_0; \overline{a_S}^{(\nu)}\right)\right] = 0 \quad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{28.152}$$

erhalten werden. An Stelle der mittleren sonnensynodischen Umlaufzeit kann hier auch die wahre sonnensynodische Umlaufzeit verwendet werden.

---

[1] Die geringfügigen Abweichungen um etwa 2 Minuten können mit der wahren Sonnenbewegung erklärt werden. Die Ephemeride der Satellitenbewegung wurde analytisch mit Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ gerechnet.

[2] Die Bestimmung von Exzentrizität oder Inklination kann analog zu den Untersuchungen in Abschnitt 22.6 bzw. 23.3.5 hergeleitet werden.

BEISPIEL: Ein Erdsatellit möge stets nach dem Zeitintervall $P_S = 6000\,\text{sec}$ in Konjunktion zur mittleren Sonne stehen. Vorgegeben seien die Exzentrizität e=0.08 und die Bahninklination i=60°. Die nullte Näherung nach Formel (28.149) beträgt $\overline{a_S} = 7135.75889\,\text{km}$, die Verbesserung mit Formel (28.150) lautet $\Delta\overline{a_S}^{(1)} = \text{-}3.123377156\,\text{km}$, ergibt $\overline{a_S}^{(1)} = 7132.63552\,\text{km}$. Die Iteration (28.152) ergibt schließlich $\overline{a_S} = 7129.71266\,\text{km}$. Wird mit diesem Ergebnis die sonnensynodische Umlaufzeit unter Verwendung der Iteration (28.125) berechnet, ergibt sich $P_S = 6000.000976562$. Dies entspricht der vorgegebenen Rechengenauigkeit $\Delta t = 0.001\,\text{sec}$. ◄

28.5.2 Die Sonnensynodische Bewegung in Bezug auf die Ekliptik

In der Zeitrechnung wie bei der Berechnung und Beobachtung von Satellitenbahnen ist es üblich, die Untersuchungen auf den Erdäquator zu konzentrieren. Allerdings könnte im Zusammenhang mit dem Bezug auf die Sonne auch die (mittlere) Sonnenbahn, also die Ekliptik, als Bezugsebene gewählt werden. Dies wird im vorliegenden Abschnitt kurz andiskutiert.

Nach Bild 28-11 sei S der momentane Ort des Satelliten. Seine äquatorialen Koordinaten (α, δ) seien für einen gegebenen Zeitpunkt aus einer Ephemeridenrechnung bekannt. Seine ekliptikalen Koordinaten Länge *l* und Breite *b* können dann mit der momentanen Schiefe der Ekliptik ε berechnet werden aus[1]

$$\begin{aligned} \cos l \cos b &= \cos\alpha \cos\delta \\ \sin l \cos b &= \sin\alpha \cos\delta \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon \\ \sin b &= -\sin\alpha \cos\delta \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.153}$$

Der momentane Ort der Sonne ⊙ sei mit den ekliptikalen Koordinaten $(l_\odot, b_\odot)$ bekannt. Damit kann der Ekliptik-bezogene Sonnenwinkel

$$\tau_E := l - l_\odot \tag{28.154}$$

definiert werden. Mit seiner Hilfe kann die Ekliptik-bezogene sonnensynodische Umlaufzeit P_{SE} berechnet werden. In Analogie zu Gleichung (28.125) kann dazu die überlagerte Funktion

$$fct(P_{SE}; t_0) \equiv \sin\left(\tau_E[t_0 + P_{SE}] - \tau_E[t_0]\right) = 0 \tag{28.155}$$

verwendet werden. Der iterative Prozess kann wie in der Zuordnung (28.126) durch Vorgabe der *Kepler*schen oder der mittleren Äquator-bezogenen Umlaufzeit gestartet werden:

$$P_{SE}^{(0)} := \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_{SE}^{(0)} := \overline{P_S} \quad . \tag{28.156}$$

Die Ekliptik-bezogene sonnensynodische Bewegung wird aus der Variation des Sonnenwinkels τ_E gebildet:

$$\dot{\tau}_E = \dot{l} - \dot{l}_\odot \quad . \tag{28.157}$$

---

[1] Formelsystem (8.71) in Abschnitt 8.2.2, Band II

Aus der Ephemeridenrechnung der Satellitenbahn können die Variationen der Rektaszension $\dot{\alpha}$ und der Deklination $\dot{\delta}$ als bekannt angenommen werden[1]. Die Variation der ekliptikalen Länge des Satelliten wird durch Differentiation der Transformationsformeln (28.153) gebildet[2]. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{b}\,\cos b &= \dot{\alpha}\cos l\cos b\sin\varepsilon + \dot{\delta}\left[-\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\right] - \\ &\quad -\dot{\varepsilon}\left[\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon\right] \qquad (28.158) \\ \dot{l}\,\cos^2 b &= \dot{\alpha}\cos\delta\left[\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\right] + \dot{\delta}\cos\alpha\sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}\cos\alpha\cos\delta\sin b \ . \end{aligned}$$

In der praktischen Anwendung wird es meistens genügen, die mittlere Schiefe der Ekliptik an Stelle der wahren zu verwenden und auch die Variation der Ekliptik $\dot{\varepsilon}$ zu vernachlässigen.

Die Variation der ekliptikalen Länge der Sonne $\dot{l}_\odot$ ist in den analytischen Ausdrücken (28.60) bekannt. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird es genügen diesen Wert über die Variation der Mittelpunktsgleichung in der Entwicklung (28.87) (auf Seite 407) anzunähern. Falls eine exakte Ephemeride der Sonne in äquatorialen Koordinaten zur Verfügung steht, können die Variationen in Rektaszension $\dot{\alpha}_\odot$ und Deklination $\dot{\delta}_\odot$ (28.5) berechnet werden. In allen Fällen wird die Sonnenbewegung als geozentrisch aufgefasst: $\dot{\alpha}_\odot = \dot{\alpha}_{\odot g}$, $\dot{\delta}_\odot = \dot{\delta}_{\odot g}$. In diesem Fall können die Variationen der ekliptikalen Koordinaten der Sonne mit Hilfe der Gleichungen (28.158) berechnet werden.

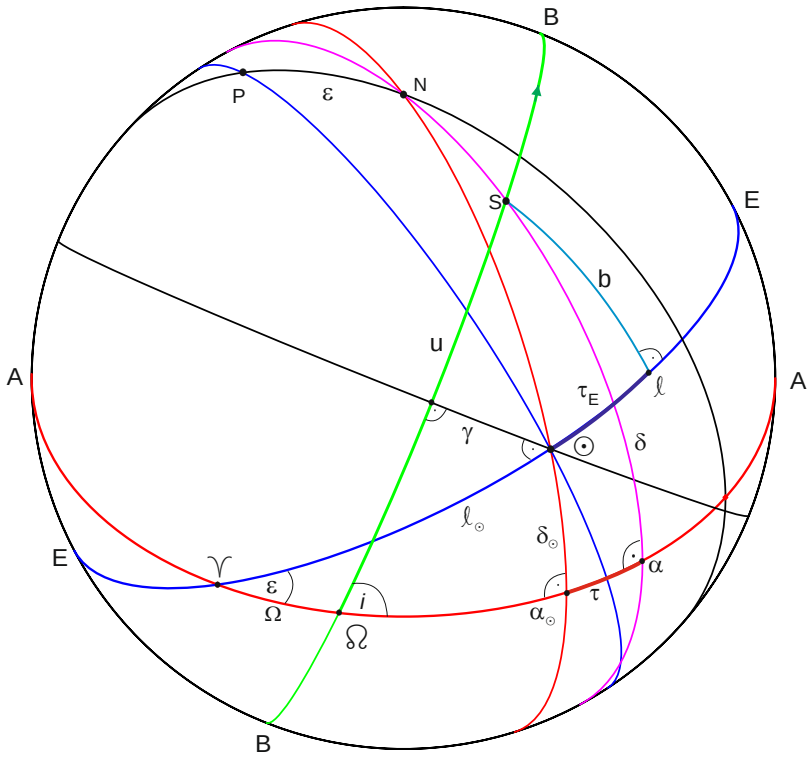


Bild 28-11: Die Sonnensynodische Satellitenbewegung bei Bezug auf die Ekliptik, A-Äquator, E-Ekliptik, B-Bahnebene des Satelliten

[1] Siehe dazu eventuell die Herleitungen in Abschnitt 24.2.1

[2] Siehe auch die Variationsformeln (8.73) in Abschnitt 8.2.2

Die Ekliptik-bezogene Sonnensynodische Umlaufzeit wird dann berechnet aus dem Integral

$$P_{SE} = \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \frac{1}{\dot{\tau}_E} d\tau_E \quad . \tag{28.159}$$

Einige BEISPIELE werden im Vergleich der verschiedenen Definitionen der Sonnensynodischen Bewegungen in Abschnitt 28.5.4 zusammengestellt.

28.5.3 Die sonnensynodische Bewegung in Bezug auf die Satellitenbahnebene

Eine dritte Möglichkeit zur Definition einer sonnensynodischen Satellitenbewegung und entsprechender Umlaufzeit ist der Bezug auf die Bahnebene des Satelliten. Der Satellit mit der äquatorialen Position $S(\alpha,\delta)$ hat im Bahnsystem die Position $S(u,0°)$, wenn u das Argument der Breite ist. Die Projektion der Sonne auf die Bahnebene treffe nach Bild 28-12 den Sonnenfußpunkt $S_\odot$, der vom aufsteigenden Bahnknoten die Distanz $u_\odot$ habe. Es sei wieder angenommen, dass Rektaszension $\alpha_\odot$ und Deklination $\delta_\odot$ der Sonne gegeben seien.

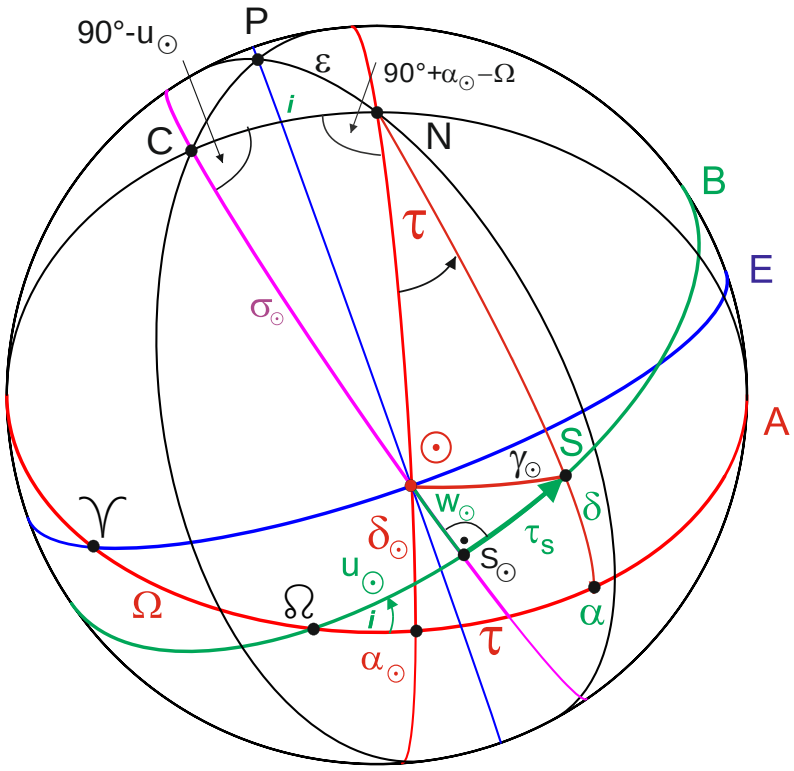


Bild 28-12: Der Sonnenwinkel auf Äquator A und längs der Satellitenbahn B, E - Ekliptik , S-Ort des Satelliten

Der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ ist der Zwischenwinkel zwischen dem Pol C der Satellitenbahn B und der Sonne auf der Ekliptik E. Wenn i die Inklination der Satellitenbahn und Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Bahnebene sind, hat der Pol der Bahn in äquatorialen Koordinaten den Richtungsvektor[1]

[1] Siehe etwa die Formeln (8.423) in Abschnitt 8.12.2 (Band II)

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \quad . \tag{28.160}$$

Mit dem geozentrischen Richtungsvektor der Sonne

$$\mathbf{r}_{\odot 0} = \mathbf{p}_1 \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot + \mathbf{p}_1 \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot + \mathbf{p}_3 \sin\delta_\odot \tag{28.161}$$

kann $\sigma_\odot$ eindeutig berechnet werden:

$$\cos\sigma_\odot = \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{r}_{\odot 0} = -\sin\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i \quad . \tag{28.162}$$

Die Projektion $S_\odot$ der Sonne auf die Satellitenbahn hat vom Ort der Sonne $\odot$ die Distanz $w_\odot = 90° - \sigma_\odot$. Die Satellitenbahn-bezogenen Koordinaten der Sonne $\left(u_\odot, w_\odot\right)$ können über das Dreieck $\left(C\odot N\right)$ berechnet werden mit den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \cos u_\odot \cos w_\odot &= \cos\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\cos\delta_\odot \\ \sin u_\odot \cos w_\odot &= \sin\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\cos\delta_\odot \cos i + \sin\delta_\odot \sin i \\ \sin w_\odot &= -\sin\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i \quad . \end{aligned} \tag{28.163}$$

Der Satellitenbahn-bezogene Solarwinkel wird dann definiert durch

$$\tau_S := u - u_\odot \quad . \tag{28.164}$$

Mit dessen Hilfe kann die Satellitenbahn-bezogene sonnensynodische Umlaufzeit P_{SS} wie in den vorstehenden Fällen mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(P_{SS}; t_0\right) \equiv \sin\left(\tau_S\left[t_0 + P_{SS}\right] - \tau_S\left[t_0\right]\right) = 0 \tag{28.165}$$

berechnet werden. Der Start der Iteration kann wieder mit einer der folgenden Näherungen erfolgen

$$P_{SS}^{(0)} := \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_{SS}^{(0)} := \overline{P_S} \quad . \tag{28.166}$$

Um diese Art der sonnensynodischen Bewegung näher zu untersuchen wird die Variation des Sonnenwinkels

$$\dot{\tau}_S = \dot{u} - \dot{u}_\odot \tag{28.167}$$

benötigt. Die Variation des Argumentes der Breite des Satelliten ist mit Hilfe der normalen Beschleunigung b_N aus Formel (11.79) (in Abschnitt 11.1.5, Band III) für eine gegebene Satellitenbahn bekannt:

$$\dot{u} = \dot{\zeta} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} = \frac{\sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)}}{r^2} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{\sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)} \sin i} \quad . \tag{28.168}$$

Die Position der Sonne $\left(u_\odot, \gamma_\odot\right)$ hat mit den Transformationsformeln (28.163) die Variationen

$$\begin{aligned} \dot{w}_\odot \cos w_\odot = &-\left(\dot{\alpha}_\odot - \dot{\Omega}\right)\cos\delta_\odot \cos\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\sin i + \\ &+ \dot{\delta}_\odot\left[\sin\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\sin\delta_\odot \sin i + \cos\delta_\odot \cos i\right] + \\ &- (i)^{\cdot}\left[\sin\left(\alpha_\odot - \Omega\right)\cos\delta_\odot \cos i + \sin\delta_\odot \sin i\right] \end{aligned} \tag{28.169}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_\odot \cos w_\odot = &\left(\dot{\alpha}_\odot - \dot{\Omega}\right)\cos\delta_\odot\left[\cos i\cos\left(\alpha_\odot-\Omega\right)\cos u_\odot + \sin\left(\alpha_\odot-\Omega\right)\sin u_\odot\right]+\\ &+\dot{\delta}_\odot\left\{\cos\left(\alpha_\odot-\Omega\right)\sin\delta_\odot\sin u_\odot+\right.\\ &\left.+\left[-\sin\left(\alpha_\odot-\Omega\right)\sin\delta_\odot\cos i+\cos\delta_\odot\sin i\right]\cos u_\odot\right\}+\\ &+(i)^{\cdot}\left[-\sin\left(\alpha_\odot-\Omega\right)\cos\delta_\odot\sin i+\sin\delta_\odot\cos i\right]\cos u_\odot \qquad \langle \sin w_\odot \neq 0 \quad .\end{aligned} \tag{28.170}$$

Wie im vorstehenden Abschnitt werden die Variationen der äquatorialen Positionswinkel der Sonne als bekannt und geozentrisch aufgefasst. Die Satellitenbahn-bezogene Sonnensynodische Umlaufzeit wird dann berechnet aus dem Integral

$$P_{SS} = \int_{\tau_{S0}}^{\tau_{S0}+2\pi} \frac{1}{\dot{\tau}_S}\,dt \tag{28.171}$$

BEISPIELE siehe im folgenden Abschnitt 28.5.4.◀

28.5.4 Vergleichende Betrachtung der unterschiedlichen Definitionen der sonnensynodischen Bewegung

Das Verhalten der sonnensynodischen Bewegung je nach Bezug ist sehr unterschiedlich. Um einen Eindruck für eventuelle Anwendungen zu vermitteln, werden einige Beispiele gerechnet. Als Bahn wird in allen Beispielen die *Kepler*bahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M_0=0° verwendet. Der wechselseitige Verlauf ist abhängig vom jeweiligen Startdatum.

Bild 28-13 zeigt den Verlauf der Sonnenwinkel $\left(\tau, \tau_E, \tau_S\right)$ über einen synodischen Umlauf.

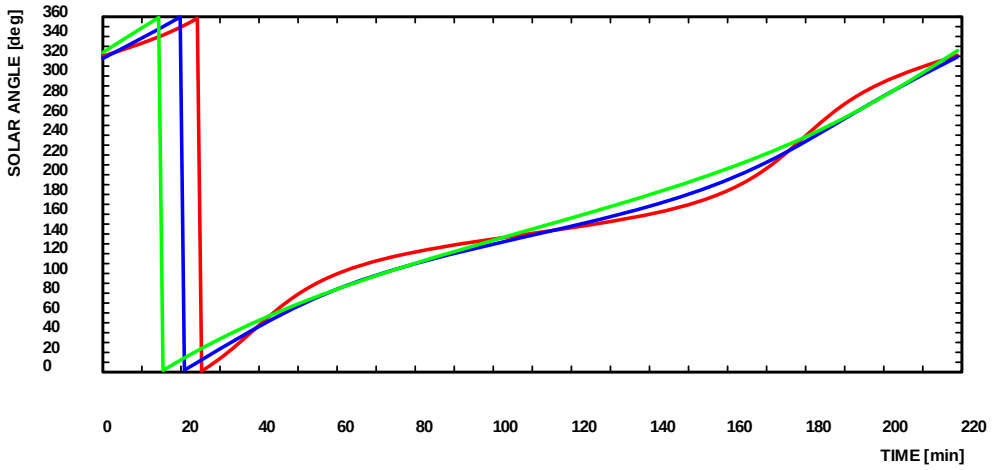


Bild 28-13: Sonnenwinkel der Bahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung. Start Datum 2018-05-02,12h. rot: Bezug auf Äquator, blau: auf Ekliptik, grün: auf Satellitenbahn

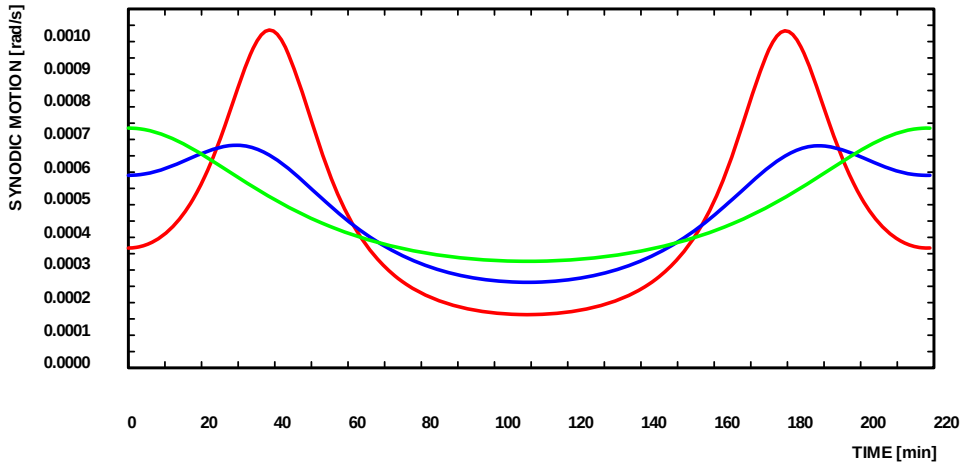


Bild 28-14: Variationen (Bewegungen) der Sonnenwinkel $\dot{\tau}, \dot{\tau}_E, \dot{\tau}_S$ der Bahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung über einen Umlauf. Startdatum 2018-05-02/12h.

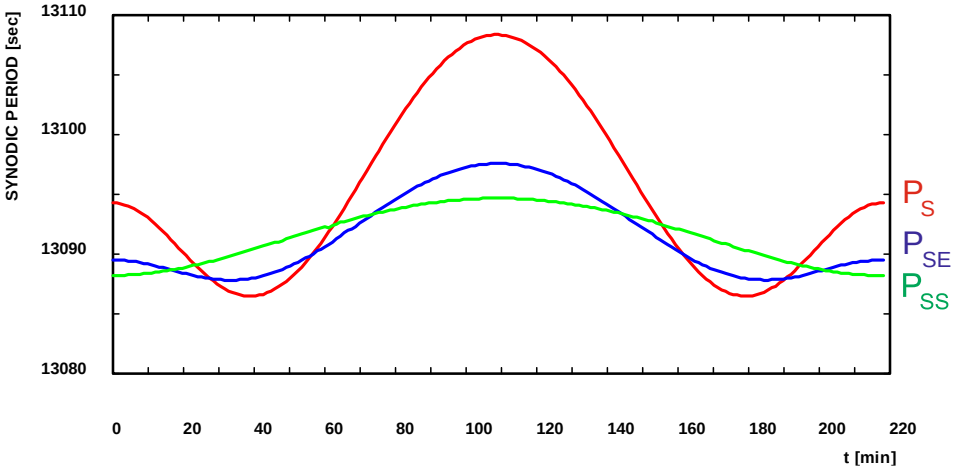


Bild 28-15: Satellitenbahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über einen synodischen Umlauf. Startdatum 1983-01-25/14^h

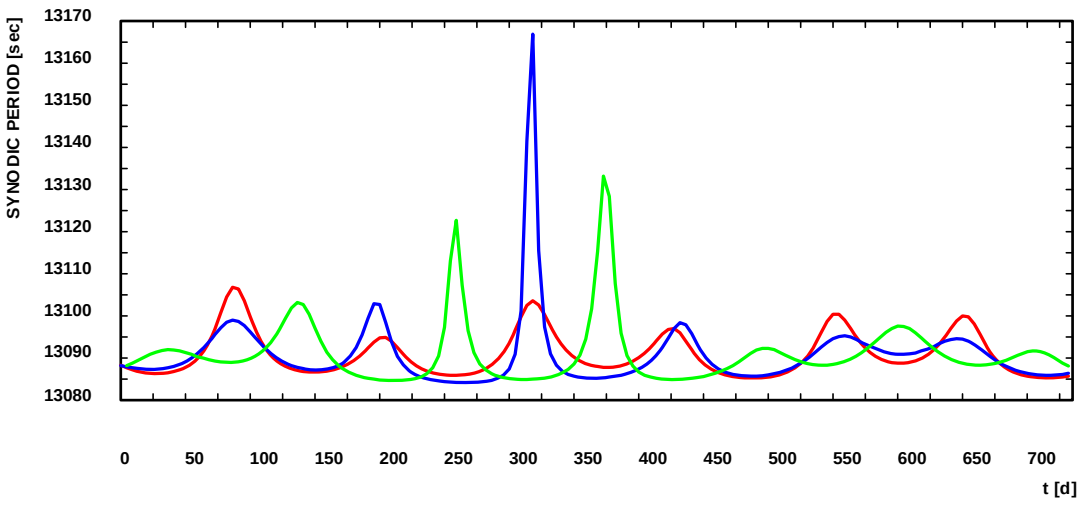


Bild 28-16: Satellitenbahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über zwei Jahre, Beginn am 2018-05-02/12^h

Bild 28-14 zeigt den Verlauf der Variationen $\left(\dot{\tau}, \dot{\tau}_E, \dot{\tau}_S\right)$ der Sonnenwinkel über einen synodischen Umlauf. Hier treten beträchtliche Unterschiede auf, die sich auch in Bild 28-15 im Verlauf der sonnensynodischen Umlaufzeiten über einen Umlauf, in Bild 28-16 im Verlauf von zwei Jahren zeigen. ◄

28.6 Satellitenbewegung in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

Zur Durchführung einer Satellitenbahnanalyse insbesondere im Hinblick auf Erdbeobachtungssatelliten ist der Bezug auf die fiktive mittlere Sonne von erstrangiger Bedeutung. Erst darauf aufbauend wird in verfeinerten Untersuchungen der Bezug zur wahren Sonne und der wahren Sonnenbewegung hergestellt.

28.6.1 Bewegung in mittlerer Sonnenzeit

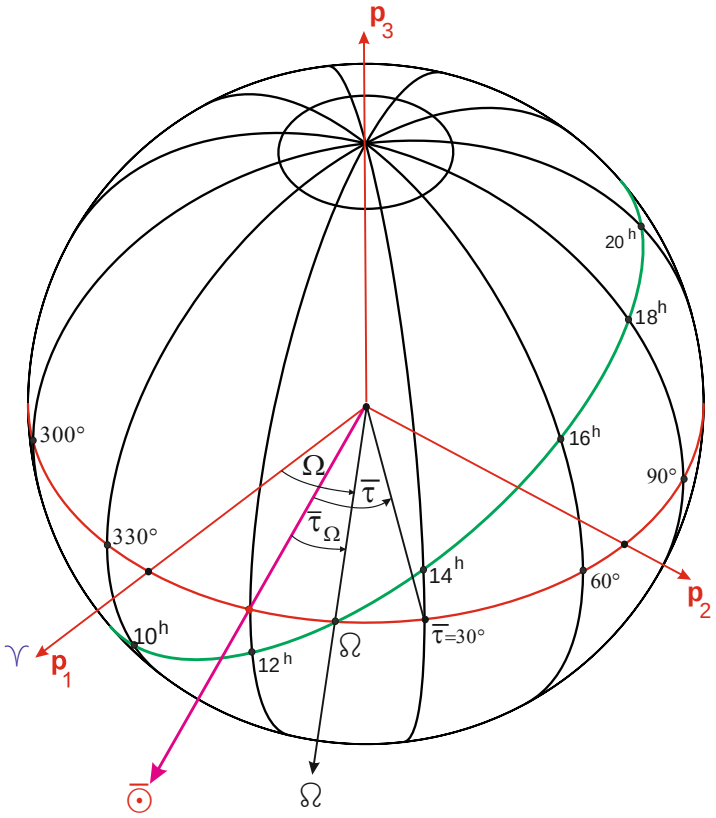


Bild 28-17: Bewegung eines Satelliten in mittlerer lokaler Sonnenzeit

Die Einführung des Sonnenwinkels (28.120) erlaubt eine übersichtliche Aussage, welche lokale Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt auf der Erdoberfläche besteht. Dazu wird die momentane Rektaszension α des Satelliten auf die Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}}$ der fiktiven mittleren Sonnen bezogen. Dies führt auf den mittleren Äquator-bezogenen Sonnenwinkel (vgl. Bild 28-17)

$$\bar{\tau} := \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.172}$$

α	$\bar{\tau}$	T	
$\alpha - \alpha_{\bar{\odot}} = 180°$	$\bar{\tau} = \pm 180°$	$T = 0^h \triangleq 24^h$	Mitternacht
$\alpha < \alpha_{\bar{\odot}}$	$\bar{\tau} < 0°$	$0^h < T < 12^h$	Nacht/Vormittag Satellit westlich der Sonne
$\alpha = \alpha_{\bar{\odot}}$	$\bar{\tau} = 0°$	$T = 12^h$	Mittag
$\alpha > \alpha_{\bar{\odot}}$	$\bar{\tau} > 0°$	$12^h < T < 24^h$	Nachmittag/Nacht Satellit östlich der Sonne

Tabelle 28-9: Übersicht über das zeitliche Verhalten eines Satelliten in mittlerer Sonnenzeit

Der mittlere Sonnenwinkel ist für jeden Zeitpunkt *t* berechenbar, der wie üblich bei der Untersuchung von Erdsatelliten in Weltzeit (U.T.) gegeben ist. Bezogen auf den Meridian des Subsatellitenpunktes gibt er die mittlere Ortssonnenzeit

$$T = T_m := \bar{\tau} + 12^h \tag{28.173}$$

an. Für $\bar{\tau} = 0^h$ befinden sich Satellit und fiktive mittlere Sonne in Konjunktion, die mittlere Ortssonnenzeit beträgt dann $T = 12^h$. Eine einfache Übersicht in Ergänzung zu Bild 28-17 liefert Tabelle 28-9.

28.6.2 Die sonnensynodische Bewegung in geographischen Koordinaten

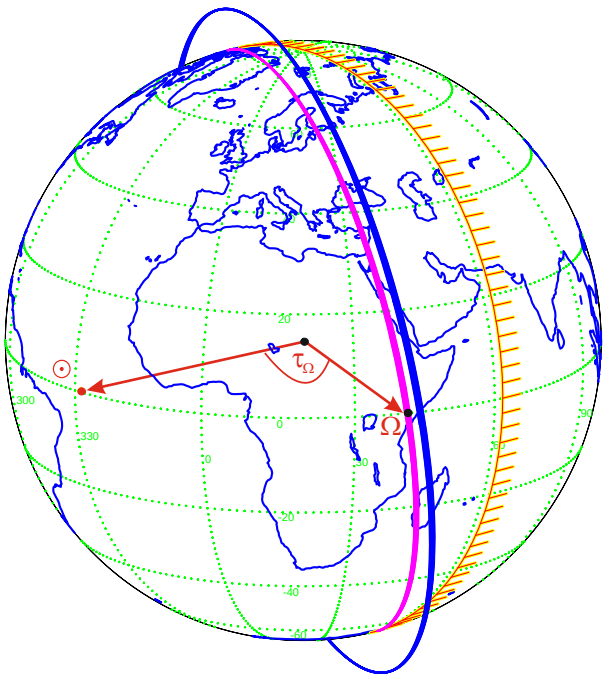


Bild 28-18: Zur Definition des Knoten-Sonnenwinkels zwischen subsolarem Punkt und dem aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn. Der Sonnenterminator ist eingezeichnet. Im Bild ist der Moment berücksichtigt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt durchläuft

Der mittlere Sonnenwinkel $\bar{\tau}$ kann auf die Oberfläche der festen Erde bezogen werden, wenn mit Hilfe der Sternzeit die Beziehung zwischen Rektaszension und geographischer Länge hergestellt wird[1]. Mit Hilfe der Sternzeit Θ_G des Greenwich-Meridians bestehen unter Einschluss der geographischen Länge λ des Satelliten und $\lambda_{\bar{\odot}}$ des subsolaren Punktes der fiktiven mittleren Sonne die Relationen

$$\Theta_G = \alpha - \lambda = \alpha_{\bar{\odot}} - \lambda_{\bar{\odot}} \tag{28.174}$$

und somit

$$\bar{\tau} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} = \lambda - \lambda_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.175}$$

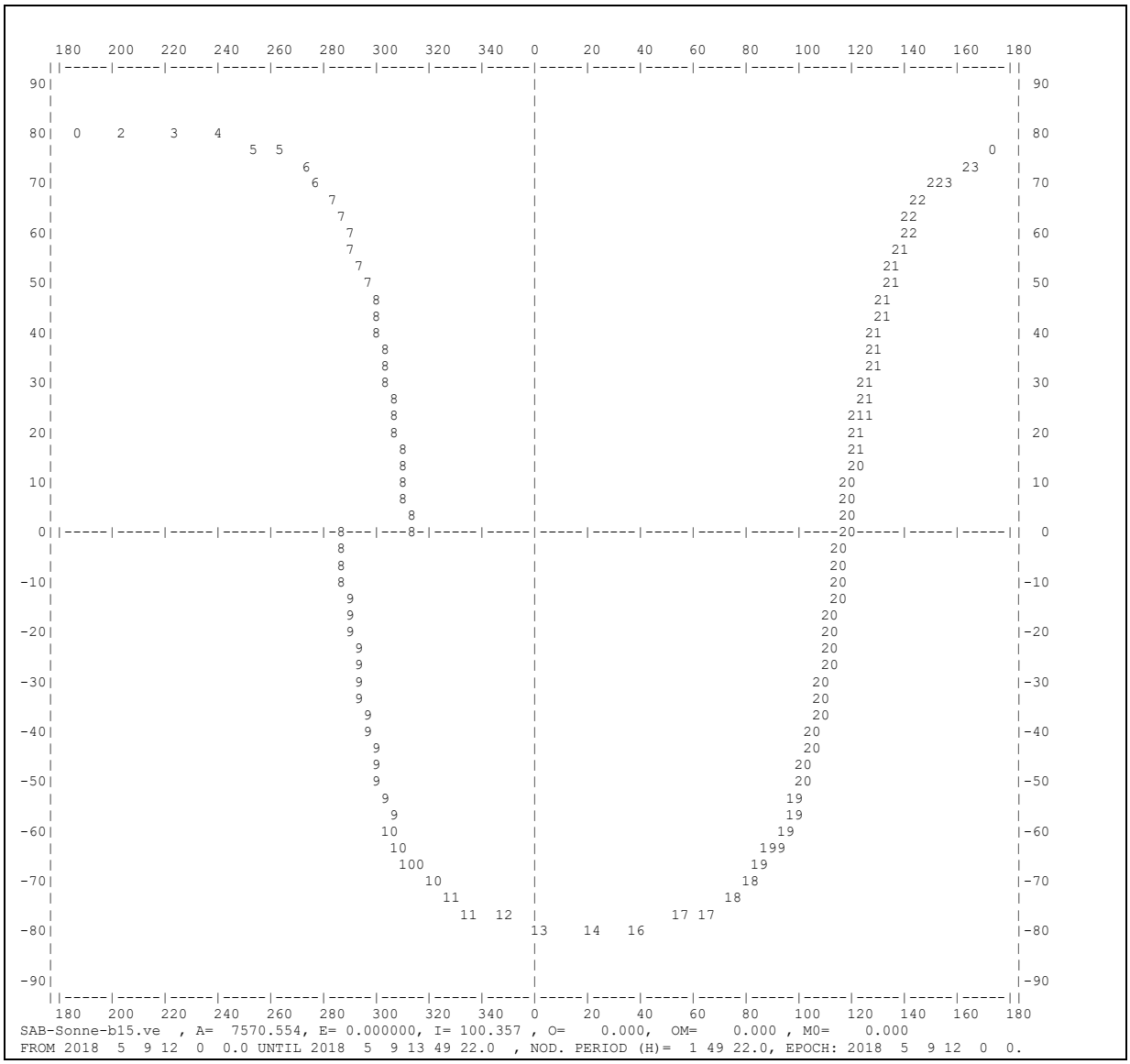


Bild 28-19: Markierung der mittleren Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt, Abszisse: geographische Länge, Ordinate: geodätische Breite, Auflösung 3°.333, Bahn: a=7570.554 km, e=0.0, i=100°.35652

[1] siehe etwa die Beziehung (8.196) in Abschnitt 8.6.1, Band II

Entsprechend besteht im Ortsmeridian des Subsatellitenpunktes die mittlere Sonnenzeit

$$T_m = \lambda - \lambda_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.176}$$

Hier sind die geographischen Längen wie auch gewöhnlich die Rektaszensionen im Stundenmaß gegeben. Für den 0-Meridian $\lambda = 0°$ ergibt sich aus dieser Beziehung insbesondere die mittlere Ortssonnenzeit T_G, die nichts anderes als die „Weltzeit“ (U.T.) ist:

$$T_G = t = \lambda_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.177}$$

Demnach ist die Weltzeit *t* der Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne[1] $t = \vartheta$. Dies führt auf die Beziehung zwischen Weltzeit *t* und mittlerer Ortssonnenzeit eines Meridians mit der (östlichen) geographischen Länge λ

$$T_m = t + \lambda \quad . \tag{28.178}$$

BEISPIEL: Gegeben sei die Satellitenbahn a=7570.554 km, e=0.0, i= 100°.35652, Epoche: 2018-05-09/12^h. Die säkulare Sonnendrift beträgt pro Tag $\dot{\tau}_{\Omega s} = -0°.0049/d$, die Knoten-Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\Delta\overline{\tau_\Omega} = -0°.000372/\overline{P_d}$, ein drakonitischer Umlauf 6525.028 s. In Bild 28-19 ist die mittlere lokale Sonnenzeit bezogen auf den Meridian durch den Subsatellitenpunkt in geographischen Koordinaten mit einer Winkelauflösung von $3°1/3$ aufgetragen. Damit erhält man einen Überblick über die Verteilung der Lokalzeit im Verlaufe eines drakonitischen Umlaufs. ◄

28.6.3 Verfahren der Bahnauslegung aus mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Sonnendrift

Die in den vorstehenden Abschnitten entwickelten Formelsysteme erweisen sich als fruchtbar bei der Lösung von Problemen der Bahnauslegung von Erdsatellitenbahnen, insbesondere bei Bezug auf die Erdoberfläche (Erdbeobachtungssatelliten).

In allen den im Folgenden behandelten Aufgabenstellungen seien die mittleren Epoche-Bahnparameter große Bahnhalbachse $\overline{a_0}$, Exzentrizität $\overline{e_0}$, Inklination $\overline{i_0}$, (eventuell bei elliptischen Bahnen) das Argument des Perigäums $\overline{\omega_0}$ bekannt. Die Stellung des Satelliten in Bezug auf die Sonne zu einem bestimmten (Epoche-) Zeitpunkt t_0 definiert die Orientierung der Bahn durch Auswahl der Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\overline{\Omega_0}$ sowie bei elliptischen Bahnen die mittlere mittlere Epoche-Anomalie $\overline{M_{00}}$, alternativ bei kreisförmigen Bahnen das mittlere Argument des Perigäums $\overline{\omega_0}$.

[1] siehe etwa in Abschnitt 8.4.1, Formel (8.121), Band II

28.6.3.1 Knoten und mittlere Anomalie bei Knotendurchgang

Der Knotenüberflug durch den aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn erfolge zum Zeitpunkt t_Ω über dem Ort mit der geographischen Länge λ_Ω. Die mittleren Bahnelemente $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ seien vorgegeben. Die Aufgabenstellung lautet: Wie ist die Bahnebene im Raum orientiert (Bestimmung von $\bar{\Omega}_0$), welche Epochestellung hat der Satellit (Bestimmung von $\overline{M_{00}}$), zu welcher mittleren Ortssonnenzeit erfolgt der Knotenüberflug?

Die mittlere Ortssonnenzeit wird nach Formel (28.178) berechnet aus

$$T_\Omega = t_{\Omega} + \frac{\lambda_\Omega}{15} \quad [h] \ , \tag{28.179}$$

wenn λ_Ω im Gradmaß gegeben ist. Da zum Zeitpunkt t_Ω auch die zugehörige Sternzeit $\Theta_G\left(t_\Omega\right)$ für den Meridian durch Greenwich berechnet werden kann[1], ist auch die Rektaszension des aufsteigenden Knotens für diesen Zeitpunkt bekannt aus[2]

$$\Omega\left(t_\Omega\right) = \Theta_G\left(t_\Omega\right) + \lambda_\Omega \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{28.180}$$

Für eine Kreisbahn $\left(\bar{e}_0 = 0.0, \overline{M_{00}} = 0°.0\right)$ kann das Argument des Perigäums zu $\bar{\omega}_0\left(t_\Omega\right) = 0°.0$ gesetzt werden. Im Fall einer elliptischen Bahn sei $\bar{\omega}_0\left(t_\Omega\right) \neq 0°.0$ vorgegeben. Da im Fall des Knotenüberflugs das Argument der Breite den Wert $u_\Omega = 0°.0$ annimmt, wird aus der Definitionsgleichung $u = \upsilon + \omega$ die wahre Anomalie bei Knotendurchgang erhalten:

$$\upsilon_\Omega = \upsilon\left(t_\Omega\right) = -\omega\left(t_\Omega\right) \quad . \tag{28.181}$$

Die zugehörige exzentrische Anomalie $E_\Omega = E\left(t_\Omega\right)$ kann etwa mit Hilfe der *Kepler*-Formeln[3] (10.24) erhalten werden:

$$\begin{aligned} r_\Omega = r\left(t_\Omega\right) &= \frac{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}{1+\bar{e}_0\cos\upsilon_\Omega} \\ \bar{a}_0\cos E_\Omega &= r_\Omega\cos\upsilon + \bar{a}_0\,\bar{e}_0 \\ \bar{a}_0\sin E_\Omega &= \frac{r_\Omega\sin\upsilon_\Omega}{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \quad . \end{aligned} \tag{28.182}$$

Die gesuchte mittlere Anomalie bei Knotenüberflug, sie ist hier gleich der Epocheanomalie, folgt mit Hilfe der *Kepler*-Gleichung aus

$$\overline{M_0}\left(t_\Omega\right) = E_\Omega - \bar{e}_0\sin E_\Omega \quad . \tag{28.183}$$

Als Zusatzaufgabe soll untersucht werden, wann der Satellit das erste Perigäum nach dem gegebenen Knotendurchgang durchfliegt. Gesucht ist die Perigäumsdurchgangszeit t_P. Da im

---

[1] etwa mit Formel (8.130) in Abschnitt 8.4.2 (Band II)

[2] etwa mit Formel (8.196) in Abschnitt 8.6.1 (Band II), wenn die Rektaszension α durch Ω ersetzt wird

[3] in Abschnitt 10.1.3 (Band III)

Perigäum die mittlere Anomalie den Wert $M(t_P) = 0°.0$ hat, kann t_P in Folge der Beziehung (22.16) mit der Gleichung[1]

$$0°.0 = \overline{M_0}(t_\Omega) + \left[(M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_K}[t_\Omega] + \dot{n}_{Ks}[t_\Omega](t_P - t_\Omega) \right](t_P - t_\Omega) + \\ + \delta M_0[t_P, t_\Omega] + \delta n_K[t_P, t_\Omega](t_P - t_\Omega) \tag{28.184}$$

berechnet werden. Bei Verwendung eines beliebigen Bahnmodells, das alle Einflüsse („Störungen“) auf $(M_0)^{\cdot}_s$, δM_0 und δn_K enthält, kann diese Gleichung nur iterativ gelöst werden. Eine Anfangslösung für die Iteration kann aus diesem Ansatz bei Vernachlässigung der Variationen infolge des Luftwiderstandes in $\dot{n}_{Ks}$ und der periodischen Variationen δM_0 und δn_K gefunden werden:

$$t_P^{(0)} := t_\Omega - \frac{\overline{M_0}(t_\Omega)}{\overline{n_a}} \quad . \tag{28.185}$$

Hier ist $\overline{n_a} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s$ die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[2].

Wenn an Stelle der mittleren Anomalie $\overline{M_0}(t_\Omega)$ die Perigäumsdurchgangszeit t_P vorgegeben ist, kann die mittlere Epocheanomalie bei Knotenüberflug näherungsweise aus (28.185) oder bei Kenntnis der benötigten Variationen exakt aus (28.184) berechnet werden. Eine verbesserte Lösung kann erhalten werden mit der überlagerten Funktion

$$fct\left[t_\Omega^{(\nu)}\right] \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_\Omega^{(\nu)}\right) + \omega\left(t_\Omega^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{28.186}$$

Zusammengefasst lautet das Ergebnis:

- *Knotenlänge λ_Ω und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω sind bei gegebener Knotendurchgangszeit t_Ω äquivalente Größen. Aus t_Ω können neben der mittleren Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$ auch die mittlere Epocheanomalie $\overline{M_0}(t_\Omega)$ bestimmt werden, sofern die übrigen Bahnelemente $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ bekannt sind.* ◄

Ein Korollar zur vorstehenden Aufgabenstellung: Der Satellit befinde sich zum Zeitpunkt t_Ω im aufsteigenden Knoten zur Sonnenzeit T_Ω. Die Bahnparameter $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ seien vorgegeben. Wo befindet sich der Satellit im festen bzw. im beweglichen Äquatorsystem, d.h. wie lauten λ_Ω sowie Ω, welches ist die Anfangsstellung des Satelliten?

Mit der Berechnung von λ_Ω aus (28.180) ist die Aufgabenstellung sofort auf die vorstehende Aufgabe zurückgeführt, wonach auch $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$ berechenbar sind. Das Ergebnis lautet:

---

[1] in Abschnitt 22.2.2 auf Seite 31

[2] siehe in Abschnitt 22.2.2, insbesondere Formel (22.35)

➢ *Aus Knotendurchgangszeit t_Ω und mittlerer Ortssonnenzeit T_Ω können die (mittleren) Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$ (bzw. t_P) umkehrbar eindeutig berechnet werden, vorausgesetzt die übrigen vier Bahnparameter $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, \left[\bar{\omega}_0\right]\right)$ sind bekannt.* ◄

28.6.3.2 Startpunkt in beliebigen geographischen Koordinaten

Ein Satellit möge sich zum Zeitpunkt *t* über dem Subsatellitenpunkt mit den geographischen Koordinaten (östliche) geographische Länge λ und geodätische Breite φ befinden. Außerdem sei vorgegeben, ob dieser Punkt in Nord-Süd oder Süd-Nord-Richtung überflogen werden soll. Die Bahnparameter $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, \left[\bar{\omega}_0\right]\right)$ seien bekannt. Wie ist die Bahnebene im Raum orientiert (Bestimmung von Ω), welches ist die Epochestellung (Bestimmung von M_0 oder ω bzw. t_P)?

Der gegebene Zeitpunkt werde als Epochezeitpunkt angenommen: $t_0 = t$. Zur Lösung werde zunächst die Deklination δ (die in diesem Fall bei Bezug auf die Erdoberfläche gleich der geozentrischen Breite φ' ist) mit Formel (8.193) berechnet[1]

$$\tan\delta = \left(1 - f\right)^2 \tan\varphi \quad . \tag{28.187}$$

Hier muss die Bedingung

$$\left|\delta\right| \le \bar{i}_0 \tag{28.188}$$

erfüllt sein, da sonst die Aufgabe nicht lösbar ist.

Im Fall $\delta = 0°$, liegt der Startpunkt im Knoten der Bahn, was im vorherigen Abschnitt untersucht wurde.

Zum gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ ist die Sternzeit Θ_G für den Greenwich-Meridian berechenbar und somit auch die Rektaszension

$$\alpha\left(t_0\right) = \Theta_G\left(t_0\right) + \lambda \quad . \tag{28.189}$$

Im Fall einer Äquatorbahn $\left(\sin\bar{i}_0 = 0.0\right)$, kann ohne Einschränkung $\Omega\left(t\right) = \alpha\left(t\right)$ gesetzt werden und in gleicher Weise für das Argument der Breite $u = 0°$.

Wenn dagegen $\bar{i}_0 \neq 0°$, entspricht die vorgegebene Überflugrichtung der Größe[2]

$$\sigma_u := \mathrm{sgn}(\cos u) = \mathrm{sgn}\left[\cos\left(\alpha - \Omega\right)\right] \quad . \tag{28.190}$$

Damit können das Argument der Breite und die knotenbezogene Rektaszension eindeutig berechnet werden aus[3]

---

[1] in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

[2] wie etwa aus Bild 28-1 auf Seite 409 sofort ablesbar ist

[3] siehe etwa die Beziehungen (24.18) in Abschnitt 24.2.1 auf Seite 294 1

$$\begin{aligned}
&\sin u(t) = \frac{\sin\delta}{\sin \bar{i}_0} \\
&\cos u(t) = \mathrm{sgn}(\cos u)\sqrt{1-\sin^2 u(t)} \\
&\cos\left[\alpha(t)-\Omega(t)\right]\cos\delta = \cos u(t) \\
&\sin\left[\alpha(t)-\Omega(t)\right]\cos\delta = \sin u(t)\cos\bar{i}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{28.191}$$

Die gesuchte Rektaszension des aufsteigenden Knotens ist $\bar{\Omega}_0 := \Omega(t)$.

Im Fall einer Kreisbahn $\bar{e}_0 = 0.0$ kann der gegebene Überflugpunkt (λ, φ) als (Pseudo-) Perigäum aufgefasst werden. Da der gegebene Zeitpunkt *t* als Epoche verstanden werden kann $t_0 = t$, ist die mittlere Anomalie zur Epoche durch $\overline{M_0} = \bar{M}(t_0) = 0°$ bestimmt. Da in diesem Fall auch die wahre Anomalie $\upsilon = 0°$ ist, ist das Argument der Breite bekannt aus $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}(t_0) = u - \upsilon = u$.

Im elliptischen Fall muss dagegen $\bar{\omega}_0$ vorgegeben sein. Die wahre Anomalie kann aus $\upsilon = u - \bar{\omega}_0$ berechnet werden, die exzentrische Anomalie *E* entsprechend (28.182) aus

$$\begin{aligned}
r(t_0) &= \frac{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}{1+\bar{e}_0\cos\upsilon(t_0)} \\
\bar{a}_0\cos E(t_0) &= r(t_0)\cos\upsilon(t_0) + \bar{a}_0\,\bar{e}_0 \\
\bar{a}_0\sin E(t_0) &= \frac{r(t_0)\sin\upsilon(t_0)}{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.192}$$

Die gesuchte mittlere Anomalie zur Epoche $t_0 = t$ folgt aus der *Kepler*-Gleichung

$$\overline{M_0}(t_0) = \overline{M_{0\,0}} = E(t_0) - \bar{e}_0\sin E(t_0) \quad . \tag{28.193}$$

Die Satellitenbahn ist aus den gegebenen Bahnparametern eindeutig bestimmt. Weitere im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse interessierende Aussagen lassen sich in diesem Fall elementar folgern:

Die Perigäumsdurchgangszeit t_P kann wegen $M(t_P) = 0°$ analog Beziehung (28.184) durch iterative Auflösung der Gleichung

$$\begin{aligned}
0°.0 = \overline{M_0}(t_0) + \Big[\left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \overline{n_K}[t\,] + \dot{n}_{Ks}[t_0]\left(t_P - t_0\right)\Big]\left(t_P - t_0\right) + \\
+ \delta M_0[t_P, t_0] + \delta n_K[t_P, t_0]\left(t_P - t_0\right)
\end{aligned} \tag{28.194}$$

mit der Anfangslösung

$$t_P^{(0)} := t_0 - \frac{\overline{M_0}(t_0)}{\overline{\overline{n_a}}} \tag{28.195}$$

berechnet werden. Die iterative Bearbeitung wird durchgeführt mit der überlagerten Funktion

$$fct(t_P) \equiv \sin\left[M\left(t_P^{(\nu)}\right)\right] = 0 \quad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{28.196}$$

Die Knotendurchgangszeit t_Ω wird benötigt als der Zeitpunkt, wann der „Einschuss“ des Satelliten in seine Bahn erfolgen muss, um den vorgegebenen Ort (λ,φ) zum gegebenen Zeitpunkt $(t=t_0)$ überfliegen zu können. Da bei Knotendurchgang das Argument der Breite verschwindet, erhält man als erste Bedingung zur Berechnung von t_Ω

$$\upsilon(t_\Omega) = -\omega(t_\Omega) \quad . \tag{28.197}$$

Das Argument des Perigäums bei Knotendurchgang kann bei bekanntem Bahnmodell zur noch unbekannten Knotendurchgangszeit berechnet werden aus

$$\omega(t_\Omega) = \bar{\omega}(t_0) + \dot{\omega}_s\,(t_\Omega - t_0) + \delta\omega[t_\Omega, t_0] \quad . \tag{28.198}$$

In analoger Weise wird die mittlere Anomalie bei Knotendurchgang erhalten aus

$$M(t_\Omega) = \overline{M_0}(t_0) + \overline{n_a}\,(t_\Omega - t_0) + \delta M \quad . \tag{28.199}$$

Bei Verwendung eines analytischen Bahnmodells für Erdsatelliten sind $\dot{\omega}_s$ und $(M_0)^{\cdot}_s$ aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) bekannt, entsprechend auch die periodischen Variationen im Rahmen von Abschnitt 20.2. Die *Kepler*sche mittlere Bewegung (in der anomalistischen mittleren Bewegung nach (28.185)) ist mit den Eingabedaten bekannt: $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$. Unter der Annahme, dass die Knotendurchgangszeit bekannt sei, kann die exzentrische Anomalie $E(t_\Omega)$ analog den Formeln (28.192) berechnet werden:

$$\begin{aligned} r(t_\Omega) &= \frac{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}{1+\bar{e}_0\cos\upsilon(t_\Omega)} \\ \bar{a}_0\cos E(t_\Omega) &= r(t_\Omega)\,\cos\upsilon(t_\Omega) + \bar{a}_0\,\bar{e}_0 \\ \bar{a}_0\sin E(t_\Omega) &= \frac{r(t_\Omega)\sin\upsilon(t_\Omega)}{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \quad . \end{aligned} \tag{28.200}$$

Dann lautet die *Kepler*gleichung entsprechend

$$M(t_\Omega) = E(t_\Omega) - \bar{e}_0\sin\left[(t_\Omega)\right] \quad . \tag{28.201}$$

Dann kann t_Ω mit Hilfe der Beziehung (28.199) direkt berechnet werden aus

$$t_\Omega = t_0 + \frac{E(t_\Omega) - \bar{e}_0\sin\left[E(t_\Omega)\right] - \overline{M_0}(t_0) - \delta M\left[t_\Omega, t_0\right]}{\overline{n_a}} \quad . \tag{28.202}$$

Die Bearbeitung des iterativen Prozesses kann durchgeführt werden mit der überlagerten Funktion

$$fct(t_\Omega) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_\Omega^{(\nu)}\right) + \omega\left(t_\Omega^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \quad . \tag{28.203}$$

Eine Anfangslösung kann gefunden werden, wenn die Variationen im Argument des Perigäums vernachlässigt werden:

$$\upsilon\left(t_\Omega^{(0)}\right) := \omega(t_0) \quad . \tag{28.204}$$

Je nach verwendetem Bahnmodell ist die Knotendurchgangszeit t_Ω auf den mittleren Knoten oder den wahren Knoten bezogen. Die Genauigkeit kann verbessert werden, wenn zur Lösung der Funktion (28.203) ein numerisches Ephemeridenprogramm eingesetzt wird.

Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens im Moment des Knotenüberflugs errechnet sich aus

$$\Omega(t_\Omega) = \bar{\Omega}(t_0) + \dot{\Omega}_s (t_\Omega - t_0) + \delta\Omega[t_\Omega, t_0] \quad , \tag{28.205}$$

die entsprechende geographische Länge wegen der Beziehung (28.189) aus

$$\lambda_\Omega = \lambda(t_\Omega) = \Omega(t_\Omega) - \Theta_G(t_\Omega) \quad . \tag{28.206}$$

Das Verfahren lässt sich in analoger Weise auch für den absteigenden Knoten und prinzipiell für jedes gewünschte Argument der Breite einsetzen.

Als Ergebnis kann zusammengefasst werden:

- *Überfliegt ein Satellit zu gegebenem Zeitpunkt t_0 den Subsatellitenpunkt (λ, φ) in gewünschter Überflugrichtung, so sind die mittleren Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit t_P in umkehrbar eindeutiger Weise bestimmt, sofern die anderen mittleren Keplerelemente $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ vorgegeben sind.*◄

Vorgabe				Ergebnis	
Inklination	Überflugrichtung	λ	φ	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0$
70°	S-N	10°	50°	329°.093	54°.384
70°	S-N	10°	-50°	20°.138	305°.616
70°	N-S	10°	-50°	149°.093	234°.384
70°	N-S	10°	50°	200°.138	125°.616
96°.9	S-N	10°	50°	2°.896	50°.313
96°.9	S-N	10°	-50°	346°.335	309°.687
96°.9	N-S	10°	-50°	182°.896	230°.313
96°.9	N-S	10°	50°	166°.335	129°.687

Tabelle 28-10: Beispiel zur Berechnung der Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\bar{\omega}_0$ aus vorgegebenem Überflug über einer geographischen Position mit vorgegebener Überflugrichtung ◄

Als Korollar werde der für die Auslegung von Erdbeobachtungssatelliten besonders interessanten Fall untersucht, bei dem der geographische Ort (λ, φ) zur mittleren lokalen Sonnenzeit *T* überflogen werden soll. Die ist nötig um bestimmte Gebiete bei gewünschten Sonneneinstrahlungen beobachten zu können.

Die mittleren Keplerelemente $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ seien vorgegeben. Wie im vorhergehenden Fall sollen die mittleren Keplerelemente $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit und eventuell das mittlere Argument des Perigäums bestimmt werden.

Mit der Sonnenzeit T und der geographischen Länge λ ist wegen Beziehung (28.178) sofort die Weltzeit

$$t = t_0 = T - \lambda \tag{28.207}$$

berechenbar. Damit ist die Aufgabenstellung auf die zuvor behandelte Herleitung zurückgeführt.

- *Überfliegt ein Satellit zur Ortssonnenzeit T den Subsatellitenpunkt (λ, φ) in gewünschter Überflugrichtung, so sind die mittleren Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit t_P in umkehrbar eindeutiger Weise bestimmt, sofern die anderen mittleren Keplerelemente $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ vorgegeben sind.*◀

BEISPIEL: Es sei die kreisförmige Bahn mit der mittleren großen Halbachse $\bar{a}_0 = 7000\,\text{km}$ vorgegeben. In Tabelle 28-10 werden für verschiedene Inklinationen und geographische Positionen sowie verschiedene Überflugrichtungen die mittleren Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\bar{\omega}_0$ berechnet. Da die mittlere Bahn als kreisförmig angenommen wurde, hat die mittlere Epocheanomalie in allen Fällen den Wert $\overline{M_{00}} = 0°.0$. Als Epochezeit wurde das Datum 1978-09-09/00:00:0.0 gewählt.

28.6.3.3 Startpunkt aus Sonnenwinkel und Breitenkreis

Ein Satellit mit den vorgegebenen Bahnparametern $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ habe an einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ den mittleren auf den Erdäquator bezogenen Sonnenwinkel $\bar{\tau}$ und befinde sich über einem Ort der geodätischen Breite φ. Außerdem sei bekannt, ob sich der Satellit im auf- oder absteigenden Bahnast seiner Bahn befinde $\left[\sigma_u = \text{sgn}(\cos u) = \text{sgn}\left(\cos(\alpha - \Omega)\right)\right]$. Wo liegt zu diesem Zeitpunkt der aufsteigende Knoten, wie groß ist die mittlere Epocheanomalie, bzw. wie groß ist bei kreisförmigen Bahnen das mittlere Argument der Breite, das dann als Argument des Perigäums gewählt werden kann?

Zum Zeitpunkt *t* ist die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ bekannt[1]. Somit errechnet sich die momentane Rektaszension des Satellit mit Formel (28.120) aus

$$\alpha(t_0) = \bar{\tau} + \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.208}$$

Die geodätische Breite ist mit Formel (28.187) der Deklination δ zugeordnet. Somit kann mit den Formeln (28.191) die knotenbezogene Rektaszension $\alpha_K = \alpha(t_0) - \bar{\Omega}(t_0)$ berechnet. Mit (28.208) ist unmittelbar die mittlere Rektaszension des aufsteigenden Knotens zur Epoche t_0

[1] Abschnitt 28.2.1 auf Seite 404

bekannt: $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(t_0) = \alpha_K - \alpha(t_0)$. Die weitere Berechnung von $\overline{M_{00}}$, bzw. t_P und eventuell $\bar{\omega}_0$ erfolgt wie in Abschnitt 28.6.3.2.

BEISPIEL: Eine kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 6753.424\,\text{km}$ und mittlerer Inklination $\bar{i}_0 = 96°.93663$ sei definiert beim Süd-Nord-Überflug des Breitenkreises $\varphi = -50°$ durch den mittleren Äquator-bezogenen Sonnenwinkel $\bar{\tau} = 33°$. Dieser Vorgang finde zum Zeitpunkt t=1978-09-20/17:01:30.3 statt. Die zu bestimmenden mittleren *Kepler*elemente ergeben sich zu: $\bar{\Omega}_0 = 96°.9951$, $\bar{\omega}_0 = 309°.686879$, $\overline{M_{00}} = 0°.0$. ◄

In Ergänzung zu dieser Aufgabe wird der Bezug auf die wahre Sonne mit Hilfe des wahren Sonnenwinkels $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ untersucht. Der Bezug zur wahren Sonne ist wegen der jährlichen Variation des Sonnenverlaufs im Rahmen von Erdbeobachtungen vielfach von besonderer Wichtigkeit. Die wahre Sonnenzeit ist nach Beziehung (28.103) gegeben durch den Ausdruck

$$T_w = \vartheta_w + 12^h = \Theta - \alpha_\odot + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_\odot + 12^h \tag{28.209}$$

gegeben, die mittlere Sonnenzeit mit Beziehung (28.104) durch

$$T_m = \vartheta_m + 12^h = \Theta - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.210}$$

Die wahre Sonnenzeit kann aus der mittleren Sonnenzeit ohne Rücksicht auf den überflogenen Meridian mit Hilfe der Differenz aus wahrem zu mittlerem Sonnenwinkel berechnet werden, was nichts anderes ist als die Berücksichtigung der Zeitgleichung (28.105)

$$T_w = T_m - \alpha_\odot + \alpha_{\bar{\odot}} = T_m + \tau - \bar{\tau} = T_m + Z \quad . \tag{28.211}$$

28.7 Die Sonnensynodische Bewegung der Satellitenbahnebene

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse interessiert zunächst nicht die Bewegung des Satelliten in der Bahn, sondern das Verhalten der Bahn selber. Die Orientierung der Bahn im Raum wird durch die Inklination der Bahnebene in Bezug auf die Ebene des Erdäquators und den Schnittpunkt der Bahnebene bestimmt, also den auf- bzw. auch den absteigenden Knoten. Da die Bahninklination sehr stabil ist, wird die Bewegung der Bahnebene im Wesentlichen durch die Bewegung des Bahnknotens beeinflusst.

28.7.1 Der Knotensonnenwinkel, die Knotensonnendrift

Basierend auf der allgemeinen Definition des Sonnenwinkels (28.120) kann der Knotensonnenwinkel bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn eingeführt werden:

$$\tau_\Omega := \Omega - \alpha_\odot \quad . \tag{28.212}$$

Der wechselseitige Verlauf der Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω und der Rektaszension der Sonne $\alpha_\odot$ ist exemplarisch in Bild 28-20 (auf Seite 451) über den Verlauf eines tropischen Jahres dargestellt. Der Knotensonnenwinkel (28.212) durchläuft im Laufe der Zeit alle Werte

$$0° \le \tau_\Omega < 360° \quad . \tag{28.213}$$

Im Bild ist das wiederholte Eintreten eines bestimmten festen Knotensonnenwinkels τ_Ω^+ veranschaulicht. Im Abstand des fest vorgegebenen Sonnenwinkels ist eine zur $\alpha_\odot$ – Kurve parallele Kurve eingezeichnet. Deren Schnittpunkte mit der Ω-Kurve ergeben jeweils die Zeiten gleichartiger Stellungen zwischen Knoten und Sonne unter dem gegebenen festen Sonnenwinkel τ_Ω^+.

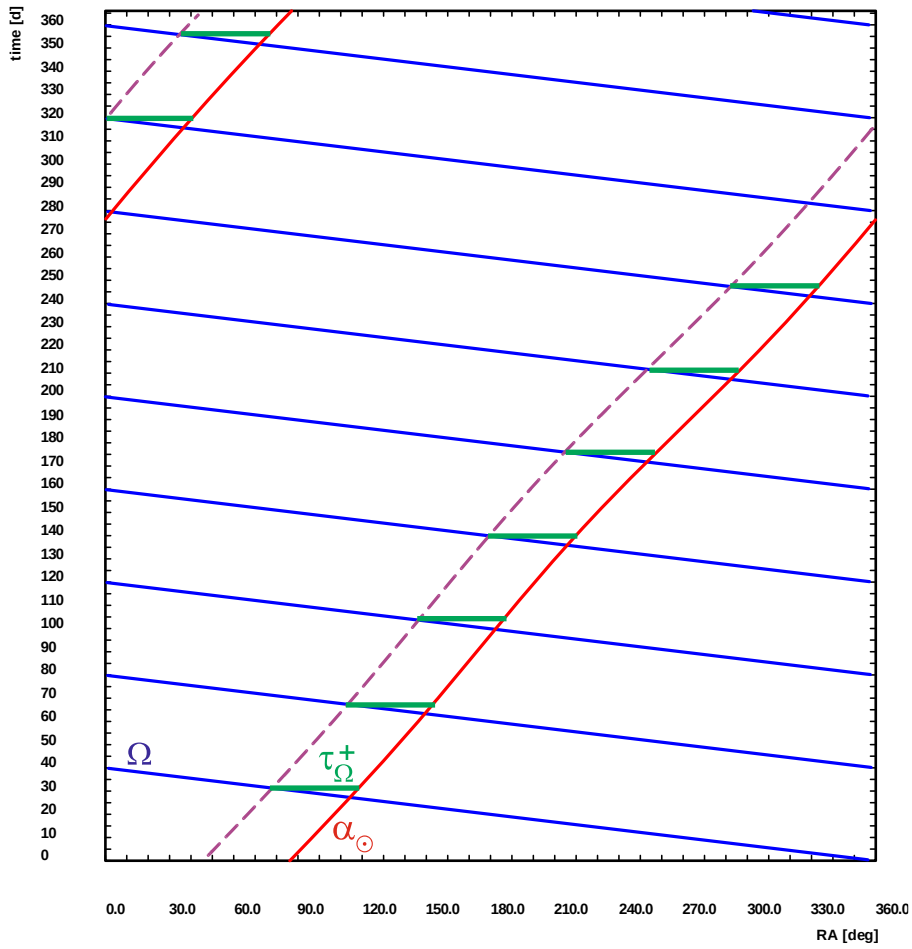


Bild 28-20: Das relative Verhalten der Rektaszension Ω des aufsteigenden Bahnknotens (blaue Kurve) und der Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne (rote Kurve) im Verlauf eines Jahres (im Bild wurde die Bahnparameter verwendet: a = 7128.137 km, e=0.0, i=40°). Die Einstellung eines bestimmten Knotensonnenwinkel τ_Ω^+ ist angedeutet.

Im Rahmen einer Bewegungsanalyse kann die säkulare Knotensonnendrift bei Bezug auf die Rektaszension der wahren Sonne durch

$$\dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot \tag{28.214}$$

verwendet werden. Hier ist $\dot{\Omega}_s$ die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens. Die Variation der Rektaszension der Sonne $\dot{\alpha}_\odot$ ist etwa näherungsweise aus der Entwicklung (28.98) bekannt. Wenn der Zustandsvektor der Sonne gegeben ist, kann die Variation etwa mit den Formeln (8.9) (in Abschnitt 8.1.2, Band II) erhalten werden aus

$$\dot{\alpha}_\odot = \frac{x_{\odot 1}\,\dot{x}_{\odot 2} - x_{\odot 2}\,\dot{x}_{\odot 1}}{r_\odot^2 \cos^2 \delta_\odot} \quad , \quad r_\odot = \sqrt{x_\odot{}^i\, x_{\odot i}} \quad , \quad r_\odot \cos\delta_\odot = \sqrt{r_\odot^2 - x_{\odot 3}{}^2} \quad . \tag{28.215}$$

Der mittlere Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens einer Satellitenbahn bezogen längs des Äquators auf die fiktive mittlere Sonne lautet

$$\overline{\tau_\Omega} := \Omega - \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.216}$$

Seine Entwicklung um den Knoten zur Knotenüberflugzeit t_Ω enthält nur säkulare Anteile. Sei $\overline{\tau_{\Omega 0}}$ der mittlere Knotensonnenwinkel im Moment des Knotenüberflugs, gilt zum Zeitpunkt *t*

$$\overline{\tau_\Omega}(t) = \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s}(t - t_\Omega) = \overline{\tau_\Omega}(t_\Omega) + \dot{\tau}_{\Omega s}(t - t_\Omega) \quad . \tag{28.217}$$

Die mittlere *Knotensonnendrift*

$$\dot{\tau}_{\Omega s} := \dot{\Omega}_s - n_\odot \tag{28.218}$$

ist im Zusammenhang mit der Bahnauslegung von Erdbeoachtungssatelliten von zentraler Bedeutung. Sie muss präzise als *Drift der mittleren Satellitenbahnebene bezogen auf die mittlere fiktive Sonne* bezeichnet werden.

Beschränkt man sich auf die säkularen Einflüsse durch den geodynamischen Hauptterm J_2, kann die Knotensonnendrift bei bekannter mittlerer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ (mit Formel (20.15), Band III) dargestellt werden[1]

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1 - \bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 - n_\odot + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{28.219}$$

Wegen der numerischen Dominanz von J_2 ist dieser Ausdruck von zentraler Bedeutung in der Bahnmechanik von Erdbeobachtungsatelliten.

Der mittlere Sonnenwinkel $\bar{\tau} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}}$ eines Erdsatelliten hat zum Zeitpunkt *t* in Bezug auf den Knotenüberflug zum Zeitpunkt t_Ω mit der Knoten-bezogenen Rektaszension $\alpha_K = \alpha - \Omega$ und wegen der Darstellung (28.217) die Entwicklung

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(t) = \alpha(t) - \Omega(t) + \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s}(t - t_\Omega) + \cdots \quad . \tag{28.220}$$

Die mittlere lokale Sonnenzeit im Moment des Knotenüberfluges ist

$$T_\Omega = \overline{\tau_{\Omega 0}} + 12^h \quad , \tag{28.221}$$

wenn der Knotensonnenwinkel $\overline{\tau_\Omega}$ im Stundenmaß gegeben ist. Die mittlere lokale Sonnenzeit $T_m = \bar{\tau} + 12^h$ im Satellitenfußpunkt kann somit berechnet werden aus der Beziehung

$$T_m(t) = T_\Omega + \alpha(t) - \Omega(t) + \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)(t - t_\Omega) \quad . \tag{28.222}$$

Diese Zeit wird im Stundenmaß erhalten, wenn (α, Ω) im Gradmaß und $\left(\dot{\Omega}_s, n_\odot\right)$ in Grad pro Sekunde gegeben sind. Diese Beziehung verallgemeinernd kann die mittlere Ortssonnenzeit zur Zeit t_2 ohne direkten Bezug auf den Knotenüberflug auf die Sonnenzeit zur Zeit t_1 bezogen werden

---

[1] Die hier benötigte tropische mittlere Bewegung $n_\odot$ der Sonne findet sich in Tabelle 9-1 (Abschnitt 9.1.1.1, Band II)

$$T_m(t_2) = T_m(t_1) + \alpha(t_2) - \alpha(t_1) - \Omega(t_2) + \Omega(t_1) + \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)(t_2 - t_1) \quad . \qquad (28.223)$$

Es folgen die Aussagen:

- *Die mittlere Ortszeit des zum Zeitpunkt* $t = T_m - \lambda$ *überflogenen Subsatellitenpunktes* (λ, φ) *ist bei gegebener Bahn und Kenntnis der Knotenüberflugzeiten* t_Ω, T_Ω *unmittelbar berechenbar.*◀

- *Auf einer rechtläufigen Bahn bewegt sich ein Satellit stets in Richtung zunehmender Ortszeit, auf einer retrograden Bahn stets in Richtung abnehmender Ortszeit*[1]. ◀

Anmerkung: $\alpha(t)$ ist die **wahre** Rektaszension des Satelliten. Sie enthält somit alle Bewegungseinflüsse. Diese können jedoch in der Praxis nicht alle vorausberechnet, sondern grundsätzlich erst a posteriori vollständig erhalten werden. Die Sonnendrift ist jedoch ein Begriff der Satellitenbahnanalyse, die somit im Voraus im Rahmen einer Bahnauslegung gegeben sein muss. Da sie in der Regel eine Bahnkonstante sei soll, kann sie daher nur aus der mittleren Bewegung mit Kenntnis der säkularen Bewegungseinflüsse definiert sein. Derartige Überlegungen müssen stets bei einer Bahnauslegung beachtet werden. ◀

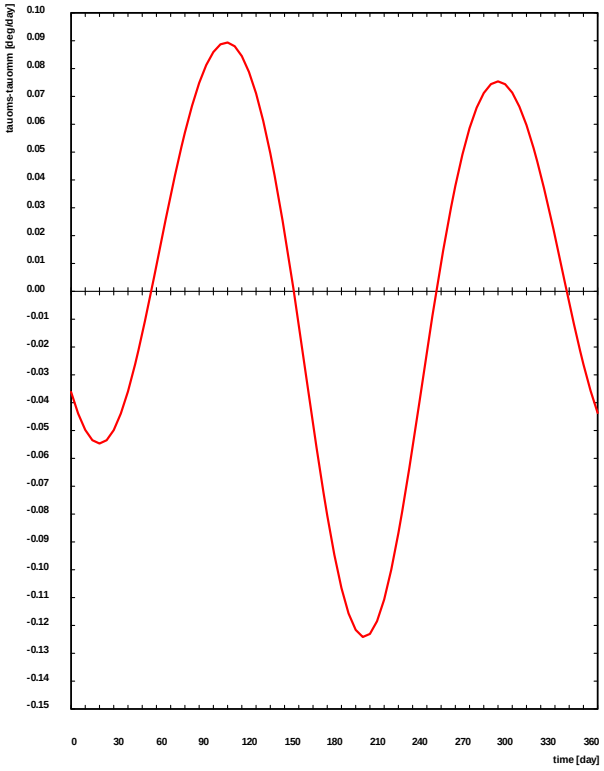


Bild 28-21: Die Variation der säkularen Drift des Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_\Omega$ in Relation zur wahren Sonne in Bezug auf den mittleren säkularen Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_{\Omega s}$ relativ zur fiktiven mittleren Sonne $\overline{\odot}$ im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Darstellung ist wegen Beziehung (28.224) von den Parametern einer Satellitenbahn unabhängig[2].

[1] vgl. auch Bild 28-17 und Tabelle 28-9, siehe auch in Abschnitt 28.6.2

[2] Für die Zeichnung wurde als Satellitenbahn die kreisförmige Äquatorbahn in mittlerer Bahnhöhe H=200 km verwendet.

Für manche Untersuchungen mag von Interesse sein, wie die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_\Omega$ bezogen auf die wahre Sonne von der mittleren säkularen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ bezogen auf die fiktive mittlere Sonne abweicht. Aus den entsprechenden Formeln (28.214) und (28.218) folgt unmittelbar die Beziehung

$$\dot{\tau}_\Omega - \dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\alpha}_\odot - n_\odot \quad . \tag{28.224}$$

Da in beiden Ausdrücken die säkulare Drift des Bahnknotens verwendet wird, ist die Differenz der beiden Knotensonnendriften von der Bahn des Satelliten unabhängig. In diesem Fall ist die Kurve in Bild 28-21, die den Kurvenverlauf über ein Jahr zeigt, von der Bahn unabhängig.

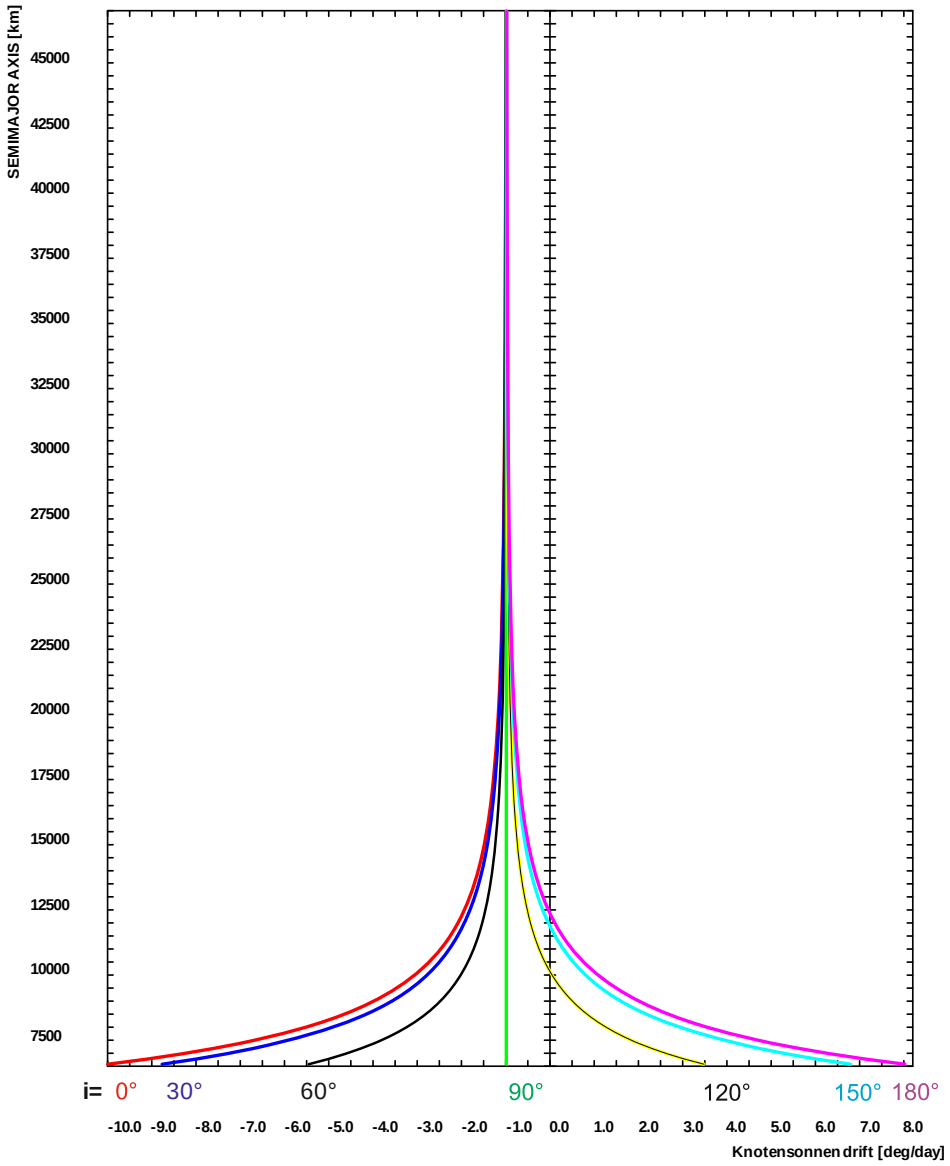


Bild 28-22: Die mittlere Knotensonnendrift für kreisförmige Erdsatellitenbahnen für verschiedene Inklinationen

Aus Beziehung (23.224) (auf Seite 172) ist die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}$ bekannt. $\dot{\Theta}$ ist die mittlere Variation der Sternzeit, welche der mittleren tropischen Erdrotation identisch gleich ist[1]. Es folgt der interessante Zusammenhang

$$\dot{\tau}_{\Omega s} - \dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Theta} - n_{\odot} \quad . \tag{28.225}$$

Die mittleren Knotenlängendrift und Knotensonnendrift unterscheiden sich somit genau um die tägliche Rotation der Sonne bezogen auf die mittlere Sonne

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = \frac{360°}{86400s} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{28.226}$$

Als Dimension wird hier [Grad/sec] verwendet.

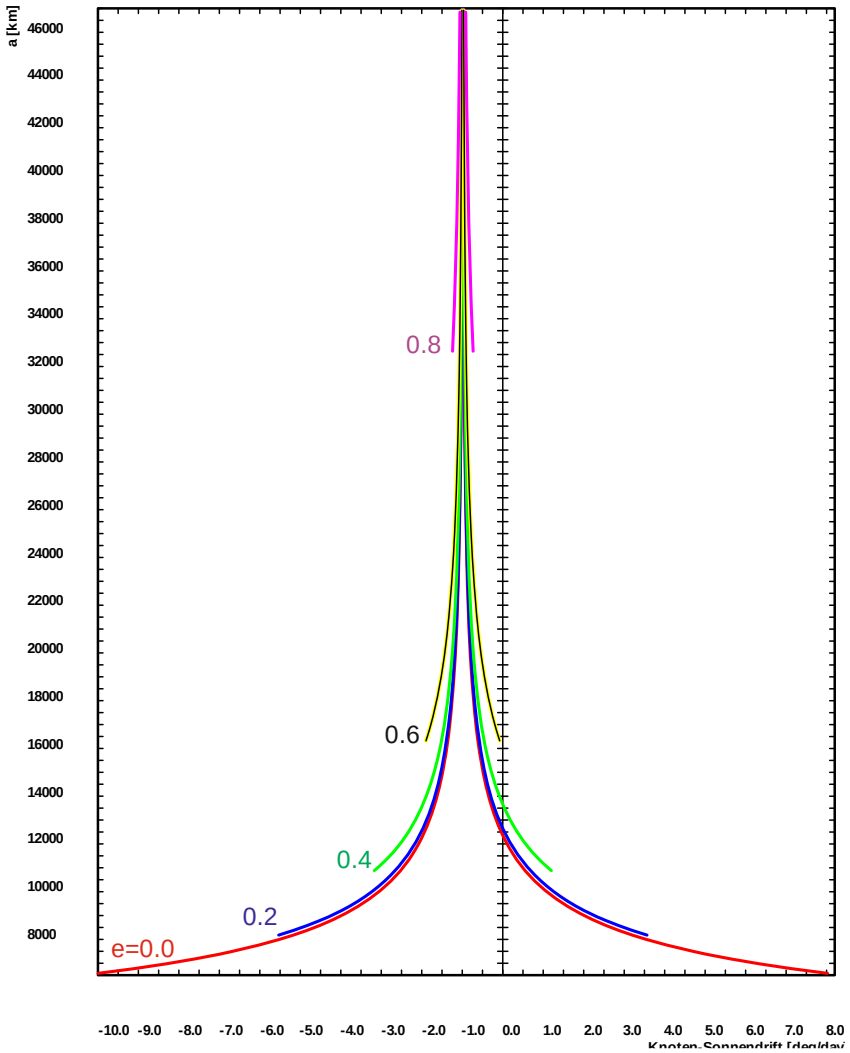


Bild 28-23: Die mittlere Knotensonnendrift für Erdsatellitenbahnen mit verschiedenen Exzentrizitäten sowie die Grenzinklinationen i=0° (linke Kurven), i=180° (rechte Kurven)

Ähnlich wie in Abschnitt 23.5.1 (auf Seite 171) im Fall einer Abschätzung der Grenzen für die Knotenlängendrift (Abschätzung (23.229) (auf Seite 176) kann auch für die Knotenson-

[1] Die Variation der Sternzeit ist in unterschiedlichen Maßeinheiten in Tabelle 9-2 zusammengestellt (Abschnitt 9.1.2.1, Band II)

nendrift eine Abschätzung hergeleitet werden. Die maximal möglichen Grenzen werden für eine kreisförmige Bahn in minimaler Bahnhöhe H=200 km erhalten:

$$-9°.995/d \le \dot{\tau}_{\Omega s} \le 8°.023/d \quad . \tag{28.227}$$

Eine graphische Übersicht über die Größe der mittleren Knotensonnendrift liefert Bild 28-22 für kreisförmige Satellitenbahnen. Untersucht wird die Drift für verschiedene Inklinationen über der Bahnhalbachse. Wie aus Formel (28.219) unmittelbar zu entnehmen ist, hat die Knotendrift $\dot{\Omega}_s$ keinen Einfluss auf Polarbahnen. Allerdings nimmt ihr Einfluss auch rapide für erdfernere Satellitenbahnen ab und ist für geosynchrone und höhere Bahnen kaum noch nachweisbar. Für erdferne Bahnen wird die Knotensonnendrift im Wesentlichen nur durch die tropische mittlere Bewegung der Sonne $\dot{\tau}_{\Omega s} \approx -n_{\odot} = -0°.9856474/\mathrm{d}$ bestimmt. Die beiden Grenzkurven in Bild 28-22 werden erhalten, wenn die Inklinationen $i = 0°$ und $i = 180°$ bei variabler Bahnhalbachse in der Beziehung (28.226) eingesetzt werden. Umgekehrt kann bei Vorgabe eines Zahlenwertes für die mittlere Knotensonnendrift bei bekannter Halbachse und Exzentrizität sofort aus dieser Beziehung geschlossen werden, ob diese Vorgabe auch sinnvoll gewählt wurde.

Um auch den Einfluss der Exzentrizität auf das Verhalten der Knotensonnendrift abschätzen zu können werden in Bild 28-23 nur Äquatorbahnen untersucht, da für diese die Grenzkurven maximale Werte annehmen. Die Bahnhalbachsen werden so ausgewählt, dass abhängig von der Exzentrizität die Perigäumshöhe 200 km nicht unterschritten werden kann. Aus diesem Grund beginnen und enden die Kurven mit zunehmender Exzentrizität für entsprechende höhere Bahnhalbachsen. Es zeigt sich, dass sich auch in diesem Fall der Einfluss der Variation des Bahnknotens mit zunehmender Höhe der Bahnhalbachse immer geringer auf die Knotensonnendrift auswirkt.

Basierend auf der Knotensonnendrift dauert es eine bestimmte Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen des aufsteigenden Knotens mit der mittleren fiktiven Sonne. Diese Zeitdauer wird als die *mittlere sonnensynodische Umlaufzeit eines Bahnknotens* bezeichnet. Sie wird berechnet (wenn die Knotensonnendrift in [Grad/Sek] gegeben ist) aus:

$$\overline{P_{\Omega\odot}} = \frac{360°}{\dot{\tau}_{\Omega s}} \quad . \tag{28.228}$$

Bild 28-24 zeigt den Verlauf der mittleren sonnensynodischen Umlaufzeit der Bahnebene über der großen Bahnhalbachse für kreisförmige Erdsatellitenbahnen parametrisiert für verschiedene Inklinationen. Die Umlaufzeit ist stets eine positive Größe. Im Bild sieht man jedoch negative Werte, die einer westlichen Drift des Bahnknotens gegenüber der mittleren fiktiven Sonne entsprechen. Ähnlich wie schon in Bild 28-22 nähert sich die Umlaufzeit mit wachsender Bahnhalbachse dem Wert für Polbahnen $(i = 90°)$ an.

Die mittlere knotensonnenbezogene Umlaufzeit für Polbahnen beträgt genau ein tropisches Jahr zu 365.2422 Tagen[1]. Wird jedoch die säkulare sonnensynodische Umlaufzeit des Bahnknotens verwendet

[1] Eine Anwendung der sonnenbezogenen Umlaufzeit einer Bahnebene im Rahmen einer Bahnauswahl siehe in Abschnitt 28.7.4.3 auf Seite 471

$$\overline{P_{\Omega\odot}} = \frac{360°}{\dot{\tau}_\Omega} \quad , \tag{28.229}$$

ist nach Bild 28-21 zu erwarten, dass sich erhebliche Abweichungen der entsprechenden Umlaufzeiten ergeben können. Siehe dazu folgendes

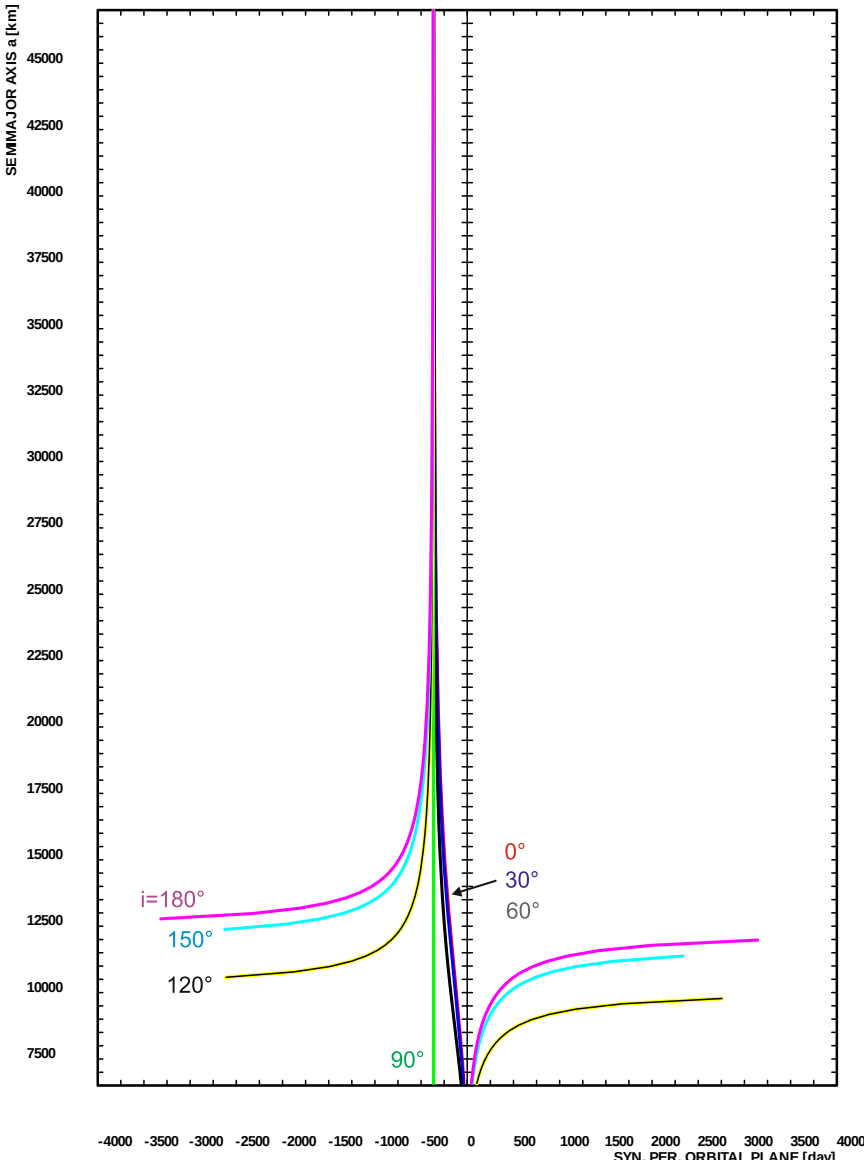


Bild 28-24: Dauer eines Sonnensynodischen Umlaufs $\overline{P_{\Omega\odot}}$ der Bahnebene eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn für verschiedene Inklinationen. Negative Werte beziehen sich auf westliche Bewegung der Bahnebene von der Sonne weg

BEISPIEL 1: Es werde die Bahn a=6578.155 km, e=0.0, i=90° betrachtet. Der Bezug des Knotens zur wahren Sonne werde auf die Epoche 1982-01-25/14:00:0.0 ausgerichtet. Mit Formel (28.229) ergibt sich die säkulare sonnenbezogene Umlaufzeit des Bahnknotens zu $\overline{P_{\Omega\odot}} = 344.6752\,\mathrm{d}$, also eine erhebliche Abweichung zu den obigen $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 365.2422\,\mathrm{d}$ Tagen. ◀

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Erdsatellitenbahn in der mittleren Bahnhöhe H=750 km und der mittleren Inklination $\overline{i}_0 = 40°$ hat die säkulare Knotenlängendrift nach Formel (23.224) $\dot{\lambda}_{\Omega s} = 4°.266418 \times 10^{-3} / s = 368°.618515 / \mathrm{d}$ entsprechend nach Formel (28.226) die Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = -9°.975130 \times 10^{-5} / s = -8°.618515 / \mathrm{d}$. Der Bahnknoten befindet sich entsprechend Formel (28.228) nach jeweils $\overline{P_{\Omega\odot}} = 41^{\mathrm{d}}\,18^{\mathrm{h}}\,29^{\mathrm{m}}\,35^{\mathrm{s}}.4$ wieder in Konjunktion mit der Sonne. Diese Bahn ist mit der Epoche 2018-06-17/12:30:0.0 in Bild 28-20 (auf Seite 451) dargestellt. ◄

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen der Zeit $\overline{P_{\Omega\odot}}$ der gleichartigen Stellungen zwischen Bahnknoten und Sonne (im Wesentlichen die Konjunktion zwischen Knoten und Sonne) mit der Bahnhalbachse über der Bahninklination wird im Rahmen der Bahnauswahl bei Vorgabe von $\overline{P_{\Omega\odot}}$ in Abschnitt 28.7.4.3 in Bild 28-31 (auf Seite 474) dargestellt. ◄

28.7.2 Die Knotensonnenverschiebung

28.7.2.1 Die mittlere Knotensonnenverschiebung

Nach einem Umlauf mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_d}$ hat sich die mittlere Ortszeit im Subsatellitenpunkt ausgehend von der Beziehung (28.222) für die mittlere Sonnenzeit um den Betrag

$$T_m\left(t+\overline{P_d}\right) - T_m(t) = \left[\alpha\left(t+\overline{P_d}\right) - \Omega\left(t+\overline{P_d}\right)\right] - \left[\alpha(t) - \Omega(t)\right] + \overline{\Delta\tau_\Omega} \tag{28.230}$$

verändert. Hier wurde die *mittlere Sonnenverschiebung des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf* eingeführt:

$$\overline{\Delta\tau_\Omega} := \dot{\tau}_{\Omega s}\,\overline{P_d} = \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)\overline{P_d} \quad . \tag{28.231}$$

Die mittlere knotenbezogene Sonnendrift wird hier als eine konstante Größe der Bahnanalyse betrachtet.

Bei Bezug auf die wahre Sonne lautet die säkulare Knotensonnenverschiebung

$$\Delta\tau_{\overline{\Omega}} := \dot{\tau}_\Omega\, P_d = \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot\right) P_d \quad . \tag{28.232}$$

Ein Unterschied zwischen den beiden Definitionen wirkt sich im erdnahen Bereich, der in diesem Fall die geosynchronen Bahnen einschließt, nicht aus.

Die knotenbezogene Rektaszension $\alpha_K = \alpha - \Omega$ verschwindet im Moment des Knotenüberfluges. In diesem Fall wird aus (28.230)

$$T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = T_m\left(t_\Omega\right) + \overline{\Delta\tau_\Omega} = T_m\left(t_\Omega\right) + \dot{\tau}_{\Omega s}\,\overline{P_d} \quad . \tag{28.233}$$

Der mittleren Knotensonnenverschiebung entspricht somit die Änderung der mittleren Sonnenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenüberflügen.

Die Knotensonnenverschiebung ist der anschaulichere Begriff im Gegensatz zur Knotensonnendrift. Allerdings wirkt sich der Einfluss der drakonitischen Umlaufzeit erheblich aus. Dies zeigen Bild 28-25 und Bild 28-26. Infolge der Zunahme der Umlaufzeit vergrößert sich die

Knotensonnenverschiebung, was sich in einem „Wegkippen“ des Kurvensystems ausprägt. Bild 28-25 zeigt die Verläufe für kreisförmige Bahnen parametrisiert nach der Bahninklination. Dies ist für den Fall von Erdbeobachtungssatelliten, die normalerweise auf kreisnahen Bahnen geflogen werden, von besonderem Interesse.

Um ähnlich wie in Bild 28-23 im Fall der Knotensonnendrift, auch im Fall der Knotensonnenverschiebung eine Abhängigkeit von der Exzentrizität darstellen zu können, werden die entsprechenden Kurven im Fall von Äquatorbahnen für einige Exzentrizitäten in Bild 28-26 berechnet.

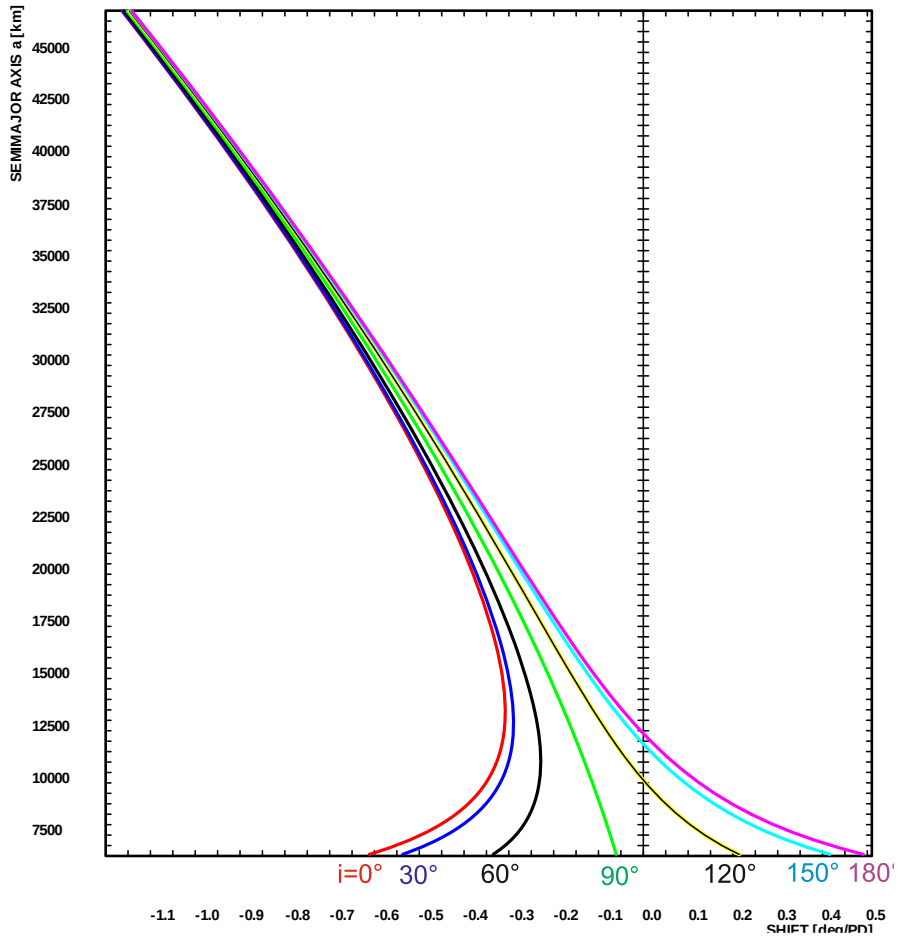


Bild 28-25: Die mittlere Sonnenverschiebung des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn für verschiedene Inklinationen über der großen Bahnhalbachse

Die beiden Bilder zeigen, dass auch für die Knotensonnenverschiebung extremale Werte für Äquatorbahnen zu erwarten sind. Während für i = 180° der maximale Wert für erdnahe Kreisbahnen bei einer Mindestbahnhöhe von H=200 km etwa $\overline{\Delta\tau_\Omega}\left[i=180°\right]=0°.5/P_d$ beträgt, ist der maximale Wert wegen des Wegkippens der Kurven für hohe Bahnen weit unter $-1°/P_d$. Für hohe Bahnen, mit Halbachsen im Bereich bis zu etwa 50000 km, kann die mittlere Knotensonnenverschiebung nach Bild 28-25 bis zu $-2°/P_d$ annehmen. Weit höhere Bahnen, die bis zu $-40°/P_d$ annehmen können, sind im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse uninteressant. Somit ist es sinnvoll, die mittlere Knotensonnenverschiebung etwa im Bereich

$$-2°.0/P_d \le \overline{\Delta\tau_\Omega} \le 0°.5/P_d \qquad (28.234)$$

zu erwarten. Formel (28.134) (auf Seite 425) gibt die Beziehung zwischen der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung $\bar{n}_d = 360° / \overline{P_d}$ und der Äquator-bezogenen mittleren sonnensynodischen mittleren Bewegung $\bar{n}_S = 360° / \overline{P_S}$. Unter Verwendung der Knotensonnendrift lautet diese Beziehung

$$\bar{n}_S = \bar{n}_d + \dot{\tau}_{\Omega s} \quad . \tag{28.235}$$

Damit folgt eine grundlegende Beziehung zwischen der mittleren Sonnensynodischen und der mittleren drakonitischen Umlaufzeit:

$$\frac{1}{\overline{P_S}} = \frac{1}{\overline{P_d}} + \frac{\dot{\tau}_{\Omega s}}{360°} \quad . \tag{28.236}$$

Hier sind die Umlaufzeiten in Sekunden, die Knotensonnendrift in [Grad/Sek.] gegeben.

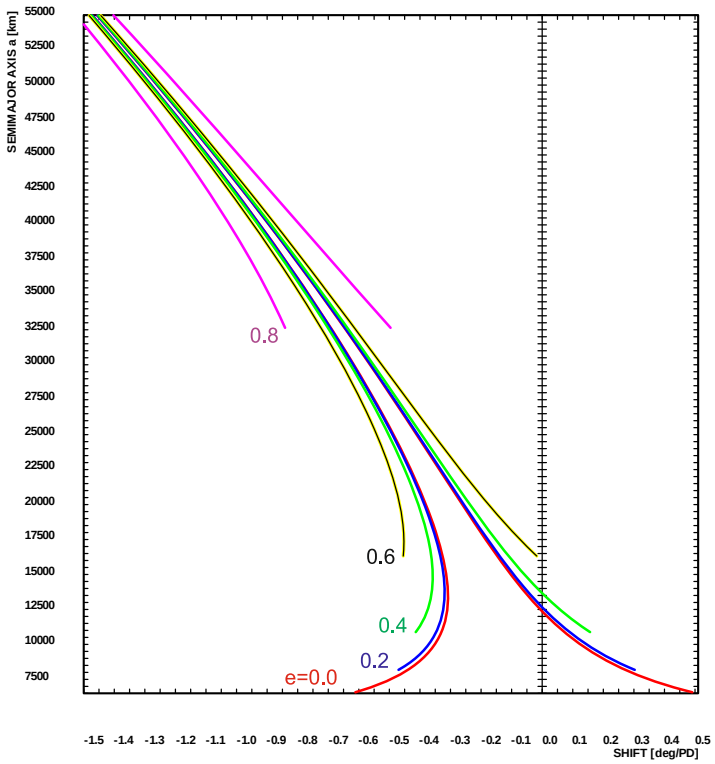


Bild 28-26: Die mittlere Sonnenverschiebung des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf in der Äquatorebene umlaufender Erdsatellitenbahnen (i=0° linke Kurven, i = 180° rechte Kurven) für verschiedene Exzentrizitäten über der großen Bahnhalbachse

BEISPIEL: Die Erdsatellitenbahn $\bar{a}_0$ = 7500 km, $\bar{e}_0$ = 0.1, $\bar{i}_0$ = 60°, Epoche 2018-05-09/13^h hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 6464.025\text{sec}$, die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S} = 6469.223\text{sec}$, die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \text{-}3°.8665884\,\text{pro Tag}$, die mittlere Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \text{-}0°.2892792 / \overline{P_d}$. ◄

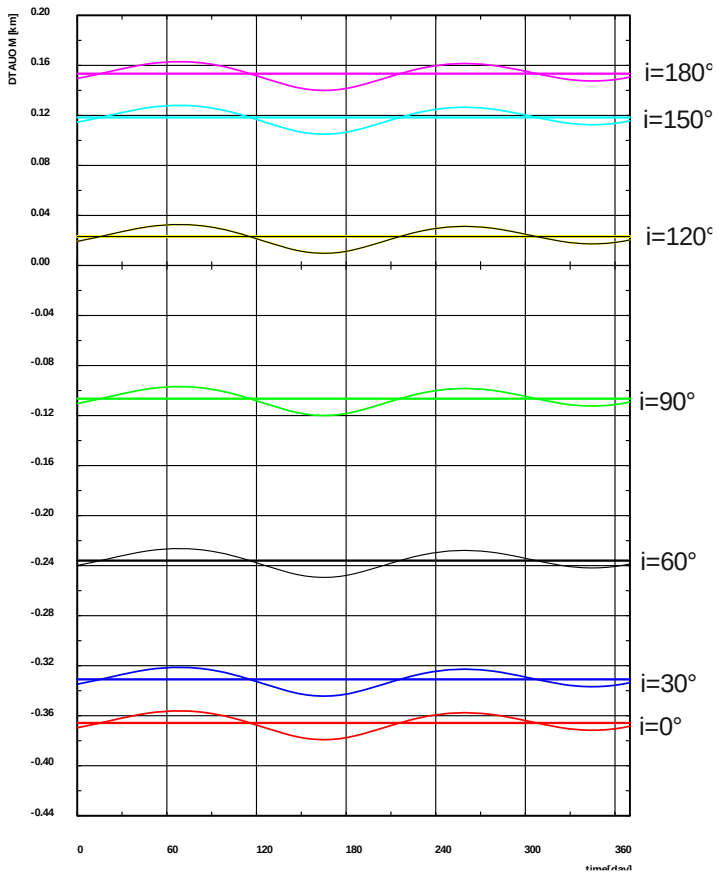


Bild 28-27: Die Schwingungen der wahren Knotensonnenverschiebung um die mittlere für Kreisbahnen mit großer Halbachse a = 9578.155 km für verschiedene Inklinationen

28.7.2.2 Die wahre Knotensonnenverschiebung

Für detaillierte Untersuchungen muss die *wahre Knotensonnenverschiebung* bezogen auf die wahre drakonitische Umlaufzeit als Differenz des Knotensonnenwinkels zwischen zwei aufeinanderfolgenden wahren Knotendurchgängen herangezogen werden:

$$\Delta\tau_\Omega = \tau_\Omega\left(t_0 + P_d\right) - \tau_\Omega\left(t_0\right) \quad . \tag{28.237}$$

Es zeigt sich, dass die Schwingung der wahren Knotensonnenverschiebung mit der Drift $\dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot$ um die mittlere mit der Drift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ im Wesentlichen eine Folge der jährlichen Variation der Rektaszension der wahren Sonne ist. Periodische Variationen der Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Bahn wirken sich nur unmerklich aus. Diese Beobachtungen müssen im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse sorgfältig beachtet werden. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL: Für eine kreisförmige Bahn mit Halbachse a=6578.155 km werden für verschiedene Bahninklinationen jeweils die wahre und die mittlere Knotensonnenverschiebung berechnet. Die maximale Abweichung der wahren von der mittleren Knotensonnenverschiebung liegt in der Größenordnung $\Delta\left(\Delta\tau_\Omega\right) = \left|0°.014\right| / P_d$. Die Darstellung in Bild 28-27 lassen sich als ein Horizontalschnitt für die gegebene Bahnhalbachse in Bild 28-25 deuten. ◄

28.7.3 Zur Veranschaulichung der sonnenbezogenen Bewegung einer Bahnebene

Ein heuristischer Überblick über das Verhalten der Knotensonnendrift in Bezug auf die Variation des Bahnknotens kann näherungsweise in übersichtlicher Weise im Folgenden erhalten werden:

Für rechtläufige Bahnen ist die Knotensonnendrift, wie direkt aus Beziehung (28.219) ersehen werden kann, stets negativ. Die mittlere Sonnenverschiebung (28.231) der Bahnebene erfolgt im Sinne abnehmender Rektaszension bzw. abnehmender geographischer Länge.

Das bedeutet: bei rechtläufigen Bahnen bewegt sich die Knotenlinie in westlicher Richtung von der Sonne weg. Außerdem zeigt die Beziehung (28.235), dass die mittlere sonnensynodische mittlere Bewegung $\overline{n_S}$ kleiner ist als die entsprechende drakonitische $\overline{n_d}$, wie es aus Bild 28-28 (auf Seite 463) deutlich wird. Entsprechend ist nach Beziehung (28.236) die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ größer als die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}$. Treffen zum Beispiel für einen Satelliten aufsteigender Knoten und Richtung zur mittleren fiktiven Sonne zu einem bestimmten Zeitpunkt zusammen, so durchläuft der Satellit nach einem Umlauf zuerst seinen aufsteigenden Knoten vor der Konjunktion mit der mittleren Sonne.

Für retrograde Bahnen ist stets $\dot{\Omega}_s > 0$. Die Knotensonnendrift ist negativ, solange $\dot{\Omega}_s > n_\odot$, sie wird positiv, wenn $\dot{\Omega}_s < n_\odot$. Im ersten Fall bewegt sich die Knotenlinie wie bei rechtläufigen Bahnen westwärts von der Sonne weg, obgleich die Knotenlinie selbst ostwärts wandert. Dies erklärt sich dadurch, dass die Knotenbewegung kleiner als die Bewegung der mittleren Sonne ist wie Bild 28-29 veranschaulicht. Nach Beziehung (28.235) ist auch die drakonitische Bewegung des Satelliten kleiner als seine sonnensynodische Bewegung, die drakonitische Umlaufzeit daher größer als die synodische. Der Satellit hat nach einem Umlauf zuerst eine Konjunktion mit der mittleren Sonne und durchläuft erst danach seinen nächsten aufsteigenden Knoten.

Der Grenzfall tritt für

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n_\odot = \dot{\Omega}_s \tag{28.238}$$

auf. Knotenlinie und mittlere fiktive Sonne bewegen sich gleich schnell und gleichförmig. Aus Beziehung (28.226) folgt

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{360°}{86400s} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{28.239}$$

Die Knotenlänge bewegt sich genauso schnell wie sich die Erde in Bezug auf die Sonne bewegt. Die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als sonnensynchron bezeichnet[1].

Retrograde Bahnen mit $\dot{\Omega}_s > n_\odot$ haben eine positive Knotensonnendrift. Der Knoten der Bahn wandert der mittleren Sonne voraus, bewegt sich also in östlicher Richtung von der Sonne weg. Die drakonitische Bewegung ist größer als die sonnensynodische, die drakonitische Umlaufzeit daher kleiner als die sonnensynodische. Der Satellit durchläuft daher zuerst seinen Knoten bevor er danach zur Konjunktion mit der mittleren Sonne kommt. Dieser Fall ist in Bild 28-30 veranschaulicht.

[1] eine detaillierte Untersuchung der sonnensynchronen Bahnbewegung erfolgt ab Abschnitt 28.8 (Seite 473)

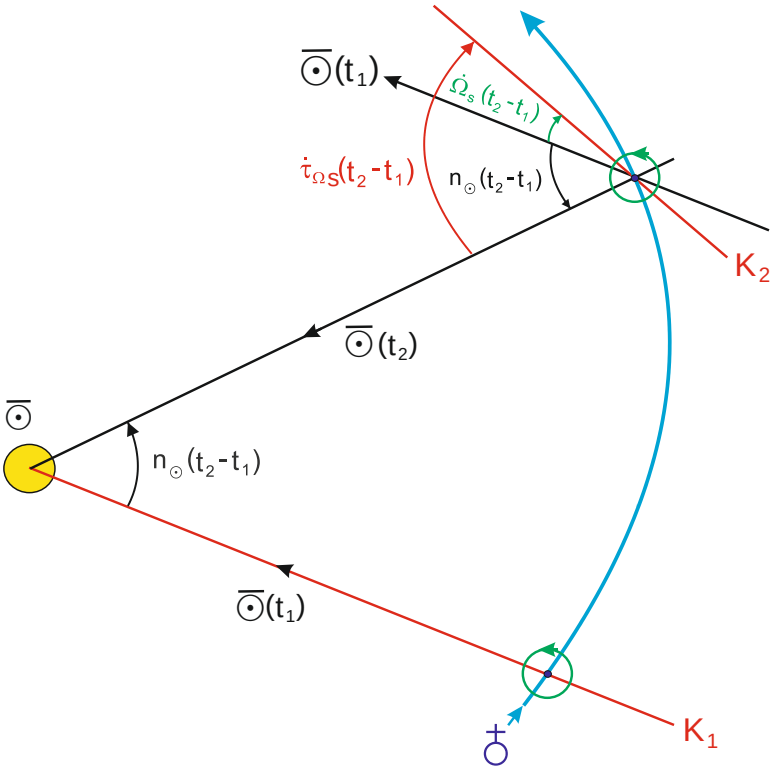


Bild 28-28: Zur Deutung der mittleren Knotendrift bei Bezug auf die Äquatorebene der Erde. Der Satellit bewegt sich auf rechtläufiger Bahn. Die Bahnebene dreht sich westwärts von der Sonne weg.

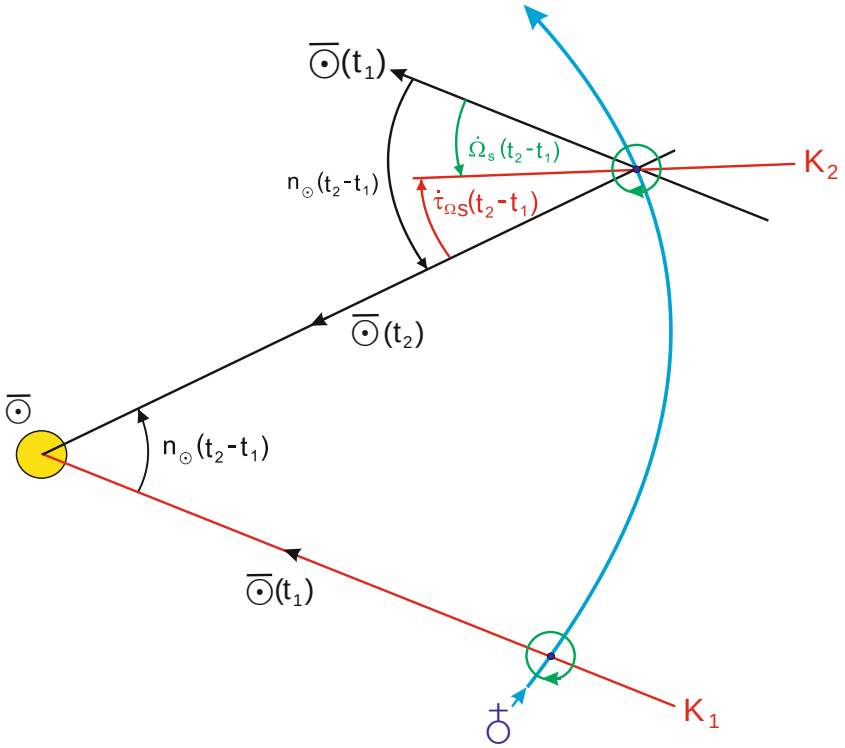


Bild 28-29: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_{\odot} > \dot{\Omega}_s$: Die Bahnebene dreht sich westwärts von der mittleren Sonne weg[1].

[1] die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als „untersonnensynchron“ bezeichnet.

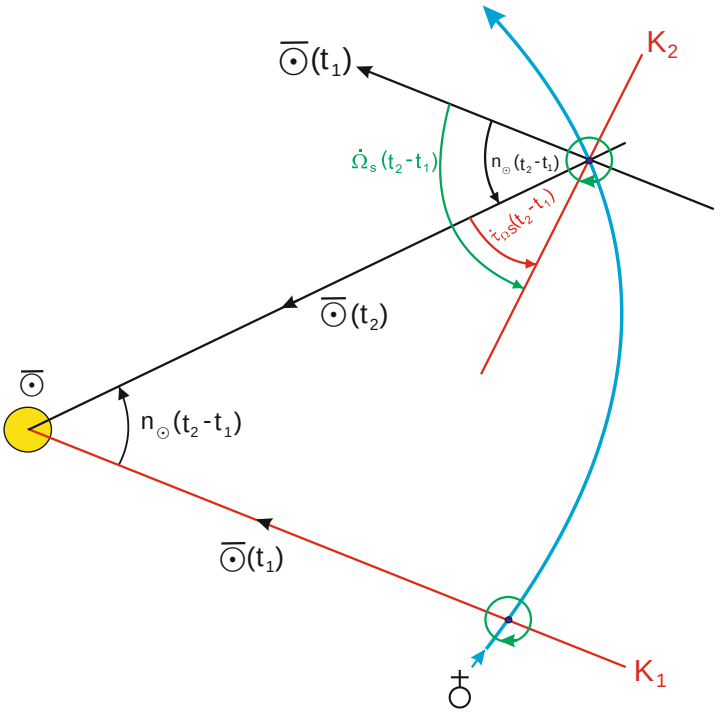


Bild 28-30: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_\odot < \dot{\Omega}_s$: Die Bahnebene dreht sich ostwärts von der mittleren Sonne weg[1].

Die vorstehenden Überlegungen sind in Tabelle 28-11 zusammengestellt. Die Inklination einer sonnensynchronen Bahn wird mit i_{ss} bezeichnet. Die Übersicht lässt nach Beziehung (28.134) (auf Seite 425) den grundlegenden Zusammenhang von mittlerer drakonitischer und mittlerer Sonnensynodischer Bewegung erkennen: $\overline{n_S} = \overline{n_d} + \dot{\tau}_{\Omega s}$.

$0° \le i < 90°$	$\dot{\tau}_{\Omega s} < 0$	$\dot{\Omega}_s < 0 < n_\odot$	$\overline{n_d} > \overline{n_S}$	$\overline{P_d} < \overline{P_S}$	Knoten wandert westwärts von der Sonne weg	Bild 28-28
$i = 90°$	$\dot{\tau}_{\Omega s} = -n_\odot$	$\dot{\Omega}_s = 0$				
$90° < i < i_{ss}$	$\dot{\tau}_{\Omega s} < 0$	$0 < \dot{\Omega}_s < n_\odot$	$\overline{n_d} < \overline{n_S}$	$\overline{P_d} > \overline{P_S}$		Bild 28-29
$i_{ss} = i$	$\dot{\tau}_{\Omega s} = 0$	$\dot{\Omega}_s = n_\odot$	$\overline{n_d} = \overline{n_S}$	$\overline{P_d} = \overline{P_S}$	sonnensynchron	
$i_{ss} < i < 180°$	$\dot{\tau}_{\Omega s} > 0$	$\dot{\Omega}_s > n_\odot$	$\overline{n_d} < \overline{n_S}$	$\overline{P_d} > \overline{P_S}$	Knoten ostwärts	Bild 28-30

Tabelle 28-11: Schematische Zusammenfassung des Verhaltens der mittleren Knotensonnendrift sowie Vergleich der drakonitischen und der sonnensynodischen Bewegung

BEISPIEL 1: Gegeben sei die kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H = 705 km und unter der Bahnneigung i= 50°. Es ergeben sich die Bahnparameter:

[1] die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als „übersonnensynchron“ bezeichnet.

die mittlere drakonitische mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_d} = 0°.0607332/\sec$,

die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 5927.569\sec$,

die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = -5°.13915551714 \times 10^{-5}/\sec$,

die mittlere Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} =$ -5°.42655282/d,

die mittlere sonnensynodische mittlere Bewegung $\overline{n_S} = 0°.0606704/\sec$,

die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S} = 5933.705\sec$,

die mittlere Knotensonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf beträgt

$\overline{\Delta\tau_\Omega} =$ -0°.372294746. Diese ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich der Knoten in westlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m(t_\Omega) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf $T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 11^h\,58^m\,30^s.65$, der Knoten wurde somit in Richtung des lokalen Vormittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.228) $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 66.340\,\mathrm{d}$ bei westlicher Verschiebung.◀

BEISPIEL 2: Eine Kreisbahn in der Bahnhöhe H = 915 km habe die Bahnneigung i= 95°. Die entsprechenden Bahnparameter sind:

die mittlere drakonitische mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_d} =$ 0°.0580093/sec,

die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 6205.904\sec$,

die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = 0°.6268746110 \times 10^{-5}/\sec$,

die mittlere Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} =$ -0°.444027696/*d*,

die mittlere sonnensynodische mittlere Bewegung $\overline{n_S} =$ 0°.0580041/sec,

die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S} =$ 6206.454sec,

die mittlere Knotensonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf beträgt

$\overline{\Delta\tau_\Omega} =$ -0°.0318934424. Diese ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich auch in diesem Fall der Knoten in westlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m(t_\Omega) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf $T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 11^h\,59^m\,52^s.35$, der Knoten wurde somit geringfügig in Richtung des lokalen Vormittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.228) $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 810.760\,\mathrm{d}$ bei westlicher Verschiebung.◀

BEISPIEL 3: Eine Kreisbahn in der Bahnhöhe H = 915 km habe die Bahnneigung i= 105°. Die entsprechenden Bahnparameter sind:

die mittlere drakonitische mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_d} = 0°.0580263/\sec$,

die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 6204.079\sec$,

die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = 0°.1862567759 \times 10^{-4}/\sec$,

die mittlere Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = 0°.623611184/d$,

die mittlere sonnensynodische mittlere Bewegung $\overline{n_S} = 0°.0580336/\sec$,

die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S} = 6203.307\sec$,

die mittlere Knotensonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\tau_\Omega} = 0°.0447793156$. Diese ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich in diesem Fall der Knoten in östlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m\left(t_\Omega\right) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf $T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 12^h\,00^m\,10^s.75$, der Knoten wurde somit geringfügig in Richtung des lokalen Nachmittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.228) $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 577.283\mathrm{d}$ bei östlicher Verschiebung. ◄

Anmerkung: Die hier hergeleiteten Formeln gelten ohne Einschränkung auch für elliptische Bahnen, da für jeden Zeitpunkt das Argument der Breite und damit auch die knotenbezogene Rektaszension für einen Satellitenort berechnet werden können. ◄

28.7.4 Verfahren der Bahnauslegung aus Knotensonnendrift und Knotensonnenverschiebung

Die bisher entwickelten Formelsysteme erlauben weitere bahnanalytische Definitionsbereiche herzuleiten. Im Fall der Knotensonnendrift können die Halbachse *a* und Inklination *i* bei bekannten Exzentrizität *e* und Argument des Perigäums ω bestimmt werden.

28.7.4.1 Bahnparameter aus Knotensonnendrift:

Die Bahnebene eines Erdsatelliten habe gegenüber der fiktiven mittleren Sonne eine bestimmte Drift. Welche Bahnelemente lassen sich damit festlegen?

Die gegebene Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ kann mit der Beziehung (28.226) auf die Knotenlängendrift zurückgeführt werden:

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -\frac{360°}{86400s} + \dot{\tau}_{\Omega s} = -\dot{\Theta} + n_\odot + \dot{\tau}_{\Omega s} \quad , \tag{28.240}$$

wenn die Einschränkung (28.227) erfüllt ist. Alternativ kann die Knotensonnendrift auch auf die säkulare Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens zurückgeführt werden. Beziehung (28.218) ergibt

$$\dot{\Omega}_s = \dot{\tau}_{\Omega s} + n_\odot \quad . \tag{28.241}$$

Somit ist die Aufgabenstellung auf eine der Verfahren der Bahnauswahl bei Vorgabe der Knotenlängendrift in Abschnitt 23.5.4 (auf Seite 182) zurückgeführt.

- *Bei Vorgabe der säkularen mittleren Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ und zwei der mittleren Bahnelemente a, e, i kann das dritte dieser Elemente berechnet werden.*

BEISPIEL 1: Die Bahnebene einer um 50° (bzw. 130°) geneigten kreisförmigen Satellitenbahn möge sich pro mittlerem Sonnentag maximal von der fiktiven mittleren Sonne in westlicher Richtung wegbewegen. Wie ist die Bahn gerichtet, in welcher Kreisbahnhöhe muss sich der Satellit bewegen?

Nach Tabelle 28-11 auf Seite 464 bewegt sich der Satellit auf rechtläufigen Bahnen in westlicher Richtung von der Sonne weg. Die Inklination muss also i = 50° betragen. Wegen Formel (28.219) ist die säkulare Knotensonnendrift am größten, wenn der Satellit am tiefsten fliegt. Unter der Annahme H = 200 km folgt $\dot{\tau}_{\Omega s}$ = -6°.73943570 . ◄

BEISPIEL 2: Die Bahnebene einer kreisförmigen Satellitenbahn, auf der ein Satellit in der mittleren Bahnhöhe H = 673 km fliegen soll, bewege sich in östlicher Richtung pro Tag um den Betrag $|\dot{\tau}_{\Omega s}| = 5°.5$ von der Sonne weg. Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Nach Tabelle 28-11 muss die Knotensonnendrift positiv sein. Aus Formel (28.240) folgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -354°.5/\mathrm{d}$. Damit ergibt sich die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 156°.94825244$. Wegen der vorgegebenen Bahnhöhe kann die Relation[1] (28.227) nicht voll ausgeschöpft werden. ◄

BEISPIEL 3: Ein Satellit bewege sich auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn. Die Bahn sei um $\bar{i}_0$ = 97°.354 geneigt. In welcher mittleren Bahnhöhe fliegt der Satellit?

Nach Definition (28.239) ist $\dot{\tau}_{\Omega s} = 0°.0$, somit $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -360°/86400\mathrm{s}$. Somit liefert das in Abschnitt 23.5.4.1 (auf Seite 182) hergeleitete Verfahren die Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 6859.207\,\mathrm{km}$ mit der mittleren Kreisbahnhöhe *H*=481.070 km. ◄

BEISPIEL 4: Ein Satellit bewege sich auf einer Kreisbahn mit der mittleren Bahnhöhe *H* = 750 km. Der Bahnknoten bewege sich pro Tag um 8° in westlicher Richtung von der fiktiven mittleren Sonne weg. Wie muss die Bahn geneigt sein?

Als Test sei um einen Grenzwert abzuschätzen *i* = 0° gesetzt. Mit *a* = 7128.137 km und *e* = 0.0 liefert Formel (28.219) die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ = -7°.78003020 . Der gewünschte Wert -8° liefert also keine mögliche Satellitenbahn. Wird stattdessen der Wert $\dot{\tau}_{\Omega s} = -7°.5$ gewählt wird $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -367°.5$ und die gesuchte Inklination ist $\bar{i}_0$ = 16°.357873 . ◄

BEISPIEL 5: Ein Satellit bewege sich auf einer um $\bar{i}_0$ = 50° geneigten Bahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 11000 km. Der Bahnknoten bewege sich pro Tag um 2°.25 in westlicher Richtung von der fiktiven mittleren Sonne weg. Welche Exzentrizität muss die Bahn haben?

[1] auf Seite 454

Mit der säkularen Knotenlängendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \text{-}2°.25\,/\text{d}$ lautet die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -362°.25$. Mit dem Verfahren der Bahnauswahl aus gegebener Knotenlängendrift in Abschnitt 32.5.4.2 folgt die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.36424622$. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega s<\text{contr}>} = \text{-}2°.25003535\,/\text{d}$. Der Fehler liegt unter $0''.13$.◀

28.7.4.2 Bahnparameter aus Knotensonnenverschiebung

Bei Vorgabe der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}$ kann eines der *Kepler*schen Bahnelemente $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$ berechnet werden, wenn die anderen Elemente vorgegeben sind. Die Aufgabenstellung kann bei vorgegebenem Bahnmodell unterschiedlicher Genauigkeit zur Berechnung eines der drei mittleren *Kepler*elemente *El* allgemeingültig mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(El) \equiv \sin\left[\tau_\Omega(t_0 + N_d\,P_d) - \tau_\Omega(t_0) - N_d\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right] = 0 \qquad (28.242)$$

bearbeitet werden. Dazu kann die zugehörige Knotensonnendrift auf die wahre oder die fiktive mittlere Sonne bezogen sein ($\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$ oder $\overline{\tau_\Omega} = \Omega - \alpha_{\overline{\odot}}$), als drakonitische Umlaufzeit kann die wahre oder die mittlere eingesetzt werden. Um eines der Elemente auch im Hinblick auf möglichst große Zeiträume zu errechnen, kann die Berechnung über N_d drakonitische Umläufe durchgeführt werden. Die Iteration kann mit einer stabilen linearen Interpolation oder in weniger Iterationsschritten mit einem *Newton* Verfahren durchgeführt werden. Der Konvergenzkreis des *Newton* Verfahrens kann recht klein sein. Da nach den obigen Überlegungen ein Anfangswert willkürlich gewählt werden muss, sollte der Konvergenzkreis möglichst groß sein.

Im vorliegenden Abschnitt wird als wichtigste Anwendung nur die Bestimmung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ ausgehend von einer Epoche t_0 bei Vorgabe der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}$ und der mittleren Epocheparameter Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ untersucht.

Vor Start einer Bearbeitung sind wesentliche Vorüberlegungen erforderlich. Zunächst muss geklärt werden, ob die vorgegebene Knotensonnenverschiebung überhaupt im erlaubten Intervall (28.234) liegt[1]. Die überlagerte Funktion (28.242) zeigt, dass die zu berechnende große Bahnhalbachse abhängig von der Anfangszeit t_0 ist. Um größenordnungsmäßig zunächst eine zeitunabhängige Lösung zu erhalten, wird mit Formel (28.231) die Bedingungsgleichung

$$fct_2(\overline{a}_0) \equiv \overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = \frac{2\pi\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s} - \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = 0 \qquad (28.243)$$

verwendet. Ausgehend von einem geeigneten Anfangswert $\overline{a}_0^{(0)}$ kann diese Funktion ebenso wie die genaue Funktion (28.242) iterativ gelöst werden.

Die Beziehung (28.219) zeigt, dass $\dot{\Omega}_s$ und $n_\odot$ ungefähr von derselben Größenordnung sind. Daher kann in der vorstehenden Formel kein Hauptterm abgespalten werden, um etwa wie in früher behandelten Verfahren der Bahnauswahl die große Bahnhalbachse zunächst durch Li-

[1] auf Seite 457

nearisierung anzunähern. Im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik, Reduzierung der Bewegungseinflüsse auf die erste zonale Harmonische J_2 und Einsetzen der entsprechenden säkularen Ausdrücke in den Formeln (20.15) – (20.17), führt die obige Bedingungsgleichung auf einen Näherungsausdruck der Form

$$\overline{\Delta\tau_\Omega} = \frac{A - \dfrac{2\pi n_\odot}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a^7}}{a^2 + B} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{28.244}$$

Mit fest vorgegebenen Bahnparametern $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$ können die folgenden Hilfsparameter *A* und *B* als Konstante aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} A &:= -\frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \cos\bar{i}_0 \\ B &:= \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(3\cos^2\bar{i}_0 - 1\right) + \left(5\cos^2\bar{i}_0 - 1\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{28.245}$$

Quadrierung des Ausdrucks (28.244) liefert die algebraische Gleichung 7. Grades für die große Bahnhalbachse a

$$\frac{4\pi^2 n_\odot^2}{\mu} a^7 - \left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)^2 a^4 - 2\left[B\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)^2 + A\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)\right] a^2 - \left[A - \left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right) B\right]^2 = 0 \quad . \tag{28.246}$$

Diese hat nur einen Vorzeichenwechsel, so dass nach der *Descartes*schen Vorzeichenregel genau eine reelle Wurzel zu erwarten ist. Daher genügt für eine iterative Lösung dieser Gleichung ein grober Anfangsnäherungswert.

Bevor ein sinnvoller Startwert $\overline{a_0}^{(0)}$ für die Iteration gefunden werden kann, wird die mit den gegebenen Bahnparametern extremal mögliche mittlere Knotensonnenverschiebung $\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)_{ext}$ und zugehörige große Bahnhalbachse $\left(\bar{a}_0\right)_{ext}$ aus

$$\frac{d\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{d\left(\bar{a}_0\right)} = 0 \tag{28.247}$$

berechnet. Dies führt auf die Bedingungsgleichung

$$fct\left[\left(\bar{a}_0\right)_{ext}\right] \equiv -7\left(\bar{a}_0\right)_{ext}\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)_{ext}}\left(\left(\bar{a}_0\right)_{ext}^2 + B\right) - A + \frac{2\pi n_\odot}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)_{ext}^7} = 0 \quad . \tag{28.248}$$

Mit der hier erhaltenen Bahnhalbachse kann aus Beziehung (28.244) die zugehörige extremale Knotensonnenverschiebung $\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)_{ext}$ erhalten werden. Diese von Exzentrizität und Inklination wesentlich abhängige Größe gibt einen entscheidenden Hinweis auf die Lösbarkeit der Aufgabe aus gegebener mittlerer Knotensonnenverschiebung die große Bahnhalbachse zu bestimmen: wenn nämlich die extremale Knotensonnenverschiebung kleiner als die vorgegebene ist, ist die Aufgabe nicht lösbar (siehe etwa die Beispiele 5 und 6).

Es werden zwei Grenzwerte für die mögliche Halbachse durch Vorgabe der Perigäumshöhe gewählt:

$$a_1 := \frac{H_{\max}}{1-\bar{e}_0} \;,\; a_2 := \frac{H_{\min}}{1-\bar{e}_0} \quad . \tag{28.249}$$

Jeder diese beiden Werte wird als Anfangslösung zur Berechnung der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ mit Hilfe der überlagerten Funktion (28.242) bzw. (28.243) genommen.

Bild 28-25 (auf Seite 459) (bzw. analog Bild 28-26) lässt vermuten, dass je nach Vorgabe eines willkürlichen Anfangswertes eine Iteration jenseits eines Extremalwertes $\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)_{ext}$, welcher als rechter Umkehrpunkt einer der Kurven erkennbar ist, insbesondere auf Kreisbahnen mit Inklinationen unter 90° zu zwei unterschiedlichen Lösungen führen kann. Welches der beiden Ergebnisse sinnvoll ist, oder ob beide Lösungen möglich sind, muss eine Plausibilitätsüberlegung entscheiden.

Dieser Wert kann nun als Startwert für die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse bei Bezug auf eine Epoche t_0 mit Hilfe der überlagerten Funktion (28.242) und Bezug auf die wahre Sonne verwendet werden.

Als zentrale Folgerung, die im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse unabdingbar ist, schließen wir generell:

- *Jede Aussage in einer Satellitenbahnanalyse muss sorgfältig qualifiziert werden können.* ◄

BEISPIEL 1: Vorgegeben sei eine Kreisbahn mit der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.2 / \overline{P_d}$ unter der Neigung $\bar{i}_0 = 30°$. Die extremale mittlere Knotensonnenverschiebung ergibt nach Formel (28.248) den Wert $(\bar{a}_0)_{ext} = 12863.637\,\text{km}$ mit $\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)_{ext} = -0°.29003$. Wird für die Iteration mit Formel (28.249) der Startwert $a_1 = 6578.137\,\text{km}$ verwendet, ergibt die Iteration (28.243) die Bahnhalbachse $\bar{a}_{01} = 4204.644\,\text{km}$, die somit verworfen werden muss. Die Iteration mit $a_2 = 45000.000$ km führt auf den zeitunabhängigen Wert $\bar{a}_{02} = 47924.001$ km. Die Probe ergibt exakt $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.2 / \overline{P_d}$ mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_d} = 104403.631\,\text{sec} \triangleq 29^h$.

Eine weitere Untersuchung zeigt in folgender Tabelle die Zeitabhängigkeit des Ergebnisses der Bahnauslegung, wenn der Bezug auf die wahre Sonne im Wesentlichen mit der säkularen Knotensonnenverschiebung (28.232) (d.h. quantitativ dem Bezug auf die wahre Sonne und inklusiv die periodischen Bewegungseinflüsse des Satelliten) erfolgen soll.

Datum t_0	Bahnhalbachse	Knotensonnenverschiebung
zeitunabhängig	$\bar{a}_0 = 47924.001$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.2$
2018-01-30/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 46710.449$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.15551 / \overline{P_d}$
2018-04-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 50512.695$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.296907 / \overline{P_d}$
2018-07-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 46431.810$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.1453896 / \overline{P_d}$

2018-10-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 50744.902$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.30573 / \overline{P_d}$
2018-12-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 45045.659$ km	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.0955 / \overline{P_d}$

BEISPIEL 2: Vorgegeben sei eine Kreisbahn unter der Neigung $\bar{i}_0 = 30°.0$. Wie groß muss die Bahnhalbachse sein, damit die Bahnebene pro mittlerem drakonitischem Umlauf die mittlere Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = -0°.4 / \overline{P_d}$ durchläuft?

Die extremale Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega(ext)}}$ wird mit der aus der Bedingungsgleichung (28.248) errechneten großen Bahnhalbachse berechnet: der extremal erreichbaren großen Halbachse $\bar{a}_{0(ext)} = 12863.500$ km ist $\overline{\Delta\tau_{\Omega(ext)}} = -0°.29003 / \overline{P_d}$ zugeordnet. Da die vorgegebene Inklination unter 90° liegt, sind zwei Ergebnisse zu erwarten.

Um einen geeigneten Anfangswert für die zu suchende große Bahnhalbachse zu finden, werden die beiden extremalen Perigäumsradien $r_{P(1)}^{(0)} = R_E + 200\,\text{km}$ und $r_{P(2)}^{(0)} = 45000\,\text{km}$ gewählt. Die Iteration mit der überlagerten Funktion (28.243) ausgehend von $r_{P(1)}^{(0)}$ ergibt die Halbachse $\bar{a}_{0(1)} = 8049.816\,\text{km}$, ausgehend von $r_{P(2)}^{(0)}$ ergibt die Halbachse $\bar{a}_{0(2)} = 21385.696$ km. Die Kontrolle ergibt in beiden Fällen exakt den Eingabewert $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}$.

Bezogen auf die Epoche 2018-06-13/14 lauten die Ergebnisse $\bar{a}_{0(1t)} = 8120.938$ km mit der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0(1)}} = -0°.39553575718 / \overline{P_d}$ bzw.

$\bar{a}_{0(2)} = 20495.626$ km mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0(2)}} = -0°.3999999998308 / \overline{P_d}$.

Wird endgültig die erstere Bahn gewählt, beträgt der Fehler etwa 16 Bogensekunden. ◄

BEISPIEL 3: Gegeben: e=0.0, i=12°.5, $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -0°.54 / \overline{P_d}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega(ext)}} = -0°.30530 / \overline{P_d}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 13309.500$ km.

Bahnen bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne: $\bar{a}_{0(1)} = 7009.362$ km, $\bar{a}_{0(2)} = 27178.326$ km

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lauten die Ergebnisse:

$\bar{a}_{0(1,t)} = 7039.171$ km mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega(\text{contr-1t})}} = -0°.53641453311 / \overline{P_d}$, Fehler: etwa 13″, sowie

$\bar{a}_{0(2,t)} = 26158.282$ km, $\overline{\Delta\tau_{\Omega(\text{contr-1t})}} = -0°.5141301598401 / \overline{P_d}$, Fehler: etwa 10″. ◄

BEISPIEL 4: Gegeben: e=0.0, i=12°.5, $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.0 / \overline{P_d}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega(ext)}} = -0°.30503 / \overline{P_d}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 13310.012$ km.

Bahnen bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne: $\bar{a}_{0(1)} = 4926.052$ km, $\bar{a}_{0(2)} = 42283.011$ km.

Es kommt somit als einzige Lösung nur die höhere Bahn $\bar{a}_{0(2)}$ in Frage.

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet das Ergebnis:

$\bar{a}_{0(2,t)} = 40799.677\ \text{km}$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(\text{contr-1t})}} = \text{-}0°.9494744267942 / \overline{P_d}$, Fehler: etwa $3'$. ◄

BEISPIEL 5: Gegeben: e=0.2, i=120°.5, $\overline{\Delta\tau_{\Omega}} = 0°.1 / \overline{P_d}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(ext)}} = 0°.10894 / \overline{P_d}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 8222.671\ \text{km}$.

Es gibt nur eine Bahn. Bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne hat sie die mittlere Halbachse $\bar{a}_{0(1)} = 8368.424\ \text{km}$.

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet das Ergebnis:

$\bar{a}_{0(2,t)} = 8292.021\text{km}$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(\text{contr-1t})}} = 0°.1046456691866 / \overline{P_d}$, Fehler: etwa $17''$.

Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_d} = 7514.275\text{s}$, die mittlere (sonnen) synodische Umlaufzeit $\overline{P_S} = 7512.092\ \text{s}$. ◄

BEISPIEL 6: Gegeben: e=0.0, i=30°.0, $\overline{\Delta\tau_{\Omega}} = 0°.0 / \overline{P_d}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(ext)}} = \text{-}0°.29003 / \overline{P_d}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 12863.500\ \text{km}$.

Da $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(ext)}} < \overline{\Delta\tau_{\Omega}} = 0°.0 / \overline{P_d}$ kann es keine Lösung geben. Dies zeigt auch ein Blick auf Bild 28-25 auf Seite 459. ◄

BEISPIEL 7: Gegeben: e=0.0, i=120°.0, $\overline{\Delta\tau_{\Omega}} = 0°.0 / \overline{P_d}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(ext)}} = 0°.10894 / \overline{P_d}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 8222.671\ \text{km}$.

In diesem Fall gibt es genau eine Lösung: $\bar{a}_0 = 10415.666\ \text{km}$.

In Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet die Lösung bei Bezug auf die wahre Sonne $\bar{a}_{0(t)} = 10260.296\ \text{km}$, die Knotensonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,(t)}} = 0°.006371407 / \overline{P_d}$.

In diesem Fall handelt sich um eine sonnensynchrone Bahn (siehe in Abschnitt 28.8). ◄

Die vorstehenden Beispiele zeigen wiederholt, wie empfindlich das Verfahren zur Berechnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der Knotensonnenverschiebung ist. Insbesondere zeigt Beispiel 4, dass der berechnete Extremalwert für mögliche Knotensonnenverschiebungen auch ein Minimalwert sein kann. Es lohnt sich daher stets einen Blick auf die graphische Übersicht über die Verläufe der Knotensonnenverschiebung in Bild 28-25 auf Seite 459 bzw. Bild 28-26 zu werfen. Aus diesen Bildern kann abgelesen werden, welche Vorgaben überhaupt sinnvoll sind um in diesem Fall ein Verfahren der Bahnauswahl starten zu können und welche Ergebnisse erwartet werden dürfen.

28.7.4.3 Bahnparameter aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene

Die Aufgabenstellung lautet: Eine Satellitenbahneben möge stets nach dem Zeitraum $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ wieder dieselbe Stellung zur mittleren fiktiven Sonne einnehmen. Welche Bahnparameter lassen sich damit festlegen?

Aus Beziehung (28.228) kann bei Vorgabe der Anzahl der Tage zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichartigen Stellungen des Bahnknotens in Bezug auf die Sonne die Knotensonnendrift berechnet werden:

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = \frac{360°}{\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}} \quad . \tag{28.250}$$

Hier muss wieder beachtet werden, dass $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ üblicherweise negativ angegeben wird, wenn eine relative Westdrift des Knotens bezüglich der Sonne gefordert ist. Nach Berechnung der Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ kann die Aufgabenstellung auf die Bahnauswahl in Abschnitt 28.7.4.1 (auf Seite 466) zurückgeführt werden.

- *Bei Vorgabe der Anzahl der Tage zwischen gleichartigen Stellungen von Bahnknoten und Sonne und zwei der mittleren Bahnelemente a, e, i kann das dritte dieser Elemente berechnet werden.*

Um in der vorliegenden Aufgabenstellung eine Bahnanalyse durchzuführen, können nicht beliebige Vorgaben gemacht werden. Vielmehr müssen im Fall kreisförmiger Bahnen nach Bild 28-31 geeignete Vorgaben zusammengefügt werden, die dann mit den vorgenannten mathematischen Methoden zu einer brauchbaren Lösung geführt werden. Auch im Fall elliptischer Bahnen können nach dieser Zeichnung sinnvolle Eingabepaare abgeschätzt werden.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige Satellitenbahn in 750 km mittlerer Bahnhöhe habe bei östlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung (z.B. Konjunktion). Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Gegeben ist die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$. Aus Formel (28.250) wird die Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = 1°.8/\mathrm{d}$, entsprechend die Knotenlängendrift nach (28.226) $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -358°.2/\mathrm{d}$. Die Näherungsformel[1] (23.244) (auf Seite 184) liefert für die Inklination den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)} = 114°.3652206$, die Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.245) schließlich $\bar{i}_0 = 114°.39959806$. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega s<\mathrm{contr}>} = 1°.79942688/\mathrm{d}$. Der Fehler beträgt etwa $2''/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\mathrm{contr}>}} = 200.064\,\mathrm{d}$. ◄

[1] In Abschnitt 23.5.4.3 (auf Seite 181)

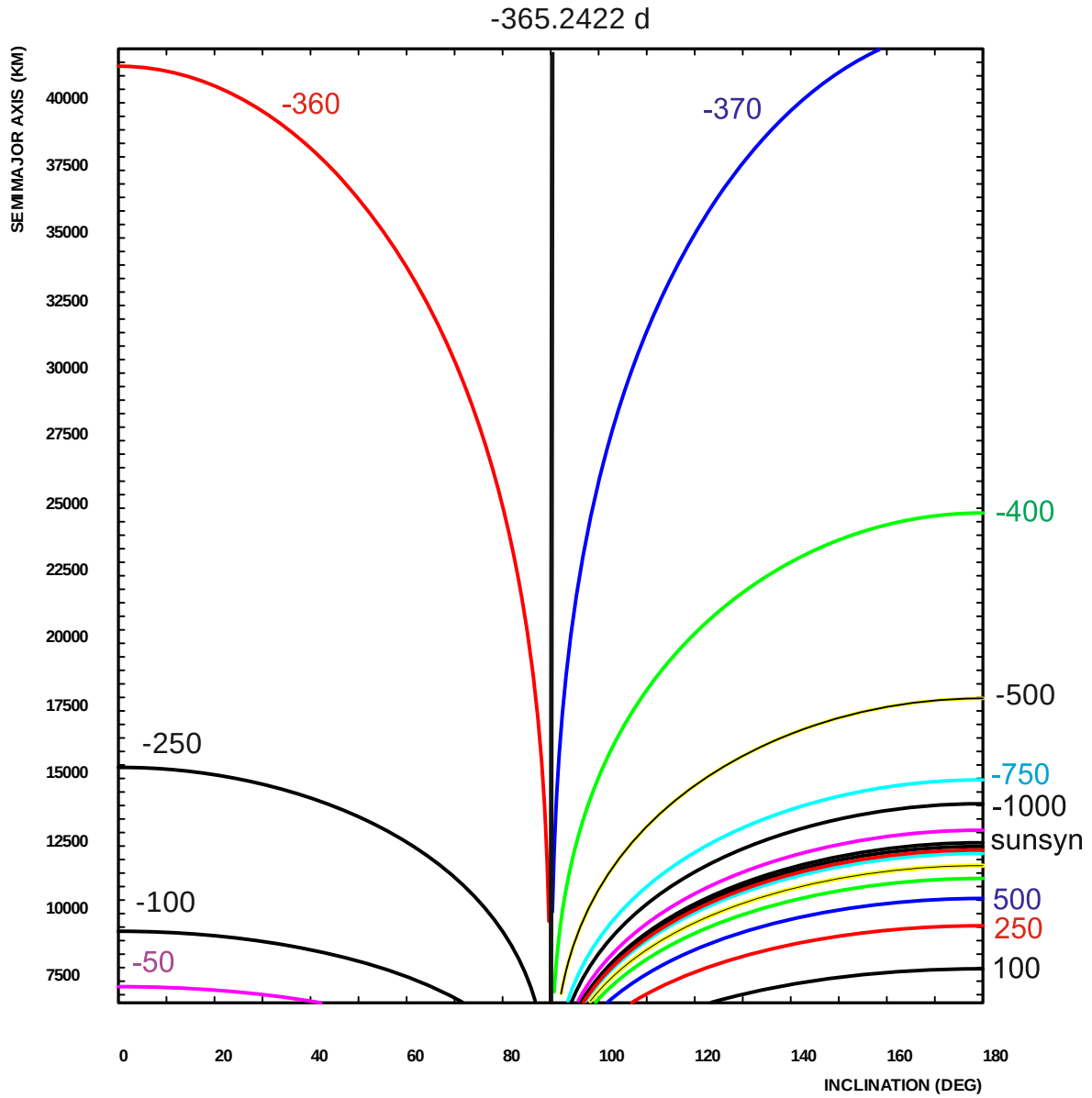


Bild 28-31: Der Zusammenhang zwischen der Reproduzierbarkeit gleichartiger (synodischer) Stellungen zwischen Bahnknoten und Sonne und der großen Bahnhalbachse und der Bahninklination für kreisförmige Satellitenbahnen. Die Zahlen im Bild bezeichnen die Anzahl der Tage zwischen den gleichartigen Stellungen

BEISPIEL 2: Alternativ zu Beispiel 1 habe eine kreisförmige Satellitenbahn in 750 km mittlerer Bahnhöhe bei westlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung (z.B. Konjunktion). Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Gegeben ist die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\odot}} = -200\,\mathrm{d}$. Die Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega s} = -1°.8/\mathrm{d}$, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -361°.8/\mathrm{d}$. Die Inklination hat den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)} = 83°.07260388$, die Verbesserung ergibt $\bar{i}_0 = 83°.05541514$. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega s<\mathrm{contr}>} = -1°.79961639/\mathrm{d}$. Der Fehler beträgt etwa $1''.4/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\odot<\mathrm{contr}>}} = -200.043\,\mathrm{d}$. ◄

BEISPIEL 3: Eine unter 75° geneigte kreisförmige Satellitenbahn habe bei westlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung. Welche mittlere große Bahnhalbachse muss die Bahn haben?

Gegeben ist wieder die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = -200\,\mathrm{d}$. Die Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega s} = -1°.8/\mathrm{d}$, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -361°.8/\mathrm{d}$. Die Bahnhalbachse hat mit der Näherungsformel (23.240) (auf Seite 182) den Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 8865.885602\,\mathrm{km}$, die Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.241) ergibt $\bar{a}_0 = 8861.809\,\mathrm{km}$. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega s<\mathrm{contr}>} = \text{-}1°.80003497\,/\mathrm{d}$. Der Fehler beträgt etwa $0''.13/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\mathrm{contr}>}} = -199.996\,\mathrm{d}$. ◄

BEISPIEL 4: Es werde eine elliptische Bahn gesucht, welche die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 12000\,\mathrm{km}$ und um 60° geneigt sei. Bei westlicher Drift bezüglich der Sonne möge auch diese Bahn nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung haben. Welche mittlere Exzentrizität muss diese Bahn haben?

Gegeben ist wieder die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = -200\,\mathrm{d}$. Die Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega s} = -1°.8/\mathrm{d}$, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -361°.8/\mathrm{d}$. Die Exzentrizität hat mit der Näherungsformel (23.242) (auf Seite 183) und anschießender Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.243) ergibt $\bar{e}_0 = 0.42645342$. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega s<\mathrm{contr}>} = \text{-}1°.80003464\,/\mathrm{d}$. Der Fehler beträgt etwa $0''.13/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\mathrm{contr}>}} = -199.996\,\mathrm{d}$. ◄

Anmerkung: Die Untersuchungen in den letzten Abschnitten bezogen sich auf den Zusammenhang von Satellit, Satellitenbahn und wahrer bzw. fiktiver mittlerer Sonne bezogen auf die Erdäquatorebene. Der direkte Bezug zwischen Satellit und wahrer Sonne wird im Rahmen des Sonnenaspektwinkels behandelt (Abschnitt 28.11.128.11.1 auf Seite 535). ◄

28.8 Sonnensynchrone Bahnen

Im Rahmen der Äquator-bezogenen Verknüpfungen zwischen Satellit und Sonne bzw. Satellitenbahnebene und Sonne kommt der sonnensynchronen Bahn als wichtigem Spezialfall eine besondere Rolle zu. Dies betrifft Beobachtungsbedingungen bei Erdbeobachtungssatelliten, die Regulierung des Energiehaushaltes eines Satelliten etwa über Solarzellen, und viele andere Anwendungen, für die eine sonnensynchrone Bahne vorteilhaft ist.

28.8.1 Charakteristika für Sonnensynchronität

28.8.1.1 Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

➢ *Die Definition einer sonnensynchronen Bahn ist ausschließlich auf das Verhalten des mittleren Bahnknotens in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne ausgelegt.*◄

Man beachte diese wesentliche Einschränkung bei einer Bahnauslegung. Die Abweichungen einer wahren Bahn in Bezug auf die wahre Sonne können erheblich sein und müssen Gegenstand einer Bahnanalyse sein.

Zusammenstellung einiger wesentlicher Eigenschaften sonnensynchroner Bahnen:

1. Notwendig und hinreichend für eine sonnensynchrone Bahn ist das Verschwinden der mittleren Knotensonnendrift, nach Beziehung (28.239)

$$\dot{\tau}_{\Omega s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.251}$$

   Aus Bild 28-22 und Bild 28-23 (auf Seite 454) kann erkannt werden, dass sonnensynchrone Bahnen eine sehr kleine Untermenge von Sonnensynodischen Bewegungen sind.

2. Diese Beziehung ist wegen (28.238) gleichbedeutend mit

$$\dot{\Omega}_s = n_\odot \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.252}$$

   Auf sonnensynchronen Bahnen bewegt sich der mittlere Bahnknoten gleichförmig mit der fiktiven mittleren Sonne längs des Erdäquators. Diese Eigenschaft wird häufig als die definierende Eigenschaft von sonnensynchronen Bahnen verwendet.

3. Die Knotenlängendrift einer sonnensynchronen Bahn beträgt wegen (28.239)

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -\frac{360°}{86400s} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.253}$$

4. Nach Formel (28.231) gibt es auf sonnensynchronen Bahnen keine mittlere Sonnenverschiebung des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf (siehe zum Vergleich Bild 28-24 auf Seite 457)

$$\overline{\Delta\tau_\Omega} = 0° / \overline{P_d} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.254}$$

5. Nach Beziehung (28.134) ist auf sonnensynchronen Bahnen die mittlere drakonitische Bewegung identisch gleich der mittleren auf den Erdäquator bezogenen sonnensynodischen Bewegung

$$\overline{n_S} = \overline{n_d} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.255}$$

6. Entsprechend ist mit Beziehung (28.136) die mittlere drakonitische Umlaufzeit der mittleren Sonnensynodischen Umlaufzeit identisch gleich

$$\overline{P_S} = \overline{P_d} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.256}$$

7. Der mittlere Knotensonnenwinkel ist konstant. Nach Beziehung (28.217) ist

$$\overline{\tau_\Omega}(t) = \overline{\tau_{\Omega 0}} = \overline{\tau_\Omega}(t_\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.257}$$

8. Der auf die fiktive mittlere Sonne bezogene Sonnenwinkel $\bar{\tau} = \bar{\tau}(t) = \alpha(t) - \alpha_{\bar{\odot}}(t)$ wiederholt sich bei Wiederholung der knotenbezogenen Rektaszension $\alpha - \Omega$ des Satelliten. Mit (28.257) liefert die Beziehung (28.220)

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(t) = \alpha(t) - \Omega(t) + \overline{\tau_{\Omega 0}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.258}$$

9. Wenn zu zwei aufeinanderfolgenden Zeiten t_1 und t_2 die knotenbezogenen Rektaszensionen gleich sind, $\alpha(t_1) - \Omega(t_1) = \alpha(t_2) - \Omega(t_2)$ folgt aus Beziehung (28.223) die Identität der mittleren Ortssonnenzeit an den beiden Satellitenpositionen

$$T_m(t_2) = T_m(t_1) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn sonnensynchron} \quad . \tag{28.259}$$

Dies ist eine der wesentlichen und wichtigen Eigenschaften sonnensynchroner Satellitenbahnen. Etwa aus den Transformationen[1] (24.18) besteht für eine vorgegebene Inklination *i* ein Zusammenhang zwischen der knotenbezogenen Rektaszension und dem Argument der Breite *u* und Deklination δ:

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos\delta \cos(\alpha - \Omega) \\ \cos i \sin u &= \cos\delta \sin(\alpha - \Omega) \\ \sin i \sin u &= \sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{28.260}$$

Hieraus können *u* und die geodätische Breite φ entsprechend der Deklination[2] δ eindeutig berechnet werden. Wiederholung der knotenbezogenen Rektaszension bedeutet somit Überflug desselben Breitenkreises. Auf sonnensynchronen Bahnen wird somit ein und derselbe Breitenkreis stets zur selben mittleren Ortssonnenzeit überflogen.

28.8.1.2 Anmerkungen zum Bezug auf die wahre Sonne

Der Unterschied zwischen der auf die fiktive mittlere Sonne bezogenen sonnensynchronen Bewegung und der entsprechenden, die auf die wahre Sonne ausgerichtet ist, kann im Wesentlichen durch den Unterschied zwischen der mittleren tropischen Bewegung $n_\odot$ der fiktiven mittleren Sonne und der Variation $\dot{\alpha}_s$ der Rektaszension der wahren Sonne beschrieben werden. Dies zeigt sich im Unterschied der mittleren Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ ***und der wahren*** $\dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot$**.**

Besonders interessant ist die Auswirkung auf die Knotensonnenverschiebung $\Delta\tau_\Omega$. In Bild 28-32 ist der Verlauf der wahren Knotensonnenverschiebung für kreisförmige Bahnen für einige Inklinationen über der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ aufgetragen. Sonnensynchrone Bahnen treten an den Stellen $\overline{\Delta\tau_\Omega} = 0°.0 / \overline{P_d}$ auf. Es fällt auf, dass der Verlauf der Kurven in der Umgebung der sonnensynchronen Bahnen relativ glatt verläuft. Der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer Knotensonnenverschiebung ist dann im Vergleich zum sonstigen sehr unruhigen Verlauf sehr klein, auch wenn er nicht ganz verschwindet, was etwa Beispiel 5 in Abschnitt 28.7.4.2 auf Seite 468 zeigt. Insofern kann tatsächlich auch bahndynamisch von einer Sonderstellung der sonnensynchronen Bewegung gesprochen werden.

Numerische Untersuchungen zeigen, dass dieser Sachverhalt nur unwesentlich beeinflusst wird, wenn in der Darstellung der Satellitenbahn auch die periodischen Bewegungseinflüsse einbezogen werden.

---

[1] Abschnitt 24.2.1 auf Seite 294

[2] Siehe etwa die genauen Transformationsformeln (38.124) in Abschnitt 38.2.1.2 (Band V)

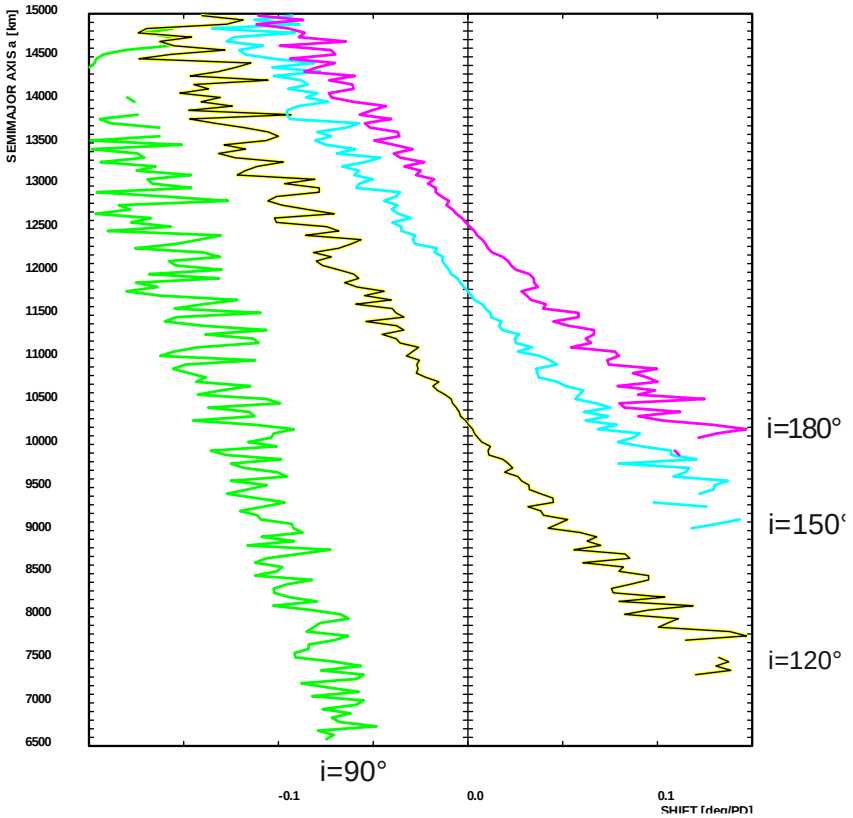


Bild 28-32: Die wahre Knotensonnenverschiebung in der Umgebung einer sonnensynchronen Bahn

28.8.2 Bahndefinition aus Bedingung für sonnensynchrone Bahnen

Mit Hilfe der Zuordnung (28.252) kann die Bahnauslegung einer mittleren sonnensynchronen Bahn auf die Verfahren der Bahnauswahl aus gegebener Knotenlängendrift in Abschnitt 23.5.4 (auf Seite 182) zurückgeführt werden. Dazu werden die beiden Beziehungen (28.251) und (28.253) in die entsprechende Formel eingesetzt. Bei Vorgabe zwei der drei mittleren Bahnparameter $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ kann der dritte berechnet werden.

Die bisherigen Untersuchungen lassen folgern, dass sonnensynchrone Bahnen nur in sehr eingeschränkten Parameterräumen vorkommen können. Mit Entwicklung (20.15) folgt etwa, dass sonnensynchrone Bahnen notwendig rückläufig sind. Auch die Bahnhalbachse und die Exzentrizität unterliegen wesentlichen Einschränkungen. Diese können aus Bild 28-33 auf Seite 482 im Fall von Erdsatelliten abgelesen werden. Um diese Kurven zu zeichnen müssen zunächst die Beziehungen zwischen den (mittleren) Bahnparametern hergeleitet werden, wie sie zur Bahnauslegung im Fall von sonnensynchronen Bahnen benötigt werden. Dies geschieht in den folgenden Abschnitten.

28.8.2.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Die Parameter $\overline{e}_0$ und $\overline{i}_0$ seien bekannt. Mit der Näherung (23.240) (auf Seite 182) und anschließender Verbesserung mit der definierenden Gleichung (28.252) kann die mittlere Bahnhalbachse einer sonnensynchronen Bahn berechnet werden:

$$\overline{a}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\left[\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos \overline{i}_0}{2 n_\odot \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\right]^2} \quad , \tag{28.261}$$

Die Verbesserung mit der Bahnhalbachse als unabhängiger Variabler verwendet etwa die säkulare Drift[1] (20.15) in der Theorie des Gravitationsfeldes der Erde

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{a}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.262}$$

BEISPIEL: Gegeben seien $\bar{e}_0 = 0.1, \bar{i}_0 = 100°$. Die Näherung (28.261) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 7533.757\,\text{km}$, die Iteration (28.262) schließlich $\bar{a}_0 = 7528.132\,\text{km}$. ◄

28.8.2.2 Berechnung der Exzentrizität

Vorgabe der Parameter $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$ erlaubt die Berechnung der mittleren Exzentrizität der sonnensynchronen Bahn, ausgehend von der Näherung (23.242) in Abschnitt 23.5.4.2

$$\bar{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{-\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos\bar{i}}{2\,\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}\, n_\odot}}} \quad . \tag{28.263}$$

Zur Verbesserung kann wieder die Gleichung (28.252) jetzt mit der Exzentrizität als unabhängiger Variable zum Einsatz kommen:

$$fct\left(\bar{e}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{e}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.264}$$

BEISPIEL: Für die Elemente $\bar{a}_0 = 12000\,\text{km}, \bar{i}_0 = 140°$ liefert (28.263) für die Exzentrizität die Näherung $\bar{e}_0^{(0)} = 0.28155706445$. Der verbesserte Wert lautet $\bar{e}_0 = 0.28068285$. ◄

28.8.2.3 Berechnung der Inklination

Vorgabe der Parameter $\bar{a}_0$ und $\bar{e}_0$ erlaubt schließlich die Berechnung der mittleren Inklination der sonnensynchronen Bahn, ausgehend von der Näherung (23.244) in Abschnitt 23.5.4.3

$$\cos\bar{i}_0^{(0)} = -\frac{2\,n_\odot\,\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2} \quad . \tag{28.265}$$

Die Verbesserung erfolgt basierend auf Gleichung (28.252) mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{i}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{i}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.266}$$

BEISPIEL: Gegeben seien $\bar{a}_0 = 7000\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.06$. (28.265) ergibt für die Inklination einer sonnensynchronen Bahn den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)} = 97°.81700718$, der verbesserte Wert ist $\bar{i}_0 = 97°.83992550$. ◄

Anmerkung: Auch bei sehr kleinen Fehlertoleranzen sind die vorstehenden Verfahren im Fall der Berechnung der Exzentrizität oder der Inklination nicht sehr stabil. Es können also nur Näherungswerte erwartet werden. ◄

---

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

28.8.3 Übersicht über sonnensynchrone Bahnen

Um einen Überblick über alle möglichen sonnensynchronen Bahnen werden in Bild 28-33 die sonnensynchronen Bahnen in Kurven Halbachse über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten aufgezeichnet. Dazu werden in Abhängigkeit von der vorgegebenen Exzentrizität über der Inklination als unabhängiger Variable die zugehörigen Halbachsen mit Formel (23.240) berechnet. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 28-11 bis Tabelle 28-20 gelistet. Die in diesem Bild gezeichneten Kurven sind auf die minimale Perigäumshöhe H_P = 200 km bezogen. Die blau eingezeichnete Grenzkurve beschreibt diejenigen sonnensynchronen Bahnen, welche das Perigäum mit dem vorgegebenen Perigäumsradius

$$r_P = R_E + H_P = a(1-e) \tag{28.267}$$

haben. Um diese Bahnen zu finden wird mit vorgewählter Inklination aus Formel (23.242) die Exzentrizität mit der von *i* abhängigen Hilfsgröße B gebildet, falls nur die säkularen Einflüsse erster Ordnung durch J_2 berücksichtigt werden sollen,

$$e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{B}{a^3\sqrt{a}}}} \quad , \quad B := -\frac{3}{2}\frac{J_2\sqrt{\mu}\,R_E^2\cos i}{n_\odot} \quad . \tag{28.268}$$

Wird hier die Halbachse *a* durch den Perigäumsradius r_P ersetzt, folgt mit der Hilfsgröße $A := B^2 / r_P^7$ die Bedingungsgleichung zur Berechnung der Exzentrizität

$$fct(e) \equiv e^4 + e^3(4+A) + 3e^2(2-A) + e(4+3A) + (1-A) = 0 \quad . \tag{28.269}$$

Mit Formel (28.267) kann schließlich die zugehörige Halbachse berechnet werden. Die numerischen Werte im Fall H_P = 200 km sind in Tabelle 28-21 (auf Seite 484) gelistet.

e = 0.0	H[km]	a[km]	$\overline{P_d}$ [min]	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$
95°.677	0	6378.140	84.6213	21°.1553
96°.327	200	6578.140	88.6231	22°.1558
100°	1112.479	7490.140	107.6432	26°.9106
110°	2713	9090.140	143.8139	35°.9534
120°	3754	10132.140	169.1656	42°.2914
130°	4508	10886.140	188.3272	47°.0818
140°	5068	11446.140	202.9802	50°.7450
150°	5476	11854.140	231.8735	53°.4683
160°	5756	12134.140	221.4524	55°.3631
170°	5919	12279.140	225.4054	56°.3505
180°	5973.2332	12351.388	227.3888	56°.8472

Tabelle 28-12: Sonnensynchrone Bahnfamilie für Kreisbahnen

e = 0.1	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 98°.061	0	7086.839	1417.368
98°.988	200	7309.061	1661.812
100°	402	7533.506	1908.701
110°	1851	9143.506	3679.701
120°	2794	10191.283	4832.257
130°	3476	10949.061	5665.812
140°	3983	11512.394	6285.479
150°	4352	11922.394	6736.479
160°	4606	12204.617	7046.923
170°	4754	12369.061	7227.812
180°	4802.119	12422.527	7286.624

Tabelle 28-13: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.1

e = 0.2	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 101°.487	0	7086.839	1417.368
102°.819	200	7309.061	1661.812
110°	1065.880	9143.506	3679.701
120°	1918.975	10191.283	4832.257
130°	2536.379	10949.061	5665.812
140°	2994.577	11512.394	6285.479
150°	3328.913	11922.394	6736.479
160°	3557.995	12204.617	7046.923
170°	3692.017	12369.061	7227.812
180°	3736.160	12422.527	7286.624

Tabelle 28-14: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.2

e = 0.3	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 106°.591	0	9111.650	5466.990
108°.550	200	9397.364	5838.419
110°	337.5350	9593.843	6093.841
120°	1107.161	10693.309	7523.147
130°	1664.156	11489.016	8557.566
140°	2077.523	12079.540	9325.247
150°	2379.147	12510.432	9885.406
160°	2585.815	12805.671	10269.218
170°	2706.724	12978.399	10493.763
180°	2746.548	13035.290	10567.722

Tabelle 28-15: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.

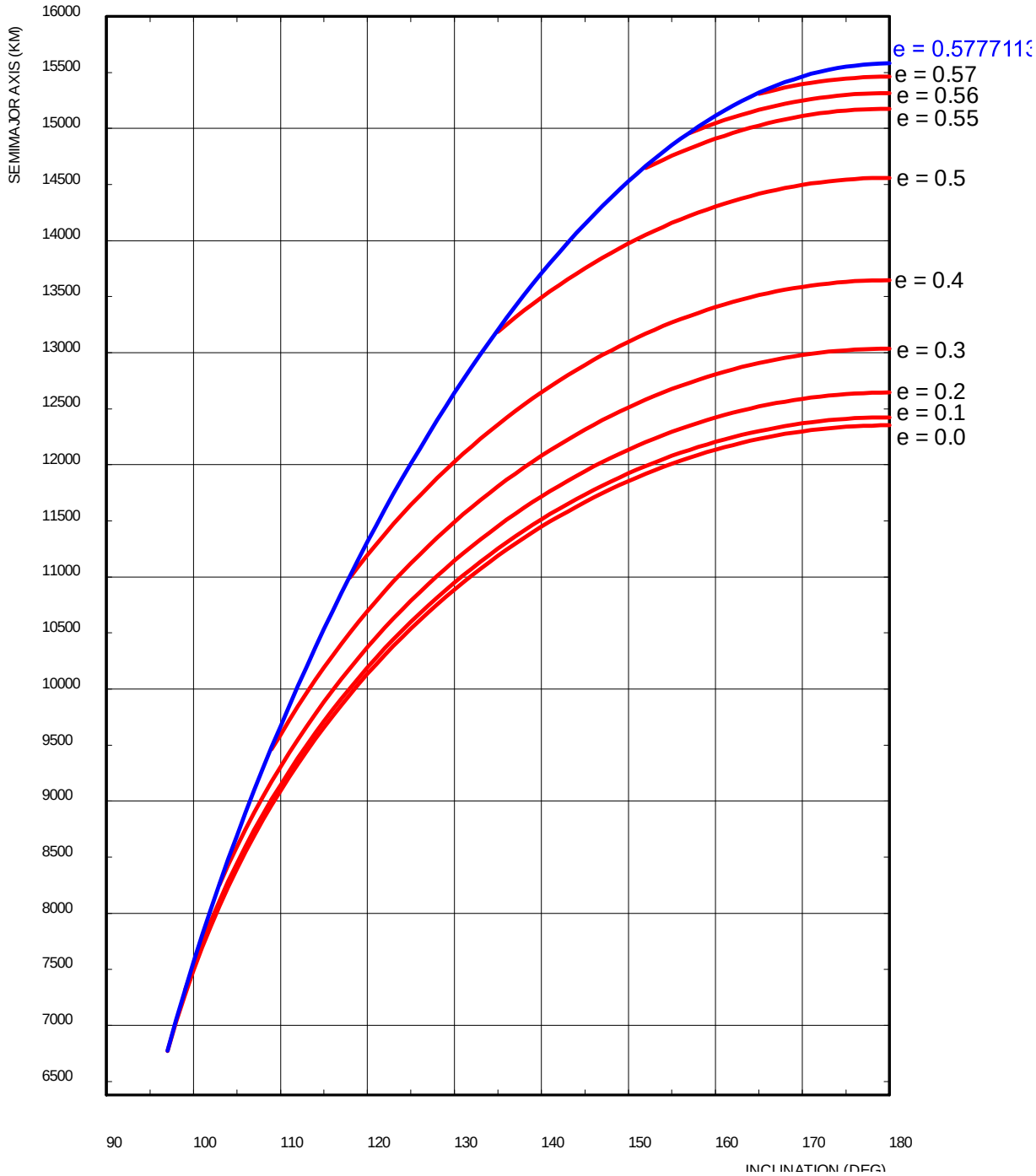


Bild 28-33: Sonnensynchrone Bahnfamilien, große Bahnhalbachse über der Inklination, parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität e = 0.5777113 (bezogen auf Einfluss durch J_2), Perigäumshöhe der exzentrischen Bahn H_P=200 km. Man beachte die umkehrbar eindeutige Relation zwischen großer Bahnhalbachse und Inklination

e = 0.4	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 114°.665	0	10630.258	8504.207
117°.706	200	10963.592	8970.873
120°	338.104	11193.765	9293.116
130°	837.872	12026.712	10459.241
140°	1208.769	12644.873	11324.667
150°	1479.403	13095.931	11956.148
160°	1664.838	13404.988	12388.828
170°	1773.324	13585.799	12641.963
180°	1809.056	13645.352	12725.338

Tabelle 28-16: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.4

e = 0.5	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 129°.030	0	12756.310	12756.310
134°.555	200	13156.310	13356.310
140°	367.266	13490.842	13858.107
150°	607.883	13942.076	14579.959
160°	772.750	14301.810	15074.560
170°	869.204	14494.717	15363.921
180°	900.973	14558.256	15459.228

Tabelle 28-17: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5

e = 0.55	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 141°.956	0	14173.678	15591.046
151°.332	200	14618.122	16279.934
160°	330.157	14907.360	16728.253
170°	420.641	15108.436	17039.920
180°	450.444	15174.664	17142.574

Tabelle 28-18: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.55

e = 0.5777781	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 180°.0	200	15579.81	18198.466

Tabelle 28-19: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5777781

e = 0.599734	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 180°.0	0	15934.791	19113.271

Tabelle 28-20: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.599734 (Grenzfall)

Inklination *i*	Exzentrizität *e*	Große Bahnhalbachse *a*
97°	0.02878431	6773.096 km
100°	0.1303775	7564.359 km

110°	0.3196583	9668.872 km
120°	0.4184518	11311.42 km
130°	0.4796357	12641.41 km
140°	0.5201085	13707.55 km
150°	0.5472390	14528.94 km
160°	0.5647426	15113.21 km
170°	0.5745942	15463.20 km
180°	0.5777781	15579.81 km

Tabelle 28-21: Die sonnensynchrone Bahnfamilie mit Perigäumshöhe 200 km (blaue Grenzkurve in Bild 28-33)

28.8.4 Spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen

Spur-reproduzierbare Satellitenbahnen sind nach Beziehung (23.305) (auf Seite 201) kommensurabel zum Vollkreis: nach N_K drakonitischen Umläufen hat der Knoten genau *K*-mal den Vollkreis durchlaufen. Die mittlere Knotenlängenverschiebung erfüllt somit die Beziehung

$$N_K \, \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -K \cdot 360° \quad . \tag{28.270}$$

Im Fall von sonnensynchronen Bahnen kann mit der Fundamentalbeziehung (23.227) (auf Seite 172) die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \, \overline{P_d} \tag{28.271}$$

direkt auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit bezogen werden. Mit Hilfe der Beziehungen (28.253) und (28.256) erhält man die notwendige Beziehung für spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen

$$\overline{P_d} = \overline{P_S} = \frac{K}{N_K} 86400\,\mathrm{s} \quad \Leftarrow \quad \text{sonnensynchron} \quad . \tag{28.272}$$

Auf sonnensynchronen Bahnen vollzieht sich ein Knotenumlauf exakt in einem (mittleren Sonnen) Tag.

Die geographische Länge des Knotens ist gegenüber dem ursprünglichen Knoten um die (mittlere) Knotenlängenrestverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = N_1 \, \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 360° \tag{28.273}$$

gewandert, wobei N_1 die Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Tag ist:

$$N_1 = \mathrm{int}\left(-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right) \quad . \tag{28.274}$$

Falls die Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ gleich Null ist, wird die nach einem Tag exakt reproduzierbare Bahn gemeinhin als „integer orbit“ bezeichnet. Dies ist in Bild 28-34 dargestellt. Hier ist die Knotenlängenverschiebung über der Bahnhöhe für kreisförmige sonnensynchrone Bahnen berechnet. Die Knotenlängenrestverschiebung nach einem Tag $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nimmt zwischen den „integer orbits“, welche durch ganze Zahlen charakterisiert sind, kontinuierlich zu, um dann jeweils auf null zurückzufallen.

Aus Bild 28-34 kann man auch ablesen, dass die mittlere Knotenlängenverschiebung für kreisförmige sonnensynchrone Bahnen das Intervall

$$22°.1558\ \left[H = 200\,\text{km}\right] \le \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| \le\ 29°.5747\ \left[H = 1600\,\text{km}\right] \tag{28.275}$$

durchläuft. In Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (28.273) kann (analog zu Definition (23.299) (auf Seite 197)) eine Knotenlängenrestverschiebung nach K Tagen und N_K drakonitischen Umläufen definiert werden

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = N_K\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} + K\cdot 360° = \text{int}\left(-\frac{K\cdot 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right)\overline{\Delta\lambda_\Omega} + K\cdot 360° \quad . \tag{28.276}$$

Diese Größe ist ein Maß für die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn. Wenn sie verschwindet, ist die Bedingung (28.270) erfüllt mit der Reproduzierbarkeit $K : N_K$. Da stets

$$\left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| \tag{28.277}$$

erfüllt sein muss, kann die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn auch durch ein ganzzahliges Verhältnis von Knotenlängenrestverschiebung und Knotenlängenverschiebung definiert werden. Für ganze Zahlen K_1, K_2 muss dann gelten

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \frac{K_1}{K_2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \qquad \langle K_1 < K_2 \quad . \tag{28.278}$$

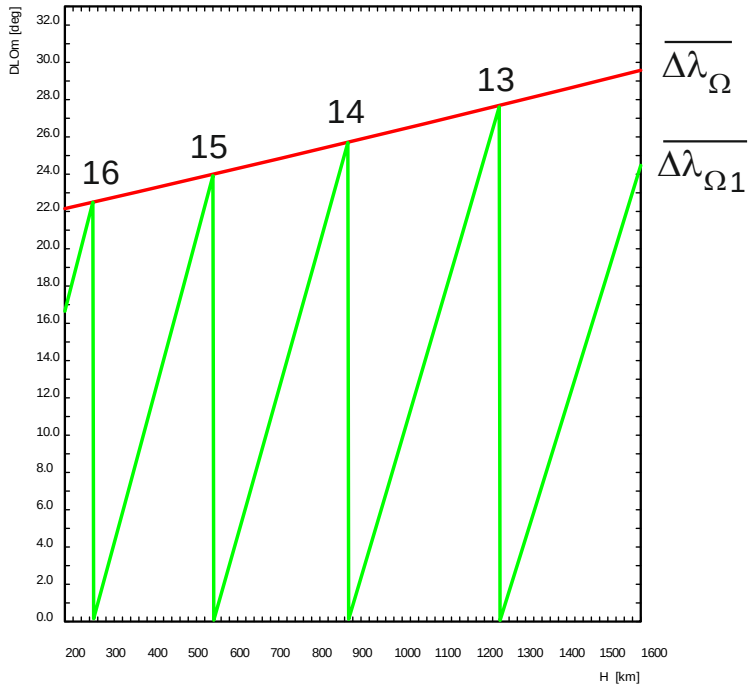


Bild 28-34: Mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Satellitenumlauf und mittlere Knotenlängenrestverschiebung pro Tag für alle kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen im Höhenverlauf 200 km bis 1600 km

Zusammen mit (28.276) und der Fundamentalbeziehung (28.271) kann im Fall von sonnensynchronen Bahnen die notwendige Bedingung für die mittlere drakonitische sowie die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit

$$\overline{P_d} = \overline{P_S} = \frac{K \cdot 86400\,\mathrm{s}}{\frac{K_1}{K_2} - N_K} \quad \Leftarrow \text{ Bahn sonnensynchron} \tag{28.279}$$

gefunden werden. Üblicherweise wird K=1 gesetzt, N_K ist ein freier Parameter.

In der folgenden Tabelle 28-22 werden alle nach 1 - 7 Tagen spurreproduzierbaren sonnensynchronen Erdsatellitenbahnen bis zur Bahnhöhe etwa 1200 km zusammengestellt (ausführliche Tabellen in Anhang G.2 (Band V)). Die entsprechende graphische Darstellung findet sich in Bild 28-35 (auf Seite 488).

K	N_K	a [km]	H [km]	i	P/d	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$	$\Delta\lambda_1$	Bahnfolge
1	16	6646.281	268	96°.583	16.0	–22°.500	0°.000	0°.000	1-------0
7	111	6686.229	308	96°.723	15.86	-22°.703	-3°.248	-3°.248	76543210
6	95	6692.945	315	96°.474	15.83	-22°.737	-3°.789	-3°.789	6543210
5	79	6702.376	324	96°780	15.8	-22°.785	-4°.560	-4°.560	5-4-3-2-1-0
4	63	6716.585	338	96°.831	15.75	–22°.857	–5°.712	–5°.712	4-3-2-1-0
7	110	6726.781	349	96°.867	15.71	-22°.909	-6°.544	-3°.272	73625140
3	47	6740.435	362	96°.916	15.7	–22°.979	–7°.664	–7°.664	3--2--1--0
5	78	6759.667	382	96°.986	15.6	-23°.077	-9°.232	-4°.319	5-2-4-1-3-0
7	109	6767.952	390	97°.016	15.57	-23°.119	-9°.904	-3°.301	72461350
2	31	6788.774	411	97°.092	15.5	–23°.226	–11°.613	–11°.613	2---1---0
7	108	6809.757	432	97°.169	15.43	-23°.333	-13°.328	-3°.332	75316420
5	77	6818.196	440	97°.201	15.4	-23°.377	-14.032	-4°.687	5-3-1-4-2-0
3	46	6837.988	460	97°.274	15.3	–23°.478	–15°.648	–7°.818	3--1--2—0
7	106	6895.335	517	97°.491	15.14	-23°.774	-20°.384	-3°.390	71234560
1	15	6939.140	561	97°.659	15	–24°.000	0°.000	0°.000	1-------0
7	104	6983.646	606	97°.833	14.86	-24°.231	-3°.465	-3°.465	76543210
6	89	6991.134	613	97°.863	14.83	-24°.270	-4°.045	-4°.045	6543210
5	74	7001.649	624	97°.905	14.8	-24°.324	-4°.860	-4°.860	5-4-3-2-1-0
4	59	7017.497	639	97°.968	14.75	–24°.402	–6°.030	–6°.030	4-3-2-1-0
7	103	7028.872	651	98°.013	14.71	-24°.466	-6°.990	-3°.495	73625140
3	44	7044.110	666	98°.074	14.7	–24°.545	–8°.175	–8°.175	3--2--1--0
5	73	7065.583	687	98°.161	14.6	-24°.658	-9°.870	-4°.952	5-2-4-1-3-0
7	102	7074.835	697	98°.199	14.57	-24°.706	-10°.590	-3°.350	72461350
2	29	7098.100	720	98°.294	14.5	–24°.828	–12°.414	–12°.414	2---1---0
7	101	7121.556	743	98°.391	14.43	-24°.951	-14°.265	-3°.356	75316420
5	72	7130.993	753	98°.430	14.4	-25°.000	-15°.000	-5°.000	5-3-1-4-2-0
3	43	7153.134	775	98°.523	14.3	–25°.116	–16°.740	–8°.376	3--2--1--0
7	100	7169.054	791	98°.589	14.29	-25°.200	-18°.000	-3°.600	74152630

K	N_K	a [km]	H [km]	i	P/d	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$	$\Delta\lambda_1$	Bahnfolge
4	57	7181.054	803	98°.640	14.25	–25°.263	–18°.945	–7°.318	4-1-2-3-0
5	71	7197.935	820	98°.712	14.2	-25°.352	-20°.280	-5°.064	5-1-2-3-4-0
6	85	7209.245	831	98°.760	14.17	-25°.412	-21°.176	-4°.236	6123450
7	99	7217.351	839	98°.795	14.14	-25°.455	-21°.825	-3°.630	71234560
1	14	7266.467	888	99°.008	14	–25°.714	0°.000	0°.000	1-------0
7	97	7316.427	938	99°.228	13.86	-25°.979	-3°.706	-3°.706	76543210
6	83	7324.837	947	99°.265	13.83	-26°.024	-4°.337	-4°.337	6543210
5	69	7336.652	959	99°.318	13.8	-26°.087	-5°.218	-5°.218	5-4-3-2-1-0
4	55	7354.464	976	99°.400	13.75	–26°.182	–6°.548	–6°.548	4-3-2-1-0
7	96	7367.253	989	99°.455	13.71	-26°.250	-7°.500	-3°.750	73625140
3	41	7384.391	1006	99°.553	13.7	–26°.341	–8°.774	–8°.774	3--2--1--0
5	68	7408.553	1030	99°.644	13.6	-26°.471	-10°.594	-5°.283	5-2-4-1-3-0
7	95	7418.969	1041	99°.692	13.57	-11°.364	-3°.788	-3°.788	72461350
2	27	7445.169	1067	99°.813	13.5	–26°.667	–13°.334	–13°.334	2---1---0
7	94	7471.601	1093	99°.936	13.43	-26°.809	-15°.326	-3°.832	75316420
5	67	7482.240	1104	99°.986	13.4	-26°.866	-16°.124	-5°.375	5-3-1-4-2-0
3	40	7507.211	1129	100°.104	13.3	–27°.000	–18°.000	–9°.000	3--1--2—0
7	93	7525.175	1147	100°.190	13.29	-27°.097	-19°.358	-3°.872	74152630
4	53	7538.719	1161	100°.255	13.25	–27°.170	–20°.380	–6°.790	4-3-2-1-0
6	79	7570.559	1192	100°.409	13.17	-27°.341	-22°.784	-4°.557	6123450
5	66	7557.783	1180	100°.347	13.2	-27°.273	-21°.822	-5°.451	5-1-2-3-4-0
7	92	7579.718	1202	100°.453	13.14	-27°.391	-23°.474	-3°.917	71234560
1	13	7635.259	1257	100°.726	13	–27°.692	0°.000	0°.000	1-------0

Tabelle 28-22: **Z**usammenstellung aller reproduzierbaren kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen von Erdsatelliten bis in etwa 1200 km Höhe und Wiederholbarkeit nach 1 - 7 Tagen

28.8.5 Bahndefinition bei reproduzierbaren sonnensynchronen Bahnen

Für reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen sind zwei Parameter vorgegeben: die drakonitische bzw. sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_d}$ aus den Formeln (28.272) bzw. (28.279), sowie die Bedingung (28.253) für die Sonnensynchronität. Im Zusammenhang mit der drakonitischen Bewegung wurde ein entsprechendes Problem bearbeitet: aus drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift wird das Parameterpaar mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und mittlere Inklination $\bar{i}_0$ erarbeitet. Eine Näherung der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)}$ wird mit dem Verfahren in Abschnitt 23.6.1 berechnet. Diese Näherung wird dann in Formel (23.244) eingesetzt um eine Näherung der Inklination zu erhalten. Die iterative Verbesserung muss dann in Kombination der beiden überlagerten Funktionen (23.259) entsprechend Abschnitt 23.6.2 durchgeführt werden.

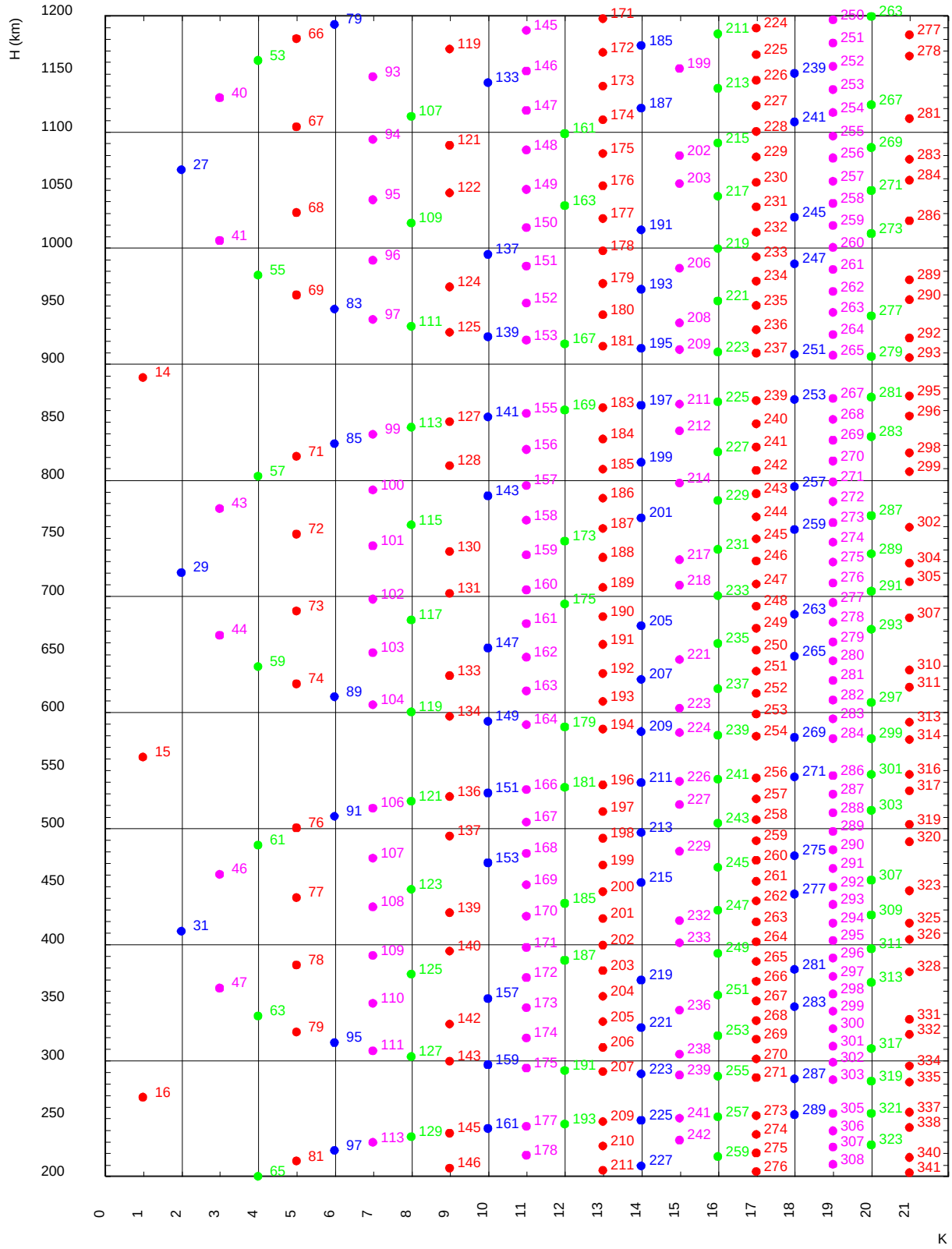


Bild 28-35: Kreisförmige reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen im Höhenbereich 200 km – 1200 km und für 1 – 21 Tage Reproduzierbarkeit

In den folgenden beiden Beispielen wird die Iteration mit den Genauigkeitsschranken $|\Delta a| \le 0.001\,\mathrm{km}$, $|\Delta i| \le 0''.004$ durchgeführt.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige sonnensynchrone Bahn sei nach 27 Tagen und 421 drakonitischen Umläufen Spur-reproduzierbar. Welche Bahnparameter („*Kepler*-Elemente“) sind dadurch bestimmt?

Als Näherung nullter Ordnung[1] liefert Formel (23.247) $\bar{a}_0^{(0)} = 6767.936680\,\mathrm{km}$. Eine erste Verbesserung unter der Annahme $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -2\pi / 86400\,\mathrm{s}$ liefert Formel (23.257) $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \text{-}6.121641\,\mathrm{km}$ zu $\bar{a}_0^{(1)} = 6761.815039\,\mathrm{km}$. Mit diesem Wert ergibt Formel (23.244) die Näherung erster Ordnung für die Inklination $\bar{i}_0^{(1)} = 96°.970431$. Die iterative Verbesserung mit den überlagerten Funktionen (23.259) ergibt nach 6 Iterationsschritten schließlich $\bar{a}_0 = 6761.812775\,\mathrm{km}$, $\bar{i}_0 = 96°.99365127$. ◄

BEISPIEL 2: Eine kreisförmige sonnensynchrone Bahn habe pro Tag eine Knotenlängenrestverschiebung von einem Drittel der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf. Außerdem sei angenommen, dass pro Tag 16 drakonitische Umläufe stattfinden. Bestimme Halbachse und Inklination.

In Formel (28.279) muss $K = 1$, $K_1 : K_2 = 1:3$ gesetzt werden, außerdem wird $N_K = 16$ angenommen. Der Satellit muss auf dieser Bahn die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d} = 5514.893617\,\mathrm{s}$ und die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.978723 / \overline{P_d}$ haben. In nullter Näherung beträgt die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 6746.586700\,\mathrm{km}$, die Verbesserung erster Ordnung ergibt $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = -6.149479\,\mathrm{km}$. Die Näherungswerte erster Ordnung sind $\bar{a}_0^{(1)} = 6740.437221\,\mathrm{km}$, $\bar{i}_0^{(1)} = 96°.893230$. Die Iteration führt nach zwei Iterationsschritten auf das verfeinerte Ergebnis $\bar{a}_0 = 6740.434941\,\mathrm{km}$, $\bar{i}_0 = 96°.91636040$. Die resultierende Bahn vollführt nach $K = 3$ Tagen $N_K = 47$ drakonitische Umläufe aus. ◄

28.8.6 Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen

Anschließend an die Überlegungen in Abschnitt 23.9.5 (auf Seite 210) werden in diesem Abschnitt Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen untersucht, die Subzyklen zu einer vorgegebenen Bahn erster Wahl sein sollen. Die Subzyklen werden in der Praxis notwendig, um für hochauflösende Sensoren eine kontinuierliche Überdeckung des Äquators und damit der ganzen Erdoberfläche ermöglichen zu können (vergleiche dazu Bild 23-33 auf Seite 213).

BEISPIEL: Es werde als Ausgangsbahn die kreisförmige sonnensynchrone Bahn mit der Reproduzierbarkeit 7:104 gewählt. Bild 28-36 stellt eine Untermenge zu Bild 28-35 dar. Eingezeichnet sind Manöver zwischen der Primärbahn zu zwei Bahnen, die Subzyklen darstellen.

Nach Tabelle Anhang G.2 (Band V) haben die Bahnen die mittleren Bahnparameter

[1] in Abschnitt 23.6.1

		7:104	39:580
Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_0}$	6983.646 km	6979.049 km
Gemittelte Bahnhöhe (bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde)	$\overline{H}$	605.506 km	600.913 km
Inklination	$\overline{i_0}$	97°.833	97°.8153
Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	–24°.231	-24°.2069
Knotenlängenrestverschiebung nach 1 Tag	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	–3°.465	-3°.1034
Kürzeste mögliche Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_0}$	–3°.465	-0°.6207
Manöver in Halbachse	Δa	-	4.597 km
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_a	-	2.4865 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_a	-	0.462 kg
Manöver in Inklination	Δi	-	0°.0177
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_i	-	2.334 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_i	-	0.433 kg
Gesamttreibstoffbedarf	Δm	-	0.9 kg

Tabelle 28-23: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 39:580

		7:104	41:614
Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_0}$	6983.646 km	6946.689 km
Gemittelte Bahnhöhe (bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde)	$\overline{H}$	605.506 km	568.549 km
Inklination	$\overline{i_0}$	97°.833	97°.6887
Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	–24°.231	-24°.1967
Knotenlängenrestverschiebung nach 1 Tag	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	–3°.465	-2°.9508
Kürzeste mögliche Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_0}$	–3°.465	-0°.5902
Manöver in Halbachse	Δa	-	36.957 km
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_a	-	19.990 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_a	-	3.699 kg
Manöver in Inklination	Δi	-	0°.143

Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_i	-	19.027 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_i	-	3.522 kg
Gesamttreibstoffbedarf	Δm	-	7.2 kg

Tabelle 28-24: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 41:614

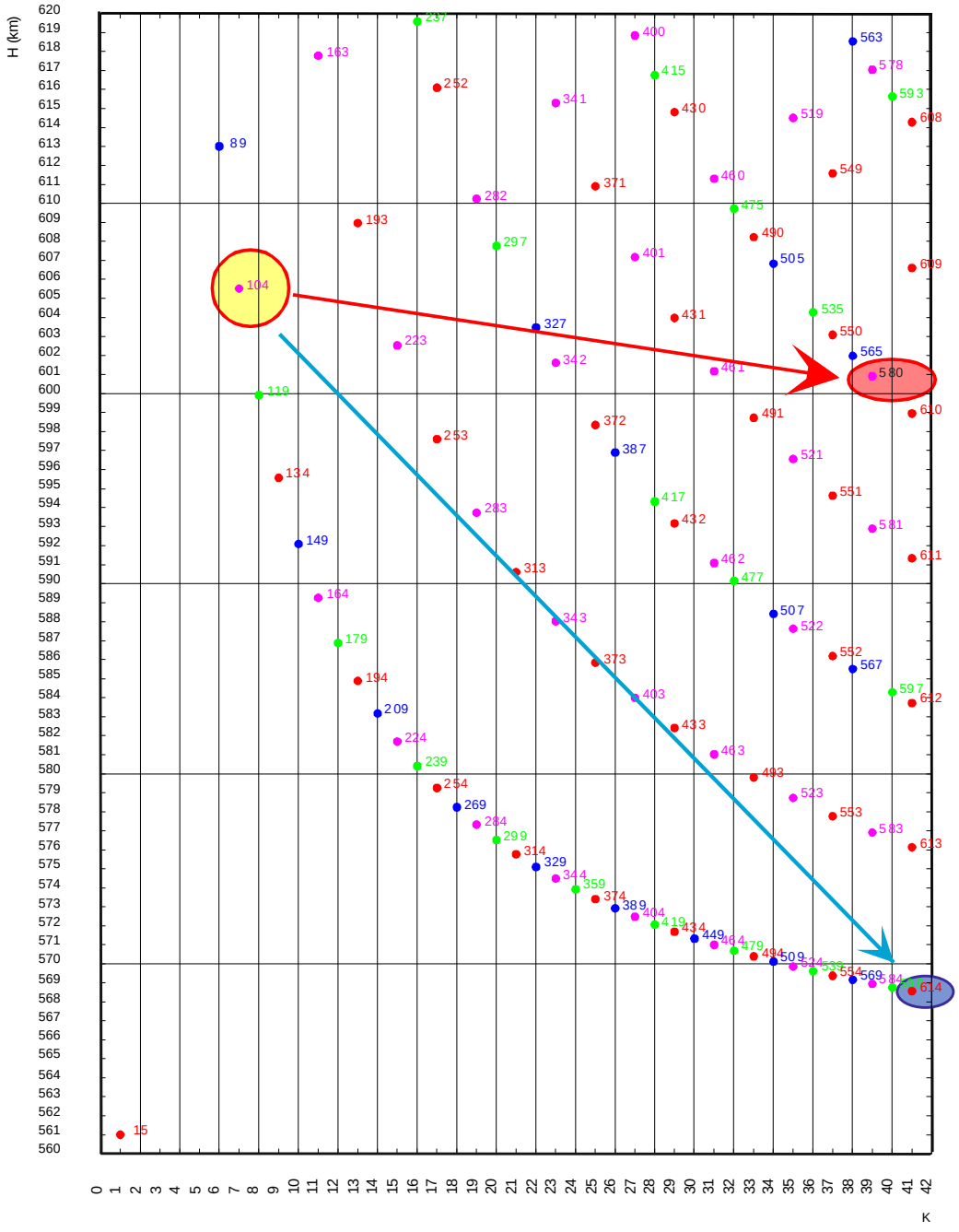


Bild 28-36: Beispiel für einen Treibstoff-geringen Übergang zwischen zwei reproduzierbaren kreisnahen sonnensynchronen Bahnen

Berechnet sind die Geschwindigkeitsinkremente in Halbachse und Inklination, das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement und der Treibstoffbedarf für einen Satelliten mit Masse m=520 kg.

Bei Vergleich des Treibstoffbedarfs für Halbachsen- und Inklinationsänderung in Tabelle 28-23 $(\Delta V_a : \Delta V_i = 2.4865 : 2.3340)$ und Tabelle 28-24 $(\Delta V_a : \Delta V_i = 19.990 : 19.027)$ fällt auf, dass die Werte für Halbachsenkorrektur und Inklinationskorrektur jeweils größenordnungsmäßig sehr ähnlich sind. Diese Beobachtung trifft generell auf den Manöverbedarf zwischen (kreisförmigen) reproduzierbaren sonnensynchronen Satellitenbahnen zu. ◄

Die letztere Beobachtung führt zu der sehr interessanten heuristischen Aussage:

- *Bahnmanöver zwischen verschiedenen sonnensynchronen Bahnen sind wegen der Anpassung der Inklination etwa doppelt so teuer wie Manöver zwischen beliebigen Bahnen, bei denen nur ein Bahnparameter geändert werden muss. Die Manöver für Bahnhöhenmanöver und Inklinationsmanöver sind in diesem Fall etwa gleich teuer.* ◄

28.8.7 Radiale Geschwindigkeit einer sonnensynchronen Bahn

Für gewisse bahnanalytische Untersuchungen ist das Geschwindigkeitsverhalten einer sonnensynchronen Bahn von Interesse. In Bild 28-37 ist der Verlauf einer formstabilen sonnensynchronen Bahn über einen drakonitischen Umlauf dargestellt.

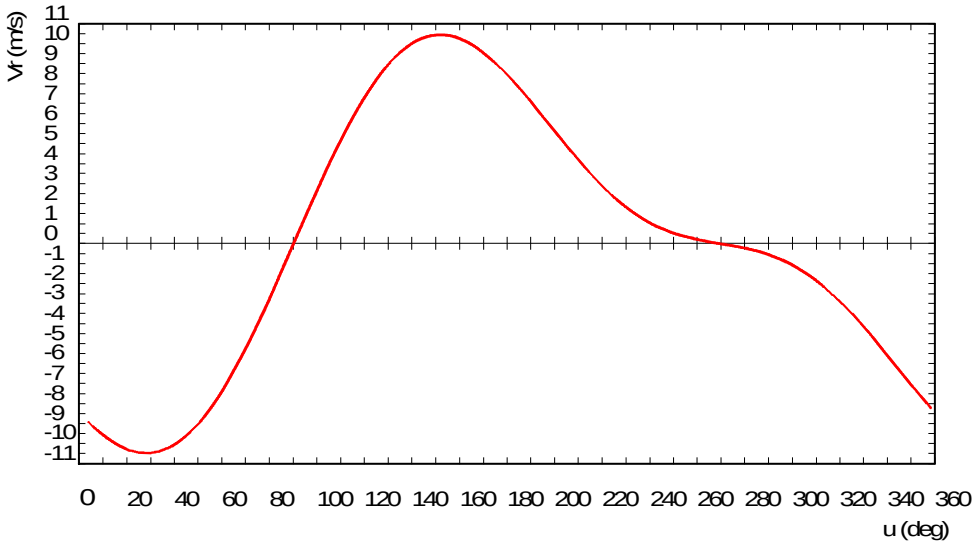


Bild 28-37: Verlauf der radialen Geschwindigkeit $V_R = \dot{r}$ für die formstabile sonnensynchrone Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\overline{a} = 6769.14\,\text{km}$ unter Berücksichtigung der Bewegungseinflüsse durch J2, J3, J4 über einen drakonitischen Umlauf

28.9 Reproduzierbarkeit in der Zeit

Die Reproduzierbarkeit einer Subsatellitenbahn konnte im Rahmen der drakonitischen Bewegung hergeleitet werden (Abschnitt 23.9 ab Seite 200). Wegen des Bezugs der Zeit zur Sonne liegt es nahe, dass eine Reproduzierbarkeit in Zeit im Rahmen der sonnensynodischen Bewegung definiert werden kann. Von besonderem Interesse ist eine Verknüpfung von Reproduzierbarkeit in Subsatellitenbahn und Zeit.

28.9.1 Der Saros-Zyklus

Aus der Definition der (sonnen-) synodischen Umlaufzeit (28.124) und dem Zusammenhang von mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Ortssonnenzeit (28.221) folgt

$$\left|T\left(t_0+\overline{P_S}\right)-T\left(t_0\right)\right|=\left|\tau\left(t_0+\overline{P_S}\right)-\tau\left(t_0\right)\right|\frac{24^h}{360°}=24^h \quad . \tag{28.280}$$

Nach einem mittleren sonnensynodischen Umlauf wiederholt sich die mittlere Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt. Mit (28.178) $T=t+\lambda$ zeigt der Ausdruck

$$\left|\overline{P_S}+\lambda\left(t_0+\overline{P_S}\right)-\lambda\left(t_0\right)\right|=24^h \quad , \tag{28.281}$$

dass nach einem synodischen Umlauf nicht notwendig eine Reproduzierbarkeit des Subsatellitenpunktes vorliegt, denn im Allgemeinen ist $\lambda\left(t_0+\overline{P_S}\right)\neq\lambda\left(t_0\right)$.

Interessanter ist es zu verlangen, dass sich der Satellit nach einer bestimmten Anzahl von synodischen Umläufen wieder zur selben Ortszeit *T* im aufsteigenden Knoten befinden soll. Dann wird die mittlere Satellitenbahn so durchlaufen, dass jeder Breitenkreis (bei exzentrischen Bahnen zumindest näherungsweise) wieder zur selben Ortszeit überflogen wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Satellit eine ganzzahlige Anzahl N_d von mittleren drakonitischen und eine ganzzahlige Anzahl N_S von mittleren synodischen Umläufen durchlaufen hat. In diesem Fall muss gelten

$$N_d\,\overline{P_d}=N_S\,\overline{P_S} \quad . \tag{28.282}$$

Diese Beziehung kann als der *Saros-Zyklus von Satellitenbahnen* bezeichnet werden[1].

Die mittlere drakonitische und die mittlere (sonnen-) synodische Umlaufzeit sind im Fall des Saros-Zyklus kommensurabel. Für die sonnensynodische Bewegung folgt aus Beziehung (28.134) (auf Seite 425) für die mittlere Knotensonnendrift die allgemeingültige Zuordnung

$$\dot{\tau}_{\Omega s}=\dot{\Omega}_s-n_\odot=\overline{n_s}-\overline{n_d}=2\pi\left(\frac{1}{\overline{P_s}}-\frac{1}{\overline{P_d}}\right) \quad . \tag{28.283}$$

Die mittlere Knotensonnenverschiebung (28.231) (auf Seite 458) führt mit der Relation (28.282) auf die Beziehung

$$\overline{\Delta\tau_\Omega}=\dot{\tau}_{\Omega s}\,\overline{P_d}=2\pi\left(\frac{N_S}{N_d}-1\right) \quad . \tag{28.284}$$

Die aus dieser Beziehung folgende Relation

$$\frac{N_S}{N_d}=1+\frac{\overline{\Delta\tau_\Omega}}{2\pi}=1+\frac{\dot{\Omega}_s-n_\odot}{\overline{n_d}}=1+\frac{\dot{\tau}_{\Omega s}}{\overline{n_d}}=\frac{\overline{n_S}}{\overline{n_d}} \tag{28.285}$$

erlaubt entsprechend Bild 28-38 eine Übersicht über geeignete Zahlenpaare $N_S:N_d$, um sinnvolle Satellitenbahnen aussuchen zu können, welche sich mit dem Saros-Zyklus (28.282) beschreiben lassen. Es muss beachtet werden, dass die Relation $N_S:N_d$ so gewählt werden muss, dass die Einschränkung (28.234) (auf Seite 459) für erdnahe Bahnen erfüllt werden kann:

$$0.994444\le\frac{N_S}{N_d}\le 1.001389 \quad . \tag{28.286}$$

[1] Der originale auf die Chaldäer, dann Babylonier und vor allem Griechen zurückgehende Saroszyklus hat die Zahlenwerte $N_S=223, N_d=242$. Es ist $N_S:N_d=0.9214876$, wobei für den Mond $\overline{\Delta\tau_\Omega}\approx -25°.3$.

Anmerkung: Der hier untersuchte Fall ist eine wesentliche Erweiterung des Begriffes der sonnensynchronen Bewegung, die wegen Beziehung (28.256) ein wichtiger Spezialfall ist. Diese ist, wie die Beziehung (28.259) zeigt, stets in der Zeit reproduzierbar. ◄

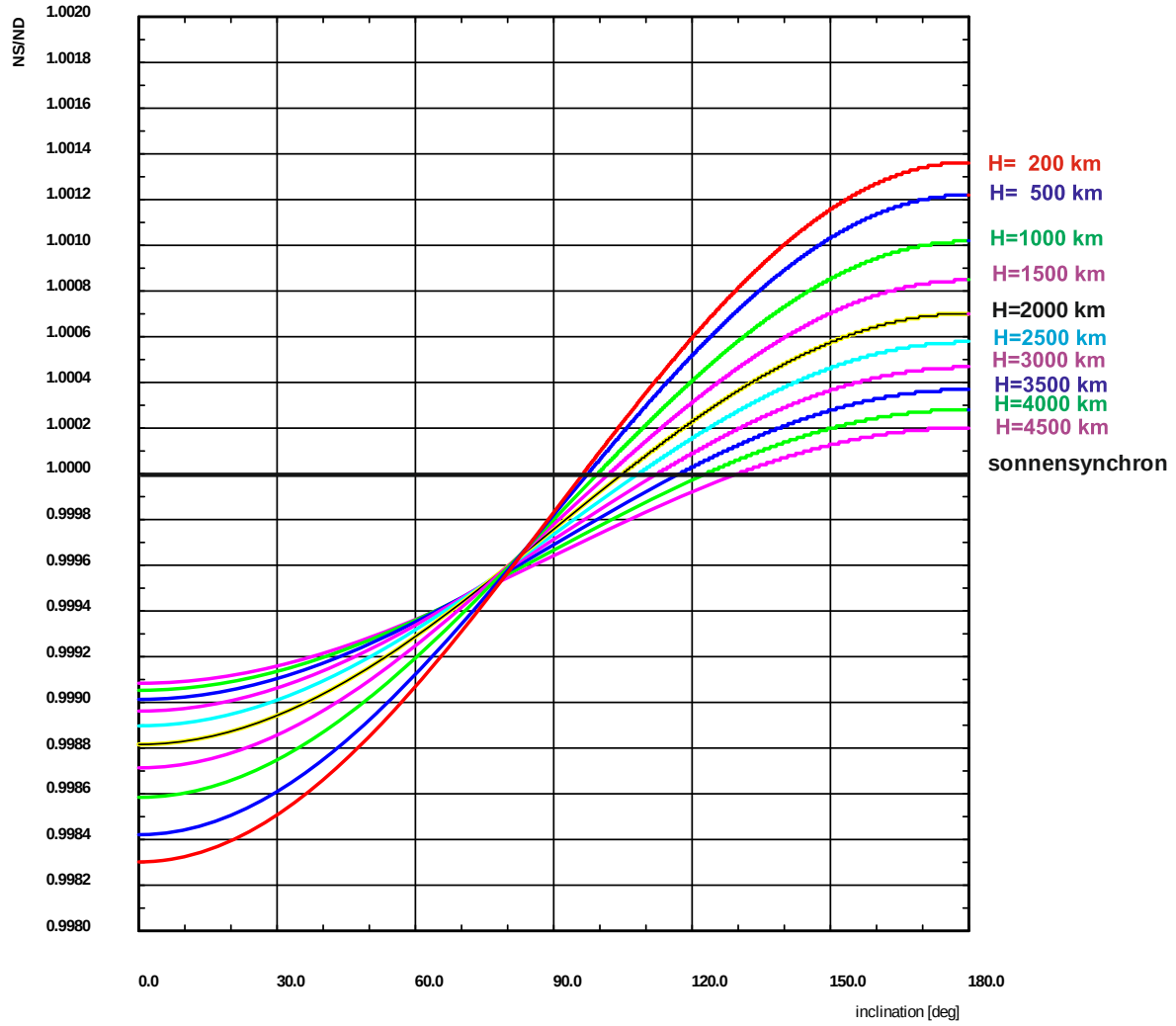


Bild 28-38: Die Relationen N_S / N_d des Saroszyklus über alle Inklinationen für verschiedene Bahnhöhen für kreisförmige Satellitenbahnen. Die sonnensynchrone Bahn mit $N_S / N_d = 1$ ist markiert.

28.9.2 Bahnauswahl mit Saros-Zyklus

Nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen durchlaufe ein Satellit den aufsteigenden Knoten seiner Bahn wieder zur selben mittleren Sonnenzeit. Welche Bahnelemente können dadurch festgelegt werden?

Es seien N_d drakonitische Umläufe vergangen. Nach dem Saros-Zyklus (28.282) müssen dann genau N_S sonnensynodische Umläufe zurückgelegt worden sein. Die mittlere Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ kann daher aus Formel (28.284) berechnet werden. Somit wird die Lösung dieser Aufgabe auf die Bahnauswahl in Abschnitt 28.7.4.2 auf Seite 468 zurückgeführt. Das Verfahren ist daher geeignet in erster Linie die große Bahnhalbachse zu bestim-

men. Die Berechnung der anderen Bahnparameter $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ wird wegen der Empfindlichkeit des Verfahrens im vorliegenden Zusammenhang nicht untersucht.

BEISPIEL: Eine kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung $i = 30°$ werde nach 300 drakonitischen und 299 synodischen Umläufen in der Zeit reproduziert. In welcher Bahnhöhe muss der Satellit fliegen?

Die mittlere Knotensonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.2$, erfüllt somit die Einschränkung (28.234) (auf Seite 459). Die Iteration mit der überlagerten Funktion (28.242) ergibt die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 46416.337\,\text{km}$ und die mittlere Bahnhöhe $\bar{H} = 40038.2\,\text{km}$. Bild 28-33 zeigt, dass es in dieser Bahnhöhe keine sonnensynchronen Bahnen geben kann. Der Sonnenbezug einer Bahn muss daher über die Reproduzierbarkeit in der Zeit hergestellt werden. Die Kontrolle der mittleren Knotenlängenverschiebung mit dem ersten Teil der Formel (28.284) ergibt -1°.144828244770. Der Fehler zum Eingabewert beträgt etwa $3'.3$.

Wird die Bahn unter der Neigung $i = 94°$ gewünscht, ergibt sich $\bar{a}_0 = 46681.562\,\text{km}$. Der Kontrollwert beträgt -1°.144355529833, also mit nahezu dem gleichen Fehler. ◄

Anmerkung: Die Iteration zur Berechnung der Halbachse rechnet mit einer absoluten Genauigkeit in der überlagerten Funktion von 10^{-11}. Dort wird somit der Eingabewert entsprechend der Rechengenauigkeit exakt reproduziert. Entsprechend ist das Ergebnis erwartbar genau. Die Kontrolle mit der Berechnung der mittleren Knotensonnenverschiebung in Formel (28.284) ergibt jedoch einen abweichenden mittleren Wert, ein Effekt der auch im Zusammenhang mit der Sonnensynodischen Umlaufzeit beobachtet wurde. Er muss im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse sorgfältig beachtet werden. Ursächlich ist die Tatsache, dass die iterative Berechnung der großen Bahnhalbachse mit der überlagerten Funktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t + P_d\right) - \tau\left(t\right) - \overline{\Delta\tau_\Omega}\right] = 0 \tag{28.287}$$

bei vorgegebener mittlerer Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ erfolgen muss. Diese Funktion ist von der jeweiligen Anfangszeit t_0 abhängig, wogegen die mittlere Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ zeitunabhängig ist. Diese Problematik ist grundsätzlich im Zusammenhang mit Untersuchungen der sonnensynodischen Bewegung von Satelliten. ◄

28.9.3 Reproduzierbarkeit in Zeit und Subsatellitenbahn

Eine weitere Verschärfung des Begriffs der Reproduzierbarkeit kann erreicht werden, wenn Reproduzierbarkeit in der Zeit und in der Subsatellitenbahn (Spurreproduzierbarkeit) gemeinsam gefordert werden[1]. Bahnfamilien mit dieser Eigenschaft müssen daher mit den Definitionen (28.270) und (28.282) die Bedingungen

$$\begin{aligned} N_K\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} &= -2\,\pi\,K \\ N_S\,\overline{P_S} &= N_d\,\overline{P_d} \end{aligned} \tag{28.288}$$

[1] Diese Überlegungen wurden erstmals vorgestellt in JOCHIM, E. F. [1983]

erfüllen (hier wird die Knotensonnenverschiebung in Radian angenommen). Diese Bedingungen sind sicherlich für reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen (vgl. Abschnitt 28.8.4) erfüllt. Für alle sonstigen Bahnfamilien kann dagegen mit Formel (28.226) (auf Seite 455) die Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\ \overline{P_d} = \overline{\Delta\tau_\Omega} - \frac{2\pi}{86400s}\overline{P_d} \tag{28.289}$$

gebildet werden. Mit $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ aus (28.284) ergeben sich schließlich die mittlere drakonitische Umlaufzeit und die säkulare Knotenlängendrift

$$\begin{aligned} \overline{P_d} &= 86400s\left(\frac{N_S}{N_d} - 1 + \frac{K}{N_K}\right) \\ \dot{\lambda}_{\Omega s} &= \frac{2\pi}{86400s}\frac{1}{\left[1 + \frac{N_K}{K}\left(\frac{N_S}{N_d} - 1\right)\right]} = -\frac{K}{N_K}\frac{2\pi}{\overline{P_d}} \end{aligned} \quad . \tag{28.290}$$

Damit kann die Aufgabe einer Bahnauswahl der beiden *Kepler*schen Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ bei Vorgabe der mittleren Epocheexzentrizität $\overline{e}_0$ auf die Lösung bei vorgegebener mittlerer drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift in Abschnitt 23.6 (ab Seite 184) zurückgeführt werden.

Es ist bemerkenswert, dass nicht die absoluten Wiederholungszahlen $\left(K, N_K, N_S, N_d\right)$, sondern nur die Relationen K / N_K und N_S / N_d berücksichtigt werden müssen.

Bevor eine Bahnauswahl mit dieser Methodik gestartet werden kann, sollte daher die Relation N_S / N_d entsprechend Bild 28-38 (auf Seite 494) überprüft werden. Das Bild zeigt einen sehr kleinen Umfang an möglichen Zahlenwerten, der jedoch gegenüber der Darstellung für höhere Bahnen erheblich erweitert werden kann. Den Anfangswerten entspricht die mittlere Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = 360°\left(N_S / N_d - 1\right)$ aus Formel (28.284). Vergleich mit den Grenzwerten (28.234) erlaubt eine Aussage, ob mit den Eingabewerten überhaupt eine Lösung erwartet werden darf. Entsprechend kann die mittlere Knotenlängenverschiebung mit der ersten der Formeln (28.288) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360°\left(K / N_K\right)$ auf Sinnfälligkeit überprüft werden. Beide Zahlenwerte werden im Verlauf der iterativen Bestimmung der Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ angepasst.

BEISPIEL 1: Eine Subsatellitenbahn werde nach 250 knotenbezogenen Umläufen und 16 Knotenumläufen in der Spur reproduziert. Außerdem bestehe Reproduzierbarkeit in der Zeit nach 999 synodischen und 1000 drakonitischen Umläufen. Die Satellitenbahn sei kreisförmig. Bestimme $\overline{a}_0$ und $\overline{i}_0$.

Aus den Formeln (28.290) folgen mit den Perioden $K / N_K = 16 / 251 = 0.063745$, entsprechend der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.948207 / \overline{P_d}$,

sowie $N_S / N_d = 999/1000 = 0.999$ entsprechend der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -0°.36/\overline{P_d}$. Mit den Formeln (28.290) ergeben sich die zur Anwendung des Verfahrens in Abschnitt 23.6 benötigten Ausdrücke $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -365°.73751 /d, $\overline{P_d} = 5421.16972$ sec .

Zur Durchführung der Iteration werden folgende Genauigkeitsgrenzen verwendet:

$\Delta a = 10^{-5}$ km, Δi=0°.0001.

Das Verfahren ergibt die Lösung $\bar{a}_0 = 6671.553$ km, $\bar{i}_0 = 56°.05964242$.

Mit diesem Ergebnis wird zur Kontrolle die Knotensonnenverschiebung berechnet: $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ = -0°.359998693/$\overline{P_d}$, die Genauigkeit beträgt 10^{-5} Bogensekunden.

Die mittlere Knotenlängenverschiebung kann exakt reproduziert werden. ◄

BEISPIEL 2: Um die Empfindlichkeit des Verfahrens zu demonstrieren wird eine extrem hohe Bahn untersucht. Der Bahnknoten werde nach *K*=2923 Knotenumläufen entsprechend $N_K = 2381$ drakonitischen Umläufen des Satelliten auf einer kreisförmigen Bahn. Die mittlere Sonnenzeit werde reproduziert nach 299 synodischen Umläufen entsprechend 300 drakonitischen Umläufen.

Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -441°.94876102/\overline{P_d}$ mit $K / N_K = 1.227635447$, die mittlere Knotensonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -1°.2/\overline{P_d}$.

Die Lösung lautet $\bar{a}_0 = 48343.009$ km, $\bar{i}_0 = 131°.34407149$.

Zur Kontrolle wird die Reproduktion der Bodenspur berechnet, wobei sich eine durch Rundungsfehler zu begründende Abweichung ergibt: $K / N_K = 4309/3510 = 1.227635328$. ◄

28.10 Schatten

In diesem Abschnitt werden Bedingungen aufgestellt, wann sich ein Satellit im Schatten seines Zentralkörpers befindet, Formeln zur Berechnung der Schattenkontaktzeiten für unterschiedliche Genauigkeitsanforderungen und der Schattengrenze auf dem Zentralkörper hergeleitet sowie die Gültigkeit der Schattenmodelle und Berechnungsmethoden abgeschätzt.

Während das Kegelmodell des Schattens – der Zentralschatten schließt sich von der Sonne aus gesehen „hinter“ dem Zentralkörper – das exakte Modell ist, genügt für viele Berechnungen, etwa bei kreisnahen und niedrigen Bahnen, für langfristige Aussagen z. B. Verlauf des Schattenfaktors oder zur zeichnerischen Darstellung der Schattengrenze das Zylindermodell (Abschnitt 28.10.1.3). Der Schattenzylinder schließt den Schattenkegel ein. Schattenberechnungen mit dem Zylindermodell erfassen somit den ungünstigsten Fall. Sie sind gegenüber Berechnungen mit dem Kegelmodell etwas vereinfacht und können auch als Ausgangsnäherung für hochgenaue Schattenberechnungen verwendet werden, die nur iterativ behandelt werden können.

Die Bedingung für Schatten kann in einer einzigen allgemeingültigen Beziehung zusammengefasst werden, der Schattengleichung (in Abschnitt 28.10.2).

Die Berechnung der Schattenkontaktzeiten wird auf die Sonnenrichtung bezogen, somit die synodische sonnenbezogene Satellitenbewegung zugrunde gelegt. In Konsequenz dieses Gedankens werden Formeln entwickelt, die übersichtlicher und leichter zu handhaben sind als

sie bei anderem Bezug (auf das Perizentrum oder einen Knoten) entwickelt worden sind (in Abschnitt 28.10.3).

Bei erdfernen Bahnen, etwa geosynchronen Bahnen, beträgt der Fehler in der Berechnung der Schattenkontaktzeiten bei Verwendung des Zylindermodells an Stelle des Kernschattenmodells etwa 3 %, bei erdnahen Bahnen weniger als 0.5 %.

Auch der Einfluss der Abplattung des Zentralkörpers wird abgeschätzt. Zur exakten rechnerischen Berücksichtigung der Abplattung werden Formeln benötigt, die im Zusammenhang der Beobachtung einer abgeplatteten Oberfläche (in Kapitel 37, Band V) hergeleitet werden. Bei Vernachlässigung der Erdabplattung beträgt der Fehler in der Schattenberechnung für erdnahe Bahnen etwa 0.5 %. Er nimmt mit Distanz vom Erdmittelpunkt ab. In der Berechnung der Schattengrenze bewirkt die Vernachlässigung der Erdabplattung einen maximalen Fehler von etwa 500 m auf der Erdoberfläche.

Für missionsanalytische Zwecke ist der prozentuale Anteil von Schatten pro Umlauf, ausgedrückt im Schattenfaktor, bisweilen von Interesse (Abschnitt 28.10.4).

Im Rahmen der Erdbeobachtung sind wichtige Anwendungen der Schattenberechnungen die Beobachtung von Schattenzonen und Dämmerungsgebieten vom Satelliten aus, für die auch die Kenntnis des Terminators grundlegend ist (in den Abschnitten 28.10.5 und 28.10.7).

28.10.1 Die Schattenmodelle

Schattenein - bzw. -austrittszeiten sind nicht mit beliebiger Genauigkeit als Zeitpunkte beobachtbar. Einerseits sind Satelliten gewöhnlich unregelmäßig geformte Körper mit ungleichförmiger Albedo, die Schattengrenze durch den Zentralkörper andererseits durch eine Atmosphäre (Erde) bzw. eine unregelmäßige Oberfläche (Krater und Maria auf dem Mond) etwas verwischt. Wohl jeder hat schon den „szintillierenden“ Schatteneintritt eines visuell beobachtbaren Erdsatelliten gesehen. Somit lassen sich verschiedene Schattenmodelle zumindest für Satellitenbahnen mit kleiner Bahnhalbachse rechtfertigen. Ein einfacheres Modell hat den Vorteil eines geringeren Rechenaufwandes und genügt für Abschätzungen. In diesem Abschnitt werden die geometrischen Bedingungen für eine Satellitenposition in oder außerhalb eines Schattens durch den Zentralkörper in den am häufigsten verwendeten Schattenmodellen hergeleitet.

28.10.1.1 Das Kegelmodell für Zentralschatten

Die Sonne wird als ein Himmelskörper aufgefaßt, dessen endliche Ausdehnung vom schattenspendenden Zentralkörper als endliche Fläche beobachtet werden kann. Ausgehend vom Rand der Sonne wird ein Schattenkegel gebildet, der sich „hinter“ dem Schattenspender schließt. Dieses in Bild 28-39 dargestellte Schattenmodell entspricht der Wirklichkeit am meisten. Es liegt auch der Theorie der Sonnen- und Mondfinsternisberechnungen zugrunde.

Seien $\odot$ das Sonnenzentrum, $\overset{+}{\bigcirc}$ das Erdzentrum (bzw. das des betreffenden Zentralkörpers), *S* der momentane Ort des Satelliten, *A* ein Randpunkt der Sonnenoberfläche, *B* der Erde, *K* der Scheitel des Sonnenkegels („Gegensonne“), $R_\odot$ der Radius der Sonne, *R* der eventuell um die Atmosphärenhöhe *H* vergrößerte und die Abplattung berücksichtigende Radius des Zentralkörpers in der Schnittebene durch $\odot \overset{+}{\bigcirc} K$, $r_\odot$ die wahre geozentrische Distanz des Sonnenmittelpunktes, so ist $y_K = \overline{K\overset{+}{\bigcirc}}$ die geozentrische Distanz der Gegensonne K, $r_z = \overline{AB}$ der Abstand der Randpunkte auf Sonne und Erde, *z* der Abstand von *B* zu K . Der

halbe Öffnungswinkel β des Schattenkegels errechnet sich in der Ebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt aus

$$\sin\beta = \frac{R_\odot}{r_\odot + y_K} = \frac{R}{y_K} \quad . \tag{28.291}$$

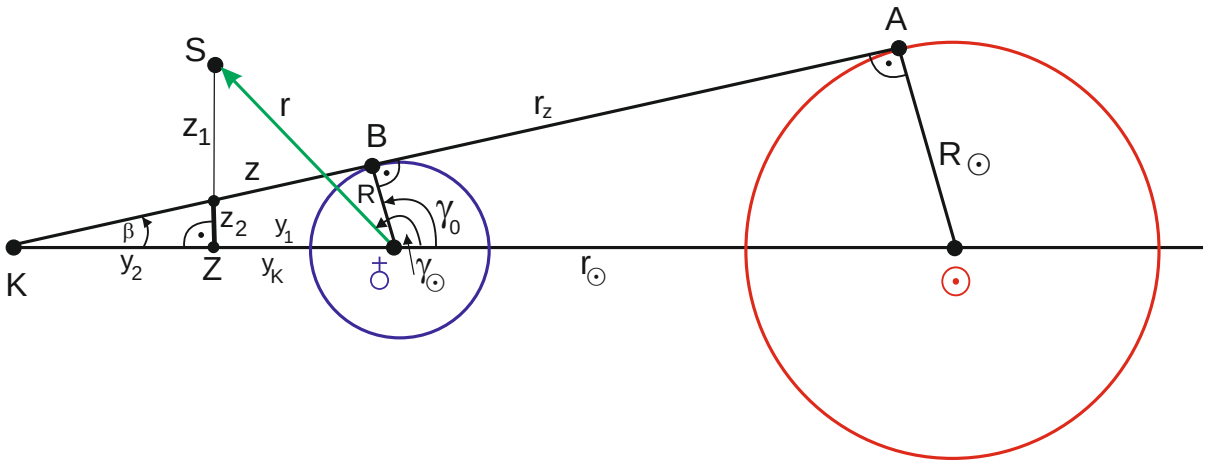


Bild 28-39: Zur Berechnung des Kernschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt.

Die Berechnung ist eindeutig, da offenbar stets $\beta < 90°$. Die Gegensonne K hat vom Erdmittelpunkt daher den Abstand

$$y_K = \frac{r_\odot R}{R_\odot - R} \quad , \tag{28.292}$$

somit ist

$$\sin\beta = \frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad . \tag{28.293}$$

Um die Relation des Satellitenortes zum Schattenkegel zu erkennen, wird mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}, \mathbf{r}_\odot$ von Satellit und Sonne bzw. mit den äquatorialen Winkelkoordinaten der Sonne $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ und des Satelliten (α, δ) die geozentrische Elongation γ des Satelliten zur Sonne (mit $r = |\mathbf{r}|, r_\odot = |\mathbf{r}_\odot|$) berechnet:

$$\cos\gamma_\odot = \cos(\alpha - \alpha_\odot)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_\odot}{r\,r_\odot} \quad . \tag{28.294}$$

Als erste Bedingung für Schatten muss nach Bild 28-39 auf Seite 499 $\gamma_\odot$ größer als der Grenzwinkel γ_0, also

$$\cos\gamma_\odot < \cos\gamma_0 = -\sin\beta = -\frac{R}{y_K} \tag{28.295}$$

erfüllt sein. Mit dem momentanen Radius r des Satelliten hat der Satellit den Abstand z_1 zur Achse $K\odot$ des Schattenkegels

$$z_1 \;=\; \overline{SZ} \;=\; r\sin\gamma_\odot \;=\; r\sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \quad . \tag{28.296}$$

An dieser Stelle hat der Querschnitt des Schattenkegels den Radius z_2, der sich mit den Beziehungen ($y_1 = \overline{\overset{+}{\bigcirc}Z},\; y_2 = \overline{ZK},\; z = \overline{BK}$) aus

$$\begin{aligned} y_2 &= y_K - y_1 = y_K + r\cos\gamma_\odot \\ \tan\beta &= \frac{z_2}{y_2} = \frac{R}{z} \\ z &= \sqrt{y_K^2 - R^2} \\ z_2 &= \frac{\left(y_K + r\cos\gamma\right) R}{\sqrt{y_K^2 - R^2}} \end{aligned} \tag{28.297}$$

ergibt. Der Satellit befindet sich im Schatten, wenn die beiden Bedingungen

$$\cos\gamma_\odot < -\frac{R}{y_K} \quad , \quad z_1 \le z_2 \tag{28.298}$$

erfüllt sind. Er tritt in den Schatten ein oder aus, wenn

$$z_1 \;=\; z_2 \tag{28.299}$$

gilt. Diese Bedingung führt mit den Formeln (28.296) und (28.297) notwendig auf

$$r\sin\gamma_\odot\, S_1\sqrt{y_K^2 - R^2} \;=\; R\left(y_K + r\cos\gamma\right) \quad . \tag{28.300}$$

Auflösung nach $\cos\gamma$ ergibt

$$\cos\gamma_\odot \;=\; -\frac{R^2}{r\,y_K} - \frac{z}{r\,y_K}\sqrt{r^2 - R^2} \;<\; -\frac{R^2}{r\,y_K} \;<\; -\frac{R}{y_K} \quad ,$$

wobei wegen $R < r < y_K$ und wegen der Bedingung (28.295) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen darf. Somit führt dieser Ausdruck unmittelbar auf die *Kernschattengleichung*

$$S_K \;=\; \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_\odot + \frac{R\left(R_\odot - R\right)}{r_\odot} + \sqrt{r^2 - R^2}\,\sqrt{1 - \frac{\left(R_\odot - R\right)^2}{r_\odot^2}}\;\right] \quad . \tag{28.301}$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Kernschatten, wenn die Kernschattengleichung negativ ist ($S_K < 0$),*
- *außerhalb des Kernschattens bei positiver Kernschattengleichung ($S_K > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schatteneinein - oder -austritt), wenn die Kernschattengleichung verschwindet ($S_K = 0$).*

28.10.1.2 Das Kegelmodell für Halbschatten

Die Bedingung für Halbschatten wird ganz ähnlich der Bedingung für den Kernschatten hergeleitet. Nach Bild 28-40 sei A ein Randpunkt der Sonne, B der Erde. Im Fall des Halbschattens schneidet eine Gerade durch A und B die Verbindungslinie Sonne- Erdmittelpunkt zwischen Erde und Sonne im Punkt C. Dieser hat vom Erdmittelpunkt die Entfernung $y_H = \overline{C\,\oplus}$. Ferner sei der Punkt Z die Projektion des momentanen Satellitenortes *S* auf die Gerade $\odot\,\oplus$. Der halbe Öffnungswinkel β des Halbschattenkegels mit Spitze in C wird aus

$$\sin\beta \;=\; \frac{R_\odot}{r_\odot - y_H} \;=\; \frac{R}{y_H} \tag{28.302}$$

berechnet. Der Abstand $y_H = \overline{C\,\oplus}$ kann somit aus

$$y_H \;=\; \frac{r_\odot\, R}{R_\odot + R} \tag{28.303}$$

berechnet werden, somit auch

$$\sin\beta \;=\; \frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad . \tag{28.304}$$

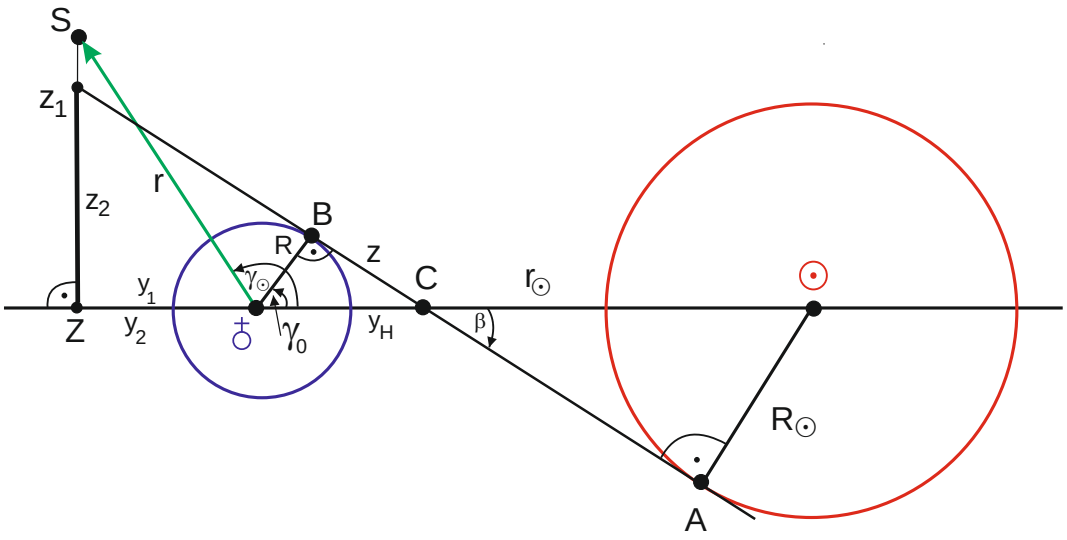


Bild 28-40: Zur Berechnung des Halbschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen, Erd- und Satellitenmittelpunkt.

Die geozentrische Elongation $\gamma_\odot$ des Satelliten zur Sonne ist auch in diesem Fall mit Formel (28.294) bekannt. Mit dem Grenzwinkel $\gamma_0 = \sphericalangle(C\,\oplus\,B)$ aus

$$\cos\gamma_0 \;=\; \frac{R}{y_H} \tag{28.305}$$

folgt nach Bild 28-40 die erste Bedingung, nach der im Fall von Halbschatten $\gamma_\odot > \gamma_0$ analog der Beziehung (28.295)

$$\cos\gamma_\odot \;<\; \cos\gamma_0 \;=\; \frac{R}{y_K} \tag{28.306}$$

erfüllt sein muss. Die momentane Position des Satelliten hat von der Zentrallinie des Schattenkegels wie in Formel (28.296) auf S. 525 die Distanz

$$z_1 \;=\; \overline{SZ} \;=\; r\sin\gamma_\odot \quad , \tag{28.307}$$

der Schattenkegel den Radius z_2, der aus den Beziehungen ($y_1 = \overline{\pm\odot Z}$, $y_2 = \overline{CZ}$, $z = \overline{CB}$)

$$\begin{aligned} y_2 &= y_H + y_1 = y_H - r\cos\gamma_\odot \\ \tan\beta &= \frac{z_2}{y_2} = \frac{R}{z} \\ z &= \sqrt{y_H^2 - R^2} \\ z_2 &= \frac{\left(y_H - r\cos\gamma_\odot\right) R}{\sqrt{y_H^2 - R^2}} \end{aligned} \tag{28.308}$$

berechnet werden kann. Der Satellit befindet sich also im Halbschatten, wenn die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos\gamma_\odot &< \frac{R}{y_H} \\ z_1 &\le z_2 \end{aligned} \tag{28.309}$$

erfüllt sind. Die Bedingung $z_1 = z_2$ liefert im Fall des Halbschattens mit den Formeln (28.303) und (28.305) notwendig die Bedingung

$$r\sin\gamma_\odot \sqrt{y_H^2 - R^2} \;=\; R\left(y_H - r\cos\gamma\right) \quad , \tag{28.310}$$

deren Auflösung nach $\cos\gamma_\odot$

$$\cos\gamma_\odot \;=\; \frac{R^2}{r\,y_H} - \frac{1}{r\,y_H}\sqrt{r^2 - R^2}\,\sqrt{y_H^2 - R^2} \;<\; \frac{R^2}{r\,y_H} \;<\; \frac{R}{y_H}$$

ergibt. Hier darf wegen $R < r < y_H$ und wegen der Bedingung (28.306) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen. Die *Halbschattengleichung* lautet daher

$$S_H \;=\; \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_\odot - \frac{R\left(R_\odot + R\right)}{r_\odot} + \sqrt{r^2 - R^2}\,\sqrt{1 - \frac{\left(R_\odot + R\right)^2}{r_\odot^2}} \;\right] \quad . \tag{28.311}$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Halbschatten, wenn die Halbschattengleichung negativ ist ($S_H < 0$),*
- *außerhalb des Halbschattens bei positiver Halbschattengleichung ($S_H > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Halbschattengleichung verschwindet ($S_H = 0$).*

28.10.1.3 Das Zylindermodell

Bei diesem wesentlich vereinfachten Schattenmodell wird mit Bild 28-41 angenommen, dass die Sonne denselben Durchmesser wie der Zentralkörper hat. Der Schatten ist somit ein Zylinder, dessen Querschnitt den konstanten Radius R_E hat. Somit muss die Strecke z_2 nicht wie in den genauen Modellen ständig neu berechnet werden. Vielmehr gilt stets

$$z_2 = R_E \quad \text{(Zylindermodell)} \quad .$$

Mit bekannter Position des Satelliten $r\left[\alpha, \delta\right]$ und geozentrischer Richtung der Sonne $\left[\alpha_\odot, \delta_\odot\right]$ wird der Abstand z_1 des Satellitenortes zur Schattenachse mit Zentralwinkel $\gamma_\odot$ mit Formel (28.296) berechnet. Der Satellit befindet sich demnach im Zylinderschatten, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos\gamma_\odot &< 0 \\ z_1 &\le R_E \end{aligned} \tag{28.312}$$

erfüllt sind. Die Bedingung für Schattenein - bzw. - austritt $z_1 = z_2$ führt im Fall des Zylindermodells somit notwendig auf

$$r\sin\gamma_\odot = R_E \quad , \tag{28.313}$$

woraus sich

$$r\cos\gamma_\odot = -\sqrt{r^2 - R_E^2} < 0$$

ergibt.

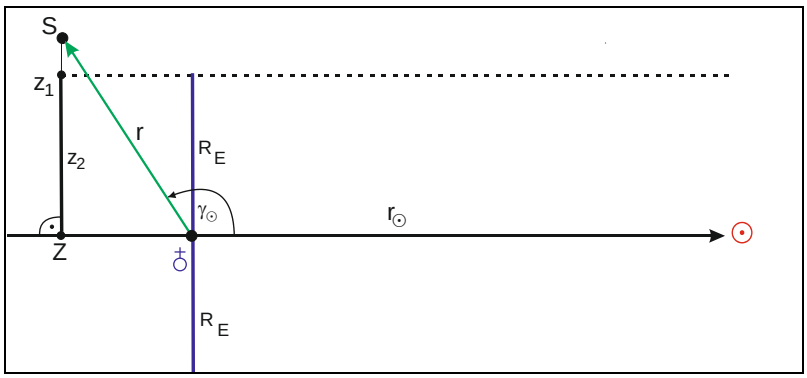


Bild 28-41: Das Zylindermodell für Schattenberechnungen

Hier kann wegen der Bedingung (28.312) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen. Mit dieser Gleichung kann die *Zylinderschattengleichung* gebildet werden:

$$S_Z = \frac{1}{R_E}\left[r\cos\gamma_\odot + \sqrt{r^2 - R_E^2} \right] \quad . \tag{28.314}$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Zylinderschatten, wenn die Zylinderschattengleichung negativ ist ($S_Z < 0$),*
- *außerhalb des Zylinderschattens bei positiver Zylinderschattengleichung ($S_Z > 0$),*

- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Zylinderschattengleichung verschwindet ($S_Z = 0$).*

28.10.2 Die Schattengleichung

Die drei Schattengleichungen (28.301), (28.311) und (28.314) wurden so gewählt, dass sie die einheitliche (für das automatische Rechnen geeignete) Darstellung (28.315) erlauben. Wegen der Division durch den Radius *R* an der Stelle der Beobachtung ist die Schattengleichung dimensionslos, der maximale Betrag nahe der Einheit. Der Fall des Zylinderschattens entspricht der Position der Sonne in unendlicher Entfernung ($r_\odot \to \infty$). Im Fall des Zylinderschattens wird gewöhnlich die Erdabplattung vernachlässigt.

$$S = \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_\odot + \frac{\sigma_{SH}\, R\left(R_\odot - \sigma_{SH} R\right)}{r_\odot} + \sqrt{r^2 - R^2}\,\sqrt{1 - \frac{\left(R_\odot - \sigma_{SH}\, R\right)^2}{r_\odot^2}}\,\right]$$

mit

$\sigma_{SH} = 1$ für Kernschatten (28.315)

$\sigma_{SH} = -1$ für Halbschatten

$\sigma_{SH} = 0$ für Zylinderschatten .

Auch im Fall der allgemeinen Schattengleichung gilt:

Ein Satellit befindet sich

- *im Schatten, wenn die Schattengleichung negativ ist ($S < 0$),*
- *außerhalb des Schattens bei positiver Schattengleichung ($S > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Schattengleichung verschwindet ($S = 0$).*

BEISPIEL 1: Bild 28-42 zeigt den Verlauf der Schattengleichungen in den drei Fällen Kernschatten (rot), Zylinderschatten (grün) und Halbschatten (blau) über einen synodischen Umlauf für einen Satelliten auf einer kreisnahen Bahn in der mittleren Bahnhöhe H=200 km.

Der Kurvenverlauf für die drei Modelle verläuft nahezu identisch, nur in den Extrema können minimale Abweichungen erkannt werden. Die Punkte für Schattenein- und –austritt können in der bildnerischen Darstellung nicht unterschieden werden. Dies lässt sich mit der relativ weiten Entfernung der Sonne von der Erde begründen. ◄

BEISPIEL 2: Bild 28-43 zeigt den Verlauf der Schattengleichung für eine hochexzentrische Transferbahn in die geostationäre Bahnhöhe über einen synodischen Umlauf (Daten von Symphonie A) .

Die mittleren Bahnelemente sind:

$a = 25646\ \text{km},\ e = 0.7357858,\ i = 13°.27,\ \Omega = 313°.3395,$

$\omega = 177°.0,\ M_0 = 4°.2,\ \text{Epoche: 1974, Dez., } 19/03^h\,12^m .$

Das Bild zeigt, dass der Einschuss in die Transferbahn so gewählt wurde, dass erst am Ende des Umlaufs, nämlich in der Nähe des Perigäums, der Satellit kurzzeitig in den Schatten eintaucht. Die Darstellung lässt keinen Unterschied zwischen den drei Schattenmodellen erkennen. ◀

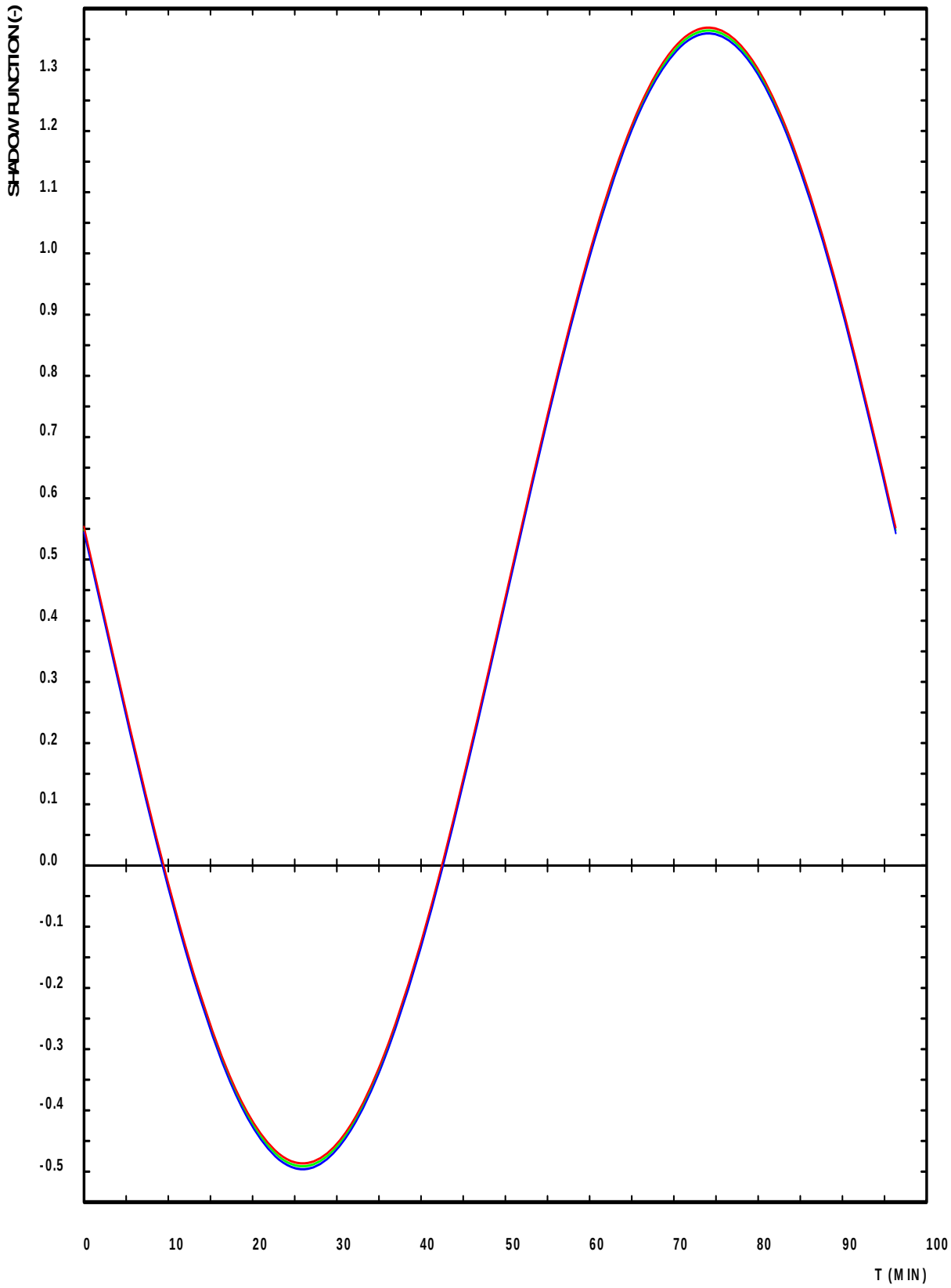


Bild 28-42: Schattenfunktion für Kern, Halb- und Zylinderschattenmodell. Bahn: a = 6578 km, e=0.0, i = 53°, λ_0 = 279°.31 , φ_0 = 28°.5 , $M_0 = 0°.0$, t_0 :1990 – 02-22/22:46:0.0 , $\dot{a}_s$ = -8.8572 $\times 10^{-7}$ km/s .

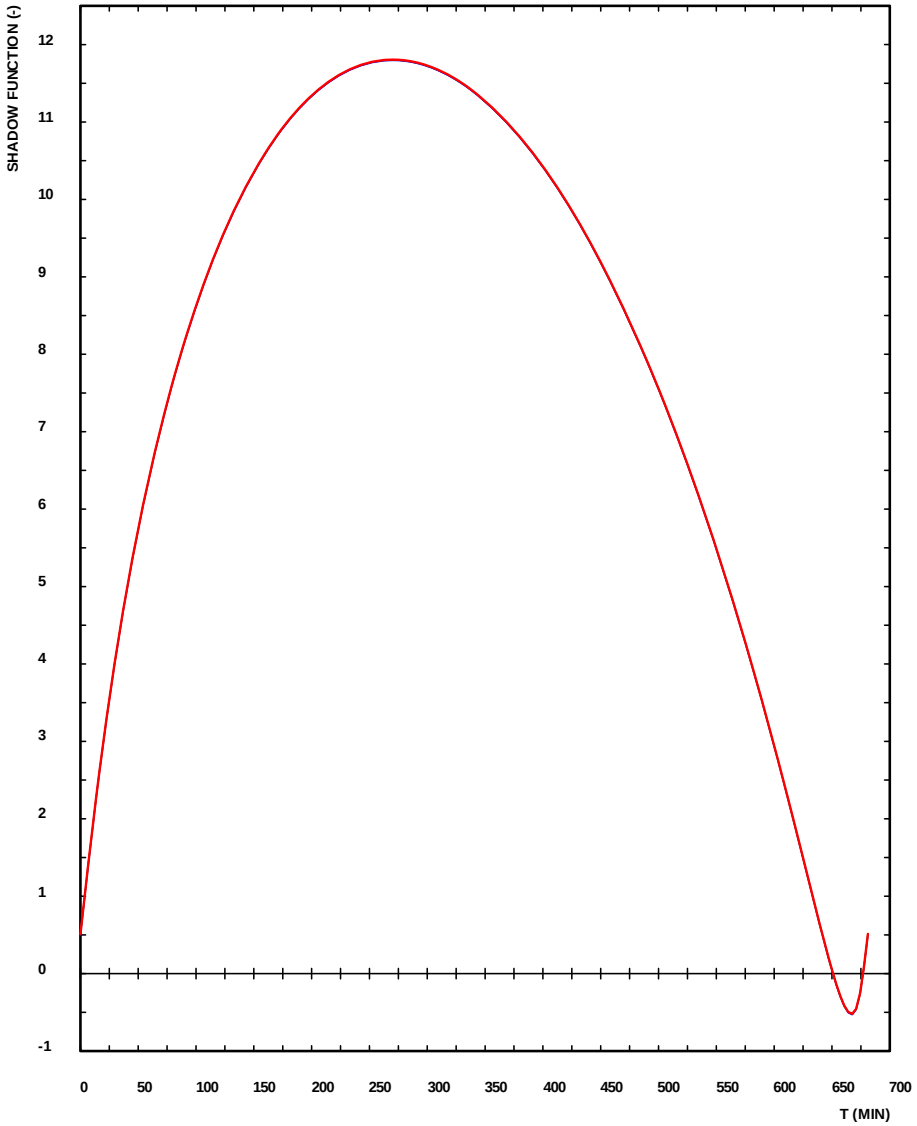


Bild 28-43: Schattenfunktion einer hochexzentrischen Bahn (H_A = 38138 km, H_P = 398 km, i = 13°.27)

28.10.3 Schattenkontakte

28.10.3.1 Näherungsweise Berechnung der Schattenkontaktzeiten

Die Schattengleichung liefert implizit die Schattenzeiten längs einer Satellitenbahn. Die zwei Schattenkontakte seien durch S_1 bei Schatteneintritt und S_2 bei Schattenaustritt gekennzeichnet. Der Zeitraum zwischen den Schattenkontakten ist die Schattendauer.

Die exakte Berechnung der Schattenkontakte ist unter Einschluss der Bewegung der (wahren) Sonne, aller Bewegungseinflüsse („Störungen“) auf die Satellitenbahn, der Erdabplattung und im Kegelmodell (Kernschattenmodell) nur iterativ möglich. Schattenkontakte bei Erdsatelliten sind jedoch infolge der Erdatmosphäre verwaschen und in den meisten Anwendungen nur näherungsweise nötig.

Als Bahnparameter kann zur Berechnung der Schattenkontakte das Argument der Breite u verwendet werden. Mit ihm können die geozentrische Elongation $\gamma_\odot$ zwischen den Richtun-

gen zum Satelliten und zum Zentrum der Sonne sowie der Bahnradius *r* ausgedrückt werden. Die Elongation $\gamma_\odot$ ist mit Formel (28.294) aus

$$\cos\gamma_\odot = \cos\left(\alpha - \alpha_\odot\right)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta \tag{28.316}$$

bekannt. Die äquatorialen Koordinaten des Satelliten können mit den Formeln (24.17) auf das Argument der Breite *u* und die oskulierenden *Kepler*elemente $\left(i,\Omega\right)$ zurückgeführt werden[1]:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\delta &= -\cos i\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\\ \sin\alpha\cos\delta &= \cos i\sin u\cos\Omega + \cos u\sin\Omega\\ \sin\delta &= \sin i\sin u \quad .\end{aligned} \tag{28.317}$$

Für den Radius gilt mit den oskulierenden *Kepler*elementen $\left(a,e,\omega\right)$

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos u\cos\omega + e\sin u\sin\omega} \quad . \tag{28.318}$$

Die äquatorialen Winkelkoordinaten $\left(\alpha_\odot,\delta_\odot\right)$ sowie die *Kepler*elemente sind zeitabhängig. Bei Vorgabe des Argumentes der Breite als Bahnwinkel kann die zugehörige Zeit *t* in Bezug auf eine Epoche t_0 sowie einer zugehörenden mittleren Epocheanomalie $\overline{M_{0\,0}}$ mit dem Verfahren in Abschnitt 23.2.3 (auf Seite 127) berechnet werden.

Führt man die Größen $r = r\left(u\right),\ \cos\gamma_\odot$ in die Schattengleichung ein, erhält man ein Polynom 4. Grades[2] in $\cos u$ (bzw. in $\sin u$), dessen Koeffizienten die Bahnelemente und die Winkelkoordinaten der Sonne enthalten, somit oskulierend sind. Vernachlässigung der Bewegungseinflüsse („Störungen“) auf die Satellitenbahn und die oskulierende Bewegung der Sonne liefert eine Ausgangsnäherng, die iterativ verbessert werden kann.

Im folgenden Abschnitt wird die Berechnung der Schattenkontakte nach einer anderen Methode durchgeführt, die den Vorteil größerer Übersichtlichkeit und leichterer Handhabung hat.

Der Schattenkegel des Zentralschattens schneidet die oskulierende Bahnebene in einer Ellipse, deren sonnenabgewandte Hälfte gemäß Bild 28-44 (auf Seite 509) die Schattenzone eingrenzt. Die große Halbachse dieser Ellipse liegt in der Richtung der Projektion der momentanen Position der Projektion $\overline{\odot}$ der Sonne in die Bahnebene.

Eine weitere Beziehung zwischen dem Argument der Breite und der Bewegung der Sonne kann nach Abschnitt 28.5.3 (auf Seite 435) hergestellt werden. Nach Bild 28-12 kann die Position der Sonne in Bezug auf die Satellitenbahnebene durch die Koordinaten Argument der Breite $u_\odot$ und Breite $w_\odot$ hergestellt werden. Aus den Formeln (28.163) folgt mit dem knotenbezogenen Sonnenwinkel $\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$

$$\begin{aligned}\cos u_\odot\cos w_\odot &= \cos\left(\Omega-\alpha_\odot\right)\cos\delta_\odot\\ \sin u_\odot\cos w_\odot &= -\sin\left(\Omega-\alpha_\odot\right)\cos\delta_\odot\cos i + \sin\delta_\odot\sin i\\ \sin w_\odot = \cos\sigma_\odot &= \sin\left(\Omega-\alpha_\odot\right)\cos\delta_\odot\sin i + \sin\delta_\odot\cos i \quad .\end{aligned} \tag{28.319}$$

---

[1] Abschnitt 24.2.1 auf Seite 294

[2] ein vergleichbares Polynom hat P. ESCOBAL [1965] hergeleitet.

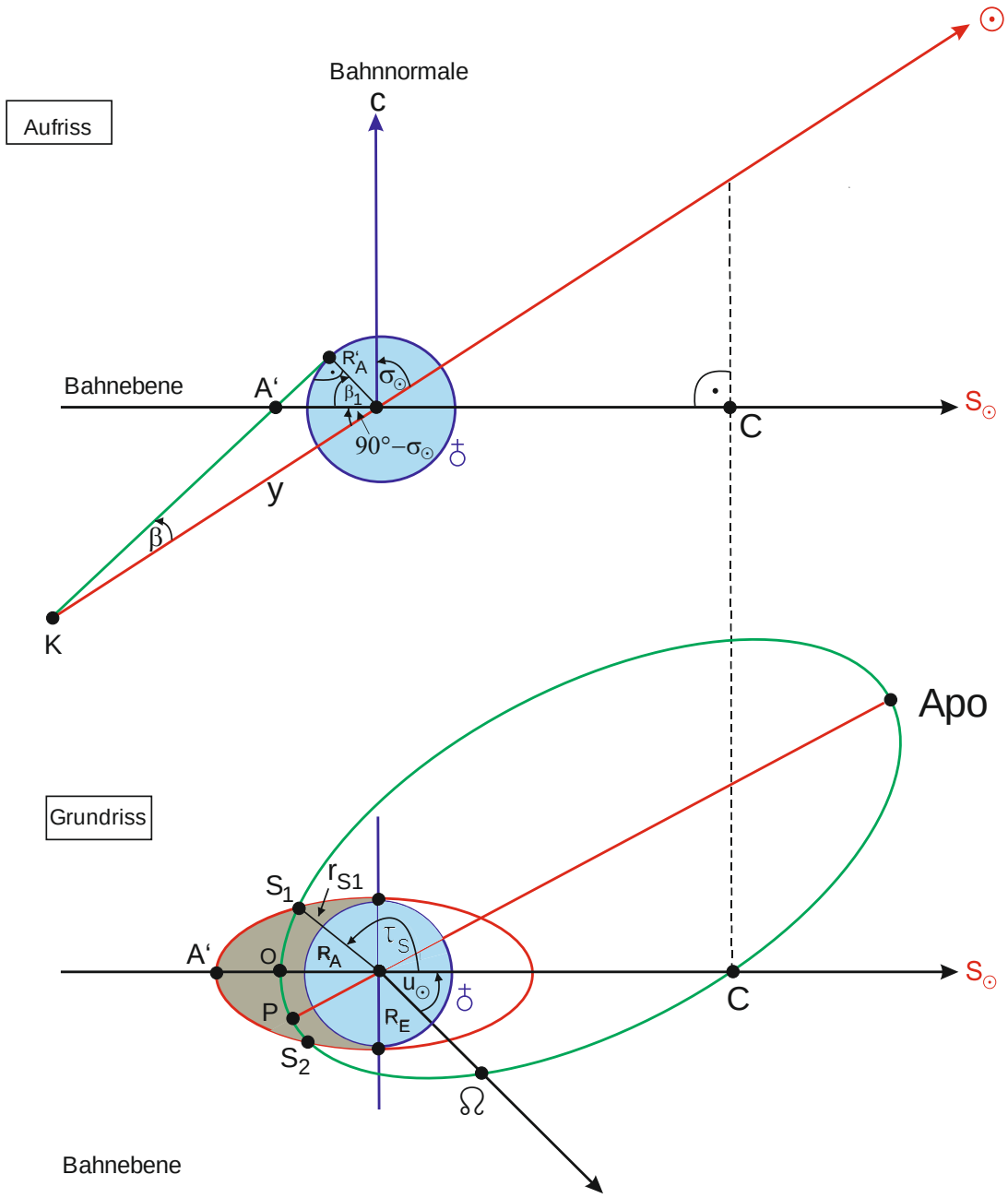


Bild 28-44: Schnitt des Kernschattenkegels mit der Bahnebene zur Berechnung er Schattenzeiten in Auf- und Grundriss ohne Erdabplattung, C – Konjunktion, O - Opposition Satellit-Sonne, Apo – Apogäum der Satellitenbahn, P - Perigäum, ☊ - der aufsteigenden Bahnknoten, **c** - Normalenvektor der Satellitenbahn, $\sigma_\odot$ - Sonnenaspektwinkel, τ_S -Sonnenwinkel bei Schatteneintritt S_1, S_2 -Schattenaustritt, $u_\odot$ -Argument der Breite der in die Satellitenbahnebene projizierten Sonne $S_\odot$, R'_A -Radius des Erdkörpers in der Satellitenbahnebene, R_A - große Halbachse der Schnittellipse des Schattenkegels mit der Bahnebene, r_{S1} -geozentrischer Radius des Satellitenortes bei Schatteneintritt, y-geozentrische Distanz der Gegensonne K, A' - Scheitel des Schattenkegels in der Satellitenbahnebene[1].

[1] Der Scheitel A' des Schattenkegels in der Satellitenbahnebene ist zur besseren Veranschaulichung im Grundriss von der Sonne weg verschoben eingezeichnet, entspricht also nicht exakt seiner Stellung im Aufriss

Das sonnenbezogene Argument der Breite $u_\odot$ kann eindeutig berechnet werden, sofern $\cos w_\odot = \sin \sigma_\odot \neq 0$. Falls der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot = 90° - w_\odot$ verschwindet, steht die Bahnebene senkrecht auf der Richtung zur wahren Sonne, die Bahn kann dann nicht in den Schatten eintreten. Dieser Fall braucht hier deswegen nicht weiter untersucht zu werden.

Der Satellitenbahn-bezogene Solarwinkel ist mit dem Argument der Breite über die Relation

$$\tau_S = u - u_\odot \tag{28.320}$$

verknüpft und es besteht die Beziehung zwischen dem Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ und der sonnenbezogenen Elongation $\gamma_\odot$

$$\cos \gamma_\odot = \cos w_\odot \cos \tau_S = \sin \sigma_\odot \cos \tau_S \quad . \tag{28.321}$$

Es sei nun R'_A der Erdhalbmesser in der Ebene durch Sonnen und Erdmittelpunkt und den Bahnnormalenvektor $\mathbf{c}$. Gemäß Bild 28-44 kann die große Halbachse $R_A = \overline{\dot{\bigcirc} K'}$ der Schattenellipse berechnet werden mit

$$R'_A = R_A \cos \beta_1 = y \sin \beta \qquad \text{und} \quad \beta_1 = \sigma_\odot - \beta \tag{28.322}$$

aus

$$R_A = \frac{R'_A}{\sqrt{1 - \frac{R'^2_A}{y^2}} \cos \sigma_\odot + \frac{R'_A}{y} \sin \sigma_\odot} = \frac{y \sin \beta}{\cos(\beta - \sigma_\odot)} \quad . \tag{28.323}$$

Um in einfacher und übersichtlicher Weise eine für die meisten Anwendungen jedoch hinreichend genau Näherungslösung zu erhalten, werde die Erdabplattung vernachlässigt und das Zylindermodell gewählt. Die große Halbachse der Schattenellipse beträgt dann

$$R_A \approx \frac{R_E}{\cos \sigma_\odot} \quad . \tag{28.324}$$

Sie ist somit lediglich eine Funktion des Sonnenaspektwinkels. Die kleine Halbachse ist offenbar gleich dem Radius der kugelförmig angenommen Erdoberfläche

$$R_B = R_E \quad . \tag{28.325}$$

Die Schattenellipse ist im Erdmittelpunkt $\dot{\bigcirc}$ zentriert. Sei $\tau_S = u - u_\odot$ nach Definition (28.164) der Satellitenbahn-bezogene Sonnenwinkel zwischen der Richtung zur in die Bahnebene projizierten Sonne $S_\odot$ und zu einem beliebigen Punkt auf der Schattenellipse mit zentrischer Distanz

$$R' = \frac{R_A R_B}{\sqrt{R_A^2 \sin^2 \tau_S + R_B^2 \cos^2 \tau_S}} \approx \frac{R_E}{\sqrt{\sin^2 \tau_S + \cos^2 \sigma_\odot \cos^2 \tau_S}} \quad . \tag{28.326}$$

Der Schattenkegel hat mit der (oskulierende) Bahnebene maximal 4 reelle Schnittpunkte. Von diesen können nur die Punkte mit

$$\cos \tau_{S/1,2} < 0 \tag{28.327}$$

die Schattenein- bzw. austrittspunkte S_1, S_2 markieren. Sei u_S das Argument der Breite des Satelliten bei Schattenkontakt

$$u_S = \tau_S + u_\odot \quad . \tag{28.328}$$

Zur weiteren Diskussion werde zwischen kreisnahen und elliptischen Satellitenbahnen unterschieden:

28.10.3.2 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf kreisnahen Bahnen

Mit $r = \text{const.}$ muss der Sonnenwinkel τ_S aus Formel (28.326) mit der Bedingung $r = R'$ (der Satellit befindet sich bei Schattenkontakt auf der Schattenellipse) berechnet werden. Wegen (28.327) kann vor der entsprechenden Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen:

$$\cos\tau_S = -\frac{\sqrt{r^2 - R_E^2}}{r\sin\sigma_\odot} < 0 \quad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \quad . \tag{28.329}$$

Als weitere Bedingung für ein Eintauchen in den Erdschatten folgt damit wegen der Relation (28.324) auch notwendig

$$\left|\cos\sigma_\odot\right| < \frac{R_E}{r} \quad . \tag{28.330}$$

Die Schattenstrecke beträgt

$$\Delta\tau_S = 360° - 2\tau_S \quad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \quad . \tag{28.331}$$

Die Schattendauer beträgt auf Grund der gleichförmigen Bewegung in Bezug auf einen mittleren (sonnen) synodischen Umlauf $\overline{P_S}$

$$T_S = \frac{\Delta\tau_S}{360°}\overline{P_S} \quad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \quad . \tag{28.332}$$

Wenn der Zeitpunkt t_{S0} der Konjunktion Satellit-Sonne mit Sonnenwinkel $\tau_S(t_{CO}) = \tau_{CO} = 0°$ bekannt ist (siehe in Abschnitt 28.5.1.5 auf Seite 430), können die Schattenein- und –austrittszeiten mit der mittleren sonnensynodischen mittleren Bewegung $\overline{n_S}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} t_{S1} &= t_{CO} + \frac{\tau_S}{\overline{n_S}} \\ t_{S2} &= t_{CO} + \frac{360° - \tau_S}{\overline{n_S}} \qquad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \quad . \end{aligned} \tag{28.333}$$

➢ *Die Schattenzeiten einer Kreisbahn hängen in guter Näherung nur vom Sonnenaspektwinkel und der mittleren synodischen mittleren Bewegung ab.* ◄

28.10.3.3 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf elliptischen Bahnen

In den Bahnpunkten S_1 und S_2, in denen die Satellitenbahn in den Erdschatten ein- bzw. aus ihm austritt, ist die zentrische Distanz R' der Schattenellipse (nach Formel (28.326)) dem

Bahnradius r (mit Formel (28.318)) gleich. Dies führt zur Berechnung des zugehörigen Sonnenwinkels $\tau_{S/1,2}$ auf das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \cos^k \tau_S = 0 \tag{28.334}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A_4 &:= \left[\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot - e^2\right]^2 + 4e^2\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot\cos^2(\omega - u_\odot)\\
A_3 &:= 4e\cos(\omega - u_\odot)\left[\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot - e^2\right]\\
A_2 &:= 2\left\{\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot\left[1 + e^2\sin^2(\omega - u_\odot) - \frac{p^2}{R_E^2}\right] + \right.\\
&\qquad \left. + e^2\left[\cos^2(\omega - u_\odot)\left(3 - 2\frac{p^2}{R_E^2}\right) + \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\sin^2(\omega - u_\odot)\right]\right\}\\
A_1 &:= 4e\cos(\omega - u_\odot)\left[1 - \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\,\sin^2(\omega - u_\odot)\right]\\
A_0 &:= \left[1 + \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\,\sin^2(\omega - u_\odot)\right]^2 - 4\frac{p^2}{R_E^2} \quad .
\end{aligned} \tag{28.335}$$

Dieses Polynom ist zunächst lösbar, wenn die Koeffizienten als konstant angenommen werden, d.h. bei Vernachlässigung der Bewegung der scheinbaren Sonne, $(u_\odot = \text{const.})$, sowie bei Vernachlässigung der Variationen der Keplerelemente der Bahn infolge der Bewegungseinflüsse („Störungen“) . Am günstigsten ist es, wenn die oskulierenden Parameter im Moment der Opposition Satellit-Sonne gewählt werden. Von den vier möglichen Lösungen scheiden die positiven Werte für $\cos\tau_S$ wegen der allgemeinen Bedingung (28.327) aus. Die möglicherweise verbleibenden zwei reellen Lösungen $\cos\tau_{S1}, \cos\tau_{S2}$ liefern vier verschiedene Winkel τ_S. Die richtigen Lösungen können durch Probe mit den Basisgleichungen (28.326) für Radius *r* und (28.318) für den Rand R' der Schattenellipse folgendermaßen gefunden werden: mit

$$\sin\tau_{S/1,2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\tau_{S/1,2}} \tag{28.336}$$

werden die Radien $R'_{k/1,2}$ für k=1,2 berechnet. Hier muss $R'_{k/1} = R'_{k/2} = R'_k$ sein. Mit $u_{k/1,2} = u_\odot + \tau_{S,k/1,2}$ werden bei bekanntem $u_\odot$ und Argument des Perigäums ω die Radien $r_{k/1,2}$ erhalten. Als Bedingung werden

$$\left|r_{k/1} - R'_k\right| \quad \text{mit} \quad \left|r_{k/2} - R'_k\right| \quad \langle k = 1,2 \tag{28.337}$$

verglichen. Dem kleineren Wert ist der gesuchte Sonnenwinkel τ_S zugeordnet, da $r_k \approx R'_k$ verlangt wird. Unter den beiden auf diese Weise erhaltenen Lösungen charakterisiert der Wert τ_{S1} mit $\tau_{S1} < \tau_{S2}$ den Schatteneintritt.

28.10.3.4 Exakte Berechnung der Schattenkontaktzeiten

Eine beliebig genaue Verbesserung der in den beiden vorstehenden Abschnitten erhaltenen genäherten Schattenkontaktzeiten kann mit der allgemeinen Schattengleichung (28.315) (auf Seite 504) mit der Bedingung $S = 0$ erhalten werden. Diese Bedingungsgleichung kann prinzipiell mit allen Bewegungseinflüssen („Störungen“) auf die Satellitenbahn, der Bewegung der wahren Sonne, unter Berücksichtigung der Erdabplattung und unter Verwendung eines analytischen oder eines numerischen Bahnmodells bearbeitet werden.

Für eine Verbesserung der Ergebnisse werden die Zeiten t_{S1}, t_{S2} benötigt, zu denen der Satellit die Schattenkontaktpunkte S_1, S_2 durchfliegt. Hierzu müssen die bahnbezogenen Sonnenwinkel $\tau_{S/1,2}$ in die entsprechenden Äquator-bezogenen Sonnenwinkel $\tau_{1,2} = \alpha_{1,2} - \alpha_{\odot/1,2}$ umgerechnet werden. Aus Vergleich der Formeln (28.316) und (28.321) folgt

$$\begin{aligned} \cos\tau_{1,2} &= \frac{\cos w_\odot \cos\tau_{S/1,2} - \sin\delta_{1,2}\sin\delta_{\odot/1,2}}{\cos\delta_{1,2}\cos\delta_{\odot/1,2}} \qquad \left\langle \cos\delta_{1,2}\cos\delta_{\odot/1,2} \neq 0 \right. \\ \sin\tau_{1,2} &= \operatorname{sgn}(\sin\tau_{S/1,2})\sqrt{1-\cos^2\tau_{1,2}} \end{aligned} \tag{28.338}$$

Die Fälle $\delta_\odot = 90°$ und $\delta = 90°$ können unberücksichtigt bleiben. Eine alternative Berechnung für den Sinus des Sonnenwinkels kann nach Bild 28-12 (auf Seite 435) hergeleitet werden, wenn der Knotensonnenwinkel $\tau_\Omega = \Omega - a_\odot$ berücksichtigt wird:

$$\sin\tau_{1,2} = \frac{\cos u_{1,2} - \cos\delta_{1,2}\cos\tau_{\Omega/1,2}}{\cos\delta_{1,2}\sin\tau_{\Omega/1,2}} \quad . \tag{28.339}$$

Die zugehörigen Zeiten t_{S1}, t_{S2} werden mit der Methode $\tau \to t$ in Abschnitt 28.5.1.4 (auf Seite 429) berechnet.

Für eine iterative Verbesserung der Schattenzeiten können die bislang gefundenen Näherungswerte als Ausgangsnäherungen $t_{S1}^{(0)} := t_{S1}, t_{S2}^{(0)} := t_{S2}$ angewandt werden. Dazu kann direkt die Schattengleichung (28.315) verwendet werden oder die Methode der sukzessiven Approximation

$$t_{S/k}^{(\nu+1)} := t_{S/k}^{(\nu)} - \frac{S\left(t_{S/k}^{(\nu)}\right)}{\dot{S}\left(t_{S/k}^{(\nu)}\right)} \qquad \left\langle k = 1,2; \quad \nu = 0,1,2,\cdots \right. \quad . \tag{28.340}$$

Zum jeweils gegebenen Zeitpunkt können der Zustandsvektor $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ des Satelliten und der Sonne $(\mathbf{x}_\odot, \dot{\mathbf{x}}_\odot)$ mit beliebiger, d.h. nur eingeschränkt durch das verwendete Bahnmodell und die Rechnergenauigkeit berechnet werden. R kann mit Formel[1] (38.6) gegeben sein, wenn Abplattung und ein schräger Schnitt durch den als Ellipsoid angenommenen Erdkörper berücksichtigt werden sollen. Wird die Erde als Kugel überhöht durch eine Atmosphäre der Höhe H angenähert, kann $R = R_E + H$ als konstante Größe gewählt werden.

Die Differentiation der Schattengleichung nach der Zeit

[1] Abschnitt 38.1.1 in Band V, dort mit R_0' bezeichnet

$$\dot{S} = \frac{1}{R}\left\{ \dot{r}\left[\cos\gamma_\odot + \frac{\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot\sqrt{r^2 - R^2}} \right] + \right.$$
$$+ \frac{\dot{r}_\odot}{r_\odot^2}\left[-\sigma_{SH}R\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right) + \frac{\sqrt{r^2 - R^2}\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}{\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}} \right] -$$
$$- r\dot{\gamma}_\odot \sin\gamma_\odot + \qquad (28.341)$$
$$+ \dot{R}\left[-\frac{1}{R}\left(r\cos\gamma_\odot + \sigma_{SH}\frac{R\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)}{r_\odot} + \frac{\sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot} \right) + \right.$$
$$\left. \left. + \sigma_{SH}\frac{\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)}{r_\odot} - \frac{R}{r_\odot} - \frac{R\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot\sqrt{r^2 - R^2}} + \frac{\sigma_{SH}\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)\sqrt{r^2 - R^2}}{r_\odot\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}} \right] \right\}$$

kann mit den entsprechenden Differentialausdrücken

$$\dot{r} = \frac{\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin\upsilon \quad , \quad p = a\left(1 - e^2\right)$$
$$\dot{r}_\odot = \frac{\mathbf{x}_\odot\cdot\dot{\mathbf{x}}_\odot}{\left|\mathbf{x}_\odot\right|} \quad , \quad r_\odot = \left|\mathbf{x}_\odot\right| \qquad (28.342)$$
$$\dot{\gamma}_\odot \sin\gamma_\odot = -\frac{\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}_\odot + \mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}_\odot}{r\, r_\odot} + \cos\gamma_\odot\left[\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}_\odot}{r_\odot}\right]$$

berechnet werden. Die Variation $\dot{R}$ des erweiterten Erdradius kann bei Bedarf mit Formel (38.25) erhalten werden.

28.10.3.5 Würdigung des Verfahrens

Die hier geschilderte Methode der Schattenberechnung hat gegenüber anderen Verfahren folgende Vorteile:

1. Die Koeffizienten des Polynoms zur Berechnung der Ausgangslösung lassen sich leicht berechnen.
2. Der Bezug auf die Sonne macht alle Abfragen überflüssig, die bei Bezug auf das Perigäum der Satellitenbahn, den aufsteigenden Knoten der Bahn oder anderer Bezugspunkte zur eindeutigen Bestimmung der Schattenkontaktzeiten sonst nötig sind.
3. Die Methode ist weitgehend sicher. Dies trifft auch für erdferne Bahnen zu, da die Satellitenbahn-bezogenen Sonnenwinkel τ_S große Werte annehmen und aus Lösung des Polynoms (28.334) stets sichere Ausgangslösungen erhalten werden können.
4. Eine Lösung des Polynoms (28.334) kann auch als Indikator verwendet werden, ob ein Satellit pro synodischem Umlauf in den Erdschatten eintreten kann. Da der Schattenzylinder den (Kern-) Schattenkegel einschließt, tritt mit Sicherheit kein Schatten ein, wenn das Polynom keine reellen Lösungen hat. Schattenberechnung nach dem Zylindermodell beinhaltet stets den ungünstigsten Fall.

28.10.4 Schattenfaktor und Schattendauer

Wenn die Schattenkontaktzeiten t_{S1}, t_{S2} nach einem der bisher vorgestellten Verfahren berechnet sind, kann mit $t_{S2} > t_{S1}$ die Schattendauer pro synodischem Umlauf berechnet werden aus

$$T_S = t_{S2} - t_{S1} \quad . \tag{28.343}$$

Der Schattenfaktor (gelegentlich auch mit Schattenindex bezeichnet) ist ein Maß über den Anteil der Schattenphase pro sonnensynodischem Umlauf:

$$k_S := \frac{T_S}{P_S} \quad . \tag{28.344}$$

Der Schattenfaktor ist beispielsweise für Untersuchungen des Thermalhaushaltes eines Satelliten bedeutsam. Er wird langfristig, etwa über ein tropisches Jahr, untersucht und daher gewöhnlich nicht mit letzter Genauigkeit benötigt. Daher genügen meist die Lösungen des Polynoms (28.334). Für kreisnahe Bahnen und ein vereinfachtes Schattenmodell (Zylindermodell, Erdoberfläche kugelförmig angenommen) wird die Schattenzeit auf die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ bezogen. In diesem vereinfachten Fall kann der Schattenfaktor näherungsweise mit der Beziehung (28.332) dargestellt werden durch

$$k_S \approx \frac{\Delta\tau_S}{360°} \qquad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \tag{28.345}$$

bzw. wegen der Beziehungen (28.329) und (28.331) auch durch

$$k_S \approx 1 - \frac{1}{180°} \arccos\left(\frac{-\sqrt{r^2 - R_E^2}}{r \sin\sigma_\odot} \right) \qquad \langle e = 0.0, r = const., \text{Zylindermodell} \quad . \tag{28.346}$$

Im Folgenden wird der Schattenverlauf für einige Erdsatellitenbahnen an typischen Beispielen demonstriert.

28.10.4.1 Schattenzeiten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine STS-Bahn, H=300 km, e=0.0, i=57°. Der Einschuss über Cape Canaveral erfolge um Mitternacht Ortszeit. Bild 28-45 zeigt den Jahresverlauf der Schattendauer pro synodischem Umlauf sowie den Schattenfaktor als Anteil pro Umlauf. Infolge der beträchtlichen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = -5°.60425226 / d$ verändert sich die Schattendauer von Umlauf zu Umlauf, zwischen maximal möglichem Schatten und einigen Abschnitten mit Vollsonnenbahn. ◄

BEISPIEL 2: Für die Bahn des vorstehenden Beispiels 1 wird in Bild 28-46 untersucht, wie sich ein unterschiedlicher Starttermin in mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) auf den Verlauf der Schattenzeiten pro synodischem Umlauf auswirkt. Als Zeitraum sind 14 Tage ausgewählt, was die maximale Betriebsdauer einer STS Mission war. Je nach Startzeit können mehrere Tage Vollsonnenbahn erreicht werden. ◄

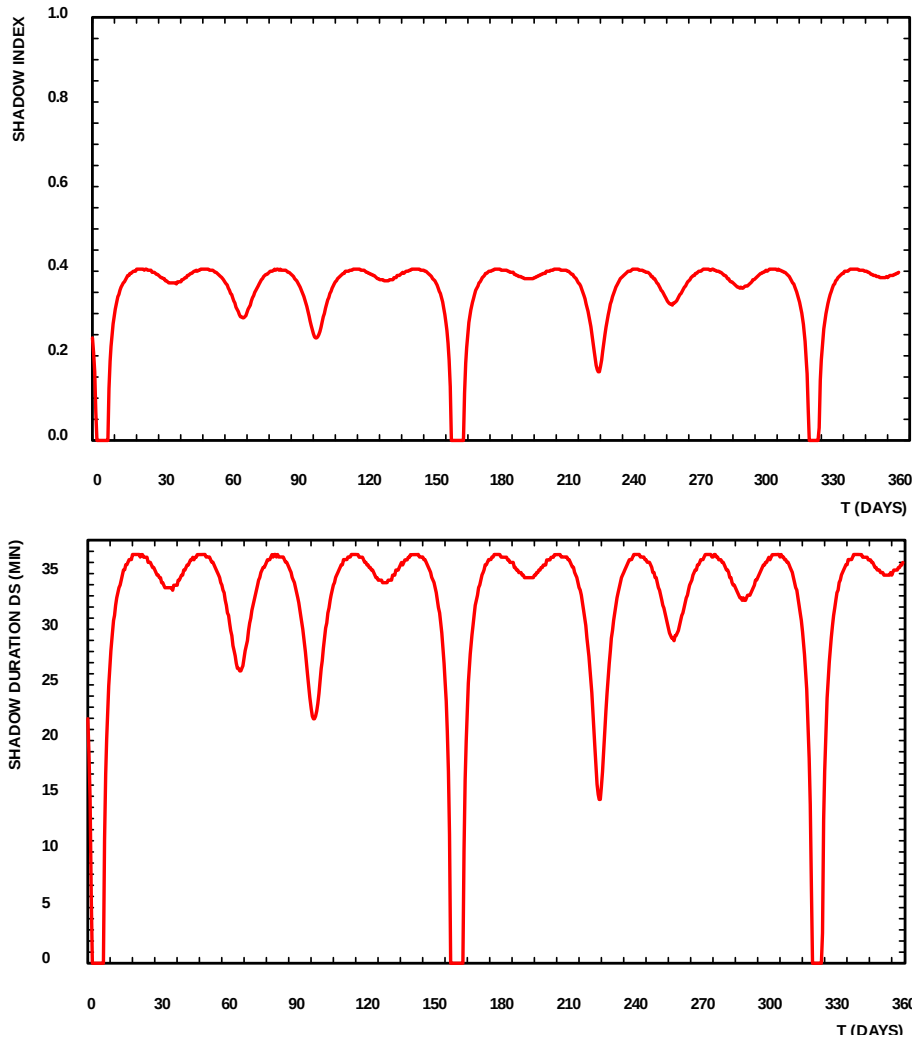


Bild 28-45: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57°, Referenzort: $\lambda = -80°.69, \varphi = 28°.5$, Referenzepoche Mitternacht Ortszeit, am 6. August 2018, Verlauf der Schattenkurven über das Jahr 2018

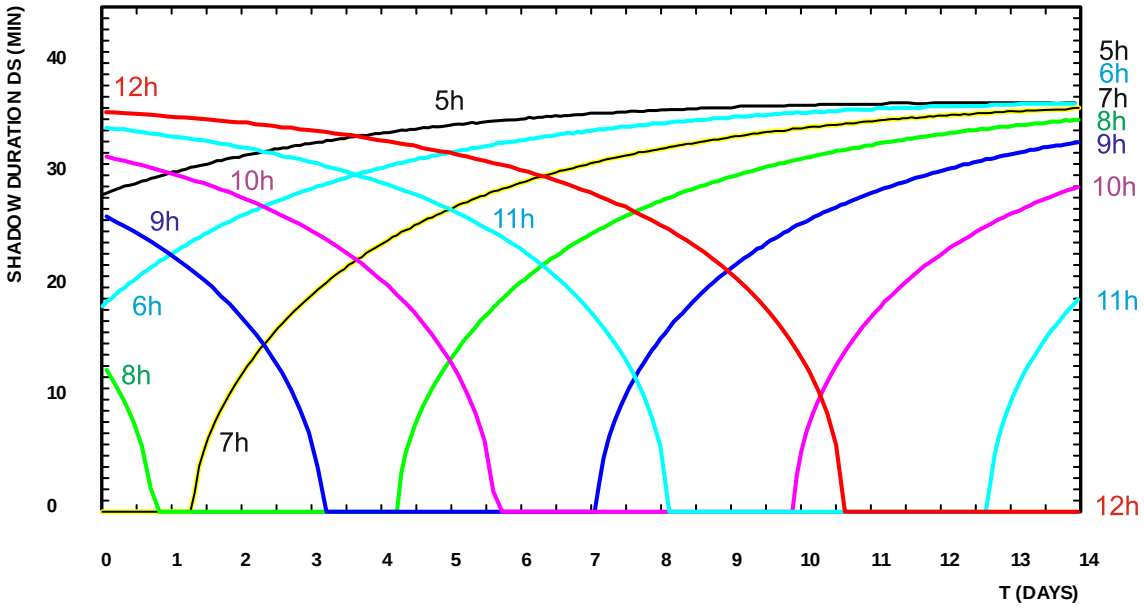


Bild 28-46: Verlauf der Schattendauer der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57° für verschiedene Einschusszeiten in mittlerer Sonnenzeit zwischen T=5h und T=12h. Aufgetragen ist der Verlauf über 2 Wochen.

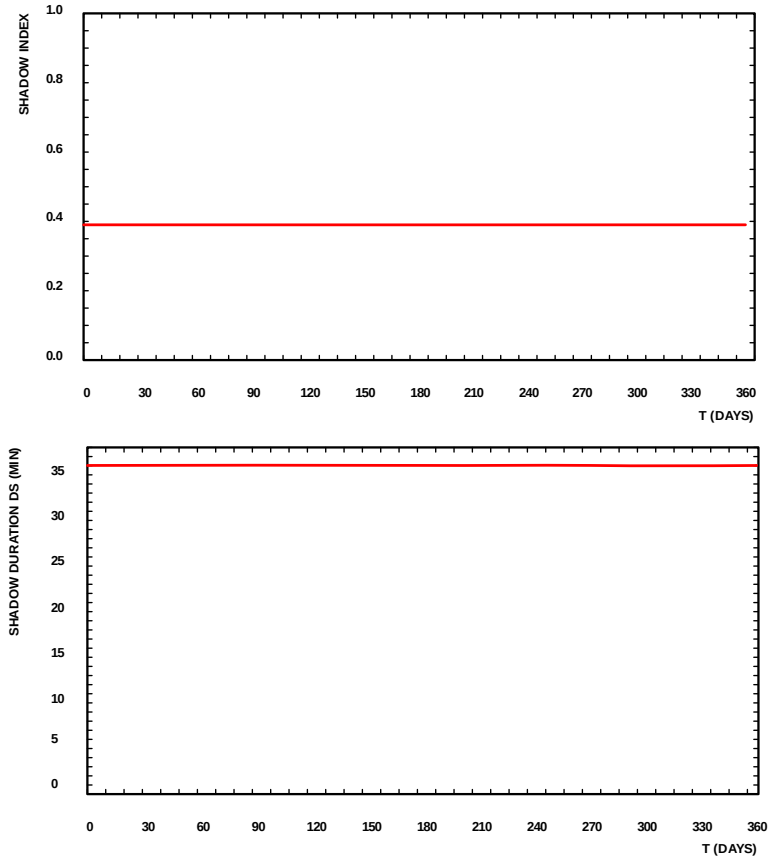


Bild 28-47: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 12h Ortszeit im aufsteigenden Knoten (Start 1.Jan. 2018)

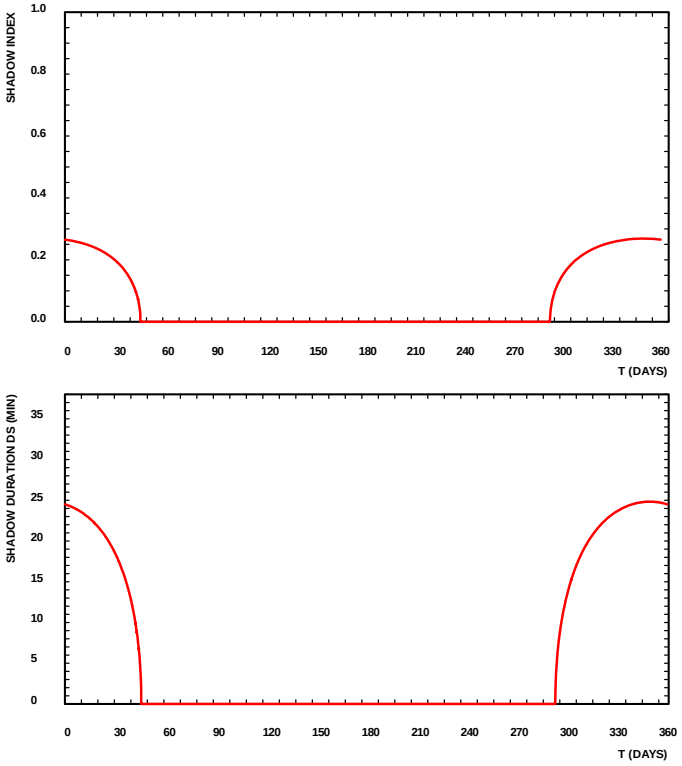


Bild 28-48: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 6h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018

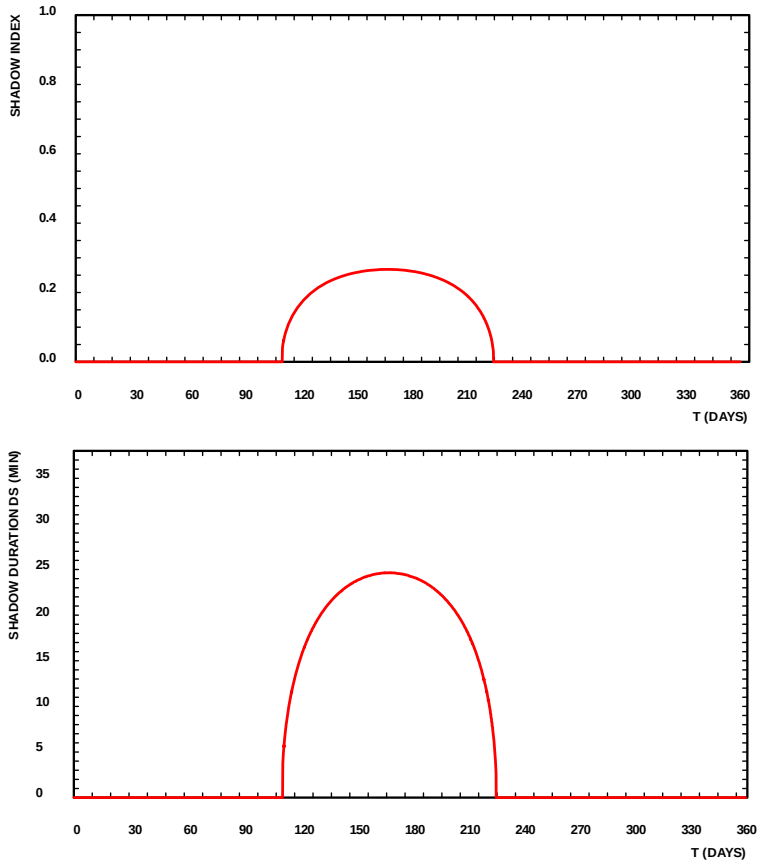


Bild 28-49: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 18h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018

BEISPIEL 3: Das Beispiel zeigt in Bild 28-47 den Verlauf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn mit Reproduzierbarkeit 27:421 (a= 6761.813 km, i=96°.99348227), wenn bei Einschuss in die Bahn im aufsteigenden Knoten die mittlere Sonnenzeit T=12h beträgt. Die Bahn mit der mittlerer synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S} = 5541.092693\text{s}$ hat im Jahresverlauf die (nahezu) unveränderlich konstante Schattendauer $T_S = 36\,\text{min}$ pro synodischem Umlauf. ◄

BEISPIEL 4: Dieselbe sonnensynchrone Bahn wie im vorstehenden Beispiel 3 wird um 6h mittlerer Sonnenzeit in eine Dämmerungsbahn gestartet. Als Startdatum wurde der 1. Januar 2018 gewählt. Die Darstellung in Bild 28-48 zeigt nicht die bisweilen erwartete schattenfreie Bahn. Vielmehr muss in den Wintermonaten mit einer Schattendauer bis zu etwa 25 Minuten gerechnet werden. Dies ist eine Folge davon, dass die Sonne sich in der Ekliptik bewegt und in den Wintermonaten wesentlich südlich der Äquatorebene aufhält. Im Jahresverlauf ist auf einer solchen Dämmerungsbahn eine schattenfreie Phase nur für etwa 8.5 Monate zu erwarten. ◄

BEISPIEL 5: Wieder wird die vorstehende sonnensynchrone Bahn als Dämmerungsbahn untersucht, jetzt jedoch bei Start um 18h mittlerer Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten. Bild 28-49 zeigt, dass es auch hier eine Schattenphase gibt, jedoch in den Sommermonaten. ◄

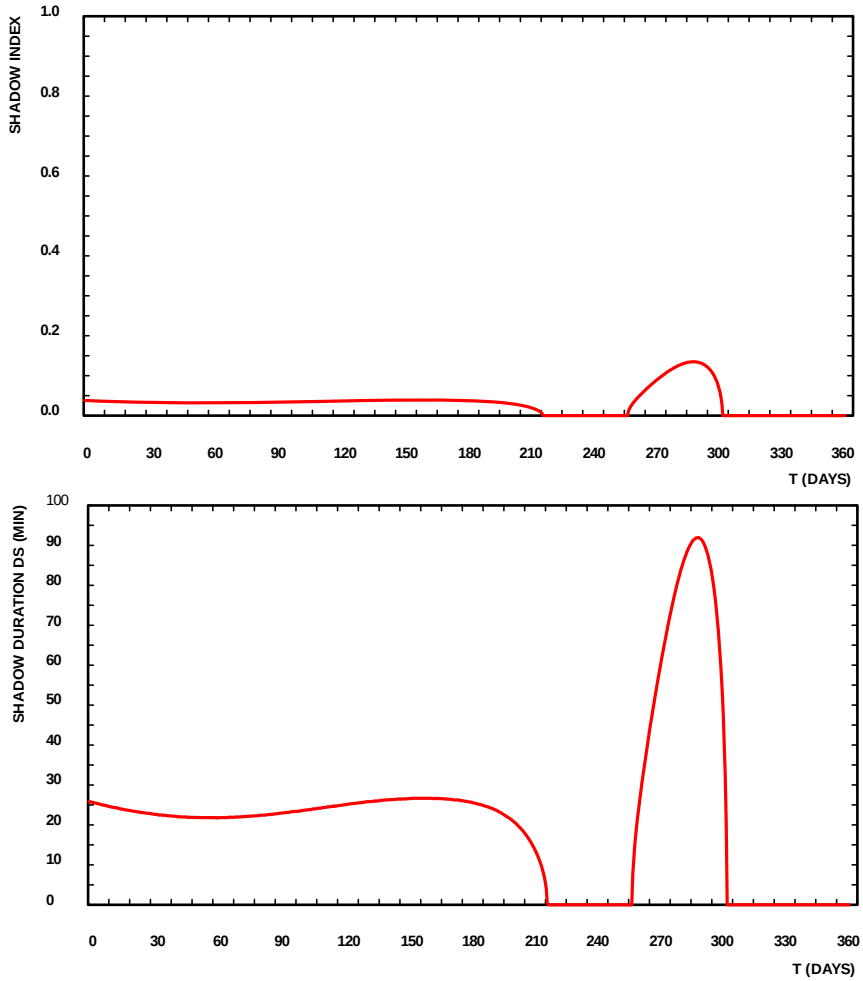


Bild 28-50: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer hochelliptischen Transferbahn in die geostationäre Bahn im Verlauf eines tropischen Jahres

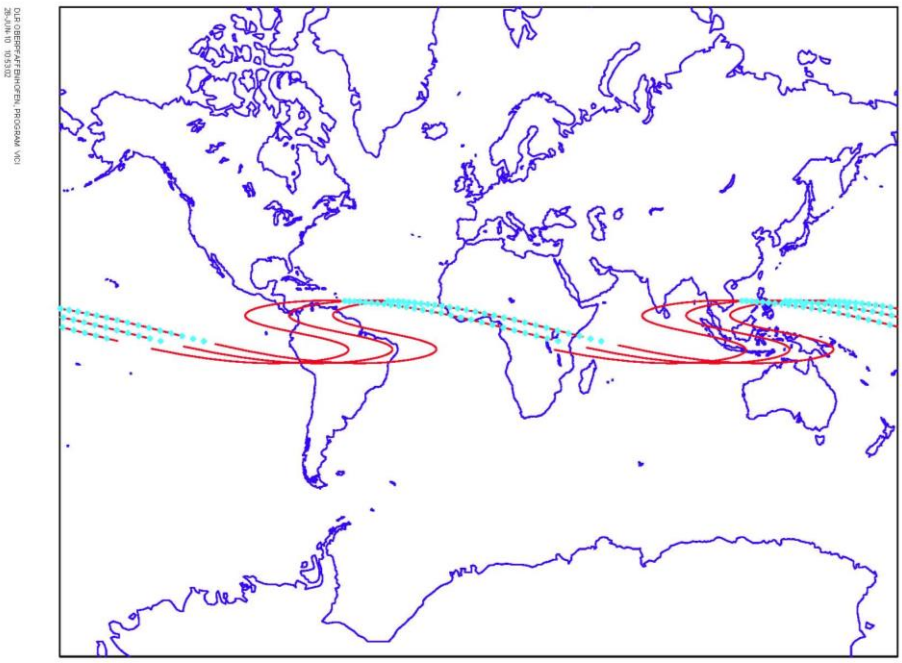


Bild 28-51: Die Schattenstrecken auf der Transferbahn von SYMPHONIE-A während der ersten sechs Umläufe nach Bahneinschuss

28.10.4.2 Schattenzeiten auf einer elliptischen Bahn

Das Schattenverhalten auf einer elliptischen Bahn ist auf Grund der Elliptizität der Bahn, der Eigenbewegungen von Apsiden- und Knotenlinien schwierig vorherzusagen und muss sorgfältig untersucht werden.

BEISPIEL: Untersucht werde das Schattenverhalten einer Transferbahn in die geostationäre Bahn. Als Bahndaten wird die Transferbahn des ersten europäischen Telekommunikationssatelliten SYMPHONIE-A gewählt:

Apogäumshöhe H_A = 38138.138 km, Perigäumshöhe H_P = 397.932 km,
Inklination i = 13°.27, Geographische Länge des ersten absteigenden Knotens $\lambda_{\Omega S} = 358°.0$,
Argument der Breite $\omega = 177°.798$, Mittlere Anomalie zur Epoche $M_0 = 4°.11$,

Epoche des Einschusses in die Transferbahn: t_0: 1974-12-19/03:12:0.0.

Die mittlere synodische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_S} = 11^h\,22^m$. Der Zeitpunkt des Einschusses wurde wie Bild 28-51 zeigt so gewählt, dass der Satellit nur in der Nähe des Perigäums den Erdschatten durchläuft. Der Satellit befindet sich dann etwa 26 Minuten im Erdschatten, das sind etwa 4% eines Umlaufes. ◄

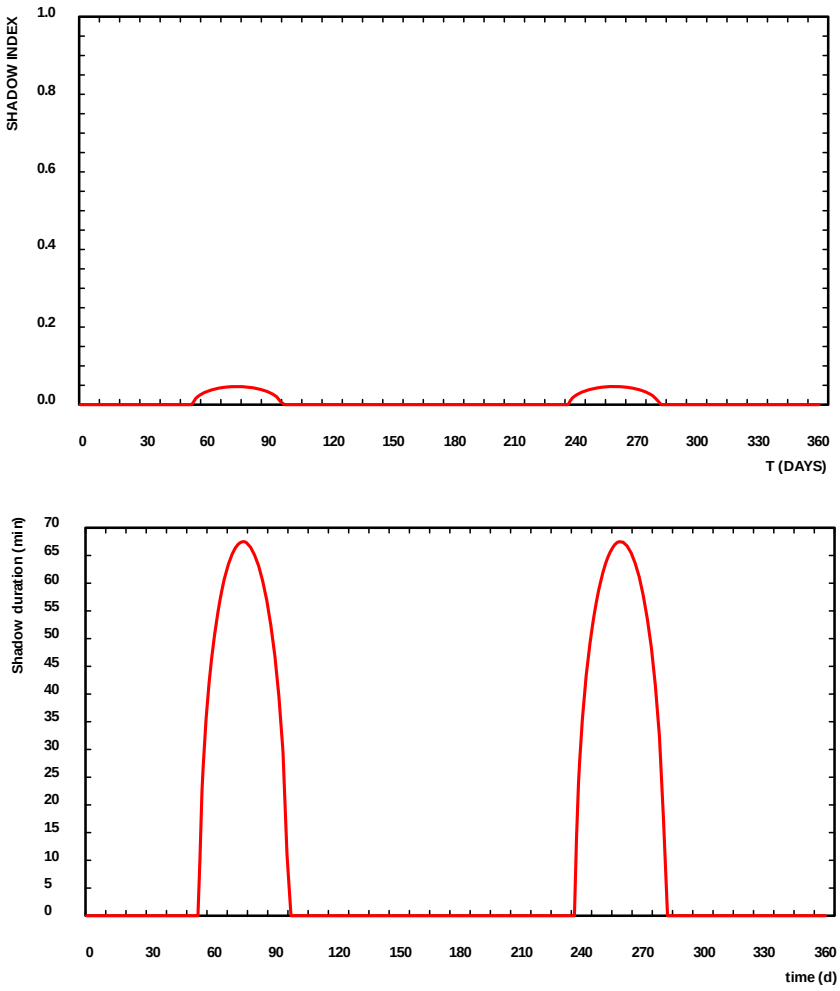


Bild 28-52: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer geostationären Bahn (Position λ = 350°) im Jahresverlauf (gerechnet für das Jahr 2018)

28.10.4.3 Schattenzeiten auf einer geostationären Bahn

Ein geostationärer Satellit bewegt sich in der Äquatorebene der Erde, während sich die Sonne in der Ekliptikebene bewegt. Ein geostationärer Satellit kann sich deshalb nur dann im Erdschatten befinden, wenn die Sonne im Jahresverlauf in der Nähe des Erdäquators bewegt. Das findet in der Nähe der Solstitien („Tag und Nachtgleiche“) statt. Je im März und September kann die Sonne in einem Zeitraum von je etwa 33 Tagen pro synodischem Umlauf für maximal etwa 66 Minuten in den Erdschatten eintauchen. Der Energiehaushalt eines derartigen Satelliten muss daher den Verlust der Sonneneinstrahlung für über eine Stunde verkraften können.

BEISPIEL: Bild 28-52 zeigt Schattenverlauf und Schattenfaktor über ein tropisches Jahr für einen geostationären Satelliten, der auf der geographischen Länge $\lambda = 350°$ positioniert ist. ◄

28.10.5 Schattengrenze (Terminator) und Sonnenelevationskurven

Einige der bisher behandelten Größen zur Schattenberechnung erlauben in einfacher Weise auch die Berechnung der Schattenzone auf der Erdoberfläche durch Berechnung der Schattengrenze (=“Dämmerungslinie“, = „Terminator“).

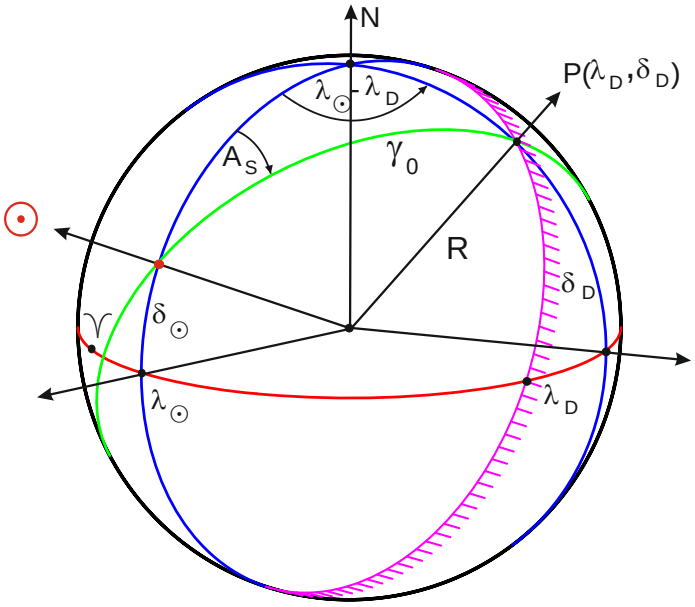


Bild 28-53: Zur Berechnung des Terminators

Zu einem bestimmten Zeitpunkt habe der Subsolarpunkt auf der (kugelförmig gedachten) Erdoberfläche die (östliche) geographische Länge $\lambda_\odot$ und die Deklination $\delta_\odot$. Der geometrische Ort aller Punkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ auf der Erdoberfläche, die vom Subsolarpunkt um den Zentralwinkel γ_0 entfernt sind, ist die Schattengrenze. γ_0 wird nach Bild 28-39 auf Seite 499 mit den Formeln (28.292) und aus der Beziehung

$$\cos\gamma_0 = -\frac{R}{y_K} = -\frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad , \quad \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \tag{28.347}$$

berechnet, ist somit von der momentanen geozentrischen Distanz des Sonnenmittelpunktes $r_\odot$ abhängig. λ_D, δ_D seien die (östliche) geographische Länge und die Deklination des Terminator Punktes *P*. Das Azimut A_S im Subsolarpunkt sei der Parameterwinkel.

Damit werden nach Bild 28-53 mit dem Parameter $A_S \in [0°, 360°)$ die Punkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ der Schattengrenze berechnet aus

$$\begin{aligned} \sin\delta_D &= \cos A_S \sin\gamma_0 \cos\delta_\odot + \cos\gamma_0 \sin\delta_\odot \\ \cos\delta_D &= \sqrt{1-\sin^2\delta_D} \\ \sin(\lambda_D-\lambda_\odot)\cos\delta_D &= \sin A_S \sin\gamma_0 \\ \cos(\lambda_D-\lambda_\odot)\cos\delta_D &= -\cos A_S \sin\gamma_0 \sin\delta_\odot + \cos\gamma_0 \cos\delta_\odot \quad . \end{aligned} \tag{28.348}$$

Die Strichlierung zur Andeutung des Schattens in Bild 28-53 wird durch Variation des Zentralwinkels $\gamma_\odot$ um etwa 2° erhalten. Die geodätische Breite φ_D kann bei Bedarf mit Formel (37.36) $\tan\varphi_D = (1-f)^{-2}\tan\delta_D$ berechnet werden[1].

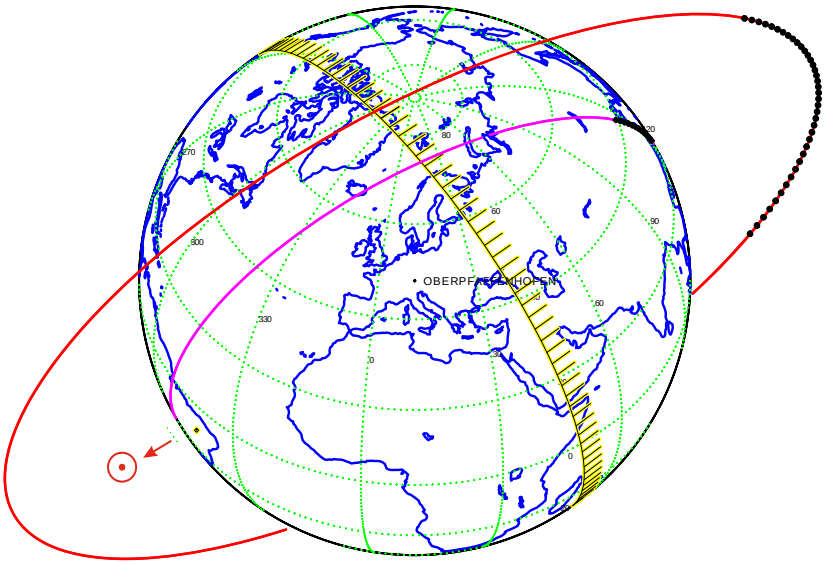


Bild 28-54: Darstellung von Terminator und Schattenabschnitt einer leicht exzentrischen Bahn.

BEISPIEL 1: Bild 28-54 zeigt die Darstellung des Terminators am 25. Feb. 1981 um 15h U.T. Der subsolare Punkt ist im nördlichen Südamerika zu erkennen. Die Satellitenbahn mit Apogäumshöhe $H_A = 4500\,\text{km}$, Perigäumshöhe $H_P = 4000\,\text{km}$, Inklination *i* = 75°, geographische Länge des absteigenden Knotens $\lambda_{\mathfrak{V}} = 130°$, Argument des Perigäums $\omega = 100°$, Mittlere Epocheanomalie $M_0 = 0°.0$ wird als wahre Bahn sowie mit ihrer Subsatellitenbahn ohne Berücksichtigung der Erdrotation dargestellt. Zu erkennen ist der Abschnitt des Erdschattens längs der wahren Bahn und der zugehörige Abschnitt auf der Subsatellitenbahn. ◄

[1] Abschnitt 37.2.3 (Band V)

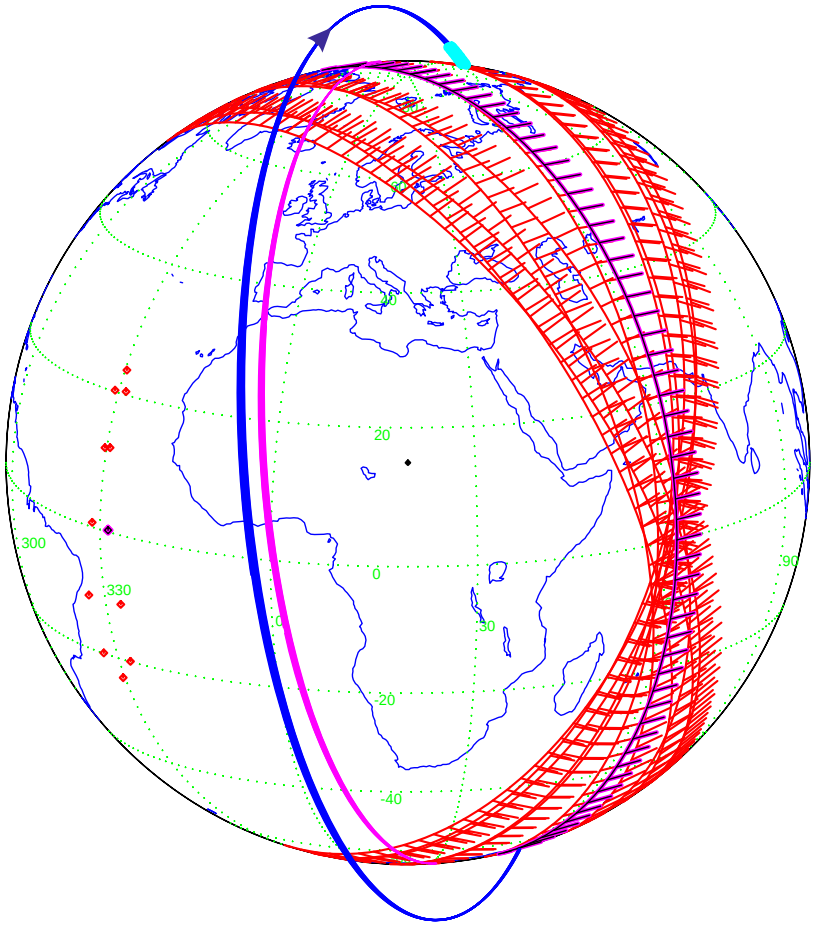


Bild 28-55: Verlauf des subsolaren Punktes auf der Erdoberfläche um 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) über ein Jahr im Abstand von je einem Monat mit jeweils zugehörigem Sonnenterminator. Eingezeichnet ist ferner die wahre Bahn und die Subsatellitenspur einer sonnensynchronen Satellitenbahn (i = 99°) mit Reproduzierbarkeit nach einem Tag (integer orbit 1:14, mittlere Bahnhöhe H = 888.33 km), deren aufsteigender Knoten um jeweils 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit stattfindet.

BEISPIEL 2: Bild 28-55 zeigt den Verlauf des subsolaren Punktes auf der Erdoberfläche um 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) über ein Jahr im Abstand von je einem Monat mit jeweils zugehörigem Sonnenterminator. Die Folge der subsolaren Punkte lässt die Form des Analemma der Zeitgleichung erkennen[1]. Hervorgehoben ist der Terminator für den 21. März (Tag und Nachtgleiche). Eingezeichnet ist ferner die wahre Bahn und die Subsatellitenspur einer sonnensynchronen Satellitenbahn (i = 99°) mit Reproduzierbarkeit nach einem Tag (integer orbit 1:14, mittlere Bahnhöhe H = 888.33 km), deren aufsteigender Knoten um jeweils 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit stattfindet. ◄

BEISPIEL 3: In Bild 28-56 ist die Erdrotation berücksichtigt. Während sich die Erde nach Osten dreht (grüner Pfeil), bewegt sich die Sonne während eines drakonitischen Umlaufs der Satellitenbahn (a=7400 km, e=0.0, i=57°) nach Westen, entsprechend auch der aufsteigende Knoten der Bahn sowie der Terminator. Das Bild enthält auch den Bahnabschnitt im Erdschatten. ◄

[1] Abschnitt 28.3.3 auf Seite 411

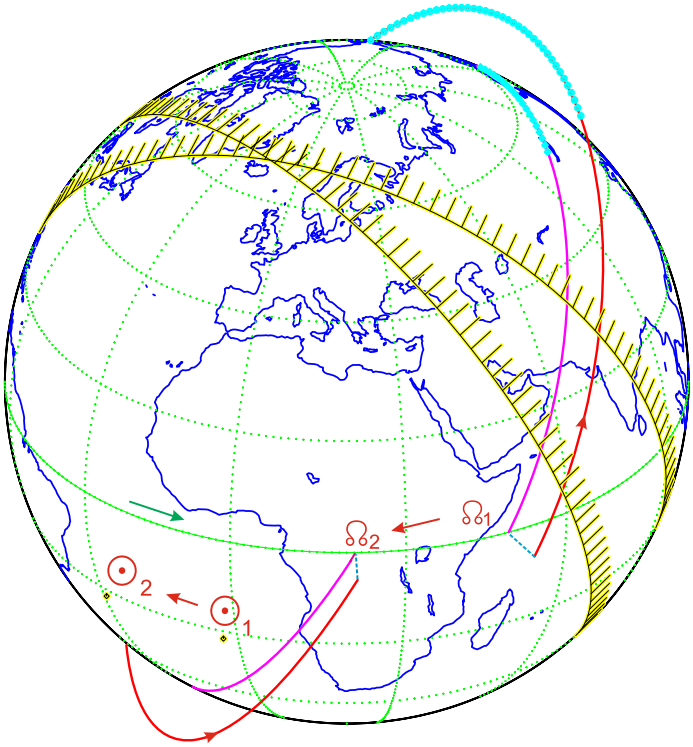


Bild 28-56: Wanderung der Sonne und des zugehörigen Terminators auf der rotierenden Erdoberfläche während eines drakonitischen Umlaufs eines Satelliten auf kreisförmiger Shuttlebahn. Die subsolaren Punkte sind als kleine Punkte unterhalb der Sonnensymbole zu erkennen. Darstellung in Parallelprojektion

BEISPIEL 4: In der linearen Projektion in Bild 28-57 kann die Wanderung des Terminators während eines drakonitischen Satellitenumlaufs über der gesamten Erdoberfläche beurteilt werden. Inhaltlich handelt es sich um dieselbe Darstellung wie in Bild 28-56. ◄

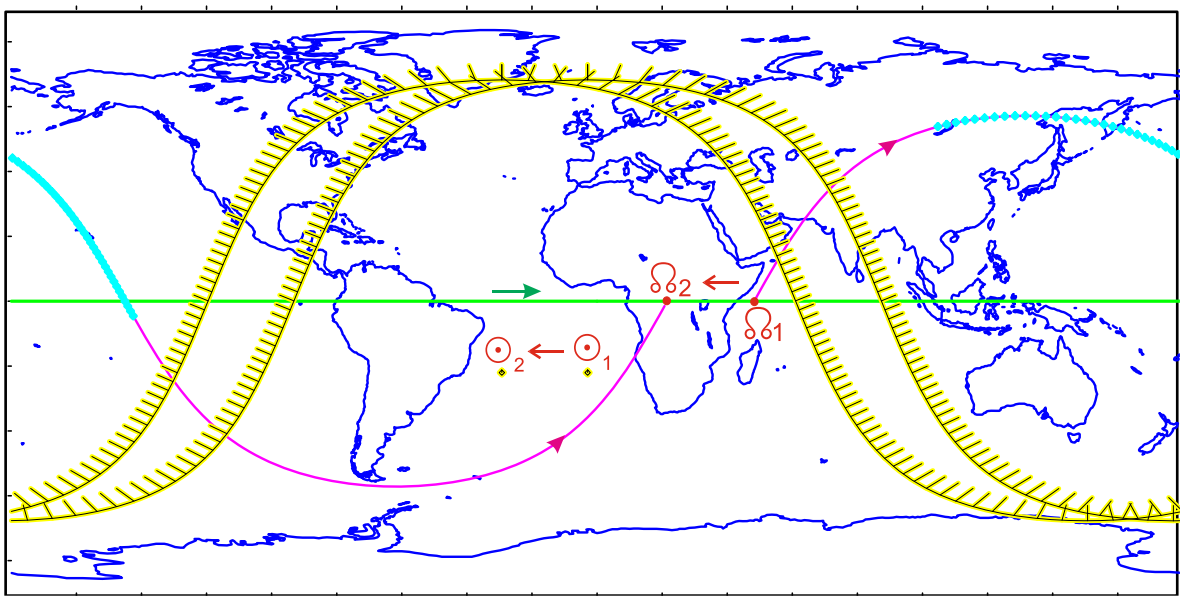


Bild 28-57: wie Bild 28-56 jedoch in linearer Projektion

28.10.6 Sonnenelevationskurven

Sonnenelevationskurven sind Kurven für eine konstante Sonnenelevation $h_\odot$. Um die geographischen Koordinaten der Kurvenpunkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ bei vorgegebener Sonnenelevation zu berechnen, wird nach Bild 32.2 (Abschnitt 32.1, Band V) mit bekannter geozentrischer Distanz $r_\odot$ und Radius R der in diesem Fall kugelförmig angenommenen Erde die Schrägentfernung $\rho_\odot = \overline{\odot P}$ benötigt. Formel (32.5) ergibt

$$\rho_\odot = -R\sinh_\odot + \sqrt{r_\odot^2 - R^2\cos^2 h_\odot} \quad . \tag{28.349}$$

Der Zentralwinkel γ zwischen Sonne und Kurvenpunkt P kann mit den Formeln (32.11) berechnet werden:

$$\sin\gamma = \frac{\rho_\odot}{r_\odot}\cos h_\odot \quad , \quad \cos\gamma = \frac{R}{r_\odot} + \frac{\rho_\odot}{r_\odot}\sin h_\odot \quad . \tag{28.350}$$

Damit und dem Azimut A_S als Parameterwinkel können mit den Formeln (28.348) die Randpunkte konstanter Sonnenelevation berechnet werden. BEISPIEL in Bild 28-58.

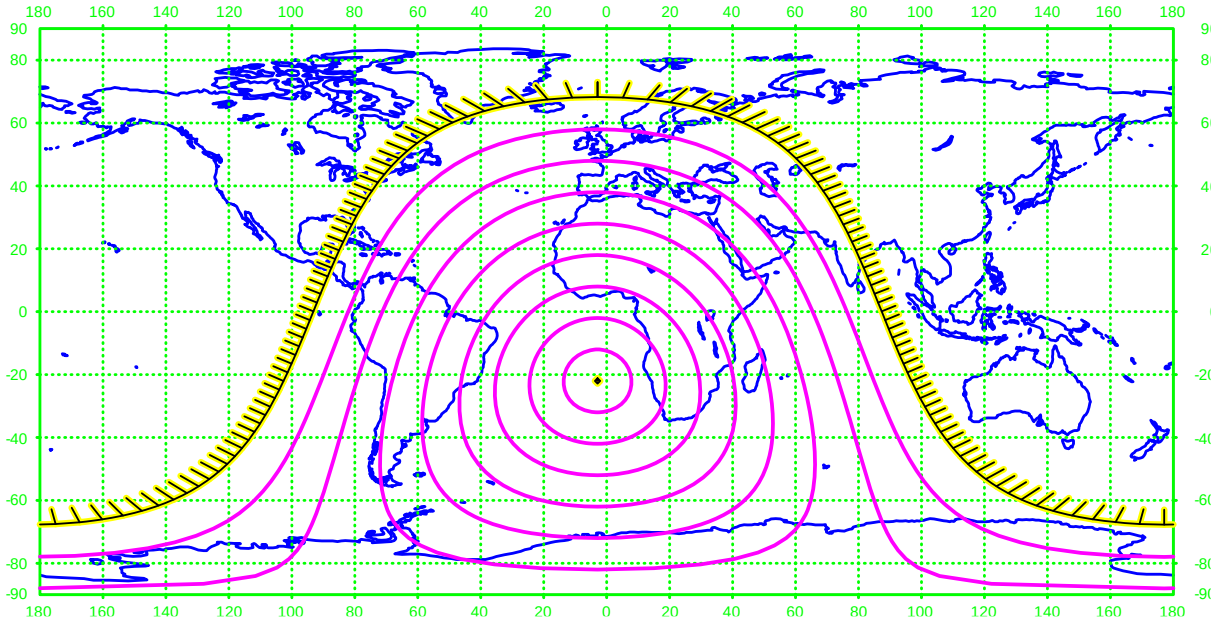


Bild 28-58: Die Kurven konstanter Sonnenelevation 0° (Terminator), 10°, 20°, 30°, 40°,50°, 60°, 70°, 80°. Ort des subpolaren Punktes für das Datum 1979-12-03/12

28.10.7 Okkultationsmessungen (Limb Sounding)

Bei Schatteneinn- oder austritt berührt die Sichtlinie Satellit-Sonne die Erdoberfläche bzw. einen Gebiet mit der Höhe *H* über der Erdoberfläche. In diesem Gebiet herrscht Dämmerung, die für Okkultationsmessungen genutzt werden kann. Sie dienen etwa für spektroskopische Untersuchungen der Atmosphäre, zum Nachweis von Spurengasen[1]. Wenn die Schatteneinbzw. Austrittszeiten mit einer der Methoden aus Abschnitt 28.10.3 bekannt sind, interessiert wo die Dämmerungsgebiet auf der Erdoberfläche liegen, die pro Satellitenumlauf zu Okkulta-

[1] z. B. in den geodätischen Missionen CHAMP und GRACE

tionsmessungen genutzt werden können. Dazu müssen die geographischen Koordinaten dieser Gebiete bestimmt und eventuell dargestellt werden.

Zur entsprechenden Schattenkontaktzeit t_C werden in einer Ephemeridenrechnung die geozentrischen Zustandsvektoren $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ des Satelliten und $(\mathbf{r}_\odot,\dot{\mathbf{r}}_\odot)$ der Sonne berechnet. Damit sind auch die geozentrischen äquatorialen Koordinaten (α_S,δ_S) des Satelliten und $(\alpha_\odot,\delta_\odot)$ der Sonne bekannt.

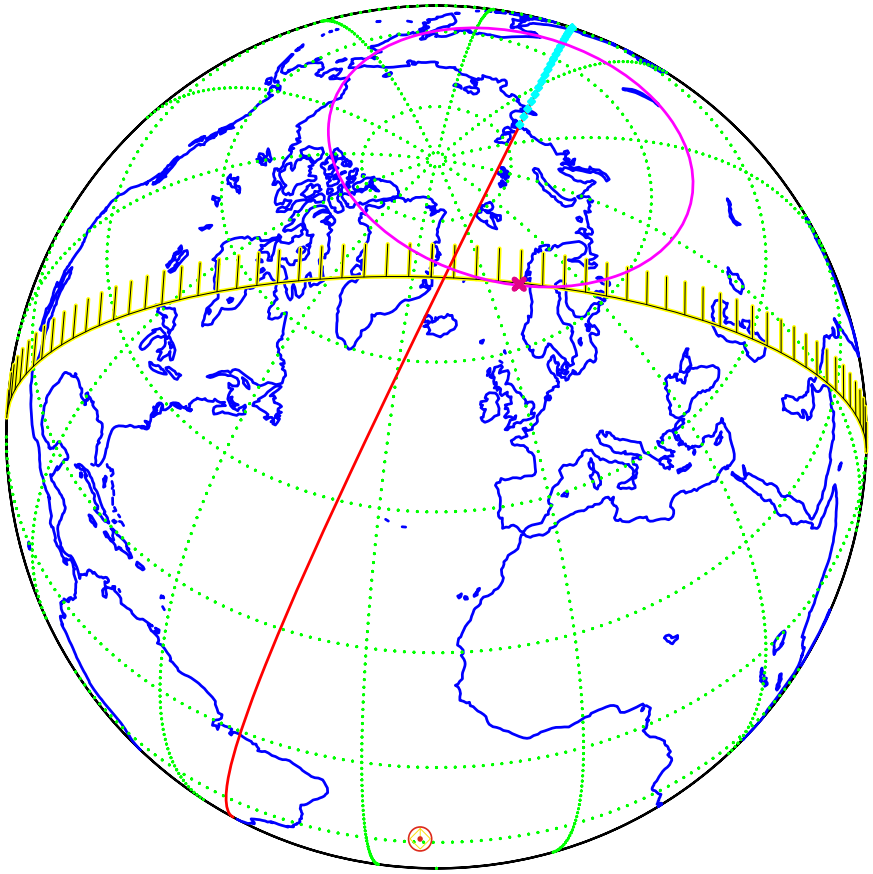


Bild 28-59: Zur Berechnung des Sonnenokkultationspunktes von einem Satelliten im Moment des Schattenaustritts. Der gesuchte Punkt liegt auf dem Terminator. Eingezeichnet ist der Sichtkreis, der vom Satelliten aus auf der Erdoberfläche überdeckt werden kann: Horizontkreis. Der subsolare Punkt ist am unteren Rand des Erdballes erkennbar

Vom Satelliten aus gesehen geht die Sonne über dem Horizontkreis auf (Sunrise) oder unter (Sunset). Bild 28-59 zeigt den Verlauf einer Satellitenbahn von Nord nach Süd mit Schattenaustritt. Im Moment des Schattenkontaktes ist der lokale Horizontkreis auf der (kugelförmig gedachten) Erdoberfläche eingezeichnet. Er berührt den zu diesem Zeitpunkt bestehenden Terminator im Sonnenokkultationspunkt. Dessen geographische Koordinaten (λ_D,φ_D) sind zu berechnen.

Entscheidend für die Berechnung ist auf der Erdkugel der Großkreis durch Schattenkontaktpunkt $S(\alpha_S,\delta_S)$, Sonnenokkultationspunkt $P_D(\lambda_D,\varphi_D)$ und subsolarem Punkt $\odot(\alpha_\odot,\delta_\odot)$.

Entsprechend Bild 28-53 (auf Seite 521) hat dieser Großkreis bei Bezug auf die Sonne das Azimut A_S. Zu seiner Berechnung wird die Elongation $\gamma_\odot$ zwischen den geozentrischen

Richtungen zu Satellit und Sonne mit dem Sonnenwinkel $\tau = \alpha_S - \alpha_\odot$ benötigt. Sie ergibt sich aus

$$\cos\gamma_\odot = \cos\tau_S \cos\delta_S \cos\delta_\odot + \sin\delta_S \sin\delta_\odot \ , \ \sin\gamma_\odot = \sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \qquad (28.351)$$

und es wird

$$\sin A_S = \frac{\cos\delta_S \sin(\alpha_S - \alpha_\odot)}{\sin\gamma_\odot} \ , \ \cos A_S = \frac{\sin\delta_S - \sin\delta_\odot \cos\gamma_\odot}{\cos\delta_\odot \sin\delta_\odot} \quad \langle \sin\gamma_\odot \neq 0 \ . \qquad (28.352)$$

Im Fall $\sin\gamma_\odot = 0$ wird $\sin A_S = 0, \cos A_S = 1$ gesetzt. Der Fall $\cos\delta_\odot = 0$ kann wegen $|\delta_\odot| \leq \varepsilon$ nicht auftreten. Die Elongation Sonne zu Sonnenokkultationspunkt ist im Fall von Kernschatten aus Formel (28.293) bekannt

$$\cos\gamma_0 = -\sin\beta = -\frac{R_\odot - R}{r_\odot} \ , \ \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_0} \ , \qquad (28.353)$$

im Fall von Halbschatten mit Formel (28.304) aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{R_\odot + R}{r_\odot} \ , \ \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_0} \ . \qquad (28.354)$$

Die Deklination des Sonnenokkultationspunktes ergibt sich damit aus

$$\sin\delta_D = \cos A_S \cos\delta_\odot \sin\gamma_0 + \sin\delta_\odot \cos\gamma_0 \ , \qquad (28.355)$$

seine Rektaszension aus

$$\sin(\alpha_D - \alpha_\odot) = \frac{\sin\gamma_0 \sin A_S}{\cos\delta_D} \ , \ \cos(\alpha_D - \alpha_\odot) = \frac{\cos\gamma_0 - \sin\delta_D \sin\delta_\odot}{\cos\delta_D \cos\delta_\odot} \quad \langle \cos\delta_D \neq 0 \ . \qquad (28.356)$$

Im Fall $\cos\delta_D = 0$ wird $\sin(\alpha_D - \alpha_\odot) = 0, \cos(\alpha_D - \alpha_\odot) = 1$ gesetzt.

Mit $\alpha_D = (\alpha_D - \alpha_\odot) + \alpha_\odot$ und der zum Zeitpunkt t_C gültigen mittleren Sternzeit Θ_G zu Greenwich[1] wird die gesuchte geographische Länge des Sonnenokkultationspunktes erhalten

$$\lambda_D = \alpha_D - \Theta_G \ . \qquad (28.357)$$

Falls auch die geodätische Breite φ_D gewünscht wird, folgt sie aus Formel[2] (37.36)

$$\tan\varphi_D = \frac{\tan\delta_D}{(1-f)^2} \ . \qquad (28.358)$$

BEISPIEL 1: Zahlenwerte zu Bild 28-59: gegeben sei eine kreisförmige sonnensynchrone Satellitenbahn mit Vorgabe der Halbachse *a*= 7053.155 km. Nach Abschnitt 28.8.2.3 (auf Seite 479) ergibt sich die Inklination *i*=98°.10953005. Der absteigende Knoten soll bei Einschuss die geographische Länge $\lambda_{\mathfrak{V}} = -170°$ und am 27. Januar 1982 um 11^h mittlere lokale Sonnenzeit (M.S.T.) erfolgen. Damit ergibt sich nach Abschnitt 28.6.3 (ab Seite 442) die Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\Omega = 111°.86601971$ und die mittlere Epocheanomalie

[1] Abschnitt 9.1.2.1 sowie Formel (8.196) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

[2] Abschnitt 37.2.3 (Band V)

$M_0 = 180°.0$. Wegen e=0.0 ist das Argument des Perigäums $\omega = 0°.0$. Die entsprechende Epoche ergibt sich zu t_0 :1982 – 01 – 27 / 22:20:0.00. Die mittlere synodische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_S} = 5902.235276$ s.

Die Bahn wird über das Intervall 1982-01-27/13: 00: 0.00 bis 1982-01-27/14:30: 0.00 berechnet.

Die erste Schattenkontaktzeit bei Schattenbeginn (Sunset) lautet (siehe Abschnitt 28.10.3, ab Seite 507): t_{S1} :1982- 1-27/13:06:24.651.

Der zughörige Sonnenokkultationspunkt hat die geographischen Koordinaten:

$\lambda_{D/Occ/t1} = 144°.102$, $\varphi_{D/Occ/t1}$ = -69.823, der Satellit: $\lambda_{S/t1} = 156°.689$, $\varphi_{D/Occ}$ = -45°.343.

Dieser Kontakt liegt auf der Rückseite des Erdballs in Bild 28-59.

Der zweite Schattenkontakt im Moment des Schattenaustritts (Sunrise) erfolgt um:

t_{S2} :1982- 1-27/13 : 40 : 43.340.

Zu diesem Zeitpunkt hat die Sonne die Koordinaten: $\lambda_\odot = 337°.75871, \varphi_\odot = -18°.51106$,

der Satellit: $\lambda_{S/t2} = 102°.212$, $\varphi_{D/Occ}$ = 76°.857

und der Sonnenokkultationspunkt: $\lambda_{D/Occ} = 11°.927$, $\varphi_{D/Occ}$ = 68°.287. ◄

BEISPIEL 2: Es werde eine STS-Bahn mit den mittleren Keplerelementen $\bar{a}_0 = 6626.473$km, $\bar{e}_0 = 0.00011$, $\bar{i}_0 = 57°.06434$, $\bar{\Omega}_0 = 242°.68435$, $\bar{\omega}_0 = 98°.25948$, $\overline{M_{00}} = 90°.601160$ zur Epoche t_0 :1984-01-01/00:00:0.0 vorgegeben. Für diesen Tag werden die Sonnenokkultationspunkte bei Schatteneintritt sowie bei Schattenaustritt in Bild 28-60 dargestellt. ◄

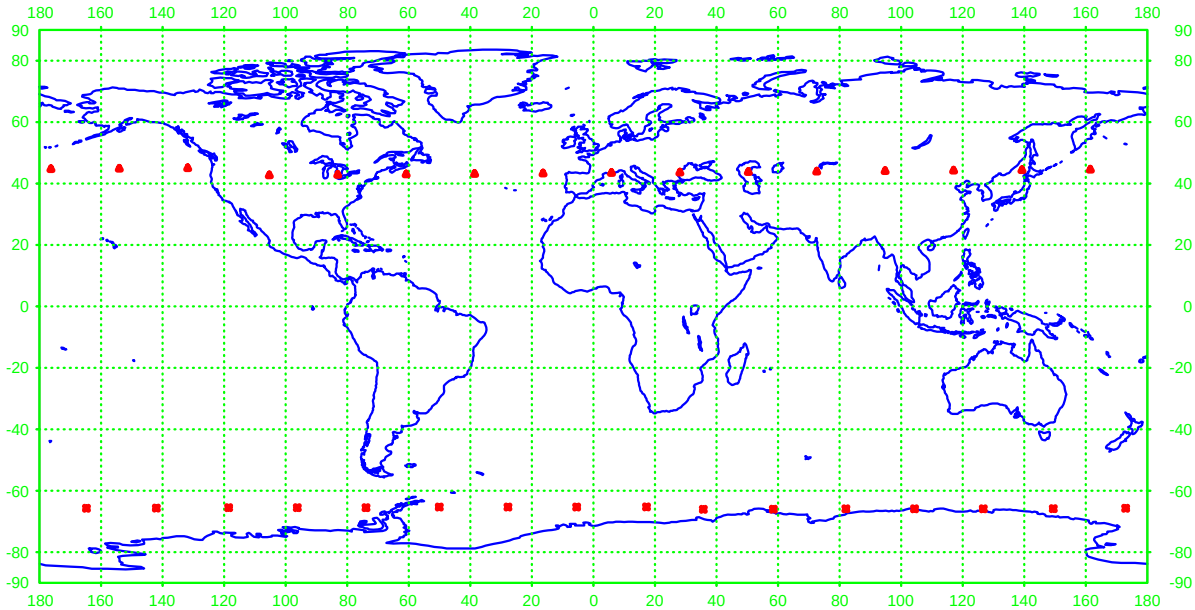


Bild 28-60: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Tages. Die Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert (im Süden um die Antarktis) , bei Schattenaustritt durch ▲ (über der Nordhalbkugel)

BEISPIEL3: Für dieselbe STS-Bahn wie im vorgehenden Beispiel 2 werden die Sonnenokkultationspunkte über den Verlauf eines Monats, in diesem Fall über den Monat Januar untersucht. ◄

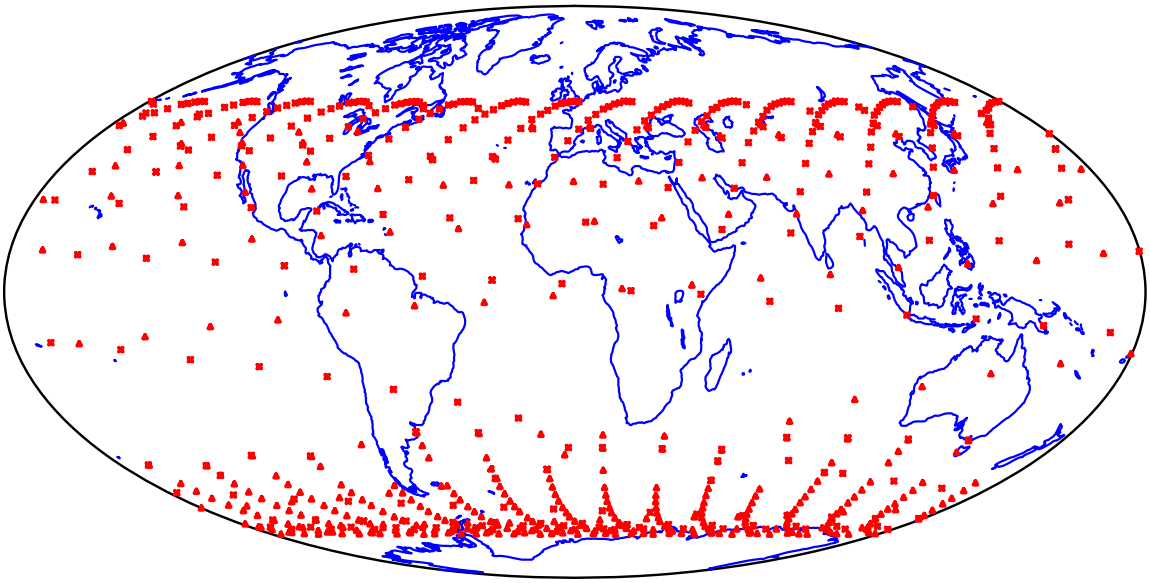


Bild 28-61: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Monats. Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert, bei Schattenaustritt durch ▲

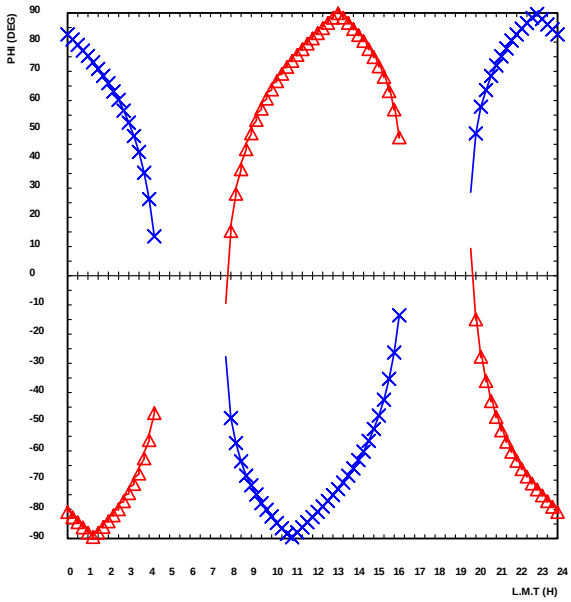


Bild 28-62: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 21. März 1982 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲)

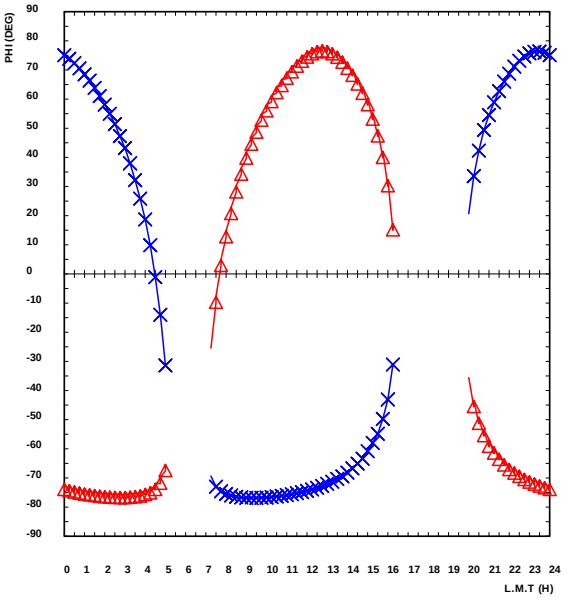


Bild 28-63: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 17. August 2018 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲)

BEISPIEL 4: Für die kreisförmige sonnensynchrone Bahn H=675 km (a=7053.137 km, i=98°.10953) wird in Bild 28-62 und Bild 28-63 untersucht, welche Art von Sonnenokkultationspunkten über welchem Breitenkreis auf der Erdoberfläche erreicht werden können, wenn bei Einschuss im aufsteigenden Knoten der Bahn die Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über

den ganzen Tag variiert. Die beiden Bilder zeigen, wie empfindlich die Aussage gegenüber dem untersuchten Zeitraum ist. ◄

BEISPIEL5: Für dieselbe STS-Bahn wie in den Beispielen 2 und 3 werden die Sonnenokkultationspunkte im Verlauf eines Jahres in Bild 28-64 berechnet: bei Start am 1. Januar, 0h, kann abgelesen werden, über welchem Breitenkreis an einem bestimmten Datum Schatteneinoder –austritt stattfindet. ◄

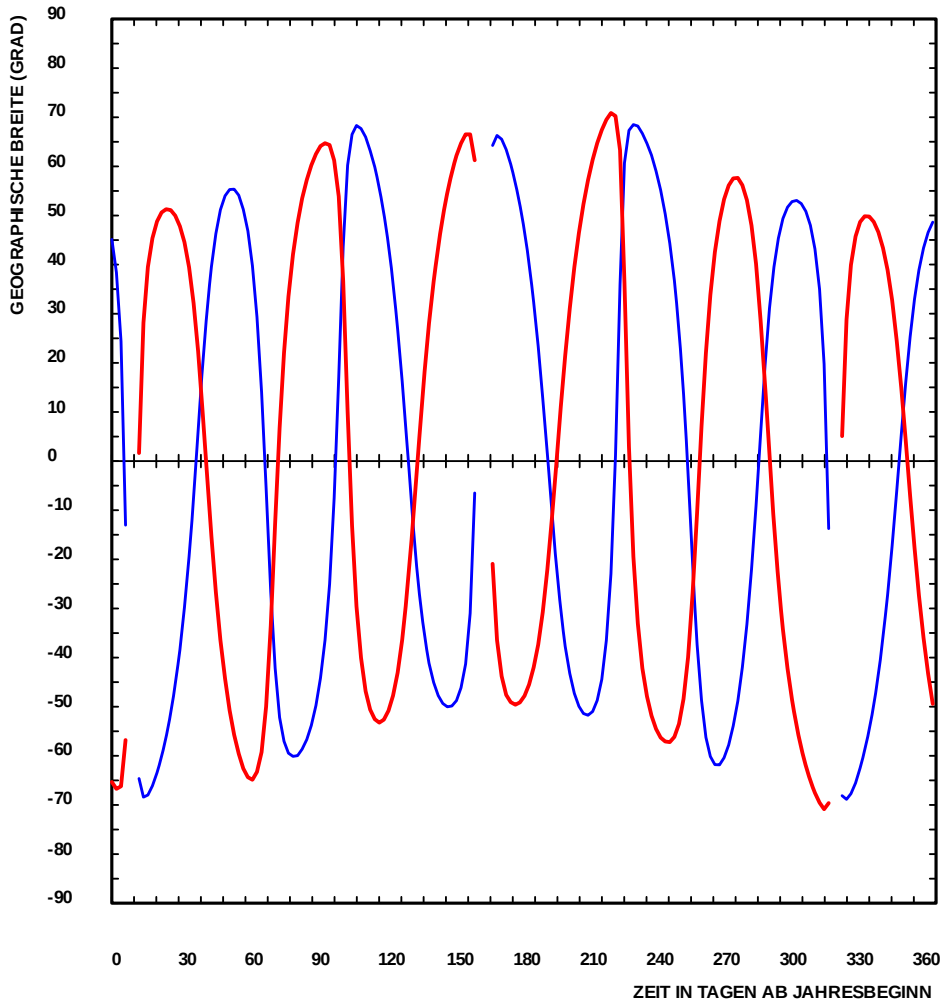


Bild 28-64: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer Shuttlebahn aus (Daten wie in den Beispielen 2 und 3) im Verlauf eines Jahres, blaue Kurven: Schatteneintritt (Sunset), rote Kurven: Schattenaustritt (Sunrise), Startzeitpunkt 1. Jan. 1984

28.10.8 Abschätzungen zur Genauigkeit bei Schattenberechnungen

28.10.8.1 Abschätzung des Einflusses der Erdabplattung

In allen bisher abgeleiteten Formeln ist die Erdabplattung berücksichtigt. *R* ist der halbe Erddurchmesser in der Schnittebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt. Folgende numerischen Beispiele zeigen, dass für Abschätzungen im Allgemeinen die Erdabplattung vernachlässigt werden kann, worauf auch schon der geringe Unterschied im Verlauf der Schattenfunktionen zwischen den drei Schattenmodellen in Bild 28-42 und Bild 28-43 hingewiesen hat. Es soll aber auch abgeschätzt werden, mit welchen Fehlern im ungünstigsten Fall zu rechnen sein wird.

Es werde jeweils eine Kreisbahn mit konstantem Radius r=a angenommen. Diese Bahn möge in der Ekliptik liegen, so dass der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot = 90°$ betrage. Sei $\gamma_\odot$ die geozentrische Elongation eines Satelliten zur Sonne. Der Satellit befindet sich dann nach Bild 28-65 im Erdschatten über dem Bogen $2\gamma_K$, wobei

$$\gamma_K := 180° - \gamma_\odot \tag{28.359}$$

definiert ist. Dieser Winkel kann aus der Kernschattengleichung (28.301) für $S_K = 0$ berechnet werden.

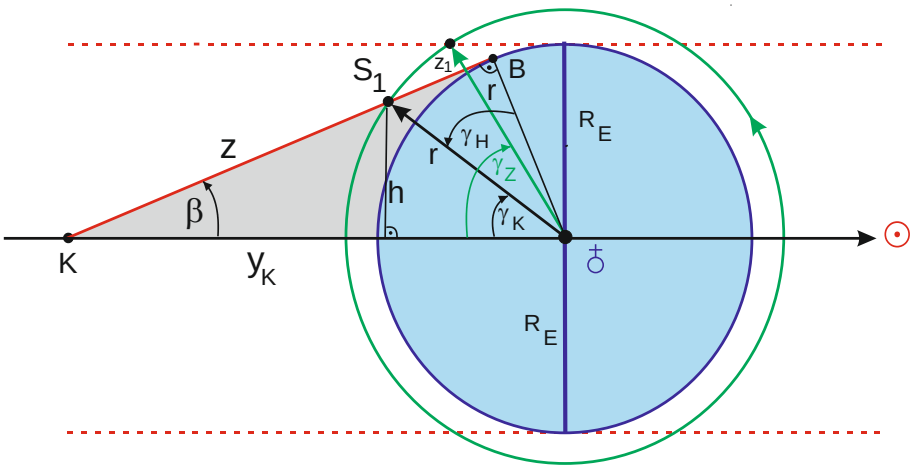


Bild 28-65: Zur Abschätzung der Schattenzeit im Kegel- und Zylindermodell am Beispiel einer kreisnahen Bahn in der Ekliptik

BEISPIEL 1: Gegeben sei die erdnahe Kreisbahn $r = a = 7000\,\text{km}$, sowie die Daten der Sonne $r_\odot = 149500\,\text{km}, \text{R}_\odot = 696000\,\text{km}$. Wenn der Erdradius zu $R_E = 6378.137\,\text{km}$ angenommen wird, folgt aus Formel (28.292) für die geozentrische Distanz der Gegensonne $y_K = 1382687.430\,\text{km}$ und aus Formel (28.293) der Öffnungswinkel an der Gegensonne K zwischen den Richtungen zum Schatteneintritt S_1 und dem Erdmittelpunkt: $\beta = 0°.264298$. Die Distanz $z_1 = \overline{S_1 B}$ zwischen Schatteneintritt S_1 und dem Randpunkt B an der Erde beträgt $z_1 = \sqrt{r^2 - R_E^2} = 2884.332\,\text{km}$. Damit kann der geozentrische Winkel zwischen S_1 und B berechnet werden aus $\sin\gamma_H = z_1 / r = 0.412047362$, somit $\gamma_H = 24°.333512$. Der geozentrische Winkel zwischen S_1 und K beträgt im Fall des maximalen Erdradius R_E

$$\gamma_{KE} = 90° - \beta - \gamma_H = 65°.402190.$$

Zum Vergleich wird der untere mögliche Extremfall untersucht, der für den Polradius mit der Erdabplattung[1] $f = 0.00335281$ den Betrag $R_P = (1 - f) R_E = 6356.752\,\text{km}$ erhalten wird. Es sind $y_K = 1378008.741\,\text{km}$, $z_1 = \sqrt{r^2 - R_P^2} = 2931.116\,\text{km}$, somit

$$\gamma_{KH} = 64°.980810.$$

[1] Tabelle E.1 (Band V)

Der relative Fehler beträgt

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_{KP}|}{\gamma_{KP}} = 0.65\%$$

Für diese Bahn beträgt die mittlere sonnensynodische Umlaufzeit $\overline{P_S} = 5818.202438\,\mathrm{s}$. Somit beträgt die Schattendauer (infolge der Annahme der Bahn in der Ekliptik) ohne Berücksichtigung der Erdabplattung

$$T_{SE} = \frac{2\gamma_{KE}}{360°}\overline{P_S} = 2114.018\,\mathrm{s}$$

,

mit Berücksichtigung (maximaler) Abplattung

$$T_{SP} = \frac{2\gamma_{KP}}{360°}\overline{P_S} = 2100.397\,\mathrm{s}$$

.

Der absolute Fehler beträgt in diesem Fall

$$|T_{SE} - T_{SP}| = 13.621\mathrm{s}.$$

Bei Vernachlässigung der Erdabplattung kann in diesem ungünstigsten Fall der Schatteneintritt sich um etwa 7 Sekunden verspäten, in Realität also eher erfolgen. ◄

BEISPIEL 2: Gegeben sei eine geosynchrone Kreisbahn mit Bahnradius

$$r = 42164.704\,\mathrm{km} \quad .$$

Entsprechend den Berechnungen im ersten Beispiel ergeben sich die Werte

$$\gamma_{KE} = 8°.436072$$
$$\gamma_{KP} = 8°.406675$$

somit

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_{KP}|}{\gamma_{KP}} = 0.35\% \quad .$$

Mit der mittleren sonnensynodischen Umlaufzeit $\overline{P_S} = 86396.988595\,\mathrm{s}$ ergeben sich die Schattenzeiten

$$T_{SE} = 4049.185\mathrm{s}$$
$$T_{SP} = 4035.063\mathrm{s}$$

,

der in diesem Fall unrealistische ungünstigste Fall hat den absoluten Fehler

$$|T_{SE} - T_{SP}| = 14.121\mathrm{s}. \quad ◄$$

Anmerkung: Die hier berechneten Zahlenwerte können nur als größenordnungsmäßige Anhaltswerte verstanden werden, da die Bahnebene in der Ekliptik angenommen wurde. Außerhalb der Ekliptik verändern sich demgegenüber die Winkelwerte γ_H geringfügig. ◄

28.10.8.2 Einfluss von Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn bei Kernschatten

Als Maß wird der Zentralwinkel $\gamma_S = 180° - \gamma_0$ zwischen Scheitel *K* des Kernschattens und der Schattengrenze *B* auf der Erdoberfläche gewählt. Mit dem halben Öffnungswinkel β aus Formel (28.293) kann dieser Winkel aus der Beziehung (28.353) erhalten werden: $\cos\gamma_0 = -\sin\beta$. Änderungen dieses Winkels um etwa $\Delta\gamma_S$ bewirken eine Verschiebung der Schattengrenze auf der Erdoberfläche um die Strecke

$$\Delta x \approx \frac{R\,\pi\,\Delta\gamma_S}{180°}\ [\text{km}] \quad \left\langle \Delta\gamma_S := \gamma_S - \overline{\gamma_S} \right. \quad . \tag{28.360}$$

Bezug sind die astronomische Einheit[1]

$$\overline{r_\odot} = A = 1.49597870 \times 10^8\ \text{km} \tag{28.361}$$

sowie die kugelförmig gedachte Erde mit Radius $R_E = 6378.140\,\text{km}$ entsprechend dem Bezugswinkel $\overline{\gamma_S}$. Mit der Exzentrizität der Erdbahn[2] $e_{\oplus} = 0.0167$ ergeben sich Perihel- und Apheldistanz

$$r_{\oplus P} = 147.1 \times 10^6\ \text{km} \quad , \quad r_{\oplus A} = 152.1 \times 10^6\ \text{km} \quad . \tag{28.362}$$

Der Polradius beträgt $R_P = 6356.752\,\text{km}$. Damit ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$r_\odot$	R	$y_K\,[\text{km}]$	γ_S	$\Delta\gamma_S$	$\Delta x\,[\text{km}]$
$\overline{r_\odot}$	R_E	1382691.358	89°.735702	---	---
$r_{\odot A}$	R_E	1406722.637	89°.740217	$0°.004515 \mathrel{\hat{=}} 16''.3$	0.5026
$r_{\odot A}$	R_P	1401712.676	89°.740209	$0°.004507 \mathrel{\hat{=}} 16''.2$	0.5008
$r_{\odot P}$	R_E	1360509.854	89°.731393	$-0°.004309 \mathrel{\hat{=}} -15''.5$	-0.4797
$r_{\odot P}$	R_P	1355664.477	89°.731384	$-0°.004318 \mathrel{\hat{=}} -15''.5$	-0.4790

➢ *Der maximale Fehler in der Berechnung der Schattengrenze beträgt bei Vernachlässigung von Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn etwa einen halben Kilometer.* ◀

[1] Aus Tabelle E-1 in Abschnitt E.1 (Band V)

[2] Aus Abschnitt E.6

28.10.8.3 Abschätzung des Einflusses der Zylindermodells

Im Zylindermodell ist stets $\gamma_S = 90°$. Bezogen auf die mittlere Distanz $\overline{r_\odot} = 1\text{AU}$ der Sonne und $R = R_E$ für den Erdradius ergibt sich der Fehler

$$\Delta\gamma_S = 90° - \overline{\gamma_S} = 0°.264298$$

Entsprechend einer Verschiebung der Schattengrenze auf der Erdoberfläche um

$$\Delta x = 29.4216\,\text{km} \quad .$$

Dieser an sich erhebliche Fehler kann bei den zeichnerischen Darstellungen vernachlässigt werden, da einer Strichstärke von 0.2 mm bei einer Länge des Äquators von 25 cm in der Abbildung bereits etwa 35 km in der Realität entsprechen.

An weiteren einfachen Beispielen soll analog zu den vorstehenden Abschnitten mit in der Ekliptik liegenden kreisnahen Satellitenbahnen der Unterschied der Schattenzeiten zwischen Kegel- und dem Zylindermodell gemäß Bild 28-65 (auf Seite 531) abgeschätzt werden.

BEISPIEL 1: Für die erdnahe Kreisbahn $r = a = 7000\,\text{km}$ lautet nach dem vorherigen Abschnitt ohne Berücksichtigung der halbe Zentralschattenwinkel $\gamma_{KE} = 65°.402190$. Im Zylindermodell kann der entsprechende Winkel erhalten werden aus

$$\sin\gamma_Z = \frac{R_E}{r} \quad , \quad \gamma_Z = 65°.666488 \quad .$$

Der relative Fehler beträgt

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_Z|}{\gamma_Z} = 0.40\,\% \quad ,$$

ist somit geringer als der Einfluss der Erdabplattung im ungünstigsten Fall. ◄

BEISPIEL 2: Im Fall einer geostationären Bahn mit $r = 42164.704\,\text{km}$ ergibt sich aus den Berechnungen im zweiten Beispiel des vorstehenden Abschnittes der Wert $\gamma_{KE} = 8°.436072$. Bezogen auf das Zylindermodell lautet der entsprechende Winkel $\gamma_Z = 8°.700370$. Der relative Fehler

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_Z|}{\gamma_Z} = 3.04\,\%$$

ist beträchtlich größer als der entsprechende Fehler infolge der Erdabplattung. Zu erwarten ist daher, dass mit zunehmendem Bahnabstand zum Erdmittelpunkt die Aussagen durch das Zylindermodell unzuverlässiger werden. Einfache geometrische Überlegungen zeigen darüber hinaus, dass bei elliptischen Bahnen noch ungünstigere Verhältnisse auftreten werden.

- *Schattenkontaktzeiten werden im Allgemeinen am zuverlässigsten durch das Kernschattenmodell berechnet.* ◄

28.11Bewegung eines Erdsatelliten in Bezug auf die Sonne

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse spielen die unterschiedlichsten Beziehungen eines Satelliten, seiner Lageorientierung, der Orientierung seiner Bahn oder seines spezifischen Bewegungsverhaltens zur Sonne eine besondere Rolle. Dies ist wichtig etwa zur Auslegung der Sensorgeometrie, der Beobachtungsmöglichkeiten im optischen Bereich, für Untersuchungen des Thermalhaushaltes und des Energiehaushaltes des Satelliten und viele andere Aspekte. Im folgenden Abschnitt werden einige Beispiele vorgestellt, wie sie in der Satellitenpraxis häufig vorkommen.

28.11.1 Sonnenaspektwinkel

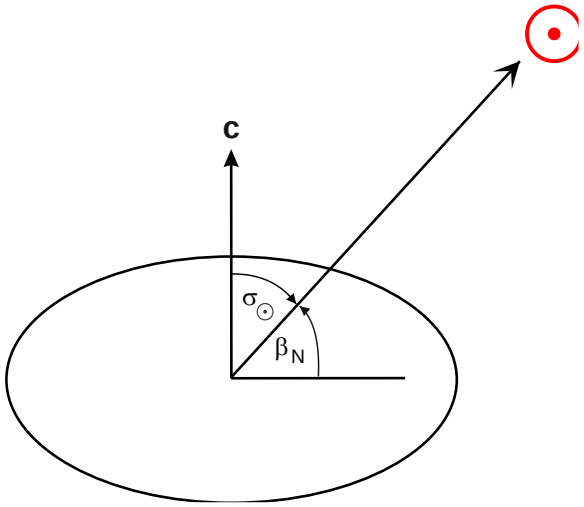


Bild 28-66: Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ und der Beta-Winkel in der NASA-Definition β_N

Der Begriff Sonnenaspektwinkel wird in der Welt der Sensortechniker mit unterschiedlichen Definitionen verwendet und muss daher mit genaueren Spezifikationen verwendet werden. Als Sonnenaspektwinkel wird der Winkel zwischen dem Richtungsvektor zur Sonne und dem Normalenvektor einer Satellitenbahnebene bezeichnet. Wenn der Normalenvektor einer Bahnebene sowie der Ortsvektor der Sonne in äquatorialen Koordinaten gegeben ist[1]

$$\mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 = G\left\langle \left(\sin i \sin\Omega\,\mathbf{p}_1 - \sin i \cos\Omega\,\mathbf{p}_2 + \cos i\,\mathbf{p}_3\right) \right. \quad , \quad G = |\mathbf{c}|$$

$$\mathbf{r}_\odot = r_\odot\left(\cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot\,\mathbf{p}_1 + \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot\,\mathbf{p}_2 + \sin\delta_\odot\,\mathbf{p}_3\right) \quad ,$$

kann er berechnet werden aus

$$\cos\sigma_\odot = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_\odot}{G\,r_\odot} = \sin\left(\Omega - \alpha_\odot\right)\sin i\,\cos\delta_\odot + \cos i\,\sin\delta_\odot \quad . \tag{28.363}$$

Gelegentlich wird auch der bei der NASA übliche Einfallswinkel der Sonneneinstrahlung in die Bahnebene als NASA-Betawinkel verwendet:

$$\beta_N = 90° - \sigma_\odot \quad . \tag{28.364}$$

[1] Siehe etwa in den Beziehungen (8.423) in Abschnitt 8.12.2 (Band II)

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine kreisförmige erdnahe Satellitenbahn mit mittlerer Bahnhöhe H=300 km und Inklination i=57°. Der Einschuss in die Bahn erfolge über dem Ort (KSC) $\lambda = -80°.69$, $\varphi = 28°.5$ um 6^h mittlerer Ortszeit in nördlicher Richtung zum Datum 2018-08-17. In Bild 28-67 ist der Verlauf des Sonnenaspektwinkels im Verlauf eines ganzen tropischen Jahres ab Startdatum dargestellt. Die Kurve spiegelt die Wiederholrate $\overline{P_{\Omega\odot}} = 360° / \dot{\tau}_{\Omega s}$ der Stellung des Bahnknotens („mittlere sonnensynodische Umlaufzeit eines Bahnknotens“) bezüglich der Sonne in Formel (28.228) auf Seite 456 wieder. Sie beträgt in diesem Beispiel $\overline{P_{\Omega\odot}} = -64.237\,\mathrm{d}$.◀

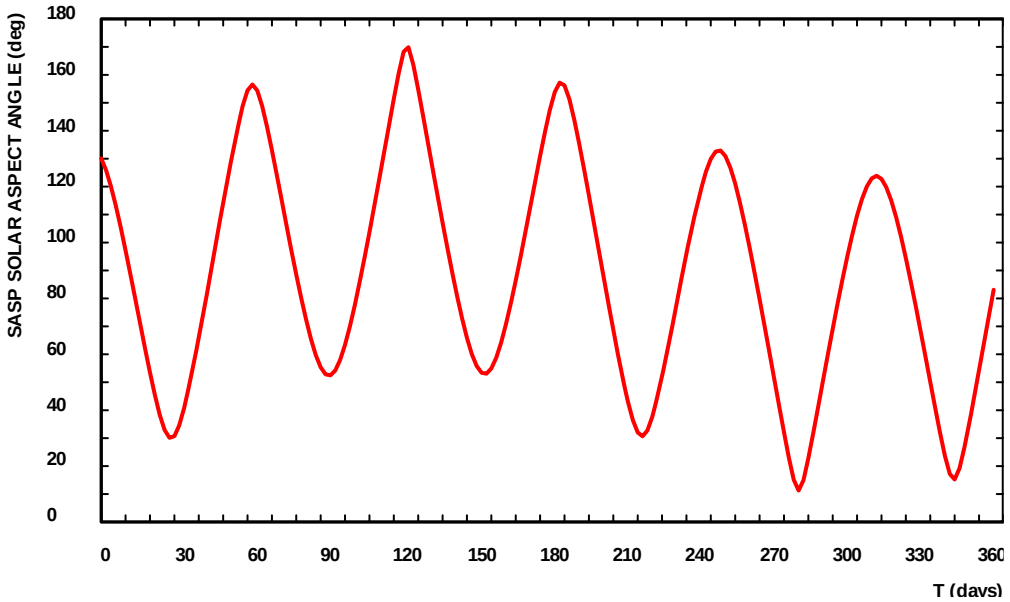


Bild 28-67: Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn über ein tropisches Jahr

BEISPIEL 2: Zur Auswahl eines geeigneten Startzeitpunktes wird der Einfall der Sonnenstrahlung in die Bahnebene untersucht. Gegeben seien die Bahnparameter (a, e, i) einer Satellitenbahn. Bezogen auf einen Startort werden mit diesen Parametern in Abhängigkeit von der Tageszeit *t* über einen ganzen Tag die Bahnelemente (Ω, ω, M_0) mit der in Abschnitt 28.6.3.2 (auf Seite 445) hergeleiteten Methode berechnet. Damit ist für jeden vorgegebenen Tageszeitpunkt die Orientierung der Bahnebene in Bezug auf die Sonne bekannt und es kann der Sonneneinfallswinkel β_N in die jeweilige Bahnebene im Moment des Bahneinschusses berechnet werden.

Im Beispiel wird als Startort das KSC ($\lambda = -80°.69$, $\varphi = 28°.5$) gewählt, als Bahnparameter H=300 km, e=0.0, i=57°. In Bild 28-68 sind die Sonneneinfallswinkel, die im Verlauf eines Tages durch Wahl eines geeigneten Startdatums der Satellitenmission erhalten werden können, für vier verschiedene Tage im Abstand von drei Monaten aufgetragen. ◀

BEISPIEL 3: Sonneneinstrahlung im Apogäum einer Bahn.

Eine spezielle Aufgabenstellung ist die Untersuchung des Verlaufs der Sonneneinstrahlung in ausgewählten Bahnpunkten. Bild 28-69 zeigt die Sonneneinstrahlung in das Apogäum einer hochexzentrischen Satellitenbahn. Dazu wir der Zwischenwinkel zwischen dem geozentri-

schen Ortsvektor des Apogäums der Satellitenbahn und dem geozentrischen Ortsvektor der wahren Sonne berechnet.

Im Beispiel werden die Bahndaten der EQUATOR-S Mission verwendet:
Apogäumshöhe $H_A = 63781.40\,\text{km}$, Perigäumshöhe $H_P = 500\,\text{km}$,
große Bahnhalbachse *a*=38518.837 km, Exzentrizität e=0.82143446,
Inklination: i=1°.8, Argument des Perigäums: $\omega = 270°$.

Der Einschuss in den absteigenden Bahnast erfolge am 21. März 1996 um 0h mittlerer Sonnenzeit (lokale Mitternacht) über dem Startgelände San Marco $(\lambda = 40°.2125,\ \varphi = -1°.8)$. Das Bild zeigt den Verlauf des Zwischenwinkels über ein tropisches Jahr. ◄

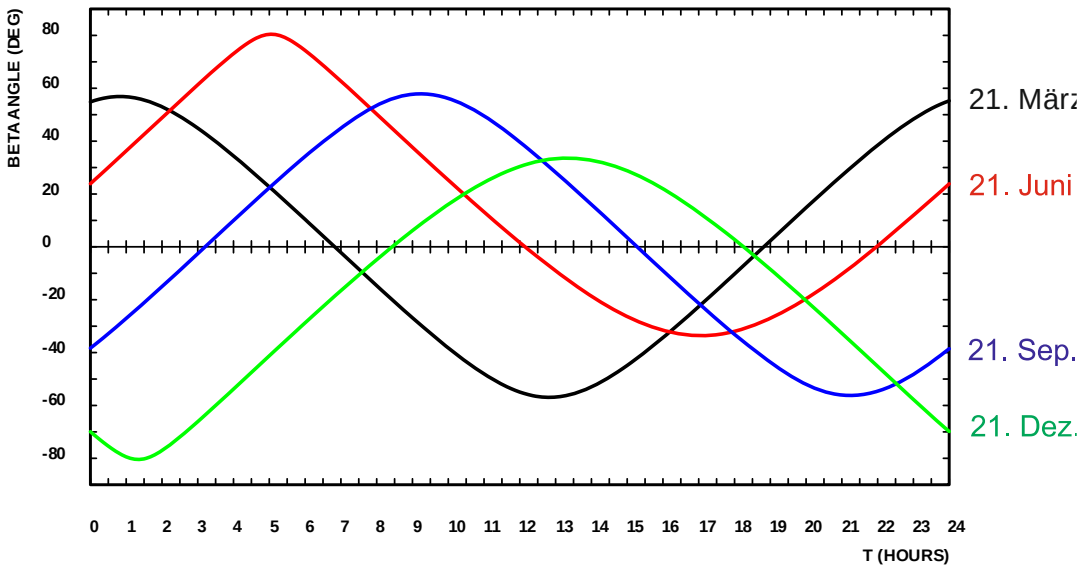


Bild 28-68: Der Beta-Winkel β_N einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn bei unterschiedlichen Startzeitpunkten an 4 verschiedenen Tagen

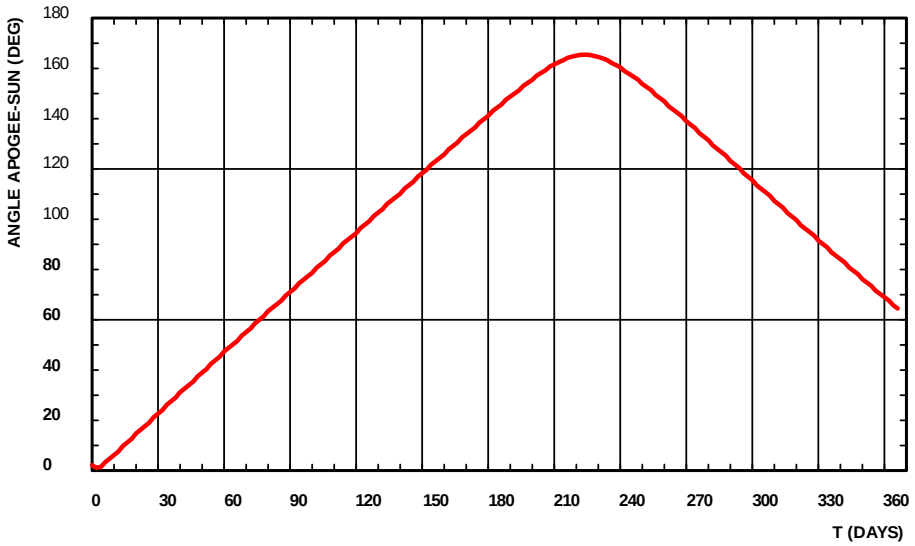


Bild 28-69: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen geozentrischer Richtung zum Apogäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: Equator-S)

BEISPIEL 4: Sonneneinstrahlung im Perigäum einer Bahn.

Alternativ zum vorhergehenden Beispiel zeigt Bild 28-70 den Zwischenwinkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des Satelliten im Perigäum und dem geozentrischen Ortsvektor der Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres. Bahndaten EQUATOR-S wie in Beispiel 3. ◄

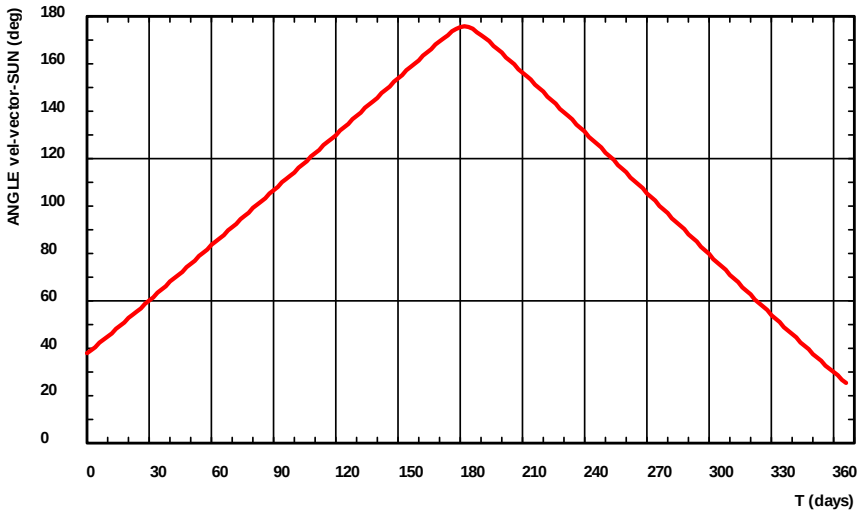


Bild 28-70: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor im Perigäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: Equator-S)

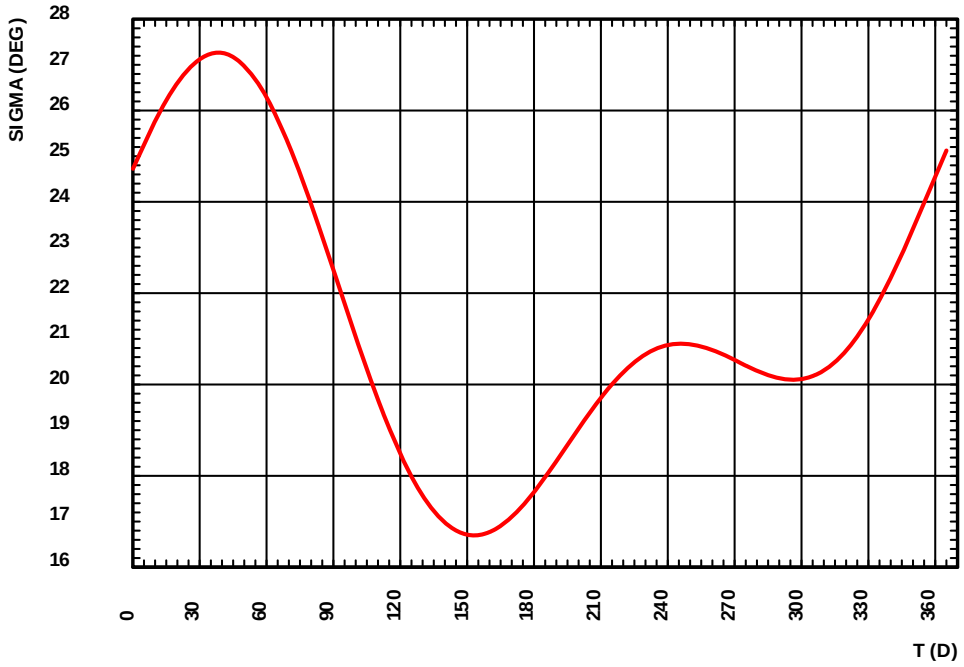


Bild 28-71: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der geozentrischen Richtung zur Sonne im Moment des Schattenaustritts des Subsatellitenpunktes (Bahndaten IRS-1E, Projekt ASIS)

Beispiel 5: Sonneinstrahlung bei Schattenaustritt: Bild 28-71 zeigt den Verlauf des Winkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor eines Erdsatelliten und dem geozentrischen Ortsvektor der wahren Sonne für den Moment, in dem der Subsatellitenpunkt den Erdschatten verlässt. Als Bahndaten werden im Rahmen des Projektes OASIS die Parameter des IRS-1E Satelliten verwendet, der sich auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn bewegen soll: a= 7195.140 km, e= 0.0, i= 98°.689. Der absteigende Knoten sollte am 1. Januar 1994 um

10:30:00 mittlerer Ortssonnenzeit (M.S.T.) über dem Referenzpunkt $\lambda = \varphi = 0°.0$ erfolgen. Der Verlauf des Zwischenwinkels wird über ein tropisches Jahr dargestellt. ◄

28.11.2 Sonne in der Subsatellitenbahn

Für optische Sensoren ist das Beleuchtungsverhalten im beobachteten Gebiet von Bedeutung. Die Variation dieses Verhaltens wird vom Typus der Satellitenbahn und der Bewegung der wahren Sonne bestimmt.

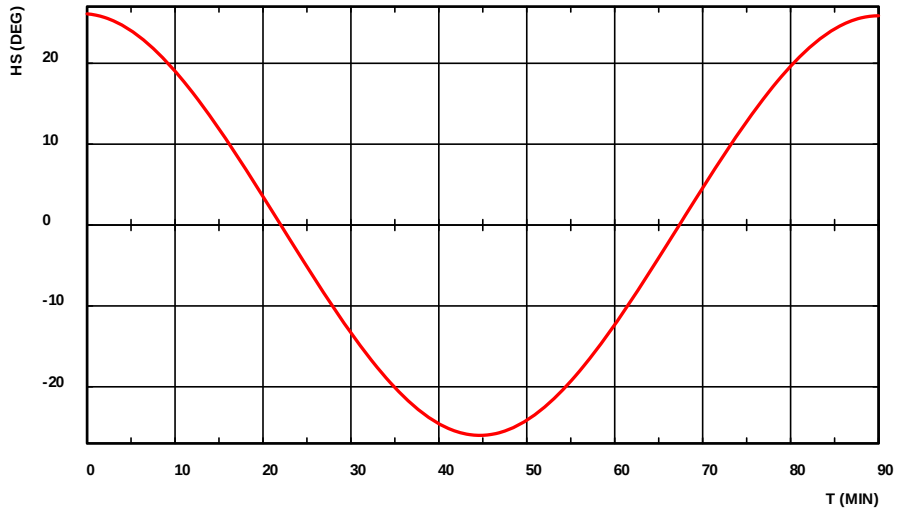


Bild 28-72: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer STS-Bahn über einen drakonitischen Umlauf.

BEISPIEL 1: Als Beispiel wollen wir die Einstrahlung der Sonne in die Subsatellitenbahn untersuchen. Dazu werden die geodätischen Koordinaten des Subsatellitenpunktes benötigt, die mit den Formeln in Kapitel 38.2 (Band V) berechnet werden können. Die Koordinaten des Subsatellitenpunktes dienen als Koordinaten eines Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche, für den die topozentrischen Koordinaten der Sonne aus den Formeln in Abschnitt 28.4.1 (auf Seite 418) folgen, insbesondere das Azimut und die Elevation $h_\odot$. In Bild 28-72 ist der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer kreisnahen STS Bahn (H=300 km, e=0.0, i=57°) über einen drakonitischen Umlauf dargestellt. ◄

BEISPIEL 2: Bild 28-73 zeigt den von der Sonne unter mindestens $h_\odot = 20°$ beschienenen Subsatellitenbahnbogen einer erdnahen und kreisnahen Satellitenbahn. Als Parameter wurden die Bahndaten der MIR-Station (H = 400 km, e = 0.001, i = 51°.6484) gewählt. Der aufsteigende Knoten mit der geographischen Länge $\lambda = 350°$ wird um 12^h mittlerer Ortssonnenzeit überflogen. Zur Ergänzung ist der subsolare Punkt zu 12^h U.T. und der zugehörende Terminator für das Datum 2018-08-25/12:00:00.0 eingezeichnet. ◄

BEISPIEL 3: Je nach Bahntyp wird der mindestens unter der Höhe („Elevation“) $h_\odot = 20°$ sonnenbeschienene Bahnbogen längs der Subsatellitenbahn im Laufe der Zeit verschoben. Bild 28-74 zeigt für dieselbe Bahn wie in Bild 28-73 diese Entwicklung über ein Jahr. Die gewählte Bahn hat die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = -5°.00736$ /d, somit die säkulare Sonnendrift $\dot{\tau}_s = \dot{\Omega}_s - n_\odot = -5°.99298$/d, wenn $n_\odot$ die mittlere tropische Bewegung der Sonne ist.

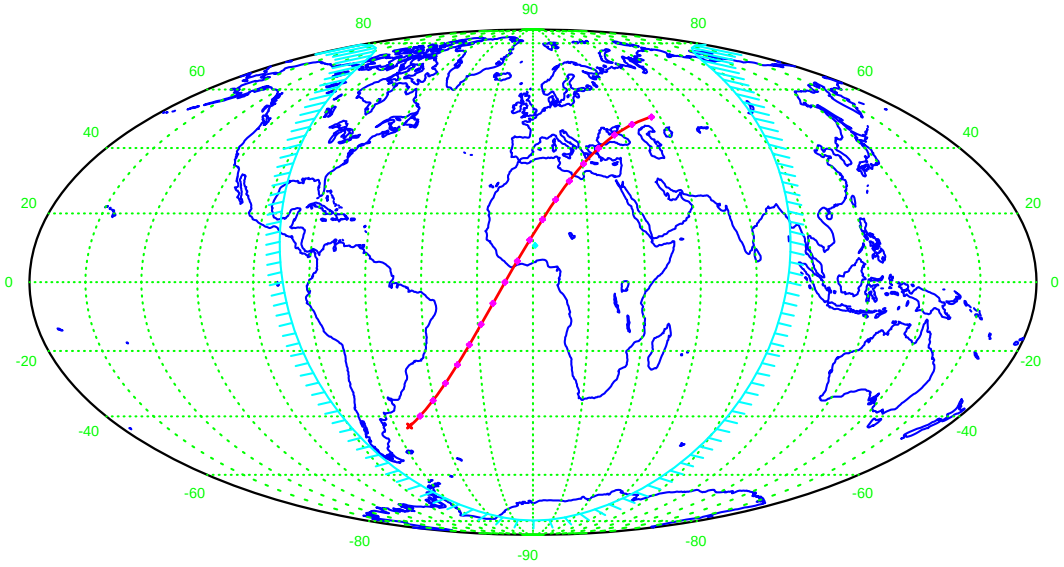


Bild 28-73: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer kreisnahen und erdnahen Satellitenbahn. Die Subsatellitenbahn wird unter der Mindestelevation 20° von der Sonne beschienen-

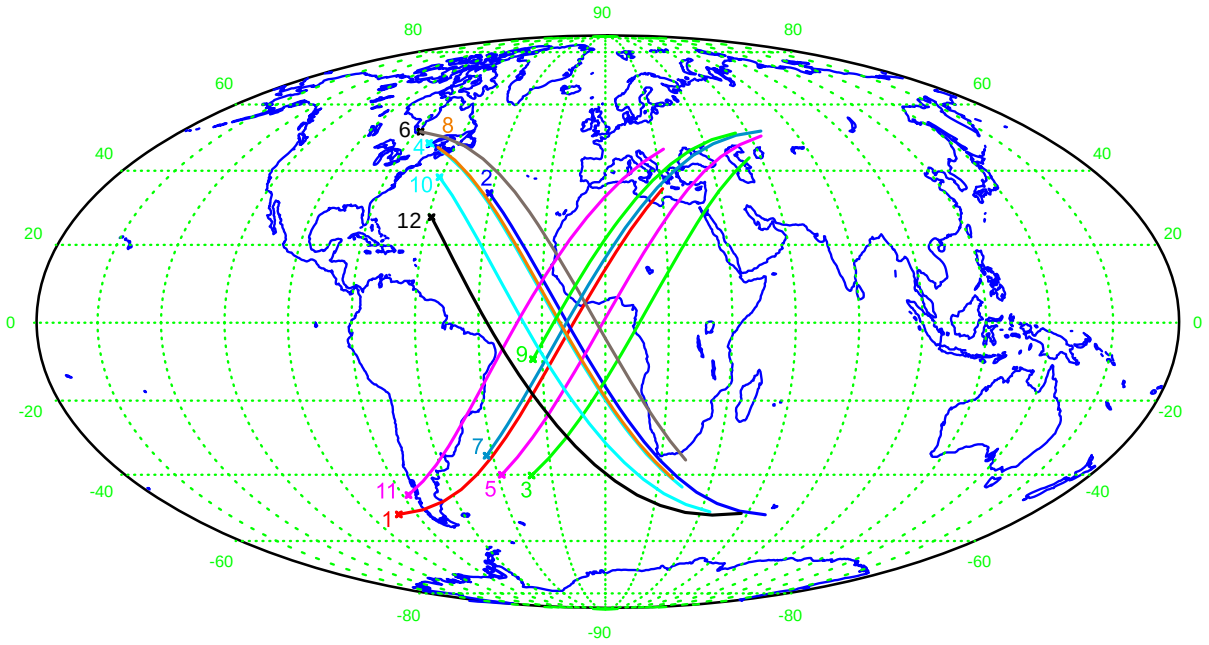


Bild 28-74: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen im Jahresverlauf im Abstand von einem Monat um die Mittagszeit in U.T.. Die Subsatellitenbahn ist nur für den Fall gezeichnet, dass die Sonne dort die Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20° übersteigt. Als Bahn wurde wieder (wie Bild 28-74) die MIR Stationsbahn gewählt. Die Monate sind durch Nummern bezeichnet.

Ein voller synodischer Umlauf der Bahnebene bezüglich der Sonne wird daher nach (siehe Formel (28.228))

$$P_{\tau} = \frac{360°}{\dot{\tau}_s} = 60^d.07052$$

vollzogen, was in Bild 28-74 in Form des alle 60 Tage sich wiederholenden Überdeckungsmusters klar zu erkennen ist. Dagegen wechselt nach 30 Tagen die Überflugrichtung: auf Süd-Nord folgt ein sonnenbeschienener Nord-Süd-Ast. Zu erkennen ist auch eine Asymmetrie bezüglich des Äquators, was eine Folge der wahren Sonnenbewegung ist. ◄

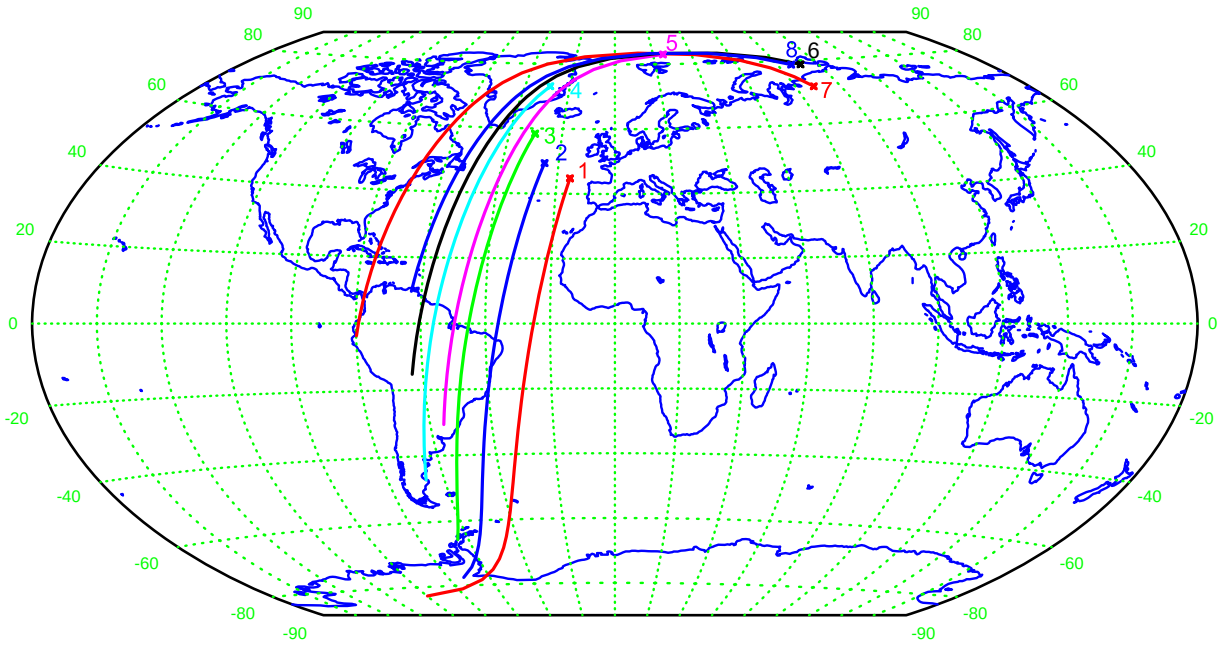


Bild 28-75: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer sonnensynchronen Bahn mit Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20°. ERS-1 Daten (H = 780 km, e = 0.0, i = 96°.55, mittlere Sonnenzeit im absteigenden Knoten: T_{desc} = $10^h\ 30^m$) . Bahnbogen um die Mittagszeit U.T. im Abstand von einem Monat über ein tropisches Jahr.

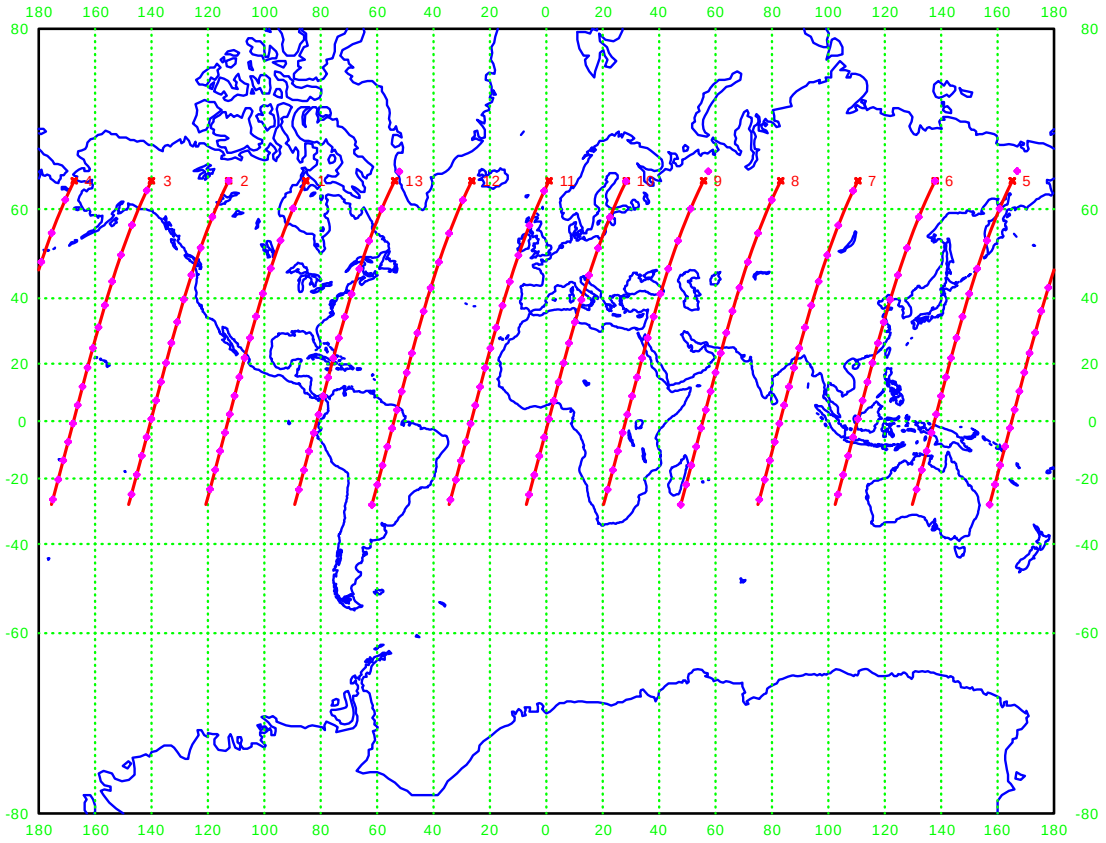


Bild 28-76: Von der Sonne beschienener Bahnbogen in der mittleren lokalen Sonnenzeit 17h – 19h (M.S.T.). Bahndaten ERS-1, alle Umläufe am 1. Juli 1980

BEISPIEL 4: Als Alternative zu den vorhergehenden Beispielen wird das Verhalten des sonnenbeschienenen Bahnbogens für eine sonnensynchrone Bahn betrachtet. Gewählt wurde die ERS-1 Bahn mit der mittleren Bahnhöhe $\bar{H}$ = 780 km, kreisförmig, Inklination $\bar{i}$ = 98°.55, mittlere Sonnenzeit im absteigenden Knoten: $T_{desc} = 10^h\,30^m$. In

Bild 28-75 wird nur der in der Mittagszeit, zwischen etwa 11^h und 13^h erfolgende sonnenbeschienene Bahnbogen dargestellt. Es wird pro Monat ein Bahnbogen dargestellt, für den die Sonne unter der Mindestelevation $h_\odot$ = 20° zu sehen ist. Die erhebliche Variation des Bahnbogens ist eine Folge der Jahreszeit infolge der Eigenbewegung der wahren Sonne, aber auch von der mittleren sich bei sonnensynchronen Bahnen nicht veränderbaren Sonnenzeit bei Knotenüberflug. Das Bild zeigt, dass der ausgewählte Bahnbogen nur in den Monaten Januar bis August die vorgegebene Bedingung der Mindestelevation der Sonne erfüllt. Es wird ausschließlich der absteigende Bahnbogen von der Sonne beschienen, der aufsteigende liegt stets auf der Nachtseite. ◄

BEISPIEL 5: Bild 28-76 zeigt die Subsatellitenbahn des ERS-1 Satelliten, die am 1. Juli 1980 in der mittleren lokalen Sonnenzeit zwischen 17^h und 19^h von der Sonne beschienen wird. Angenommene Bahndaten: a= 7576.554 km, e= 0.0, i= 100°.35621, $\Omega = \omega = M_0 = 0°.0$, Epoche 1. Juli 1980, 0^h U.T.. Die Bahn ist sonnensynchron. Der gewählte Bahnbogen liegt ausschließlich auf dem ansteigenden Bahnast. ◄

BEISPIEL 6: In Bild 28-77 wird der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt der Bahn beim Überflug des Satelliten über den Breitenkreis $\varphi = 45°$ über ein tropisches Jahr im aufsteigenden und im absteigenden Bahnast dargestellt. Als Bahndaten wurden die Parameter einer STS-Bahn gewählt: H=300 km (a=6678.137 km), e=0.0, i=57°. Der Einschuss sollte am 10. November 1987 um 14h mittlerer lokaler Sonnenzeit (M.S.T.) im aufsteigenden Bahnast vom KSC $(\lambda = -80°.69,\ \varphi = 28°.5)$ aus erfolgen. ◄

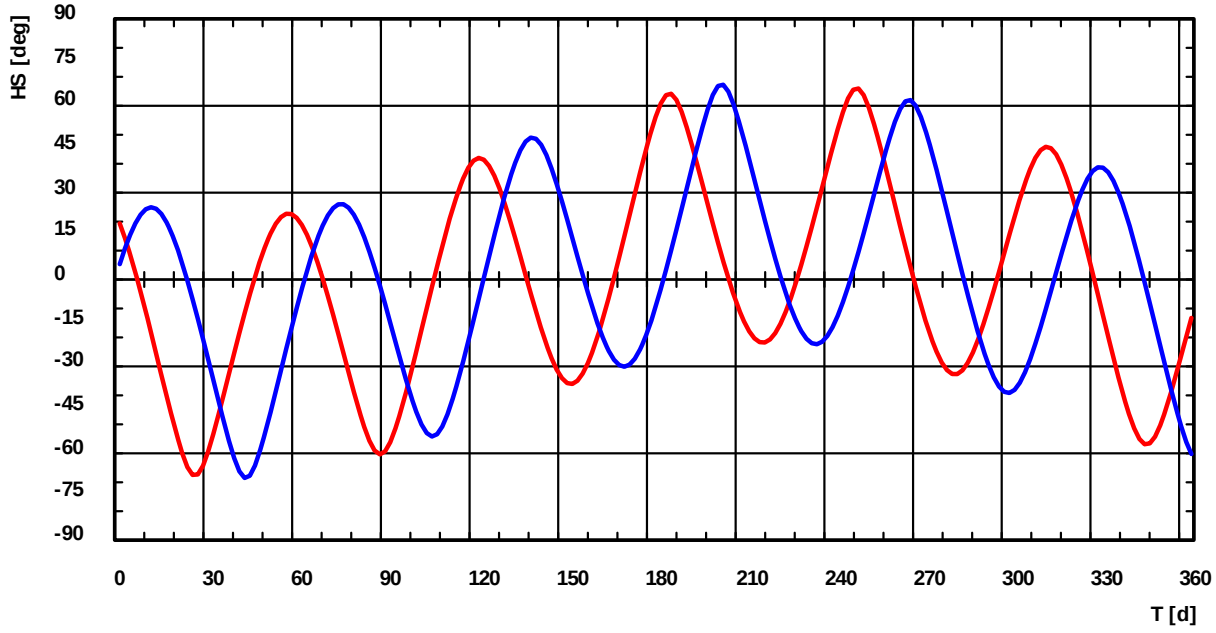


Bild 28-77: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ=45° einer STS-Bahn im Verlauf eines Jahres, rote Kurve im aufsteigenden, blaue Kurve im absteigenden Bahnast.

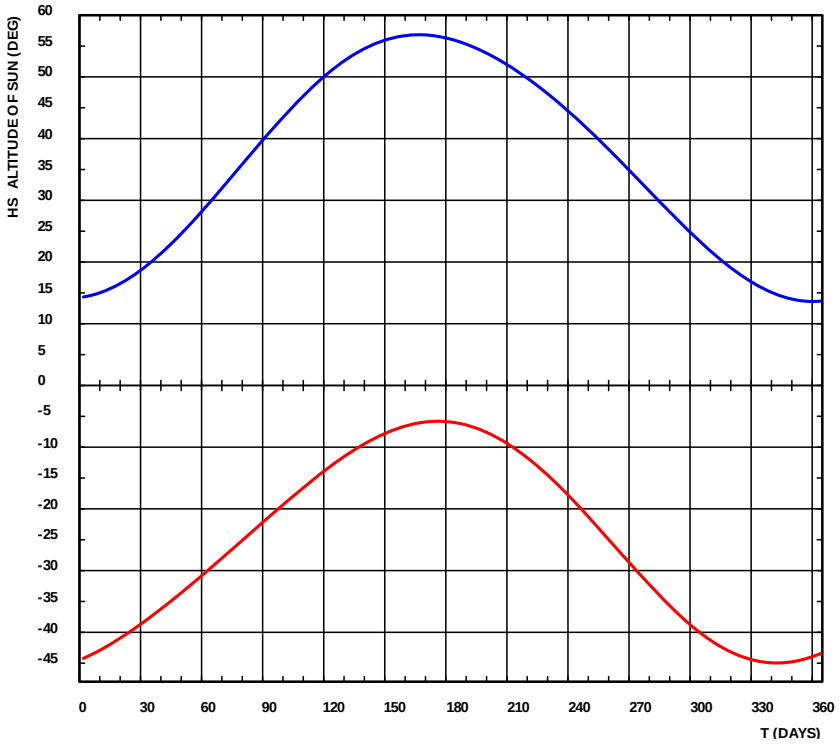


Bild 28-78: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ=49° einer sonnensynchronen Bahn im Verlauf eines Jahres.

BEISPIEL 7: In Bild 28-78 wird der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer sonnensynchronen Bahn dargestellt, wenn der Satellit den Breitenkreis $\varphi = 49°$ im aufsteigenden sowie im absteigenden Bahnast überfliegt. Als Parameter werden die Bahnelemente der ERS-1 Mission: a=7298.155, e=0.0, i=99°.099312, Ω=199°.428896, ω=0°.0, $M_0 = 180°$, Epoche: 1981,05,19,08,30,0.0 (U.T.). Das Bild zeigt, dass der Subsatellitenpunkt über dem gewünschten Breitenkreis ausschließlich im absteigenden Bahnast von der Sonne beschienen wird als Folge der Sonnensynchronität der Bahn. ◄

28.11.3 Sonnenelevation in Sensor Aufsichtspunkt

In Bezug auf die Sonne ändert sich eine Beobachtungsgeometrie nicht nur wegen der veränderlichen Geometrie über einem Rotationsellipsoid, also in Abhängigkeit von Breitenkreis und Bahnform, sondern als zusätzliche Parameter kommen eine Abhängigkeit vom Startzeitpunkt, von der Orientierung der Bahn im Raum und ihrer Änderung und saisonale Variationen hinzu. Dazu werde das Verhalten der Sonnenelevation im Aufsichtspunkt auf der abgeplatteten Erdoberfläche betrachtet.

Zur Darstellung der Sonnenbewegung genügen bei derartigen Untersuchungen die genäherten Daten der Sonnenbewegung nach Abschnitt 28.1. Die geographischen Koordinaten des Sensorauftreffpunktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche werden nach Abschnitt 38.2.1.2 (Band V) berechnet. Wie zur kurzfristigen Bahnanalyse erdnaher Satellitenbahnen üblich, wird als Bahnmodell nur eine *Kepler*bahn mit Überlagerung durch J_2, J_3, J_4 verwendet.

BEISPIEL: Gegeben sei eine formstabile sonnensynchrone Dämmerungsbahn mit der großen Halbachse a = 7669.14 km. Der aufsteigende Knoten werde um 18^h mittlerer Lokalzeit überflogen. Die mittlere *Brouwer*sche Exzentrizität beträgt somit $\bar{e} = 0.0$, die zugehörige gemittelte „eingefrorene“ Exzentrizität unter Berücksichtigung von J_3 beträgt $e_F = 0.001096162$. Wie in Abschnitt 23.10 (ab Seite 220) hergeleitet, hat das gemittelte Argument des Perigäums den Wert ω_L = 90°. Damit folgt für die Inklination der mittlere Wert $\bar{i}$ = 97°.0202. Für die Epoche am 21. März um 18^h U.T. ergibt sich die Rektaszension des aufsteigenden Knotens zu $\bar{\Omega}$ = 89°.5896. Dass nicht exakt 90° erreicht werden, liegt am Unterschied zwischen wahrer und fiktiver mittlere Sonne. Der Sensor blickt rechts zur Bahnbewegung des Satelliten, also mit bewegungsbezogenem Azimut A_S = 90°, und unter dem Nadirwinkel β = 35°.

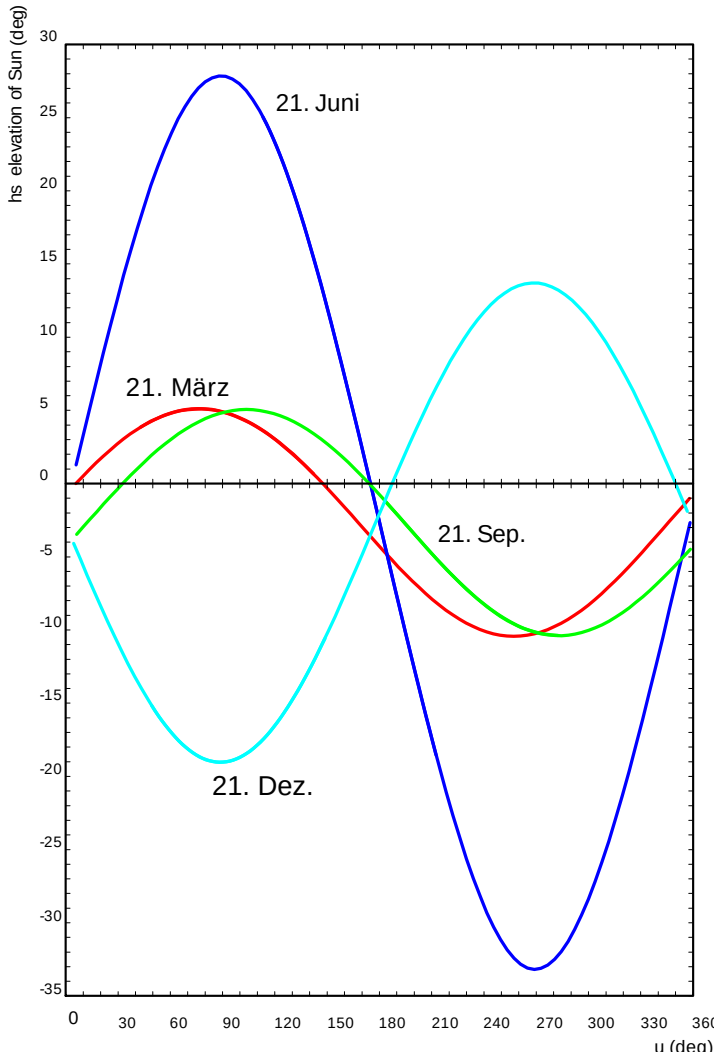


Bild 28-79: Verlauf der Sonnenelevation im Sensoraufsichtspunkt über einen drakonitischen Umlauf. Bahn: a = 6769.140, sonnensynchron, formstabil, aufsteigender Knoten um 18:00 Lokalzeit, Sensorgeometrie: rechts zur Bahn (Azimut = 90°), Nadirwinkel β = 35°, an den Äquinoktien und Solstitien

In Bild 28-79 ist der Verlauf der Sonnenelevation im Sensoraufsichtspunkt zu verschiedenen Zeitpunkten im Jahreskreis, nämlich an den Äquinoktien (21. März und 21. September) und den Solstitien (21. Juni und 21. Dezember) dargestellt. Obgleich der Sensoraufsichtspunkt in Bezug auf die Subsatellitenspur stets auf der sonnenabgewandten Seite liegt, überdeckt der Sensor während eines drakonitischen Umlaufs in allen untersuchten Fällen stets auch von der Sonne beschienene Gebiete, was für bestimmte Sensorentwicklungen aber nicht gewünscht

ist. Hier muss aber berücksichtigt werden, dass Sonnensynchronität stets nur auf die fiktive mittlere Sonne bezogen werden kann. Die Verhältnisse können im Fall des 21. März aus Bild 28-80 abgelesen werden. Die Subsatellitenbahn ist mit einer Taktung von 1 Minute dargestellt, rechts daneben die Überdeckungsspur mit Nadirwinkel $\beta = 35°$, was auf der Erdoberfläche etwa dem zentrischen Winkel $\gamma = 2°.5$ entspricht. Zu sehen ist der Terminator um 18^h Ortszeit, also während der Satellit sich gerade im aufsteigenden Knoten ☊ befindet. Es fällt auf, dass sich der aufsteigende Knoten nicht genau auf dem Terminator befindet, was bei einem Knoten von 18^h zu erwarten wäre. Diese Abweichung wird jedoch durch die Abweichung der wahren von der mittleren Sonne verursacht, der am 21. März etwa $-1°.8$ beträgt. Die Bahn „neigt“ sich der wahren Sonne ☉ zu, womit das Verhalten der Sonnenelevation im Aufsichtspunkt zu erklären ist. ◄

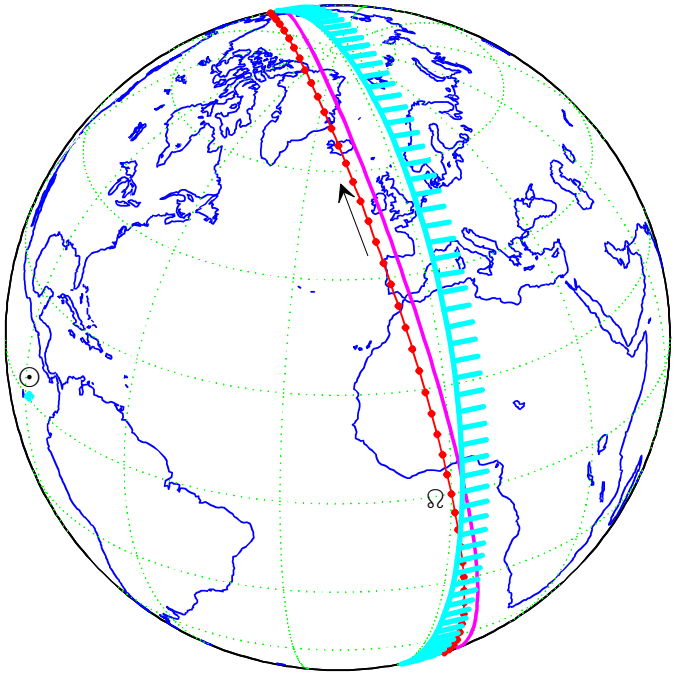


Bild 28-80: Zur Deutung des Verlaufs der Sonnenelevation aus Bild 28-79 im Fall des Verlaufs am 21. März. Die im Abstand von 1 Minute getaktete Subsatellitenbahn überquert den Äquator im aufsteigenden Knoten um 18 Uhr Ortszeit. Eingezeichnet ist die Überdeckungsspur rechts zur Bahn mit Nadirwinkel 35°. Der Sonnenterminator ist für 18 Uhr mittlerer Sonnenzeit dargestellt. Der subsolare Punkt des wahren Sonnenortes ist markiert (westlich von Mittelamerika).

28.11.4 Sonnenspiegelung pro Satellitenumlauf

Bewegt sich ein Satellit über einem Meer, kann es vorkommen, dass sich die Sonne vom Satelliten aus gesehen auf der Meeresoberfläche spiegelt („Sun glint points“). Dies kann zu einer Blendung eines Sensors an Bord des Satelliten führen und dadurch zu fehlerhaften oder ganz unbrauchbaren Beobachtungen.

Um eine derartige Sonnenspiegelung berechnen zu können, wird zunächst die Kenntnis des bewegungsbezogenen Azimuts A_{SS} des Sensors an Bord des Satelliten benötigt[1]. Wenn dieses Azimut in die Richtung der Ebene durch Satellitenort, Erd- und Sonnenmittelpunkt weist und der geozentrische Winkel γ zwischen den geozentrischen Richtungen zum Erd- und Sonnenmittelpunkt kleiner als 90° ist, kann eine Sonnenspiegelung auftreten. Als Bedingung für

[1] Siehe in den Abschnitt 32.1 und 32.3.2, Band V

Sonnenspiegelung muss das satellitenzentrierte bewegungsbezogene Azimut $A_{S\odot}$ der Sonne bekannt sein. Die geozentrischen Ortsvektoren von Sonne und Satellit seien

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\odot &= r_\odot \left[\cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot \mathbf{p}_1 + \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot \mathbf{p}_2 + \sin\delta_\odot \mathbf{p}_3\right] , \\ \mathbf{x} \quad &= r \ \left[\cos\alpha\cos\delta\mathbf{p}_1 + \sin\alpha\cos\delta\mathbf{p}_2 + \sin\delta\mathbf{p}_3\right] \ . \end{aligned} \tag{28.365}$$

Der satellitenzentrierte Ortsvektor der Sonne lautet

$$\mathbf{x}_{T\odot} = \mathbf{x}_\odot - \mathbf{x} = r_{T\odot}\left[\cos\alpha_{T\odot}\cos\delta_{T\odot}\mathbf{p}_1 + \sin\alpha_{T\odot}\cos\delta_{T\odot}\mathbf{p}_2 + \sin\delta_{T\odot}\mathbf{p}_3\right] \ . \tag{28.366}$$

Der heliozentrische Nadirwinkel zwischen Erdmittelpunkt und Satellitenort ergibt sich aus

$$\cos\beta = -\frac{\mathbf{x}_{T\odot}\cdot\mathbf{x}_\odot}{r_{T\odot}\, r_\odot} \ . \tag{28.367}$$

Der entsprechende Zentralwinkel folgt aus

$$\cos\gamma = \cos(\alpha_\odot - \alpha)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta \quad , \quad \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} \ . \tag{28.368}$$

Das Nordpol-bezogene Azimut der Sonne in Bezug auf den Satelliten folgt aus

$$\left.\begin{aligned} \cos A\sin\gamma &= -\cos(\alpha_\odot - \alpha)\cos\delta_\odot\sin\delta + \sin\delta_\odot\cos\delta \\ \sin A\sin\gamma &= \sin(\alpha_\odot - \alpha)\cos\delta_\odot \end{aligned}\right\rangle \ \sin\gamma > 0 \ . \tag{28.369}$$

Seien *i* die Inklination und Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn, folgt das Argument der Breite der Satellitenposition aus

$$\begin{aligned} \cos u &= (\cos\alpha\cos\Omega + \sin\alpha\sin\Omega)\cos\delta \\ \sin u &= \frac{\sin\delta}{\sin i} \quad . \end{aligned} \tag{28.370}$$

Das satellitenzentrierte bewegungsbezogene Azimut der Sonne folgt damit aus[1]

$$\begin{aligned} \cos A_{S\odot}\cos\delta &= \cos u\cos A\sin i + \sin A\cos u \\ \sin A_{S\odot}\cos\delta &= \cos u\sin A\sin i - \cos A\cos u \quad . \end{aligned} \tag{28.371}$$

Im Fall $\sin\gamma = 0$ wird $\cos A_{S\odot} = 1, \sin A_{S\odot} = 0$, gesetzt, der Fall $\sin i = 0$ wirkt sich nicht aus. Die Satellitenposition, an welcher der Onboard Sensor genau in der Schnittebene zur Sonne weist, kann dann mit der überlagerten Funktion

$$fct(t) \equiv \sin\left[A_{S\odot}(t) - A_{ss}\right] = 0 \tag{28.372}$$

berechnet werden. Als Anfangswert kann der Beginn eines Rechenintervalls genommen werden, das durchlaufen wird bis ein geeignetes Suchintervall gefunden ist. Der Ort der Sonnenspiegelung ist (ungefähr) um den halben Zentralwinkel vom Subsatellitenpunkt entfernt:

$$\sin\gamma' = \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} \ . \tag{28.373}$$

Die geographischen Koordinaten $(R_1', \lambda_1', \varphi_1')$ des Sonnenspiegelungspunktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche können dann unter Anwendung der Formeln in Abschnitt 38.1.3 mit Hilfe der ersten beiden Formeln (38.15) schließlich aus dem System (38.19) berechnet werden. Die

[1] Formel (32.20)

geodätische Breite φ_1 folgt aus (38.20). Da die Sonnenspiegelung erfahrungsgemäß ein diffuses Gebiet umfasst dürfte es in der Regel genügen, die Erdoberfläche als Kugel anzunähern.

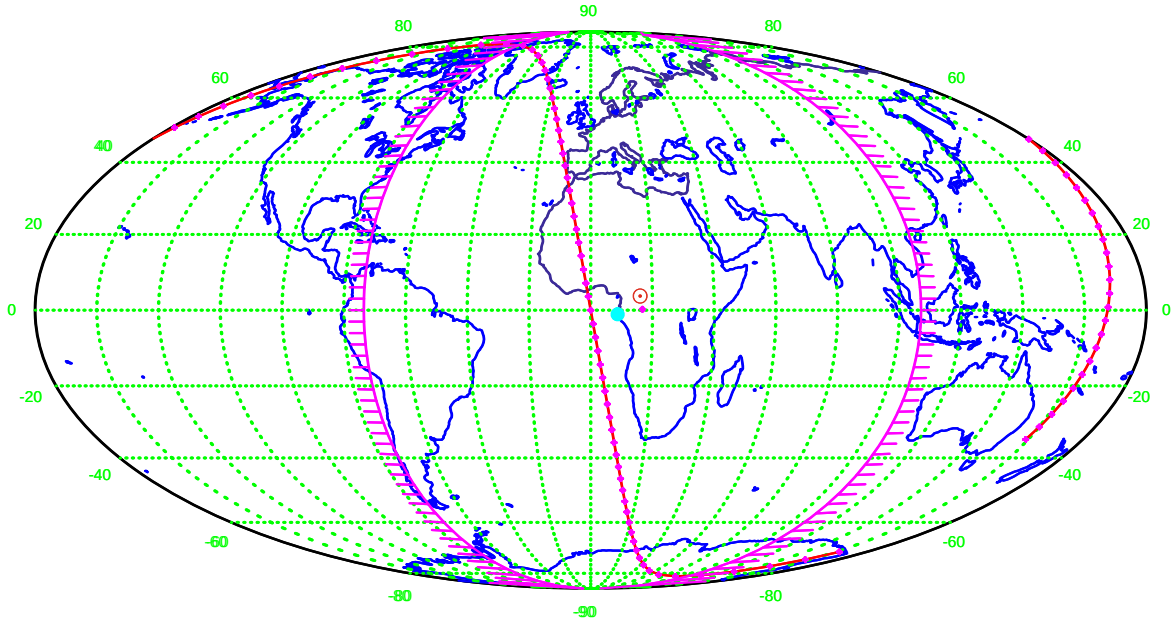


Bild 28-81: Punkt der Sonnenspiegelung (Sun glint point) bei querscannendem Sensor, Bahndaten ATMOS

BEISPIEL: Für die kreisförmige sonnensynchrone mit dem Verhältnis 3:43 reproduzierbare Satellitenbahn (a= 7153.135562 km, e= 0.0, i= 98°.52239585, $\Omega = \omega = M_0 = 0°.0$, Epoche 1994-03-21 mit aufsteigendem Knoten um 11^h mittlerer Ortssonnenzeit (M.S.T.) wird der Sonnenspiegelungspunkt gesehen mit einem Querscanner an Bord des Satelliten gesucht, welcher der Epoche am nächsten liegt. Das Suchintervall beginnt am Tag der Epoche um 10:30 und endet um 12:00. Bild 28-81 zeigt die Subsatellitenbahn mit Taktung von 1 Minute, den subsolaren Punkt ⊙ und den Sonnenspiegelungspunkt. Der Terminator ist zum Zeitpunkt der Epoche gezeichnet. ◄

28.12 Satellitenlage und Sonneneinstrahlung

In den bisherigen Untersuchungen über die Relation zwischen Sonne und Satellitenbewegung konnte der Satellit punktförmig angenommen werden. Das wird anders, wenn von einem Satelliten aus mit einem Sensor in bestimmten Richtungen beobachtet werden soll. Dazu gehört etwa auch die Sonneneinstrahlung auf den Satelliten, auf die Solarpanel, in ein Teleskop und viele ähnliche Aufgaben, zu deren Bearbeitung Lage, Lageregelung und Orientierung des Satelliten benötigt werden.

28.12.1 Satellitenzentrierte Systeme

Die hier benötigten satellitenzentrierten Koordinatensysteme werden in Abschnitt 8.16 (Band II) ausführlich diskutiert. Die Verknüpfung des satellitenzentrierten Basissystems, hier als x-

System bezeichnet, wird über das mitgeführte *Leibniz*-System hergestellt[1]. Seien $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ die Basisvektoren des *Leibniz*-Systems, hat das x-System die Basisvektoren[2]

$$\mathbf{q}_3^{(Sx)} = \mathbf{r}_0 \ , \ \mathbf{q}_1^{(Sx)} = \mathbf{q}_0 \ , \ \mathbf{q}_2^{(Sx)} = \mathbf{q}_1^{(Sx)} \times \mathbf{q}_3^{(Sx)} = \mathbf{q}_0 \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{c}_0 \quad . \tag{28.374}$$

Es ist üblich den Schwerpunkt des Satellitensystems als Zentrum dieses Systems zu betrachten. Die Normale des lokalen Horizontsystems ist die Richtung des Radiusvektors $\mathbf{r}_0$, der lokale Horizont wird durch die Vektoren $(\mathbf{q}_1^{(Sx)}, \mathbf{q}_2^{(Sx)})$ aufgespannt. Der satellitenzentrierte Radiusvektor zu einem beobachteten Objekt hat mit den Basiswinkeln lokales Azimut A_x und Elevation h_x die Darstellung

$$\mathbf{r}_x = r_x \left(\cos h_x \cos A_x \, \mathbf{q}_1^{(Sx)} + \cos h_x \sin A_x \, \mathbf{q}_1^{(Sx)} + \sin h_x \mathbf{q}_3^{(Sx)} \right) \quad . \tag{28.375}$$

Der (Nord-) Pol dieses Systems lautet $P_x \left(A_{Pxx}, h_{Pxx} \right) = P_x \left(0°, 90° \right)$.

Gegenüber diesem x-Referenzsystem ist ein spezifisches y-Satellitensystem gedreht. Hat dieses System gegenüber dem x-System Pol und Ursprung

$$P_y \left(A_{Pyx}, h_{Pyx} \right) \ , \ O_y \left(A_{Oyx}, h_{Oyx} \right) \tag{28.376}$$

hat der Schnittpunkt der beiden Systeme den Knoten

$$K_x \left(A_{Kx}, h_{Kx} \right) \quad \text{bzw.} \quad K_y \left(A_{Ky}, h_{Ky} \right) \quad \text{mit} \quad \mathrm{h}_{Kx} = h_{Ky} = 0° \tag{28.377}$$

mit Azimut und Neigung

$$A_{Kx} = A_{Pyx} - 90° \quad , \quad A_{Ky} = A_{Pxy} + 90° \quad , \quad i_{yx} = 90° - h_{Pyx} \quad , \tag{28.378}$$

sowie den Elevationen

$$h_{Pyx} = h_{Pxy} \quad . \tag{28.379}$$

Damit ist die Orientierung der beiden Systeme zueinander umkehrbar eindeutig festgelegt. Vorgabe der Winkelkoordinaten (A_{Pyx}, h_{Pyx}) des Pols P_y des y-Systems im x-System und die Knotenlänge A_{Ky} zur Bestimmung des Ursprungs O_y des y-Systems erlaubt die Berechnung der Winkelkoordinaten (A_{Oyx}, h_{Oyx}) in Bezug auf das x-System mit den Formeln (8.564)

$$\begin{aligned} \sin\left(A_{Pyx} - A_{Oyx} \right) \cos h_{Oyx} &= \cos A_{Ky} \\ \sin\left(A_{Pyx} - A_{Oyx} \right) \cos h_{Oyx} &= -\sin A_{Ky} \sin h_{Pyx} \\ \sin h_{Oyx} &= \cos A_{Ky} \cos h_{Pyx} \quad . \end{aligned} \tag{28.380}$$

Umgekehrt kann bei Vorgabe der Koordinaten (A_{Pxy}, h_{Pxy}) des Pols P_x in Bezug auf das y-System sowie der Knotenlänge K_x des Ursprungs O_x des x-Systems mit den Formeln (8.571) (in Abschnitt 8.16.3.1) die Berechnung der Winkelkoordinaten (A_{Oyx}, h_{Oyx}) des Ursprungs O_x bei Bezug auf das y-System erfolgen,

---

[1] Abschnitt 8.11 (Band II)

[2] Abschnitt 8.16.1, Beziehungen (8.543)

$$\begin{aligned}
\sin\left(A_{Pxy}-A_{Oxy}\right)\cos h_{Oxy} &= -\cos A_{Kx} \\
\cos\left(A_{Pxy}-A_{Oxy}\right)\cos h_{Oxy} &= \sin A_{Kx}\sin h_{Pxy} \\
\sin h_{Oxy} &= \sin A_{Kx}\cos h_{Pxy} \quad .
\end{aligned} \tag{28.381}$$

Damit ist es möglich, die Winkelkoordinaten $\left(A_x, h_x\right)$ einer bestimmten Richtung vom x-System in die entsprechenden Koordinaten $\left(A_y, h_y\right)$ im y-System zu übertragen (mit dem Formelsystem (8.575))

$$\begin{aligned}
\cos\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y &= \sin\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x \\
\sin\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y &= -\cos\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x \sin h_{Pyx} + \sin h_x \cos h_{Pyx} \\
\sin h_y &= \cos\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x \cos h_{Pyx} + \sin h_x \sin h_{Pyx} \quad .
\end{aligned} \tag{28.382}$$

Sind die Koordinaten im y-System vorgegeben, errechnen sich die entsprechenden Koordinaten im x-System aus (nach (8.581))

$$\begin{aligned}
\cos\left(A_x-A_{Kx}\right)\cos h_x &= \sin\left(A_y-A_{Pxy}\right)\cos h_y \\
\sin\left(A_x-A_{Kx}\right)\cos h_x &= -\cos\left(A_y-A_{Pxy}\right)\cos h_y \sin h_{Pxy} + \sin h_y \cos h_{Pxy} \\
\sin h_x &= \cos\left(A_y-A_{Pxy}\right)\cos h_y \cos h_{Pxy} + \sin h_y \sin h_{Pxy} \quad .
\end{aligned} \tag{28.383}$$

Die Umrechnung der Koordinaten eines Punktes zwischen den Systemen kann mit einer entsprechenden Transformationsmatrix oder mit *Euler*winkeln P, Y, R erfolgen[1]. Der Bezug der *Euler*winkel auf die Winkelgrößen zur Transformation vom x-System in das y-System erfolgt mit den Formeln (8.595):

$$\begin{aligned}
\cos A_{Pyx}\cos h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \cos P - \cos R \sin P \\
\sin A_{Pyx}\cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin R \\
\cos A_{Ky}\cos h_{Pyx} &= \sin Y \sin P \cos R + \cos P \sin R \\
\sin A_{Ky}\cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin P \\
\sin h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P \quad .
\end{aligned} \tag{28.384}$$

Je nach Satellitensystem können diese Umrechnungen mit konstanten Zahlenwerten erfolgen, wenn die Satellitenstabilisierung als „inertial“ gefordert wird oder als variabel, etwa im Fall von Spinstabilisierung.

Im Folgenden werden einige typische Beispiele von Beobachtungen von einem Satelliten aus demonstriert.

28.12.2 Sonnenbeobachtung bei Nadir ausgerichteter Satellitenlage

Es wird der Verlauf der Sonneneinfallswinkel Azimut $A_{\odot y}$, Elevation $h_{\odot y}$ auf einen Satelliten im Satelliten-eigenen y-System über einen synodischen Umlauf gewünscht. Aus einer Sonnenephemeride seien zum gewünschten Zeitpunkt die geozentrischen äquatorialen Koordinaten $\left(r_\odot, \alpha_\odot, \delta_\odot\right)$ bekannt. Mit den Formeln (28.163) (auf Seite 436) werden die Winkelkoordi-

[1] die Umrechnungsformeln sind zusammen mit ihren Variationen in den Abschnitten 8.16.3.3 und 8.16.4 zusammengestellt

naten $(u_\odot - u, w_\odot)$ der Sonne im momentanen Bahnsystem mit Inklination $i(t)$ und aufsteigendem Knoten $\Omega(t)$ erhalten. Die Umrechnung in das Satellitenbasis –x-System, um die lokalen Beobachtungswinkel Azimut $A_{\odot x}$ und Elevation $h_{\odot x}$ zu berechnen, erfolge zunächst mit dem allgemeinen Rotationswinkel A_0 :

$$\begin{aligned} \cos A_{\odot x} \cos h_{\odot x} &= -\sin(u_\odot - u)\cos w_\odot \cos A_0 + \sin w_\odot \sin A_0 \\ \sin A_{\odot x} \cos h_{\odot x} &= \sin(u_\odot - u)\cos w_\odot \sin A_0 + \sin w_\odot \cos A_0 \\ \sin h_{\odot x} &= \cos(u_\odot - u)\cos w_\odot \quad . \end{aligned} \tag{28.385}$$

Wegen der Zuordnungen (28.374) wird der Transformationswinkel mit $A_0 = 180°$ belegt.

Um die Drehung vom x-System in das Satelliten-eigene y-System durchzuführen, seien etwa die drei Rotationswinkel (A_{Pyx}, h_{Pyx}, K_y) vorgegeben. Mit Hilfe der Transformation (28.382) können die gesuchten Beobachtungswinkel $(A_{\odot y}, h_{\odot y})$ erhalten werden.

BEISPIEL 1: Für einen Space Shuttle (H=300 km, e=0.0, i=57°) soll der Sonnen-Strahlungseinfall in die Cargobay über einen synodischen Umlauf untersucht werden. Das y-System des Satelliten wird gegenüber dem x-Basissystem durch Rotation um die Nickachse (Pitch) um 180° gebildet. Dadurch wird die Cargobay zur Erde gedreht („bay down“), die Achse mit den Koordinaten $(A_{Py} = 0°, h_{Py} = 90°)$ weist in die Nadirrichtung. Der Satellit wird in Nadirrichtung stabilisiert. Um das Verhalten der Sonneneinfallsrichtung diskutieren zu können, werden 7 verschiedene Einschusszeiten mit den mittleren lokalen Sonnenzeiten 6^h, 8^h, 10^h, 12^h, 14^h, 16^h, 18^h in Bezug auf einen Start in KSC $(\lambda_{KSC} = -80°.69, \varphi_{KSC} = 28°.5)$ ausgewählt. Bild 28-82 zeigt den Verlauf in den Beobachtungswinkeln $(A_{\odot y}, h_{\odot y})$ des Satelliten im y-System. Die Kurven werden unterbrochen, so lange sich der Satellit im Erdschatten (Kernschatten) befindet. ◄

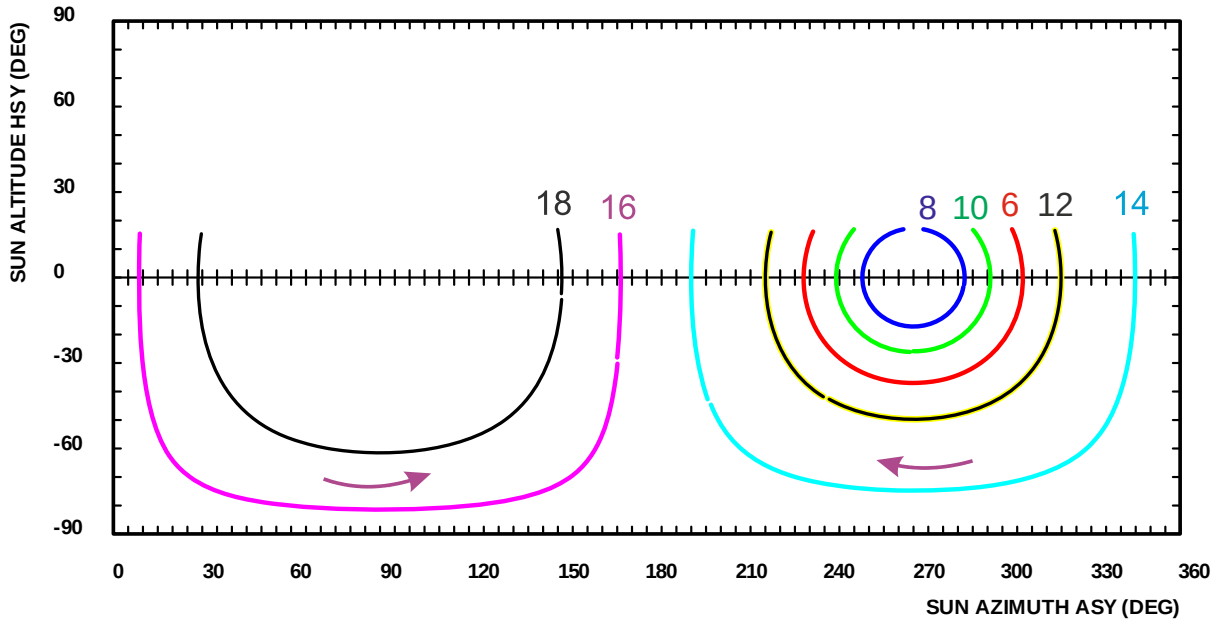


Bild 28-82: Verlauf der Sonneneinfallswinkel in einen Satelliten über einen synodischen Umlauf. Bahn: STS (H=300 km, e=0.0, i=57°). Start am 10. Nov. 1987 von KSC zu 7 verschiedenen Zeiten in mittlerer lokaler Sonnenzeit.

BEISPIEL 2: Von einem Space Shuttle (H=300 km, e=0.0, i=57°) soll ein fest montierter Scanner $\left(A_{Dy} = h_{Dy} = 0°\right)$ den Erdhorizont in 10 km Höhe abtasten. Um die momentane Sonneneinstrahlung in den zwei (einander entgegengesetzten Tangentialpunkten B_1, B_2 beurteilen zu können, soll die satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen der Richtung zu den Tangentialpunkten und zur Sonne im Verlauf eines synodischen Umlaufs bestimmt werden. Für eine Bahnanalyse wird der Einschuss bezogen auf das KSC über einen Tag variiert. Bild 28-83 zeigt den Winkelverlauf für die beiden Tangentialpunkte abhängig von der Startzeit, die in Eastern Time (E.T.) (näherungsweise als mittlere lokale Sonnenzeit) gegeben ist. ◄

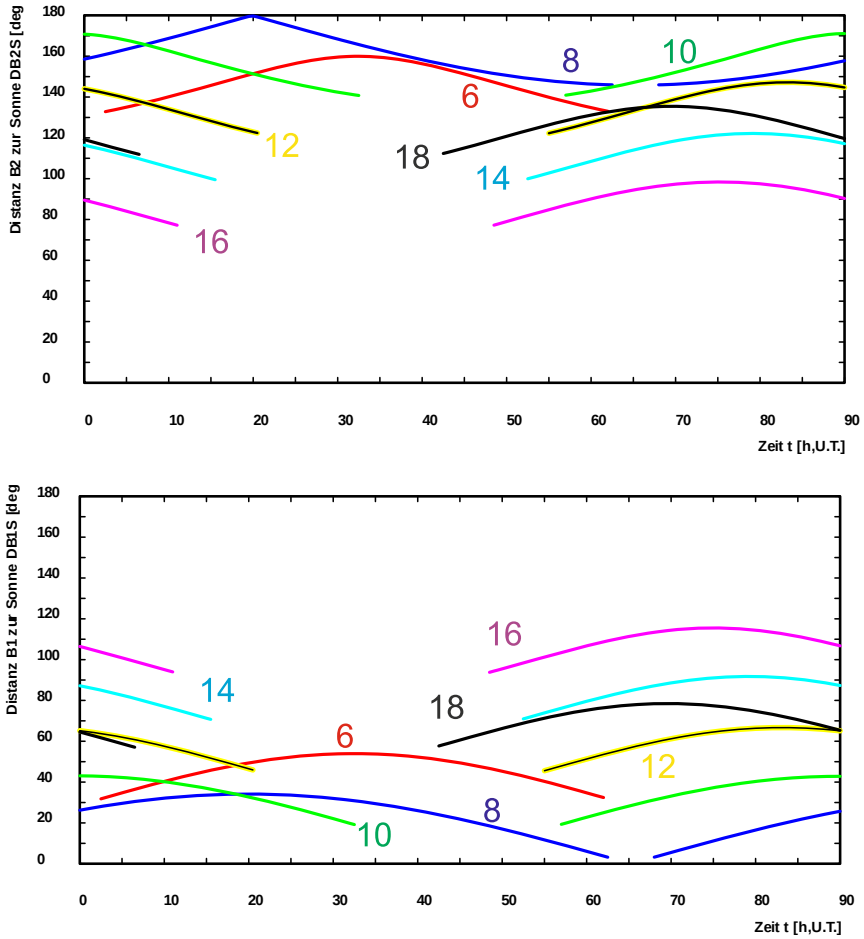


Bild 28-83: Verlauf der Winkeldistanz von Tangentialpunkten zur Sonne über einen synodischen Umlauf gesehen von einem STS aus in Nadir orientierter Satellitenlage: unten zu B_1, oben zu B_2

28.12.3 Sonneninertiale Satellitenlage

Der Satellit soll eine stabil kontrollierte Stellung zur Sonne annehmen, man spricht von sonneninertialer Lage („Sun inertial attitude“). Diese inertiale Lage mit Pol P_y wird in Bezug auf das Basis x-System mit den Koordinaten $\left(A_{Pyx}, h_{Pyx}\right)$ und dem Knotenwinkel A_{Ky} des auf die Sonne ausgerichteten y-Systems festgelegt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden die Winkelkoordinaten der Sonne aus den vorgegebenen Rektaszension und Deklination $\left(\alpha_\odot, \delta_\odot\right)$ mit den Formeln (28.385) im Satelliten x-System $\left(A_{\odot x}, h_{\odot x}\right)$ berechnet.

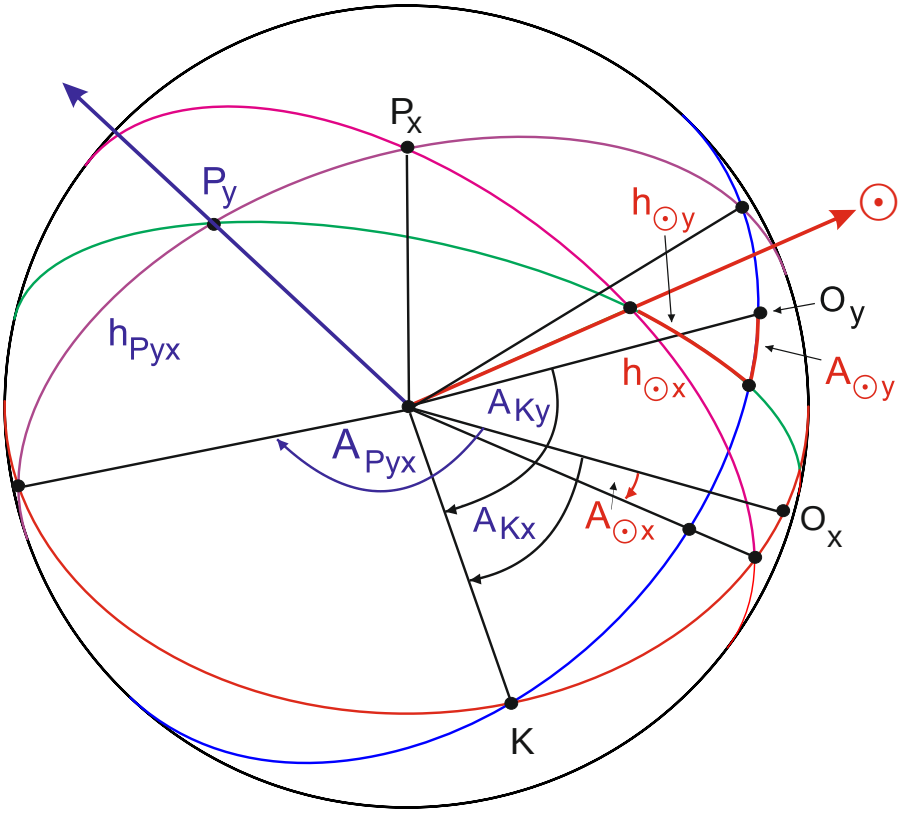


Bild 28-84: Zur Definition der Sonneninertialen Lage eines Satelliten

Mit den Formeln

$$\begin{aligned}
\cos\left(A_{Ky}-A_{\odot y}\right)\cos h_{\odot y} &= \sin\left(A_{Pyx}-A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x}\\
\sin\left(A_{Ky}-A_{\odot y}\right)\cos h_{\odot y} &= -\cos\left(A_{Pyx}-A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x}\sin h_{Pyx}+\sin h_{\odot x}\cos h_{Pyx}\\
\sin h_{\odot y} &= \cos\left(A_{Pyx}-A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x}\cos h_{Pyx}+\sin h_{\odot x}\sin h_{Pyx}
\end{aligned} \qquad (28.386)$$

wird die Drehung berechnet, welche die Ausrichtung der Satellitenlage in Bezug auf die Sonne herstellen soll. Dieser Formelweg muss für jeden Zeitpunkt mit den aktuellen geozentrischen Daten der Sonne eingehalten werden.

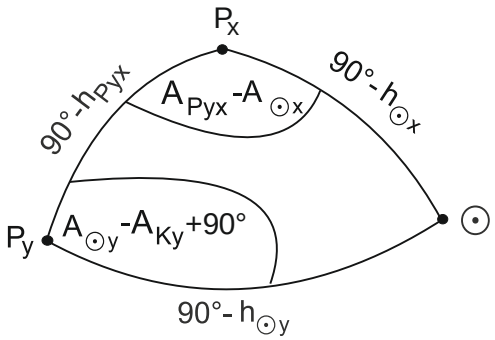


Bild 28-85: Poldreieck zur Berechnung der Drehung der gewünschten Lage P_y in die Sonnenrichtung ⊙ realisiert in den Drehformeln (28.386).

BEISPIEL: Ein Space Shuttle (H=300 km, e=0.0, i=57°, fiktives Startdatum über dem KSC: 1987-11-10/10:00:0.0) soll auf die Sonne mit den Rotationswinkeln $\left(A_{Pyx}=0°, h_{Pyx}=60°, A_{Ky}=90°\right)$ ausgerichtet werden. Dazu wird angenommen, dass die Normallage des Satelliten im Sinne des Basissystems (28.374) ausgerichtet ist. Falls die Normallage anders festgelegt wäre, müsste eine weitere Transformation vor den weiteren Untersuchungen vorgeschaltet werden.

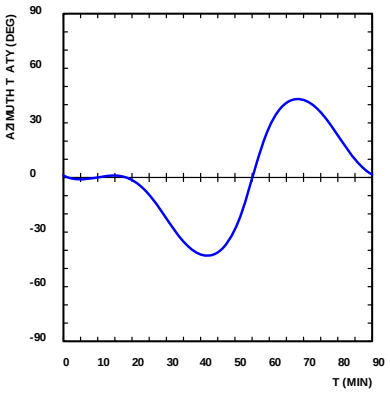


Bild 28-86: Verlauf des Azimut der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

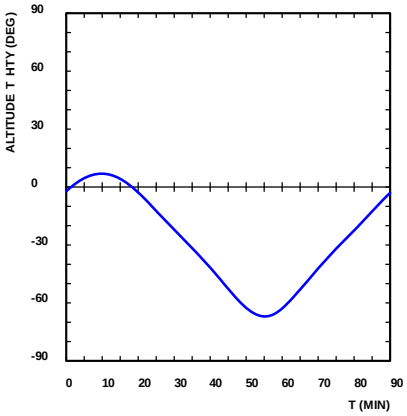


Bild 28-87: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

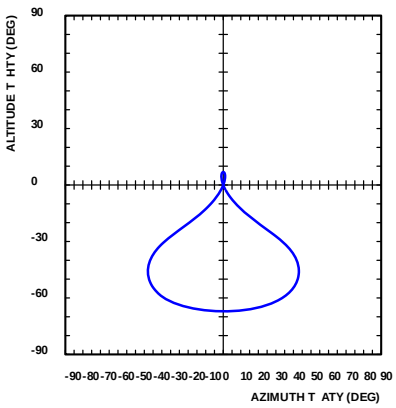


Bild 28-88: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

Im vorliegenden Beispiel werden einige Beobachtungen von dem Satelliten aus demonstriert, wenn seine Lage als sonneninertial angenommen wird. Die Beobachtungen erfolgen mit einem fest montierten Onboard Scanner mit den Richtungswinkeln $\left(A_{Dy}=h_{Dy}=0°\right)$.

In Bild 28-86 bis Bild 28-88 wird die Bewegung der transversalen Bewegungsrichtung über einen synodischen Umlauf in Bezug auf das y-System des Satelliten in sonneninertialer Lage dargestellt.

In Bild 28-89 bis Bild 28-91 wird der Verlauf von Azimut und Elevation der Shuttle Nadirrichtung in Bezug auf das y-System des STS über einen sonnensynodischen Umlauf dargestellt.

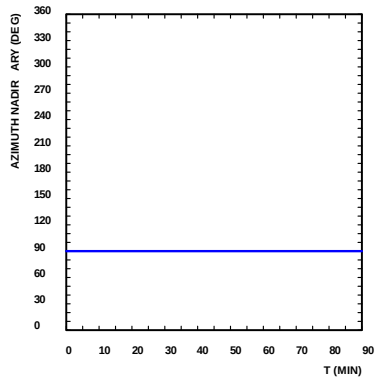


Bild 28-89: Verlauf des Azimuts der Nadirrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage

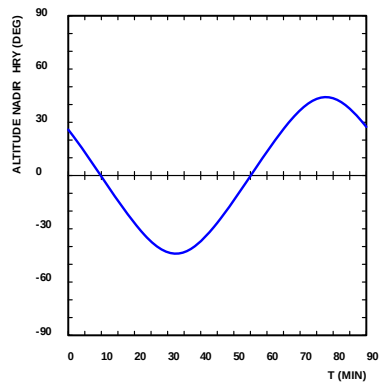


Bild 28-90: Verlauf der Elevation der Nadirrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage

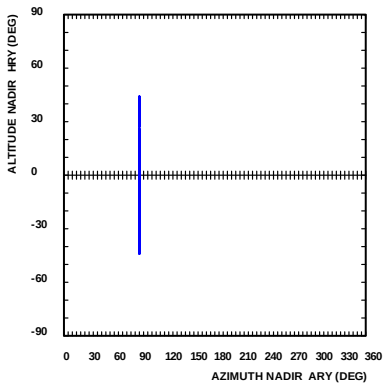


Bild 28-91: Verlauf der Elevation über dem Azimut der Nadirrichtung bei sonneninertialer Lage

Die Orientierung des Satelliten im Raum wird durch Rückgriff auf den momentanen Ort im *Leibniz*-System beschrieben. Dazu zeigt Bild 28-92 den Verlauf des Winkels zwischen der transversalen Bewegungsrichtung und der Richtung zur Spitze des Shuttle („Nose“), sowie

Bild 28-93 den Winkel zwischen der Nadirrichtung (umgekehrt zur radialen Richtung) und der Satellitennormale, welche im Fall der sonneninertialen Lage in Sonnenrichtung weist.

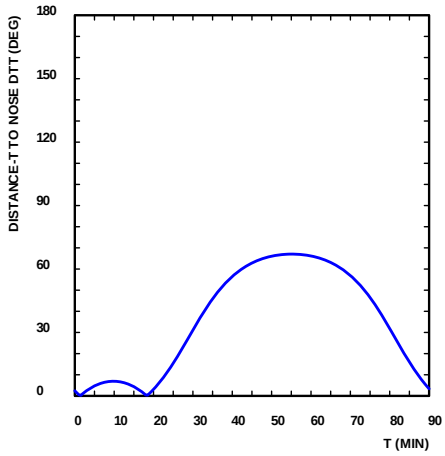


Bild 28-92: Verlauf der Winkeldistanz zwischen der transversalen Bewegungsrichtung und der STS-Spitze („Nose“)

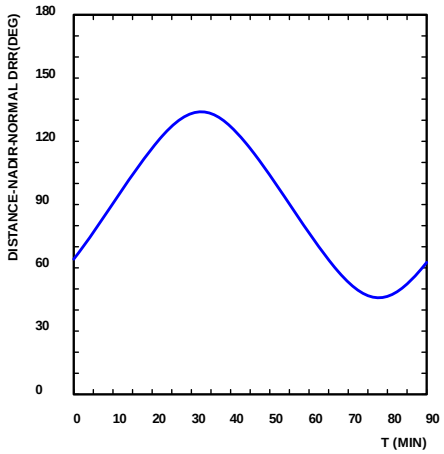


Bild 28-93: Winkel zwischen Nadirrichtung und Satellitennormale in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

Als Beispiel für die Beobachtung mit einem Onboard Sensor im Fall sonnenorientierter Satellitenlage wird die Beobachtung der Tangentialpunkte des Scanners an die Erdoberfläche untersucht. Die beiden Tangentialpunkte B_1 und B_2 befinden sich rechts bzw. links von der Bewegungsrichtung des Satelliten. Je nach Lage des Scanners kann es sein, dass nur einer der beiden Punkte beobachtet werden kann, da der andere unterhalb der möglichen durch die Anordnung des Scanners behinderter Sichtrichtung liegt.

Bild 28-94 und Bild 28-95 zeigen Azimut und Elevation des Tangentialpunktes im sonneninertialen STS-System über einen synodischen Umlauf. Bild 28-96 zeigt die Winkeldistanz zwischen den Satelliten-zentrierten Richtungen zu B_1 und zur Sonne.

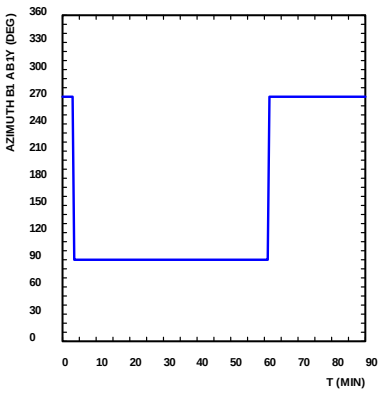


Bild 28-94: Das Azimut des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

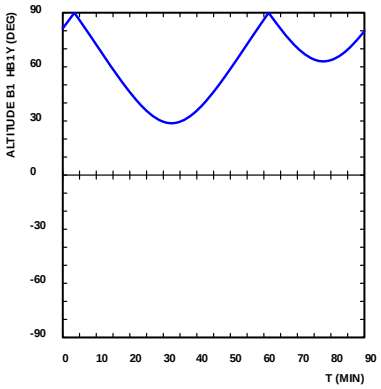


Bild 28-95: Elevation des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

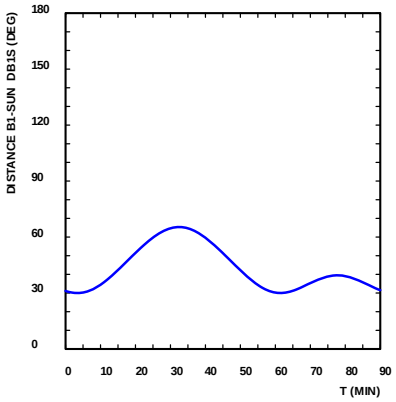


Bild 28-96: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_1 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

Der Tangentialpunkt B_1 wandert während eines synodischen Umlaufs über die Erdoberfläche wie Bild 28-97 zeigt. Dagegen ist der zweite Tangentialpunkt vom Shuttle aus gesehen stets unterhalb der durch den Rand der Cargo Bay begrenzten Sichtlinie, wie Bild 28-92 zeigt und der Zwischenwinkel zwischen der Richtung zu B_2 und der Sonnenrichtung in Bild 28-99 be-

stätigt. Daher kann für diesen Punkt kein sinnvoller Verlauf über der Erdoberfläche berechnet werden. ◄

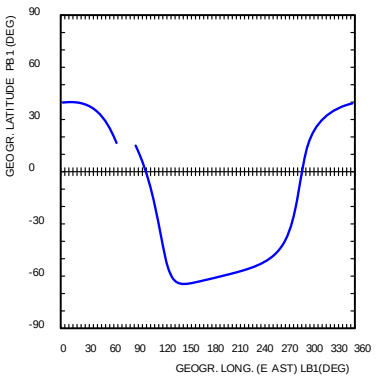


Bild 28-97: Die geographischen Koordinaten Länge λ_{B1} und Breite φ_{B1} des Tangentialpunkt B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

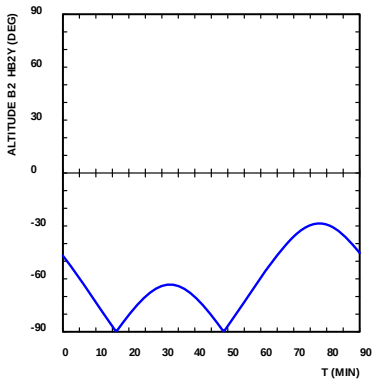


Bild 28-98: Elevation des Tangentialpunktes B_2 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

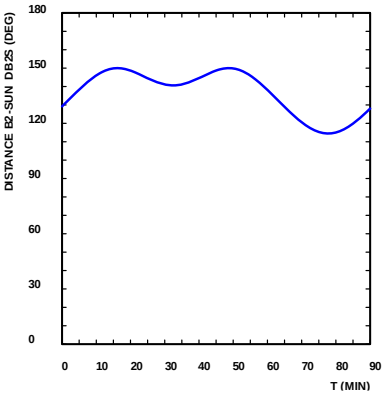


Bild 28-99: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_2 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS

28.13 Unterschiedliche Entwicklungen des Sonnenbezugs

Wesentliche Parameter einer Satellitenbewegung wie etwa der Sonnenbezug unterliegen langfristigen Veränderungen und Variationen, bedingt durch Einschussfehler, Ungenauigkeiten bei Bahnkorrekturen, vor allem durch die Variation der Bahnparameter auf Grund unterschiedlicher physikalischer Bewegungseinflüsse. Einige solcher Variationen wichtiger Parameter im Rahmen einer Bewegungsanalyse werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

28.13.1 Einfluss von Einschussfehlern auf Sonnensynodische Bewegungen

Der Bezug der Bewegung eines Satelliten zur mittleren Sonnenzeit kann durch Wahl der mittleren lokalen Sonnenzeit T_Ω bei Überflug des aufsteigenden Knotens hergestellt werden. Beim Einschuss eines Satelliten in seine Umlaufbahn wird daher die Kenntnis der mittleren Sonnenzeit T_Ω als einem charakteristischen Bahnparameter angestrebt.

Es seien wie in Abschnitt 23.11 (auf Seite 238) die Einschussfehler in Bahnhöhe ΔH bzw. in großer Bahnhalbachse Δa, Exzentrizität Δe, Inklination Δi, in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens bei Knotenüberflug $\Delta\Omega$ sowie der Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug $\Delta t_{\Omega 0}$ gegeben. Die entsprechenden Bahnen haben bei Bezug auf die Nominalbahnelemente die fehlerbehafteten mittleren *Kepler*schen Parameter

$$\bar{a} = \bar{a}_n \pm \Delta a \quad , \quad \bar{e} = \bar{e}_n \pm \Delta e \quad , \quad \bar{i} = \bar{i}_n \pm \Delta i \quad , \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_n \pm \Delta\Omega \quad , \quad \ldots$$

Die Einschussfehler sollen nicht durch ein Bahnkorrektursystem ausgeglichen werden können. Die Variation der Knotensonnenzeit kann dann durch Vergleich der mittleren Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \overline{\Delta\tau_\Omega}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \ldots\right)$ mit der nominalen mittleren Knotensonnenver-

schiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_{\Omega n}} = \overline{\Delta\tau_{\Omega}}\left(\bar{a}_n, \bar{e}_n, \bar{i}_n, \ldots\right)$ erhalten werden. Eine Aussage über den lokalen Zeitfehler nach *N* drakonitischen Umläufen, wenn T_Ω die lokale mittlere Sonnenzeit ist, zu der der aufsteigende Knoten überflogen wird, liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_N &:= \overline{\tau_{\Omega N}} - \overline{\tau_{\Omega n,N}} = \overline{\tau_\Omega}\left(t_N\right) - \overline{\tau_{\Omega n}}\left(t_{n,N}\right) = \\ &= T_{\Omega N} - T_{\Omega n,N} = \Delta\left(T_\Omega\right)_N \quad . \end{aligned} \tag{28.387}$$

Um diesen Parameter auf die übrigen Bahnparameter zurückführen zu können, wird zunächst der lokale Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug für die fehlerhafte Bahn in Bezug auf die Nominalbahn benötigt. Es ist mit den Beziehungen für den Knotensonnenwinkel[1] bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$

$$\begin{aligned} \overline{\tau_{\Omega 0}} &= \bar{\Omega}_0 - \alpha_{\bar{\odot},0} = \bar{\Omega}\left(t_0\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_0\right) \\ \overline{\tau_{\Omega n,0}} &= \bar{\Omega}_{n,0} - \alpha_{\bar{\odot}n,0} = \bar{\Omega}_n\left(t_{n,0}\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_{n,0}\right) \quad , \end{aligned}$$

somit

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 = \bar{\Omega}\left(t_{n,0}\right) + \dot{\Omega}_s\left(t_0 - t_{n,0}\right) - n_\odot\left(t_0 - t_{n,0}\right) - \bar{\Omega}_n\left(t_{n,0}\right) \quad .$$

Da die Einschussfehler im Knoten und in Knotenüberflugzeit

$$\Delta\Omega = \bar{\Omega}\left(t_{n,0}\right) - \bar{\Omega}_n\left(t_{n,0}\right) \quad \text{und} \quad \Delta t_{\Omega 0} = t_0 - t_{n,0} \tag{28.388}$$

sind, wird schließlich mit der säkularen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 = \Delta\Omega + \dot{\tau}_{\Omega s}\,\Delta t_{\Omega 0} \quad . \tag{28.389}$$

Nach einem drakonitischem Umlauf ist

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_1 := \overline{\tau_{\Omega 1}} - \overline{\tau_{\Omega n,1}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + \overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\tau_{\Omega n,0}} - \overline{\Delta\tau_{\Omega n}} = \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 + \overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\Delta\tau_{\Omega n}}$$

und somit allgemein

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_N := \overline{\tau_{\Omega N}} - \overline{\tau_{\Omega n,N}} = \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 + N\left(\overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\Delta\tau_{\Omega n}}\right) \quad , \tag{28.390}$$

wie durch vollständige Induktion leicht zu zeigen ist.

BEISPIEL: Es wird die Entwicklung des Fehlers in der mittleren Sonnenzeit bei Knotenüberflug für die Bahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.007513, $\bar{\omega}_n$ = 90°.0 gegeben[2]. Diese Bahn ist sonnensynchron, die mittlere Verschiebung des Knotensonnenwinkels $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \overline{\Delta\tau_{\Omega n}}$ pro drakonitischem Umlauf muss also verschwinden. Ein fehlerhafter Einschuss wird die Sonnensynchronität der Bahn zerstören. In Tabelle 28-25 sind die verschiedenen Knotensonnendriften für die im obigen Beispiel gegebenen fehlerhaften Bahnen zusammengestellt.

[1] Abschnitt 28.7.1 auf Seite 448

[2] aus DLR GSOC 94-05 und AIAA 96-3659

	A	**B**	**C**
$\overline{\Delta\tau_\Omega} / \overline{P_d}$	$\overline{i}_0$	$\overline{i}_0 - \Delta i$	$\overline{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.0	–0°.233×10–3	+0°.233×10–3
2.	–0°.169×10–3	–0°.401×10–3	+0°.632×10–4
3.	+0°.169×10–3	–0°.635×10–4	+0°.402×10–3
4.	–0°.338×10–3	–0°.570×10–3	–0°.106×10–3
5.	+0°.279×10–6	–0°.232×10–3	+0°.232×10–3
6.	+0°.339×10–3	+0°.106×10–3	+0°.572×10–3

Tabelle 28-25: Knotensonnendrift pro drakonitischem Umlauf abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\overline{a}_n$ = 7266.47 km, $\overline{e}_n$ = 0.0, $\overline{i}_n$ = 99°.007513.

Die säkulare Zeitdrift $\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)$ nach ungefähr 2 Jahren ($\cong$ N = 10266 drakonitischen Umläufen) ist in Tabelle 28-26 enthalten.

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right) / \overline{P_d}$	$\overline{i}_0$	$\overline{i}_0 - \Delta i$	$\overline{i}_0 + \Delta i$
1.	+0*m*.00	–9*m*.53	+9*m*.53
2.	–6*m*.91	–16*m*.39	+2*m*.58
3.	+6*m*.92	–2*m*.60	+16*m*.46
4.	–13*m*.80	–23*m*.27	–4*m*.33
5.	+0*m*.01	–9*m*.47	+9*m*.51
6.	–13*m*.84	+4*m*.33	+23*m*.35

Tabelle 28-26: Zeitdrift nach N = 10226 drakonitischen Umläufen (etwa 2 Jahre) abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\overline{a}_n$ = 7266.47 km, $\overline{e}_n$ = 0.0, $\overline{i}_n$ = 99°.007513.

Ob dieser mögliche Fehler toleriert werden kann, kann nur von den Experimentatoren geklärt werden, welche die Beobachtungsbedingungen vorgeben. ◀

28.13.2 Sonnendrift einer Bahn ohne Bahnkorrektur

In den vorstehenden Abschnitten wurden Annahmen über eine säkulare Variation in den *Kepler*schen Epocheelementen $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$ gemacht, die nicht für alle Zeiten konstant sind und daher nur den ungünstigsten Fall einer Variation der Parameter der synodischen Bewegung beschreiben. Es wird daher in einem nächsten Schritt nötig, soweit bekannt alle Änderungen in diesen Parametern und im Zusammenhang der sonnenbezogenen synodischen Satellitenbewegung die Bewegung der wahren Sonne zu berücksichtigen. Dies kann Anlass für eine Modifikation der Korrekturzyklen sein, aber auch für eine Untersuchung dienen, wie sich die Satellitenbewegung ohne Bahnkorrekturen über lange Zeitintervalle auswirkt.

Im folgenden Beispiel werden die Variationen der Knotenüberflugzeit

$$\tau_\Omega \;=\; \Omega - \alpha_\odot \quad ,$$

des Sonnenaspektwinkels $\sigma_\odot$ nach Formel (28.363) (auf Seite 535) und der Schattendauer T_S nach Formel (28.343) (auf Seite 515 und weiter in Abschnitt 28.10.4) über ein längeres Zeitintervall unter Einschluss der natürlichen Einflüsse auf die Satellitenbewegung ohne Bahnkorrekturen aufgefächert nach unterschiedlichen Einschussbahnen (verursacht durch Einschussfehler) in einem numerischen Beispiel untersucht.

BEISPIEL: Es sei wie in den vorhergehenden Beispielen als nominale Ausgangsbahn die sonnensynchrone 3:43 Bahn zugrunde gelegt. Zwei weitere Bahnen wurden so gewählt, dass sie durch Einschussfehler verursachte maximale Abweichungen in den Knotenzeitdriften aufweisen. Alle Bahnen werden als nominell kreisförmig $\bar{e}$ = 0.0 angenommen. Sie unterscheiden sich zur Epoche t_0 nur in großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$. Die säkulare Knotenzeitdrift gegenüber der nominalen sonnensynchronen Bahn über 3 Jahre ist mit $\Delta\tau_\Omega / 3\mathrm{a}$ bezeichnet und diente zur Auswahl dieser Bahnen[1]. Eine Übersicht über die verwendeten Bahnparameter gibt folgende Tabelle:

	$\bar{a}_0$ [km]	$\bar{i}_0$	$\Delta\tau_\Omega / 3\mathrm{a}$
Bahn 1	7153.134	98°.523	0*m*.0
Bahn 2	7162.400	98°.493	–34*m*.5
Bahn 3	7143.880	98°.553	34*m*.8

Um die Aussagen konsistent zu halten, wird für alle Bahnen dasselbe Modell physikalischer Bahneinflüsse („Störmodell bezüglicher einer *Kepler*bewegung“) verwendet. Unter Annahme minimaler Sonnenaktivität wird für die säkulare Abnahme der großen Bahnhalbachse

$$\dot{a}_s \;=\; -1.1202\times10^{-8}\ \mathrm{km/s}$$

gewählt, für die säkulare Variation der Inklination unter Annahme eines Starts bei Jahresanfang und 11*h* mittlerer Sonnenzeit im absteigenden Knoten

$$(i)_s^{\cdot} \;=\; -9°.2592593\times10^{-10}\ 1/\mathrm{s} \;\cong\; -8°.0\times10^{-5}\ 1/\mathrm{d} \quad .$$

Bild 28-100 zeigt den **Verlauf der wahren Sonnenzeit** $T_\Upsilon = \tau_\Upsilon = \Upsilon - \alpha_\odot$ im absteigenden Bahnknoten im ersten Jahr. Die Kurven zeigen

1. die jährliche doppeltperiodische Schwankung infolge der Zeitgleichung. Sie bewirkt eine maximale Amplitude von etwa $\left[-14^m.3, 16^m.3\right]$. Die in der obigen Bahnparameter-Tabelle mit Formel (28.390) abgeschätzten Werte werden also für die gewählten Bahnen geringfügig unterschritten.

[1] DLR TN GSOC 91-06, 9. Juli 1991

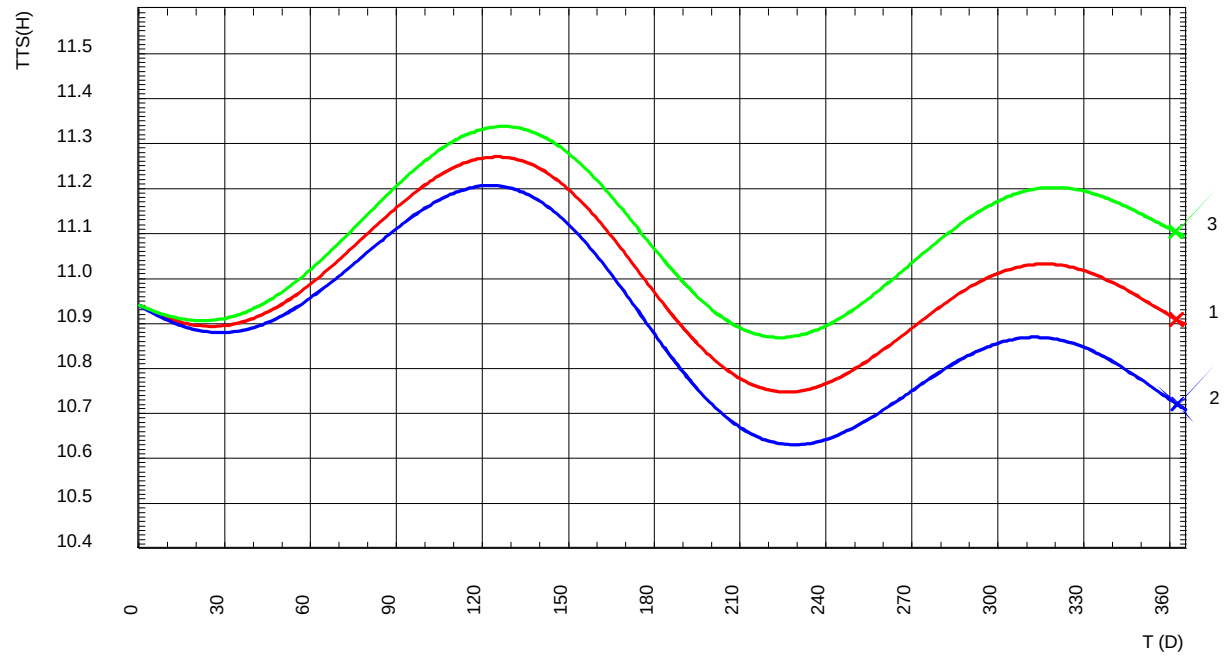


Bild 28-100 : Verlauf der wahren Sonnenzeit im Jahresverlauf im absteigenden Knoten der Bahnen (Kurve 1) a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55

2. das allmähliche Wegdriften der mit Einschussfehlern behafteten Bahnen 2 und 3 von der Nominalbahn 1, ausgehend von der Soll-Lage bei Start. Die maximalen Abweichungen betragen nach drei Jahren $-32^m.1$ bzw. $33^m.3$.

3. ein „Abkippen“ der Kurven von den Mittagswerten in Richtung Vormittag als Folge der säkularen Variationen der Epochewerte von großer Bahnhalbachse und Inklination. Sie bewirken nach drei Jahren ein Absinken des maximalen Ausschlags um $-18^m.8$ und des minimalen Ausschlags um $-10^m.4$.

In den Kurven nicht berücksichtigt wurde ein Einschussfehler durch die Verletzung des Startfensters und durch einen fehlerhaften Knoten. Werden hierfür noch typischerweise die Fehler $\Delta t_0 = \pm 4^m$ und $\Delta\Omega_0 = \pm 0°.04 \cong \pm 10^s$ angenommen, beträgt nach drei Jahren die maximal mögliche Ablage gegenüber der Sollzeit $T_\Omega = 11^h$ im absteigenden Knoten

$$\Delta T_\Omega \in \left[-69^m.4, 34^m.9\right] \quad .$$

Dieses Ergebnis ist nicht für alle Zeiten gültig. Die Kurven in Bild 28-100 wurden mit Start Anfang des Jahres gerechnet. Der Verlauf der Kurven wird relativ durch Start zu einer anderen Jahreszeit modifiziert, so dass die Extremwerte des Kurvenverlaufs im Verlauf des dritten Jahres und nicht erst am Ende des dritten Jahres erreicht werden können. Wird in einem Jahr mit maximaler Sonnenaktivität gestartet, wirken sich die säkularen Variationen der Epocheelemente nur im Bereich $-4^m.5$ bis $-8^m.2$ aus. Die Variationen durch den erhöhten Luftwiderstand in der großen Bahnhalbachse dominieren somit die Variationen, die durch die Sonnenanziehung in der Bahninklination hervorgerufen werden. Das beobachtete Abkippen der $T_{\text{☉}}$-Kurven ist somit im Wesentlichen durch die Sonnengravitation verursacht, so dass das oben berechnete Toleranzintervall $\Delta T_{\text{☉}}$ tatsächlich die ungünstigsten Werte („worst case“) angeben dürfte. Die im Toleranzintervall $\Delta T_{\text{☉}}$ angegebenen Werte sind geringfügig schlechter als die aus den Kurven in Bild 28-100 ablesbaren extremalen Werte. Dies ist darauf zurückzu-

führen, dass die einzelnen Variationsanteile nur im wirklich ungünstigsten Fall addiert werden dürfen. Ferner können die Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination nicht über beliebig lange Zeiträume als säkular angesehen werden. Sie variieren stattdessen langperiodisch. In der Praxis ist also ein etwas engeres Toleranzintervall durchaus möglich.

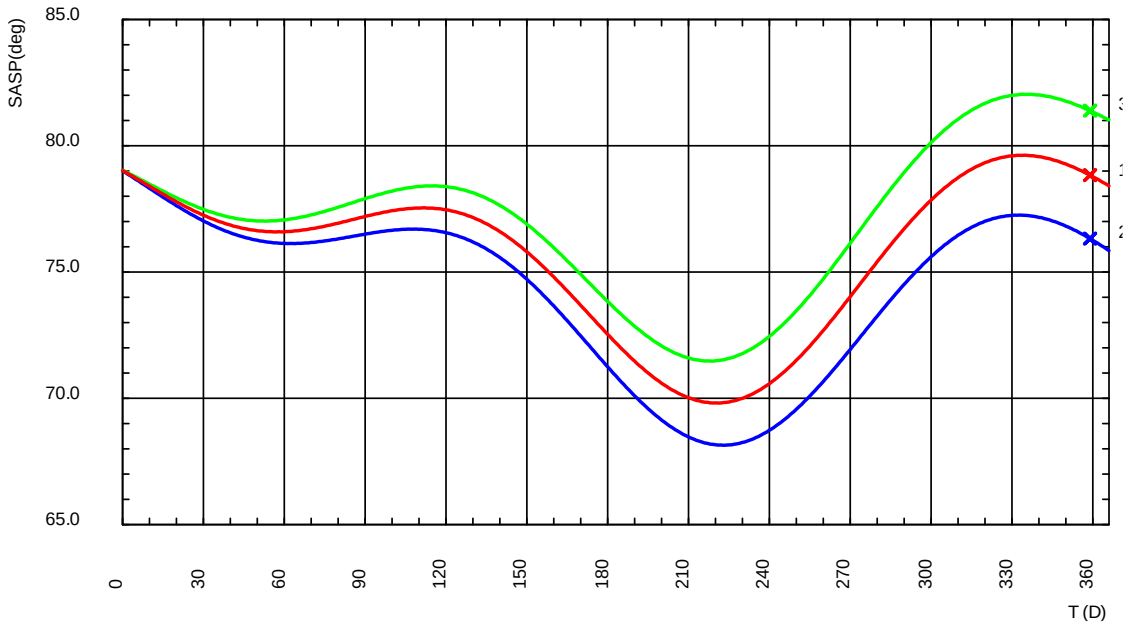


Bild 28-101: Verlauf des Sonnenaspektwinkels $\sigma_\odot$ (Winkel zwischen Bahnnormale und Sonnenrichtung) pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55

Bild 28-101 auf Seite 560 zeigt den **Verlauf des Sonnenaspektwinkels** $\sigma_\odot$ (= Winkel zwischen Bahnnormale und geozentrischer Richtung zur Sonne[1]) über drei Jahre in gleicher Weise wie in den zuvor behandelten Kurven der wahren Knotensonnenzeit:

1. Die jährliche Variation infolge der Zeitgleichung verursacht maximale Auslenkungen gegenüber dem Wert bei Start im Bereich $\left[-2°.0, 8°.0\right]$.

2. Die Einschussfehler (Bahnen 2 und 3 in obiger Bahnparameter-Tabelle) haben nach drei Jahren maximale Abweichungen im Bereich $\left[-6°.2, 6°.4\right]$ zur Folge.

3. Die säkularen Variationen infolge der physikalischen Einwirkungen auf die Bahn („Störungen“) in großer Bahnhalbachse und Inklination bewirken Schwankungen im Bereich $\left[-4°.7, -2°.4\right]$.

Im Verlauf von drei Jahren muss daher mit Sonnenaspektwinkeln im Bereich

$$\Delta\sigma_\odot \in \left[-12°.9, 12°.0\right]$$

gerechnet werden. Der Streubereich wird somit im Laufe der Zeit aufgefächert mit nahezu unmerklicher Tendenz zum Abkippen zu kleineren Winkelwerten. Die Allgemeingültigkeit dieser Ergebnisse muss wie im vorstehenden Fall eingeschränkt werden.

[1] Abschnitt 28.11.1 auf Seite 532

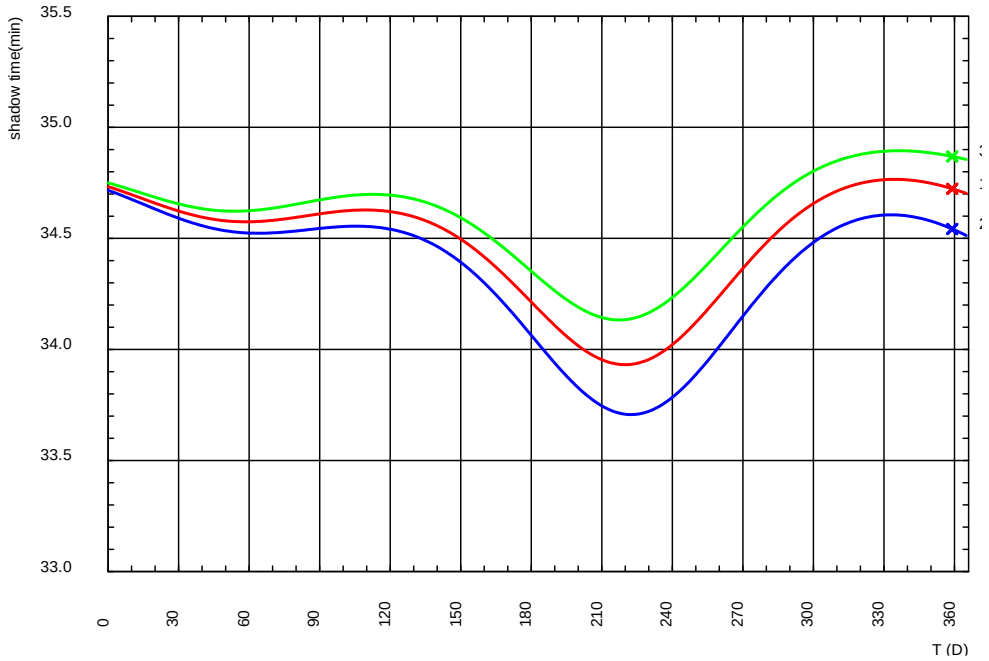


Bild 28-102: Verlauf der Schattendauer pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55

Schließlich zeigt Bild 28-102 (auf S. 561) den **Verlauf der Schattenzeiten** über ein Jahr mit folgenden Tendenzen:

1. Die jährlichen Variationen infolge der Zeitgleichung verursachen maximale Auslenkungen gegenüber dem Wert bei Start im Bereich $\left[-0^m.20, 0^m.66\right]$.

2. Die Einschussfehler haben im Verlauf von drei Jahren maximale Abweichungen im Bereich $\left[-1^m.29, 0^m.24\right]$ zur Folge.

3. Die säkularen natürlichen Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination bewirken Schwankungen im Bereich $\left[-1^m.73, 0^m.34\right]$.

Im Verlauf von drei Jahren muss daher mit Schattenzeiten im Streubereich

$$\Delta T_S \in \left[-3^m.27, 1^m.24\right]$$

gerechnet werden. Die Gültigkeit dieser Aussagen ist wie in den beiden vorstehenden Fällen eingeschränkt.

Ein völlig anderes Bild ergibt sich, wenn der Satellit in einen „Vollsonnenbahn“ eingeschossen werden soll. Wegen der bekannten Abweichung des Verlaufs der wahren von der fiktiven mittleren Sonne muss über einen Zeitraum für etwas mehr als 2 Monaten auch für einen solche Bahn mit Schatten gerechnet werden. In diesem Beispiel sei ein Einschuss im absteigenden Knoten um 18h mittlere Sonnenzeit angenommen. Im Verlauf des ersten Jahres muss um die Sommersonnenwende, in deren Umgebung nur Schatten auftreten kann, mit Schattenzeiten im Streubereich

$$\Delta T_S \in \left[-0^m.26, 0^m.35\right]$$

gerechnet werden. Für die nominelle Bahn 1 beträgt die maximale Schattendauer 16.975 Minuten. ◀

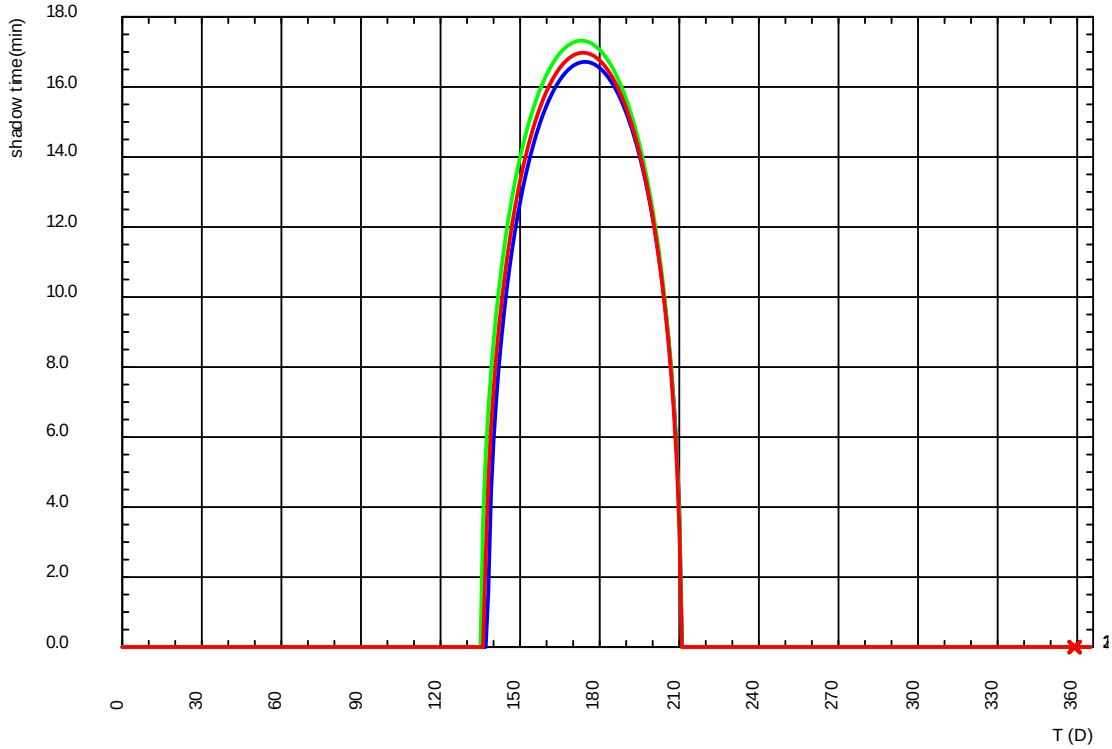


Bild 28-103: Verlauf der Schattendauer über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 18h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55

28.14 Variationen der sonnensynodischen Bewegung durch Bewegungseinflüsse

Ähnlich wie schon bei der Untersuchung anderer Bewegungsarten (etwa der drakonitischen Bewegung in Abschnitt 23.12 (auf Seite 244) zeigt sich auch im Rahmen der sonnensynodischen Bewegung, dass der analytische Formalismus nicht zur Beschreibung der Bewegung für alle Zeiten ausreicht. Es gibt weitere, analytisch nicht erfassbare Einflüsse auf eine Bahn abzuschätzen, welche die Bahnparameter säkular und/oder langperiodisch so beeinflussen, dass sie bei Bedarf durch Bahnkorrekturen verändert werden müssen um eine gewünschte Sollbahn eizuhalten.

In diesem Abschnitt werden als erstes langfristige Variationen einiger fundamentaler Größen der synodischen Bewegung bei Bezug auf die mittlere scheinbare Sonne soweit möglich analytisch untersucht. Sie dienen als erste Grundlage zur Abschätzung eines eventuell benötigten Korrekturaufwandes der Bahnparameter. Eine verfeinerte Untersuchung unter Einschluss der periodischen Satellitenbewegung und bei Bezug auf die wahre Sonne interessiert vor allem bei Satellitenbewegungen ohne Bahnkorrekturen. Im operationellen Satellitenbetrieb werden die Korrekturen aus der beobachteten Bahn berechnet. Der wahre Korrekturaufwand, insbesondere der Zeitverlauf der Korrekturen, kann von den analytisch vorhergesagten abweichen.

28.14.1 Zeitstabilität bei der Variation natürlicher Bewegungseinflüsse

Ein Satellit hat auf seiner Bahn eine ständig wechselnde Stellung zur Sonne. Mit dem momentanen Sonnenwinkel

$$\tau = \alpha - \alpha_{\odot} \tag{28.391}$$

(α = Rektaszension des Satelliten, $\alpha_\odot$ = Rektaszension der Sonne) variieren wahre

$$T_w \;\coloneqq\; \tau + 12^h \tag{28.392}$$

und mittlere Sonnenzeit

$$T_m \;\coloneqq\; \bar{\tau} + 12^h \quad , \quad \bar{\tau} \;\coloneqq\; \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.393}$$

$\alpha_{\bar{\odot}}$ ist die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne, die wie üblich als im Äquator sich gleichförmig bewegend angenommen wird. Unter Zeit eines Satelliten wird hier also die (mittlere bzw. wahre) Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt verstanden. Als Maß für den Zeitbezug einer Bahn kann die *mittlere Sonnenzeit* im mittleren aufsteigenden Knoten, entsprechend der *mittlere Knotensonnenwinkel* (mit der bei Abschätzungen zulässigen Vernachlässigung der kurzperiodischen Variationen)

$$\overline{\tau_\Omega} \;\coloneqq\; \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}} \tag{28.394}$$

genommen werden. Man beachte, dass in dieser Definition des mittleren Knotensonnenwinkels eine doppelte Mittelung verwendet wird: die mittlere Bewegung der Bahnebene ($\bar{\Omega}$) und die mittlere, also auf die (mittlere) Äquatorebene reduzierte Bewegung der scheinbaren Sonne ($\alpha_{\bar{\odot}}$). Wir entwickeln den mittleren Knotensonnenwinkel um einen mittleren Anfangswert

$$\overline{\tau_\Omega} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right)^2 + \ldots \tag{28.395}$$

Hier wird

$$\dot{\tau}_{\Omega s0} \;\coloneqq\; \dot{\Omega}_{s0} - n_\odot \tag{28.396}$$

als die *säkulare Knotensonnenwinkeldrift* bezeichnet, wobei stets

$$\dot{\bar{\Omega}} \;=\; \dot{\Omega}_{s0} \quad , \quad \dot{\tau}_{\bar{\Omega},s} \;=\; \dot{\tau}_{\Omega,s} \tag{28.397}$$

gesetzt werden kann. $\dot{\Omega}_{s0}$ ist die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens zur Epoche t_0, $n_\odot$ die tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne.

Für eine vorgegebene Sollbahn beträgt die Variation des mittleren Sonnenwinkels pro mittlerem drakonitischem Umlauf (= „Knotensonnenintervall“) mit den Epocheelementen

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \;\coloneqq\; \dot{\tau}_{\Omega s0}\,\overline{P_{d\,0}} \;=\; \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega 1} - t_{\Omega 0}\right) \quad . \tag{28.398}$$

Sie ist eindeutig für alle Zeiten erklärt. Der Knotensonnenwinkel hat nach *N* mittleren drakonitischen Umläufen somit den Sollwert

$$\overline{\tau_{\Omega\,N0}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right) \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + +N\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \quad . \tag{28.399}$$

In Formel (28.395) gibt der Ausdruck

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right) \;\coloneqq\; \frac{1}{2}\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right)^2 + \ldots \tag{28.400}$$

den *Zeitfehler* (= Variation der Drift des Knotensonnenwinkels) an, der nach dem Zeitintervall $t - t_0$ auf Grund von Variationen in den Anfangselementen zu erwarten ist:

- *Der Fehler in der Sonnenzeit bei Knotenüberflug wächst quadratisch mit der Zeit.*

Aus Formel (28.396) folgt für die Variation der Knotensonnendrift

$$\ddot{\tau}_{\Omega s0} = \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left(i\right)_s^{\cdot} \quad , \tag{28.401}$$

wobei offenbar

$$\frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial \overline{i}_0} \quad . \tag{28.402}$$

Diese Ausdrücke sind aus den Formeln (22.116) bis (22.118) berechenbar[1].

28.14.2 Die Drift der Knotensonnenzeit

Die Anfangsepoche werde in den Moment des ersten Knotenüberflugs $t_{\Omega 0}$ gelegt. Die dann gültigen mittleren Bahnelemente definieren als Epocheelemente die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$ sowie die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s0}$. Nach *N* drakonitischem Umläufen hat der mittlere Knotensonnenwinkel nach Formel (28.395) den Wert

$$\overline{\tau}_{\Omega\,N} = \overline{\tau}_{\Omega\,0} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right) + \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right)^2 + \ldots \tag{28.403}$$

Mit dem Näherungsausdruck für das Zeitintervall über *N* drakonitische Umläufe[2] aus Formel (23.372) (auf Seite 247) lautet dieser Ausdruck

$$\overline{\tau}_{\Omega\,N} = \overline{\tau}_{\Omega\,0} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P}_{d\,0}\left[1 + \frac{1}{2}\left(N+1\right)\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right] + \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\,N^2\,\overline{P}_{d\,0}^{\,2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(N+1\right)\left(P_d\right)_s^{\cdot}\right]^2 + \ldots$$

Unter der Annahme

$$\begin{aligned} \ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(P_d\right)_s^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{28.404}$$

wird

$$\overline{\tau}_{\Omega\,N} = \overline{\tau}_{\Omega\,0} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P}_{d\,0} + \frac{1}{2}\,\dot{\tau}_{\Omega s0}\,N\left(N+1\right)\overline{P}_{d\,0}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\,N^2\,\overline{P}_{d\,0}^{\,2} + \ldots \tag{28.405}$$

Die Epocheelemente definieren die Soll-Lage des Knotensonnenwinkels nach *N* drakonitischen Umläufen mit dem Wert

$$\overline{\tau}_{\Omega N0} \coloneqq \overline{\tau}_{\Omega\,0} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P}_{d\,0} = \overline{\tau}_{\Omega\,0} + N\,\overline{\Delta\tau}_{\Omega\,0} \quad . \tag{28.406}$$

Die säkularen Abweichungen der Bahnparameter von den Sollwerten verursachen somit die Drift

$$\Delta\left(\overline{\tau}_{\Omega\,N}\right) \coloneqq \overline{\tau}_{\Omega\,N} - \overline{\tau}_{\Omega\,0} - N\,\overline{\Delta\tau}_{\Omega\,0} \tag{28.407}$$

---

[1] In Abschnitt 22.5.1.1 auf Seite 60

[2] In Abschnitt 23.12.1 auf Seite 242

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = \frac{1}{2} N \overline{P_{d0}} \left[\dot{\tau}_{\Omega s0} (N+1) \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ddot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{d0}} \right] \quad . \tag{28.408}$$

Mit der Definition der Verschiebung des Knotensonnenwinkels (= „Knotensonnenintervall“) zur Epoche durch

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} := \dot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{d0}} \tag{28.409}$$

hat das *N*-te *Knotensonnenintervall* die Länge

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\tau_{\Omega,N}} - \overline{\tau_{\Omega,N-1}} \tag{28.410}$$

bzw.

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{d0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} \ddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) \overline{P_{d0}}^2 + \ldots \tag{28.411}$$

Die Veränderung des Knotensonnenintervalls nach *N* drakonitischen Umläufen beträgt dann

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) := \overline{\Delta\tau_{\Omega N}} - \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \tag{28.412}$$

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \left[\dot{\tau}_{\Omega s0} N \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} (2N-1) \ddot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{d0}} \right] \overline{P_{d0}} + \ldots \tag{28.413}$$

28.14.3 Die Variation des Knotensonnenintervalls

Die Kenntnis der Variation des Knotensonnenintervalls kann für manche Untersuchungen und zur Klärung der Zusammenhänge von Nutzen sein. Sie wird daher im Folgenden hergeleitet und zu den bisher behandelten Variationen des Knotensonnenwinkels und der drakonitischen Umlaufzeit in Relation gestellt.

Nach *N* drakonitischen Umläufen hat das Knotensonnenintervall nach Formel (28.410) die Variation

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right)_s^{\cdot} &= \left(\Delta\tau_{\Omega N}\right)_s^{\cdot} = \\ &= \ddot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{d0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ddot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{d0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \\ &\quad + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \left(P_d\right)_s^{\ddot{}} + \frac{1}{2} \dddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + \\ &\quad + \ddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) \overline{P_{d0}} \left(P_d\right)_s^{\ddot{}} + \ldots \end{aligned}$$

Da neben den Näherungen (28.404) auch

$$\begin{aligned} \left(P_d\right)_s^{\ddot{}} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dddot{\tau}_{\Omega s0} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dot{\tau}_{\Omega s0} \left(P_d\right)_s^{\ddot{}} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{28.414}$$

angenommen werden darf, bleibt

$$\left(\Delta\tau_{\Omega N}\right)_s^{\cdot} = \ddot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{d0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots = \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.415}$$

Die säkulare Variation des Knotensonnenintervalls infolge der säkularen Variationen in den Bahnelementen ist durch

$$\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{i}_0}\,(i)_s^{\cdot} \qquad (28.416)$$

gegeben. Im Fall der Erde ist die durch das Erdschwerefeld verursachte säkulare Variation $\dot{\Omega}_{s0}$ aus Formel (20.15)[1] und die mittlere drakonitische Umlaufzeit aus Formel (23.162) gegeben[2]. Damit ergibt sich in erster Näherung der Ausdruck (es ist $\overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right)$, $\overline{n}_0 = \sqrt{\mu/\overline{a}_0^3}$)

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} &= -3\pi J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 - \\ &\quad -2\pi\,\frac{n_\odot}{\overline{n}_0}\left\{1+\frac{3}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\}+ \\ &\quad +O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \qquad (28.417)$$

sowie für mittlere Kreisbahnen

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\left[\overline{e}_0=0\right] &= -2\pi\,\frac{n_\odot}{\overline{n}_0} - \\ &\quad -3\pi\,J_2\,R_E^2\left[\frac{\cos\overline{i}_0}{\overline{a}_0^2}+\frac{n_\odot}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0}}\left(1-4\cos^2\overline{i}_0\right)\right]+ \\ &\quad +O\left(J_2^2\right)\quad .\end{aligned} \qquad (28.418)$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{a}_0} &= -3\pi n_\odot\sqrt{\frac{\overline{a}_0}{\mu}}+6\pi J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + \\ &\quad +\frac{3}{4}\,\pi J_2\,n_\odot\,\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0^3}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]+ \\ &\quad +O\left(J_2^2\right)\ \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{km}}\right]\end{aligned} \qquad (28.419)$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{e}_0} = -12\pi J_2\,\frac{\overline{e}_0 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}\cos\overline{i}_0 + \qquad (28.420)$$

[1] Abschnitt 20.2.1, Band III

[2] Abschnitt 23.3.2 auf Seite 147

$$+ 3\pi J_2 \frac{\bar{e}_0 R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3} \frac{n_\odot}{\bar{n}_0} \left[-\left(2+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) + \left(10+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \cos^2 \bar{i}_0 \right] +$$
$$+ O\left(J_2^2\right)$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0} = 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2} \sin \bar{i}_0 -$$
$$-3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2} \frac{n_\odot}{\bar{n}_0} \left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad , \tag{28.421}$$

im Fall kreisförmiger Bahnen

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] = -3\pi n_\odot \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^3} \cos \bar{i}_0 +$$
$$+ \frac{3}{2} \pi J_2 n_\odot \frac{R_E^2}{\sqrt{\mu \bar{a}_0^3}} \left(1-4\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right]$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] = O\left(J_2^2\right) \tag{28.422}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] = 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2} \sin \bar{i}_0 - 24\pi J_2 n_\odot \frac{R_E^2}{\sqrt{\mu \bar{a}_0}} \cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Mit dem jetzt bekannten $\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ können die Formeln (28.405) bis (28.413) zur Berechnung des Sonnenwinkels bei Überflug des Satelliten sowie des Knotensonnenintervalls und seiner Driften umformuliert werden. Man erhält

$$\overline{\tau_{\Omega N}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \frac{1}{2} N^2 \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\, \overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.423}$$

mit dem Zeitfehler

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = \frac{1}{2} N^2 \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\, \overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.424}$$

sowie das Knotensonnenintervall

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \left(N-\frac{1}{2}\right) \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\, \overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.425}$$

mit der Variation

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \left(N-\frac{1}{2}\right) \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\, \overline{P_{d\,0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_d\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.426}$$

BEISPIEL 1: Für die Bahn

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

wird mit den Formeln (28.419) und (28.421)

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 = -5.874273927\times10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 = 8.024557535\times10^{-3} \quad .$$

Mit den säkularen Variationen

$$\dot{a}_s = -1.28892\times10^{-7}\ \text{km/s} \quad , \quad (i)_s^{\cdot} = -9°.2365967\times10^{-5}\,1/\text{d}$$

lautet die säkulare Variation des mittleren Knotensonnenintervalls pro drakonitischem Umlauf zur Epoche nach Formel (28.416)

$$\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} = -9^s.030399899\times10^{-5}\,1/\text{d} \cong -7.6009119145\times10^{-12}\ \text{rad/s} \quad .$$

Von besonderem Interesse sind hier die Anteile der Knotensonnenwinkelvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herrühren. Es sind

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\,\dot{a}_s = 1''.3493117\times10^{-3}\,\frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\,(i)_s^{\cdot} = -2''.7038717\times10^{-3}\,\frac{1}{\text{d}} \quad ,$$

die beiden Anteile wirken also gegenläufig. Nach den Beispielen in Abschnitt 23.12 (auf Seite 244) ist

$$\left(P_d\right)_s^{\cdot} = -1.62522\times10^{-7} \quad .$$

Mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{d\,0}}$ = 6027.9s und der säkularen Knotendrift $\dot{\tau}_{\Omega s0}$ = 0.0 (die Ausgangsbahn wurde ja als sonnensynchron angenommen) lautet der Zeitfehler nach 5235 drakonitischen Umläufen (ungefähr ein Jahr) mit Formel (28.424)

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = 86^s.330 \quad .$$

Das Knotensonnenintervall hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}$ =0°.0 (gemäß Formel (28.397)) entsprechend Formel (28.426) um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = -0^s.03298$$

und mit Formel (28.425) auf den wegen der Sonnensynchronität der vorgegebenen (zur Epoche gültigen) Nominalbahn identischen Wert

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = -0^s.03298$$

geändert. Diese mittleren Größen sind in der Praxis gewöhnlich vernachlässigbar. ◄

Anmerkungen: Wie bei den Korrekturen der Spurstabilität in Abschnitt 23.12 (auf Seite 244) gilt auch hier: die getrennt aufgeführten Variationsanteile infolge des Luftwiderstandes und der Sonnengravitation können entgegengesetztes Vorzeichen und unter Umständen sogar dem Betrag nach nahezu gleich groß sein, so dass auch bei starker Einzelvariation nur eine schwache Gesamtvariation resultieren kann. Die Variation in der Inklination darf nur über einige Monate als konstante somit säkulare Variation aufgefasst werden. Im Allgemeinen ist sie jedoch langperiodisch. Ähnliches gilt auch für die Variation der großen Bahnhalbachse, die wegen der mehrfach periodischen Variabilität des Solarflusses ebenfalls über Monate, allenfalls ein bis zwei Jahre als konstant aufgefasst werden darf. Diese wechselseitigen Variabilitäten wirken sich auf die Drift des Knotensonnenwinkels sehr unterschiedlich aus. Sie müssen für langfristige Analysen daher sehr sorgfältig berücksichtigt werden. ◄

BEISPIEL 2: Wir wollen daher noch ein zweites ähnliches Beispiel[1] mit einer Bahn der mittleren Äquatorbahnhöhe $\bar{H} = 888\,\text{km}$

$$\bar{a}_0 = 7266,47\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 99°.007513 \quad , \quad \overline{P_{d\,0}} = 6171.4\,\text{s}$$

betrachten. Hier ist wegen der Sonnensynchronität dieser vorgegebenen Nominalbahn $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}} = 0°.0 \,/\, \overline{P_d}$. Mit den maximalen säkularen Variationen

$$\dot{a}_s = -2.994537\times10^{-3}\,\text{km/d} \quad , \quad (\dot{i})_s = -1°.296\times10^{-4}\,/\,\text{d}$$

und den partiellen Anteilen

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 = -5.920299\times10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 = 7.7624186\times10^{-3}$$

lauten die Einzelanteile der Knotensonnenwinkelvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herstammen,

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 \dot{a}_s = 3''.656777\times10^{-4}\,\frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 (\dot{i})_s = -3''.621632\times10^{-3}\,\frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Der Anteil durch den maximalen Einfluss der Sonnengravitation ist also um den Faktor 10 größer als der Anteil infolge der maximal möglichen Variation infolge des Luftwiderstandes. Die säkulare Variation (28.416) des Knotensonnenintervalls beträgt mit diesen Werten

$$\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} = -2^s.170636\times10^{-4}\,\frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Da für diese Bahn mit den Formeln (23.358) und folgenden aus Abschnitt 23.12.1 (auf Seite 244)

$$\left(P_d\right)_s^{\cdot} = -3.814371\times10^{-8}$$

berechnet werden kann, folgt schließlich nach einer Zeitdauer von 2 Jahren entsprechend N = 10266 drakonitischen Umläufen der maximale Fehler in der Knotensonnenzeit (der dem Fehler im Knotensonnenwinkel identisch ist)

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = -13^m\,31^s.9 \quad \text{für} \quad (\dot{i})_{s,\max}^{\cdot} \quad .$$

Zum Vergleich lautet der Wert für minimalen Einfluss der Sonnenattraktion auf die Bahninklination $\left[(\dot{i})_{s,\min}^{\cdot} = -4°.12\times10^{-5}/\text{d}\right]$

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = -3^m\,15^s.6 \quad \text{für} \quad (\dot{i})_{s,\min}^{\cdot} \quad .$$

Das Knotensonnenintervall hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}} = 0°.0$ um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = -0^s.0386$$

geändert. ◄

[1] Auswahl dieser Bahnen in AIAA 96-3659

Das letzte Beispiel erlaubt die folgende (heuristische) Aussage:

- *Für eine sonnensynchrone Bahn über etwa 850 km (mittlere) Bahnhöhe kann auf das Verhalten der lokalen Knotensonnenzeit der „Stör"-Einfluss durch die Sonnengravitation bereits erheblich größer als der größte mögliche „Stör"-Einfluss durch den Luftwiderstand sein.*

28.14.4 Korrekturzyklus für Zeitstabilität

Auf Grund von analytisch nicht erfassbaren bzw. nicht exakt vorhersagbaren Variationen in den Bahnelementen wird nach einiger Zeit (hier nach N drakonitischen Umläufen) der beobachtete Wert

$$\overline{\tau_\Omega} \;=\; \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad ,$$

wobei $\bar{\Omega}$ durch Mittelung erhalten wird, vom Sollwert aus Formel (28.398) abweichen

$$\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w \;:=\; \overline{\tau_\Omega} - \overline{\tau_{\Omega N0}} \quad . \tag{28.427}$$

Zur Untersuchung der Zeitstabilität wird berechnet, wie lange der Knotensonnenwinkel das vorgegebene Toleranzintervall nicht überschreitet und wann und in welchem Maße die Bahn korrigiert werden muss, um den Zeitfehler innerhalb des Toleranzintervalls zu halten.

Überschreitet der wahre Fehler im Knotensonnenwinkel $\Delta\left(\tau_\Omega\right)_W$ aus Formel (28.427) ein vorgesehenes Toleranzintervall $\Delta\tau_k$

$$\left|\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w\right| \;>\; \left|\Delta\tau_k\right| \quad ,$$

muss die Bahn korrigiert werden. Es wird angestrebt, möglichst selten korrigieren zu müssen, so dass die gesamte Toleranzbreite $\pm\Delta\tau_k$ ausgenutzt werden kann.

Für eine Abschätzung des Zeitbedarfs, nach dem zu korrigieren ist, wird die wahre Abweichung $\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w$ durch den vor der Mission abschätzbaren Zeitfehler (28.424) ersetzt. Da das Korrekturintervall ohne Einschränkung in der Form $\pm\Delta\tau_k$ angenommen werden darf und die säkularen Variationen der Elemente eine stetige Variation der Knotenlängendrift gemäß Formel (28.400) verursachen, kann man für einen Korrekturzyklus genauso wie im Fall der Spurstabilität vorgehen (in Abschnitt 23.12.5 auf Seite 254). Siehe hierzu auch die Darstellung in Bild 28-104. Es seien $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$ und entsprechend $\overline{\tau_{\Omega 0}}$ die Sollwerte in großer Halbachse, Exzentrizität, Inklination und Knotensonnenwinkel. Die Anfangswerte für Halbachse, Exzentrizität und Inklination für einen Korrekturzyklus werden durch Änderungen der Sollwerte um gewisse noch zu berechnende Beträge $\Delta\bar{a}$, $\Delta\bar{e}$, $\Delta\bar{i}$ so gewählt, dass der Knotensonnenwinkel das eine Ende des erlaubten Intervalls erreicht (Punkt 1 in Bild 28-104):

$$\bar{a}_1 \;=\; \bar{a}_0 + \Delta\bar{a} \quad , \quad \bar{e}_1 \;=\; \bar{e}_0 + \Delta\bar{e} \quad , \quad \bar{i}_1 \;=\; \bar{i}_0 + \Delta\bar{i} \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 1}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \Delta\tau_k \quad .$$

Für das einmalige Durchlaufen des gesamten erlaubten Toleranzintervalls $2\Delta\tau_k$ kann mit Formel (28.424) die dazu benötigte Anzahl von drakonitischen Umläufen berechnet werden

$$N = \frac{1}{\overline{P_{d\,0}}\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}}\left[-\frac{1}{2}\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \sqrt{\frac{1}{4}\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}}^{\,2} + \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + 4\overline{P}_{d\,0}\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\Delta\tau_k}\;\right] \qquad (28.428)$$

In dieser Formel kann das negative Zeichen vor der Wurzel nicht stehen, da *N* stets nichtnegativ angenommen werden kann. Wird *N* in die Zeitformel (23.372) eingesetzt, erhält man das benötigte Zeitintervall Δt_k zum einmaligen Durchlaufen des Toleranzintervalls. Somit wird das andere Ende des erlaubten Gesamtintervalls erreicht (Punkt 3)

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_0 \quad , \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_0 \quad , \quad \bar{i}_3 = \bar{i}_0 \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 3}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} - \Delta\tau_k \quad .$$

Die Elemente variieren nach weiteren $2\Delta t_k$, da jetzt „unterhalb“ der Sollwerte, wieder im doppelten Intervall zurück bis zu den Werten (Punkt 5)

$$\bar{a}_5 = \bar{a}_0 - \Delta\bar{a} \quad , \quad \bar{e}_5 = \bar{e}_0 - \Delta\bar{e} \quad , \quad \bar{i}_5 = \bar{i}_0 - \Delta\bar{i} \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 5}} = \overline{\tau_{\Omega 1}} \quad .$$

Erst jetzt werden die Bahnelemente korrigiert, und zwar die Halbachse um den Wert $2\Delta\bar{a}$, die Exzentrizität um $2\Delta\bar{e}$ und die Inklination um $2\Delta\bar{i}$. Da während eines Zyklus das Intervall $2\left|\Delta\tau_k\right|$ zweimal durchlaufen wird, beträgt der gesamte Korrekturzyklus das Doppelte des Zeitintervalls Δt_k, also

$$Z_\tau = 2\Delta t_k \quad . \qquad (28.429)$$

Für Abschätzungen ist der Fehler nicht allzu groß, wenn in Formel (28.428) sowie in (23.372) die Faktoren mit $\left(P_d\right)_s^{\cdot}$ vernachlässigt werden. Es wird dann in recht guter Näherung

$$Z_\tau = 4\sqrt{\frac{\left|\Delta\tau_k\right|\overline{P_{d\,0}}}{\left|\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\right|}} \quad . \qquad (28.430)$$

In der Mitte des erlaubten Längenintervalls wird der Sollwert $\overline{\tau_{\Omega\,0}}$ erreicht (Punkt 2 bzw. Punkt 4). Dies ist nach dem ersten Zeitintervall $\Delta t_k / \sqrt{2} \approx 0.3\Delta t$ der Fall bzw. vor Ende des Zyklus. Diese Aussagen können in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

- *Für positive Fehlerdriften $\left(\Delta\tau_\Omega\right)_s^{\cdot}$ liegt der Scheitel der Korrekturparabel auf der Seite früherer Zeiten („links“), der Zyklus beginnt mit einer späteren mittleren Sonnenzeit, zum halben Zyklus beim minimalen Extrem der Sonnenzeit, am Ende wieder zur späteren Sonnenzeit. Während 70 % eines Korrekturzyklus ist die mittlere Zeit früher als die Sollzeit.* ◄

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn (siehe auch die Beispiele in Abschnitt 23.12.5 auf Seite 254), mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen mit den Soll-Bahnelementen

$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 98°.498$

wird mit der Variation

$$\left(\Delta\tau_\Omega\right)_s^{\cdot} = -9^s.03039989869\times 10^{-5}\,1/\text{d}$$

und $\overline{P_{d\,0}} = 6027^s.9$ sowie für das Toleranzintervall

$$\Delta\tau_k \;=\; \pm 1\,\mathrm{s} \;\triangleq\; 0°.0041667$$

für den Korrekturzyklus nach Formel (28.430)

$$Z_\tau \;=\; 111^d.2$$

erhalten. In Bild 28-104 ist der Fehler in der Knotenzeit auf die Mitte des erlaubten Knotenzeitintervalls $2\Delta\bar{\tau}_k$ reduziert, entsprechend der Sollzeit $\overline{T_{\Omega 0}}$. Das Zeitintervall umfasst das doppelte Durchlaufen des Toleranzintervalls, das vollständig ausgenutzt wird. Entscheidend ist somit die Wahl der Anfangsbahnelemente $\bar{a}_1$, $\bar{e}_1$, $\bar{i}_1$ bei Beginn des Zyklus in Punkt 1. Ergänzend zeigen Bild 28-105 und Bild 28-105 die entsprechenden Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination über dem Toleranzintervall. Der Verlauf der Korrektur nach Beendigung eines Zyklus ist jeweils durch einen Pfeil markiert. ◀

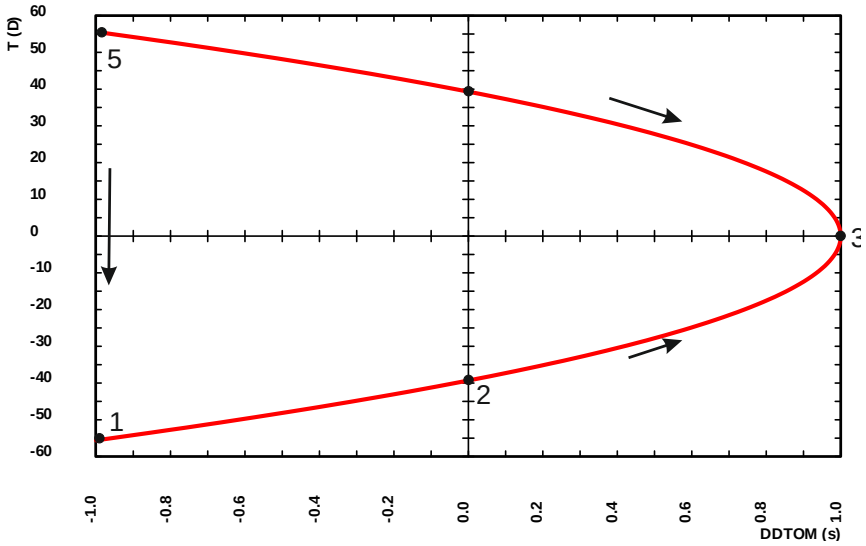


Bild 28-104: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Zeit für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

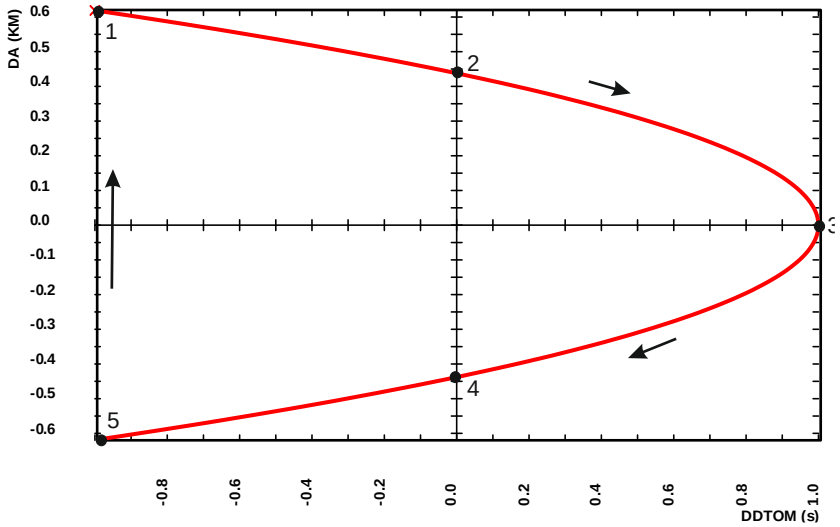


Bild 28-105: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Zeitlängenintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

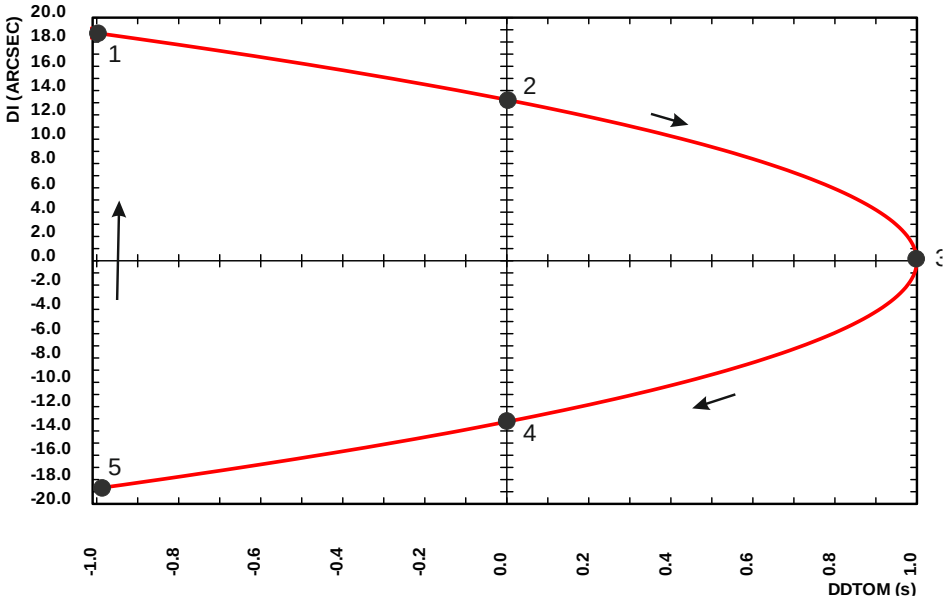


Bild 28-106: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Inklination für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

Am Ende des Korrekturzyklus muss die Bahn korrigiert werden, die große Bahnhalbachse um den Wert

$$2\,\Delta\bar{a} \;=\; \dot{a}_s\, Z_\tau \quad , \tag{28.431}$$

die Exzentrizität um

$$2\,\Delta\bar{e} \;=\; \dot{e}_s\, Z_\tau \tag{28.432}$$

und die Inklination um

$$2\,\Delta\bar{i} \;=\; (i)_s^{\cdot}\, Z_\tau \quad . \tag{28.433}$$

Es werden die Geschwindigkeitsinkremente etwa aus den Formeln (23.421) bis (23.423) benötigt[1].

BEISPIEL: Es werden unterschiedliche Einflüsse auf das Zeitverhalten der (schon in den vorhergehenden Beispielen behandelten) Bahn

$$\bar{a}_0 \;=\; 7153\,\mathrm{km} \quad , \quad \bar{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 \;=\; 98°.498$$

abgeschätzt. Berücksichtigt wird maximale ($\rho_{\max}$) und minimale ($\rho_{\min}$) Luftdichte als Folge der Sonnenaktivität und unterschiedliche Einflüsse durch die Sonnengravitation. Entsprechend sind die säkularen Variationen in Halbachse bei

$$\rho_{\min} : \quad \dot{a}_{s,I} \;=\; -1.12916\times 10^{-8}\ \mathrm{km/s}$$

$$\rho_{\max} : \quad \dot{a}_{s,II} \;=\; -1.28892\times 10^{-7}\ \mathrm{km/s}$$

[1] Abschnitt 23.12.5 auf Seite 252

und in Inklination (berücksichtigend tages- [1, 2 bzw. 3, 4] und jahreszeitliche [1, 3 bzw. 2, 4] Schwankungen):

$$\begin{aligned}
(i)^{\cdot}_{s,1} &= -4°.12\times10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -4°.7685185\times10^{-10}\,1/s\\
(i)^{\cdot}_{s,2} &= -9°.36\times10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -1°.0833333\times10^{-9}\,1/s\\
(i)^{\cdot}_{s,3} &= -8°.00\times10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -9°.2592593\times10^{-10}\,1/s\\
(i)^{\cdot}_{s,4} &= -12°.98\times10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -1°.50231481\times10^{-9}\,1/s \quad .
\end{aligned}$$

Dies bewirkt die säkularen Variationen in der Knotenüberflugzeit

$(\Delta\tau_\Omega)^{\cdot}_s$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–7s.154×10–5 1/d	–17s.240×10–5 1/d	–14s.630×10–5 1/d	–24s.220×10–5 1/d
$\dot{a}_{s,II}$	1s.060×10–5 1/d	–9s.030×10–5 1/d	–6s.411×10–5 1/d	–16s.002×10–5 1/d

Tabelle 28-27 Säkulare Variation der Knotenüberflugzeit infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

und somit die Korrekturzyklen

Z_τ	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	125d	80d	87d	67d
$\dot{a}_{s,II}$	324d	111d	132d	83d

Tabelle 28-28 Korrekturzyklus für Zeitstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Der Korrekturbedarf kann, da es sich um eine Kreisbahn handelt, näherungsweise mit den Formeln (23.421) bis (23.423) aus

$$\left.\begin{aligned}
\Delta V_t &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}\,(2\,\Delta\bar{a})\\
\Delta V_c &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}}\,(2\,\Delta\bar{i})
\end{aligned}\right\rangle \quad \bar{e} \text{ klein} \qquad (28.434)$$

abgeschätzt werden. Es ergeben sich die Werte für den Tangentialschub

ΔV_t	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.063 m/s	–0.040 m/s	–0.044 m/s	–0.034 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–1.883 m/s	–0.645 m/s	–0.767 m/s	–0.482 m/s

Tabelle 28-29: Halbachsenkorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Tangentialschub über eine erwartete Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_t	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.368 m/s/2a	–0.365 m/s/2a	–0.369 m/s/2a	–0.371 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–4.245 m/s/2a	–4.245 m/s/2a	–4.245 m/s/2a	–4.242 m/s/2a

Tabelle 28-30: Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren

Für den Normalschub sind folgende Werte zu erwarten:

ΔV_c	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.335 m/s	–0.488 m/s	–0.453 m/s	–0.567 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.870 m/s	–0.677 m/s	–0.688 m/s	–0.702 m/s

Tabelle 28-31 : Inklinationskorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Normalschub über eine Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_c	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–1.958 m/s/2a	–4.456 m/s/2a	–3.804 m/s/2a	–6.182 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–1.961 m/s/2a	–4.455 m/s/2a	–3.807 m/s/2a	–6.178 m/s/2a

Tabelle 28-32: Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren

Die vorstehenden Tabellen zeigen, dass die Inklinationskorrektur mehr Schub bedarf als die Halbachsenkorrektur. Der zu erwartende Gesamtschub beträgt im günstigsten Fall über 2 Jahre

$$|\Delta V| \approx 2.6\,\text{m/s/2a} \quad ,$$

im ungünstigsten Fall

$$|\Delta V| \approx 10.4\,\text{m/s/2a} \quad .$$

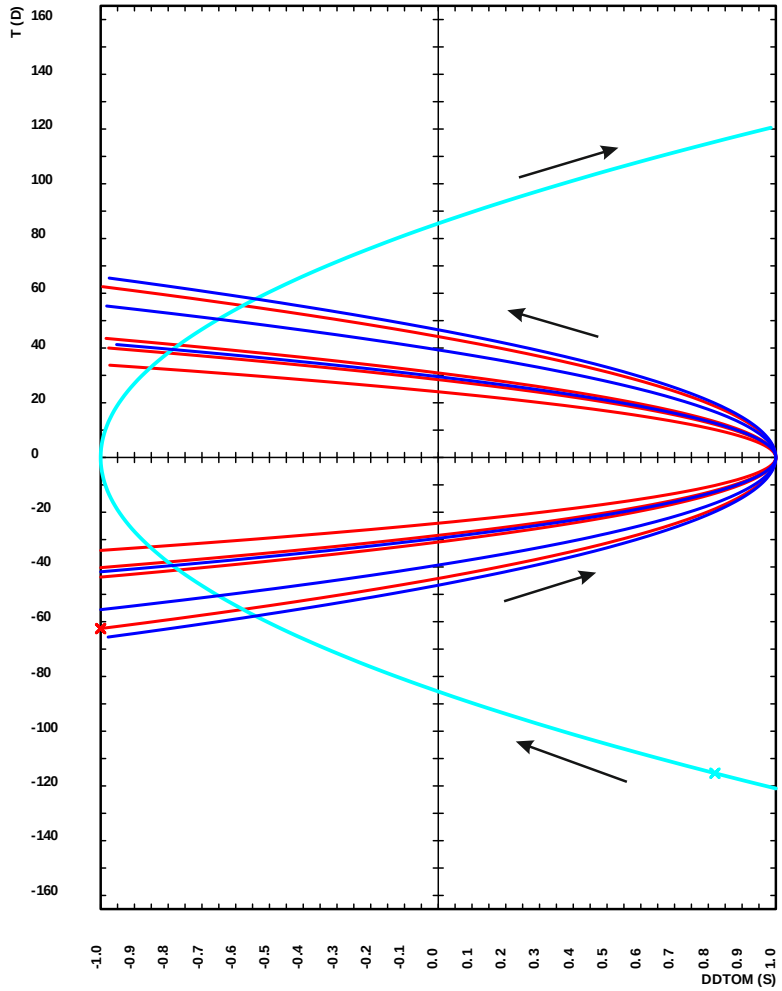


Bild 28-107: Korrekturzyklen zur Zeitstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\overline{a}_0$ = 7153 km, $\overline{e}_0$ = 0.0, $\overline{i}_0$ = 98°.523

Bild 28-107 zeigt die Korrekturzyklen für die in diesem Beispiel behandelten Störeinflüsse. Die Kurven zeigen keinen signifikanten Unterschied für unterschiedlichen Strahlungsfluss, wie es in der vergleichbaren Kurve für den Zyklus zur Spurstabilität in Bild 23-56 (auf Seite 263) beobachtet werden konnte[1]. Allerdings zeigt die Kurve für $\dot{a}_{s,II}$ und $(i)^{\cdot}_{s,1}$ ein gegenläufiges Verhalten gegenüber allen anderen Kurven, da in diesem Fall, wie Tabelle 28-27 zeigt, nur in diesem Fall $(\Delta\tau_\Omega)^{\cdot}_s$ positiv ist. Dieser Sonderfall muss bei der Planung von Zeitkorrekturzyklen beachtet werden. In diesem Bild sind die roten Kurven für maximale Luftdichte $(\dot{a}_{s.II})$, die blauen Kurven für minimale Luftdichte $(\dot{a}_{s.I})$ gerechnet. Jeweils von außen nach innen wurde die säkulare Variation der Inklination in der Reihenfolge $((i)^{\cdot}_{s,1},(i)^{\cdot}_{s,2},(i)^{\cdot}_{s,3},(i)^{\cdot}_{s,4})$ berücksichtigt. ◄

[1] Abschnitt 23.12.5

29 Synodische Bewegung bezogen auf Mond und Mondorbiter

Der Mond bildet mit der Erde ein Doppelplanetensystem, das in seiner Relation einzigartig im Sonnensystem ist. Der Mond befindet sich stets außerhalb der Attraktionssphäre[1] der Erde aber noch innerhalb der Aktivitätssphäre. Seine Bewegung ist daher zwar an die Erde gebunden, aber es dominiert der Einfluss der Sonne. Man kann die Bewegung des Mondes als eine Bewegung um die Erde mathematisch beschreiben, während die Bewegung physikalisch jedoch primär um die Sonne verläuft. Dies zeigt sich daran, dass die Bewegung des Mondes stets konkav zur Sonne gerichtet ist. Eine zuverlässige Theorie der Bewegung des Mondes muss also stets die Sonne mit einbeziehen. Dies war erstmals *Ptolemäus* gelungen[2]. Moderne Theorien sind eine Erweiterung der Theorie des *Ptolemäus*, bedingt durch verbesserte Beobachtungen und die Fortentwicklung der Himmelsmechanik.

Die Bewegung des Mondes als des prominentesten Körpers, der wesentlich als Erdsatellit aufgefasst werden kann, wurde modellhaft für die Theorien der Bewegung der Erdsatelliten. Viele Begriffe der Theorie der Satellitenbewegung sind aus der Theorie der Mondbewegung abgeleitet.

Im Rahmen der Satellitenbewegung ist die Mondbewegung von Bedeutung, zum Beispiel

- wenn für präzise Untersuchungen der Satellitenbewegung die Attraktion des Mondes berücksichtigt werden muss[3],
- wenn der Mond von einem Erdsatelliten aus beobachtet werden soll, zum Beispiel zur Lagebestimmung mit Hilfe eines Mondsensors oder zur Kalibration eines Sensors an Bord des Satelliten,
- wenn mit Hilfe von Sendern auf der Mondoberfläche Antennen auf der Erdoberfläche geeicht werden sollen[4].

29.1 Die scheinbare Bewegung des Mondes um die Erde

Neben der heliozentrischen Ephemeride des Mondes wird auch die geozentrische Ephemeride durch Integration mit der größtmöglichen Genauigkeit erhalten und in den JPL Ephemeriden und im astronomischen Jahrbuch zur Verfügung gestellt. Für nicht so genaue Anforderungen können die in der Antike begonnenen Reihenentwicklungen zur Berechnung des geozentrischen Mondortes bis zu einem bestimmten Genauigkeitsgrad benutzt werden. Mit diesen Entwicklungen sind auch analytische Untersuchungen etwa im Zusammenhang mit Satellitenbewegungen in durchsichtiger Weise durchführbar.

29.1.1 Die Entwicklung der Mondtheorie

Die Bewegung des Mondes[1] spielt seit alters her, da er die dritte unabhängige Zeiteinheit liefert neben dem täglichen Umlauf des Sternhimmels und dem jährlichen Umlauf der scheinba-

---

[1] Abschnitt 12.6, *Auswahl von Einflussbereichen* (Band III)

[2] siehe etwa in Abschnitt 1.7.1 (Band I)

[3] siehe zum Beispiel MUSEN, P., A. BAILIE AND E. UPTON [1961]

[4] Siehe zum Beispiel JOCHIM, E. F.; SLIWINSKI, P. [1976]

ren Sonne, eine zentrale Rolle im täglichen irdischen Leben. Dabei gab es auf Grund der täglichen irdischen Beobachtung keine Zweifel, dass sich der Mond um die Erde bewege. Systematische Beobachtungen über längere Zeiträume insbesondere bezogen auf die Finsternisse führten nicht nur bei den Babyloniern[2] auf eine Kenntnis der unterschiedlichen Monatslängen. Dies trifft insbesondere für den synodischen Monat zu, also der Bezug auf die Syzygien (d.h. von Neumond zu Neumond, bzw. Vollmond zu Vollmond) und den drakonitischen Monat, der die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch den Schnittpunkt seiner Bahn mit der Ekliptik, d.h. der (scheinbaren) Sonnenbahn, umfasst, welche Bedingung für Sonnen- und Mondfinsternisse waren.

Die in der Antike, vor allem in Mesopotamien und bei den Griechen entwickelte Mondtheorie wurde modellhaft auch auf die Untersuchung der Planetenbewegung übertragen[3].

Die von den Babyloniern und anderen Völkern durch langfristige Beobachtungen erhaltenen numerischen Werte der Monatslängen wurden durch spätere Beobachtungen nur in geringem Maße verbessert. Sie lieferten aber keine Aussage über die Mondbewegung an sich. Die geometrisch-kinematische Hinterfragung der Mondbewegung gelang erst den Griechen. *Hipparchos* wandte das Epizykelmodell des *Apollonius von Perge* auf die Mondbewegung an und entdeckte eine erhebliche Abweichung von der zunächst vermuteten Kreisbewegung[4]. Diese Abweichung wurde die „erste Ungleichheit“ bzw. auch „große Ungleichheit“ genannt. Diese anomale Bewegung kann heute durch die Mittelpunktsgleichung beschrieben werden. *Hipparch* hatte auch eine überlagerte Abweichung von dieser Ungleichheit beobachtet, die er aber nicht deuten konnte. Dies war *Ptolemäus* gelungen, der einen bemerkenswerten Fortschritt in die Bearbeitung himmelsmechanischer Aufgabenstellungen brachte[5]. Der Fortschritt wird nämlich nicht nur durch verbesserte Mess- und Beobachtungstechniken gebracht, sondern auch durch neuartige unkonventionelle Auswertungsmethoden. Im Fall der Mondbewegung, die bislang auf Beobachtungen in den Syzygien beruhte, verglich *Ptolemäus* jetzt auch die Mondbewegung in den Quadraturen, also bei Viertel- bzw. Dreiviertelmond (dem Mondalter 90° bzw. 270°) und verglich die Beobachtungsergebnisse in den Quadranten der ungleichförmigen Mondbewegung. Dadurch konnte er die erste und die zweite Ungleichheit numerisch trennen, was dann auch den Beobachtungen genügte. Statt der zweiten Ungleichheit hatte *Ptolemäus* damit die von der Sonnenbewegung abhängige Evektion entdeckt. Die Zahlenwerte für den ersten Term der Mittelpunktsgleichung und der Evektion sind bis heute nur unwesentlich verbessert worden.

Kopernikus hatte Band IV der *de revolutionibus* der Mondtheorie gewidmet[6]. Im Gegensatz zur Planetentheorie hatte er keine Zweifel an der alten Vorstellung, dass sich der Mond geozentrisch bewege. Allerdings kritisierte er die Evektionstheorie des *Ptolemäus*, da sie die Mondentfernung falsch wiedergebe. Nach dieser Theorie müsste der Mond seinen scheinbaren Durchmesser während eines anomalistischen Umlaufs etwa im Verhältnis 1:2 verändern. Dies aber widerspreche den Beobachtungen. Da nach der Formulierung des *Ptolemäus* jedoch

---

[1] In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Mondtheorie nur überblickmäßig zusammengestellt. Die entsprechenden Details finden sich in Band I in den Abschnitten, die den einzelnen Forschern gewidmet sind

[2] Siehe mehr dazu in Abschnitt 1.8.1 (Band I)

[3] OTTO NEUGEBAUER [1970], p. 86

[4] Abschnitt 1.6.6 (Band I)

[5] In Abschnitt 1.7.1 (Band I), dort auch: nach Formel (1.85) muss es richtig lauten: $\left|\Delta l\left[D_{\leftmoon} = 0° \text{ oder } 180°, M_{A,\leftmoon} = 90° \text{ oder } 270°\right]\right| = 5°$, $\left|\Delta l\left[D_{\leftmoon} = 90° \text{ oder } 270°, M_{A,\leftmoon} = 90° \text{ oder } 270°\right]\right| = 7°40'$

[6] Abschnitt 1.9.2.3 (Band I)

die wahre ekliptikale Länge des Mondes richtig wiedergegeben wird, kann geschlossen werden, dass diese Theorie als eine rein mathematische Rechenvorschrift ohne physikalischen Bezug akzeptiert werden muss. *Kopernikus* hatte in der Mondtheorie des *Ibn ash – Shātir* ein Modell gefunden, das bessere Werte für die Mond-Parallaxe lieferte[1]. Er hatte dieses Modell unverändert in seine Mondtheorie übernommen.
Das bekannteste Beispiel aus der Geschichte der Himmelsmechanik für eine geschickte Auswahl von Beobachtungspunkten lieferte *Johannes Kepler* bei der Auswertung der Mars Beobachtungen von *Tycho Brahe*. *Kepler* konnte an die Beobachtungen der Sonne durch *Tycho Brahe* anknüpfen, der die Sonne auch in den Oktanten beobachtet hatte, nicht nur in den Apsiden (bei der Sonne die Solstitien) und den Quadranten[2]. So hatte auch *Kepler* die Beobachtungen der Marsbewegung in den Oktanten für seine Berechnungen herangezogen, also für Bahnpunkte mit den Anomalien 45°, 135° usw.. Dies führte letztendlich zur Entdeckung der elliptischen Planetenbewegung[3]. Die Beobachtung der Mondbewegung war allerdings wegen der zunehmenden Entdeckung anomaler Bewegungsanteile von Anfang an ungeeignet die Elliptizität der Planetenbewegung zu erkennen. Die Entwicklung einer vertieften Erkenntnis der Mondbewegung hatte *Tycho Brahe* selber durch seine verfeinerte Beobachtungstechnik vorangetrieben, indem er als nächste kleinere Anomalien der Mondbewegung die vom Alter der Mondbewegung abhängige *Variation* und die von der Sonnenbewegung abhängige *jährliche Gleichung* entdeckte[4]. Da die scheinbare Mondbahn etwas (um 5°) gegen die Ekliptik geneigt ist, muss zur Berechnung der ekliptikalen Länge auch die *Reduktion auf die Ekliptik* berücksichtigt werden.

Newtons wesentlicher Beitrag zur Mondtheorie war physikalischer Natur: Er schreibt in Buch I der Principia[5]: „*Die Kraft, die den Mond in seiner Umlaufbahn hält, ist genau die Kraft, die wir gewöhnlich Schwerkraft nennen. ...*“. Damit war *Newton* zu einer „geometrisch-dynamischen“ Betrachtung der Mondbewegung gekommen, kam aber selber nicht zu einer befriedigenden Untersuchung des Mondproblems, auch wenn er sechs Anomalien gefunden hat[6]. *Newton* hatte einsehen müssen, dass mit seinem Gravitationsgesetz allein die komplizierte Mondbewegung nicht begründet werden kann. Damit war der erste Schritt zu einer Art Störungsrechnung angedeutet[7]. Als erster war *Clairaut* über *Newton* mit seinem praxisorientierten Werk „Théorie de la Lune“ hinaus gegangen. Parallel dazu hatte sich *Jean le Rond d'Alembert* in seiner „Théorie de la Lune“ auf mehr analytisch-mathematische Weise mit dem Mondproblem beschäftigt, indem er die Arbeiten hin zu einem (hier noch eingeschränkten) Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond voranbrachte. *L. Euler* hatte neben seinen allgemeinen grundlegenden Arbeiten zur Begründung der Störungstheorie insbesondere auch die Mondtheorie weiter entwickelt. Er sah keinen Grund, die im allgemeinen *Newton*schen Ansatz des zweiten Axioms geforderte Variation der Masse eines Himmelskörpers bei der Wirkung einer Kraft anzunehmen: $d\left(mV\right)/dt$. Im Anschluss daran wurden stets bei Berechnungen der Bewegung der Planeten und auch des Mondes (in guter Näherung) die Masse des be-

---

[1] Innerhalb Abschnitt 1.8.5.2

[2] Siehe im Abschnitt *Sonnen- und Mondbewegung bei Tycho Brahe* in Abschnitt 1.10.1 (Band I)

[3] ausführliche Herleitung in Abschnitt 2.2.2 (Band I)

[4] siehe insbesondere die Entwicklung (1.259) in Abschnitt 1.10.1 (Band I); siehe weiterhin in K. STUMPFF [1959], Abschnitte 4. – 7. , insbesondere p. 38

[5] zitiert aus FAUVEL, J. et al. [1993], p78

[6] COOK, A. [1988], p.63

[7] Siehe dazu Abschnitt 2.5.3 (Band I)

treffenden Körpers als konstant angenommen. Dies ist jedoch im Zeitalter der Raumfahrt nicht mehr möglich: ohne Variation der Masse keine Raumfahrt[1].

Der Beitrag von *J. L. Lagrange* zur Mondtheorie bestand vor allem in Überlegungen zur Asphärizität des Mondes, d.h. seiner Triaxialität, wobei die Hauptachse stets zur Erde gerichtet sei: die Folge ist die gebundene Rotation[2]. Diese Arbeit war von *P. A. Hansen* in seiner Arbeit „*Sur la figure de la Lune*" weitergeführt worden[3]. Die Theorie der Mondbewegung war u.a. von *Tobias Mayer* (1723-1762), Professor in Göttingen, vorangetrieben worden. Er hatte Mondtafeln erstellt, die zur Längenbestimmung auf See geeignet waren, also von wertvoller praktischer Bedeutung waren. Zusammen mit *Euler* hat *Mayer* den vom englischen Parlament ausgesetzten Preis für eine Verbesserung der Navigationsmethoden erhalten[4]. Die weitere Entwicklung der Mondtheorie fand in den Beiträgen von *Ch. Delaunay* und *P. A. Hansen* einen bedeutsamen Höhepunkt. Während die von *Delaunay* entwickelte Mondtheorie als die theoretisch vollkommenste angesehen wird, gilt sie jedoch in der praktischen Anwendung der *Hansen*schen Methode (ab etwa 1838) als unterlegen. Die von *Hansen* geschaffenen Mondtafeln wurden erst 1923 durch die von *E. W. Brown* geschaffenen Mondtafeln abgelöst. *Brown* hatte die von *G. W. Hill* basierend auf den Theorien von *Delaunay*, *Gyldén*, *Poincaré* und *Hansen* erarbeiteten Mond- und Planetentheorien weiterentwickelt und damit die bis heute gültige Mondtheorie gefunden. Diese wird in neueren Arbeiten verbessert bzw. ergänzt, jedoch nicht prinzipiell erneuert[5]. Die aktuellen Mondtafeln sind unter dem Titel „Improved Lunar Ephemeris" (ILE) erhältlich[6]. Basierend auf der *Hansen*schen Mondtheorie hat *F. Hayn* (1902) eine Theorie der physikalischen Libration des Mondes entwickelt[7]. Später hat *K. Koziel* (1948) eine Librationstheorie basierend auf der Mondtheorie von *E. W. Brown* erarbeitet[8].

Vom theoretischen Standpunkt aus gibt es ausgehend von den schon in der Antike gefundenen Effekten auf die Mondbahn interessante Einblicke liefernde und vertiefende Untersuchungen zur Variation, der Evektion, der Apsidendrehung, über die parallaktische und die jährliche Gleichung und andere Terme der Mondbewegung[9], die in der vorliegenden Arbeit nicht weiter diskutiert werden sollen.

---

[1] Siehe etwa die Herleitung der Raketengleichung in Abschnitt 12.10.1 (Band III)

[2] Abschnitt 2.7.2 (Band I)

[3] P. A. HANSEN [1859], Mém. A. S. 24, zitiert aus R. WOLF [1890/1973], p. 504 (siehe auch in Abschnitt 2.7.7); MUSEN, P. [1963]; MUSEN, P. [1968 a]

[4] F. BECKER [1968], p. 95

[5] HANSEN, P.A. [1838/1]; HANSEN, P.A. [1838/2]; Cayley, A. [1857]; HILL, G. W. [1878]; HILL, G. W. [1818]; HILL, G. W. [1886]; BROWN, E. W. [1896/1960]; BROWN, E. W. [1897-1908]; BROWN, E. W. [1936]; MUSEN, P. [1969]; weitere Hinweise etwa in K. STUMPFF [1965], Abschnitt 173; KOPAL, Z. [1966], hier auch weitere bibliographische Hinweise, pp. 65-67

[6] ILE [1954]; GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. [1986]; VAN FLANDERN, T. C. [1969]; GRIFFITH, J. S. [1971]; STOFFELS, K. P. [1985]

[7] HAYN, F. [1902]: 'Selenographische Koordinaten I', in: *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften , math-phys. Klasse*, **27**, pp. 861-921

[8] KOZIEL, K. [1948], *Acta Astron.* **4**, pp.61-139; Hinweis bei KOPAL, Z. [1966] auf weitere Arbeiten von KOZIEL, K. [1949], [1949], [1957], [1962], [1964]; weitere bibliographische Hinweise in KOPAL, Z. [1966], pp. 65-67

[9] K. STUMPFF [1965], Kapitel XX; BUCERIUS, H. und M. SCHNEIDER [1968]; SCHNEIDER, M. [1993]; GACKSTATTER, F. [2000]

29.1.2 Die Gesetze von Cassini

Jean Dominique Cassini (1625-1712) war neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit als Professor in Bologna und später als Mitglied der Akademie der Pariser Sternwarte ein hervorragender Beobachter. Er entdeckte die nach ihm benannte Teilung des Ringsystems des Saturn und 4 der Saturnmonde. Er entdeckte die Rotation von Jupiter, Mars und Venus und er formulierte heuristische Regeln über die Rotation des Mondes, die als „Gesetze von *Cassini*" bekannt sind[1]:

(C1) *Der Mond rotiert rechtläufig gleichförmig um seine Rotationsachse mit der mittleren siderischen Bewegung seiner Bahn bei Bezug auf die Erde.*

(C2) *Der absteigende Knoten des mittleren Mondäquators bezüglich der mittleren Ekliptik bewegt sich rückläufig („präzediert") zusammen mit dem aufsteigenden Knoten seiner mittleren Bahn mit der Ekliptik.*

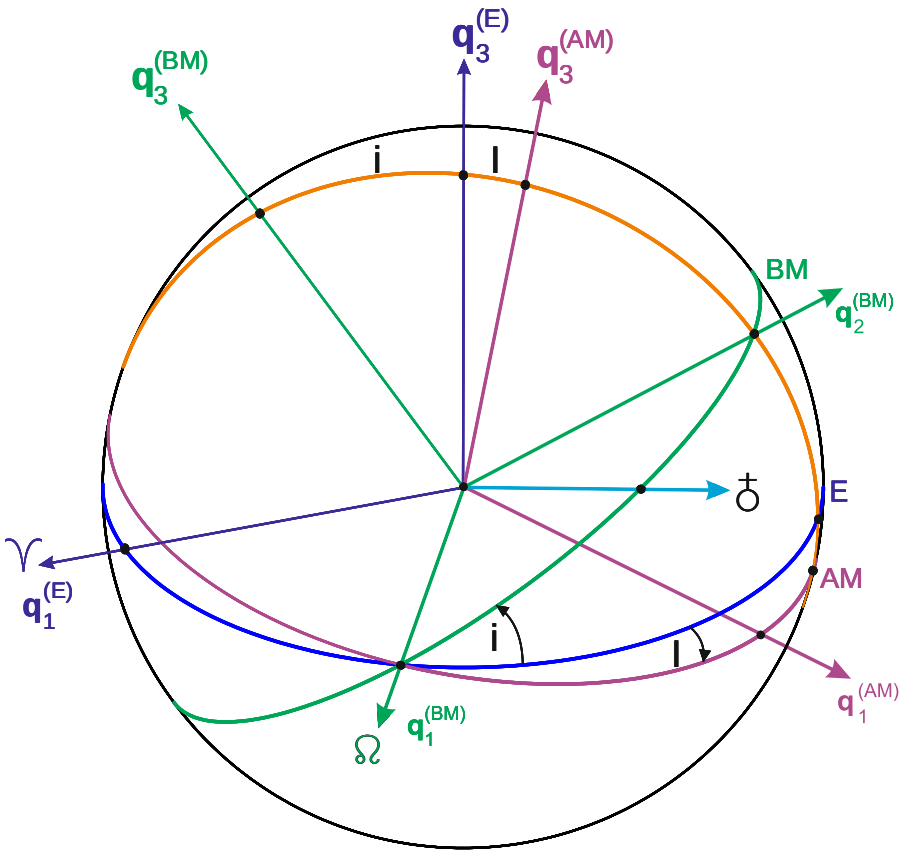


Bild 29-1: Orientierung der erdbezogenen Bahn des Mondes (BM) und des Mondäquators (AM) in Bezug auf die Ekliptik (E): Der mittlere aufsteigende Knoten der Mondbahn fällt stets mit dem mittleren absteigenden Knoten des Mondäquators zusammen. Die Orientierung des mittleren subterrestrischen Punktes ist angedeutet (♁).

In Ergänzung wurde im 20. Jahrhundert noch das dritte „Gesetz von Cassini" eingeführt:

---

[1] CASSINI, J. C. [1721]: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences à Paris*, 108-126 ; CASSINI, J. D. [1730]: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences à Paris*, **8**, 1-50 ; zitiert nach D. H. Eckhardt [1981], p. 49 ; Anmerkung: *Jacques Cassini*, Direktor der Pariser Sternwarte, ist der Sohn des *Jean Dominique Cassini;* auch ein Enkel und ein Urenkel des Jean Dominique waren bekannte Astronomen*;* siehe auch in A. KRISCH [etwa 1901], p. 87, sowie in LEXIKON DER ASTRONOMIE, Band I [1989]

(C3) *Die Neigung (I) des mittleren Mondäquators zur Ekliptik ist konstant. Sie beträgt*[1]

$$I = 1°32'32''.7 \quad . \tag{29.1}$$

Das erste dieser Gesetze beschreibt die schon im Altertum beobachtete gebundene Rotation des Mondes. Wichtig ist die zweite Beobachtung, die essentiell für die Beobachtung von Punkten auf der Mondoberfläche ist. Dies schließt auch das dritte Gesetz ein, wenn das selenographische Koordinatensystem der Mondoberfläche über die Ekliptik auf das irdische Äquatorsystem bezogen werden soll. *J. D. Cassini* selbst hatte ausgehend von seinen Gesetzen erste Folgerungen zu den physikalischen Librationen des Mondes erarbeitet[2].

29.1.3 Bahnelemente und physikalische Parameter des Mondes

Die zur Berechnung einer Mondephemeride und zur Beobachtung der Mondoberfläche benötigten Zahlenwerte soweit sie für ein Verständnis der Bewegung des Mondes in Bezug auf die Beobachtung von der Erde und für die Auslegung von Mondorbitern wesentlich erscheinen, werden in den folgenden Abschnitten zusammengestellt.

29.1.3.1 Physikalische Parameter des Mondes

Auf Grund der gebundenen Rotation (*Cassini* I) ist eine Achse des Mondes im Mittel ständig auf die Erde ausgerichtet. Dies ist die Achse um das kleinste Trägheitsmoment mit Radius $R_{\mathbb{C}a}$. Die Achse in Richtung der Bahn sei $R_{\mathbb{C}b}$, die um das größte Trägheitsmoment um die Polarachse $R_{\mathbb{C}c}$. Die drei Achsen sind durch folgende Beziehungen verknüpft[3]:

$$\begin{aligned} &R_{\mathbb{C}a} = 1738.57\,\text{km} \;,\; R_{\mathbb{C}b} = 1738.21\,\text{km} \;,\; R_{\mathbb{C}c} = 1737.49\,\text{km} \;, \\ &R_{\mathbb{C}} = \frac{R_{\mathbb{C}b} + R_{\mathbb{C}c}}{2} = 1738.39\,\text{km} \\ &R_{\mathbb{C}a} - R_{\mathbb{C}c} = 1.08\,\text{km} \;,\; R_{\mathbb{C}a} - R_{\mathbb{C}b} = 0.36\,\text{km} \;,\; R_{\mathbb{C}b} - R_{\mathbb{C}c} = 0.72\,\text{km} \;. \end{aligned} \tag{29.2}$$

Für die praktische Rechnung, insbesondere zur Berechnung der Beobachtung eines Punktes auf der Mondoberfläche kann die Triaxialität des Mondes vernachlässigt werden, wenn die a- und die b-Achse als nahezu gleich akzeptiert werden. Dann kann der Mondkörper (wie der Erdkörper) durch ein Rotationsellipsoid angenähert werden. Der geodynamische Formfaktor J_2 ist aus Beobachtungen des Schwerefeldes des Mondes bekannt. Die entsprechende Abplattung *f* kann mit den Formeln (17.15) berechnet werden[4]. Damit können die selenographischen Koordinaten bestimmter Punkte auf der Mondoberfläche erhalten werden. Wird für nicht zu große Genauigkeitsanforderungen die Gestalt des Mondes durch eine Näherungskugel ersetzt, muss mit einem maximalen Positionsfehler von $0''.19$ für die Beobachtung eines

---

[1] SEIDELMANN, K. P. et. al. [1992], p. 700

[2] Siehe dazu in Abschnitt 29.5.2 auf Seite 641 und folgende

[3] Zahlenwerte aus SIRY, J. W. [1970]; kleinere Abweichungen bei WERTZ, JAMES R. [2001], Table E.4, p. 864; basierend auf ECKHARDT, DONALD H. [1981] und HEIKEN, GRANT H. ET AL. [1991]

[4] Vorsicht: ein noch zu klärender Widerspruch zur Berechnung der Abplattung nach Formel (37.19) (Band V) ist offen.

bestimmten Ortes auf der Mondoberfläche gesehen von einer Beobachtungsstation auf der Erde aus gerechnet werden[1].

Die Parameter des Mondkörpers sind in Tabelle 29-1 zusammengestellt[2].

Mittlerer Radius[3]	$R_{\leftmoon} = 1737.4\,\mathrm{km}$
Äquatorradius („Referenz Radius“)[4]	$R_M = 1738.0\,\mathrm{km}$
Selenozentrische Gravitationskonstante	$\mu_{\leftmoon} = GM_{\mathrm{Mond}} = 4902.800007\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$
Gravitationsbeschleunigung an der Mondoberfläche	$g_e = 0.00162\,\mathrm{km/s}^2$
Mittlere (siderische) Rotationsgeschwindigkeit	$n_{\leftmoon s} = \dot{\Theta} = 2.66169943\times10^{-6}\,1/s$
geodynamischer Formfaktor des Mondes	$J_2 = -C_{20} = 0.00020321568$
Abplattung	$f = 0.000308671 = 1/3239.69374219$
Newtonsche Gravitationskonstante	$f_N(=G) = 6.67428\times10^{-20}\,\mathrm{km}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$
Masse des Mondes	$m_{\leftmoon}(=M_{\mathrm{Mond}}) = GM_{\mathrm{Mond}}/G =$ $m_{\leftmoon} = 7.34581108\times10^{22}\,\mathrm{kg}$

Tabelle 29-1: Physikalische Parameter der Gestalt des Mondes

Anmerkung: In den aktuellen Listen der astronomischen Konstanten wird der Radius der Mondes mit einer Genauigkeit von $\pm 1\mathrm{km}$ angegeben[5]. ◄

29.1.3.2 Mittlere Bahnelemente des Mondes auf seiner Bahn bezüglich der Erde

Die als konstant betrachteten Parameter der Bahnbewegung des Mondes sind in Tabelle 29-2 gelistet. Danach werden die mittleren d.h. säkular veränderlichen Bahnparameter und die zu-

---

[1] JOCHIM, E. F. and SLIWINSKI, P. [1976], p. 104

[2] http://asa.usno.navy.mil/, die hier benötigten astronomischen Konstanten sind zusammengestellt in: IAU_1976.pdf; SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]; siehe auch in Anhang E7 (Band V); *f* berechnet mit Formel (17.15) (Band III)

[3] IAU_1976.pdf

[4] Astronomical_Constants_2017.pdf; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]

[5] Siehe etwa in: Astronomical_Constants_2017.pdf

gehörigen mittleren Bewegungen dieser Parameter zusammengestellt[1]. Diese sind die Grundlage, um die ekliptikalen Polarkoordinaten der Mondephemeride berechnen zu können.

Die folgenden zeitabhängigen Parameter der mittleren Mondbewegung werden bei Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 (gültig für dem 1. Januar 2000, 12^h TDB) in julianischen Jahrhunderten angegeben. Zur Berechnung der Zeit sei für den Moment der Beobachtung entweder das julianische Datum JD (TDB) oder die julianische Tagesnummer Jd und die Tageszeit $t[\text{sec}]$ vorgegeben[2]. Die hier benötigte Zeit T in julianischen Jahrhunderten [Jahrh.] wird erhalten aus

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525}[\text{Jahrh.}] =: \frac{\Delta JD[d]}{36525\left[\frac{\text{d}}{\text{Jahrh.}}\right]} = \frac{Jd - 2451545.5 + \frac{t}{86400}[d]}{36525\left[\frac{\text{d}}{\text{Jahrh.}}\right]} \quad . (29.3)$$

Parameter	Zahlenwert
Siderische mittlere Bewegung	$n_{\mathbb{C}s} = 2.661699489 \times 10^{-6}$ rad/s
Mittlere Entfernung Mondmittelpunkt zu Erdmittelpunkt	$\overline{r_{\mathbb{C}}} = 384400 \text{ km} \hat{=} 60.27\, R_E \ \ (R_E = 6379.1366 \text{km})$
Mittlere Entfernung Erdmittelpunkt zu Baryzentrum des Erde-Mond-Systems	$r_{\text{B}\mathbb{C}} = 4671.0 \text{ km}$
Mittlere Exzentrizität	$\overline{e_{\mathbb{C}}} = 0.05490$
Inklination der mittleren Mondbahnebene zu mittlerer Ekliptik	$\overline{i_{\mathbb{C}}} = 5°.145396$
Inklination der mittleren Mondbahnebene zu mittlerem Mondäquator	$\overline{i_{\mathbb{C}}} + I = 6° 41'$
Inklination des mittleren Mondäquators zur mittleren Ekliptik	$I = 1° 32' 32''.7$
Mittlere Bahngeschwindigkeit	$\overline{V_{\mathbb{C}}} = 1.023 \text{km/s}$

Tabelle 29-2: Als konstant betrachtete Basisparameter der Mondbewegung bezüglich der Erde

Die Mittlere geometrische Länge des Mondes (Winkel vom Frühlingspunkt zum aufsteigenden Knoten und längs der Bahn bis zum Ort des Mondes) hat bezogen auf J2000.0 den Zahlenwert:

[1] Die Zahlenwerte sind entnommen SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992]; AA2015 [2014], Section D. In Band V der Satellitenbewegung, Anhang E5, sind diese Parameter in verschiedenen Dimensionen zusammengestellt.

[2] vgl. Anhang F, Formel (F.2) (Band V)

$$\begin{aligned} L_{\leftmoon} &= F_{\leftmoon} + \Omega_{\leftmoon} = L_{\leftmoon 0} + \dot{L}_{\leftmoon s}\, T = L_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon \mathrm{Ls}}\, T = \\ &= 218°.3164325 + 481267°.8812772\, T\left[1/\mathrm{Jahrh.}\right] - \\ &\quad -1°.611667\times 10^{-3}\, T^2\left[1/\mathrm{Jahrh.}^2\right] + 5°.27778\times 10^{-6}\, T^3\left[1/\mathrm{Jahrh.}^3\right] + \cdots \end{aligned} \tag{29.4}$$

Die säkulare Veränderung der mittleren Länge beträgt

$$\begin{aligned} n_{\leftmoon \mathrm{Ls}} = \; & 481267°.8812772 - 1°.611667\times 10^{-3}\, T\left[1/\mathrm{Jahrh.}\right] + \\ & + 5°.27778\times 10^{-6}\, T^2\left[1/\mathrm{Jahrh.}^2\right]\cdots \quad \left[\frac{1}{\mathrm{Jahrh.}}\right] \\ = \; & 13°.176396476 - 1°.2080799\times 10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + \\ & + 1°.083101\times 10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\mathrm{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.5}$$

Die <u>mittlere mittlere Anomalie des Mondes</u>

$$\begin{aligned} M_{\leftmoon} \; &= \; M_{\leftmoon 0} + \dot{M}_{\leftmoon s}\, T \; = M_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon a}\, T = \\ &= \; 134°.9629814 + 477198°.8674\, T\left[1/\mathrm{Jahrh.}\right] + \\ &\quad + 0°.008697222\, T^2\left[1/\mathrm{Jahrh.}^2\right] + 1°.78\times 10^{-5}\, T^3\left[1/\mathrm{Jahrh.}^3\right] + \cdots \; . \end{aligned} \tag{29.6}$$

Sie ist auf das Perigäum des Mondes bezogen und definiert somit die anomalistische Bewegung des Mondes. Die mittlere anomalistische Bewegung des Mondes ist demnach nicht konstant, sondern unterliegt säkularen Änderungen

$$\begin{aligned} n_{\leftmoon a} = \; & 477198°.8674 + 0°.008697222\, T\left[1/\mathrm{Jahrh.}\right] + \\ & + 1°.78\times 10^{-5}\, T^2\left[1/\mathrm{Jahrh.}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\mathrm{Jahrh.}}\right] \\ = \; & 13°.064992947 + 6°.5192871\times 10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] \\ & + 3°.6529971\times 10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\mathrm{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.7}$$

Die mittlere Anomalie ist das Argument der Mittelpunktsgleichung[1]. Ihr erstes Glied in der Darstellung der ekliptikalen Länge der Mondbewegung war *Hipparch* bekannt, ihren Zahlenwert bestimmte *Ptolemäus*[2]. Die wahre ekliptikale Länge des Mondes beträgt bis zur zweiten Ordnung in der **Mittelpunktsgleichung**

$$l = L_{\leftmoon} + 6°.288763889\sin M_{\leftmoon} + 12'.8\sin 2M_{\leftmoon} + \cdots \quad . \tag{29.8}$$

Die <u>mittlere geometrische Länge des Perigäums des Mondes</u>

[1] Siehe Formel (10.87) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

[2] Siehe Formel (1.85) in Abschnitt 1.7.1 (Band I), dort ist die mittlere Anomalie auf das Apogäum bezogen, hier auf das Perigäum, daher das andere Vorzeichen

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\leftmoon} &= \Gamma'_{\leftmoon 0} + \dot{\Gamma}'_{\leftmoon s}\,T = \Gamma'_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon\Gamma'}\,T = L_{\leftmoon} - M_{\leftmoon} = \\ &= 83°.3534511 + 4069°.013877\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] - \\ &\quad - 0°.010308889\,T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] - 1°.25222\times10^{-5}\,T^3\left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots\ .\end{aligned} \tag{29.9}$$

Sie ist der Winkel zwischen Frühlingspunkt und aufsteigendem Knoten und dann bis zum Perigäum

$$\begin{aligned}n_{\leftmoon\Gamma'} &= 4069°.013877 - 0°.010308889\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] + \\ &\quad - 1°.25222\times10^{-5}\ T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ &= 0°.111403528 - 2°.82241999\times10^{-7}\left(\Delta JD\right)\left[1/\text{d}\right] \\ &\quad - 9°.3862734\times10^{-15}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right]\ .\end{aligned} \tag{29.10}$$

Die mittlere Elongation des Mondes von der Sonne (Winkeldifferenz auf Ekliptik) lautet mit der mittleren geometrischen Länge der Sonne (aus Tabelle 28.3)

$$\begin{aligned}D_{\leftmoon} &= L_{\leftmoon} - L_{\odot} = D_{\leftmoon 0} + \dot{D}_{\leftmoon s}\,T = D_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon \mathrm{D}}\,T = \\ &= 297°.8503631 + 445267°.11148\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] - \\ &\quad - 0°.001914166667\,T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + 5°.277778\times10^{-6}\,T^3\left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots\end{aligned} \tag{29.11}$$

Auch die säkulare Veränderung der mittleren Elongation ist nicht konstant. Sie beträgt

$$\begin{aligned}n_{\leftmoon Ds} &= 445267°.11148 - 0°.001914166667\,T + 5°.277778\times10^{-6}\,T^2 + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ &= 12°.190749117 - 1°.438262\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\text{d}\right] + \\ &\quad + 1°.0831297\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right]\ .\end{aligned} \tag{29.12}$$

Hier zeigt sich bereits der wesentliche Einfluss der Sonne auf die Bewegung des Mondes in der bereits in der Antike bekannten **Evektion**. Diese bewirkt eine Veränderung der ekliptikalen Länge um

$$\Delta l_{eve} = 1°16'24''\,\sin\left(2D_{\leftmoon} - M_{\leftmoon}\right) + \cdots\ . \tag{29.13}$$

Auch die von *Tycho Brahe* entdeckte **Variation**[1] ist eine Funktion der Elongation des Mondes von der Sonne

$$\Delta l_{\text{var}} = 39'30''\sin 2D_{\leftmoon} + \cdots\ . \tag{29.14}$$

Die **parallaktische Gleichung**, ebenfalls von Tycho Brahe entdeckt, liefert zur ekliptikalen Länge des Mondes den Beitrag

$$\Delta l_{par} = -2'0''\sin D_{\leftmoon} + \cdots\ . \tag{29.15}$$

1 Nach O. NEUGEBAUER [1970], p. 85 und p. 88 findet sich ein entsprechender Term bereits in der Mondtheorie des *Ptolemäus*

Das mittlere Argument des Mondes (Winkel zwischen aufsteigendem Knoten bezüglich Ekliptik und Mondort)

$$\begin{aligned} F_{\leftmoon} &= F_{\leftmoon 0} + \dot{F}_{\leftmoon s}\, T = F_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon \mathrm{F}}\, T = \\ &= 93°.27191028 + 483202°.01753806\, T\,[1/\mathrm{Jahrh.}] - \\ &\quad - 0°.0036825\, T^2\,[1/\mathrm{Jahrh.}^2] + 3°.05556\times 10^{-6}\, T^3\,[1/\mathrm{Jahrh.}^3] + \cdots \end{aligned} \tag{29.16}$$

Es hat die mittlere Bewegung

$$\begin{aligned} n_{\leftmoon F} &= 483202°.01753806 - 0°.0036825\, T\,[1/\mathrm{Jahrh.}] + \\ &\quad + 3°.05556\times 10^{-6}\, T^2\,[1/\mathrm{Jahrh.}^2] + \cdots + \cdots\,[1/\mathrm{Jahrh.}] \\ &= 13°.229350241 - 2°.7603383\times 10^{-12}\,(\Delta JD)\,[1/\mathrm{d}] \\ &\quad + 6°.270759\times 10^{-20}\,(\Delta JD)^2\,[1/\mathrm{d}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\mathrm{d}}\right] . \end{aligned} \tag{29.17}$$

Die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt errechnet sich aus:

$$\begin{aligned} \Omega_{\leftmoon} &= \Omega_{\leftmoon 0} + \dot{\Omega}_{\leftmoon s}\, T = \\ &= 125°.0445222 + 1934°.1362608\, T\,[1/\mathrm{Jahrh.}] + \\ &\quad + 2°.0708333\times 10^{-3}\, T^2\,[1/\mathrm{Jahrh.}^2] + 2°.22222\times 10^{-6}\, T^3\,[1/\mathrm{Jahrh.}^3] + \cdots \end{aligned} \tag{29.18}$$

Sie hat die mittlere Bewegung

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{\leftmoon s} &= 1934°.1362608 + 2°.0708333\times 10^{-3}\, T\,[1/\mathrm{Jahrh.}] + \\ &\quad + 2°.22222\times 10^{-6}\, T^2\,[1/\mathrm{Jahrh.}^2] + \cdots\,[1/\mathrm{Jahrh.}] \\ &= 0°.052953765 + 1°.5522608\times 10^{-12}\,(\Delta JD)\,[1/\mathrm{d}] + \\ &\quad + 4°.5605411\times 10^{-20}\,(\Delta JD)^2\,[1/\mathrm{d}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\mathrm{d}}\right] . \end{aligned} \tag{29.19}$$

Da die Sonne wesentlich die Bewegung des Mondes beeinflusst, wird hier die mittlere geozentrische mittlere Anomalie der Sonne mit aufgenommen[1]:

$$\begin{aligned} M_{\odot} &= M_{\odot 0} + \dot{M}_{\odot s}\, T = \\ &= 357°.52688973 + 35999°.0491762\, T\,[1/\mathrm{Jahrh.}] - \\ &\quad - 1°.6027778\times 10^{-4}\, T^2\,[1/\mathrm{Jahrh.}^2] + 3°.33333\times 10^{-6}\, T^3\,[1/\mathrm{Jahrh.}^3] + \cdots \end{aligned} \tag{29.20}$$

Sie hat die mittlere Bewegung

[1] Siehe in Kapitel 28, sowie in Anhang E.6 (Band V)

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\odot s} = {} & 35999°.0491762\left[1/\text{Jahrh.}\right] - 1°.6027778\times10^{-4}\,T\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + \\ & + 3°.33333\times10^{-6}\,T^2\left[1/\text{Jahrh.}^3\right]\cdots\left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] = \\ = {} & 0°.985600251 + 4°.38816646\times10^{-9}\left(\Delta JD\right)\left[1/\text{d}\right] + \\ & + 2°.4986087\times10^{-15}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\text{d}^2\right] + \cdots\left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad .\end{aligned} \tag{29.21}$$

Da die Mondbahn nicht in der Ekliptik verläuft, sondern ihr gegenüber mit etwa 5° leicht geneigt ist, muss zur Berechnung der wahren ekliptikalen Länge des Mondes seine Bahn in die Ekliptik projiziert werden. Dies ist die **Reduktion auf die Ekliptik**[1]

$$\Delta l_{\text{red}} = -6'54''\sin\left(l - \Omega_{\leftmoon}\right) + \cdots \quad . \tag{29.22}$$

Hier ist $l = \Omega_{\leftmoon} + u$ die wahre Länge in der Bahn, wenn *u* das wahre Argument der Breite ist. Wenn *u* unbekannt ist, wird *l* durch die mittlere Länge des Mondes $L_{\leftmoon}$ angenähert. Der Fehler ist bei Näherungsdarstellungen gering.

Schließlich hat es noch die von der mittleren Anomalie $M_{\odot}$ der Sonne abhängige **jährliche Variation** zu einem Eigennamen unter den Einflüssen auf die Mondbewegung gebracht

$$\Delta l_{\text{anvar}} = 11'12''\sin\left(M_{\odot}\right) + \cdots \quad . \tag{29.23}$$

Damit hat die wahre geozentrische ekliptikale Länge des Mondes (bezogen auf den Mond-Mittelpunkt des Mondes) die für viele Untersuchungen ausreichende Näherungsdarstellung

$$\begin{aligned}l_{\leftmoon} = {} & L_{\leftmoon} + 6°.288763889\sin M_{\leftmoon} + 12'.8\sin 2M_{\leftmoon} + 1°16'24''\sin\left(2D_{\leftmoon} - M_{\leftmoon}\right) + \\ & + 39'30''\sin 2D_{\leftmoon} - 2'0''\sin D_{\leftmoon} - 6'54''\sin\left(l - \Omega_{\leftmoon}\right) - 11'8''.15\sin\left(M_{\odot}\right) + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{29.24}$$

Details zu diesen Entwicklungen sowie die entsprechenden Entwicklungen für die ekliptikale Breite und die Parallaxe werden in den Abschnitten 29.1.6.1, 29.1.6.2 und 29.1.7 vorgestellt.

29.1.4 Die Monate

29.1.4.1 Zahlenwerte in der Antike

Die von den Griechen von früheren Völkern übernommenen Relationen der unterschiedlichen Mondperioden dürften wegen ihrer fundamentalen Bedeutung wesentlich älteren Ursprungs sein. Es reicht offenbar über die Babylonier zurück bis zu den Tamilen, vermutlich auch zu den Chinesen und es ist möglich, dass auch in Mittelamerika diese Zahlenwerte mit großer Genauigkeit aus langfristigen Beobachtungen erhalten wurden[2].

Basierend auf dem von den Griechen als *Saros-Zyklus* (sicherlich von *Hipparch* übernommen, wahrscheinlich schon früher auch in Griechenland bekannt) bezeichneten Relationen konnten

[1] Siehe in Abschnitt 24.2.5

[2] Siehe Näheres dazu im Abschnitt 1.6.6 (Band I)

mit der Exeligmos genannten Beziehung die Mondperioden mit erstaunlicher Genauigkeit errechnet werden.

$$669\,P_{\mathbb{C},S} = 717\,P_{\mathbb{C},a} = 726\,P_{\mathbb{C},d} = 723\,P_{\mathbb{C},t} + 32° = 19756^d \quad . \tag{29.25}$$

Da die Perioden in dieser Beziehung der Anzahl der mittleren Sonnentage zugeordnet werden können, lassen sich daraus die Perioden der synodischen, anomalistischen, drakonitischen und tropischen Mond-Bewegung berechnen. Die Ergebnisse sind mit den von *Ptolemäus* überlieferten Zahlenwerten in Tabelle 29-3 (auf Seite 594) zusammengestellt.

Anmerkung: Für den tropischen Monat ist in Formel (29.25) keine ganzzahlige Relation gegeben, sondern die zusätzliche Bewegung um 32°. Die anscheinend irreführende Schreibweise ist so zu verstehen: Der Mond bewegt sich mit der mittleren tropischen Bewegung $n_{\mathbb{C},t} = 360°/P_{\mathbb{C},t}$ um genau 32°, so dass die Relation $\left(732 + 32°/360°\right)P_{\mathbb{C},t} = 19756^d$ lauten muss, woraus der tropische Monat berechnet werden kann. ◄

Um den Bezug der Mondbewegung auf die Sonne herstellen zu können, konnte der *Meton Zyklus*

$$304\,P_{\odot,t} \Leftrightarrow 3760\,P_{\mathbb{C},S} \Leftrightarrow 111035^d \tag{29.26}$$

verwendet werden, der die tropische Bewegung der Sonne in Relation zur synodischen Bewegung des Mondes setzte. Eine andere offenbar in der Antike verwendete Beziehung setzte die siderische Bewegung der Sonne in Relation zur siderischen Bewegung des Mondes[1]:

$$4267\,P_{\mathbb{C},S} = 4573\,P_{\mathbb{C},a} = 4612\,P_{\mathbb{C},s} - 7°30' = 345\,P_{\odot,s} - 7°30' = 126007^d 1^h \quad . \tag{29.27}$$

Aus dieser Beziehung folgen der Zahlenwert für den siderischen Monat $P_{\mathbb{C},s} = 27^d.321685$ und das siderische Jahr $P_{\odot,s} = 365^d.2598567$.

Der <u>evektive Monat</u>, also der vollständige Umlauf der Evektion des Mondes um die Erde, kann mit dem Argument $2D_{\mathbb{C}} - M_{\mathbb{C}}$ aus der evektiven mittleren Bewegung

$$n_{\mathbb{C},eve} = \frac{360°}{P_{\mathbb{C},eve}} = 2n_{\mathbb{C},D} - n_{\mathbb{C},L} = 360°\left(\frac{2}{P_{\mathbb{C},S}} - \frac{1}{P_{\mathbb{C},a}}\right) = 11°.316517055\left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.28}$$

berechnet werden. Mit den in der antiken bekannten Zahlenwerten beträgt er

$$P_{\mathbb{C},eve} = 31^d.81190805 \quad . \tag{29.29}$$

Für die <u>mittlere Bewegung des Knotens der Mondbahn</u> bezogen auf die Ekliptik wurde in Formel (1.54) der Zahlenwert[2] (statt der hier verwendeten tropischen Bewegung wäre die siderische richtiger, was hier aber quantitativ unauffällig ist)

---

[1] O. NEUGEBAUER [1975], pp. 310, 311 ; siehe auch Formel (1.44) in Abschnitt 1.6.6 (Band I)

[2] Abschnitt 1.6.6 (Band I)

$$n_{\mathbb{C},K} = \dot{\Omega}_{\mathbb{C},s} = n_{\mathbb{C},d} - n_{\mathbb{C},t} = 360° \left(\frac{1}{P_{\mathbb{C},d}} - \frac{1}{P_{\mathbb{C},t}} \right) = 0°3'10''.8 \left[\frac{1}{\text{Tag}} \right] \quad . \tag{29.30}$$

Da der drakonitische Monat kürzer als der tropische bzw. der siderische ist, trifft der Mond eher auf den nächsten Knoten als den Referenzstern. Der Knoten kommt also dem Mond (auf seiner rechtläufigen Bahn) entgegen, der Knoten bewegt sich somit rückläufig. Die Bewegung des Knotens vollendet somit bei Bezug auf den Frühlingspunkt einen vollständigen Umlauf nach

$$P_{\mathbb{C},\Omega} = \frac{360°}{0°.053} = 6792^d.45283 = 18^a.596722388 \tag{29.31}$$

in julianischen Jahren.

Das mittlere Perigäum des Mondes bewegt sich dagegen rechtläufig längs der Mondbahnebene. Dies kann aus der anomalistischen Umlaufzeit ersehen werden, die länger als die tropische bzw. siderische Umlaufzeit ist, es dauert also länger bis der Monat das nächste Perigäum durchläuft als den Frühlingspunkt oder den Referenzstern erreicht. Mit den Formeln (1.51) sowie (1.52) hat das Perigäum die mittlere Bewegung

$$n_{\mathbb{C},A} = \dot{\omega}_{\mathbb{C},s} = n_{\mathbb{C},t} - n_{\mathbb{C},a} = 360° \left(\frac{1}{P_{\mathbb{C},t}} - \frac{1}{P_{\mathbb{C},a}} \right) = 0°6'40''.9 \left[\frac{1}{\text{Tag}} \right] \quad . \tag{29.32}$$

Das Perigäum des Mondes umrundet die Erde somit einmal im Zeitraum

$$P_{\mathbb{C},A} = \frac{360°}{0°.11136111} = 3232^d.72636568 = 8^a.850722425 \tag{29.33}$$

in julianischen Jahren.

29.1.4.2 Aktuelle Zahlenwerte

In der heutigen Entwicklung der Mondtheorie wird die wahre Umlaufzeit des Mondes um die Erde, d.h. ein Monat, durch Integration über die reziproke Variation des entsprechenden Bahnwinkels erhalten.

1. Zur Berechnung des anomalistischen Monats, d.h. des Zeitraums zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch das Perigäum seiner scheinbaren Bahn um die Erde, wird wie bei Erdsatelliten üblich, die Variation $\dot{\upsilon}$ der wahren Anomalie zugrunde gelegt:

$$P_{\mathbb{C},aw} = \int_{0°}^{360°} \frac{dt}{\dot{\upsilon}} \quad . \tag{29.34}$$

   Um den (üblicherweise ausschließlich verwendeten) mittleren anomalistischen Monat zu berechnen, wird statt der wahren Anomalie die mittlere Anomalie als Bahnwinkel gewählt, da sie wie die wahre Anomalie von Perigäum zu Perigäum gezählt wird. Wird eine Variation der mittleren anomalistischen Bewegung für den Zeitraum eines Umlaufs vernachlässigt, kann die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit der anomalistischen mittle-

ren Bewegung (29.7) als einer Konstanten (bei fest vorgegebenem Zeitintervall ΔJD) berechnet werden aus

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},a} &= \frac{360°}{n_{\mathbb{C},a}} \approx \\ &\approx \frac{360°}{13°.064992947[1/\mathrm{d}]}\left[1-\frac{6°.5192871\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{13°.064992947}-\right. \\ &\qquad\left.-\frac{3°.6529971\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]}{13°.064992947}\right]+\cdots= \\ &= 27^d.554549892\left[1-4.9898895\times10^{-13}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-2.796\times10^{-20}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]\right]+\cdots . \end{aligned} \tag{29.35}$$

2. Der mittlere drakonitische Monat wird mit dem mittleren Argument $F_{\mathbb{C}}$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.17) führt auf:

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\mathrm{d}} &= \frac{360°}{n_{\mathbb{C},F}}[\mathrm{d}] = \frac{360°}{n_{\mathbb{C},d}}[\mathrm{d}] \approx \\ &\approx \frac{360°}{13°.229350241[1/\mathrm{d}]}\left[1+\frac{2°.7603383\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{13°.229350241}-\right. \\ &\qquad\left.-\frac{6°.270759\times10^{-20}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]}{13°.229350241}\right]+\cdots= \\ &= 29^d.530588854\left[1+2.086526\times10^{-13}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-4.740\times10^{-21}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]\right]+\cdots . \end{aligned} \tag{29.36}$$

3. Der mittlere synodische Monat (bisweilen auch als *Lunation* bezeichnet) wird mit der mittleren Elongation $D_{\mathbb{C}}$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.12) führt auf:

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\mathrm{D}} &= \frac{360°}{n_{\mathbb{C},D}}[\mathrm{d}] \approx \\ &\approx \frac{360°}{12°.190749117[1/\mathrm{d}]}\left[1+\frac{1°.438262\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{12°.190749117}-\right. \\ &\qquad\left.-\frac{1°.0831297\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]}{12°.190749117}\right]+\cdots= \\ &= 29^d.530588854\left[1+1.1797979\times10^{-13}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-8.885\times10^{-21}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]\right]+\cdots . \end{aligned} \tag{29.37}$$

Die wahre synodische Bewegung kann von der mittleren um bis zu 7 Stunden abweichen[1].

[1] Hinweis etwa in STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933], p. 97

4. Der mittlere tropische Monat wird mit der mittleren geometrischen Länge $L_{\mathbb{C}}$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.5) führt auf:

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\mathrm{t}} &= \frac{360^\circ}{n_{\mathbb{C},L}}\left[\mathrm{d}\right] = \frac{360^\circ}{n_{\mathbb{C},t}}\left[\mathrm{d}\right] \approx \\ &\approx \frac{360^\circ}{13^\circ.176396476\left[1/\mathrm{d}\right]}\left[1+\frac{1^\circ.2080799\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]}{13^\circ.176396476} - \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1^\circ.083101\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{13^\circ.176396476}\right]+\cdots = \\ &= 27^d.321582244\left[1+9.1685151\times10^{-14}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]-8.220\times10^{-21}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right]+\cdots\ . \end{aligned} \tag{29.38}$$

5. Der mittlere siderische Monat ist der Umlauf des Mondes um die Erde bei Bezug auf den Fixsternhimmel. Er unterscheidet sich vom tropischen Monat um die Wanderung des Frühlingspunktes längs der momentanen Ekliptik auf Grund der lunisolaren Präzession[1]

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_A &= 5038''.481507 + 0''.49263T - 0''.000124T^2 + \cdots \quad \left[1/\text{ julian.Jahrh.}\right] \\ &= 3^\circ.83183627\times10^{-5} + 3^\circ.74652065\times10^{-9}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] - \\ &\qquad -9^\circ.4303749\times10^{-13}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]+\cdots \quad \left[1/\mathrm{d}\right]\ . \end{aligned} \tag{29.39}$$

Wegen der Rückläufigkeit der Präzession erreicht der Mond den Frühlingspunkt eher als den Bezugsstern am Fixsternhimmel, d.h. der tropische Monat ist kürzer als der siderische, die siderische mittlere Bewegung $n_{\mathbb{C},s}$ ist kleiner als die tropische

$$\begin{aligned} n_{\mathbb{C},s} &= n_{\mathbb{C},t} - \dot{\omega}_A = \\ &= 13^\circ.17635816 - 3^\circ.74772873\times10^{-9}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + \\ &\qquad +9^\circ.4303760\times10^{-13}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]+\cdots \quad \left[1/\mathrm{d}\right]\ . \end{aligned} \tag{29.40}$$

Der mittlere siderische Monat hat unter Berücksichtigung der säkularen Änderungen den Zahlenwert

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\mathrm{s}} &= \frac{360^\circ}{n_{\mathbb{C},s}}\left[\mathrm{d}\right] \approx \\ &\approx \frac{360^\circ}{13^\circ.17635816\left[1/\mathrm{d}\right]}\left[1+\frac{3^\circ.74772873\times10^{-9}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]}{13^\circ.17635816} - \right. \\ &\qquad \left. -\frac{9^\circ.4303760\times10^{-13}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{13^\circ.17635816}\right]+\cdots = \\ &= 27^d.32166170\left[1+2.8442827\times10^{-10}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]-7.157\times10^{-14}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right]+\cdots\ . \end{aligned} \tag{29.41}$$

[1] Siehe in Abschnitt 9.3.1 (Band II), Formeln (9.46) und Zahlenwerte in (9.47). Der hier wiedergegebene verfeinerte Zahlenwert für die mittlere lunisolare Präzession ist Astronomical_Constants_2017.pdf entnommen. Entsprechend der Bezeichnung in (9.46) wird hier die lunisolare Präzession durch $\dot{\psi}_A := p_L$ verwendet.

6. Entsprechend dem Argument $2D_{\mathbb{C}} - M_{\mathbb{C}}$ der Evektion (29.13) (auf Seite 586) beträgt die evektive mittlere Bewegung mit den Ausdrücken (29.12) und (29.7)

$$\begin{aligned} n_{\mathbb{C},eve} &= 2n_{\mathbb{C},D} - n_{\mathbb{C},a} = \\ &= 11°.31650576 - 9°.3958111\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + \\ &\qquad -1°.4867377\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots \quad \left[1/\mathrm{d}\right] \ . \end{aligned} \tag{29.42}$$

Der mittlere evektive Monat lautet daher unter Berücksichtigung der säkularen Änderungen

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\mathrm{eve}} &= \frac{360°}{n_{\mathbb{C},eve}}\left[\mathrm{d}\right] \approx \\ &\approx \frac{360°}{11°.31650576\left[1/\mathrm{d}\right]}\left[1 - \frac{9°.3958111\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]}{11°.31650576} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1°.4867377\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{11°.31650576} + \cdots \right] = \\ &= 31^d.81193979\left[1 + 8.3027494\times10^{-13}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + 1.3137781\times10^{-20}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\right] . \end{aligned} \tag{29.43}$$

7. Die Knoten der Mondbahn und mit ihnen die Knotenlinie bewegen sich ebenfalls um die Erde mit der mittleren Knotenbewegung (29.19). Danach bewegt sich der Knoten der Mondbahn einmal um die Erde mit der Umlaufzeit

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{C},\Omega} &= \frac{360°}{\dot{\Omega}_{\mathbb{C}s}}\left[\mathrm{d}\right] \approx \\ &\approx \frac{360°}{0°.052953765\left[1/\mathrm{d}\right]}\left[1 - \frac{1°.5522608\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]}{0°.052953765} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{4°.5605411\times10^{-20}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{0°.052953765} + \cdots \right] = \\ &= 6798^d.38345773\left[1 + 2.9313512\times10^{-11}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + 8.6123075\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\right] . \end{aligned} \tag{29.44}$$

Diesem Wert entspricht in julianischen Jahren die Knotenumlaufzeit $P_{\mathbb{C},\Omega} = 18^a.6129595$, ein Wert der in der Berechnung des Hauptterms der Nutation eine zentrale Rolle spielt[1].

8. Die Apsidenlinie bewegt sich längs der Mondbahn im Mittel mit der mittleren Bewegung des Perigäums (29.10). Die wahre Bewegung der Apside und damit auch ihre wahre Umlaufzeit ist zusammen mit der wahren Bewegung des Mondknotens in den Tabellen in GUTZWILLER, M. C AND SCHMIDT, D. S. [1986], p.91 zu finden. Die mittlere Umlaufzeit der Mondapside kann mit Hilfe von (29.10) berechnet werden zu

[1] Siehe in Abschnitt 9.4 (Band II) und Anhang E.5 (Band V)

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{C},\mathrm{A}} &= \frac{360°}{n_{\mathbb{C}\Gamma'}}\left[\mathrm{d}\right] \approx \\
&\approx \frac{360°}{0°.111403528\left[1/\mathrm{d}\right]}\left[1+\frac{2°.82241999\times10^{-7}\ \left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]}{0°.111403528} - \right. \\
&\qquad \left. + \frac{9°.3862734\times10^{-15}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{0°.111403528} + \cdots \right] = \\
&= 3231^d.49550524\left[1+2.53351042\times10^{-6}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right]+8.4254723\times10^{-14}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]+\cdots\right].
\end{aligned}
\tag{29.45}
$$

	Bei *Ptolemäus*	Moderne Werte
Anomalistischer Monat	$P_{\mathbb{C},a} = 27^d.554568$	$P_{\mathbb{C},a} = 27^d.554550$
Drakonitischer Monat	$P_{\mathbb{C},d} = 27^d.212218$	$P_{\mathbb{C},d} = 27^d.212221$
Synodischer Monat	$P_{\mathbb{C},S} = 29^d.530585$	$P_{\mathbb{C},S} = 29^d.530589$
Tropischer Monat	$P_{\mathbb{C},t} = 27^d.321657$	$P_{\mathbb{C},t} = 27^d.321582$
Siderischer Monat	$P_{\mathbb{C},s} = 27^d.321685$	$P_{\mathbb{C},s} = 27^d.321662$
Evektiver Monat (Periode der Evektion)	$P_{\mathbb{C},eve} = 31^d.811908$	$P_{\mathbb{C},eve} = 31^d.811940$
Umlauf des Knotens	$P_{\mathbb{C},\Omega} = 18^a.596722388$	$P_{\mathbb{C},\Omega} = 18^a.6129595$
Umlauf des Perigäums	$P_{\mathbb{C},A} = 8^a.850722425$	$P_{\mathbb{C},\mathrm{A}} = 8^a.847352513$

Tabelle 29-3: Zusammenstellung der Zahlenwerte der mittleren Monate und Umlaufzeiten nach *Ptolemäus* und aktuelle Werte, die auf die Fundamentalepoche J2000.0 bezogen sind.

29.1.5 Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes

Zur Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes werden die Entwicklungen wie in der näherungsweisen Entwicklung (29.24) für die ekliptikale Länge entsprechend auch für die ekliptikale Breite und die Parallaxe bis zu einer Genauigkeit von 10^{-3} Bogensekunden vorangetrieben[1]. Die benötigten Herleitungen basieren auf einer Weiterentwicklung der Theorien von *G. W. Hill* und *E. W. Brown*[1].

[1] Alle diese Korrekturglieder sind in den *Improved Lunar Ephemeris* (ILE [1954]) zusammengestellt, die für die Berechnung der Mondephemeride grundlegend sind. Die zugehörigen Methoden und Berechnungen mit verbesserten und weiterentwickelten Ergebnissen sind in GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. [1986] zusam-

29.1.5.1 Hauptproblem der Mondtheorie

Als Hauptproblem der Mondtheorie wird die Bewegung des Mondes um die Erde unter dem primären Einfluss der Sonne bezeichnet. Dies bedeutet dass die Bewegung des Mondes nur als Dreikörperproblem behandelt werden kann.

Als Argumente der Entwicklungen dienen die folgenden vier primären mittleren Parameter[2]

- die mittlere Mittlere Anomalie $M_{\leftmoon}$ des Mondes (29.6)
- die mittlere Mittlere Anomalie $M_{\odot}$ der Sonne (29.20)
- die mittlere Elongation $D_{\leftmoon}$ des Mondes von der Sonne (29.11)
- das mittlere Argument $F_{\leftmoon}$ des Mondes (29.16).

Der Bezug der Mondbewegung auf das mittlere Äquinoktium der Ekliptik (Schnittpunkt mit dem mittleren Erdäquator) wird über

- die mittlere ekliptikale Länge $\Omega_{\leftmoon}$ des aufsteigenden Knotens der Mondbahn (29.18)

hergestellt.

Als sekundäre Parameter werden in der Mondtheorie folgende Parameter benötigt:

- die mittlere (geozentrische) geometrische Länge $L_{\leftmoon}$ des Mondes (29.4),

sie ist die Bezugsgröße, um welche die wahre Länge des Mondes entwickelt wird,

- die mittlere (geozentrische) geometrische ekliptikale Länge $L_{\odot}$ der Sonne (29.20),
- die mittlere (geozentrische) ekliptikale Länge $\Gamma'_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - M_{\leftmoon}$ des Perigäums der Mondbahn (29.9)

gelegentlich wird in diesem Zusammenhang noch benötigt

- die mittlere (geozentrische) ekliptikale Länge $\Gamma_{\odot} = L_{\odot} - M_{\odot}$ des Perigäums der scheinbaren Sonnenbahn.

Um die *Kepler*schen Bahnelemente der scheinbaren Bahn des Mondes um die Erde zusammenzustellen, wenn die Bewegung des Mondes näherungsweise als (allgemeine) *Kepler*bewegung beschrieben werden soll, wird noch benötigt

- das mittlere (geozentrische) Argument des Perigäums $\omega_{\leftmoon} = \Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}$ der scheinbaren Mondbahn.

Die übrigen Keplerelemente (große Bahnhalbachse $a_{\leftmoon}$, Exzentrizität $e_{\leftmoon}$ und Inklination $i_{\leftmoon}$) werden für die mittlere Bewegung des Mondes als konstant betrachtet.

---

mengestellt. In der Literatur finden sich weitere ständige Verbesserungen, etwa in OESTERWINTER, C. AND COHEN, C. J. [1971], GRIFFITH, J. S. [1971], VAN FLANDERN, T. C. [1969], sowie jeweils im astronomischen Jahrbuch.

[1] BROWN, E. W. [1896/1960], BROWN, E. W. [1897-1908], BROWN, E. W. [1936], BROWN, E. W. AND SHOOK, C. A. [1933]

[2] Diese Darstellung bezieht sich auf ILE [1954], der wir in der vorliegenden Arbeit aus Gründen der Anschaulichkeit folgen wollen. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass in der weiterentwickelten Theorie von GUTZWILLER, M. C. and SCHMIDT, D. S. [1986] die vier mittleren Parameter durch bestimmte Konstante (e, k, e', β) ersetzt werden, an die somit alle Koeffizienten der Entwicklungen angepasst wurden. Die in der Literatur der Mondbewegung häufig verwendete Bezeichnungsweise wird im vorliegenden Bericht im Hinblick auf eine einheitliche Bezeichnungsweise nicht verwendet: $l =: M_{\leftmoon}$, $l' =: M_{\odot}$, $D =: D_{\leftmoon}$, $F =: F_{\leftmoon}$

29.1.5.2 Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung

Um den Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung zu berücksichtigen genügt es (um auch hier eine Genauigkeit von 10^{-3} Bogensekunden garantieren zu können) die Hauptterme der mittleren geometrischen ekliptikalen Längen der Planeten zu berücksichtigen[1]. Die nicht genannten Planeten haben keinen merkbaren Einfluss auf die Mondbewegung im Rahmen der geforderten Genauigkeit $\left(10^{-3}\text{ Bogensekunden}\right)$. Berücksichtigt sind in der vollständigen Theorie der Mondbewegung:

$$\begin{aligned}
&\text{Venus} \quad : L_{\mathrm{♀}} =: VM = 181°.97909950 + 58517°.81538729\,T = 181°.97909950 + 1°.602130469\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Erde} \quad : L_{\mathrm{♁}} =: TM = 100°.46457166 + 35999°.37244981\,T = 100°.46457166 + 0°.985609102\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Mars} \quad : L_{\mathrm{♂}} =: MM = 355°.44656795 + 19140°.30268449\,T = 355°.44656795 + 0°.524032928\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Jupiter} \quad : L_{\mathrm{♃}} =: JM = 34°.39644051 + 3034°.74612775\,T = 34°.39644051 + 0°.083086821\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Saturn} \quad : L_{\mathrm{♄}} =: SM = 49°.95424423 + 1222°.49362201\,T = 49°.95424423 + 0°.033470051\left(\Delta JD\right) \ .
\end{aligned} \tag{29.46}$$

29.1.6 Näherungsweise Darstellung des geozentrischen Ortsvektors der Mondbewegung

Um einen Eindruck von der Darstellung der Mondbewegung in Polarkoordinaten zu geben, werden in den nächsten Abschnitten die Entwicklungen basierend auf den ILE [1954] bis zu einer Genauigkeit von $6''$ zusammengestellt. Damit kann eine Ortsgenauigkeit von mindestens $10''$ garantiert werden. Werden auch im Rahmen dieser Genauigkeitsanforderung die Einflüsse der Planeten berücksichtigt, wirkt sich dies auf die mittleren Parameter mit periodischen Variationen aus, welche die fundamentalen Argumente überlagern. Dazu werden die Größen benötigt[2]:

$$\begin{aligned}
\Delta l_\eta &= 14''.27 \sin\left[M_{\mathrm{☾}} + 151°.1 + 16.0 * TM - 18.0 * VM - \left(T + 0.5\right)\right] + \\
&\quad + 7".261 \sin\left(\Omega_{\mathrm{☾}}\right) \\
\Delta\Omega_\eta &= 95''.96 \sin\left(\Omega_{\mathrm{☾}}\right) + \\
&\quad + 15''.58 \sin\left[\Omega_{\mathrm{☾}} + 276°.2 - 2°.3\left(T + 0.5\right)\right] \\
\Delta\tau_\eta &= -6''.4 \sin\left[41°.1 + 20°.2\left(T + 0.5\right)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{29.47}$$

Dies ergibt die Zuweisungen auf die modifizierten fundamentalen Argumente[3]:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{\mathrm{☾}} \Rightarrow \Omega_{\mathrm{☾}} + \Delta\Omega_\eta \quad , \quad M_{\odot} \Rightarrow M_{\odot} + \Delta\tau_\eta \quad , \quad L_{\mathrm{☾}} \Rightarrow L_{\mathrm{☾}} + \Delta L_\eta \ , \\
&M_{\mathrm{☾}} = L_{\mathrm{☾}} - \Gamma'_{\mathrm{☾}} \quad , \quad F_{\mathrm{☾}} = L_{\mathrm{☾}} - \Omega_{\mathrm{☾}} \quad , \quad D_{\mathrm{☾}} \Rightarrow D_{\mathrm{☾}} + \Delta L_\eta \quad .
\end{aligned} \tag{29.48}$$

---

[1] URBAN, S. E. and P. K. SEIDELMANN [2013], p. 338. Der Wert für die Erde („Terra“) bezieht sich auf das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems. Im vorliegenden Zusammenhang dürfte eine Korrektur auf den Erdmittelpunkt keine quantitativen Auswirkungen haben

[2] Aus ILE[1954], Tabelle I, p. 288, sowie Tabelle II, pp.290-291

[3] Die vorgegebenen mittleren fundamentalen Argumente sind in Abschnitt 29.1.3.2 auf Seite 581 zusammengestellt

Diese Zuweisungen sind folgendermaßen zu verstehen: Vorgegeben sind die mittleren Parameter mit den Formeln aus Abschnitt 29.1.3.2 (ab Seite 583). Sollen auch periodische Variationen der Mondbewegung berücksichtigt werden, werden die Modifikationen (29.48) berücksichtigt. In dieser erweiterten Form werden die Argumente in den folgenden Entwicklungen zur Beschreibung der Mondbewegung mit Polarkoordinaten verwendet.

29.1.6.1 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Länge des Mondes

Die wahre ekliptikale Länge des Mondmittelpunktes hat bei Bezug auf das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned} l_M = L_{\leftmoon} + 22639''.550 \sin M_{\leftmoon} + P_{\odot,l}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}\right) + \\ + P_{Pl,l}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}, L_{\leftmoon}, \Omega_{\leftmoon}, T_{\mathrm{♁}}, V_{\mathrm{♀}}, J_{\mathrm{♃}}, M_{\mathrm{♂}}, S_{\mathrm{♄}}\right) + \Delta\psi \quad . \end{aligned} \tag{29.49}$$

Hier ist $L_{\leftmoon}$ die gemäß den Ausdrücken (29.48) modifizierte mittlere geometrische Länge des Mondes[1]. Es folgt der Hauptterm der Mittelpunktsgleichung. $P_{\odot,l}$ fasst die periodischen Einflüsse auf die Bewegung in Länge im Rahmen des Hauptproblems der Mondbewegung zusammen. In $P_{Pl,l}$ sind die Einflüsse durch die Planeten enthalten. Der Faktor $\Delta\psi$ ist die Nutation in Länge.

Die ersten Glieder der periodischen Solarterme in Länge lauten[2]:

$$\begin{aligned} \Delta l_{\alpha} = \; & 13''.902 \sin\left(4D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 2369''.912 \sin\left(2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 191''.953 \sin\left(M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 22639''.550 \sin\left(M_{\leftmoon}\right) - \\ & - 4586''.465 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 38''.428 \sin\left(M_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 24''.420 \sin\left(M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 668''.146 \sin\left(M_{\odot}\right) - \\ & - 165''.145 \sin\left(M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 125''.154 \sin\left(D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 14''.387 \sin\left(2M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 769''.016 \sin\left(2M_{\leftmoon}\right) - \\ & - 211''.656 \sin\left(2M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 30''.773 \sin\left(2M_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 109''.673 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right) - \\ & - 205''.962 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & + 28''.475 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 7''.486 \sin\left(2M_{\odot}\right) - \\ & - 8''.096 \sin\left(2M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 5''.741 \sin\left(2F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 411''.608 \sin\left(2F_{\leftmoon}\right) - \\ & - 55''.173 \sin\left(2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 8''.466 \sin\left(2M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 18''.609 \sin\left(2M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 18''.023 \sin\left(M_{\odot} + D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 36''.124 \sin\left(3M_{\leftmoon}\right) - \\ & - 13''.193 \sin\left(3M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 7''.649 \sin\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right) - \\ & - 8''.627 \sin\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 9''.703 \sin\left(2M_{\leftmoon} - M_{\odot}\right) - \\ & - 7''.412 \sin\left(M_{\leftmoon} + 2M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 45''.099 \sin\left(M_{\leftmoon} + 2F_{\leftmoon}\right) - \end{aligned} \tag{29.50}$$

[1] siehe in Abschnitt 9.4.1, Formel (9.122)

[2] ILE [1954], Ialpha, Code 0

$- \quad 4''.391 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 4D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 6''.382 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) +$
$+ \quad 14''.577 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right) +$	$+ \quad 39''.528 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2F_{\leftmoon}\right) +$
$+ \quad 147''.687 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot}\right) +$	$+ \quad 9''.366 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) + \cdots$

Zusätzlich werden im Rahmen der vorliegenden Näherung noch die folgenden additiven Korrekturen für die Effekte höherer Ordnung in den periodischen Solar-Termen benötigt[1]:

$$\begin{aligned}\Delta l_{\alpha dd} = {} & 294''.0 \times 10^{-9} \cdot T \cdot 36525 \cdot \sin\left(2D_{\leftmoon}\right) + \\ & + 35''.0 \times 10^{-9} \cdot T \cdot 36525 \cdot \sin\left(M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 220''.0 \times 10^{-9} \cdot T \cdot 36525 \cdot \sin\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 17''.0 \times 10^{-9} \cdot T \cdot 36525 \cdot \sin\left(M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\ & - 12''.0 \times 10^{-9} \cdot T \cdot 36525 \cdot \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{29.51}$$

Damit lautet die (näherungsweise) wahre ekliptikale Länge des Mondes

$$l_M = L_{\leftmoon} + \left[\Delta l_{\eta} + \Delta l_{\alpha} + \Delta l_{\alpha dd} + \Delta\psi\right] / 3600.0 \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{29.52}$$

29.1.6.2 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Breite des Mondes

Die ekliptikale Breite des Mondes hat die allgemeine Darstellung, bezogen auf den Hauptterm des Argumentes der Breite und zerlegt in Solarterme und Terme durch die Planeten

$$\begin{aligned}b_M = {} & 18518''.511 \sin F_{\leftmoon} + P_{\odot,l}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}\right) + \\ & + P_{Pl,b}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}, L_{\leftmoon}, T_{\sun}, V_{\venus}, J_{\jupiter}, M_{\mars}\right) \quad .\end{aligned} \tag{29.53}$$

Die periodischen Solarterme (bis zur Größenordnung etwa $5''$) sind[2] in den Entwicklungen (29.54) zusammengefasst.

$\Delta b_{s\beta} = - \quad 112''.79 \sin\left(D_{\leftmoon}\right) +$	$+ \quad 17''.93 \sin\left(M_{\odot} + D_{\leftmoon}\right) -$
$+ \quad 2373''.36 \sin\left(2D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 126''.98 \sin\left(M_{\odot}\right) -$
$+ \quad 14''.06 \sin\left(4D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 165''.06 \sin\left(M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) -$
$+ \quad 6''.98 \sin\left(M_{\leftmoon} + 4D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 16''.78 \sin\left(2M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) -$
$+ \quad 192''.72 \sin\left(M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) -$	$- \quad 11''.75 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right) -$
$- \quad 13''.51 \sin\left(M_{\leftmoon} + D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 115''.18 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right) -$
$+ 22609''.07 \sin\left(M_{\leftmoon}\right) -$	$- \quad 182''.36 \sin\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) +$
$- \quad 4578''.13 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) +$	$+ \quad 23''.59 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) +$
$+ \quad 5''.44 \sin\left(M_{\leftmoon} - 3D_{\leftmoon}\right) -$	$+ \quad 138''.76 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot}\right) +$
$- \quad 38''.98 \sin\left(M_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) +$	$+ \quad 31''.70 \sin\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right) -$

(29.54)

[1] ILE[1954] Tabelle IV

[2] ILE[1954], table S, Ibeta, code 1

$+ \quad 14''.78 \sin\left(2M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 10''.78 \sin\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right) -$
$+ \quad 767''.96 \sin\left(2M_{\leftmoon}\right) -$	$- \quad 7''.59 \sin\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right) +$
$- \quad 152''.53 \sin\left(2M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) -$	$+ \quad 11''.67 \sin\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right) -$
$+ \quad 34''.07 \sin\left(2M_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) +$	$- \quad 52''.14 \sin\left(2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) -$
$+ \quad 50''.64 \sin\left(3M_{\leftmoon}\right) -$	$- \quad 9''.52 \sin\left(M_{\leftmoon} + 2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) +$
$- \quad 16''.40 \sin\left(3M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) -$	$+ \quad 85''.78 \sin\left(M_{\leftmoon} - 2F_{\leftmoon}\right) + \cdots$
$- \quad 25''.10 \sin\left(M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right) +$	

Weitere Solar-Terme in Breite[1] sind

$$\begin{aligned}
\Delta b_{N\beta} = & - \quad 526''.069 \sin\left(F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\
& - \quad 3''.352 \sin\left(F_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) + \\
& + \quad 44''.297 \sin\left(M_{\leftmoon} + F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\
& - \quad 6''.000 \sin\left(M_{\leftmoon} + F_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right) - \\
& - \quad 20''.599 \sin\left(M_{\leftmoon} - F_{\leftmoon}\right) + \\
& + \quad 30''.598 \sin\left(M_{\leftmoon} - F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) + \\
& + \quad 24''.649 \sin\left(2M_{\leftmoon} - F_{\leftmoon}\right) + \\
& + \quad 2''.000 \sin\left(2M_{\leftmoon} - F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) - \\
& - \quad 22''.571 \sin\left(M_{\odot} + F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) - \\
& - \quad 10''.985 \sin\left(M_{\odot} - F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) + \cdots
\end{aligned} \tag{29.55}$$

Die additiven Korrekturen entsprechend den Effekten höherer Ordnung sind[2]

$$\begin{aligned}
\Delta b_{N\beta\beta} = & \, 15''.0 \times 10^{-9} \cdot \Delta JD \cdot \sin\left(F_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right) - \\
& - 81''.0 \times 10^{-9} \cdot \Delta JD \cdot \sin\left(F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{29.56}$$

Prinzipalterme der periodischen Solarterme in Breite[3]:

$$\begin{aligned}
\gamma_{b1} &= 18518''.511 + 1''.189 \\
\gamma_{b2} &= -6''.241
\end{aligned} \tag{29.57}$$

Zur Berechnung der wahren ekliptikalen Breite des Mondes[4] wird mit dem Argument

$$SB := F_{\leftmoon} + \Delta l_{\eta} - \Delta\Omega_{\eta} + \Delta b_{S\beta} \tag{29.58}$$

erhalten

$$b_M = \left[\gamma_{b1} \sin\left(SB\right) + \gamma_{b2} \sin\left(3SB\right) + \Delta b_{N\beta} + \Delta b_{N\beta\beta}\right] / 3600 \qquad [\text{Grad}] \quad . \tag{29.59}$$

---

[1] ILE [1954], table N, Ibeta, Code 3

[2] ILE [1954], table IV

[3] ILE [1954] , Ibeta, Code 6

[4] mit den Formeln aus ILE [1954] p.344, p.350, p.358

29.1.6.3 Die geozentrische Parallaxe des Mondes

Der konstante Wert der Äquatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes[1], bezogen auf den mittleren Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdzentrum, wird durch die periodischen Sonneneinflüsse $P_{\odot,\pi}$ und die periodischen Einflüsse $P_{\mathrm{Pl},\pi}$ durch die Planeten überlagert. Die wahre Parallaxe des Mondes hat die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned} P_{\leftmoon} = 3422''.608 + P_{\odot,\pi}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}\right) + \\ + P_{Pl.\pi}\left(M_{\leftmoon}, M_{\odot}, F_{\leftmoon}, D_{\leftmoon}, L_{\leftmoon}, T_{\jupiter}, V_{\venus}, J_{2\jupiter}, M_{\mars}\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.60}$$

Der wahre Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkt kann mit dem mittleren Äquatorradius der Erde errechnet werden aus

$$r_{\leftmoon} = \frac{R_E}{\sin\left(P_{\leftmoon}\right)} \ [\mathrm{km}]. \tag{29.61}$$

Die näherungsweisen Ausdrücke zur Berechnung der Mondparallaxe sind[2]:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\leftmoon\mathrm{g}} = 28''.2333\cos\left(2D_{\leftmoon}\right) + \\ + 3422''.7000 + \\ + 186''.5398\cos\left(M_{\leftmoon}\right) + \\ + 34''.3117\cos\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) + \\ + 10''.1657\cos\left(2M_{\leftmoon}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{29.62}$$

Die additiven Korrekturen höherer Ordnung lauten[3]

$$\begin{aligned} \Delta P_{\leftmoon p} = 3''.5\times10^{-9}\cdot 36525\cdot\cos\left(2D_{\leftmoon}\right) + \\ + 1''.0\times10^{-9}\cdot 36525\cdot\cos\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{29.63}$$

Die gesamte Korrektur (in der hier verlangten Näherung) beträgt[4]

$$\Delta P_{\leftmoon} = \left(\Delta P_{\leftmoon\mathrm{g}} + \Delta P_{\leftmoon p}\right) P_{\leftmoon N} \,/\, 3422''.7 \tag{29.64}$$

Hier bedeutet $P_{\leftmoon N}$ einen eventuell verbesserten Wert für die geozentrische Äquatorial-Horizontal Parallaxe, welche den in der ILE verwendeten Wert $3422''.700$ verwendeten Wert ersetzen soll. Die geozentrische Äquatorial-Horizontal Parallaxe des Mondes lautet schließlich (in der gewünschten Näherung)

$$P_{\leftmoon} = \Delta P_{\leftmoon} + \frac{\left(\Delta P_{\leftmoon}\right)^3}{6\cdot\left(206264.806\right)^2} \quad . \tag{29.65}$$

---

[1] der hier verwendete Zahlenwert ist dem Supplement P. K. SEIDELMANN (ed.) [1992], Table 15.4, p. 701, entnommen

[2] ILE [1954], Table Igamma, Code 5

[3] ILE [1954], Tabelle IV

[4] ILE [1954], p. 344

29.1.6.4 Der geozentrische ekliptikale Ortsvektor des Mondes

Bezogen auf das momentane Ekliptiksystem $\mathbf{q}_j^{(E)}$ hat der Mondmittelpunkt mit den zuvor berechneten Polarkoordinaten den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{\oplus\mathbb{C}} = r_{\mathbb{C}}\left[\cos l_M \cos b_M\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \sin l_M \cos b_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \sin b_M\, \mathbf{q}_3^{(E)}\right] \quad , \; r_{\mathbb{C}} = \left|\mathbf{r}_{\oplus\mathbb{C}}\right| \; . \tag{29.66}$$

29.1.7 Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes

Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes kann durch Ableitung des Ortsvektors (29.66) nach der Zeit gebildet werden. Im vorliegenden Fall werde als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag gewählt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{\oplus\mathbb{C}}}{d(d)} &= \frac{dr_{\mathbb{C}}}{d(d)}\frac{\mathbf{r}_{\oplus\mathbb{C}}}{r_{\mathbb{C}}} + \\ &+ r_{\mathbb{C}}\,\cos b_{\mathbb{C}}\,\frac{dl_{\mathbb{C}}}{d(d)}\left[-\sin l_{\mathbb{C}}\,\mathbf{q}_1^{(E)} + \cos l_{\mathbb{C}}\,\mathbf{q}_2^{(E)}\right] + \\ &+ r_{\mathbb{C}}\,\frac{db_{\mathbb{C}}}{d(d)}\left[-\cos l_{\mathbb{C}}\sin b_{\mathbb{C}}\,\mathbf{q}_1^{(E)} - \sin l_{\mathbb{C}}\sin b_{\mathbb{C}}\,\mathbf{q}_2^{(E)} + \cos b_{\mathbb{C}}\,\mathbf{q}_3^{(E)}\right] \; .\end{aligned} \tag{29.67}$$

Die hier benötigten Variationen der ekliptikalen Polarkoordinaten des Mondes werden in den Ausdrücken (29.90), (29.78) und (29.83) zur Verfügung gestellt. Die dazu erforderlichen Einzelvariationen werden in den folgenden Abschnitten berechnet.

Die Polarkoordinaten des Mondortes sind Funktionen der Zeit. Um ihre Ableitungen berechnen zu können müssen die Ableitungen der vier fundamentalen Parameter $\left(M_{\mathbb{C}}, M_{\odot}, F_{\mathbb{C}}, D_{\mathbb{C}}\right)$ aus den Beziehungen (29.6) und (29.7), (29.20) und (29.21), (29.11) und (29.12), sowie (29.16) und (29.17) berechnet werden.

$$\begin{aligned}\frac{dM_{\mathbb{C}}}{d(d)} &= n_{\mathbb{C}a} + \frac{dn_{\mathbb{C}a}}{d(d)}(\Delta Jd) \quad \left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ &= 13°.064992947 + 13°.0385742\times10^{-12}\,(\Delta JD)\left[1/\text{Tag}\right] + \\ &\quad + 10°.9589913\times10^{-19}\,(\Delta JD)^2\left[1/\text{Tag}^2\right] + \cdots \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] .\end{aligned} \tag{29.68}$$

$$\begin{aligned}\frac{dM_{\odot}}{d(d)} &= \dot{M}_{\odot s} + \frac{d\dot{M}_{\odot s}}{d(d)}(\Delta JD)\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ &= 0°.985600251 + 8°.77633292\times10^{-9}\,(\Delta JD)\left[1/\text{Tag}\right] + \\ &\quad + 7°.4958261\times10^{-15}\,(\Delta JD)^2\left[1/\text{Tag}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \; .\end{aligned} \tag{29.69}$$

$$\frac{dF_{\leftmoon}}{d(d)} = \frac{dn_{\leftmoon F}}{d(d)} + n_{\leftmoon F}(\Delta JD)\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] =$$
$$= 13°.229350241 - 5°.5206766\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \qquad (29.70)$$
$$+1°.8812277\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{Tag}^2] + \cdots\cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] .$$

$$\frac{dD_{\leftmoon}}{d(d)} = \frac{dn_{\leftmoon D}}{d(d)} + n_{\leftmoon D}(\Delta JD)\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] =$$
$$= 12°.190749117 - 2°.876524\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \qquad (29.71)$$
$$+3°.2493891\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{Tag}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] .$$

Zusätzlich wird noch die Variation des aufsteigenden Knotens der Mondbahn bezüglich der Ekliptik benötigt. Mit den Ausdrücken (29.18) und (29.19)

$$\frac{d\Omega_{\leftmoon}}{d(d)} = \frac{d\dot{\Omega}_{\leftmoon s}}{d(d)} + \dot{\Omega}_{\leftmoon s}(\Delta JD) =$$
$$= 0°.052953765 + 3°.1045216\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \qquad (29.72)$$
$$+1°.3681623\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{Tag}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] .$$

Die Variation der Länge des Perigäums wird mit den Formeln (29.9) und (29.10) erhalten:

$$\Gamma'_{\leftmoon} = \Gamma'_{\leftmoon 0} + \dot{\Gamma}'_{\leftmoon s}T = \Gamma'_{\leftmoon 0} + n_{\leftmoon\Gamma'}T = L_{\leftmoon} - M_{\leftmoon} =$$
$$= 83°.3534511 + 4069°.013877T\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] - \qquad (29.73)$$
$$- 0°.010308889T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] - 1°.25222\times10^{-5}T^3\left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots .$$

Für die näherungsweise Berechnung der geozentrischen Mondbahn werden noch die Einflüsse durch Venus (VM) und Erde (TM) benötigt. Mit den Ausdrücken (29.46) wird

$$\frac{dL_{\venus}}{d(d)} =: \frac{d(VM)}{d(d)} = 1°.602130469 \quad [1/\text{Tag}]$$
$$\frac{dL_{\earth}}{d(d)} =: \frac{d(TM)}{d(d)} = +0°.985609102 \quad [1/\text{Tag}] \quad . \qquad (29.74)$$

Die Hilfsgrößen (29.47) führen auf die Variationen

$$\frac{d\left(\Delta l_\eta\right)}{d\left(d\right)}3600''.0 = 14''.27\cos\left[M_{\leftmoon} + 151°.1 + 16.0 * TM - 18.0 * VM - 1°.0\left(T + 0.5\right)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + 16.0\,\frac{d\left(TM\right)}{d\left(d\right)} - 18.0\frac{d\left(VM\right)}{d\left(d\right)} - \frac{1°.0}{36525}\right] + \tag{29.75}$$
$$+ 7''.261\cos\left(\Omega_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(\Omega_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} \qquad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right]$$

$$\frac{d\left(\Delta\Omega_\eta\right)}{d\left(d\right)}3600''.0 = 95''.96\,\cos\left(\Omega_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(\Delta\Omega_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} +$$
$$+ 15''.58\cos\left[\Omega_{\leftmoon} + 276°.2 - 2°.3\left(T + 0.5\right)\right]\times\left[\frac{d\left(\Delta\Omega_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{2°.3}{36525}\right] \qquad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.76}$$

$$\frac{d\left(\Delta\tau_\eta\right)}{d\left(d\right)}3600''.0 = -6''.4\cos\left[41°.1 + 20°.2\left(T + 0.5\right)\right]\times\left[\frac{20°.2}{36525}\right] \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.77}$$

Anmerkung: Für hochgenaue Berechnungen müssen auch die Variationen der Längen der anderen Planeten Mars, Jupiter, Saturn) nach der Zeit berechnet werden. Dies kann nach dem hier vorgestellten Muster erfolgen, was im vorliegenden Bericht nur angedeutet werden soll. ◄

29.1.7.1 Die Variation der ekliptikalen Länge des Mondes

Die Variation der ekliptikalen Länge lautet mit dem Ausdruck (29.52)

$$\frac{dl_{\leftmoon}}{d\left(d\right)} = \frac{dL_{\leftmoon}}{d\left(d\right)} + \left[\frac{d\left(\Delta l_\eta\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(\Delta l_\alpha\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(\Delta l_{add}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(\Delta\Psi\right)}{d\left(d\right)}\right] / 3600.0 \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{29.78}$$

Im Einzelnen ergibt die Beziehung (29.4) die Variation der mittleren Länge

$$\frac{dL_{\leftmoon}}{d\left(d\right)} = \frac{dF_{\leftmoon}}{d\left(d\right)} + \frac{d\Omega_{\leftmoon}}{d\left(d\right)} \quad . \tag{29.79}$$

Die Entwicklung (29.50) führt auf

$$\frac{d\left(\Delta l_\alpha\right)}{d\left(d\right)} = \quad \left[\;55''.608\cos\sin\left(4D_{\leftmoon}\right) + 4739''.824\cos\left(2D_{\leftmoon}\right)\right]\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} +$$
$$+ \;\; 191''.953\cos\left(M_{\leftmoon} + 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + 22639''.550\,\cos\left(M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} -$$
$$- 4586''.465\cos\left(M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] -$$
$$- \;\; 38''.428\cos\left(M_{\leftmoon} - 4D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - 4\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] -$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 24''.420\cos\left(M_\odot + 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - 668''.146\,\cos\left(M_\odot\right)\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - \\
&- 165''.145\,\cos\left(M_\odot - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - 125''.154\,\cos\left(D_\leftmoon\right)\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \\
&+ \quad 28''.774\,\cos\left(2M_\leftmoon + 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] + 1538''.032\,\cos\left(2M_\leftmoon\right)\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \\
&- 423'''.312\,\cos\left(2M_\leftmoon - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \quad 61''.546\,\cos\left(2M_\leftmoon - 4D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \quad 109''.673\,\cos\left(M_\leftmoon + M_\odot\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- 205''.962\,\cos\left(M_\leftmoon + M_\odot - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \quad 4''.391\cos\left(M_\leftmoon + M_\odot - 4D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - 4\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \quad 14''.577\cos\left(M_\leftmoon - M_\odot + 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ 147''.687\cos\left(M_\leftmoon - M_\odot\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \quad 28''.475\cos\left(M_\leftmoon - M_\odot - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \quad 14''.972\cos\left(2M_\odot\right)\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - 16''.192\,\cos\left(2M_\odot - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \quad 11''.482\cos\left(2F_\leftmoon + 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(F_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - 823''.216\,\cos\left(2F_\leftmoon\right)\frac{d\left(F_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \\
&- 110''.346\,\cos\left(2F_\leftmoon - 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(F_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- 16''.932\,\cos\left(2M_\leftmoon + 2D_\leftmoon\right)\left[\frac{d\left(M_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(D_\leftmoon\right)}{d\left(d\right)}\right] +
\end{aligned}
\tag{29.80}
$$

$$+\ 37''.218\cos\left(2M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+$$

$$+\quad 18''.023\cos\left(M_{\odot}+D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+108''.372\cos\left(3M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-$$

$$-\ 13''.193\cos\left(3M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[3\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]-$$

$$-\quad 7''.649\cos\left(2M_{\leftmoon}+M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]-$$

$$-\quad 8''.627\cos\left(2M_{\leftmoon}+M_{\odot}-2D_{\leftmoon}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+$$

$$+\quad 9''.703\cos\left(2M_{\leftmoon}-M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]-$$

$$-\quad 7''.412\cos\left(M_{\leftmoon}+2M_{\odot}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]$$

$$-\ 45''.099\ \cos\left(M_{\leftmoon}+2F_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]-$$

$$-\quad 6''.382\cos\left(M_{\leftmoon}-2F_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+$$

$$+\ 39''.528\cos\left(M_{\leftmoon}-2F_{\leftmoon}\right)\qquad\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+$$

$$+\ 9''.366\cos\left(M_{\leftmoon}-2F_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\cdots$$

Die Entwicklung (29.51) liefert

$$\frac{d\left(\Delta L_{\alpha dd}\right)}{d\left(d\right)}=294''.0\times10^{-9}\left\{\sin\left(2D_{\leftmoon}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(2D_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right\}+$$

$$+35''.0\times10^{-9}\ \cdot\left\{\sin\left(M_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(M_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}-$$

$$-220''.0\times10^{-9}\cdot\left\{\sin\left(M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}-$$

$$
\begin{aligned}
&-17''.0\times10^{-9}\ \cdot\left\{\sin\left(M_\odot-2D_\mathbb{C}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(M_\odot-2D_\mathbb{C}\right)\left[\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}-\\
&-12''.0\times10^{-9}\ \cdot\left\{\sin\left(M_\mathbb{C}-M_\odot\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(M_\mathbb{C}-M_\odot\right)\left[\frac{d\left(M_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}+\cdots
\end{aligned}
\tag{29.81}
$$

Für die Nutation in Länge $\Delta\Psi$ liefert Formel[1] (9.122)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\Delta\Psi\right)}{d\left(d\right)} &= -0''.01742\sin\Omega_\mathbb{C}/36525-(17''.1996+0''.01742\,T)\cos\Omega_\mathbb{C}\frac{d\left(\Omega_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}+\\
&+0''.00002\sin2\Omega_\mathbb{C}+(0''.4124+0''.00004\,T)\cos2\Omega_\mathbb{C}\frac{d\left(\Omega_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}-\\
&-0''.00016\sin L_\odot-(1''.3187+0''.00016\,T)\cos L_\odot\frac{d\left(L_\odot\right)}{d\left(d\right)}+\\
&-0''.00034\sin M_\odot+(0''.1426-0''.00034T)\cos M_\odot\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}-\\
&-0''.00012\sin(2L_\odot+M_\odot)+(0''.0517-0''.00012\,T)\cos(2L_\odot+M_\odot)\left[2\frac{d\left(L_\odot\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&-0''.00005\sin(2L_\odot-M_\odot)+(0''.0217-0''.00005T)\cos(2L_\odot-M_\odot)\left[2\frac{d\left(L_\odot\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_\odot\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+0''.00001\sin(2L_\odot-\Omega_\mathbb{C})+(0''.0129+0''.00001T)\cos(2L_\odot-\Omega_\mathbb{C})\left[2\frac{d\left(L_\odot\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(\Omega_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&-0''.00002\sin2L_\mathbb{C}-(0''.4548+0''.00004T)\cos2L_\mathbb{C}\frac{d\left(L_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}+\\
&+0''.00001\sin M_\mathbb{C}+(0''.0712+0''.00001T)\cos M_\mathbb{C}\frac{d\left(M_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}-\\
&-0''.00004\sin(2F_\mathbb{C}+\Omega_\mathbb{C})-(0''.0386+0''.00004)\cos(2F_\mathbb{C}+\Omega_\mathbb{C})\left[2\frac{d\left(F_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(\Omega_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&-0''.0301\cos(2L_\mathbb{C}+M_\mathbb{C})\left[2\frac{d\left(L_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&-0''.0158\cos(M_\mathbb{C}-2L_\mathbb{C})\left[\frac{d\left(M_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(L_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+0''.0123\cos(2F_\mathbb{C}-M_\mathbb{C})\left[2\frac{d\left(F_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_\mathbb{C}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\ldots
\end{aligned}
\tag{29.82}
$$

[1] Abschnitt 9.4.1. (Band II)

29.1.7.2 Die Variation der ekliptikalen Breite des Mondes

Die Variation der ekliptikalen Breite lautet mit dem Ausdruck (29.59)

$$\frac{d\left(b_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\cdot 3600=\left[\gamma_{b1}\cos\left(SB\right)+3\gamma_{b2}\cos\left(3SB\right)\right]\frac{d\left(SB\right)}{d\left(d\right)}+ \\ +\frac{d\left(\Delta b_{N\beta}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(\Delta b_{N\beta\beta}\right)}{d\left(d\right)}\Delta b_{N\beta\beta}\quad\left[\text{Grad/Tag}\right]\ . \tag{29.83}$$

wobei

$$\frac{d\left(SB\right)}{d\left(d\right)}=\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(\Delta l_{\eta}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(\Delta\Omega_{\eta}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(\Delta b_{S\beta}\right)}{d\left(d\right)}\quad . \tag{29.84}$$

Die Ableitungen $d\left(F_{\leftmoon}\right)/d\left(d\right), d\left(\Delta\lambda_{\eta}\right)/d\left(d\right), d\left(\Delta\Omega_{\eta}\right)/d\left(d\right)$ sind in den Ausdrücken (29.70) und (29.75) gegeben. Benötigt werden noch mit der Entwicklung (29.54)

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\Delta b_{S\beta}\right)}{d\left(d\right)}=&\left[\ -112''.79\cos\left(D_{\leftmoon}\right)+4746''.72\cos\left(2D_{\leftmoon}\right)+56''.24\cos\left(4D_{\leftmoon}\right)\right]\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\\ &+\ \ 6''.98\cos\left(M_{\leftmoon}+4D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+4\ \frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\ &+192''.72\cos\left(M_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\ \frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\ &-\ \ 13''.51\cos\left(M_{\leftmoon}+D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\ \ \frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+22609''.07\cos\left(M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\\ &-4578''.13\cos\left(M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\ &+\ \ \ 5''.44\cos\left(M_{\leftmoon}-3D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-3\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\ &-\ \ 38''.98\cos\left(M_{\leftmoon}-4D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-4\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\ &+\ \ 29''.56\cos\left(2M_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\ \ \frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+1535''.92\cos\left(2M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\\ &-305''.06\cos\left(2M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\ \ \frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\ &+\ \ 68''.14\cos\left(2M_{\leftmoon}-4D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+151''.92\cos\left(3M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-\end{aligned} \tag{29.85}$$

$$
\begin{aligned}
&- \; 16''.40 \cos\left(3M_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[3\frac{d\left(\Delta M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 25''.10 \cos\left(M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(\Delta D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 17''.93 \cos\left(M_{\odot} + D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - 126''.98 \cos\left(M_{\odot}\right)\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - \\
&- \; 165''.06 \cos\left(M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 33''.56 \cos\left(2M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 11''.75 \cos\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 182''.36 \cos\left(M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 23''.59 \cos\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 138''.76 \cos\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 31''.70 \cos\left(M_{\leftmoon} - M_{\odot} + 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 10''.78 \cos\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 7''.59 \cos\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 11''.67 \cos\left(2M_{\leftmoon} + M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 104''.28 \cos\left(2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 9''.52 \cos\left(M_{\leftmoon} + 2F_{\leftmoon} - 2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 85''.78 \cos\left(M_{\leftmoon} - 2F_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

sowie mit (29.56)

$$\frac{d\left(\Delta b_{N\beta\beta}\right)}{d\left(d\right)} = 15''.0\times10^{-9}\cdot\left\{\sin\left(F_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(F_{\leftmoon}+2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}-$$
$$-81''.0\times10^{-9}\cdot\left\{\sin\left(F_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)+\Delta JD\cdot\cos\left(F_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(F_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\}+\cdots \quad .$$

29.1.7.3 Die Variation der Parallaxe des Mondes

Aus Formel (29.64) erhält man

$$\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\cdot3422''.7=\left(\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon\mathrm{g}}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon\mathrm{p}}\right)}{d\left(d\right)}\right)P_{\leftmoon N} \tag{29.86}$$

und aus (29.65) für die Variation der Parallaxe

$$\frac{d\left(P_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}=\left[1+\frac{3\left(\Delta P_{\leftmoon}\right)^2}{6\cdot\left(206264.806\right)^2}\right]\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} \quad . \tag{29.87}$$

Die Einzelanteile lauten mit (29.62)

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon\mathrm{g}}\right)}{d\left(d\right)} = &-256.4666\sin\left(2D_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\\ &-186''.5398\sin\left(M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\\ &-34''.3117\sin\left(M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\ &-20''.3314\sin\left(2M_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)}+\cdots\end{aligned} \tag{29.88}$$

sowie mit (29.63)

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\Delta P_{\leftmoon p}\right)}{dx} = &-7''.5\times10^{-9}\cdot36525\cdot\sin\left(2D_{\leftmoon}\right)\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{dx}-\\ &-1''.0\times10^{-9}\cdot36525\cdot\sin\left(M_{\leftmoon}-2D_{\leftmoon}\right)\left[\frac{d\left(M_{\leftmoon}\right)}{dx}-2\frac{d\left(D_{\leftmoon}\right)}{dx}\right]+\cdots\end{aligned} \tag{29.89}$$

Der wahre Abstand des Mondes hat somit vom Erdmittelpunkt mit Beziehung (29.61) die Variation

$$\frac{dr_{\leftmoon}}{d\left(d\right)}=-\frac{R_E\cos\left(P_{\leftmoon}\right)}{\sin^2\left(P_{\leftmoon}\right)}\frac{d\left(P_{\leftmoon}\right)}{d\left(d\right)} \quad \left[\mathrm{km/Tag}\right]. \tag{29.90}$$

29.2 Die Bewegung des Mondes um die Sonne

Für hochpräzise Berechnungen der Bewegung des Mondes wird die Bewegungsgleichung des Mondes, in der alle bekannten Einflüsse auf die Bewegung des Mondes enthalten sind, integriert. Dazu wird die Bewegung des Mondes – wie die der Erde – in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\odot\leftmoon} = -\mu_{\odot}\frac{\mathbf{r}_{\odot\leftmoon}}{r_{\odot\leftmoon}^3} + \mathbf{R}_{\odot\leftmoon} \tag{29.91}$$

mit der genügenden Genauigkeit erhalten, sofern der „Störvektor“ $\mathbf{R}_{\odot\leftmoon}$ aller physikalischen Einflüsse auf die Mondbewegung hinreichend genau bekannt ist. Der größte „Störfaktor“ ist die gravitative Wirkung der Erde auf die Mondbewegung, welche die Stabilität des Doppelplanetensystems garantiert. Weitere physikalische Einflüsse sind die Attraktionen der Planeten des Sonnensystems, die gravitativen Anomalien des Erdkörpers, in qualitativer Hinsicht der Strahlungsdruck durch die Sonne, der reflektierte Strahlungsdruck von der Erde auf den Mond, der Sonnenwind, weitere interplanetare und auch interstellare Effekte, sowie Effekte, welche durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben werden können, wie etwa der *Lense-Thirring*-Effekt[1].

Das Ergebnis der vollständigen Integration kann etwa in den JPL Ephemeriden zusammen mit den Ephemeriden von Sonne und Planeten erhalten werden[2].

Die *Kepler*schen Bahnelemente des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems auf seiner Bahn um die Sonne sind:

a	=	$1.4959826045\times10^8\,\text{km} + 840.7400294\,T$ km
	=	$1.00000261\,\text{AE} + 0.00000562\,T$ AE
e	=	$0.01671123 - 0.00004392\,T$
i	=	$-0°.00001531 - 0°.01294668\,T$
Ω	=	$0°.0 + 0°.0\,T$
$\tilde{\omega}$	=	$102°.93768193 + 0°.3237364\,T$
ω	=	$102°.93768193 + 0°.3237364\,T$
M_0	=	$357.52688973 + 35999°.0487134\,T$
L	=	$100°.46457166 + 35999°.37244981\,T$

Tabelle 29-4: Die *Kepler*schen Bahnelemente[3] der Bewegung des Erde-Mond-Baryzentrums um die Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0

Es seien $\mathbf{r}_{♁\leftmoon}$ der geozentrische Ortsvektor des Mondes, berechnet etwa mit den Polarkoordinaten aus Abschnitt 29.1.6, sowie $\mathbf{r}_{\odot♁}$ der heliozentrische Ortsvektor der Erde. Der heliozentrische Ortsvektor des Mondes ist

$$\mathbf{r}_{\odot\leftmoon} = \mathbf{r}_{\odot♁} + \mathbf{r}_{♁\leftmoon} \quad . \tag{29.92}$$

---

[1] siehe dazu auch die Aufzählungen in Kapitel 17 (Band III)

[2] hierzu in: STANDISH, E. M. [1982], 'The JPL Planetary Ephemeris', *Cel. Mech.* ***26***, pp. 181–186;

[3] aus: URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.338

Üblicherweise ist nur der heliozentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{\odot B}, \dot{\mathbf{r}}_{\odot B}\right)$ des Baryzentrums des Erde-Mondsystems gegeben. Um die Zustandsvektoren von Erde und Mond bezogen auf das Baryzentrum des Erde-Mondsystems zu erhalten kann (zumindest) für Überschlagsrechnungen folgendermaßen vorangegangen werden. Dazu werden als ein Beispiel die Daten verwendet, die zur Erstellung der JPL Ephemeride DE405/LE405 zugrunde gelegt wurden[1].

Der geozentrische Zustandsvektor $\mathbf{r}_{♁☾} = x^i_{♁☾}\,\mathbf{p}_i$ des Mondes im Frühlingspunkt-bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem zur Fundamentalepoche J2000.0 hat zum Zeitpunkt[2] JED 2440400.5 (1969, Juni, 28, 0h) die kartesischen Koordinaten

$$x_{♁☾1} = -1.209016068\times10^5 \text{ km}$$
$$x_{♁☾2} = -2.983923997\times10^5 \text{ km}$$
$$x_{♁☾3} = -1.626526903\times10^5 \text{ km}$$
$$\dot{x}_{♁☾1} = \;\; 1.040752410 \text{ km/s}$$
$$\dot{x}_{♁☾2} = -0.289924586 \text{ km/s}$$
$$\dot{x}_{♁☾3} = -0.148147160 \text{ km/s} \quad .$$

Daraus lässt sich auf die baryzentrischen Zustandsvektoren von Erde und Mond schließen, wenn nach dem Schwerpunktsatz für die baryzentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_{B♁}$ der Erde sowie $\mathbf{r}_{B☾}$ des Mondes mit den jeweiligen Massen[3]

$$M_{♁} = 5.9742\times10^{24} \text{ kg} \;,\;\; M_{☾} = 7.3483\times10^{22} \text{ kg} \;,\;\; \frac{M_{♁}}{M_{☾}} = 81.3005691 \qquad (29.93)$$

die Bedingung

$$M_{☾}\,\mathbf{r}_{B☾} + M_{♁}\,\mathbf{r}_{B♁} = 0 \quad , \quad M_{☾}\,\dot{\mathbf{r}}_{B☾} + M_{♁}\,\dot{\mathbf{r}}_{B♁} = 0 \qquad (29.94)$$

angesetzt wird. Hier kann die Eigenbewegung des Schwerpunktes[4] vernachlässigt werden.

Der baryzentrische Ortsvektor der Erde im Erde-Mond-System lautet (analog auch der Geschwindigkeitsvektor)

$$\mathbf{r}_{B♁} = x^i_{B♁}\;\mathbf{p}_i = -\frac{\mathbf{r}_{♁☾}}{1+\dfrac{M_{♁}}{M_{☾}}} \triangleq -0.012150586\;\mathbf{r}_{♁☾}\;\left[\text{km}\right] \quad . \qquad (29.95)$$

Seine äquatorialen kartesischen Koordinaten sind

---

[1] aus URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.326

[2] Julianisches Datum Ephemeridenzeit (statt ET jetzt TT, siehe Bild 9-2, Abschnitt 9.1.3, Band II)

[3] SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], pp.700-701; URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.327; WILLIAMS, J. G. et al. [2013], p. 8

[4] gemäß Formeln (10.51), (10.52), in Abschnitt 10.2.1.1 (Band III)

$x_{\mathrm{B}\earth 1} = 1469.02532405 \text{ km}$

$x_{\mathrm{B}\earth 2} = 3625.64239852 \text{ km}$

$x_{\mathrm{B}\earth 3} = 1976.32543851 \text{km}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\earth 1} = -0.012645751 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\earth 2} = \ \ 0.0035227535 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\earth 3} = \ \ 0.001800075 \text{km/s} \quad .$

Das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems hat vom Erdmittelpunkt die mittlere Distanz 4382.828 km. Es liegt stets innerhalb des Erdkörpers.

Der baryzentrische Ortsvektor des Mondes lautet

$$\mathbf{r}_{B\leftmoon} = x^i_{B\leftmoon}\ \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{r}_{\earth\leftmoon}}{1+\dfrac{M_{\leftmoon}}{M_{\earth}}} = 0.987849414\ \mathbf{r}_{\earth\leftmoon}\ [\text{km}] \tag{29.96}$$

mit den äquatorialen kartesischen Koordinaten

$x_{\mathrm{B}\leftmoon 1} = -119432.581476 \text{km}$

$x_{\mathrm{B}\leftmoon 2} = -294766.757301 \text{km}$

$x_{\mathrm{B}\leftmoon 3} = -160676.364861 \text{km}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\leftmoon 1} = \ \ 1.028106659 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\leftmoon 2} = -0.286401832 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\mathrm{B}\leftmoon 3} = -0.146347085 \text{km/s} \quad .$

Zum selben Zeitpunkt hat der heliozentrische Zustandsvektor des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems die äquatorialen Koordinaten[1]

$x_{\odot B1} = 1.735558329 \times 10^7 \text{ km}$

$x_{\odot B2} = -1.386182172 \times 10^8 \text{ km}$

$x_{\odot B3} = -6.010936328 \times 10^7 \text{ km}$

$\dot{x}_{\odot B1} = \ \ 29.10859434 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\odot B2} = 3.018157264 \text{km/s}$

$\dot{x}_{\odot B3} = 1.308935941 \text{km/s} \quad .$

Damit kann schließlich der heliozentrische Zustandsvektor der Erde aus der Beziehung $\mathbf{r}_{\odot\earth} = \mathbf{r}_{\odot\mathrm{B}} + \mathbf{r}_{\mathrm{B}\earth}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{\odot\earth} = \dot{\mathbf{r}}_{\odot\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{B}\earth}$ berechnet werden:

[1] aus URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.326

$$
\begin{aligned}
x_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}1} &= 1.735705232\times10^{7}\ \text{km}\\
x_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}2} &= -1.386145916\times10^{8}\ \text{km}\\
x_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}3} &= -6.010738695\times10^{7}\ \text{km}\\
\dot{x}_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}1} &= \ \ 29.09594859\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}2} &= 3.021680018\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot\mathbin{\mathrlap{\sigma}\mathrlap{\mathchar'26}}3} &= 1.310736016\,\text{km/s}\quad .
\end{aligned}
$$

Entsprechend wird der heliozentrische Zustandsvektor des Mondes mit der Beziehung $\mathbf{r}_{\odot\mathbb{C}} = \mathbf{r}_{\odot\mathrm{B}} + \mathbf{r}_{\mathrm{B}\mathbb{C}}$, $\dot{\mathbf{r}}_{\odot\mathbb{C}} = \dot{\mathbf{r}}_{\odot\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{B}\mathbb{C}}$ erhalten:

$$
\begin{aligned}
x_{\odot\mathbb{C}1} &= 1.723615071\times10^{7}\ \text{km}\\
x_{\odot\mathbb{C}2} &= -1.38912984\times10^{8}\ \text{km}\\
x_{\odot\mathbb{C}3} &= -6.027003964\times10^{7}\ \text{km}\\
\dot{x}_{\odot\mathbb{C}1} &= \ \ 30.136701\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot\mathbb{C}2} &= \ \ 2.731755432\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot\mathbb{C}3} &= \ \ 1.162588856\,\text{km/s}\quad .
\end{aligned}
$$

Dieser Zustandsvektor kann als Anfangswert zur Integration der Bewegungsgleichung (29.91) verwendet werden. Für eine Näherungslösung muss der „Störvektor“ $\mathbf{R}_{\odot\mathbb{C}}$ mindestens das Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond enthalten[1].

Anmerkung: Bild 29-2 auf Seite 614 zeigt die Bewegung des Mondes um die Sonne, berechnet mit dem heliozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_{\odot\mathbb{C}}$ aus Beziehung (29.92). Die Bahn der Erde ist nicht eingezeichnet, da in dieser realistischen Darstellung die beiden Bahnen nicht unterschieden werden können. Bei genauer Betrachtung kann man erkennen, dass die Bahn leichten Schwankungen unterworfen ist, welche durch die Bewegung der Erde verursacht sind. Um dies genauer darzustellen, ist in Bild 29-3 mit extremer Vergrößerung die sich umwickelnde Bewegung von Mond und Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne zu erkennen. Diese Bewegung erinnert an die Helix-Bewegung der Satelliten TerraSAR-X und TanDEM-X (siehe in Abschnitt 23.13.5 auf Seite 285). Exakt verglichen können die beiden Bewegungsvorgänge allerdings nicht, da Erde und Mond eine nicht zu vernachlässigende gravitative Anziehung aufeinander ausüben, welche Ursache für die synodische Bewegung des Mondes relativ zur Erde ist. Eine solche Anziehung kann bei den beiden Satelliten vernachlässigt werden, so dass die relative Bewegung der beiden Satelliten umeinander dem gemeinsamen drakonitischen Umlauf um die Erde entspricht. ◄

[1] Siehe in Abschnitt 17.4, sowie die allgemeine Behandlung des Dreikörperproblems in Abschnitt 10.4 (Band III)

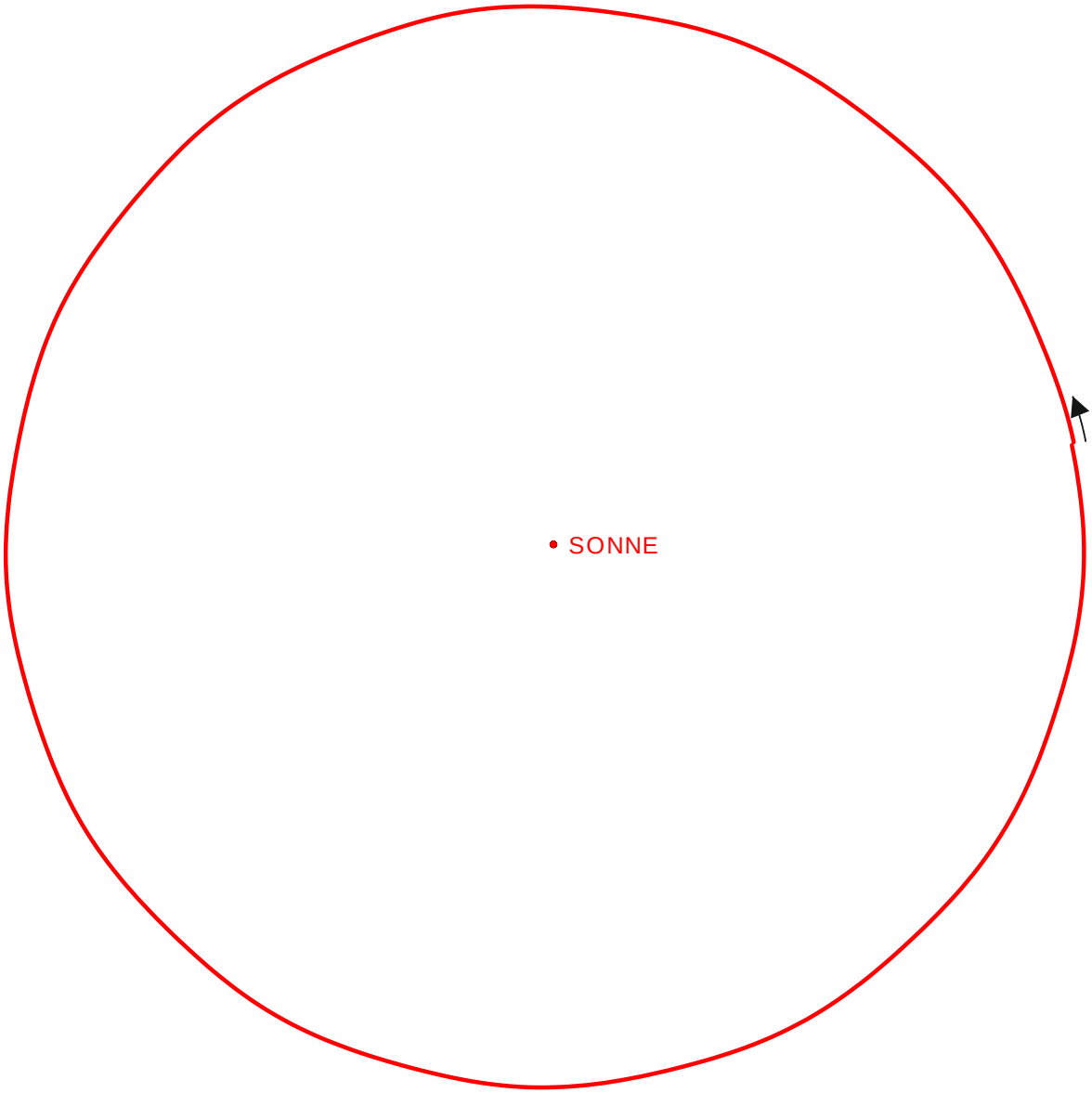


Bild 29-2: Die Bahn des Erdmondes um die Sonne im Jahr 2017 in realistischen Größenverhältnissen: man beachte die leichten Schwankungen der Mondbahn als Folge der hier nicht eingezeichneten gekoppelten Bewegung mit der Erde. Die Größe der Sonnenscheibe entspricht den realen Verhältnissen

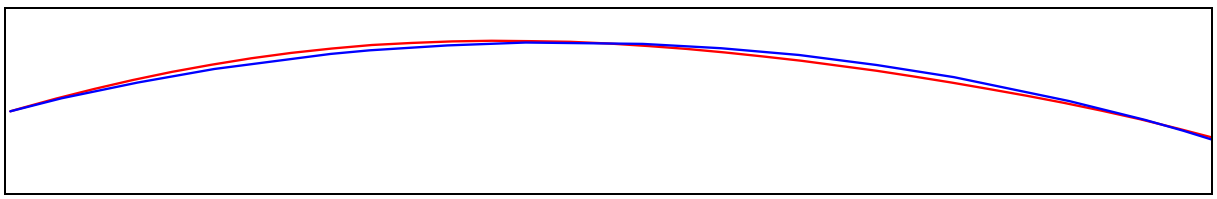


Bild 29-3: Die Bahnen von Mond (rot) und Erde (blau) um die Sonne im Verlauf eines synodischen Monats in realistischen Größenverhältnissen

29.3 Das Koordinatensystem der Mondbahn

Die Bewegung des Mondes ist in spezieller Weise an die Bewegung der Erde gekoppelt, auch wenn die wahre Bewegung als heliozentrische Bewegung aufgefasst werden muss. Aus diesem Grund wird die Bewegung des Mondes mit den in Abschnitt 29.1 zusammengestellten Parametern berechnet. In einem zweiten Schritt kann in Kopplung mit der Bewegung der Erde die Bewegung des Mondes wie im vorhergehenden Abschnitt besprochen heliozentrisch dargestellt werden. Die benötigten Koordinatensysteme werden im Fall des Mondes geozentrisch bzw. selenozentrisch dargestellt.

29.3.1 Das geozentrische Bahnsystem des Mondes

Das Mondbahnsystem ist auf die Bahnebene des Mondes bezogen. Der Mittelpunkt des Systems ist für Untersuchungen der Bahndynamik das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems. Üblicherweise ist allerdings die Beschreibung der Mondbewegung auf den Erdmittelpunkt bezogen[1]. Das $\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}$ – Basissystem (siehe Bild 29-4 auf S. 616) wird so gewählt, dass $\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})}$ zum aufsteigenden Knoten ☊ der Bahnebene mit der Ekliptikebene gerichtet ist, $\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}$ in der Bahnebene gegenüber dem Knoten um 90° in positiver Bewegungsrichtung des betrachteten Objektes gedreht ist und $\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} = \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} \times \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}$ zu dem dadurch definierten (Nord-) Pol des Bahnsystems weist.

Als Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ werden die *Länge in der Bahn* in der Bahnebene vom Knoten rechtläufig im Sinne der Bewegung des Mondes im Gradmaß gezählt

$$0° \;\le\; l_B \;\le\; 360° \quad , \tag{29.97}$$

die *Breite* positiv von der Bahnebene zum Nordpol der Bahn, negativ zu ihrem Südpol

$$-90° \;\le\; b_B \;\le\; 90° \quad . \tag{29.98}$$

Ein Objekt hat in diesem System den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l_B, b_B\right] \quad , \tag{29.99}$$

mit kartesischen Koordinaten $x_{Bj}\left[j = 1,2,3\right]$ die Darstellung

$$\mathbf{r} \;=\; x_B{}^j \, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.100}$$

Somit ist der Zusammenhang der Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ mit den kartesischen Koordinaten x_{Bi} gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{B1} &= r \cos b_B \cos l_B \\ x_{B2} &= r \cos b_B \sin l_B \\ x_{B3} &= r \sin b_B \quad . \end{aligned} \tag{29.101}$$

[1] Vgl. etwa die Darstellung der geozentrischen ekliptikalen Polarkoordinaten in Abschnitt 29.1.6 ab Seite 594

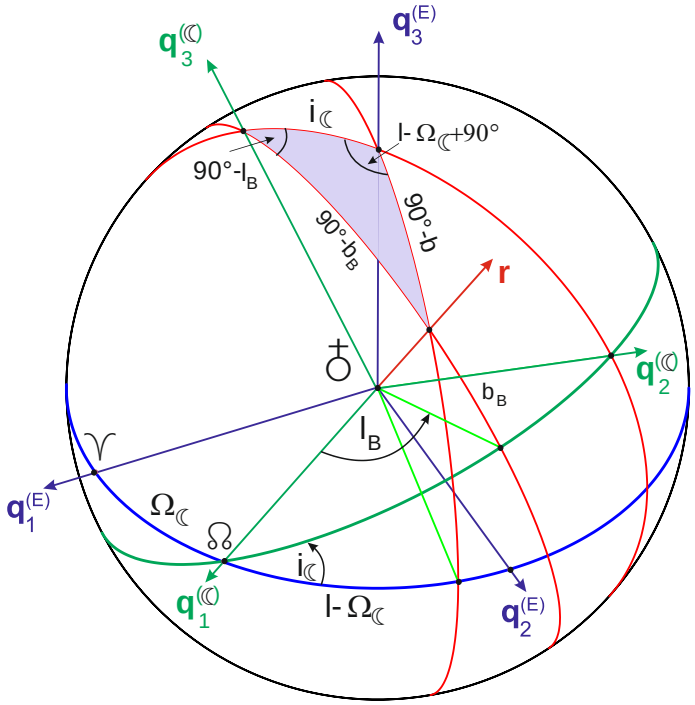


Bild 29-4**:** Das $\mathbf{q}_j^{(☾)}$ – Bahnsystem des Mondes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik-System

Die Polarkoordinaten des Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_B^{\,i}\, x_{Bi}} \\ \sin b_B &= \frac{x_{B3}}{r} \quad , \quad \cos b_B = \sqrt{1-\sin^2 b_B} \\ \cos l_B &= \frac{x_{B1}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\ \sin l_B &= \frac{x_{B2}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.102}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativ auf das Mondbahnsystem bezogenen) Geschwindigkeitsvektors lautet mit dem Formelsystem (4.123)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{B1} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B1} - \dot{b}_B\, x_{B3}\cos l_B - \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B2} \\ \dot{x}_{B2} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B2} - \dot{b}_B\, x_{B3}\sin l_B + \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B1} \\ \dot{x}_{B3} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B3} + r\,\dot{b}_B\cos b_B \end{aligned} \tag{29.103}$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt 8.2.1 (Band II)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{x_B{}^i \, \dot{x}_{Bi}}{r} \\
\left(l_B\right)^{\cdot} &= \frac{x_{B1}\,\dot{x}_{B2} - x_{B2}\,\dot{x}_{B1}}{r^2 \cos^2 b_B} \quad , \quad \left(r \cos b_B > 0\right) \\
\dot{b}_B &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_{B3}\,\dot{x}_{B1} - x_{B1}\,\dot{x}_{B3}\right)\cos l_B - \left(x_{B2}\,\dot{x}_{B3} - x_{B3}\,\dot{x}_{B2}\right)\sin l_B\right] \quad , \quad \left(r > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.104}
$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_B{}^j \, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + x_B{}^j \, \dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(\mathbb{C})}} + \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{r} \; . \tag{29.105}
$$

berechnen zu können, müssen zuvor die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}$ bzw. der Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System erhalten werden. Ein solches System ist das Ekliptiksystem.

29.3.2 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Ekliptiksystem

Der Bezug des Mondbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum, zum Beispiel das Baryzentrum des Sonnensystems, bezogene) Ekliptiksystem hergestellt. Seien die $\mathbf{q}_k^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems, $\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}$ die Basisvektoren im Mondbahnsystem. In der Beziehung

$$
\mathbf{q}_k^{(E)} = a_{Bk}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.106}
$$

wird nach Bild 29-4 auf S. 616 das Ekliptiksystem um den Ekliptikpol mit der Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{\mathbb{C}}$ in den Frühlingspunkt und um den Knoten mit der Inklination $i_{\mathbb{C}}$ in die Mondbahnebene gedreht. Die Drehung lautet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \cos\Omega_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - \sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \sin\Omega_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \qquad\qquad\qquad \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \qquad \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.107}
$$

Die Basisvektoren haben die zeitlichen Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\left[-\sin\Omega_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\right] + \\
&\quad + (i)^{\cdot} \sin\Omega_{\mathbb{C}}\left[\sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\right] + \\
&\quad + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} - \sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} + \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\left[\cos\Omega_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - \sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\right] - \\
&\quad - (i)^{\cdot} \cos\Omega_{\mathbb{C}}\left[\sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\right] + \\
&\quad + \sin\Omega_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \; \dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} &= (i)^{\cdot}\left[\cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\right] + \sin i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + \cos i_{\mathbb{C}} \; \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.108}
$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$\left(a_{Bk}{}^{j}\right) = \begin{bmatrix} \cos\Omega_{\mathbb{C}} & -\cos i_{\mathbb{C}} \sin\Omega_{\mathbb{C}} & \sin i_{\mathbb{C}} \sin\Omega_{\mathbb{C}} \\ \sin\Omega_{\mathbb{C}} & \cos i_{\mathbb{C}} \cos\Omega_{\mathbb{C}} & -\sin i_{\mathbb{C}} \cos\Omega_{\mathbb{C}} \\ 0 & \sin i_{\mathbb{C}} & \cos i_{\mathbb{C}} \end{bmatrix} \tag{29.109}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} &a_{B11} = \cos\Omega_{\mathbb{C}} \;,\; a_{B12} = -\sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \;,\; a_{B13} = \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \\ &a_{B21} = \sin\Omega_{\mathbb{C}} \;,\; a_{B22} = \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \;,\; a_{B23} = -\cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \\ &a_{B31} = 0 \;,\; a_{B32} = \sin i_{\mathbb{C}} \;,\; a_{B33} = \cos i_{\mathbb{C}} \;. \end{aligned} \tag{29.110}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned} &\dot{a}_{B11} = -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{B21} \;,\; \dot{a}_{B12} = -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{B22} + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B13} \;,\; \dot{a}_{B13} = -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{23} - \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B12} \\ &\dot{a}_{B21} = \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{B11} \;,\; \dot{a}_{B22} = \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{B12} + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B23} \;,\; \dot{a}_{B23} = -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, a_{13} - \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B22} \\ &\dot{a}_{B31} = 0 \;,\; \dot{a}_{B32} = \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B33} \;,\; \dot{a}_{B33} = -\left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} a_{B32} \;. \end{aligned} \tag{29.111}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = b_{Bj}{}^{k}\, \mathbf{q}_k^{(E)} \tag{29.112}$$

ist daher nach Abschnitt 6.1.3 wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^{i}\right) = 1$ und mit Formel (6.30) $b_{Bj}{}^{k} = a_{Bk}{}^{j}$, in Matrixschreibweise[1] $\left(b_{Bjk}\right) = \left(a_{Bkj}\right)$ und es bleibt

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = a_{B}{}^{k}{}_{j}\, \mathbf{q}_k^{(E)} \;. \tag{29.113}$$

Die Abbildung lautet dann im Einzelnen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} &= \cos\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \sin\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} \\ \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} &= -\sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_3^{(E)} \\ \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} &= \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_3^{(E)} \;. \end{aligned} \tag{29.114}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \left(-\sin\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \cos\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \cos\Omega_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} + \sin\Omega_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, \cos i_{\mathbb{C}} \left(-\cos\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} - \sin\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \\ &\quad + (i)^{\cdot} \left(\sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_3^{(E)}\right) - \\ &\quad - \sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} + \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} + \sin i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, \sin i_{\mathbb{C}} \left(\cos\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \sin\Omega_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \\ &\quad + (i)^{\cdot} \left(\sin\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_2^{(E)} - \sin i_{\mathbb{C}}\, \mathbf{q}_3^{(E)}\right) + \\ &\quad + \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} - \cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} + \cos i_{\mathbb{C}}\, \dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \;. \end{aligned} \tag{29.115}$$

Da die beiden Systeme orthonormiert sind können die Variationen der Basisvektoren auch in der Form der *Frenet*schen Formeln geschrieben werden. Um sie herzuleiten werden zunächst

[1] siehe auch Abschnitt 6.3.2 (Band II)

die Basisvektoren des Ekliptiksystems aus dem System (29.107) eingesetzt. Die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)}$ der Basisvektoren des Ekliptiksystems haben bezüglich des $\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}$ – Systems mit dem relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} := \mathbf{D}_{q^{(E)}} - \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} =: D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.116}$$

die *Frenet*schen Formeln

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} = \mathbf{D}_{q^{(E)}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} = \mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} + \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{29.117}$$

In der allgemeingültigen Darstellung der Variationen der Basisvektoren des Mondbahnsystems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.118}$$

hat der absolute Eigenbewegungsvektor dieses System die Darstellung

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}p} + \mathbf{D}_p \quad . \tag{29.119}$$

Damit folgt aus den Variationsgleichungen (29.115) für den relativen Eigenbewegungsvektor des Mondbahnsystems relativ zum Ekliptiksystem

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} := \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D^{j}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}\ \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.120}$$

Die Koeffizienten des relativen Eigenbewegungsvektors des Mondbahnsystems relativ zum Ekliptiksystem lauten dann[1]

$$\begin{aligned} D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}3} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \end{aligned} \tag{29.121}$$

und die zugehörenden *Frenet*schen Formeln mit den Variationen (29.115)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} = {} & \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk3}\, \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk2}\, \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} = {} & -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + (i_{\mathbb{C}})^{\cdot} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk3}\, \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk1}\, \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} = {} & \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - (i_{\mathbb{C}})^{\cdot} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk2}\, \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k}\, a_{Bk1}\, \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.122}$$

Für eine vollständige Aussage der absoluten Eigenbewegung des Mondbahnsystems wird in diesem Zusammenhang die absolute Eigenbewegung des Ekliptiksystems benötigt. Dies kann etwa durch Bezug auf das Erdäquatorsystem erreicht werden, wenn dieses als ein Fundamentalsystem angenommen wird[2].

Der relative Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das Mondbahnsystem kann nach Formel (6.142) berechnet werden:

---

[1] Diese Beziehungen können auch direkt aus den Formeln (6.136) in Abschnitt 6.3.4 (Band II) erhalten werden, wenn die Eulerschen Drehwinkel $A = \Omega_{\mathbb{C}}, B = i_{\mathbb{C}}, C = 0$ eingesetzt werden.

[2] Siehe im nächsten Abschnitt 29.3.3

$$
\begin{aligned}
D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}1} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\cos\Omega_{\mathbb{C}} \\
D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}2} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\sin\Omega_{\mathbb{C}} \\
D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}3} &= -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \qquad .
\end{aligned}
\tag{29.123}
$$

Diese Ausdrücke können auch aus der Zuordnung

$$
\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = -\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} \tag{29.124}
$$

erhalten werden. Wichtig ist hier der richtige Bezug auf das entsprechende Basissystem:

$$
\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}}{}^{j}\mathbf{q}_j^{(E)} = -D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{k}\mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} = -D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{k}\, a_B{}^{j}{}_{k}\,\mathbf{q}_j^{(E)} \qquad . \tag{29.125}
$$

Seien y^i die Komponenten eines heliozentrischen Ortsvektors im $\mathbf{q}_i^{(E)}$ – Ekliptiksystem, gilt wegen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= y^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} \qquad\qquad = y^i\, a_{Bi}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = x_B{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} + y^i\,\dot{\mathbf{q}}_i^{(E)} = \dot{x}_B{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + x_B{}^{j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}
\end{aligned}
\tag{29.126}
$$

für die Transformationen der Komponenten

$$
x_B{}^{j} = a_{Bi}{}^{j}\, y^i \;\;,\;\; y^i = a_B{}^{i}{}_{j}\, x_{\mathbb{C}}{}^{j} \tag{29.127}
$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$
\dot{x}_B{}^{j} = \dot{a}_B{}^{j}\, y^i + a_{Bi}{}^{j}\,\dot{y}^i \quad , \quad \dot{y}^i = \dot{a}_B{}^{i}{}_{j}\, x_B{}^{j} + a_B{}^{i}{}_{j}\,\dot{x}_B{}^{j} \qquad . \tag{29.128}
$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$
\begin{aligned}
x_{B1} &= \;\; y_1\cos\Omega_{\mathbb{C}} \qquad\quad + y_2\sin\Omega_{\mathbb{C}} \\
x_{B2} &= -y_1\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + y_2\cos\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + y_3\sin i_{\mathbb{C}} \\
x_{B3} &= \;\; y_1\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} - y_2\cos\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} + y_3\cos i_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
\tag{29.129}
$$

und für die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Mondbahnsystem

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{B1} &= \;\; \dot{y}_1\cos\Omega_{\mathbb{C}} \qquad + \dot{y}_2\sin\Omega_{\mathbb{C}} + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\,\left(-y_1\sin\Omega_{\mathbb{C}} + y_2\cos\Omega_{\mathbb{C}}\right) \\
\dot{x}_{B2} &= -\dot{y}_1\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + \dot{y}_2\cos\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + \dot{y}_3\sin i_{\mathbb{C}} - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\; x_{B1}\cos i_{\mathbb{C}} + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} x_{B3} \\
\dot{x}_{B3} &= \;\; \dot{y}_1\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} - \dot{y}_2\cos\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} + \dot{y}_3\cos i_{\mathbb{C}} + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\; x_{B1}\sin i_{\mathbb{C}} - \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} x_{B2} \qquad .
\end{aligned}
\tag{29.130}
$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{B1}\cos\Omega_{\mathbb{C}} - x_{B2}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + x_{B3}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} \\
y_2 &= x_{B1}\sin\Omega_{\mathbb{C}} + x_{B2}\cos\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} - x_{B3}\cos\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} \\
y_3 &= \qquad\qquad + x_{B2}\sin i_{\mathbb{C}} \qquad\qquad + x_{B3}\cos i_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
\tag{29.131}
$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \dot{x}_{B1}\cos\Omega_{\mathbb{C}} - \dot{x}_{B2}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + \dot{x}_{B3}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, y_2 + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} y_3 \sin\Omega_{\mathbb{C}} \\
\dot{y}_2 &= \dot{x}_{B1}\sin\Omega_{\mathbb{C}} + \dot{x}_{B2}\cos\Omega_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} - \dot{x}_{B3}\cos\Omega_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\, y_1 - \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} y_3 \cos\Omega_{\mathbb{C}} \qquad (29.132) \\
\dot{y}_3 &= \qquad\qquad \dot{x}_{B2}\sin i_{\mathbb{C}} \qquad\quad + \dot{x}_{B3}\cos i_{\mathbb{C}} + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot}\left(x_{B2}\cos i_{\mathbb{C}} - x_{B3}\sin i_{\mathbb{C}}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Es seien $r\left[l, b\right]$ die Polarkoordinaten eines Ortes im Ekliptiksystem, $r\left[l_B, b_B\right]$ im Mondbahnsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l, b\right] \;=\; r\left[l_B, b_B\right] \qquad (29.133)$$

mit den Formeln (29.129) und (29.131) oder direkt aus Bild 29-4 auf S. 616 die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos l_B \cos b_B &= \cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos b \\
\sin l_B \cos b_B &= \sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos b\cos i_{\mathbb{C}} + \sin b \sin i_{\mathbb{C}} \qquad (29.134) \\
\sin b_B &= -\sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos b\sin i_{\mathbb{C}} + \sin b\cos i_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos b &= \cos l_B \cos b_B \\
\sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos b &= \sin l_B \cos b_B \cos i_{\mathbb{C}} - \sin b_B \sin i_{\mathbb{C}} \qquad (29.135) \\
\sin b &= \sin l_B \cos b_B \sin i_{\mathbb{C}} + \sin b_B \cos i_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

mit den Variationen relativ zum Mondbahnsystem

$$\begin{aligned}
\left(l_B\right)^{\cdot}\cos b_B \;=\; & \left(\left(l\right)^{\cdot} - \dot{\Omega}\right)\cos b\left[\sin\left(l-\Omega\right)\sin l_B + \cos\left(l-\Omega\right)\cos i\cos l_B\right] + \qquad (29.136) \\
& + \dot{b}\left[\cos\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin b\sin l_B + \left(-\sin\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin b\cos i_{\mathbb{C}} + \cos b\sin i_{\mathbb{C}}\right)\cos l_B\right] + \\
& + \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot}\;\sin b_B \cos l_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{b}_B \;=\; & \left(\left(l\right)^{\cdot} - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\cos b\left\{-\cos\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin i_{\mathbb{C}}\cos b_B + \right. \\
& \left. + \left[\sin\left(l-\Omega\right)\cos l_B - \cos\left(l-\Omega\right)\cos i\sin l_B\right]\sin b_B\right\} + \qquad (29.137) \\
& + \dot{b}\left\{\left[\sin\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin b\sin i_{\mathbb{C}} + \cos b\cos i_{\mathbb{C}}\right]\cos b_B + \right. \\
& \left. + \left[\cos\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin b\cos l_B + \left(\sin\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin b\cos i_{\mathbb{C}} - \cos b\sin i_{\mathbb{C}}\right)\sin l_B\right]\sin b_B\right\} - \\
& - \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot}\sin l_B
\end{aligned}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned}
\left(l\right)^{\cdot}\cos b \;=\; & \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\cos b \\
& + \left(l_B\right)^{\cdot}\cos b_B\left[\sin l_B \sin\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right) + \cos l_B \cos i_{\mathbb{C}}\cos\left(l-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\right] + \qquad (29.138)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \dot{b}_B \left[\cos l_B \sin b_B \sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) - \left(\sin l_B \sin b_B \cos i_{\mathbb{C}} + \cos b_B \sin i_{\mathbb{C}}\right) \cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \right] - \\
&- \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} \sin b \cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \\
\dot{b} \;=\; &\left(l_B\right)^{\cdot} \cos b_B \left\{ \cos l_B \sin i_{\mathbb{C}} \cos b + \right. \\
&\left. + \left[\sin l_B \cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) - \cos l_B \cos i \sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \right] \sin b \right\} + \\
&+ \dot{b}_B \left\{ \left[-\sin l_B \sin b_B \sin i_{\mathbb{C}} + \cos b_B \cos i_{\mathbb{C}} \right] \cos b + \right. \\
&\left. + \left[\cos l_B \sin b_B \cos\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + \left(\sin l_B \sin b_B \cos i_{\mathbb{C}} + \cos b_B \sin i_{\mathbb{C}}\right) \sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \right] \sin b \right\} + \\
&+ \left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} \sin\left(l - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.139}
$$

BEISPIEL: Der Pol der Mondbahnebene hat die ekliptikale Darstellung

$$
l_{Pol} = \Omega_{\mathbb{C}} + 270^{\circ} \quad , \quad b_{Pol} = 90^{\circ} - i_{\mathbb{C}} \quad , \quad \left(l_{Pol}\right)^{\cdot} = \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \quad , \quad \dot{b}_{Pol} = -\left(i_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot} \quad . \; \blacktriangleleft \tag{29.140}
$$

29.3.3 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Erdäquatorsystem

Die Beschreibung auch interplanetarer Bewegungen erfolgt vorzugsweise im Erdäquatorsystem. Wenn die Bewegung in ekliptikalen Koordinaten bekannt ist, kann sie mit den üblichen Transformationen[1] auf das Erdäquatorsystem bezogen werden. Dieser Vorgang wird im Folgenden kurz angedeutet:

Die Transformation vom Mondbahnsystem in das Erdäquatorsystem kann mit den Entwicklungen im vorhergehenden Abschnitt mit Hilfe des Ekliptiksystems als Zwischenschritt durchgeführt werden[2].

Die Transformation aus dem Ekliptiksystem in das Erdäquatorsystem ist aus Abschnitt 8.2.2 (Band II) bekannt:

$$
\mathbf{q}_j^{(E)} =: a_{Ej}{}^{i} \, \mathbf{p}_i \qquad , \quad \mathbf{p}_i = a_{E}{}^{j}{}_{i} \, \mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.141}
$$

Die Transformationsmatrix und ihre Ableitung lauten

$$
\left(a_{Eji}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \quad , \quad \left(\dot{a}_{Eji}\right) = \dot{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \\ 0 & -\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \end{pmatrix} \quad . \tag{29.142}
$$

Mit der Transformation (29.113) vom Mondbahnsystem in das Ekliptiksystem mit Hilfe der Transformationsmatrix $\left(a_{Bkj}\right)$ aus (29.109) und ihren Ableitungen (29.111) kann die Transformation des Mondbahnsystems in das Erdäquatorsystem durch Kopplung der Einzeltransformationen erhalten werden:

---

[1] in diesem Fall nach Abschnitt 8.2.2 (Band II)

[2] In der Praxis wird man jedoch die Formeln so weit wie möglich zusammenfassen um einen unnötigen Rechenaufwand mit einer möglichen Häufung von Rundungsfehlern weitgehendst zu vermeiden

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = a_B{}^k{}_j \, \mathbf{q}_k^{(E)} = a_B{}^k{}_j \, a_{Ek}{}^i \, \mathbf{p}_i =: c_{Bj}{}^i \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.143}$$

Die Variationen der Basen werden transformiert mit

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \dot{a}_B{}^k{}_j \, a_{Ek}{}^i \, \mathbf{p}_i + a_B{}^k{}_j \, \dot{a}_{Ek}{}^i \, \mathbf{p}_i + a_B{}^k{}_j \, a_{Ek}{}^i \, \dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{29.144}$$

Die Umkehrung lautet

$$\mathbf{p}_i = a_E{}^j{}_i \, \mathbf{q}_j^{(E)} = a_E{}^j{}_i \, a_{Bj}{}^k \, \mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} = c_B{}^k{}_i \, \mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} \tag{29.145}$$

mit den Variationen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}_E{}^j{}_i \, a_{Bj}{}^k \, \mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} + a_E{}^j{}_i \, \dot{a}_{Bj}{}^k \, \mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} + a_E{}^j{}_i \, a_{Bj}{}^k \, \dot{\mathbf{q}}_k^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.146}$$

In der Praxis wird man bestrebt sein, das hier verwendete Erdäquatorsystem als ein Fundamentalsystem annehmen zu können, so dass dann $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ gesetzt werden kann. Im allgemeinen Fall muss jedoch eine Eigenbewegung auch des Erdäquatorsystems im Blick behalten werden und der Eigenbewegungsvektor dieses Systems zumindest formal mitgenommen werden:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{D}_p = D_p{}^j \mathbf{p}_j \quad . \tag{29.147}$$

Der Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das Erdäquatorsystem lautet[1]

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}} = \mathbf{D}_{q^{(E)}} - \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{q^{(E)}p} + \mathbf{D}_p \tag{29.148}$$

der relative Eigenbewegungsvektor nach Formel (8.77)

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}p} = D_{q^{(E)}p}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(E)} = \dot{\varepsilon} \, \mathbf{q}_1^{(E)} \quad , \quad D_{q^{(E)}p1} = \dot{\varepsilon} \ , \ D_{q^{(E)}p2} = D_{q^{(E)}p3} = 0 \quad . \tag{29.149}$$

In der Variation der Basis des Mondbahnsystems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.150}$$

kann der absolute Eigenbewegungsvektor auf das Erdäquatorsystem bezogen werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}p} + \mathbf{D}_p = D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}p}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(E)} + D_p{}^i \, \mathbf{p}_i = D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + D_p{}^i \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.151}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Mondbahnsystems hat somit bezogen auf das Erdäquatorsystem mit Hilfe der Beziehungen (29.145) die Komponenten

$$D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j = D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^j + D_{q^{(E)}p}{}^k \, a_{Bj}{}^k \quad . \tag{29.152}$$

Im Einzelnen erhält man mit Hilfe der Beziehungen (29.121) und (29.149)

$$\begin{aligned} D_{q^{(\mathbb{C})}p1} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot} + \dot{\varepsilon} \cos\Omega_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}p2} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} - \dot{\varepsilon} \cos i_{\mathbb{C}} \sin\Omega_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}p3} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} + \dot{\varepsilon} \sin i_{\mathbb{C}} \sin\Omega_{\mathbb{C}} \quad . \end{aligned} \tag{29.153}$$

Formal kann umgekehrt der relative Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems in Bezug auf das Mondbahnsystem berechnet werden:

---

[1] Aus Abschnitt 8.2.3 (Band II)

$$\mathbf{D}_{pq^{(\mathbb{C})}} = \mathbf{D}_{pq^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = D_{pq^{(E)}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i + D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} = D_{pq^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.154}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems in Bezug auf das Ekliptiksystem lautet nach Formel (8.78) (Band II) mit seinen Komponenten

$$\mathbf{D}_{pq^{(E)}} = -\dot{\varepsilon}\,\mathbf{p}_1 \quad , \quad D_{pq^{(E)}1} = -\dot{\varepsilon} \ , \ D_{pq^{(E)}2} = D_{pq^{(E)}3} = 0 \quad . \tag{29.155}$$

Mit Hilfe der Transformation (29.141) sowie der Komponenten (29.123) und (29.155) ergeben sich die Koeffizienten des relativen Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{pq^{(\mathbb{C})}}$ zu

$$\begin{aligned} D_{pq^{(\mathbb{C})}1} &= -\dot{\varepsilon} - (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\cos\Omega_{\mathbb{C}} \\ D_{pq^{(\mathbb{C})}2} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos\varepsilon + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\sin\varepsilon \\ D_{pq^{(\mathbb{C})}3} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin\varepsilon - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{29.156}$$

Der geozentrische Ortsvektor eines Ortes im Mondbahnsystem habe im Mondbahnsystem sowie im Erdäquatorsystem die Darstellung

$$\mathbf{r} = y^j\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.157}$$

Nach den Formeln (29.143) bzw. (29.145) werden die Koeffizienten transformiert mit

$$\begin{aligned} x^i &= y^j\,a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i = y^j\,c_{Bj}{}^i \\ y^j &= x^i\,a_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i = x^i\,c_B{}^j{}_i \quad . \end{aligned} \tag{29.158}$$

Damit kann dieser Ort auch in geozentrischen Polarkoordinaten Radius r, Rektaszension α, Deklination δ bei Vorgabe des Ortes im Mondbahnsystem beschrieben werden:

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{r}| \\ x_1 &= r\cos\delta\cos\alpha \\ x_2 &= r\cos\delta\sin\alpha \\ x_3 &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{29.159}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden mit (29.158) berechnet aus

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \dot{y}^j\,a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i + y^j\,\dot{a}_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i + y^j\,a_B{}^k{}_j\,\dot{a}_{Ek}{}^i \\ \dot{y}^j &= \dot{x}^i\,a_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i + x^i\,\dot{a}_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i + x^i\,a_E{}^k{}_i\,\dot{a}_{Bk}{}^i \quad . \end{aligned} \tag{29.160}$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten geben die relative Geschwindigkeit des betreffenden Objektes bezüglich des Mondbahnsystems bzw. des Erdäquatorsystems wieder. Der absolute Geschwindigkeitsvektor erfordert die Kenntnis der Eigenbewegung des Mondbahnsystems bzw. des Erdäquatorsystems:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + y^j\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \dot{x}^i\mathbf{p}_i + x^i\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{29.161}$$

Sei der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p = D_p{}^i\,\mathbf{p}_i$ des Erdäquatorsystems bekannt, kann die Eigenbewegung des Mondäquatorsystems mit Hilfe der *Frenet*schen Formeln dieses Systems berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}p} \times \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.162}$$

im Einzelnen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} &= D_{q^{(\mathbb{C})}p3}\,\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(\mathbb{C})}p2}\,\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} + D_p{}^i\,c_{B3i}\,\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - D_p{}^i\,c_{B2i}\,\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} &= -D_{q^{(\mathbb{C})}p3}\,\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(\mathbb{C})}p1}\,\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} - D_p{}^i\,c_{B3i}\,\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + D_p{}^i\,c_{B1i}\,\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} &= D_{q^{(\mathbb{C})}p2}\,\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(\mathbb{C})}p1}\,\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + D_p{}^i\,c_{B2i}\,\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - D_p{}^i\,c_{B1i}\,\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} \quad .
\end{aligned} \tag{29.163}$$

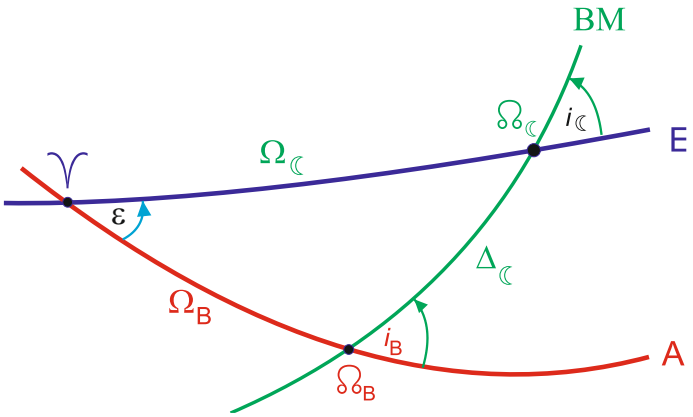


Bild 29-5: Die geometrische Verknüpfung des Mondbahnsystems BM mit dem Erdäquatorsystem A über die Ekliptik E

Um den direkten Bezug des Mondbahnsystems zum Erdäquatorsystem herzustellen werden nach Bild 29-5 die Neigung i_M der Mondbahn sowie die Rektaszension des Knotens Ω_B des aufsteigenden Knotens der Mondbahn gegenüber dem Erdäquator berechnet. Von Interesse ist noch der Abstand $\Delta_{\mathbb{C}}$ der Knoten der Mondbahn mit Ekliptik und Erdäquator. Bekannt seien aus der Mondtheorie neben der (wahren) Ekliptik die ekliptikale Länge $\Omega_{\mathbb{C}}$ der Mondbahn sowie die Neigung $i_{\mathbb{C}}$ gegenüber der Ekliptik. Mit dem Kosinussatz der Winkel kann zunächst die Neigung i_B eindeutig berechnet werden:

$$\cos i_B = -\cos\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \sin\varepsilon + \cos i_{\mathbb{C}} \cos\varepsilon \quad , \quad \sin i_B = \sqrt{1-\sin^2 i_B} \quad . \tag{29.164}$$

Der Sinussatz liefert den Sinus der Winkel Ω_B und $\Delta_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}
\sin\Omega_B \sin i_B &= \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \\
\sin\Delta_{\mathbb{C}} \sin i_B &= \sin\Omega_{\mathbb{C}} \sin\varepsilon \quad .
\end{aligned} \tag{29.165}$$

Diese Größen sind nur für $\sin i_M \neq 0$ definiert, was aber vorausgesetzt werden kann, da sonst auch die Größen Ω_B und $\Delta_{\mathbb{C}}$ nicht existent sind. Weitere Anwendung des Kosinussatz der Winkel ergibt zur eindeutigen Berechnung die noch fehlenden

$$\cos\Omega_B = \frac{\cos i_{\mathbb{C}} - \cos i_B \cos\varepsilon}{\sin i_B \sin\varepsilon} \quad , \quad \cos\Delta_{\mathbb{C}} = \frac{\cos\varepsilon - \cos i_B \cos i_{\mathbb{C}}}{\sin i_B \sin i_{\mathbb{C}}} \quad . \tag{29.166}$$

BEISPIEL: Gegeben[1] seien für eine größenordnungsmäßige Abschätzung die mittleren Zahlenwerte $\overline{i_{\mathbb{C}}} = 5°.145396$, $\overline{\varepsilon} = 23°.439291111$, sowie willkürlich $\Omega_{\mathbb{C}} = 50°$.
Damit ergeben sich die Werte $i_B = 27°.0192325$, $\Omega_B = 8°.698123$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 42°.125021$. ◀

[1] Aus Tabelle 29-2 auf Seite 582, sowie die Schiefe der Ekliptik aus Abschnitt E.3 (Band V)

29.4 Das Äquatorsystem des Mondes

29.4.1 Ausrichtung des Äquatorsystems

Die Kartographie der Mondoberfläche erfolgt in einem körperfesten $\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})}$ – Äquatorsystem. Dieses ist im Gegensatz zu den Planeten wie auch der Erde durch die Triaxialität des Mondkörpers ausgezeichnet. Die Achse des größten Drehmomentes ist die Rotationsachse und definiert die Polachse. Der entsprechende Richtungsvektor $\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})}$ ist zum Nordpol gerichtet, der auf derselben Seite der Ekliptik wie der Nordpol der Ekliptik angenommen wird. Der $\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}$ – Richtungsvektor ist als Folge der gebundenen Rotation des Mondes stets im Mittel auf die Erde ausgerichtet. Allerdings ist der so definierte Ursprung auf der Mondoberfläche normalerweise nicht der subterrestrische Punkt, wenn dieser als der erdnächste Punkt definiert ist. In diesem Punkt steht die Erde genau im Zenit über dem Mondhorizont. Der subterrestrische Punkt muss stets in der Mondbahnebene liegen. Infolgedessen treffen subterrestrischer Punkt und Ursprung nur dann zusammen, wenn sich der Mond in einem Knoten seiner Bahn befindet. Das trifft nur zweimal während eines siderischen Umlaufs zu. Siehe hierzu im Vergleich Bild 29-7 und Bild 29-8 auf Seite 628. Die dritte Koordinate $\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}$ des Mondäquatorsystems liegt in der Mond-Äquatorebene in Richtung der Rotation des Mondes: $\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} = \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \times \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}$.

Nach dem ersten Gesetz von *Cassini* rotiert der Mond um seine Rotationsachse mit der mittleren siderischen Bewegung in seiner Bahn bei Bezug auf die Erde. Zur Berechnung wird jedoch die mittlere geometrische Länge $L_{\mathbb{C}}$ nach Formel (29.4) (auf Seite 585) verwendet, die auf den Frühlingspunkt bezogen wird. Die entsprechende mittlere Bewegung ist somit eine tropische Bewegung.

Um das Äquatorsystem des Mondes an die Ekliptik anschließen zu können, werden die drei Eulerschen Winkel Ψ als die ekliptikale Länge des absteigenden Knotens des Mondäquators, Θ als die Neigung des Mondäquators gegenüber der Ekliptik und Φ als Abstand des Ursprungs 0 vom absteigenden Knoten verwendet. Wenn die *Cassini*schen Gesetze exakt gelten würden, würden die Mittelwerte dieser Drehwinkel[1] lauten

$$\overline{\Psi} = \Omega_{\mathbb{C}} \;,\; \overline{\Theta} = I \;,\; \overline{\Phi + \Psi} = 180° + L_{\mathbb{C}} \quad . \tag{29.167}$$

Abweichungen von diesen mittleren Werten sind durch die Nutationsbewegungen der Mondachse gegeben, die eine Folge der physikalischen Librationen sind[2]. Mit der physikalischen Libration in Neigung ρ_L, im Knoten σ_L und in Länge τ_L lauten die (wahren) Drehwinkel

$$\Psi = \Omega_{\mathbb{C}} + \sigma_L + \Delta\psi \;,\; \Theta = I + \rho_L \;,\; \Phi = 180° + L_{\mathbb{C}} - \Psi + \tau_L - \sigma_L \quad . \tag{29.168}$$

[1] Bezeichnungsweise nach D. H. ECKHARDT [1981], p. 9; siehe auch in URBAN, S. E. et al. [2012], pp. 429-430

[2] Diese werden in Abschnitt 29.5.2 auf Seite 641 untersucht

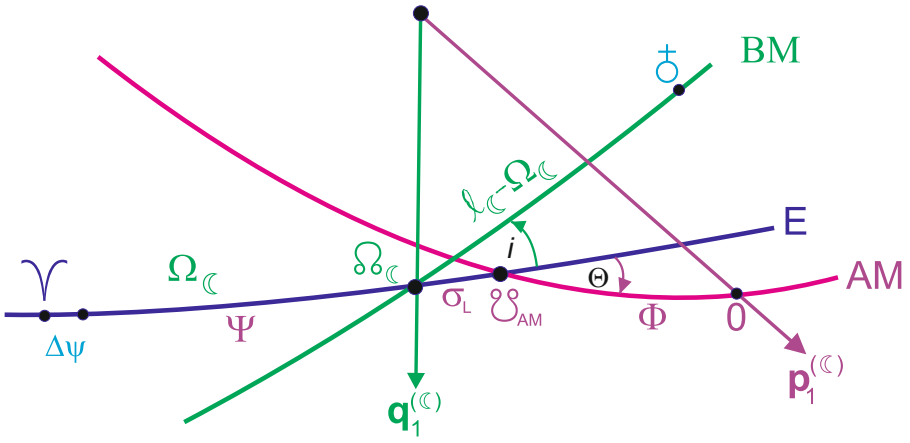


Bild 29-6: Zur Definition der Eulerschen Drehwinkel bei Bezug des Mondäquators auf die Ekliptik sowie die Orientierung des wahren subterrestrischen Punktes ☋ unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen

Zur Berechnung des wahren subterrestrischen Punktes ☋ in der Mondbahnebene (Bild 29-6) muss die wahre geometrische Länge $l_{\mathbb{C}}$ nach der allgemeinen Formulierung (29.49), zumindest in der Näherung (29.52) (auf Seite 598) zur Anwendung kommen[1].

Anmerkung: In Bild 29-6 ist die Verschiebung des Frühlingspunktes um die Nutation in Länge $\Delta\psi$ angedeutet. Diese ist in der wahren Länge des Mondes $l_{\mathbb{C}}$ enthalten (siehe in Formel (29.52) auf Seite 598). ◄

29.4.2 Das selenographische System

Das selenographische System dient zur Orientierung auf der Mondoberfläche. Auf der Erde wird zwischen dem geographischen und dem geozentrischen System. Der Unterschied ist eine Folge der Abplattung. Auch auf dem Mond kann man eine Abplattung messen, die aber erheblich kleiner nämlich etwa 10-mal kleiner als die Erdabplattung ist. Wegen der Triaxialität des Mondes muss auch eine Abplattung des Äquators beachtet werden. Beide Arten von Abplattung sind jedoch so gering, dass es üblich ist, nur die auf den Mondmittelpunkt bezogenen selenozentrischen Koordinaten als selenographische Koordinaten zu verwenden. Die Abplattung wird bei der Orientierung auf dem Mond vernachlässigt[2]. Als Bezugsoberfläche wird eine Kugel mit dem Referenzradius[3] $R_M = 1738.0\,\mathrm{km}$ verwendet. Mit der selenozentrischen Länge λ_M und der selenozentrischen Breite β_M und dem $\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}$ – Basissystem hat ein Ortsvektor eines Punktes auf der Mondoberfläche die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_M &= x_M^j\,\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \\
x_{M1} &= R_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \\
x_{M2} &= R_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \\
x_{M3} &= R_M \sin\beta_M \quad .
\end{aligned} \tag{29.169}$$

[1] siehe die Behandlung in Abschnitt 29.5.3 auf Seite 645

[2] siehe etwa in S. E. URBAN et al. [2012], Section 10.6, pp.427-434

[3] aus Tabelle 29-1 auf Seite 581

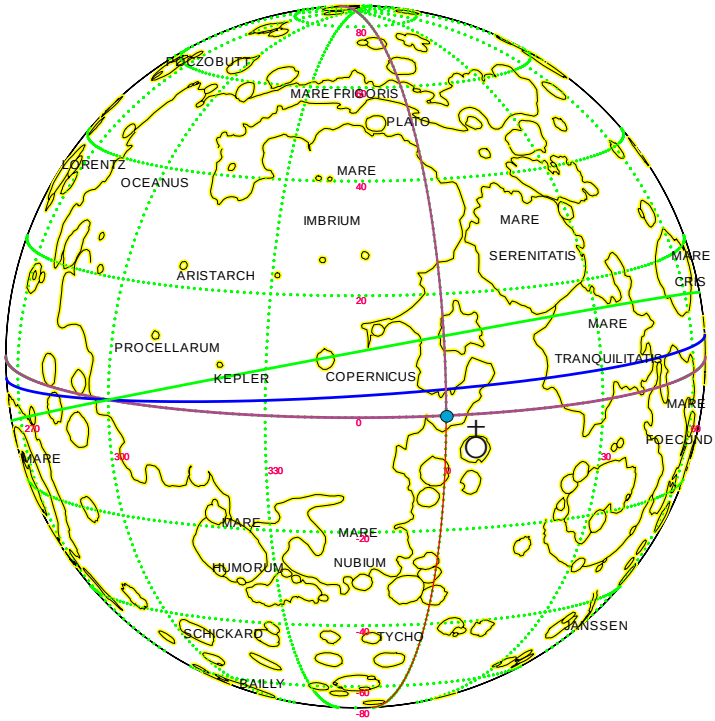


Bild 29-7: Plakative Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes: Äquatorsystem in rot, Ekliptik in blau, Bahnebene in grün. Zur Veranschaulichung sind die Neigungen von Ekliptik (hier 5° statt 1°.5), und der Bahnebene (15° statt 6°.6) überhöht dargestellt. Sichtrichtung der Parallelprojektion in selenographischen Koordinaten: $\lambda_0 = 345°$, $\beta_0 = 10°$. Der aufsteigende Knoten der Bahnebene ist zur selenographischen äquatorialen Länge $\lambda_{\Omega} = 300°$ angenommen. Der mittlere subterrestrische Punkt $(\overset{+}{\bigcirc})$ ist auf dem Mondäquator markiert. Der wahre subterrestrische Punkt befindet sich jedoch auf der (grünen) Mondbahn

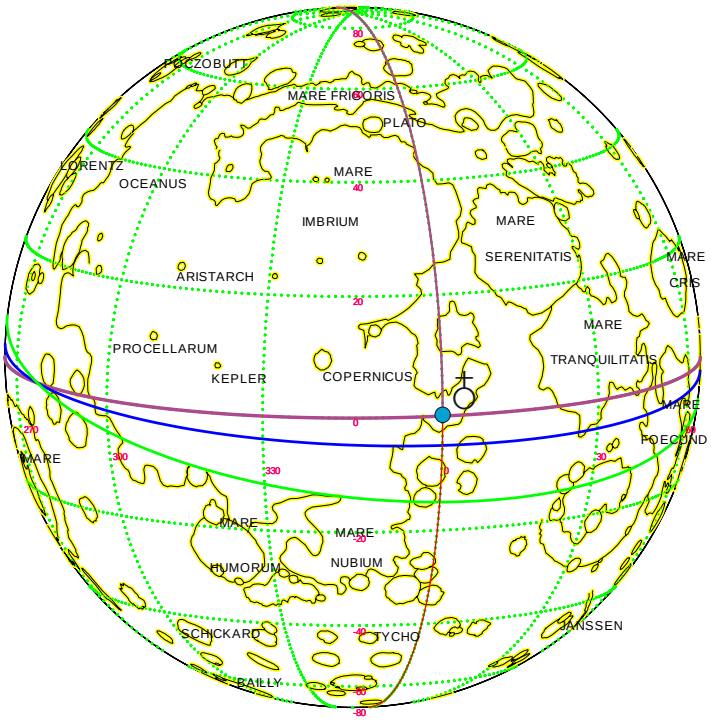


Bild 29-8: Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes wie in Bild 29-7 jedoch mit aufsteigendem Knoten in der äquatorialen Länge $\lambda_{\Omega} = 100°$

Ein Ort über der Mondoberfläche, etwa die momentane Position eines Mondorbiters, lautet entsprechend im Mondäquatorsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M &= x_A{}^j\, \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \\ x_{A1} &= r_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \\ x_{A2} &= r_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \\ x_{A3} &= r_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.170}$$

Die Polarkoordinaten des Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

$$\begin{aligned} r_M &= \sqrt{x_A{}^i\, x_{Ai}} \\ \sin\beta_M &= \frac{x_{A3}}{r_M} \quad , \quad \cos\beta_M = \sqrt{1-\sin^2\beta_M} \\ \cos\lambda_M &= \frac{x_{A1}}{r_M \cos\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \\ \sin\lambda_M &= \frac{x_{A2}}{r_M \cos\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.171}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors lautet mit dem Formelsystem (4.123)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{A1} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M} x_1 - \dot{\beta}_M\, x_{A3} \cos\lambda_M - \left(\lambda_M\right)^{\cdot} x_{A2} \\ \dot{x}_{A2} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M} x_{A2} - \dot{\beta}_M\, x_{A3} \sin\lambda_M + \left(\lambda_M\right)^{\cdot} x_{A1} \\ \dot{x}_{A3} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M} x_{A3} + r_M\, \dot{\beta}_M \cos\beta_M \end{aligned} \tag{29.172}$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$\begin{aligned} \dot{r}_M &= \frac{x_A{}^i\, \dot{x}_{Ai}}{r_M} \\ \left(\lambda_M\right)^{\cdot} &= \frac{x_{A1}\, \dot{x}_{A2} - x_{A2}\, \dot{x}_{A1}}{r_M^2 \cos^2\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \\ \dot{\beta}_M &= \frac{1}{r_M^2}\left[\left(x_{A3}\, \dot{x}_{A1} - x_1\, \dot{x}_{A3}\right)\cos\lambda_M - \left(x_2\, \dot{x}_{A3} - x_{A3}\, \dot{x}_{A2}\right)\sin\lambda_M\right] \quad , \quad \left(r_M > 0\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.173}$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{x}_A{}^i\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + x_A{}^i\, \dot{\mathbf{p}}_{ij}^{(\mathbb{C})} = \dot{\mathbf{r}}_{p^{(\mathbb{C})}} + \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{r}_M \ . \tag{29.174}$$

berechnen zu können, müssen zuvor die Variationen $\dot{\mathbf{p}}_j^{(\mathbb{C})}$ bzw. der (absolute) Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System erhalten werden. Ein solches

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt 8.2.1 (Band II)

System kann im Fall des Mondes das Ekliptiksystem oder das geozentrische Frühlingspunkt-bezogene (d.h. bewegliche) Äquatorsystem sein.

29.4.3 Äquatorsystem des Mondes und Ekliptik

Um vom Ekliptiksystem in das Mond-Äquatorsystem mit den Formeln aus Abschnitt 6.3.2 (Band II) transformieren zu können, muss – entsprechend der Terminologie in den Beziehungen (29.167) und (29.168) - vom Frühlingspunkt zum aufsteigenden Knoten des Mondäquators um den Winkel $\Psi + 180°$ gedreht werden. Die Drehung in die Äquatorebene erfolgt um die Neigung Θ, und längs der Äquatorebene zum Anfangspunkt des Äquators wird schließlich um den Winkel $\Phi + 180° = L_{\mathbb{C}} - \Psi + 180°$ zum Ursprung des Mond-Äquatorsystems gedreht. Die Zuordnungen lauten somit

$$A := \Psi + 180° \; , \; B := \Theta \; , \; C := \Phi + 180° = L_{\mathbb{C}} - \Psi + 180° \quad . \tag{29.175}$$

Das $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$ – Äquator-System des Mondes hat in Bezug auf das $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik- System die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} = {} & \mathbf{q}_1^{(E)} \left(-\cos\Theta \sin\Phi \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi \right) + \\ & + \mathbf{q}_2^{(E)} \left(\cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi \right) - \\ & - \mathbf{q}_3^{(E)} \sin\Theta \sin\Phi \end{aligned} \tag{29.176}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} = {} & \mathbf{q}_1^{(E)} \left(-\cos\Theta \cos\Phi \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi \right) + \\ & + \mathbf{q}_2^{(E)} \left(\cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi \right) - \\ & - \mathbf{q}_3^{(E)} \sin\Theta \cos\Phi \end{aligned} \tag{29.177}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} = {} & -\mathbf{q}_1^{(E)} \sin\Theta \sin\Psi + \\ & + \mathbf{q}_2^{(E)} \sin\Theta \cos\Psi + \\ & + \mathbf{q}_3^{(E)} \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.178}$$

In der Transformation

$$\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = a_{Ai}{}^{j} \, \mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.179}$$

lauten somit die Koeffizienten der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} a_{A11} &= -\cos\Theta \sin\Phi \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi \\ a_{A12} &= \cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi \\ a_{A13} &= -\sin\Theta \sin\Phi \\ a_{A21} &= -\cos\Theta \cos\Phi \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi \\ a_{A22} &= \cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi \\ a_{A23} &= -\sin\Theta \cos\Phi \\ a_{A31} &= -\sin\Theta \sin\Psi \\ a_{A32} &= \sin\Theta \cos\Psi \\ a_{A33} &= \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.180}$$

Die Matrix $(b_{Ak}{}^{j})$ der Umkehrabbildung ist nach Formel (6.30) im Falle orthonormalisierter Systeme die zu $(a_{Aj}{}^{k})$ transponierte Matrix

$$b_{Ak}{}^{j} = a_{A}{}^{k}{}_{j} \quad , (\text{wenn } \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \cdot \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad . \tag{29.181}$$

Daher lautet in diesem Fall die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(E)} = a_{A}{}^{i}{}_{j}\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \quad , \quad (\text{wenn } \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad , \tag{29.182}$$

ausführlich

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(E)} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} (-\cos\Theta \sin\Psi \sin\Phi + \cos\Psi \cos\Phi) + \\ &+ \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} (-\cos\Theta \sin\Psi \cos\Phi - \cos\Psi \sin\Phi) - \\ &- \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \sin\Theta \sin\Psi \end{aligned} \tag{29.183}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2^{(E)} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} (\cos\Theta \cos\Psi \sin\Phi + \sin\Psi \cos\Phi) + \\ &+ \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} (\cos\Theta \cos\Psi \cos\Phi - \sin\Psi \sin\Phi) + \\ &+ \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \sin\Theta \cos\Psi \end{aligned} \tag{29.184}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_3^{(E)} &= -\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \sin\Theta \sin\Phi - \\ &- \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \sin\Theta \cos\Phi + \\ &+ \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.185}$$

Für einen beliebigen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_M = x_A{}^{i}\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = y^j\, \mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.186}$$

transformieren sich die Koordinaten bei einer Transformation zwischen orthonormierten Systemen entsprechend den Formeln (6.36) und (6.37) nach

$$\begin{aligned} y^j &= a_{Ai}{}^{j}\, x_A{}^{i} \quad , \\ x_A{}^{i} &= a_{A}{}^{i}{}_{j}\, y^j \quad , \quad (\text{wenn } \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \cdot \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad . \end{aligned} \tag{29.187}$$

Die Variationen der Koeffizienten der Transformationsmatrix können aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{a}_{A11} &= -\dot{\Theta} a_{A31} \sin\Phi + \dot{\Phi} a_{A21} - \dot{\Psi} a_{A12} \\ \dot{a}_{A12} &= -\dot{\Theta} a_{A32} \sin\Phi + \dot{\Phi} a_{A22} + \dot{\Psi} a_{A11} \\ \dot{a}_{A13} &= -\dot{\Theta} a_{A33} \sin\Phi + \dot{\Phi} a_{A23} \\ \dot{a}_{A21} &= -\dot{\Theta} a_{A31} \cos\Phi - \dot{\Phi} a_{A11} - \dot{\Psi} a_{A22} \\ \dot{a}_{A22} &= -\dot{\Theta} a_{A32} \cos\Phi - \dot{\Phi} a_{A12} + \dot{\Psi} a_{A21} \\ \dot{a}_{A23} &= -\dot{\Theta} a_{A33} \cos\Phi - \dot{\Phi} a_{A13} \\ \dot{a}_{A31} &= -\dot{\Theta} a_{A33} \sin\dot{\Theta} - \dot{\Psi} a_{A32} \\ \dot{a}_{A32} &= \dot{\Theta} a_{A33} \cos\Psi + \dot{\Psi} a_{A31} \\ \dot{a}_{A33} &= -\dot{\Theta} \sin\Theta \end{aligned} \tag{29.188}$$

berechnet werden. Ausführlich lauten diese Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{A11} &= \dot{\Theta}\sin\Theta\sin\Psi\sin\Phi - \\
&\quad -\dot{\Phi}\left(\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi+\sin\Phi\cos\Psi\right) - \\
&\quad -\dot{\Psi}\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi+\cos\Phi\sin\Psi\right) \\
\dot{a}_{A12} &= -\dot{\Theta}\cos\Psi\,\sin\Theta\,\sin\Phi + \\
&\quad +\dot{\Phi}\left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi-\sin\Phi\sin\Psi\right) + \\
&\quad +\dot{\Psi}\left(-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi+\cos\Phi\cos\Psi\right) \\
\dot{a}_{A13} &= -\dot{\Theta}\cos\Theta\sin\Phi+\dot{\Phi}\sin\Theta\,\cos\Phi \\
\dot{a}_{A21} &= \dot{\Theta}\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \\
&\quad -\dot{\Phi}\left(-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi+\cos\Phi\cos\Psi\right) - \\
&\quad -\dot{\Psi}\left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi-\sin\Phi\sin\Psi\right) \\
\dot{a}_{A22} &= -\dot{\Theta}\cos\Psi\,\sin\Theta\,\cos\Phi - \\
&\quad -\dot{\Phi}\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi+\cos\Phi\sin\Psi\right) - \\
&\quad -\dot{\Psi}\left(\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi+\sin\Phi\cos\Psi\right) \\
\dot{a}_{A23} &= -\dot{\Theta}\cos\Theta\,\cos\Phi+\dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Phi \\
\dot{a}_{A31} &= -\dot{\Theta}\sin\Psi\,\cos\Theta-\dot{\Psi}\cos\Psi\sin\Theta \\
\dot{a}_{A32} &= \dot{\Theta}\cos\Theta\,\cos\Psi-\dot{\Psi}\sin\Psi\sin\Theta \\
\dot{a}_{A33} &= -\dot{\Theta}\sin\Theta
\end{aligned}
\tag{29.189}
$$

Sofern diese Variationen bekannt sind, können die Transformationen der Variationen der Basen im Fall von Orthonormie aus

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} = \dot{a}_{Ai}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} + a_{Ai}{}^{j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} \quad , \\
&\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} = \dot{a}_{Ai}^{j}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_{Ai}^{j}\,\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} = \delta_{ij})
\end{aligned}
\tag{29.190}
$$

erhalten werden. Die Geschwindigkeitskomponenten eines relativen Geschwindigkeitsvektors unterliegen nach den Formeln (29.190), sowie (6.39) und (6.40) den Transformationen

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}^{j} = \dot{a}_{Aj}{}^{i}\,x_A{}^{i} + a_{Aj}{}^{i}\,\dot{x}_A{}^{i} \quad , \\
&\dot{x}_A{}^{i} = \dot{a}_{A\,j}{}^{i}\,y^{j} + a_{A\,j}{}^{i}\,\dot{y}^{j} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} = \delta_{ij}) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.191}
$$

Wenn die absoluten System - Variationsparameter $\left(p_i^{(\mathbb{C})j}\right)$ des $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}-$Systems und $\left(q_i^{(E)j}\right)$ des $\mathbf{q}_j^{(E)}-$Systems bekannt sind, können die Variationen der Transformationsmatrix $\left(a_i^{\,j}\right)$ entsprechend Formel (4.211) aus der Tensorgleichung[1]

$$
\dot{a}_{Aj}{}^{k} = p^{(\mathbb{C})}{}_{j}{}^{i}\,a_{Ai}{}^{k} - a_{Aj}{}^{i}\,q_i^{(E)k} \tag{29.192}
$$

berechnet werden. Die Transformationsmatrix $\left(a_i^{\,j}\right)$ mit ihren Ableitungen ist somit verantwortlich für den relativen Bezug zwischen den beiden Systemen mit ihren absoluten Eigen-

[1] Abschnitt 4.3.12 (Band II)

bewegungsvektoren $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D^{(\mathbb{C})\,i}_{p^{(\mathbb{C})}}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i$ und $\mathbf{D}_{q^{(E)}} = D^{(E)\,j}_{q^{(E)}}\,\mathbf{q}^{(E)}_j$. Über die Variationsgleichungen (29.188) können in diesem Fall auch die Variationen der Rotationswinkel $\dot\Psi, \dot\Theta, \dot\Phi$ auf die Variationsparameter zurückgeführt werden. Im Fall von Orthonormalsystemen $\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i$, $\mathbf{q}^{(E)}_j$ lauten die Variationsausdrücke

$$\begin{aligned}
\dot\Theta = \;& p^{(\mathbb{C})}_{31}\sin\Phi - p^{(\mathbb{C})}_{32}\cos\Phi + q^{(E)}_{31}\sin\Psi + q^{(E)}_{23}\cos\Psi \\
\dot\Psi\sin\Theta = -\,& p^{(\mathbb{C})}_{31}\cos\Phi - p^{(\mathbb{C})}_{32}\sin\Phi - q^{(E)}_{12}\sin\Theta + (q^{(E)}_{31}\cos\Psi - q^{(E)}_{23}\sin\Psi)\cos\Theta \\
\dot\Phi\sin\Theta = -\,& q^{(E)}_{31}\cos\Psi + q^{(E)}_{23}\sin\Psi + p^{(\mathbb{C})}_{12}\sin\Theta + (p^{(\mathbb{C})}_{31}\cos\Phi + p^{(\mathbb{C})}_{23}\sin\Phi)\cos\Theta\ .
\end{aligned} \tag{29.193}$$

Da die Variationsparameter $\left(p^{(\mathbb{C})\,j}_i\right)$ und $\left(q^{(E)\,j}_i\right)$ nach den Formeln (4.230) zugleich die Komponenten des jeweiligen absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D^{(\mathbb{C})i}_{p^{(\mathbb{C})}}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i$, $\mathbf{D}_{q^{(E)}} = D^{(E)\,j}_{q^{(E)}}\,\mathbf{q}^{(E)}_j$ sind

$$\begin{aligned}
p^{(\mathbb{C})}_{23} &= D^{(\mathbb{C})}_{p1}\ ,\ p^{(\mathbb{C})}_{31} = D^{(\mathbb{C})}_{p2}\ ,\ p^{(\mathbb{C})}_{12} = D^{(\mathbb{C})}_{p3}\ , \\
q^{(E)}_{23} &= D^{(E)}_{q1}\ ,\ q^{(E)}_{31} = D^{(E)}_{q2}\ ,\ q^{(E)}_{12} = D^{(E)}_{q3}\ ,
\end{aligned} \tag{29.194}$$

können die Variationen der Drehwinkel $\dot\Psi, \dot\Theta, \dot\Phi$ bei einer Rotation orthonormierter Systeme auch in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot\Theta = -\,& D^{(\mathbb{C})}_{p1}\cos\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p2}\sin\Phi + D^{(E)}_{q1}\cos\Psi + D^{(E)}_{q1}\sin\Psi \\
\dot\Psi\sin\Theta = -\,& D^{(\mathbb{C})}_{p1}\sin\Phi - D^{(\mathbb{C})}_{p2}\cos\Phi - D^{(E)}_{q1}\cos\Theta\sin\Psi + D^{(E)}_{q2}\cos\Theta\cos\Psi - D^{(E)}_{q3}\sin\Theta \\
\dot\Phi\sin\Theta = \;& D^{(E)}_{q1}\sin\Psi - D^{(E)}_{q2}\cos\Psi + D^{(\mathbb{C})}_{p1}\cos\Theta\sin\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p2}\cos\Theta\cos\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p3}\sin\Theta\ .
\end{aligned} \tag{29.195}$$

Die beiden in der $\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i-$ Äquatorebene des Mondes gelegenen Vektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ des Knotensystems können in den beiden $\mathbf{q}^{(E)}_j-$ und $\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i-$ Basissystemen dargestellt werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= -\mathbf{q}^{(E)}_1\cos\Psi - \mathbf{q}^{(E)}_2\sin\Psi &&= -\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_1\cos\Phi + \mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_2\sin\Phi \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{q}^{(E)}_1\cos\Theta\sin\Psi - \mathbf{q}^{(E)}_2\cos\Theta\cos\Psi + \mathbf{q}^{(E)}_3\sin\Theta &&= -\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_1\sin\Phi - \mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_2\cos\Phi\ ,
\end{aligned} \tag{29.196}$$

ferner der in der ursprünglichen Äquatorebene zu $\mathbf{k}_1$ rechtwinklig entfernte Vektor $\mathbf{h}_2$ durch

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{p}_1\sin\Psi - \mathbf{p}_2\cos\Psi = -\mathbf{q}^{(\mathbb{C})}_1\cos\Theta\sin\Phi + \mathbf{q}^{(\mathbb{C})}_2\cos\Theta\cos\Phi - \mathbf{q}^{(\mathbb{C})}_3\sin\Theta\ . \tag{29.197}$$

Damit können die Variationsgleichungen (29.195) mit Hilfe des relativen Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}_i$-Systems bei Bezug auf das $\mathbf{q}^{(E)}_j-$Ekliptik-System auch in der überraschend einfachen Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot\Theta &= \left(\mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}^{(E)}_{q^{(E)}}\right)\cdot\mathbf{k}_1 = \mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}\cdot\mathbf{k}_1 = -D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_1}\cos\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_2}\sin\Phi \\
\dot\Psi\sin\Theta &= \left(\mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}^{(E)}_{q^{(E)}}\right)\cdot\mathbf{k}_2 = \mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}\cdot\mathbf{k}_2 = -D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_1}\sin\Phi - D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_2}\cos\Phi \\
\dot\Phi\sin\Theta &= -\left(\mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}^{(E)}_{q^{(E)}}\right)\cdot\mathbf{h}_2 = -\mathbf{D}^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}\cdot\mathbf{h}_2 = \\
&= D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_1}\cos\Theta\sin\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_2}\cos\Theta\cos\Phi + D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}{}_3}\sin\Theta\ .
\end{aligned} \tag{29.198}$$

Unter der Annahme, dass die Variationen $\dot{\Psi},\dot{\Theta},\dot{\Phi}$ der Rotationswinkel bekannt sind, etwa über die Zuweisungen (29.167) und (29.168) mit Hilfe der Entwicklungen in Abschnitt 29.1.6 (ab Seite 596) sowie der Nutation in Länge[1] und den physikalischen Librationen[2] können aus diesen Beziehungen die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors des Mondäquatorsystems zur Ekliptik

$$\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} := \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})\,i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}^{(E)\,j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} = D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}^{(\mathbb{C})}{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \tag{29.199}$$

berechnet werden[3]:

$$\begin{aligned} D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1}^{(\mathbb{C})} &= -\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi - \dot{\Theta}\cos\Phi \\ D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2}^{(\mathbb{C})} &= -\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi + \dot{\Theta}\sin\Phi \\ D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}3}^{(\mathbb{C})} &= \quad \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}\ . \end{aligned} \tag{29.200}$$

Für die Variationen der Rotationswinkel ist somit das Skalarprodukt aus der Differenz der Drehwinkel der beiden Systeme, d.h. dem relativen Eigenbewegungsvektor, mit einem Vektor des Knotensystems des alten bzw. des neuen Basissystems verantwortlich.

Mit diesen Variationsgleichungen, es handelt sich wieder um *Euler*sche kinematische Gleichungen, wird die relative Bewegung der zwei orthonormierten geradlinigen Koordinatensysteme $\left(\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})},\mathbf{q}_j^{(E)}\right)$ im dreidimensionalen Raum relativ zueinander beschrieben.

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Mondäquatorsystems kann mit Hilfe des Ekliptiksystems und mit der Transformation (29.182) dargestellt werden:

$$\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} = \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{i}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A\,j}{}^{i}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} \quad . \tag{29.201}$$

Die Komponenten $D_{q^{(E)}\,j}$ des absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{q^{(E)}}$ des Ekliptiksystems müssen hier als bekannt angenommen werden. In der Praxis werden sie üblicherweise auf ein als fundamental gewähltes Erdäquatorsystem bezogen[4].

Die zugehörenden *Frenet*schen Formeln des Mondäquatorsystems haben dann die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1^{(\mathbb{C})} = {} & \left(\dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}\right)\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} + \left(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi\right)\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} + \\ & + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A3\,j}\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \qquad - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A2\,j}\,\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{p}}_2^{(\mathbb{C})} = {} & -\left(\dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}\right)\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \left(-\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi - \dot{\Theta}\cos\Phi\right)\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} - \\ & - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A3\,j}\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \qquad + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A1\,j}\,\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{p}}_3^{(\mathbb{C})} = {} & -\left(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi\right)\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \left(\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi + \dot{\Theta}\cos\Phi\right)\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} + \\ & + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A2\,j}\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \qquad - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A1\,j}\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.202}$$

---

[1] Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] Abschnitt 29.5.2 auf Seite 641

[3] vgl. etwa die generelle Darstellung in Formel (6.136) (Band II)

[4] siehe etwa in Abschnitt 8.2.3 (Band II)

Die kinematischen Gleichungen (29.200) können auch direkt erhalten werden, wenn die in den Zuordnungen (29.175) definierten Winkel in das System (6.136) eingesetzt werden[1]. Entsprechend lautet die Umkehrung nach (6.142)

$$\begin{aligned} D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}1} &= \quad \dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Psi + \dot{\Theta}\cos\Psi \\ D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}2} &= -\dot{\Phi}\sin\Theta\cos\Psi + \dot{\Theta}\sin\Psi \\ D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}3} &= -\dot{\Phi}\cos\Theta - \dot{\Psi} \quad . \end{aligned} \tag{29.203}$$

Von Interesse sind auch die Abhängigkeiten eines Ortsvektors von den Winkeln der räumlichen Orientierung. Man erhält[2] aus den Beziehungen (29.186) und (29.187) mit den Parametern (29.180)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Psi} &= \mathbf{q}_3^{(E)} \times \mathbf{r}_M = y_1\,\mathbf{q}_2^{(E)} - y_2\,\mathbf{q}_1^{(E)} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Theta} &= \left(\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\sin\Phi - \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\cos\Phi\right)\times\mathbf{r} = \\ &= x_3^{(\mathbb{C})}\left[\sin\Phi\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \cos\Phi\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\right] - \left[x_{A1}\sin\Phi + x_{A2}\cos\Phi\right]\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Phi} &= -\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})}\times\mathbf{r}_M = x_{A1}\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} - x_{A1}\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \ . \end{aligned} \tag{29.204}$$

Anmerkung: Wenn die Beziehungen zwischen den selenozentrischen Winkelkoordinaten (λ_M, β_M) des Mondäquatorsystems und den selenozentrischen ekliptikalen Winkelkoordinaten benötigt werden, können diese mit Hilfe der Definitionen (29.170) und (29.133) aus den Beziehungen (29.187) hergeleitet werden. Allerdings muss beachtet werden, dass die gegebenen ekliptikalen Koordinaten geozentrisch sind, während sie entsprechenden selenozentrischen Koordinaten sich um $l \to l + 180°, b \to -b$ unterscheiden. ◄

29.4.4 Bezug des Bahnsystems des Mondes auf das Äquatorsystem des Mondes

Für Untersuchungen der Bewegungen des Mondes ist die Ekliptik als die Bezugsebene für die gemeinsame Bewegung des Mondes mit der Erde um die Sonne die Basis. Der Bezug des Bahnsystems des Mondes zum Äquatorsystem des Mondes kann etwa durch Kombination der Beziehungen (29.113) mit (29.182) hergestellt werden:

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = a_B{}^k{}_j\,\mathbf{q}_k^{(E)} = a_B{}^k{}_j\,a_A{}^i{}_k\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} =: a_C{}^i{}_j\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \ . \tag{29.205}$$

Die Transformationen lauten

---

[1] Abschnitt 6.3.4 (Band II)

[2] vgl. z.B. A. DEPRIT [1976], p.256, dort allerdings mit zum Teil anderen Vorzeichen; siehe dazu auch in Abschnitt 6.3.2 (Band II), insbesondere die Formeln (6.112)

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]+\\ &+\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]-\\ &-\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})}\quad\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\end{aligned}\tag{29.206}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]+\\ &+\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\sin i_{\mathbb{C}}\ \cos\Theta\right]\end{aligned}\tag{29.207}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]+\\ &+\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\cos i_{\mathbb{C}}\ \cos\Theta\right]\end{aligned}\tag{29.208}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}a_{C11} &= -\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\\ a_{C12} &= \cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\\ a_{C13} &= -\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\\ a_{C21} &= -\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\\ a_{C22} &= \cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\\ a_{C23} &= -\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\\ a_{C31} &= -\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\\ a_{C32} &= \cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\sin i_{\mathbb{C}}\ \cos\Theta\\ a_{C33} &= -\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\cos i_{\mathbb{C}}\ \cos\Theta\ .\end{aligned}\tag{29.209}$$

Die Umkehrung

$$\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = a_{Ci}{}^{j}\ \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}\tag{29.210}$$

lautet im Einzelnen

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} &= \left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\end{aligned}\tag{29.211}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} &= \left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\end{aligned}\tag{29.212}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} &= -\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}+\\ &+\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\quad .\end{aligned} \tag{29.213}$$

Ein Objekt habe im selenozentrischen Bahnsystem mit den Bezeichnungen (29.100) und folgenden die Darstellung

$$\mathbf{r}_M =: x_{BS}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.214}$$

mit den Polarkoordinaten r_M, l_{BS}, b_{BS} aus

$$\begin{aligned}x_{BS1} &= r_M\cos b_{BS}\cos l_{BS}\\ x_{BS2} &= r_M\cos b_{BS}\sin l_{BS}\\ x_{BS3} &= r_M\sin b_{BS}\quad .\end{aligned} \tag{29.215}$$

Die entsprechende Darstellung im selenozentrischen Äquatorsystem lautet

$$\mathbf{r}_M =: x_A{}^i\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \tag{29.216}$$

mit den Polarkoordinaten r_M, λ_M, β_M aus

$$\begin{aligned}x_{A1} &= r_M\cos\beta_M\cos\lambda_M\\ x_{A2} &= r_M\cos\beta_M\sin\lambda_M\\ x_{A3} &= r_M\sin\beta_M\quad .\end{aligned} \tag{29.217}$$

Für die Transformationen zwischen den Koordinaten der beiden Systeme folgt mit der Zuordnung (29.205)

$$x_A{}^i\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = x_{BS}{}^j\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = x_{BS}{}^j\,a_C{}^i{}_j\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}\quad . \tag{29.218}$$

Im Einzelnen können die äquatorialen Winkelkoordinaten aus den vorgegebenen bahnbezogenen Koordinaten berechnet werden aus

$$\begin{aligned}\cos\lambda_M\cos\beta_M &= \cos l_{BS}\cos b_{BS}\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]+\\ &+\sin l_{BS}\cos b_{BS}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\right.\\ &\left.+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\sin b_{BS}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\right.\\ &\left.-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\end{aligned} \tag{29.219}$$

$$\begin{aligned}\sin\lambda_M\cos\beta_M &= \cos l_{BM}\cos b_{BM}\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]+\\ &+\sin l_{BM}\cos b_{BM}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\right.\\ &\left.-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]+\\ &+\sin_{BM}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\right.\\ &\left.+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]\end{aligned} \tag{29.220}$$

$$\begin{aligned}\sin\beta_M &= \cos l_{BM}\cos b_{BM}\left[-\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\right]+\\ &+\sin l_{BM}\cos b_{BM}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]+\\ &+\cos b_{BM}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]\end{aligned} \quad . \tag{29.221}$$

BEISPIEL: Eine interessante Anwendung dieser Zuordnung ist die Berechnung des wahren subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche (diese wird in Abschnitt 29.5.3 auf Seite 647 untersucht). ◄

In den vorstehenden Formeln ist nach den Zuordnungen (29.168) (auf Seite 626) der Drehwinkel

$$\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}=\sigma_L+\Delta\Psi \tag{29.222}$$

eine kleine Größe. Diese kann bei Näherungsuntersuchungen vernachlässigt werden, was die Formeln wesentlich vereinfacht. Allerdings muss eine solche Näherung immer im Auge behalten werden.

Falls das relative Bewegungsverhalten der beiden Systeme benötigt wird, können die entsprechenden Variationen berechnet werden. Aus den Beziehungen (29.205) (und folgenden) ergeben sich

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}=a_{C\ j}^{\ i}\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}+a_{C\ j}^{\ i}\,\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} \tag{29.223}$$

bzw. die Umkehrung

$$\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})}=\dot{a}_{Ci}^{\ \ j}\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}+a_{Ci}^{\ \ j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.224}$$

Die Elemente der Transformationsmatrix haben die Variationen

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C11} &= \dot\Theta\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\\ &+\left(\dot\Psi-\dot\Omega_{\mathbb{C}}\right)\left[-\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]+\\ &+\dot\Phi\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]\\ \dot{a}_{C12} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\\ &+\dot\Theta\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\left(\dot\Psi-\dot\Omega_{\mathbb{C}}\right)\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]+\\ &+\dot\Phi\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]\\ \dot{a}_{C13} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\dot\Theta\left[\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\sin\Phi\right]+\\ &+\left(\dot\Psi-\dot\Omega_{\mathbb{C}}\right)\left[\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]+\\ &+\dot\Phi\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C21} &= \dot{\Theta}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi \\ &+\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\left[-\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]+ \\ &+\dot{\Phi}\left[\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi\right]\end{aligned} \tag{29.225}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C22} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]+ \\ &+\dot{\Theta}\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\Phi\right]+ \\ &+\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]+ \\ &+\dot{\Phi}\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C23} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\Phi\right]+ \\ &+\dot{\Theta}\left[\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi-\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\Phi\right]+ \\ &+\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\left[\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi\right]+ \\ &+\dot{\Phi}\left[\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\sin\Phi+\sin i_{\mathbb{C}}\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\cos\Phi+\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\Phi\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C31} &= \dot{\Theta}-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)- \\ &-\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C32} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)+\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]+ \\ &+\dot{\Theta}\left[\cos i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)-\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\right]+ \\ &+\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{C33} &= (i_{\mathbb{C}})^{\cdot}\left[-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\right]+ \\ &+\dot{\Theta}\left[-\sin i_{\mathbb{C}}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)-\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\right]+ \\ &+\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\right)\left[\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{\mathbb{C}}\right)\right] \quad .\end{aligned}$$

Um die *Frenet*schen Formeln des Mondäquatorsystems

$$\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \tag{29.226}$$

berechnen zu können, wird der absolute Eigenbewegungsvektor im vorliegenden Zusammenhang in Hinblick auf das Mondbahnsystem entwickelt:

$$\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(\mathbb{C})}} + \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{j}\,a_{c}{}^{i}{}_{j}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.227}$$

Die Koeffizienten des Eigenbewegungsvektors können formal nach den Entwicklungen in Abschnitt 6.3.4 (Band II), insbesondere den Formeln (6.133) und (6.134) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}D_{p^{(\mathbb{C})}1} &= D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(\mathbb{C})}1} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C1i} = \dot{a}_{C2}{}^{i}\,a_{C3i} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C1i} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}2} &= D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(\mathbb{C})}2} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C2i} = \dot{a}_{C3}{}^{i}\,a_{C1i} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C2i} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}3} &= D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(\mathbb{C})}3} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C3i} = \dot{a}_{C1}{}^{i}\,a_{C2i} + D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,a_{C3i} \quad .\end{aligned} \tag{29.228}$$

Die Koeffizienten $D_{q^{(\mathbb{C})}{}_j}$ des absoluten Eigenbewegungsvektors des Mondbahnsystems werden hier als bekannt vorausgesetzt. In der Praxis können sie auf das Ekliptiksystem entsprechend den Beziehungen (29.119) oder auf ein Erdäquatorsystem entsprechend (29.151) (und folgende) als bekannt angenommen werden.

29.4.5 Bezug des Äquatorsystems des Mondes auf das Äquatorsystem der Erde

Der Bezug des Mondäquatorsystems auf das Erdäquatorsystem ist von besonderer Qualität. Dies ist etwa besonders dann unentbehrlich, wenn Punkte auf der Mondoberfläche, die in selenographischen Koordinaten gegeben sind, von einem Ort auf oder über der Erdoberfläche beobachtet werden sollen. Dieser Ort ist in äquatorialen oder darauf bezogenen geographischen oder geozentrischen Koordinaten bekannt.

Die formale Übertragung kann wie im Fall des Mondbahnsystems am durchsichtigsten erfolgen, wenn der Bezug zur Ekliptik bereits hergestellt ist. Mit den Transformationen (29.141), (29.179), (29.182) sowie den Transformationsmatrizen (29.180) und (29.142) lautet die Transformation zwischen Mondäquatorsystem und Erdäquatorsystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} &= a_{Ai}{}^j\, \mathbf{q}_j^{(E)} = a_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k =: a_{Di}{}^k\, \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_k &= a_{E}{}^j{}_k\, \mathbf{q}_j^{(E)} = a_{E}{}^j{}_k\, a_{A}{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = a_{D}{}^i{}_k\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.229}$$

Für die Systemvariationen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} &= \dot{a}_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Ai}{}^j\, \dot{a}_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \dot{\mathbf{p}}_k = \dot{a}_{Di}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Di}{}^k\, \dot{\mathbf{p}}_k \\ \dot{\mathbf{p}}_k &= \dot{a}_{E}{}^j{}_k\, a_{A}{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_{E}{}^j{}_k\, \dot{a}_{A}{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_{E}{}^j{}_k\, a_{A}{}^i{}_j\, \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} = \dot{a}_{D}{}^i{}_k\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_{D}{}^i{}_k\, \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.230}$$

Hierfür sind die Variationen der Transformationsmatrizen aus (29.141), sowie (29.188) bzw. (29.189) bekannt. Die Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} a_{D11} &= -\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi \\ a_{D12} &= \cos\varepsilon\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\sin\Psi\right) + \sin\varepsilon\,\sin\Theta\sin\Phi \\ a_{D13} &= \sin\varepsilon\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\sin\Psi\right) - \cos\varepsilon\,\sin\Theta\sin\Phi \\ a_{D21} &= -\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi \\ a_{D22} &= \cos\varepsilon\left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\right) + \sin\varepsilon\sin\Theta\cos\Phi \\ a_{D23} &= \sin\varepsilon\left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\right) - \cos\varepsilon\sin\Theta\cos\Phi \\ a_{D31} &= -\sin\Theta\,\sin\Psi \\ a_{D32} &= \cos\varepsilon\sin\Theta\,\cos\Psi - \sin\varepsilon\cos\Theta \\ a_{A33} &= \sin\varepsilon\,\sin\Theta\,\cos\Psi + \cos\varepsilon\cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.231}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Mondäquatorsystems kann in den relativen Eigenbewegungsvektor in Bezug auf das Erdäquatorsystem und den absoluten Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems zerlegt werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} = D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^j \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}p} + \mathbf{D}_p = D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j\, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + D_p{}^k\, \mathbf{p}_k \tag{29.232}$$

Die Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors lauten[1] allgemein

$$D_{p^{(\mathbb{C})}i} = D_{p^{(\mathbb{C})}pi} + D_p{}^k a_{Dik} \quad , \tag{29.233}$$

die des relativen Eigenbewegungsvektors

$$\begin{aligned} D_{p^{(\mathbb{C})}p1} &= \dot{a}_{D2}{}^k a_{D3k} = \left(\dot{a}_{A2}{}^j a_{Ej}{}^k + a_{A2}{}^j \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A3}{}^j a_{Ejk} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}p2} &= \dot{a}_{D3}{}^k a_{D1k} = \left(\dot{a}_{A3}{}^j a_{Ej}{}^k + a_{A3}{}^j \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A1}{}^j a_{Ejk} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}p3} &= \dot{a}_{D1}{}^k a_{D2k} = \left(\dot{a}_{A1}{}^j a_{Ej}{}^k + a_{A1}{}^j \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A2}{}^j a_{Ejk} \quad . \end{aligned} \tag{29.234}$$

Ist im selenozentrischen System der Ortsvektor eines Ortes auf der Mondoberfläche oder über dem Mond (Mondorbiter) entsprechend der Definition (29.170) gegeben

$$\mathbf{r}_M = x_A{}^j \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \quad , \tag{29.235}$$

können die kartesischen Koordinaten entsprechend (29.229) transformiert werden

$$x^i = x_A^j a_{Dj}{}^i \quad , \quad x_A^j = x^i a_D{}^j{}_i \quad . \tag{29.236}$$

Anmerkung: Falls der zugehörige Geschwindigkeitsvektor benötigt wird, können die Geschwindigkeitskoordinaten analog den Entwicklungen in den vorstehenden Abschnitten berechnet werden. Der Geschwindigkeitsvektor des Mondmittelpunktes ist aus Abschnitt 29.1.7 auf Seite 601 bekannt, der Geschwindigkeitsvektor des Beobachters etwa aus einem der Abschnitte 8.6, 8.7, 8.8. ◄

29.5 Die Librationen

Beobachtungen der Mondoberfläche zeigen, dass von der Erde aus trotz der gebundenen Rotation des Mondes im Laufe der Zeit etwa 59% der Mondoberfläche zu sehen sind. Dies hat unterschiedliche Ursachen, die eine Folge der Dynamik der Mondrotation, eine Folge der Bahngeometrie (geozentrische optische Librationen) sowie eine Folge des Ortes des Beobachters auf der (oder um die) Erde (topozentrische optische Librationen) sind[2]. Diese „Wackelbewegungen“ des Mondes gegenüber dem Beobachter von der Erde aus werden als Librationen bezeichnen. Sie können durch eine Bewegung des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche um den Mittelpunkt dargestellt werden, wie er durch das erste Gesetz von *Cassini* beschrieben wird.

29.5.1 Geozentrische geometrische Librationen

Zur Berechnung der Librationen werden in einer Mondephemeride die ekliptikalen Länge l_M und die ekliptikale Breite b_M bereitgestellt. Falls keine hochgenaue JPL-Ephemeride zur Verfügung steht, können die Winkelkoordinaten mit den in Abschnitt 29.1.6 (ab Seite 596) bereitgestellten Entwicklungen berechnet werden. Für missionsanalytische Untersuchungen

[1] vgl. (6.133) in Abschnitt6.3.4 (Band II)

[2] siehe etwa in URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2013], pp. 427-428

dürften diese Ergebnisse ausreichend sein. Die mittlere geometrische Länge des Mondortes $L_{☾}$ wird in Formel (29.4), die mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn $\Omega_{☾}$ in Formel (29.18) bereitgestellt. Die Nutation in Länge $\Delta\psi$ ist aus der Entwicklung (9.122) (Band II, Abschnitt 9.4.1) gegeben, die mittlere Inklination des Mondäquators entsprechend dem dritten Gesetz von *Cassini* mit dem Zahlenwert (29.1).

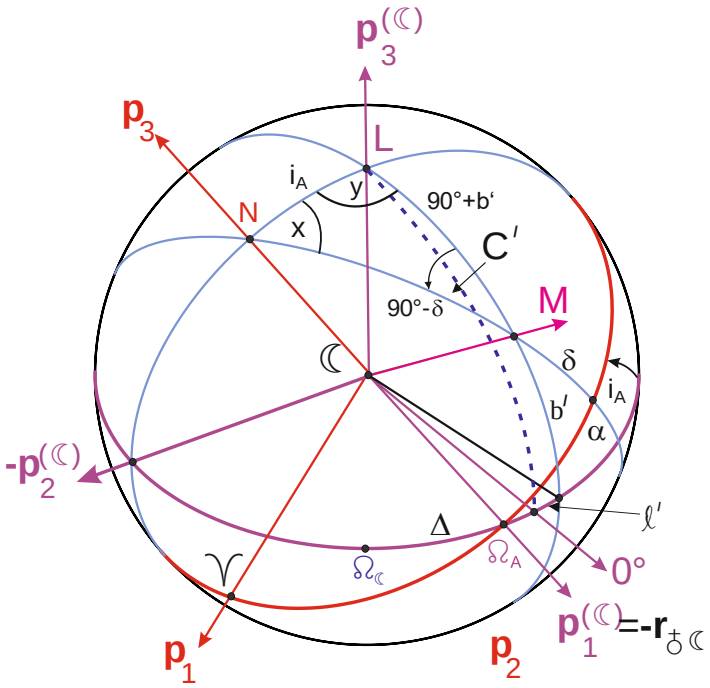


Bild 29-9: Zur Definition der geometrischen Librationen in äquatorialer Länge ℓ', Breite b', Positionswinkel C' bezogen auf den wahren Mondort M. N ist der Nordpol des Erdäquatorsystems („Himmelspol"), L ist der Nordpol des Mondäquatorsystems. Der Nullmeridian des Mondäquatorsystems ist punktiert angedeutet.

Bei der Berechnung der selenozentrischen Librations-Koordinaten (l',b') muss beachtet werden, dass die geozentrisch berechneten ekliptikalen Koordinaten auf das Mondzentrum bezogen in $(180°+l_M,-b_M)$ umgerechnet werden müssen. Dies gilt auch für die geozentrischen äquatorialen Koordinaten (α,δ), die bezogen auf das Mondzentrum mit $(\alpha+180°,-\delta)$ gesetzt werden müssen:

$$\begin{aligned}\cos\left(L_{☾}-\Omega_{☾}+l'\right)\cos b' &= \cos\left(l_M-\Omega_{☾}-\Delta\psi\right)\cos b_M\\ \sin\left(L_{☾}-\Omega_{☾}+l'\right)\cos b' &= \sin\left(l_M-\Omega_{☾}-\Delta\psi\right)\cos b_M\cos I-\sin b_M\sin I\\ \sin b' &= -\sin\left(l_M-\Omega_{☾}-\Delta\psi\right)\cos b_M\sin I-\sin b_M\cos I\end{aligned}\qquad(29.237)$$

Der Positionswinkel C' gibt im wahren Mondort den Winkel zwischen den Richtungen zum Mond-Nordpol und zum Himmelspol (dem Nordpol des Erdäquatorsystems) an. Er kann aus einer der Beziehungen berechnet werden, die mit Hilfe der Innenwinkel x, y im Poldreieck MLN (Bild 29-9) und dem aufsteigenden Knoten Ω_A des Mondäquators mit dem Erdäquator (definiert in Bild 29-5) und dem Zwischenwinkel Δ_A des aufsteigenden Knotens des Mondäquators mit dem Erdäquator und dem absteigenden Knoten des Mondäquators mit der Ekliptik

$$\begin{aligned} x &= -90° + \Omega_M - \alpha \\ y &= \ 90° + L_{\mathbb{C}} - \Omega_{\mathbb{C}} + \Delta_A + l' \end{aligned} \tag{29.238}$$

erstellt werden können:

$$\sin C' = \frac{\sin i_A \cos\left(L_{\mathbb{C}} - \Omega_{\mathbb{C}} + \Delta_A + l'\right)}{\cos\delta} = \frac{-\sin i_A \cos\left(\alpha - \Omega_A\right)}{\cos b'} \quad . \tag{29.239}$$

Für Näherungsrechnungen können mit den Hilfsparametern (A, B, μ) folgende Formeln verwendet werden[1]:

$$\begin{aligned} &\sin\mu := \tan^2\left(\frac{1}{2}I\right)\sin 2\left(L_{\mathbb{C}} - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \\ &A := \sin I \cos\left(L_{\mathbb{C}} - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \quad , \quad \tan B := -\tan I \sin\left(L_{\mathbb{C}} - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \ . \end{aligned} \tag{29.240}$$

Damit können die auf das Erdzentrum bezogenen geometrischen Librationen näherungsweise berechnet werden:

$$b' = B - b_M \quad , \quad l' = l_M + \mu + Ab' - l_{\mathbb{C}} - \Delta\psi \quad . \tag{29.241}$$

29.5.2 Die physikalischen Librationen des Mondes

Ähnlich wie bei der Erde ist die Rotationsachse des Mondes nicht raumfest, sondern unterliegt säkularen und periodischen Änderungen. Entsprechend der Wanderung des Knotens des Mondäquators, der nach der ersten Regel von *Cassini* mit einem Knoten der Mondbahn im Mittel zusammenfällt, vollführt die Mondachse in $P_{\mathbb{C},\Omega} = 18.6$ (julianischen) Jahren einen Umlauf um den Pol der Ekliptik (vgl. die Berechnung in (29.31)). Diese säkulare Bewegung ist, vergleichbar mit der Nutation der Erdachse[2], mit periodischen Variationen überlagert, die als *physikalische Librationen* bezeichnet werden. Sie modifizieren die Cassinischen Regeln, da sie kleine Schwankungen um die Mittelwerte darstellen, welche durch die *Cassini*sche Regeln beschrieben werden. Die physikalischen Librationen sind eine Folge der Triaxialität des Mondes. Sie müssen also bei Beobachtungen auf der Mondoberfläche berücksichtigt werden, da sich auch kleine Abweichungen auf präzise Beobachtungen stark auswirken können.

Die physikalischen Librationen werden dargestellt durch die Größen (Bild 29-10)

σ_L – Libration in Knotenlänge

ρ_L – Libration in Neigung (Inklination des Mondäquators)

τ_L – Libration in Länge (der ersten Achse auf dem Mondäquator)

Die Zahlenwerte der physikalischen Librationen sind sehr klein. Sie haben von der Erde aus beobachtet eine maximale Amplitude von etwa $6''$.

---

[1] aus EXPLANATORY SUPPLEMENT [1961], pp.319

[2] siehe etwa in Green, R. M. [1985], p.434, Abschnitt 17.9

Im Zusammenhang mit einer Satellitenbahnanalyse werden im vorliegenden Abschnitt nur die Berechnungsmethoden zusammengestellt, wie sie zur Beobachtung von Punkten der Mondoberfläche von einer irdischen Bodenstation oder auch von Erdsatelliten aus erforderlich sind.

Die erste Achse des Mondes mit dem Trägheitsmoment A ist im Mittel auf den Erdmittelpunkt ausgerichtet. Die zweite mit Trägheitsmoment B ist entlang der Mondbahn orientiert. Die dritte mit Trägheitsmoment C ist parallel der Rotationsachse des Mondes zur Nordpol des Mondes gerichtet. Die beiden ersten Achsen definieren die Mondäquatorebene. Die drei Achsen unterliegen der Relation $A \le B \le C$. Die auf die Erde ausgerichtete Achse ist die Orientierung der größten Stabilität des Mondes. Die Wechselwirkung der drei Achsen mit der Gravitation durch die Erde verursachen die physikalischen Librationen. Sie zeigen sich in einer Oszillation der ersten Achse, welche im Mittel auf die Erde ausgerichtet ist.

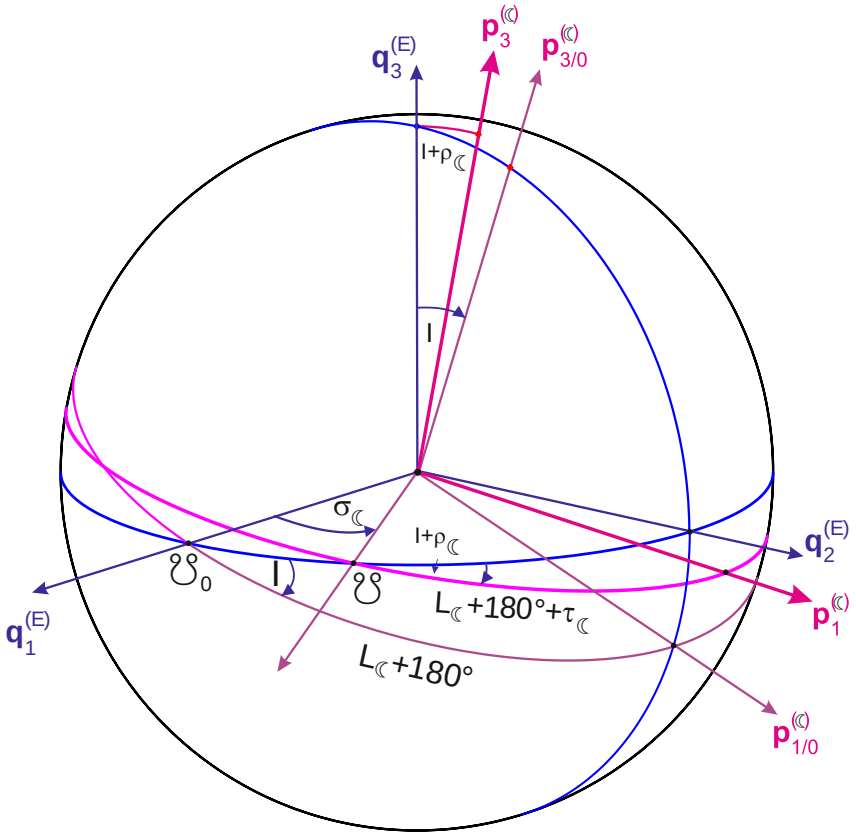


Bild 29-10: Auswirkungen der physikalischen Librationen auf die Orientierung des Mond-Äquatorsystems bei Bezug auf die Ekliptik: dargestellt ist die Orientierung des Mondäquatorsystems im Mittel $\left(\mathbf{p}_{j/0}^{(\mathbb{C})}\right)$ und unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen $\left(\mathbf{p}_{j}^{(\mathbb{C})}\right)$

Die folgenden Entwicklungen gehen auf die Berechnungen von *F. Hayn*[1] zurück, der auf Basis der von ihm eingeführten Parameter $(\sigma_L, \rho_L, \tau_L)$ die physikalischen Librationen in Breite, Länge und Positionswinkel berechnet. Diese Entwicklungen sollten in den meisten Anwendungen auch heute noch nützlich sein. Als Parameter werden neben der mittleren Länge des Mondes $L_{\mathbb{C}}$ und der mittleren Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{\mathbb{C}}$ verwendet

[1] HAYN, F. [1902]; siehe auch in KOPAL, Z. [1966], ch. 4 (pp.24-40); hier auch der Hinweis auf die Arbeit F. W. BESSEL [1839] 'Über die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen'

$\Gamma'_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - M_{\leftmoon}$, die mittlere Länge des Perigäums des Mondes (siehe die Entwicklung (29.9) auf Seite 586) und

$M_{\odot}$, die mittlere Anomalie der Sonne.

Die Entwicklungen lauten allgemein unter Verwendung der Ergebnisse der geozentrischen geometrischen Librationen (b', l', C') bezogen auf das Mondäquatorsystem

$$\delta b = 108'' \sin\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} + l'\right) + 37'' \sin\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right) - 11'' \sin\left(L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right) \tag{29.242}$$

$$\begin{aligned}\delta l = {} & 12'' \sin\left(L_{\leftmoon} - \Gamma'_{\leftmoon}\right) - 18'' \sin 2\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) - 59'' \sin M_{\odot} - \\ & - \left\{108'' \cos\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} + l'\right) - 37'' \cos\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right) + 11'' \cos\left(L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right)\right\} \tan b'\end{aligned} \tag{29.243}$$

$$\delta C = -\left\{108'' \cos\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} + l'\right) - 37'' \cos\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right) + 11'' \cos\left(L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} - l'\right)\right\} \frac{1}{\cos b'} \tag{29.244}$$

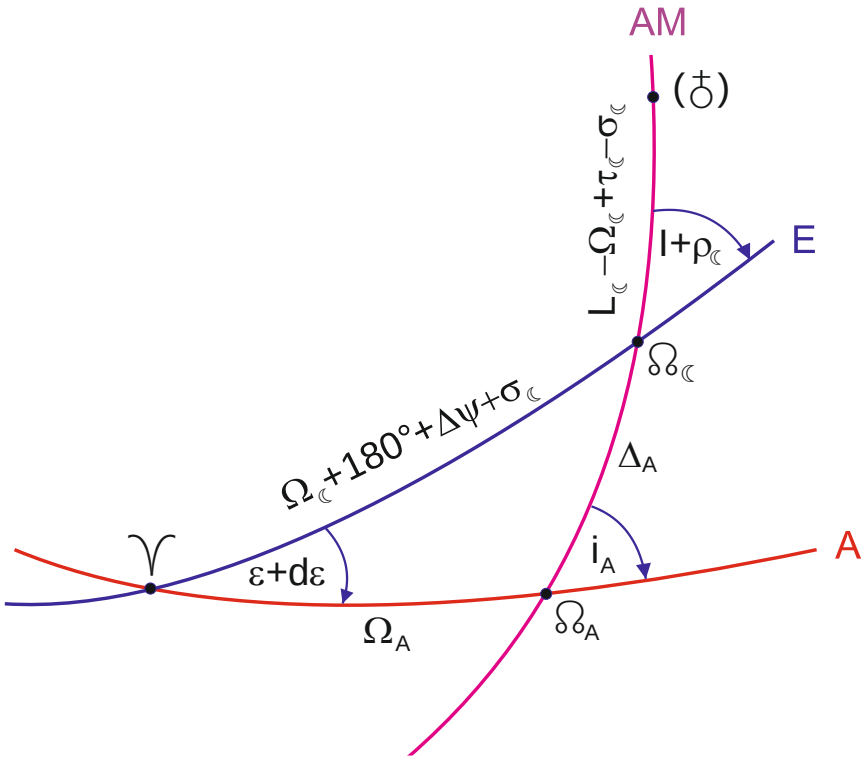


Bild 29-11: Darstellung der physikalischen Librationen in Bezug auf die momentane Ekliptik (E) („ecliptic of date“), zur Berechnung der ersten Achse des Mond-Äquatorsystems (AM) ausgerichtet auf den mit (☥) markierten mittleren subterrestrischen Punkt

Statt dieser Formeln können näherungsweise auch folgende Formeln benutzt werden[1]:

Mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} M_L &:= 0°.040 \sin\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) - 0°.003 \sin\left(L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) \\ N_L &:= 0°.020 \cos\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) + 0°.003 \cos\left(L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) \end{aligned} \tag{29.245}$$

[1] Kopiert aus EXPLANATORY SUPPLEMENT [1961], pp.319-322

lauten die Näherungsformeln

$$\begin{aligned}\delta C &= \frac{M_L \sin l' - N_L \cos l'}{\cos b'} \\ \delta b &= M_L \cos l' - N_L \sin l' \\ \delta l &= 0°.003 \sin\left(L_{\leftmoon} - \Gamma'_{\leftmoon}\right) - 0°.005 \sin 2\left(\Gamma'_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}\right) - 0°.016 \sin M_{\odot} + \delta C \sin b' \ .\end{aligned} \tag{29.246}$$

Alternativ lauten die ersten Glieder in den Entwicklungen der physikalischen Libration in den Bahnparametern[1]

$$\begin{aligned}\rho_L &= -107'' \cos M_{\leftmoon} + 36'' \cos\left(M_{\leftmoon} + 2\Gamma'_{\leftmoon}\right) - 11'' \cos 2\left(M_{\leftmoon} + \Gamma'_{\leftmoon}\right) + \cdots \\ I\,\sigma_L &= -109'' \sin M_{\leftmoon} + 36'' \sin\left(M_{\leftmoon} + 2\Gamma'_{\leftmoon}\right) - 11'' \sin 2\left(M_{\leftmoon} + \Gamma'_{\leftmoon}\right) + \cdots \\ \tau_L &= -14'' \sin M_{\leftmoon} + 73'' \sin M_{\odot} + 19'' \sin 2\Gamma'_{\leftmoon} + \cdots \ .\end{aligned} \tag{29.247}$$

Das erste Glied in ρ_L und σ_L ist jeweils eine Folge der Elliptizität der Mondbahn, in τ_L eine Folge der Jährlichen Gleichung. Die Zahlenwerte bestätigen: Die physikalischen Librationen bewirken eine maximale Abweichung von etwa zwei Bogenminuten gegenüber den Regeln von *Cassini*.

Die genaue Beobachtung und damit theoretische Erfassung der physikalischen Librationen konnte erst nach den Apollo Mondlandungen erfolgen. Die auf der Mondoberfläche zurückgelassenen ALSEP Stationen (Bild 29-16 auf Seite 656) mit Laser Reflektor sowie die Möglichkeit von Radar Beobachtungen und Messungen mit Hilfe der Very Long Baseline Interferometry ermöglichten präzise Beobachtungen. Diese führten seit den 1970er Jahren zur Entwicklung aufwendiger Theorien zur Berechnung der physikalischen Librationen[2]. Dabei haben sich nicht nur die Bezeichnungen, sondern auch die verwendeten Parameter geändert. Es zeigte sich, dass der Mond als ein nichtstarrer Körper aufgefasst werden muss, der durch Kräfte deformiert wird, die im Wesentlichen von seinem Zentrifugalpotential sowie dem Gezeitenpotential zweiter Ordnung durch die Erde geprägt werden[3].

Die Auswirkungen der physikalischen Librationen werden im astronomischen Jahrbuch basierend auf den neuentwickelten hochgenauen Theorien wieder in den äquatorialen Winkeln Länge, Breite und Positionswinkel im Rahmen der physikalischen Mondephemeride zur Verfügung gestellt. Diese können dann für präzise Beobachtungen genutzt werden.

---

[1] Nach KOPAL, Z. [1966], pp. 38-39, Formeln (4-121), (4-122), (4-123). Diese sind die ersten Glieder einer längeren Entwicklung, die von F. HAYN [1902] durch Integration erhalten worden waren. Die dort wiedergegebenen Ergebnisse sind Entwicklungen mit einer Genauigkeit von über $1''$, Formeln (51a), (51b), (51c) auf Seiten 50-51

[2] Aus der zahlreichen Literatur seien genannt: HENRARD, J. AND MOONS, M. [1978]; MIGUS, A. [1980]; ECKHARDT, DONALD H. [1981]; ECKHARDT, DONALD H. [1982]; MOONS, M. [1982]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]; außerdem URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2013], pp. 429-434; allgemeine Darstellung etwa in COOK, A. H. [1988], pp. 14-24, sowie ch. 10, pp. 166-186 (mit weiteren Literaturhinweisen)

[3] Hinweis etwa bei ECKHARDT, DONALD H. [1981], p. 12, auch Berücksichtigung der Erdabplattung ab p. 39

29.5.3 Der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche

Die geozentrischen geometrischen und die physikalischen Librationen zusammen ergeben die selenozentrische Position des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche sowie den zugehörigen Positionswinkel

$$\lambda_{ME} = l' + \delta l \;\; , \;\; \beta_{ME} = b' + \delta b \;\; , \;\; C_{PA} = C' + \delta C \quad . \tag{29.248}$$

Eine Alternative zu den in den vorstehenden Abschnitten referierten Formeln zur Berechnung des subterrestrischen Punktes kann mit Hilfe der in Abschnitt 29.4.3 hergeleiteten Transformationsformeln direkt gefunden werden. Sei $\mathbf{r}_{♁☾} = y_E^j \, \mathbf{q}_j^{(E)}$ der geozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes, lautet der selenozentrische Ortsvektor des subterrestrischen Punktes im Mondäquatorsystem mit der Transformation (29.182)

$$\mathbf{r}_{☾E} = -\frac{R_M}{r_☾} \mathbf{r}_{♁☾} = -\frac{R_M}{r_☾} \, y_E^j \, a_{A\;j}^{\;i} \, \mathbf{p}_i^{(☾)} = x_{ME}^i \, \mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.249}$$

Die selenozentrischen Polarkoordinaten des subterrestrischen Punktes können dann berechnet werden aus

$$\begin{aligned} x_{ME1} &= R_M \cos\beta_{ME} \cos\lambda_{ME} \\ x_{ME2} &= R_M \cos\beta_{ME} \sin\lambda_{ME} \\ x_{ME3} &= R_M \sin\beta_{ME} \quad . \end{aligned} \tag{29.250}$$

Diese Formeln sind vollständig. Sie berücksichtigen die Bahnbewegung des Mondes im Ortsvektor $\mathbf{r}_{♁☾}$ und damit die geometrischen geozentrischen Librationen. Zudem sind in den Transformationsformeln (29.180) die physikalischen Librationen über die Zuordnungen (29.168) berücksichtigt.

Eine quantitative Abschätzung der geometrischen (optischen) Librationen kann folgendermaßen erhalten werden:

Die Libration in Länge wird im Wesentlichen durch die Mittelpunktsgleichung geprägt. Nach Formel (29.49) ist hier größenordnungsmäßig der maximale Wert $\Delta l = \pm 6°.3$ zu erwarten.

Die Libration in Breite wird im Wesentlichen durch die Neigung des Mondäquators zur Mondbahnebene gebildet. Nach Tabelle 29-2 auf Seite 584 ergibt sich die Abschätzung für den maximalen Wert $\Delta b = \pm\left(I + i_☾\right) = \pm 6°.7$.

BEISPIEL: In Bild 29-12 (auf Seite 648) ist der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche zu sehen. Berechnet wurde die Kurve in zwei Fällen für die Dauer von je 2 Monaten, was sich jeweils in je zwei sich nicht schließenden Kurven abbildet. Für den Zeitraum Januar bis März 2018 wurde die rote Kurve erhalten. Die Veränderung der Kurve hängt wesentlich von der Bewegung des Bahnknotens $\Omega_☾$ ab. Der Umlauf des Knotens beträgt nach dem Ausdruck (29.31) etwa 18.6 julianische Jahre. Aus diesem Grund wurde für den Zeitraum von zwei Monaten im Jahr 2027 die Bewegung des subterrestrischen Punktes aufgezeichnet, die als blaue Kurve zu erkennen ist. Sie verläuft symmetrisch zum Nullmeridian des Mondes zu der 9 Jahre früher erhalten Kurve, also nach einem halben Umlauf des aufsteigenden Knotens der Mondbahn. ◄

Anmerkung: Der subterrestrische Punkt auf dem Mond wird wie der subsolare Punkt im astronomischen Jahrbuch[1] tabelliert in Schrittweiten von 1 Tag aufbereitet. ◄

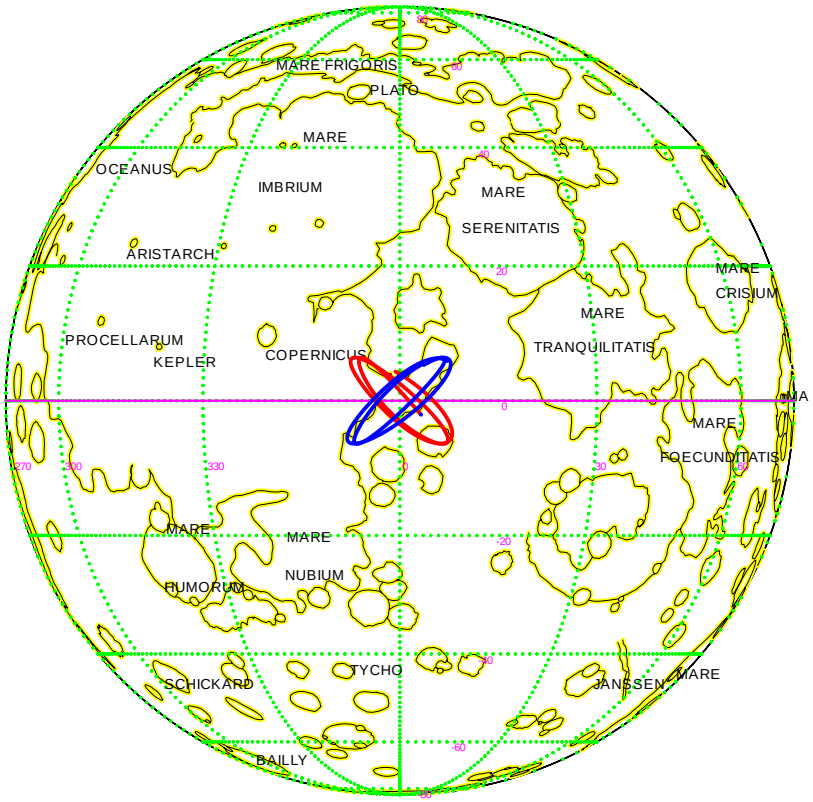


Bild 29-12: Die Bewegung des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche je über 2 Monate im Jahre 2018 (rote Kurve) und im Abstand von 9 Jahren im Jahr 2027 (blaue Kurve)

29.5.4 Topozentrische geometrische Librationen

Während die geozentrischen Librationen die Ansicht des Mondes vom Erdmittelpunkt aus definieren, erscheint der Mond von einem Beobachter auf der (oder um die) Erde verändert. Diese Veränderung berücksichtigen die topozentrischen Librationen. Zu ihrer Berechnung gibt es Näherungsformeln[2]. Die Erdscheibe hat vom Mond ausgesehen etwa den Winkeldurchmesser $1°54'4''.25$. Dieser Wert kann somit nur als maximaler Wert für die topozentrische Libration erwartet werden.

Ziel ist die Berechnung der selenographischen Koordinaten des selenozentrischen Richtungsvektors zum Beobachter. Der Beobachter sei durch die geographischen Koordinaten geographische Länge λ, geographische Breite φ sowie die Höhe H' über dem Referenzellipsoid R gegeben[3]. Mit dem Querkrümmungsradius

---

[1] ASTRONOMICAL ALMANAC (AA) herausgegeben vom Nautical Almanac Office, USNO, and Her Majesty's Nautical Almanac Office, Rutherford Appleton Laboratory, ISBN 0 11 887323 7, ISSN 0737-6421

[2] z.B. AA 2004, p. D5

[3] Die hier verwendeten Formeln sind den Abschnitten 8.6.1 entnommen, die Reduktion des geographischen Systems auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem in Abschnitt 8.5.2.1 (Band II)

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{1-\left[1-\left(1-f\right)^2\right]\sin^2\varphi}} \tag{29.251}$$

lautet der geozentrische Ortsvektor des Beobachters im $\mathbf{q}_j^{(G)}$ – Greenwich-System

$$\mathbf{R} = y^{(G)j}\mathbf{q}_j^{(G)} = \left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\left\{\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda\right\} + \mathbf{q}_3^{(G)}\left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\sin\varphi \ . \tag{29.252}$$

Die entsprechende Darstellung im $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem erfordert die Drehung um die auf Greenwich bezogene Sternzeit Θ_G in

$$\mathbf{R} = y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} = x_T^i\,\mathbf{p}_i \tag{29.253}$$

mit

$$x_{T1} = y_1^{(G)}\cos\Theta_G - y_2^{(G)}\sin\Theta_G \ , \ x_{T2} = y_1^{(G)}\sin\Theta_G + y_2^{(G)}\cos\Theta_G \ , \ x_{T3} = y_3^{(G)} \quad . \tag{29.254}$$

Der geozentrische Mondort ist mit der Mondephemeride in ekliptikalen Koordinaten berechnet

$$\mathbf{r}_{\sphericalangle\mathbb{C}} = y^{(\mathbb{C})j}\mathbf{q}_j^{(E)} = r_m\left[\mathbf{q}_1^{(E)}\cos l_m\cos b_m + \mathbf{q}_2^{(E)}\sin l_m\cos b_m + \mathbf{q}_3^{(E)}\sin b_m\right] \tag{29.255}$$

und in äquatorialen Koordinaten $\mathbf{r}_{\sphericalangle\mathbb{C}} = x^{(\mathbb{C})i}\mathbf{p}_i$ mit

$$x_1^{(\mathbb{C})} = y_1^{(\mathbb{C})} \ , \ x_2^{(\mathbb{C})} = y_2^{(\mathbb{C})}\cos\varepsilon - y_3^{(\mathbb{C})}\sin\varepsilon \ , \ x_3^{(\mathbb{C})} = y_2^{(\mathbb{C})}\sin\varepsilon + y_3^{(\mathbb{C})}\cos\varepsilon \quad . \tag{29.256}$$

Der topozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes kann damit berechnet werden aus

$$\mathbf{r}_{T\mathbb{C}} = \mathbf{r}_{\sphericalangle\mathbb{C}} - \mathbf{R} = x^{(T\mathbb{C})i}\,\mathbf{p}_i = \left(x^{(\mathbb{C})i} - x_T^i\right)\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.257}$$

Der selenozentrische Ortsvektor des dem Topozentrum nächsten Punktes auf der Mondoberfläche („Subtopozentrischer Punkt“) lautet in (Erd-)äquatorialen Koordinaten

$$\mathbf{r}_{\mathbb{C}T} = -\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|}x^{(T\mathbb{C})i}\,\mathbf{p}_i \tag{29.258}$$

und in Mond-äquatorialen Koordinaten mit den Transformationen (29.236)

$$\mathbf{r}_{\mathbb{C}T} = y^{(\mathbb{C}\mathrm{T})j}\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|}x^{(T\mathbb{C})i}\,a_{D\ i}^{\ j}\,\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \quad . \tag{29.259}$$

Die selenozentrischen Winkelkoordinaten $\left(\lambda_{MT}, \beta_{MT}\right)$ des subtopozentrischen Punktes können berechnet werden:

$$\begin{aligned} y_1^{(\mathbb{C}T)} &= R_M\cos\beta_{MT}\cos\lambda_{MT} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|}x^{(T\mathbb{C})i}\,a_{D1i} \\ y_2^{(\mathbb{C}T)} &= R_M\cos\beta_{MT}\cos\lambda_{MT} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|}x^{(T\mathbb{C})i}\,a_{D2i} \\ y_3^{(\mathbb{C}T)} &= R_M\sin\beta_{MT} \qquad\qquad = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}\right|}x^{(T\mathbb{C})i}\,a_{D3i} \quad . \end{aligned} \tag{29.260}$$

BEISPIEL: Der Einfluss der topozentrischen Libration auf die Beobachtung des Mondes von der Erde aus wird beispielhaft in Bild 29-13 demonstriert. Von einer Bodenstation auf der Nordhalbkugel der Erde wird der Mond zu einem gewissen Zeitpunkt beobachtet. Der subtopozentrische Punkt auf der Mondoberfläche wird als Mittelpunkt des Mondbildes gewählt: Punkt 1 im Bild. Da dieser Punkt südlich des Mondäquators liegt, erscheint die Mondkugel über den Nordpol gekippt, der Südpol wird sichtbar. Außerdem ist der Nullmeridian des selenographischen Systems nach Westen entgegen der Rotation des Mondes verschoben: dadurch wird am östlichen Rande des Mondes ein sonst nicht sichtbarer Sektor der Mondoberfläche sichtbar. Diese beiden Effekte sind eine Folge der geometrischen Libration in Länge und in Breite. Die entsprechenden physikalischen Librationen sind so gering, dass sie im Bild nicht erscheinen. Punkt 2 ist der subtopozentrische Punkt nach einem halben siderischen Mondumlauf. Dieser Punkt ist gegenüber dem ersteren erheblich nach Norden und nach Westen verschoben. Der Einfluss der geometrischen Librationen wird hier deutlich. Würde dieser Punkt als Mittelpunkt des Bildes gewählt, würden der Nordpol des Mondes und Bereiche jenseits des westlichen Randes der Mondoberfläche sichtbar. Während eines siderischen Umlaufs des Mondes wirken sich somit die geometrischen (optischen) Librationen so aus, dass sowohl der Süd- wie der Nordpol, außerdem der westliche wie der östliche Rand überschritten werden.

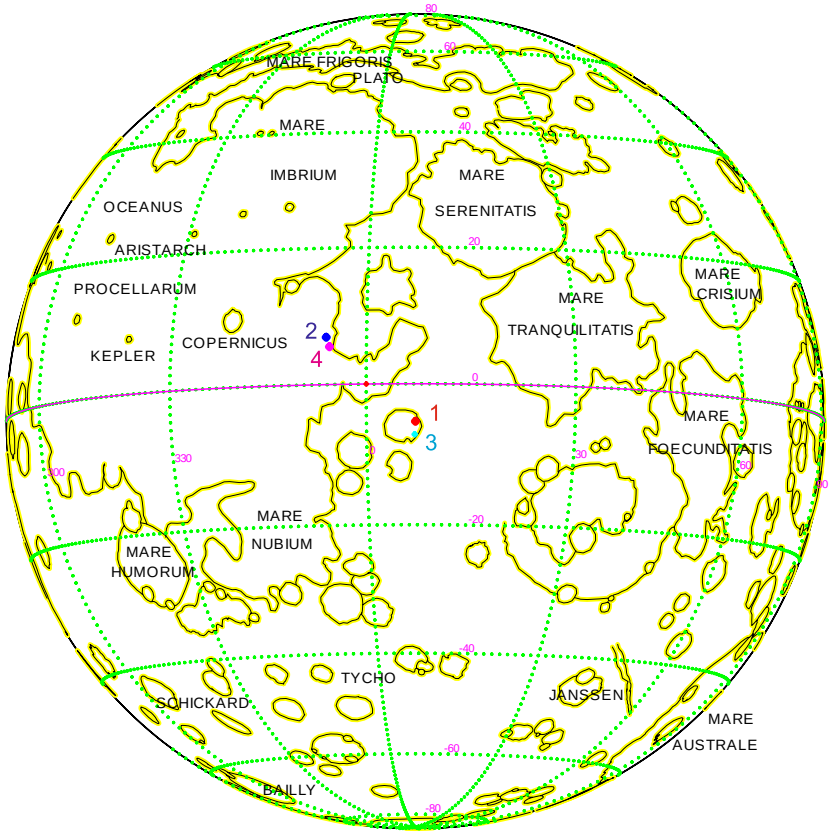


Bild 29-13: Zur Demonstration des Einflusses der topozentrischen Libration auf die Beobachtbarkeit der Mondoberfläche. Der subtopozentrische Punkt 1 gesehen von einer irdischen Station auf der Nordhalbkugel ist der Mittelpunkt des Sichtkreises. Punkt 2 ist von derselben Station aus gesehen etwa einen halben siderischen Monat später. Die Punkte 3 und 4 markieren die subtopozentrischen Punkte zu denselben Zeitpunkten, jedoch gesehen von einer Station auf der irdischen Südhalbkugel. Die verwendeten Zahlenwerte sind in Tabelle 29-5 zusammengestellt.

Um den Einfluss der topozentrischen Libration als Folge unterschiedlicher Beobachtungsorte auf der Erde zu zeigen, werden zu denselben Daten wie in den ersten beiden vorhergehenden Fällen die Beobachtung von einer Station auf der Südhalbkugel aus durchgeführt. Die entsprechenden subtopozentrischen Punkte sind die Punkte 3 und 4. Diese Punkte sind gegenüber den von der irdischen Nordhalbkugel durchgeführten Beobachtungen wie zu erwarten nach Süden auch auf dem Mond verschoben. In Tabelle 29-5 sind die zugehörigen Zahlenwerte gelistet. Die Tabelle zeigt die jeweilige Elevation unter der die Beobachtungen erfolgt sind. Da die Beobachtbarkeit von den verschiedenen Beobachtungsstationen infolge der Erdrotation unterschiedlich ist, können die hier erfolgten Berechnungen nicht exakt zum jeweiligen exakt gleichen Zeitpunkt durchgeführt werden. Die Tendenz der Aussagen wird wegen der langsamen Rotation des Mondes dadurch nicht verfälscht.

Gegenüber den Abschätzungen über die zu erwartenden Größen der geometrischen Librationen in Abschnitt 29.5.3 werden in Tabelle 29-5 zum Teil größere Zahlenwerte gefunden. Die Abweichung ist eine Folge der topozentrischen Libration, die in der Größenordnung 1° erwartet werden muss.◀

	Beobachtungsort auf Erde			Beobachtungs-datum	$h_{☾}$ auf Erde	Subtopozentrischer Punkt	
	λ	φ	H			λ_{MT}	β_{MT}
1	10°	48°	100 km	2018-02-06	29°.7	6°.906	-5°.299
2				2018-02-20	34°.8	353°.431	6°.517
3	180°	-70°	100 km	2018-02-06	11°.0	6°.802	-7°.126
4				2018-02-20	1°.3	354°.720	5°.367

Tabelle 29-5: Beispiel zur Berechnung des subtropischen Punktes auf der Mondoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten und von verschiedenen irdischen Beobachtungsstationen.

29.6 Die Beobachtung des Mondes von der Erdoberfläche aus

Die auf die Sonne bezogene Bewegung des Mondes wird als synodische Bewegung bezeichnet. Ein Umlauf des Mondes um die Erde in Bezug auf die Sonne wird als synodischer Monat bezeichnet, in der Antike auch als *Lunation*. Durch Beobachtung der Phasen des Mondes (Neumond, erstes Viertel, Vollmond, drittes Viertel) ist der synodische Monat seit alters die unmittelbarste Aussage über die Mondbewegung. Die durch die Elongation $D_{☾}$ beschriebenen Phasen des Mondes geben das „Alter des Mondes“ an.

29.6.1 Die Mondphase

Die mittlere Elongation $D_{☾}$ gibt die Phase des Mondes nur näherungsweise an. Das liegt an der Mittelung, die einen Fehler bis zu 7 Stunden ausmachen kann. Dies liegt aber auch an der Neigung der Mondbahn, die verursacht, dass eine Phase von der Erde oder einem Erdsatelliten aus nicht voll wahrgenommen werden kann. Man definiert daher als Phasenwinkel Φ den

selenozentrischen Winkel zwischen der Richtung zum Sonnen- und zum Erdmittelpunkt (= selenozentrische Elongation Sonne – Erde). Seien $\mathbf{r}_{♁☉}$ der geozentrische Ortsvektor der Sonne, $\mathbf{r}_{♁☾}$ des Mondes, errechnet sich der Phasenwinkel aus (vgl. etwa Bild 29-14 auf Seite 652)

$$\cos\Phi = -\frac{\left(\mathbf{r}_{♁☉}-\mathbf{r}_{♁☾}\right)\cdot\mathbf{r}_{♁☾}}{\left|\mathbf{r}_{♁☉}-\mathbf{r}_{♁☾}\right|\left|\mathbf{r}_{♁☾}\right|} \quad . \tag{29.261}$$

Der Mond hat vom Erdmittelpunkt aus gesehen Neumond, wenn $\Phi=0°$, Vollmond, wenn $\Phi=180°$. Er ist im ersten Viertel, wenn $\Phi=90°$, im dritten Viertel, wenn $\Phi=270°$, usw..

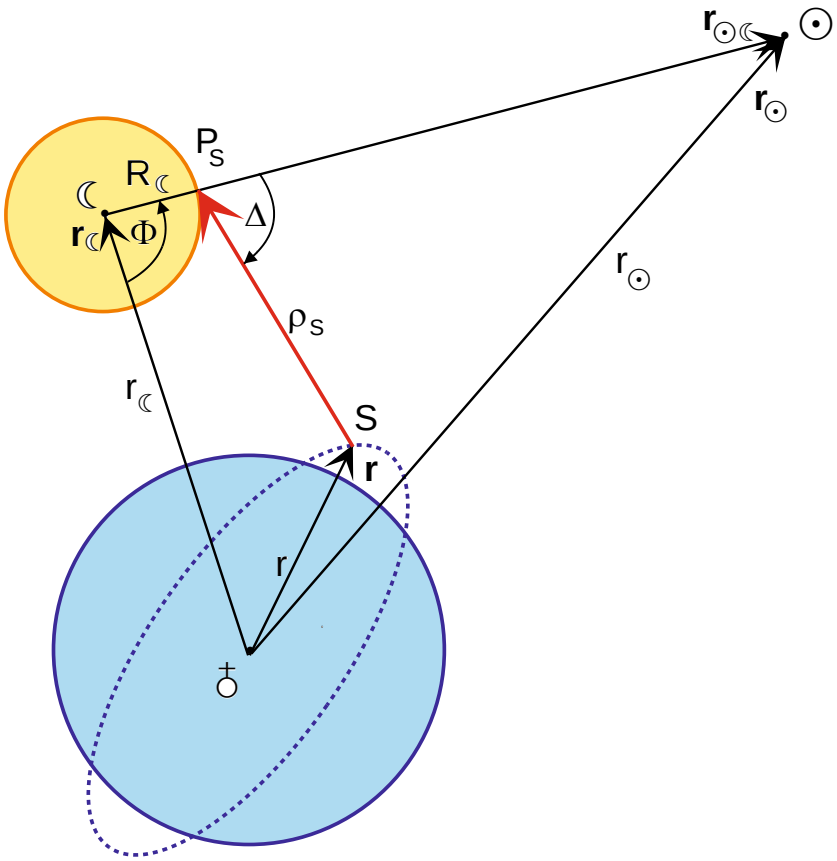


Bild 29-14: Der Phasenwinkel Δ des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche gesehen von einem Erdsatelliten aus

An Stelle des Phasenwinkels wird gelegentlich auch der Begriff der *Phase k* verwendet, definiert durch[1]

$$k \coloneqq \frac{1}{2}\left(1+\cos\Phi\right) \; . \tag{29.262}$$

Die Phase gibt den vom Erdmittelpunkt aus gesehenen von der Sonne beleuchteten Bruchteil der Mondoberfläche an, wenn der Mond als Kugel aufgefasst wird. Für k=1 ist Vollmond, für k=0 ist Neumond, k=0.5 im ersten oder dritten Viertel, usw..

[1] SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], p.396

Ebenfalls auf die kugelförmig angenommene Oberfläche des Mondes kann der *Defekt* definiert werden als der nicht von der Sonne beschienene aber von der Erde (= Erdmittelpunkt) aus sichtbare Anteil der Mondscheibe:

$$D_f \;\coloneqq\; \frac{1}{2}\left(1-\cos\Phi\right) \;. \tag{29.263}$$

29.6.2 Der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche

Ähnlich wie im Fall des subterrestrischen Punktes kann der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche berechnet werden. Der Ort des subsolaren Punktes liefert eine Aussage über die von der Erde aus sichtbare beleuchtete Fläche des Mondes, hängt also mit der Phase Φ zusammen.

Es seien die ekliptikalen Koordinaten der geozentrischen Vektoren zu Sonne und Mond gegeben:

$$\mathbf{r}_{♁☉} = y_S^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} \;,\; \mathbf{r}_{♁☾} = y_M^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{29.264}$$

Der selenozentrische Ortsvektor der Sonne wird mit Hilfe der Transformation (29.187) und den Transformationskoeffizienten (29.180) in das Mondäquatorsystem transformiert:

$$\mathbf{r}_{☾☉} = \mathbf{r}_{♁☾} - \mathbf{r}_{♁☉} = \left(y_M^j - y_S^j\right)\mathbf{q}_j^{(E)} = y_{MS}^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} = y_{MS}^j\,a_{A\;j}^{\;i}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.265}$$

Die Polarkoordinaten $\left(\lambda_{MS},\beta_{MS}\right)$ des subsolaren Punktes werden erhalten aus

$$\mathbf{r}_{☾☉} = \left|\mathbf{r}_{☾☉}\right|\left\{\cos\lambda_{MS}\cos\beta_{MS}\,\mathbf{p}_1^{(☾)} + \sin\lambda_{MS}\cos\beta_{MS}\,\mathbf{p}_2^{(☾)} + \sin\beta_{MS}\,\mathbf{p}_3^{(☾)}\right\} \quad . \tag{29.266}$$

Wenn der subsolare Punkt sowie der subterrestrische Punkt bekannt sind, kann die Phase berechnet werden aus

$$\cos\Phi = \cos\left(\lambda_{ME}-\lambda_{MS}\right)\cos\beta_{ME}\cos\beta_{MS} + \sin\beta_{ME}\sin\beta_{MS} \quad . \tag{29.267}$$

Anmerkung: die selenographischen Koordinaten des subsolaren Punktes sind wie die des subterrestrischen Punktes im Astronomischen Jahrbuch für jeden Tag tabelliert[1]. ◀

29.6.3 Der Phasenwinkel bezogen auf einen Erdsatelliten

Wenn die Mondoberfläche von einem Erdsatelliten aus beobachtet wird, so sind die geometrischen Verhältnisse merklich anders als beim Bezug auf den Erdmittelpunkt, auch ändern sie sich infolge der Bewegung des Erdsatelliten um die Erde.

Als charakteristisch für die Sonneneinstrahlung sei der subsolare Punkt P_S auf der Mondoberfläche angesehen. Dieser Punkt hat den selenozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{☾,P} \;=\; R_☾\,\frac{\mathbf{r}_☉ - \mathbf{r}_☾}{\left|\mathbf{r}_☉ - \mathbf{r}_☾\right|} \tag{29.268}$$

[1] z.B. AA 2004, pp. D6 – D21

wenn $R_{☾}$ der mittlere Radius des kugelförmig angenommenen Mondes ist. Seien $\mathbf{r}$ der momentane Ortsvektor des Satelliten, $\mathbf{r}_{\odot}$ der geozentrische Ortsvektor der Sonne (Zentrum der Sonne), $\mathbf{r}_{☾}$ des Mondes, so hat der subsolare Punkt vom Satelliten aus gesehen den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{\odot☾,P} - \mathbf{r}_{☾} - \mathbf{r} \tag{29.269}$$

mit Radius

$$\rho_S := |\mathbf{r}_{PS}| \quad . \tag{29.270}$$

Im subsolaren Punkt P_S kann der Phasenwinkel $\Delta := \sphericalangle(\odot, P_S, S)$ berechnet werden aus

$$\cos\Delta = -\frac{\mathbf{r}_{PS} \cdot \mathbf{r}_{\odot☾,P}}{\rho_S \, R_{☾}} \quad . \tag{29.271}$$

Als erste Bedingung für Sichtkontakt vom subsolaren Punkt zum Erdsatelliten muss der Satellit über dem Mondhorizont liegen, es muss also $\beta \le 90°$ erfüllt sein, bzw.

$$\cos\Delta \ge 0 \quad . \tag{29.272}$$

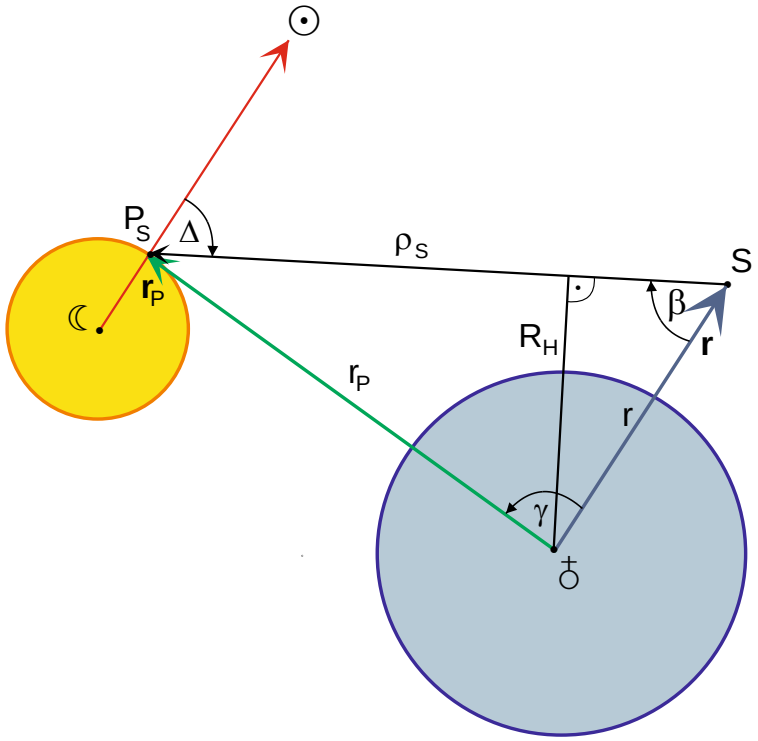


Bild 29-15: Sichteinschränkungen bei Beobachtung des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche von einem Erdsatelliten S aus

Als zweite Bedingung für Sichtkontakt muss erfüllt sein, dass der Mond vom Erdsatelliten aus gesehen sich nicht „hinter“ der Erde befindet. Um diese Sichteinschränkungen abzuschätzen, wird entsprechend Bild 29-15 zunächst der geozentrische Zentralwinkel $\gamma = \sphericalangle(P_S, ♁, S)$ zwischen subsolarem Punkt und Satelliten berechnet. Dazu wird der geozentrische Ortsvektor des subsolaren Punktes benötigt

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\odot☾,P} + \mathbf{r}_{☾} \quad , \tag{29.273}$$

mit Betrag $r_P := |\mathbf{r}_P|$, sowie der geozentrische Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ des Satelliten mit Radius $r := |\mathbf{r}|$. Dann ist

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{r}}{r_P\, r} \quad , \tag{29.274}$$

und die Sichtbedingung ist im Fall $\cos\gamma \geq 0$ sicher erfüllt. Sonst muss der satellitenzentrierte Nadirwinkel $\beta = \sphericalangle(\overset{+}{\bigcirc}, S, P_S)$ aus

$$\cos\beta = -\frac{\mathbf{r}_{PS} \cdot \mathbf{r}}{\rho_S\, r}$$

untersucht werden. Die Sichtlinie vom Satelliten zum subsolaren Punkt hat vom Erdmittelpunkt den Abstand

$$R_H = r\sin\beta = r\sqrt{1-\cos^2\beta} \quad . \tag{29.275}$$

Wenn $R_H \leq R_E$, mit (mittlerem oder um eine gewisse Lufthöhe erweitertem) Erdradius R_E, ist der Sichtkontakt unterbrochen. Wenn R_H nahe an R_E ist, kann die Sicht zum Mond durch Strahlbeeinflussung nahe der Erdoberfläche beeinträchtigt werden.

BEISPIEL: Der indische Erdbeobachtungssatellit IRS-P3 hatte am 22 Dezember 1999 um 4^h 16^m $51^s.36$ die mittleren (geozentrischen) Bahnelemente (berechnet aus 2-line Elementen):

Große Bahnhalbachse a = 7194.976 km (entsprechend etwa 816.8 km gemittelte Bahnhöhe),

Exzentrizität e = 0.0001504,

Inklination = 98°.6359,

Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω = 67°.3896,

Argument der Breite ω = 50°.7649,

Mittlere Anomalie zur Epoche M_0 = 309°.3662.

Am selben Tag hatte der Mond das Alter $D_{\leftmoon} = 174°.513$, den Phasenwinkel $\Phi = 5°.977$ und die Phase k = 0.997282. Vom entsprechenden Satellitenort aus gesehen hatte der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche den Abstand $\rho_S = 356223.734\,\text{km}$ und den Phasenwinkel $\Delta = 6°.679$. Der geozentrische Winkel zwischen subsolarem Punkt und Satelliten betrug γ = 93°.145 und der entsprechende Nadirwinkel am Satelliten β = 85°.699. Die Sichtlinie vom Satelliten zur Mondoberfläche hatte vom Erdmittelpunkt den kürzesten Abstand R_H = 7174.299 km.◀

29.6.4 Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche von der Erde aus

Ein Ort auf der als Kugel angenommenen Mondoberfläche sei durch die selenozentrischen Winkelkoordinaten (λ_M, β_M) gegeben. Der zugehörige selenozentrische Ortsvektor lautet bezogen auf das $\mathbf{p}_i^{(\leftmoon)}$ – Mondäquatorsystem nach Definition (29.169)

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_M = y_M^j \, \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \\ &y_{M1} = R_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \;,\; y_{M2} = R_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \;,\; y_{M3} = R_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.276}$$

Zur Beobachtung von einem Ort auf (oder über der) Erde muss dieser Ortsvektor auf das $\mathbf{p}_i$ − Erdäquatorsystem bezogen werden. Mit den Transformationsformeln (29.229) für die Basisvektoren sowie (29.236) für die Koeffizienten wird dies für den Beobachtungszeitpunkt durchgeführt mit

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_M = y_M^j \, \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} = y_M^j \, a_{Dj}{}^i \, \mathbf{p}_i = x_M^i \, \mathbf{p}_i \\ &x_M^i = y_M^j \, a_{Dj}{}^i \quad , \quad y_M^j = x_M^i \, a_D{}^j{}_i \quad . \end{aligned} \tag{29.277}$$

Der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}_{♁\mathbb{C}}$ des Mondmittelpunktes ist bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ − Erdäquatorsystem aus den Beziehungen (29.255) und (29.256) (auf Seite 649) zum gewählten Beobachtungszeitpunkt bekannt: $\mathbf{r}_{♁\mathbb{C}} = x^{(\mathbb{C})i} \mathbf{p}_i$.

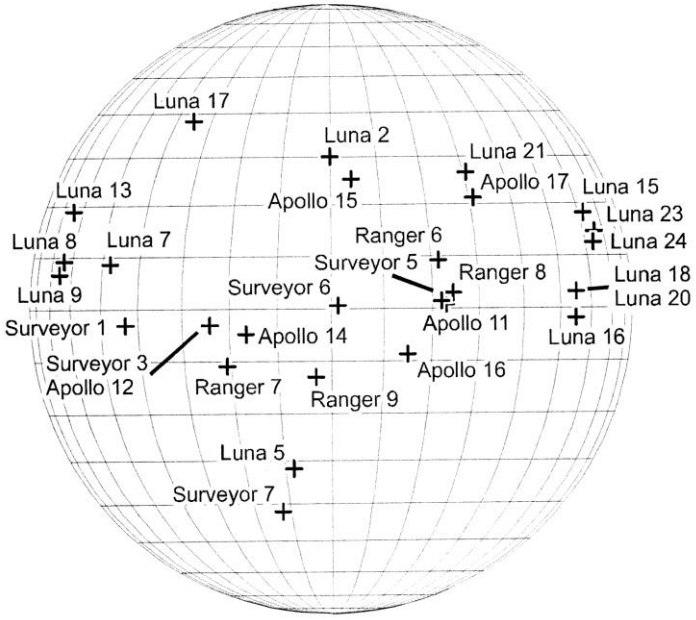


Bild 29-16: Landeorte einiger bis zum Jahr 1991 auf der Vorderseite des Mondes gelandeter bemannter und unbemannter Mondmissionen[1].

Der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{R}$ des Beobachters, der mit den geographischen Polarkoordinaten gegeben ist, hat im Erdäquatorsystem mit den Beziehungen (29.251) - (29.254) die Darstellung $\mathbf{R} = y^{(G)j} \, \mathbf{q}_j^{(G)} = x_T^i \, \mathbf{p}_i$.

Der irdische Beobachter kann den betreffenden Ort auf der Mondoberfläche beobachten unter dem Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{TM} = \mathbf{r}_{♁\mathbb{C}} + \mathbf{R}_M - \mathbf{R} = x_{TM}^i \, \mathbf{p}_i = \left(x^{(\mathbb{C})i} + x_M^i - x_T^i \right) \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.278}$$

Die zu beobachtenden Koordinaten sind die topozentrische Rektaszension α_T und die topozentrische Deklination δ_T aus

[1] Kopie aus: TH. NEFF , 'History of Lunar Exploration', in ECKART, P. [2006], pp. 5-33

$$x_{TM1} = |\mathbf{r}_{TM}| \cos\delta_T \cos\alpha_T \ , \ x_{TM2} = |\mathbf{r}_{TM}| \cos\delta_T \sin\alpha_T \ , \ x_{TM1} = |\mathbf{r}_{TM}| \sin\delta_T \ . \qquad (29.279)$$

Mikrowellenantennen werden üblicherweise in horizontalen Koordinaten gesteuert. Nach Abschnitt 8.9.3.2 (Band II) erfolgt die Umrechnung in das lokale Horizontsystem. Hierzu wird der lokale Stundenwinkel benötigt, der mit der Sternzeit Θ_G für Greenwich mit Formel (8.135) berechnet werden kann:

$$\vartheta_T = \Theta_G + \lambda - \alpha_T \quad . \qquad (29.280)$$

Die horizontalen Koordinaten Azimut *A* und Elevation *h* werden dann mit den Transformationsformeln (8.293) berechnet:

$$\begin{aligned} \cos A \cosh &= -\cos\vartheta_T \cos\delta_T \sin\varphi + \sin\delta_T \cos\varphi \\ \sin A \cosh &= -\sin\vartheta_T \cos\delta_T \\ \sinh &= \cos\vartheta_T \cos\delta_T \cos\varphi + \sin\delta_T \sin\varphi \quad . \end{aligned} \qquad (29.281)$$

BEISPIEL 1: In Tabelle 29-6 sind die selenographischen Koordinaten der Apollo Landemodule und der bei den Apollo Missionen hinterlassenen Messstationen (ALSEP) zusammengestellt. Die ALSEP Stationen wurden verwendet um die 30m Kommando Antenne in der deutschen Bodenstation Weilheim-Lichtenau im Rahmen der beiden HELIOS-Missionen zu kalibrieren[1]. ◀

	Lunar Module		ALSEP	
	Selenozentrische Länge Ost	Selenozentrische Breite Nord	Selenozentrische Länge Ost	Selenozentrische Breite Nord
Apollo 11	23°28′23″.304	0°40′26″.976	---	---
Apollo 12	–23°25′18″.840	–3°00′46″.080	–23°25′29″.640	–3°00′35″.280
Apollo 14	–17°28′18″.984	–3°38′45″.204	–17°28′39″.648	–3°38′39″.084
Apollo 15	3°37′59″.880	26°07′56″.604	3°37′47″.676	26°08′02″.616
Apollo 16	15°30′03″.960	–8°58′24″.240	15°29′54″.960	–8°58′33″.240
Apollo 17	30°46′20″.280	20°11′27″.960	30°45′55″.800	20°11′32″.280

Tabelle 29-6: Selenozentrische Koordinaten (λ_M, β_M) der Apollo Mondlandungspositionen und der ALSEP Stationen[2].

[1] JOCHIM, E. F. UND SLIWINSKI, P. [1976]

[2] Die Koordinaten sind bezogen auf das selenozentrische Mittlere Erde / Mondpolachsen Referenzsystem der DE421 Ephemeriden. Sie wurden errechnet aus Aufnahmen des Lunar Reconnaissance Orbiters, veröffentlicht in WAGNER et. al. [2017], siehe in: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/lunar_sites.html

BEISPIEL 2: In Bild 29-17 wird die Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche symptomatisch dargestellt[1].

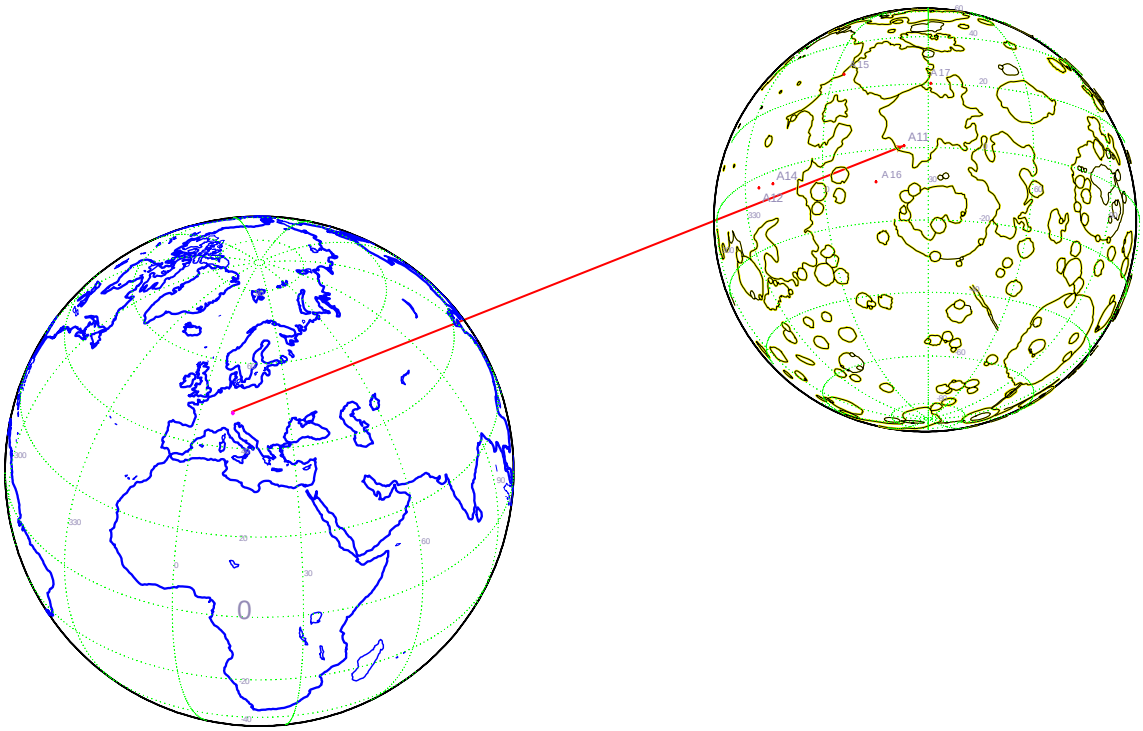


Bild 29-17: Beobachtung eines Punktes auf der Mondoberfläche von der Erdoberfläche aus. Der Pfeil weist von der deutschen Bodenstation in Weilheim – Lichtenau (WHM) zum Landeplatz von Apollo 11.

29.7 Der Mondorbiter

Künstliche Satelliten, die in eine Umlaufbahn um den Mond eingeschossen werden, werden üblicherweise als Mondorbiter bezeichnet. Die Berechnung der Bahn eines solchen Orbiters erfolgt ähnlich wie bei Erdsatelliten, prinzipiell mit sechs zeitabhängigen Bahnparametern. Diese werden von einem komplizierten Störmodell geprägt, wobei nicht so sehr die Asphärizität des Mondkörpers als vor allem die Dominanz der nahen Erde mit ihrem unregelmäßigen Gravitationsfeld einen Einfluss hat[2]. Für bahnanalytische Untersuchungen genügt jedoch in erster Näherung vor allem für Mond-nahe Orbiter wie bei der Erde der Einfluss des Hauptproblems mit den Harmonischen J_2, J_3, J_4 nach dem Modell von D. BROUWER [1959].

[1] Beachte: da Apollo 11 keine ALSEP Stationen hinterlassen hat, wurden die in BEISPIEL 1 genannten Messungen nur für die von Apollo 12, 14, 15, 16 und 17 hinterlassenen ALSEP Stationen durchgeführt.

[2] einige Studien zu Mondorbitern: OESTERWINTER, C. [1969]; GIACAGLIA, G. E. O. , MURPHY, J. P., FELSENTREGGER, T. L. [1970]; FERRARI, A., J. AND HEFTRON, W. G. [1973]; COOK, RICHARD A.; ANDREY B. SERGEYEVSKY; EDWARD A. BELBRUNO and THEODORE H. SWEETSER [1990]; COOK, RICHARD A. and THEODORE H. SWEETSER [1992]; PARK, SANG-YOUNG and JOHN L. JUNKINS [1994]; BECKMAN, MARK & MARCO CONCHA [1998]

29.7.1 Selenozentrische Bewegung eines Mondorbiters

Infolge der gebundenen Rotation des Mondes ist es sinnvoll, den Bahnknoten eines Mondorbiters in Bezug auf den Mondäquator auf die selenographische Länge des auf- oder absteigenden Knotens zu definieren und nicht wie bei Erdsatelliten prinzipiell mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens.

Da die Bahn eines Orbiters (im Wesentlichen) von der Rotation des Mondes unabhängig ist, muss die Bewegung, ähnlich wie bei Erdsatelliten, auf den Sternhimmel oder direkter auf die Ekliptik als Bezugsebene ausgerichtet werden. Wie bei Erdsatelliten wird dazu die mittlere lunare Sternzeit

$$\Theta_L = \Theta_{L0} + \dot{\Theta}_L \left(t - t_0\right) + \cdots \tag{29.282}$$

benötigt. Diese wird auf den Frühlingspunkt bezogen. Sie wird somit wegen der Beziehungen (29.168) durch den (Knick-) Winkel

$$\Theta_L = \Psi + \Phi = L_{\mathbb{C}} + 180° + \tau_L - \sigma_L \tag{29.283}$$

berechnet. Der Anfangswert Θ_{L0} wird zur Fundamentalepoche J2000.0 angenommen. Die mittlere geometrische Länge (29.4) (auf Seite 585) des Mondes liefert

$$L_{\mathbb{C}}\left(J2000.0\right) = 218°.3164325 \quad \Rightarrow \quad \Theta_{L0} = 38°.3164325 \ . \tag{29.284}$$

Die Variation der Sternzeit, damit die tropische Rate der Rotation des Mondes beträgt nach Beziehung (29.5)

$$\dot{\Theta}_L \triangleq n_{\mathbb{C}Ls} = 13°.176396476/\mathrm{d} + \cdots \ . \tag{29.285}$$

Unter Einschluss der physikalischen Librationen beträgt die lunare Sternzeit[1] (siehe in Anhang E (Band V))

$$\begin{aligned} \Theta_L = \Theta_{L0} + \dot{\Theta}_L + 3°.558\sin E_1 + 0°.121\sin E_2 - 0°.064\sin E_3 + \\ + 0°.016\sin E_4 + 0°.025\sin E_5 \end{aligned} \tag{29.286}$$

mit

$$E_1 = 125°.045 - 0°.052992\left(t - t_0\right), \ E_2 = 249°.390 - 0°.105984\left(t - t_0\right) \ ,$$
$$E_3 = 196°.694 - 13°.012000\left(t - t_0\right) \ . \ E_4 = 176°.630 + 13°.340716\left(t - t_0\right) \ ,$$
$$E_5 = 358°.219 - 0°.985600\left(t - t_0\right) \ .$$

Hier wird mit $\left(t - t_0\right)$ das Zeitintervall zur Fundamentalepoche in Tagen bezeichnet.

Es sei $\lambda_{M\Omega}$ die selenographische Länge des gewünschten Knotens. Längs des Mondäquators wird dann mit Hilfe der lunaren Sternzeit die lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens des Mondorbiters gebildet:

$$\alpha_{L\Omega} = \Theta_L + \lambda_{M\Omega} \ . \tag{29.287}$$

Die säkulare Drift der Knotenlänge eines Mondorbiters

$$\dot{\lambda}_{M\Omega} = -\dot{\Theta}_L + \dot{\alpha}_{L\Omega} \tag{29.288}$$

---

[1] Etwa nach AA1984, pp. E87-88, S6-S8, S31

ist auch beim Mond, wie auch auf der Erde, negativ, da die Drift des Knotens relativ klein ist. Die Bahnebene eines Mondorbiters driftet somit nach Westen (in Richtung absteigender selenographischer Länge) während die Rotation des Mondes in östlicher Richtung erfolgt.

Bezugnehmend auf das Mond-feste $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$ – System kann ein lunares „inertiales“ $\mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})}$ – Mondäquatorsystem eingeführt werden. Mit der Transformationsmatrix

$$a_{L\,jk} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_L & -\sin\Theta_L & 0 \\ \sin\Theta_L & \cos\Theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29.289}$$

wird die Basis durch die Transformation

$$\mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = a_{Lj}{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} \quad , \quad \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = a_L{}^j{}_k \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} \quad . \tag{29.290}$$

erhalten. In diesem System habe der Ortsvektor eines Mondorbiters die kartesische Darstellung

$$\mathbf{r}_M = y_A{}^j \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = x_A{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \, \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = x_A{}^k \, a_L{}^j{}_k \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} \quad . \tag{29.291}$$

Die Koordinaten werden transformiert nach

$$y_A{}^j = x_A{}^k \, a_L{}^j{}_k \quad , \quad x_A{}^k = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \quad . \tag{29.292}$$

Damit kann die Bewegung eines Mondorbiters auf die feste Mondoberfläche zurückgeführt werden.

BEISPIEL: Um einen Anhaltspunkt über die Bahndaten eines Mondorbiters zu bekommen, wird eine niedrige kreisförmige polnahe Bahn betrachtet[1] (Bild 29-18). Die vorgegebenen und abgeleiteten Bahnparameter sind in Tabelle 29-7 zusammengesetllt.

Periselen Höhe	$H_P = 100\,\mathrm{km}$
Aposelen Höhe	$H_A = 100\,\mathrm{km}$
Inklination	$i = 85°$
selenographische Länge des ersten absteigenden Knotens	$\lambda_{M\mathfrak{V}} = 330°$
Lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens	$\alpha_{L\Omega} = 348°.26521290$
Lunare Sternzeit zur Epoche 2018-02-19/12h	$\Theta_L = 18°.26521290$

[1] Daten des Projektes POLO (Polar Orbiting Lunar Observatory), siehe etwa in ESA [1981]. Die hier gezeigten Bilder entstammen DFVLR-Studien zu diesem Projekt.

große Bahnhalbachse	a = 1837.400 km
Exzentrizität	e = 0.0
Kreisbahngeschwindigkeit	$V_K = 1.633489$ km/s
Drift des Periselen	$\dot{\omega}_{Ls} = -0.1070606 \times 10^{-6}$ rad/s
Drift des aufsteigenden Knotens	$\dot{\alpha}_{L\Omega} = -0.19332174 \times 10^{-7}$ rad/s
Drift der mittleren Anomalie	$(M_{0L})^{\cdot}_{s} = -0.11807172 \times 10^{-6}$ rad/s
Drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_d} = 1^h\ 57^m\ 49^s.469$
Drakonitische Umläufe pro Tag	12.221835
Tropische Umlaufzeit	$\overline{P_t} = 1^h\ 57^m\ 49^s.315$
Sonnensynodische Umlaufzeit	$\overline{P_S} = 1^h\ 57^m\ 51^s.053$
Knotenlängenverschiebung pro Umlauf	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -1°.085930\ /P_d$
Knotenlängendrift	$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -13°.318251$ /Tag
Verschiebung der Sonnenzeit des Knotens pro drakonitischem Umlauf	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -0.3539$ Minuten

Tabelle 29-7: Bahndaten eines niedrigfliegenden kreisförmigen Mondorbiters auf polnaher Bahn

Die lunare Rektaszension der Bahn hat die Drift $\dot{\alpha}_{L\Omega} = -0°.095701$ /d. Dies führt mit Beziehung (29.288) auf die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -13°.318251$ /Tag, die somit etwas größer als die Rotationsrate $\dot{\Theta}_L$ ist (Formel (29.285)). Die Bodenspur des Orbiters driftet infolge der langsamen Rotation des Mondes sehr langsam in östlicher Richtung. Nach einem mittleren Sonnentag ist somit nur ein geringes Gebiet der Mondoberfläche, ein wichtiger Aspekt für die Bahnauslegung eines Mondorbiters (siehe Bild 29-19 und Bild 29-20).

Bemerkenswert ist also infolge der gegenüber der Erde etwa 81mal kleineren zentrischen Gravitationskonstante die Bahngeschwindigkeit von etwa 1.6 km/s. Die Umlaufzeit des Orbiters um den Mond beträgt knapp 2 Stunden. In Bild 29-21 und ist die Subsatellitenspur im Abstand 1 Minute getaktet. Dies gibt einen Eindruck, wie schnell eine Überdeckung der Mondoberfläche möglich sein wird.

BEISPIEL 2: Die Bahn eines Mondorbiters wird wesentlich durch die Abplattung des Mondkörpers geprägt, auch wenn diese etwa 5mal kleiner als der entsprechende Effekt (geprägt durch den J_2 − Term) für einen Erdsatelliten wirkt. Einen wesentlich größeren Einfluss hat im Rahmen des Dreikörperproblems Mond-Mondorbiter-Erde die nahe Erde als Hauptstörkörper

auf die Bahn eines Mondorbiters. Zur Abschätzung dieses Einflusses auf die wesentlichen Bahnelemente werden in Tabelle 29-8 die Daten für einen Mondorbiter mit (gegenüber BEISPIEL 1) leicht modifizierten Bahnparametern (a= 1840 km, e=0.01) für den Verlauf eines tropischen Jahres berechnet und mit dem Einfluss durch die, in diesem Fall auch als „Störkörper“ aufgefasste, Sonne verglichen[1].

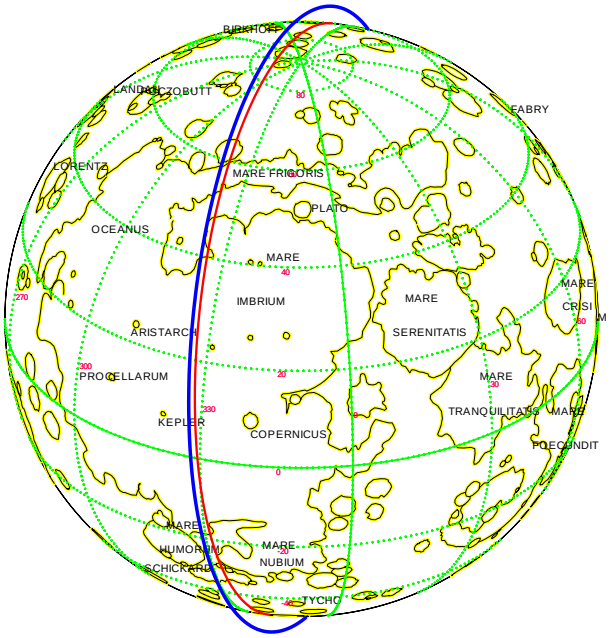


Bild 29-18: Bahn eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters mit Subsatellitenbahn in realistischen Größenverhältnissen

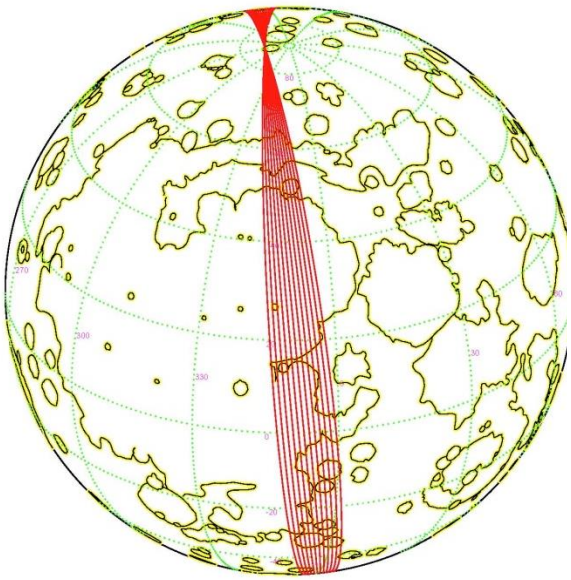


Bild 29-19: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in Parallelprojektion der Mondvorderseite

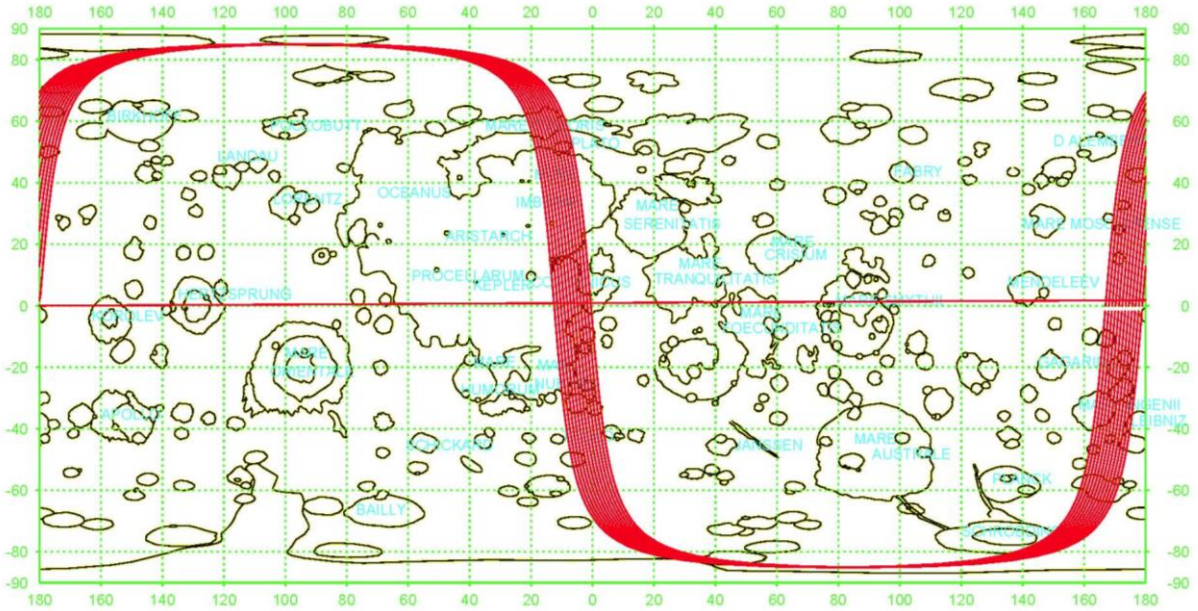


Bild 29-20: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in linearer Projektion der Gesamt-Mondoberfläche

[1] Abschätzungen durch *M. C. Eckstein* (1980), basierend auf Formeln in EL'YASBERG, P. E. [1967], p. 309

Die „Störeinflüsse“ durch die Erde sind größenordnungsmäßig etwa 100mal größer als durch die Sonne. Bemerkenswert ist die relativ kleine inertiale Drift des Bahnknotens. Die kleine Exzentrizität der betrachteten Bahn bewirkt eine bemerkenswerte inertiale Drift des Periselen. Von besonderem Interesse ist die Variation der Periselenhöhe. Die vorgegebenen Bahnparameter führen auf die Periselenhöhe $H_P = a_L(1-e_L) = 83.6\,\text{km}$. Die Variation der Periselenhöhe um $\pm 8.6\,\text{km}$ wirkt sich auf die Beobachtung der Mondoberfläche aus.◀

Attraktion	durch Erde	durch Sonne
Δa_L	0 km	0 km
Δe_L	$\pm 4.5\times10^{-3}$	$\pm 2.6\times10^{-5}$
Δi_L	$\pm 2°.3\times10^{-6}$	$\pm 1°.3\times10^{-8}$
$\Delta \alpha_{L\Omega}$	$-0°.9$	$-5°.1\times10^{-3}$
$\Delta \omega_L$	$+32°.0$	$+0°.17$
ΔH_P	$\pm 8.6\,\text{km}$	$\pm 4.8\times10^{-2}\,\text{km}$

Tabelle 29-8: Die säkularen Variationen der Keplerelemente eines Mondorbiters im Verlauf eines tropischen Jahres, mit Halbachse a = 1840 km, Exzentrizität e=0.01, Inklination i = 85°, mit der Perigäumshöhe $H_p = 82\,\text{km}$.

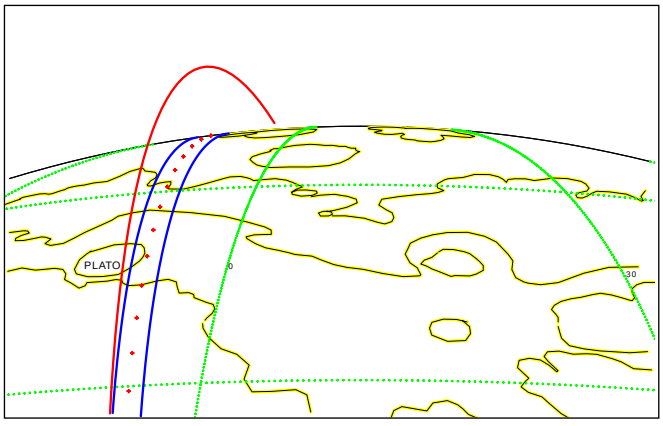


Bild 29-21: Überdeckungsstreifen eines querscannenden optischen Sensors mit Onboard Off-Nadir-Winkel $\beta = \pm 11°.5$ über der Mondoberfläche, Mondorbiter (H=100 km, e=0.0, i=85°) Zeittaktung der Bodenspur $\Delta t = 1\,\text{min}$. Ausschnitt einer Parallelprojektion oberhalb des Mare Imbrium

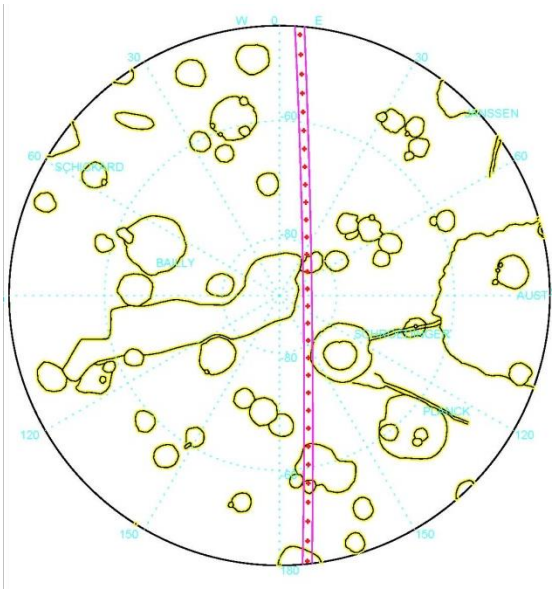


Bild 29-22: Überdeckungsstreifen über der Südpolgegend in stereographischer Projektion. Daten wie in Bild 29-21

29.7.2 Synchrone und stationäre Bewegung eines Mondorbiters

Eine Mond-synchrone Bahn eines Mondorbiters muss nach Formel (26.55) (Abschnitt 26.6 auf Seite 327) die mittlere große Halbachse

$$a_{Lsyn} = \sqrt[3]{\frac{\mu_{\mathbb{C}}}{\dot{\Theta}_L^2}} = 88452.1\,\mathrm{km} \tag{29.293}$$

haben[1]. Die Bahn einer solchen Bahn wie es auch bei Erdsatelliten bekannt ist (vgl. Abschnitt 26.6), wird im Wesentlichen durch die Bahnexzentrizität und die Neigung gegenüber der Mondäquatorebene geprägt.

Als BEISPIEL wird in

Bild 29-23 die mondsynchrone kreisförmige Bahn eines Mondorbiters mit der großen Bahnhalbachse a_{Lsyn} und der Inklination i=6° in wahren Größenverhältnissen in Parallelprojektion dargestellt. Die Umlaufzeit auf dieser Bahn ist entsprechend dem ersten Gesetz von *Cassini* genau der siderischen Umlaufzeit des Mondes um die Erde gleich, also 27.233 mittlerer Sonnentagen[2].

Der Bezugsknoten der Bahn für die selenographische Länge $\lambda_{M\Omega} = 180°$ liegt über der Rückseite des Mondes. Die Bahn dieses Mondorbiters befindet sich also gesehen von der Erde aus stets „hinter" dem Mond. Damit kann ein solcher Orbiter dann als Relaissatellit verwendet werden, wenn seine Bahn nicht durch die Mondscheibe verdeckt wird. Dies ist für den größten Teil seines Umlaufs (ungefähr 70%) der Fall. In diesem Fall können etwa über den mondsynchronen Orbiter die Daten von einem Mondorbiter, der sich auf einer Umlaufbahn um den Mond gerade hinter dem Mond befindet zur Erde übertragen werden.◀

29.7.3 Sonnensynchrone Mondorbiter

Um in erster Näherung zu untersuchen, ob es sonnensynchrone Mondorbiterbahnen geben kann, wird in der Formel[3] für die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens (20.15) auch im Fall des Erdmondes nur der Einfluss erster Ordnung durch den lunaren Potentialkoeffizienten $J_{2\mathbb{C}}$ berücksichtigt. Mit der tropischen mittleren Bewegung des Mondes um die Sonne lautet der Ausdruck für einen Mondorbiter mit der mittleren großen Epoche-Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ und der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ bezüglich des Mondäquators

$$n_{\odot} = -\frac{3}{2} J_{2\mathbb{C}} \sqrt{\frac{\mu_{\mathbb{C}}}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_M^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 + O\left(J_{2\mathbb{C}}^2\right) \quad . \tag{29.294}$$

Der J_2 – Term des Mondes ist um den Faktor 10 kleiner als der entsprechende Koeffizient der der Erde ist[4]: $J_{2\mathbb{C}} = 2.027 \times 10^{-4}$, der mittlere Äquatorradius des Mondes beträgt $R_{E\mathbb{C}} = 1738.390\,\mathrm{km}$, die selenozentrische Gravitationskonstante $\mu_{\mathbb{C}} = 4902.700\,\mathrm{km^3\,s^{-2}}$.

---

[1] Die hier benötigten physikalischen Parameter des Mondes sind in Anhang E, Band V, zusammengestellt

[2] Siehe den Zahlenwert in (29.41) auf Seite 590

[3] Aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[4] Die physikalischen Parameter des Erdmondes sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt

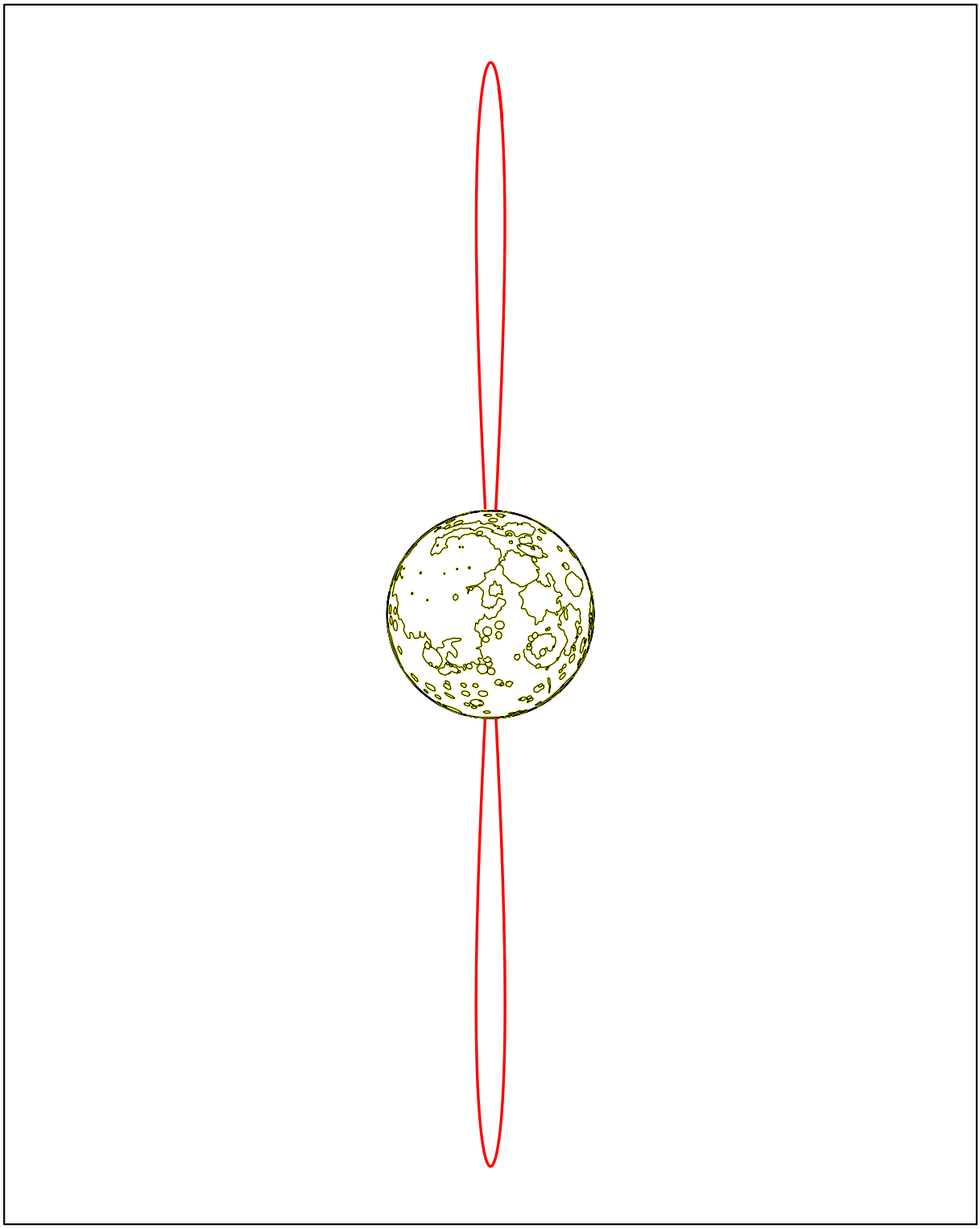


Bild 29-23: Kreisförmige mondsynchrone Mondorbiterbahn mit Inklination i = 6° bezüglich des Mondäquators in wahren Größenverhältnissen. Der Knoten der Orbiterbahn liegt über der Rückseite des Mondes.

Da sich der Mond zusammen mit der Erde als einem Doppelplanetensystem um die Sonne bewegt, hat der Mond dieselbe tropische mittlere Bewegung wie die Erde[1]: $n_{\odot} = 1.991063 \times 10^{-7}$ rad/s. Mit diesen Parametern werden mögliche sonnensynchrone Bahnen von Mondorbitern untersucht. Bahnen, deren Perizentrumshöhe (Periselenhöhe) unter 10 km liegt sowie solche, der große Bahnhalbachse kleiner als der Äquatorradius des Mondes ist, werden ausgeschlossen. Als Ergebnis zeigt Bild 29-24, dass sonnensynchrone Mondorbiterbahnen nur auf kreisnahen rückläufigen Bahnen mit Inklination größer als etwa 135° vorkommen können.

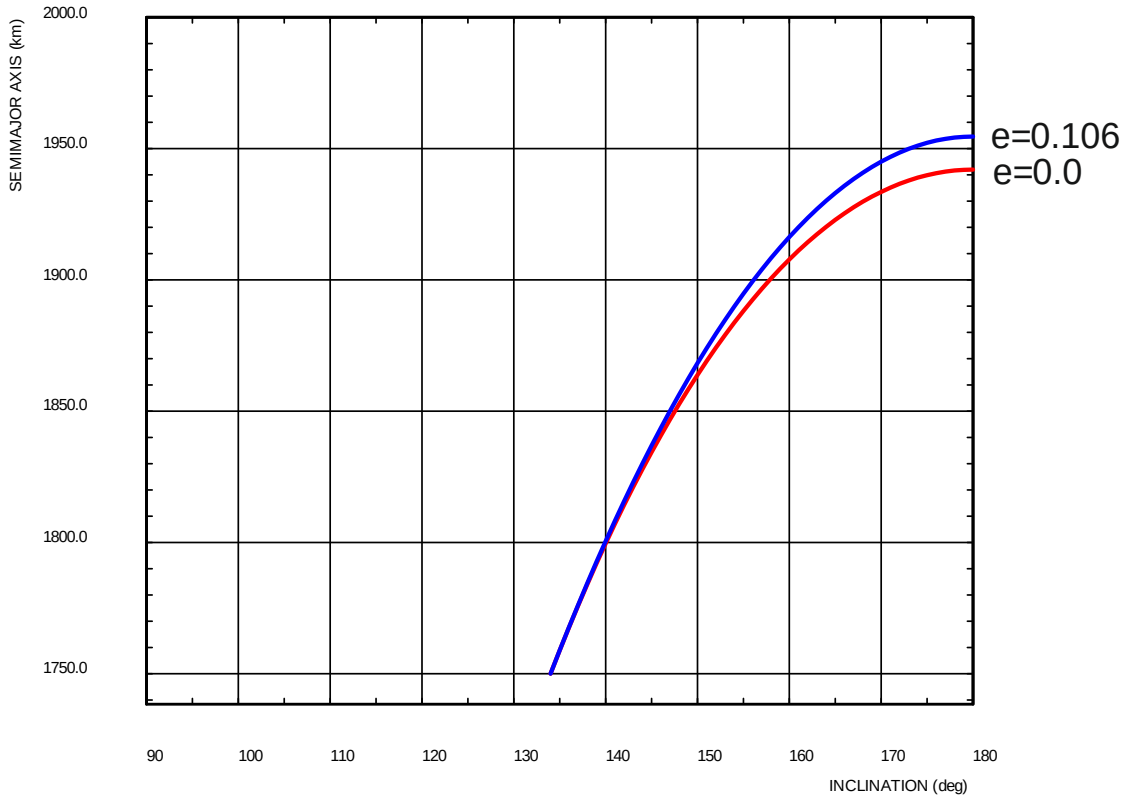


Bild 29-24: Die möglichen sonnensynchronen Bahnen eines Mond-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Periselenhöhe H_P = 10 km

29.8 Beobachtung eines Mondorbiters von der Erde aus

Der Ortsvektor eines Mondorbiters hat entsprechend den Beziehungen (29.291) auf das Mond-feste Äquatorsystem bezogen die Darstellung

$$\mathbf{r}_M = y_A{}^j \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = x_A{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \, \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} . \tag{29.295}$$

Um die Beobachtung des Orbiters von der Erde (beliebiges Topozentrum, Bodenstation, Erdsatellit, usw.) darstellen zu können, werden die Koordinaten des Orbiters im Frühlingspunkt-orientierten Erdäquatorsystem benötigt:

$$\mathbf{r}_M = x_{MA}{}^i \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.296}$$

[1] Aus Tabelle 9-1 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

Die entsprechende Transformation (29.236) erfolgt mit der Transformationsmatrix (29.231) und ergibt die kartesischen Koordinaten des Mondorbiters im Erdäquatorsystem:

$$x_{MA}{}^{i} = x_{A}{}^{k}\, a_{Dk}{}^{i} = y_{A}{}^{j}\, a_{Lj}{}^{k}\, a_{Dk}{}^{i} \quad . \tag{29.297}$$

Der topozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes $\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}$ ist aus der Beziehung (29.257) (auf Seite 649) bekannt. Damit lautet der topozentrische Ortsvektor des Mondorbiters an der Position S

$$\mathbf{r}_{TS} = \mathbf{r}_{T\mathbb{C}} + \mathbf{r}_{M} = x_{TS}^{i}\, \mathbf{p}_{i} \quad . \tag{29.298}$$

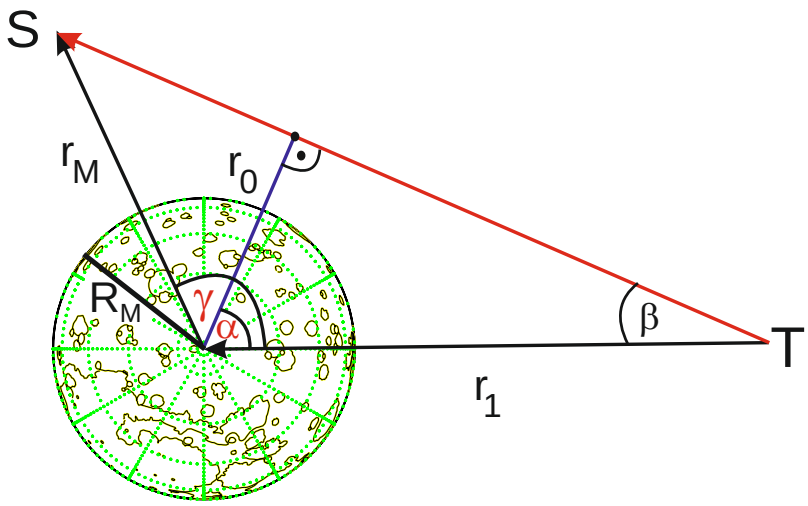


Bild 29-25: Zur Abschätzung, wann ein Mondorbiter S gesehen von einem irdischen Beobachter T hinter der Mondscheibe verschwindet

Der topozentrische Zwischenwinkel β zwischen Mondmittelpunkt und Orbiter wird nach Bild 29-25 berechnet aus

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{r}_{T\mathbb{C}} \cdot \mathbf{r}_{M}}{|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}| \cdot |\mathbf{r}_{M}|} = \frac{\mathbf{r}_{T\mathbb{C}} \cdot \mathbf{r}_{M}}{r_1 \cdot (z_1 + z_2)} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha < 90° \quad . \tag{29.299}$$

Der selenozentrische Abstand des Radiusvektors $\mathbf{r}_{TS}$ vom Mondmittelpunkt beträgt

$$r_0 = r_1 \sin\beta \quad . \tag{29.300}$$

Für die Sichtbarkeitsabschätzungen kann der Mond als Kugel mit Radius R_M aufgefasst werden. Als erste Bedingung, dass der Orbiter vom Topozentrum T aus gesehen hinter der Mondkugel verschwindet, ist somit

$$r_0 \le R_M \quad . \tag{29.301}$$

Diese Bedingung reicht nicht aus, da der Zwischenwinkel γ zwischen den selenozentrischen Richtungen zum Orbiter S und zum Topozentrum T größer als der Winkel α sein muss. Somit muss als zweite Bedingung erfüllt sein

$$\cos\alpha > \cos\gamma = -\frac{\mathbf{r}_{M} \cdot \mathbf{r}_{T\mathbb{C}}}{r_M\, r_1} \quad . \tag{29.302}$$

29.9 Mondsynodische Erdsatellitenbahnen

Erdsatelliten können einen Bezug zum Mond haben. Der kann etwa in einer Beobachtung der Mondoberfläche oder eines Mondorbiters bestehen, er kann zur Lageregelung des Satelliten mit Hilfe eines Mondsensors dienen, oder er kann zur Kommunikation mit einem Ort auf dem Mond oder einer Mondsonde genutzt werden.

29.9.1 Der synodische Bezug von Erdsatelliten auf den Mond

Ähnlich wie im Fall des sonnensynodischen Bezugs von Erdsatelliten wird zur Bahnanalyse in erster Näherung auf eine mittlere Bewegung von Mond und Erdsatellit zurückgegriffen. Dazu werden die Bewegungen von Satellit und Mond in die Erdäquatorebene projiziert und ihre mittleren Anteile verglichen.

Die Projektion der Satellitenbewegung erfolgt mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator nach Abschnitt 24.2.5 (auf Seite 300). Der mittlere Anteil dieser projizierten Bewegung wird auf den Frühlingspunkt mit der Rektaszension α bezogen. Es handelt sich hier nach Beziehung (24.47) (auf Seite 302) somit wegen $\dot{\alpha} = \overline{n_t} + \Delta\dot{\alpha}$ um die mittlere tropische Bewegung $\overline{n_t}$, wenn mit $\Delta\dot{\alpha}$ der periodische Anteil der Entwicklung für die Variation der Rektaszension bezeichnet wird.

Um die Bewegung des Mondes auf den Erdäquator zu beziehen, wird nach Bild 29-5 (auf Seite 625) vom aufsteigenden Knoten Ω_B der Bahn mit dem Erdäquator das Argument der Breite zum Ort des Mondes aus

$$u = \Delta_{\leftmoon} + l_{\leftmoon} - l_{\Omega\leftmoon} \tag{29.303}$$

gebildet. Hier wird mit $l_{\Omega\leftmoon} = \Omega_{\leftmoon} + \delta\Omega_{\leftmoon}$ die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn unter Einschluss der periodischen Variationen bezeichnet. Der Abstand Δ zwischen Ω_B und dem Knoten $\Omega_{\leftmoon}$ der Bahn mit der Ekliptik wird aus den Beziehungen (29.165) und (29.166) berechnet. Die Größen geometrische Länge $l_{\leftmoon}$ des Mondes und mittlere Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{\leftmoon}$ sind aus Abschnitt 29.1.3.2 (auf Seite 583) gegeben (Darstellungen (29.18) und (29.24)). Die Reduktion auf den Äquator $\alpha - \Omega_B - u$ kann mit der Projektion (24.38)

$$\tan\left[\left(\alpha - \Omega_B\right) - u\right] = -\frac{\left(1 - \cos i_B\right)\tan u}{1 + \cos i_B \tan^2 u} \tag{29.304}$$

berechnet werden. Die hier benötigte Neigung i_B der Mondbahn gegenüber dem Erdäquator ist aus Formel (29.164) berechenbar. Wie in der Entwicklung (24.45) (auf Seite 301) folgt

$$\alpha = \Omega_B + u + \Delta\alpha_{red} \quad , \tag{29.305}$$

wobei die periodischen Glieder $\Delta\alpha_{red}$ eine Folge der Reduktion auf den Äquator sind. Mit (29.303) wird

$$\alpha = \Omega_B + \Delta_{\leftmoon} + l_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon} + \Delta\alpha_{red} \quad . \tag{29.306}$$

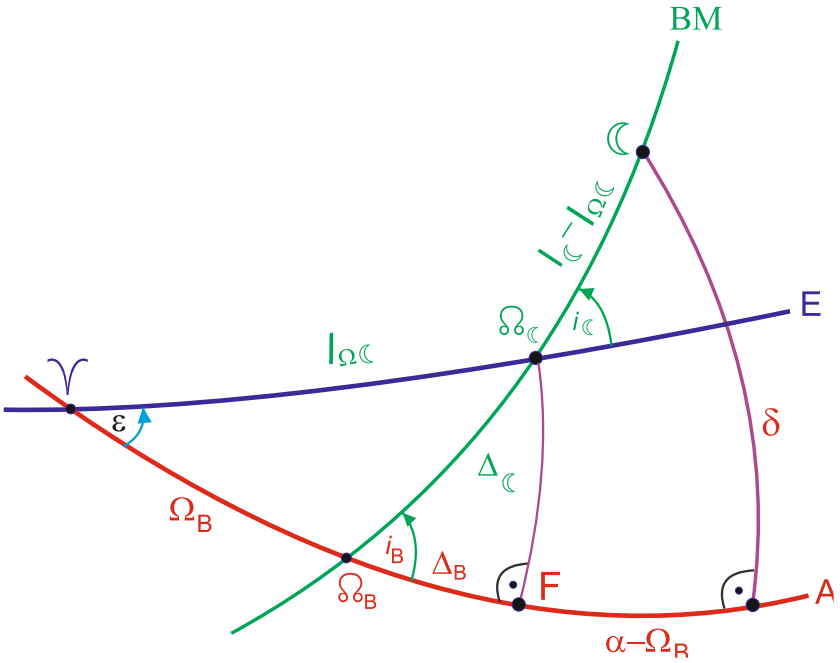


Bild 29-26: Zur Reduktion der Mondbahn BM auf den Erdäquator A über die Ekliptik E

Entsprechend Bild 29-26 werden auch die Bögen $\Delta_{\mathbb{C}}, \Omega_{\mathbb{C}}$ getrennt auf den Erdäquator projiziert

$$\Omega_B + \Delta_B = l_{\Omega\mathbb{C}} + \delta\left(\Omega_{\mathbb{C},red}\right) \quad , \quad \Delta_B = \Delta_{\mathbb{C}} + \delta\left(\Delta_{\mathbb{C},red}\right) \quad . \tag{29.307}$$

In allen diesen Ausdrücken sind säkulare und periodische Anteile enthalten:

$$\begin{aligned}
l_{\Omega\mathbb{C}} &= \Omega_{\mathbb{C}0} + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}s}\left(t - t_0\right) + \delta\left(\Omega_{\mathbb{C}}\right) \\
\Omega_B &= \overline{\Omega_{B0}} + \dot{\Omega}_{Bs}\left(t - t_0\right) + \delta\left(\Omega_B\right) \\
\Delta_{\mathbb{C}} &= \overline{\Delta_{\mathbb{C}0}} + \left(\Delta_{\mathbb{C}}\right)^{\cdot}_{s}\left(t - t_0\right) + \delta\left(\Delta_{\mathbb{C}}\right) \\
\Delta_B &= \overline{\Delta_{B0}} + \left(\Delta_B\right)^{\cdot}_{s}\left(t - t_0\right) + \delta\left(\Delta_B\right) \\
l_{\mathbb{C}} &= L_{\mathbb{C}} + n_{\mathbb{C}Ls}\left(t - t_0\right) + \delta\left(l_{\mathbb{C}}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{29.308}$$

Längs des Erdäquators gilt unter Vernachlässigung aller periodischen Variationen, sowohl derer in den Bahnparametern wie derer als Folge der Reduktion auf den Äquator, für die mittleren Bewegungen

$$\left(l_{\Omega\mathbb{C}}\right)^{\cdot}_{s} = \dot{\Omega}_{Bs} + \left(\Delta_B\right)^{\cdot}_{s} \quad . \tag{29.309}$$

Somit bleibt für die mittlere tropische Bewegung des Mondes

$$n_{\mathbb{C}} = n_{\mathbb{C}Ls} \quad . \tag{29.310}$$

Die mittlere Mond-synodische Bewegung eines Erdsatelliten beträgt daher, wenn noch die mittlere tropische Bewegung aus Beziehung (24.30) (auf Seite 298) eingesetzt wird,

$$n_M = \overline{n_t} - n_{\mathbb{C}} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\mathbb{C}} \quad . \tag{29.311}$$

Anmerkung: Eine heuristische Überlegung kann die Beziehung (29.309) bestätigen: Nach Bild 29-26 wird der Bogen $\Upsilon\Omega_{\mathbb{C}}$ gleichzeitig durchlaufen, d.h. mit derselben mittleren Geschwindigkeit, wie längs des Erdäquators der Bogen $\Upsilon\Omega_B F$. ◀

29.9.2 Bezug von Erdsatellitenbahnen auf die tropische Bewegung des Mondes

Eine mondsynchrone Erdsatellitenbahn mit der Bedingung $\dot{\Omega}_s = n_{\mathbb{C}}$ kann es nicht geben, da die mittlere Geschwindigkeit des Mondes mit $n_{\mathbb{C}} = n_{\mathbb{C}Ls} = 13°.176396476\cdots\left[1/\mathrm{d}\right]$ außerhalb des möglichen Bereiches der säkularen Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens mit maximalen Grenzen $\dot{\Omega}_s \in \left(-7°\left[1/\mathrm{d}\right], +7°\left[1/\mathrm{d}\right]\right)$ liegt (siehe dazu etwa Bild 23-15 in Abschnitt 23.4.1).

Je nach Aufgabenstellung können jedoch über eine Beziehung wie in Formel (29.311) Bezüge zwischen einem Erdsatelliten und dem Mond hergeleitet werden. Darauf wird im vorliegenden Bericht nicht weiter eingegangen.

30 Synodische Bewegung in Bezug auf ein interplanetares Objekt

Die Kenntnis der Bahnbewegung eines Planeten, Kleinen Planeten, Kometen oder eines künstlichen interplanetaren Raumflugkörpers wird in der Satellitenbahnmechanik etwa zur Beobachtung dieses Objektes von einem Erdsatelliten aus benötigt, ferner zur Beobachtung der Bewegung eines Mondes oder künstlichen Orbiters um den betreffenden Körper oder zur Auslegung einer interplanetaren Mission.

Die Bewegungsgleichung etwa in der allgemeinen Form[1] (5.1) bei Bezug auf das $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ *Leibniz*system

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \mathbf{r}_0 + b_T \mathbf{q}_0 + b_N \mathbf{c}_0 \qquad (30.1)$$

enthält den Bezug auf ein geeignetes Basissystem und als Komponenten vor allem die aus gravitativen Wechselwirkungen stammenden Zugbeschleunigungen und Druckbeschleunigungen eventuell etwa durch Strahlungsdruck, durch Bahnkorrekturen bei Sonden, u. ä..

Die hochgenaue Integration dieser Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung des gesamten bekannten Bewegungsmodells kann entweder für eines dieser Objekte direkt durchgeführt werden oder speziell im Fall der Planeten (wie von Sonne und Mond) durch eine fertig gerechnete Ephemeride ersetzt werden, die etwa mit *Tschebyscheff*-Approximationen eine hinreichende Genauigkeit zu erhalten gestattet. Als Beispiel dient die JPL-Ephemeride[2], etwa DE200, mit der Genauigkeit besser als 1". Die JPL-Berechnungen liegen derzeit auch den Ephemeriden im *Astronomical Almanac* zugrunde.

Für Missionsanalysezwecke genügt gewöhnlich eine Näherung der Planetenbewegung durch die mittlere Bewegung der Planeten (Abschnitt 30.2.2 auf S. 674), bei höheren Anforderungen durch eine analytische Formulierung durch Reihen, die auch periodische Bewegungseinflüsse berücksichtigen. Diese Formeln wurden durch *S. Newcomb* erstmals aufgestellt und werden seither ständig verfeinert (Abschnitt 30.2 auf S. 673). Die Beobachtung der interplanetaren Objekte unter Einschluss der Korrekturen aus der sphärischen Astronomie wird in Abschnitt 30.7 auf S. 709 behandelt, die Bewegung eines Planetenorbiters in Abschnitt 30.11 auf S. 753, eine Beobachtung unter Einschluss der physikalischen Ephemeriden der Planeten, wie sie etwa zur Beobachtung der synodischen Bewegung eines Planetenmondes oder -orbiters erforderlich ist, in Abschnitt 30.5 auf S. 707.

30.1 Einige Beziehungen zur Beschreibung der Planetenbewegung

Die bahnmechanische Darstellung der Bewegung interplanetarer Objekte erfolgt aus historischen Gründen in unterschiedlichen Parametersätzen, die alle auf der (speziellen) *Kepler*bewegung beruhen. Aus Referenzgründen werden die wichtigsten derartigen Parametersätze im Folgenden zusammengestellt.

Basis sind auch hier die *Kepler*elemente:

---

[1] Siehe auch Kapitel 4, Abschnitt 4.4.2 und Kapitel 5 (Band II)

[2] z. B. in: STANDISH, E. M. [1982], 'The JPL Planetary Ephemeris', *Cel. Mech.* ***26***, pp. 181–186;
in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], ch. 5, pp. 279–323, mit ausführlichen Literaturhinweisen

Große Bahnhalbachse	a	[AU]
Exzentrizität	e	
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i	[Grad]
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	Ω	[Grad]
Argument des Perihels	ω	[Grad]
Mittlere Anomalie zur Epoche t0	M_0	[Grad]
Epochezeit	t_0	

30.1.1 Bahnparameter der Planeten

Die mittleren Parameter („Elemente“) der Planeten werden üblicherweise mit

mittlere Länge des Perihels	$\tilde{\omega} := \omega + \Omega$	[Grad]
mittlere Länge des Planetenortes	$L := M_0 + \tilde{\omega}$	[Grad]

gegeben, woraus die *Kepler*elemente

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\omega} - \Omega \\ M_0 &= L - \tilde{\omega} \end{aligned} \tag{30.2}$$

berechnet werden können. Die hier gewählten mittleren Elemente $\tilde{\omega}$ und L werden wegen der Kleinheit der Exzentrizitäten sowie der Bahninklinationen der meisten Planetenbahnen als präziser als die originalen *Kepler*elemente angesehen. Sie werden daher u. a. auch im Astronomischen Jahrbuch (*Astronomical Almanac*) verwendet (vgl. die Daten der Planeten in Abschnitt 30.2.2 auf Seite 674).

30.1.2 Bahnparameter der kleinen Planeten

Für kleine Planeten werden vorzugsweise folgende Bewegungsparameter („Bahnelemente“) verwendet:

Periheldistanz	$q := a(1-e)$	[AU]
Exzentrizität	e	
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i	[Grad]
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	Ω	[Grad]
Argument des Perihels	ω	[Grad]
Perihel-Durchgangszeit	t_P	
Epochezeit	t_0	

Aus diesen Parametern kann die große Bahnhalbachse

$$a = \frac{q}{1-e} \ [AU] \tag{30.3}$$

berechnet werden. Damit lautet die mittlere (*Kepler*sche) Bewegung

$$n_K = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a^3}} \quad . \tag{30.4}$$

Die mittlere Anomalie zur Epoche t_0 wird dann berechnet aus

$$M_0 = n_K \left(t_0 - t_p\right) \frac{180°}{\pi} \quad ,$$

wenn M_0 im Gradmaß gewünscht wird.

BEISPIEL: Der kleine Planet 1992 QN aus der Gruppe der die Erdbahn kreuzenden Objekten („Earth crazer“) hat folgende Bahnelemente[1]

$q = 0.763138\ AU$

$e = 0.35920016$

$i = 9°.590474$

$\Omega = 356°.093745$

$\omega = 202°.123099$

$t_p = 1996, \text{März}, 10, 2^h, 14^m, 29^s.5872$

$t_0 = 1996, \text{Jan.}, 6, 0^h, 0^m, 0^s.0$

Bezugsepoche: $t_F = J2000.0$

Es ergeben sich mit der astronomischen Einheit[2]

$1\ AU = 149597870.0\ \text{km}$

und der heliozentrischen Gravitationskonstante

$\mu_\odot = 1.32712438 \times 10^{11}\ \text{km}^3/\text{s}^2$

die Werte

$a = 1.190915903\ AU = 178158485.640919\ \text{km}$

$n = 1.531955 \times 10^{-7}\ \frac{1}{\text{s}} = 8°.777456 \times 10^{-6}\ \frac{1}{\text{s}} = 0''.031598843\ \frac{1}{\text{s}} = 0°.758372\ \frac{1}{\text{d}}$

$M_0 = -48°.606653 = 311°.393347$ ◀

30.2 Genäherte Bewegung der Planeten

30.2.1 Wahre Bewegung der Planeten

Die hochgenauen Ephemeriden der Planeten, welche durch Integration der allgemeinen Bewegungsgleichung (30.1) erhalten werden, finden sich im Astronomischen Jahrbuch sowie heutzutage in einem aktuellen JPL-Band. Hier sind auch Programme zur Interpolation für beliebige Daten ent-

[1] Comet and Asteroid Ephemeris Group, MS 301-150 G, JPL, Feb. 1996

[2] Anhang E.1 (Band V)

halten. Im folgenden Abschnitt werden genäherte Daten zur Verfügung gestellt, die für die meisten Anwendungen ausreichend genau für bahnanalytische Zwecke sind.

Die Berechnungen aller Bewegungen von Körpern im Sonnensystem müssen in baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) erfolgen[1].

30.2.2 Mittlere Bewegung der Planeten

Die genäherte mittlere Bewegung der Planeten berücksichtigt bei Bezug auf einen Epochewert P_0 ausschließlich das lineare Variationsglied $P_s^{\cdot}$. Als Bezugsepoche wird eine Fundamentalepoche t_F gegeben. Bezogen darauf kann der (mittlere) Bahnparameter *P* des Planeten zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* berechnet werden

$$\bar{P} = \bar{P}_F + P_s^{\cdot}\left(t - t_F\right) \quad . \tag{30.5}$$

Die Epocheparameter werden üblicherweise mit der Dimension astronomische Einheit [AU] sowie Winkelgrößen im Gradmaß gegeben, die Variationen in astronomischen Einheiten pro Jahrhundert bzw. in Bogensekunden pro Jahrhundert. Das Jahrhundert wird zu 36525 julianischen (mittleren Sonnen-) Tagen gerechnet. Die Zeitdifferenz kann aus der julianischen Tagesnummer *Jd* und der Tageszeit *t* in Sekunden berechnet werden[2].

Bei dem derzeit üblichen Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 ist

$$\begin{aligned} Jd_F &= Jd_{J\,2000} = 2451545 \\ t_F &= t_{J\,2000} = 43200\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{30.6}$$

und es wird, wenn die Zeitspanne in Jahrhunderten angegeben wird,

$$T = \left[Jd - Jd_F + \frac{t - t_F}{86400} \right] \times \frac{1}{36525} \quad .$$

Im Einzelnen lauten (als ein derzeit aktuelles Beispiel) die mittleren Bahnparameter der Planeten[3] (die Parameter gelten als Mittelwerte für den Zeitraum A.D. 1800 bis A.D. 2050):

---

[1] Bis 1984 wurde statt TDB die Ephemeridenzeit E. T. verwendet. Dies muss bei der Rückrechnung auf Daten vor 1984 berücksichtigt werden. Allerdings kann ohne Verlust an Genauigkeit in diesem Fall die Ephemeridenzeit der TDB gleichgesetzt werden.

[2] Die julianische Tagesnummer wird in Anhang F (Band V) tabellarisch gegeben.

[3] aus: URBAN, E. S. and SEIDELMANN, P. K., ed. [2013], p. 338

Merkur

$$
\begin{aligned}
a &= 5.790922627\times10^{7} + 55.3512119\,T \quad \text{km} \\
&= 0.38709927 + 0.00000037\,T \quad AE \\
e &= 0.20563593 + 00001906\,T \\
i &= 7°.00497902 - 0°.00594749\,T \\
\Omega &= 48°.33076593 - 0°.12534081\,T \\
\tilde{\omega} &= 77°.45779628 + 0°.16047689\,T \\
\omega &= 29°.12703035 - 0°.2858177\,T \\
M_0 &= 174°.7925272 + 7°.545556\times10^{-5}\,T \\
L &= 252°.25032350 + 149472°.67411175\,T
\end{aligned}
$$

Venus

$$
\begin{aligned}
a &= 1.082094740\times10^{8} + 583.431693\,T \quad \text{km} \\
&= 0.72333566 + 0.00000390\,T \quad AE \\
e &= 0.00677672 - 0.00004107\,T \\
i &= 3°.39467605 - 0°.00078890\,T \\
\Omega &= 76°.67984255 - 0°.27769418\,T \\
\tilde{\omega} &= 131°.60246718 + 0°.00268329\,T \\
\omega &= 54°.922624630 + 0.280377470\,T \\
M_0 &= 50°.376632320 + 0°.072816814\,T \\
L &= 181°.97909950 + 58517°.81538729\,T
\end{aligned}
$$

Baryzentrum Erde-Mond

$$
\begin{aligned}
a &= 1.495982605\times10^{8}\,k\text{m} \\
&= 1.00000261AE + 0.00000562\,T \\
e &= 0.01671123 - 0.00004392\,T \\
i &= 0°.00001531 - 0°.01294668\,T \\
\Omega &= 0°.0 - 0°.0\,T \\
\tilde{\omega} &= 102°.93768193 + 0°.32327364\,T \\
\omega &= 102°.93768193 + 0°.32327364\,T \\
M_0 &= 357°.5268897 + 35999.0491762\,T \\
L &= 100°.46457166 + 35999°.37244981\,T
\end{aligned}
$$

Mars[1]

$$
\begin{aligned}
a &= 2.27943821361\times10^{8} + 2224.5203269\,T \text{ km} \\
&= 1.52371034 + 0.00001487\,T \; AE \\
e &= 0.093339410 + 0.00007882\,T \\
i &= 1°.84969142 - 0°.00813131\,T \\
\Omega &= 49°.55953891 - 0°.29257343\,T \\
\tilde{\omega} &= -23°.94362959 + 0°.44441088\,T \\
\omega &= 286°.4968315 + 0°.73698431\,T \\
M_0 &= 19°.390197540 - 0°.97685\,T \\
L &= -4°.55343205 + 19140°.30268499\,T
\end{aligned}
$$

Jupiter

$$
\begin{aligned}
a &= 7.78340813051\times10^{8} + 17363.8247709\,T \text{ km} \\
&= 5.20288700 - 0.00011607\,T \; AE \\
e &= 0.04838624 - 0.00013253T \\
i &= 1°.30439695 - 0°.00183714\,T \\
\Omega &= 100°.47390909 + 0°.20469106\,T \\
\tilde{\omega} &= 14°.72847983 + 0°.21252668\,T \\
\omega &= 274°.25457054 - 0°.007835620\,T \\
M_0 &= 19°.66796 + 1°.5407000\,T \\
L &= 34°.39644051 + 3034°.74612775\,T
\end{aligned}
$$

Saturn

$$
\begin{aligned}
a &= 1.4266664075\times10^{9} - 18559.1117522\,T \text{ km} \\
&= 9.53667594 - 0.00124060\,T \; AE \\
e &= 0.05386179 - 0.00050991T \\
i &= 2°.48599187 + 0°.00193609\,T \\
\Omega &= 113°.66242448 - 0°.28867794\,T \\
\tilde{\omega} &= 92°.59887831 - 0°.41897216\,T \\
\omega &= 338°.93645383 - 0°.13029422\,T \\
M_0 &= 317°.35536593 + 0°.772925\,T \\
L &= 49°.95424423 + 1222°.49362201\,T
\end{aligned}
$$

[1] Siehe hierzu etwa auch die Theorie 1. Ordnung des Mars von G. M. CLEMENCE [1949]

Uranus

$$
\begin{aligned}
a &= 2.870658157\times10^{9} - 2.934751175\times10^{5}\,T \text{ km} \\
&= 19.18916464 - 0.00196176\,T \; AE \\
e &= 0.04725744 - 0.00004397\,T \\
i &= 0°.77263783 - 0°.00242939\,T \\
\Omega &= 74°.01692503 + 0°.04240589\,T \\
\tilde{\omega} &= 170°.9542763 + 0°.40805281\,T \\
\omega &= 96°.93735127 - 0°.3564692\,T \\
M_0 &= 142°.283828210 - 0°.071480556\,\frac{257''.33}{3600.0}\,T \\
L &= 313°.23810451 + 428°.48202785\,T
\end{aligned}
$$

Neptun

$$
\begin{aligned}
a &= 4.498396396\times10^{9} - 3.9330776\times10^{5}\,T \text{ km} \\
&= 30.06992276 + 0.00026291T \; AE \\
e &= 0.00859048 + 0.00005105\,T \\
i &= 1°.7700437 - 0°.00035372\,T \\
\Omega &= 131°.78422574 - 0°.00508664\,T \\
\tilde{\omega} &= 44°.96476227 - 0°.32241464\,T \\
\omega &= 273°.1805365 - 0°.317328\,T \\
M_0 &= 259°.915208 + 0°.361069444\,T \\
L &= -55°.12002969 + 218°.45945325\,T
\end{aligned}
$$

Pluto

$$
\begin{aligned}
a &= 5.906440569\times10^{9} - 4.726694301\times10^{4}\,T \text{ km} \\
&= 39.48211675 - 0.00031596T \; AE \\
e &= 0.24882730 + 0.00005170\,T \\
i &= 17°.14001206 + 0°.00004818\,T \\
\Omega &= 110°.30393684 - 0°.01183482\,T \\
\tilde{\omega} &= 224°.06891629 - 0°.04062942\,T \\
\omega &= 113°.7649795 - 0°.0287946\,T \\
M_0 &= 14°.86012204 + 8°.466680556\,T \\
L &= 238°.92903833 + 145°.20780515\,T
\end{aligned}
$$

Die Genauigkeiten dieser Bahndaten sind in der folgenden Tabelle 30-1 zusammengestellt:

	Rektaszension		Deklination		Entfernung	
	[arcsec]	[1000 km]	[arcsec]	[1000 km]	[arcsec]	[1000 km]
Merkur	20”	6	5”	1	5”	1
Venus	20”	10	5”	2	20”	10
Mars	25”	25	30”	30	40”	40
Jupiter	300”	1000	100”	350	200”	600
Saturn	600”	4000	200”	1400	600”	4000
Uranus	60”	800	25”	400	125”	2000
Neptun	40”	800	20”	400	100”	2000
Pluto	40”	1100	10”	250	70”	2000

Tabelle 30-1: Die Genauigkeiten der mittleren Bahnparameter der Planeten im Zeitraum 1800–2050 gegeben in heliozentrischen äquatorialen Koordinaten Rektaszension, Deklination und Distanz (nach SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 316)

30.3 Das Koordinatensystem einer Planetenbahn

Die hier behandelten Koordinatensysteme schließen an die in Kapitel 8 (Band II) vorgestellten Koordinatensysteme an und stellen den Bezug zu diesen Systemen her.

Alle hier behandelten Systeme sind geradlinige Systeme (vgl. Kapitel 6 in Band II).

30.3.1 Das Bahnsystem eines Planeten

Das Planetenbahnsystem ist auf die Bahnebene eines Planeten oder eines anderen interplanetaren Objektes (kleiner Planet, Komet, Interplanetarer Raumflugkörper) bezogen. Der Mittelpunkt des Systems ist üblicherweise das Baryzentrum des Sonnensystems (baryzentrisches System), es kann aber auch durch lineare Transformation der Sonnenmittelpunkt sein (heliozentrisches System), oder der Mittelpunkt des betreffenden Planeten oder interplanetaren Objekts (z. B. aerozentrisches System, jovizentrisches System usw.) oder von einem anderen bewegten Objekt „mitgenommen“ werden (z.B. auf einer Raumsonde). Das Basissystem (siehe Bild 29-4 auf S. 616) $\mathbf{q}_j^{(B)}$ wird üblicherweise so gewählt, dass $\mathbf{q}_1^{(B)}$ zum aufsteigenden Knoten Ω der Bahnebene mit der Ekliptikebene, $\mathbf{q}_2^{(B)}$ in der Bahnebene gegenüber dem Knoten um 90° in positiver Bewegungsrichtung des betrachteten Objektes gedreht ist und $\mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)}$ zu dem dadurch definierten (Nord-) Pol des Bahnsystems weist.

Als Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ werden die *Länge in der Bahn* in der Bahnebene vom Knoten rechtläufig im Sinne der Bewegung des Planeten im Gradmaß gezählt

$$0° \leq l_B \leq 360° \quad , \tag{30.7}$$

die *Breite* positiv von der Bahnebene zum Nordpol der Bahn, negativ zu ihrem Südpol

$$-90° \;\le\; b_B \;\le\; 90° \quad . \tag{30.8}$$

Ein Objekt hat in diesem System den heliozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l_B, b_B\right] \quad . \tag{30.9}$$

Mit kartesischen Koordinaten x_{Bi} hat der Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} \;=\; x_B^{\,i}\,\mathbf{q}_j^{(B)} \quad . \tag{30.10}$$

Somit ist der Zusammenhang der Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ mit den kartesischen Koordinaten x_{Bi} gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{B1} &= r\cos b_B \cos l_B \\ x_{B2} &= r\cos b_B \sin l_B \\ x_{B3} &= r\sin b_B \quad . \end{aligned} \tag{30.11}$$

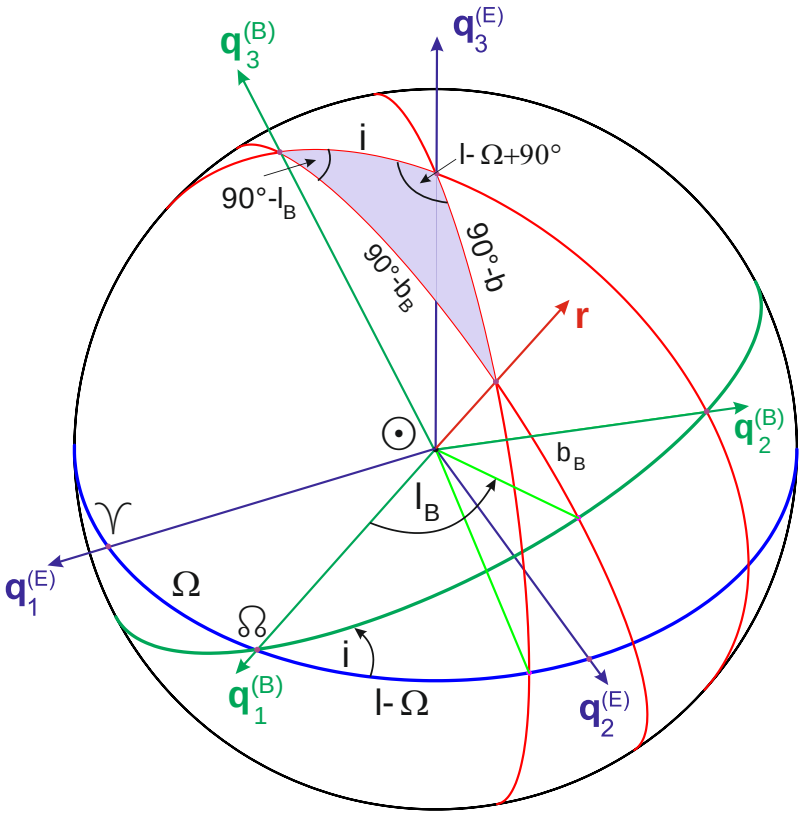


Bild 30-1**:** Das $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – Bahnsystem eines Planeten oder eines anderen interplanetaren Objektes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik-System

Die Polarkoordinaten des Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt8.2.1

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_B^{\ i}\, x_{Bi}} \\
\sin b_B &= \frac{x_{B3}}{r} \quad , \quad \cos b_B = \sqrt{1-\sin^2 b_B} \\
\cos l_B &= \frac{x_{B1}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\sin l_B &= \frac{x_{B2}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.12}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.123)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{B1} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B1} - \dot{b}_B\, x_{B3}\cos l_B - \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B2} \\
\dot{x}_{B2} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B2} - \dot{b}_B\, x_{B3}\sin l_B + \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B1} \\
\dot{x}_{B3} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B3} + r\,\dot{b}_B\cos b_B
\end{aligned}
\tag{30.13}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{x_B^{\ i}\,\dot{x}_{Bi}}{r} \\
\left(l_B\right)^{\cdot} &= \frac{x_{B1}\,\dot{x}_{B2} - x_{B2}\,\dot{x}_{B1}}{r^2\cos^2 b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\dot{b}_B &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_{B3}\,\dot{x}_{B1} - x_{B1}\,\dot{x}_{B3}\right)\cos l_B - \left(x_{B2}\,\dot{x}_{B3} - x_{B3}\,\dot{x}_{B2}\right)\sin l_B\right] \quad , \quad \left(r > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.14}
$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_B^{\ j}\,\mathbf{q}_j^{(B)} + x_B^{\ j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(B)} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(B)}} + \mathbf{D}_{q^{(B)}} \times \mathbf{r} \; . \tag{30.15}
$$

berechnen zu können, muss zuvor die Variation $\dot{\mathbf{q}}_j^{(B)}$ bzw. der Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(B)}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System zur Verfügung gestellt werden.

30.3.2 Transformation zwischen Planetenbahnsystem und Ekliptiksystem

Der Bezug des Planetenbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum, zum Beispiel das Baryzentrum des Sonnensystems, bezogene) Ekliptiksystem hergestellt. Seien die $\mathbf{q}_k^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems, $\mathbf{q}_j^{(B)}$ die Basisvektoren im Planetenbahnsystem. In der Beziehung

$$
\mathbf{q}_k^{(E)} = a_k^{\ j}\,\mathbf{q}_j^{(B)} \tag{30.16}
$$

wird nach Bild 29-4 auf S. 616 das Ekliptiksystem um den Ekliptikpol mit der Länge des aufsteigenden Knotens Ω in den Frühlingspunkt und um den Knoten mit der Inklination i in die Planetenbahnebene gedreht. Die Drehung lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \cos\Omega\ \mathbf{q}_1^{(B)} - \sin\Omega\cos i\ \mathbf{q}_2^{(B)} + \sin\Omega\sin i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \sin\Omega\ \mathbf{q}_1^{(B)} + \cos\Omega\cos i\ \mathbf{q}_2^{(B)} - \cos\Omega\sin i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \qquad\qquad \sin i\ \mathbf{q}_2^{(B)} + \qquad \cos i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \quad .
\end{aligned} \tag{30.17}$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$\left(a_i{}^j\right) = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\cos i\sin\Omega & \sin i\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \tag{30.18}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\Omega \\
a_{12} &= -\sin\Omega\cos i \\
a_{13} &= \sin\Omega\sin i \\
a_{21} &= \sin\Omega \\
a_{22} &= \cos\Omega\cos i \\
a_{23} &= -\cos\Omega\sin i \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= \sin i \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{30.19}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{\Omega}\,a_{21} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{\Omega}\,a_{22} + (i)^{\cdot}\,a_{13} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\Omega}\,a_{23} - (i)^{\cdot}\,a_{12} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\Omega}\,a_{11} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\Omega}\,a_{12} + (i)^{\cdot}\,a_{23} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\Omega}\,a_{13} - (i)^{\cdot}\,a_{22} \\
\dot{a}_{31} &= 0 \\
\dot{a}_{32} &= (i)^{\cdot}\,a_{33} \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot}\,a_{32} \quad .
\end{aligned} \tag{30.20}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(B)} = b_j{}^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} \tag{30.21}$$

ist daher mit nach Abschnitt 6.1.3 und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right) = 1$ und mit Formel (6.30) $b_i{}^j = a_j{}^i$, in Matrixschreibweise[1]

$$\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.22}$$

[1] Siehe auch Abschnitt 6.3.2 (Band II)

Seien y^i die Komponenten eines heliozentrischen Ortsvektors im $\mathbf{q}_i$-Ekliptiksystem, gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} = y^i\,a_i{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} = x_B{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} + y^i\,\dot{\mathbf{q}}_i^{(E)} = \dot{x}_B{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} + x_B{}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(B)} \end{aligned} \tag{30.23}$$

für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_B{}^j &= a_i{}^j\,y^i \\ y^i &= a^i{}_j\,x_B{}^j \end{aligned} \tag{30.24}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_B{}^j &= \dot{a}_i{}^j\,y^i + a_i{}^j\,\dot{y}^i \\ \dot{y}^i &= \dot{a}^i{}_j\,x_B{}^j + a^i{}_j\,\dot{x}_B{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.25}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{B1} &= y_1\cos\Omega + y_2\sin\Omega \\ x_{B2} &= -y_1\sin\Omega\cos i + y_2\cos\Omega\cos i + y_3\sin i \\ x_{B3} &= y_1\sin\Omega\sin i - y_2\cos\Omega\sin i + y_3\cos i \end{aligned} \tag{30.26}$$

und für die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenbahnsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_{B1} &= \dot{y}_1\cos\Omega + \dot{y}_2\sin\Omega + \dot{\Omega}\left(-y_1\sin\Omega + y_2\cos\Omega\right) \\ \dot{x}_{B2} &= -\dot{y}_1\sin\Omega\cos i + \dot{y}_2\cos\Omega\cos i + \dot{y}_3\sin i - \dot{\Omega}\,x_{B1}\cos i + \dot{(i)}\,x_{B3} \\ \dot{x}_{B3} &= \dot{y}_1\sin\Omega\sin i - \dot{y}_2\cos\Omega\sin i + \dot{y}_3\cos i + \dot{\Omega}\,x_{B1}\sin i - \dot{(i)}\,x_{B2} \quad . \end{aligned} \tag{30.27}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{B1}\cos\Omega - x_{B2}\sin\Omega\cos i + x_{B3}\sin\Omega\sin i \\ y_2 &= x_{B1}\sin\Omega + x_{B2}\cos\Omega\cos i - x_{B3}\cos\Omega\sin i \\ y_3 &= \phantom{x_{B1}\sin\Omega} + x_{B2}\sin i + x_{B3}\cos i \end{aligned} \tag{30.28}$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_{B1}\cos\Omega - \dot{x}_{B2}\sin\Omega\cos i + \dot{x}_{B3}\sin\Omega\sin i - \dot{\Omega}\,y_2 + \dot{(i)}\,y_3\sin\Omega \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_{B1}\sin\Omega + \dot{x}_{B2}\cos\Omega\cos i - \dot{x}_{B3}\cos\Omega\sin i + \dot{\Omega}\,y_1 - \dot{(i)}\,y_3\cos\Omega \\ \dot{y}_3 &= \dot{x}_{B2}\sin i + \dot{x}_{B3}\cos i + \dot{(i)}\left(x_{B2}\cos i - x_{B3}\sin i\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.29}$$

Es seien $r\left[l,b\right]$ die Polarkoordinaten eines Punktes im Ekliptiksystem, $r\left[l_B,b_B\right]$ im Planetenbahnsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l,b\right] = r\left[l_B,b_B\right] \tag{30.30}$$

mit den Formeln (29.129) und (29.131) oder direkt aus Bild 29-4 auf S. 616 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos l_B\cos b_B &= \cos\left(l-\Omega\right)\cos b \\ \sin l_B\cos b_B &= \sin\left(l-\Omega\right)\cos b\cos i + \sin b\sin i \\ \sin b_B &= -\sin\left(l-\Omega\right)\cos b\sin i + \sin b\cos i \end{aligned} \tag{30.31}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\cos(l-\Omega)\cos b &= \cos l_B \cos b_B \\ \sin(l-\Omega)\cos b &= \sin l_B \cos b_B \cos i - \sin b_B \sin i \\ \sin b &= \sin l_B \cos b_B \sin i + \sin b_B \cos i\end{aligned} \tag{30.32}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenbahnsystem

$$\begin{aligned}(l_B)^{\cdot}\cos b_B &= \left((l)^{\cdot}-\dot{\Omega}\right)\cos b\left[\sin(l-\Omega)\sin l_B+\cos(l-\Omega)\cos i\cos l_B\right]+ \\ &+\dot{b}\left[\cos(l-\Omega)\sin b\sin l_B+\left(-\sin(l-\Omega)\sin b\cos i+\cos b\sin i\right)\cos l_B\right]+ \\ &+(i)^{\cdot}\sin b_B\cos l_B\end{aligned} \tag{30.33}$$

$$\begin{aligned}\dot{b}_B &= \left((l)^{\cdot}-\dot{\Omega}\right)\cos b\left\{-\cos(l-\Omega)\sin i\cos b_B+\right. \\ &\left.+\left[\sin(l-\Omega)\cos l_B-\cos(l-\Omega)\cos i\sin l_B\right]\sin b_B\right\}+ \\ &+\dot{b}\left\{\left[\sin(l-\Omega)\sin b\sin i+\cos b\cos i\right]\cos b_B+\right. \\ &\left.+\left[\cos(l-\Omega)\sin b\cos l_B+\left(\sin(l-\Omega)\sin b\cos i-\cos b\sin i\right)\sin l_B\right]\sin b_B\right\}- \\ &-(i)^{\cdot}\sin l_B\end{aligned} \tag{30.34}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned}(l)^{\cdot}\cos b &= \dot{\Omega}\cos b+ \\ &+(l_B)^{\cdot}\cos b_B\left[\sin l_B\sin(l-\Omega)+\cos l_B\cos i\cos(l-\Omega)\right]+ \\ &+\dot{b}_B\left[\cos l_B\sin b_B\sin(l-\Omega)-\left(\sin l_B\sin b_B\cos i+\cos b_B\sin i\right)\cos(l-\Omega)\right]- \\ &-(i)^{\cdot}\sin b\cos(l-\Omega)\end{aligned} \tag{30.35}$$

$$\begin{aligned}\dot{b} &= (l_B)^{\cdot}\cos b_B\left\{\cos l_B\sin i\cos b+\right. \\ &\left.+\left[\sin l_B\cos(l-\Omega)-\cos l_B\cos i\sin(l-\Omega)\right]\sin b\right\}+ \\ &+\dot{b}_B\left\{\left[-\sin l_B\sin b_B\sin i+\cos b_B\cos i\right]\cos b+\right. \\ &\left.+\left[\cos l_B\sin b_B\cos(l-\Omega)+\right.\right. \\ &\left.\left.+\left(\sin l_B\sin b_B\cos i+\cos b_B\sin i\right)\sin(l-\Omega)\right]\sin b\right\}+ \\ &+(i)^{\cdot}\sin(l-\Omega)\quad .\end{aligned} \tag{30.36}$$

BEISPIEL: Der Pol der Planetenbahnebene hat die ekliptikale Darstellung

$$l_{Pol} = \Omega + 270^\circ \quad , \quad b_{Pol} = 90^\circ - i \quad , \quad (l_{Pol})^{\cdot} = \dot{\Omega} \quad , \quad \dot{b}_{Pol} = -(i)^{\cdot} \tag{30.37}$$

30.4 Das Planetenäquatorsystem (bezogen auf IAU-Vektor)

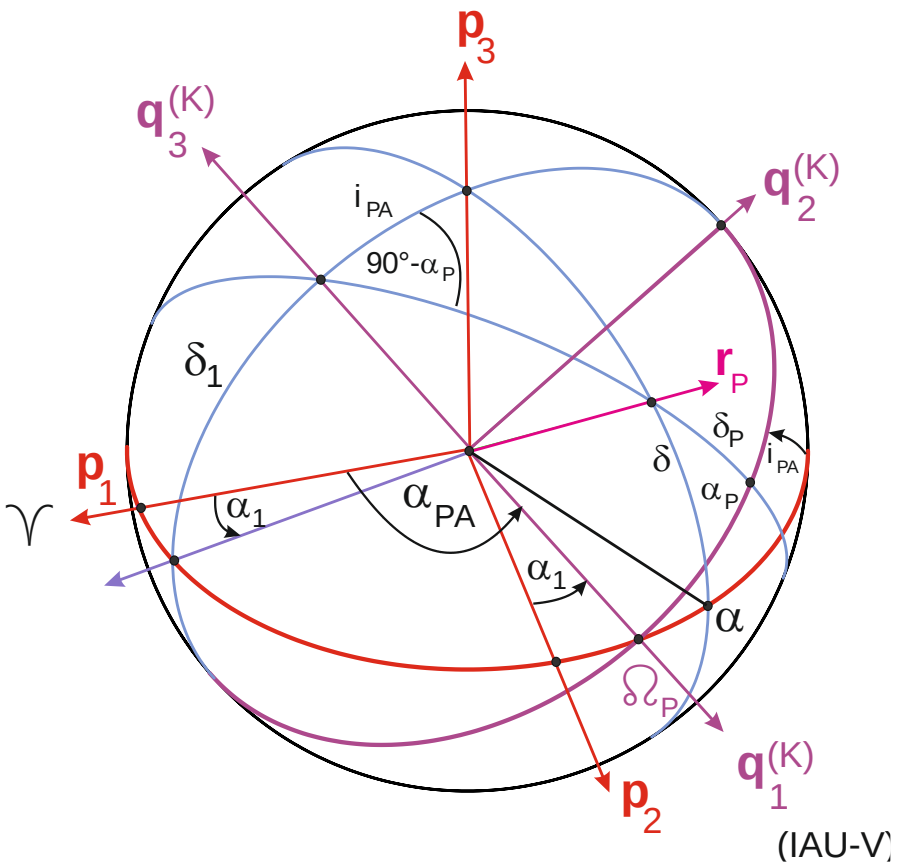


Bild 30-2: Das $\mathbf{q}_j^{(K)}$ – Planetenäquatorsystem bei Bezug auf den IAU-Vektor $\left(\mathbf{q}_1^{(K)}\right)$, Bezug zum $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem, das hier durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt des Planeten transformiert ist

Die Bewegung eines (Planeten-) Orbiters um einen Planeten wird üblicherweise in einem auf die Äquatorebene des Planeten bezogenem äquatorialem System beschrieben, ähnlich wie es bei der Bewegung von Erdsatelliten im (Frühlingspunkt-bezogenen) Erdäquatorsystem der Fall ist. Da das Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem in der Raumfahrt das Basissystem ist, auf das alle raumfahrtspezifischen Bewegungsvorgänge bezogen werden, muss auch das Planetenäquatorsystem auf das Erdäquatorsystem bezogen werden, was auch ohne Zwischenschritte möglich ist. Werden Planeten- und Erdäquatorsystem zum Schnitt gebracht (siehe Bild 30-2 auf S. 684), so wird der aufsteigende Knoten des Planetenäquatorsystems bezüglich des Erdäquators als Ausgangspunkt der Zählung auf dem Planetenäquator gewählt. Dadurch wird als erster Winkel eines Polarkoordinatensystems die (relative) Planetenäquator-bezogene *Rektaszension* („planetare Rektaszension“) definiert. Als Nordpol des Planetensystems wird der Pol definiert, der nördlich der invariablen Ebene des Sonnensystems liegt.

Die Einheitsvektoren $\mathbf{q}_j^{(K)}$ seien die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems. Der $\mathbf{q}_1^{(K)}$ – Vektor liegt in Richtung des aufsteigenden Knotens Ω_P des Planetenäquators bezüglich des Erdäquators. Dieser Vektor wird als *IAU-Vektor* bezeichnet, der für eine bestimmte Epoche (derzeit die Fundamentalepoche J2000) definiert ist[1]. $\mathbf{q}_3^{(K)}$ ist zum Nordpol des Planeten gerichtet, $\mathbf{q}_2^{(K)} = \mathbf{q}_3^{(K)} \times \mathbf{q}_1^{(K)}$

[1] vgl. *Mars Observer*, Planetary Constants and Models, JPL D-3444, November 1990, pp. 2-10, 2-11

ergänzt das Rechtssystem. Die (planetare) Rektaszension wird positiv im Sinn des $\mathbf{q}_1^{(K)}, \mathbf{q}_2^{(K)}$ – Systems gezählt.

Der planetare Nordpol wird in dem auf den Frühlingspunkt bezogenen Erdäquatorsystem in äquatorialen Koordinaten (α_1, δ_1) gegeben (im astronomischen Almanach bezogen auf den mittleren Erdäquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Fundamentalepoche J2000, z.B. in AA 2004, p. E87). Bezogen auf den Erdäquator hat der aufsteigende Knoten des Planetenäquators („IAU-Vektor“) die (Erdäquator-bezogene) Rektaszension

$$\Omega_{PA} = \alpha_{PA} = \alpha_1 + 6^h \tag{30.38}$$

und die Inklination

$$i_{PA} = 90° - \delta_1 \quad . \tag{30.39}$$

Es sei α_P die Rektaszension eines gegeben Ortes im Planetenäquatorsystem bezogen auf den Schnittpunkt Ω_P des Planetenäquators mit der Planetenbahnebene. Dann sei α_{PA} die planetare Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_P. Die relative (= auf den IAU-Vektor bezogene) planetare Rektaszension ist definiert im Bereich

$$0^h \le \alpha_P - \alpha_{PA} \le 24^h \quad \text{oder} \quad 0° \le \alpha_P - \alpha_{PA} \le 360° \quad . \tag{30.40}$$

Die *planetare Deklination* wird vom Planetenäquator positiv zum Nordpol des Planeten, negativ zu seinem Südpol gerechnet

$$-90° \le \delta_P \le 90° \quad . \tag{30.41}$$

Ein Objekt mit planetozentrischem Radius r_P hat in diesem System den Ortsvektor

$$\mathbf{r} \Leftrightarrow r_P \left[\alpha_P, \delta_P\right] \quad , \tag{30.42}$$

somit die kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r} = x_P{}^j \, \mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.43}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} x_{P1} &= r_P \cos\delta_P \cos\alpha_P \\ x_{P2} &= r_P \cos\delta_P \sin\alpha_P \\ x_{P3} &= r_P \sin\delta_P \quad . \end{aligned} \tag{30.44}$$

Die Polarkoordinaten des Planetenäquatorsystems werden aus den kartesischen Koordinaten etwa nach dem Formelsystem (29.102) erhalten

$$\begin{aligned} r_P &= \sqrt{x_P{}^i \, x_{Pi}} \\ \sin\delta_P &= \frac{x_{P3}}{r_P} \quad , \quad \cos\delta_P = \sqrt{1-\sin^2\delta_P} \\ \cos\alpha_P &= \frac{x_{P1}}{r_P \cos\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \\ \sin\alpha_P &= \frac{x_{P2}}{r_P \cos\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.45}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist analog zu dem Formelsystem (29.103) auf Seite 616

$$\begin{aligned} \dot{x}_{P1} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P} x_{P1} - \dot{\delta}_P x_{P3} \cos\alpha_P - \dot{\alpha}_P x_{P2} \\ \dot{x}_{P2} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P} x_{P3} - \dot{\delta}_P x_{P3} \sin\alpha_P + \dot{\alpha}_P x_{P1} \\ \dot{x}_{P3} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P} x_{P3} + r_P \dot{\delta}_P \cos\delta_P \end{aligned} \qquad (30.46)$$

und umgekehrt analog zu den Formeln (29.104)

$$\begin{aligned} \dot{r}_P &= \frac{x_P{}^i \dot{x}_{Pi}}{r_P} \\ \dot{\alpha}_P &= \frac{x_{P1}\dot{x}_{P2} - x_{P2}\dot{x}_{P1}}{r_P^2 \cos^2\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \\ \dot{\delta}_P &= \frac{1}{r_P^2}\left[\left(x_{P3}\dot{x}_{P1} - x_{P1}\dot{x}_{P3}\right)\cos\alpha_P - \left(x_{P2}\dot{x}_{P3} - x_{P3}\dot{x}_{P2}\right)\sin\alpha_P\right] \quad , \quad \left(r_P > 0\right) \quad . \end{aligned} \qquad (30.47)$$

Im absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{x}_P{}^j \mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \qquad (30.48)$$

ist die Variation $\dot{\mathbf{q}}_j^{(K)}$ durch Bezug auf ein bekanntes System zu berechnen.

30.4.1 Transformationen des Planetenäquatorsystems

30.4.1.1 Planetenäquatorsystem und Erdäquatorsystem

Der Bezug des Planetenbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum bezogene) Erdäquatorsystem hergestellt. Dies ist vollständig nach Vorgabe der (Erd-) äquatorialen Winkelkoordinaten $\left(\alpha_1, \delta_1\right)$ des Nordpols des Planeten möglich. Seien die $\mathbf{p}_i$ die Basisvektoren des Erdäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems. In der Beziehung

$$\mathbf{p}_i = a_i{}^j \mathbf{q}_j^{(K)} \qquad (30.49)$$

wird nach Bild 30-2 auf Seite 684 das Ekliptiksystem um den Nordpol des Erde mit der Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{PA} = \alpha_1 + 6^h$ in den aufsteigenden Knoten und um den Knoten mit der Inklination $i_{PA} = 90° - \delta_1$ in die Planetenäquatorebene gedreht (siehe die Formeln (30.38) und (30.39)). Die Drehung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= -\sin\alpha_1 \mathbf{q}_1^{(K)} - \cos\alpha_1 \sin\delta_1 \mathbf{q}_2^{(K)} + \cos\alpha_1 \cos\delta_1 \mathbf{q}_3^{(K)} \\ \mathbf{p}_2 &= \cos\alpha_1 \mathbf{q}_1^{(K)} - \sin\alpha_1 \sin\delta_1 \mathbf{q}_2^{(K)} + \sin\alpha_1 \cos\delta_1 \mathbf{q}_3^{(K)} \\ \mathbf{p}_3 &= \cos\delta_1 \mathbf{q}_2^{(K)} + \sin\delta_1 \mathbf{q}_3^{(K)} \quad . \end{aligned} \qquad (30.50)$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$\left(a_i{}^j\right) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_1 & -\sin\delta_1\cos\alpha_1 & \cos\delta_1\cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_1 & -\sin\delta_1\sin\alpha_1 & \cos\delta_1\sin\alpha_1 \\ 0 & \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \end{bmatrix} \tag{30.51}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin\alpha_1 \\ a_{12} &= -\sin\delta_1\cos\alpha_1 \\ a_{13} &= \cos\delta_1\cos\alpha_1 \\ a_{21} &= \cos\alpha_1 \\ a_{22} &= -\sin\delta_1\sin\alpha_1 \\ a_{23} &= \cos\delta_1\sin\alpha_1 \\ a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= \cos\delta_1 \\ a_{33} &= \sin\delta_1 \quad . \end{aligned} \tag{30.52}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= -\dot{\alpha}_1 a_{21} \\ \dot{a}_{12} &= -\dot{\alpha}_1 a_{22} - \dot{\delta}_1 a_{13} \\ \dot{a}_{13} &= -\dot{\alpha}_1 a_{23} + \dot{\delta}_1 a_{12} \\ \dot{a}_{21} &= \dot{\alpha}_1 a_{11} \\ \dot{a}_{22} &= \dot{\alpha}_1 a_{12} - \dot{\delta}_1 a_{23} \\ \dot{a}_{23} &= \dot{\alpha}_1 a_{13} + \dot{\delta}_1 a_{22} \\ \dot{a}_{31} &= 0 \\ \dot{a}_{32} &= -\dot{\delta}_1 a_{33} \\ \dot{a}_{33} &= \dot{\delta}_1 a_{32} \quad . \end{aligned} \tag{30.53}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(K)} = b_j{}^i \mathbf{p}_i \tag{30.54}$$

ist daher wieder mit dem System (6.30) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right) = 1$ und $b_i{}^j = a_j{}^i$ in Matrixschreibweise

$$\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.55}$$

Seien x_i die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem. Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x^i \mathbf{p}_i = x^i a_i{}^j \mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j \mathbf{q}_j^{(K)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}^i \mathbf{q}_i + x^i \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{x}_P{}^j \mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \end{aligned} \tag{30.56}$$

gilt dann für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_P{}^j &= a_i{}^j\, x^i \\ x^i &= a^i{}_j\, x_P{}^j \end{aligned} \tag{30.57}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_i{}^j\, x^i + a_i{}^j\, \dot{x}^i \\ \dot{x}^i &= \dot{a}^i{}_j\, x_P{}^j + a^i{}_j\, \dot{x}_P{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.58}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= -x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_1 \\ x_{P2} &= -x_1 \cos\alpha_1 \sin\delta_1 - x_2 \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + x_3 \cos\delta_1 \\ x_{P3} &= x_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 + x_2 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 + x_3 \sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.59}$$

und die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_{P1} &= -\dot{x}_1 \sin\alpha_1 + \dot{x}_2 \cos\alpha_1 - \dot{\alpha}_1 \left(x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_1 \right) \\ \dot{x}_{P2} &= -\dot{x}_1 \cos\alpha_1 \sin\delta_1 - \dot{x}_2 \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + \dot{x}_3 \cos\delta_1 - \dot{\alpha}_1 x_{P1} \sin\delta_1 - \dot{\delta}_1 x_{P3} \\ \dot{x}_{P3} &= \dot{x}_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 + \dot{x}_2 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 + \dot{x}_3 \sin\delta_1 + \dot{\alpha}_1 x_{P1} \cos\delta_1 + \dot{\delta}_1 x_{P2} \quad . \end{aligned} \tag{30.60}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_{P1} \sin\alpha_1 - x_{P2} \cos\alpha_1 \sin\delta_1 + x_{P3} \cos\alpha_1 \cos\delta_1 \\ x_2 &= x_{P1} \cos\alpha_1 - x_{P2} \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + x_{P3} \sin\alpha_1 \cos\delta_1 \\ x_3 &= + x_{P2} \cos\delta_1 + x_{P3} \sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.61}$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Erdäquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\dot{x}_{P1} \sin\alpha_0 - \dot{x}_{P2} \cos\alpha_0 \sin\delta_0 + \dot{x}_{P3} \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \dot{\alpha}_0 x_2 - \dot{\delta}_0 x_3 \cos\alpha_0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_{P1} \cos\alpha_0 - \dot{x}_{P2} \sin\alpha_0 \sin\delta_0 + \dot{x}_{P3} \sin\alpha_0 \cos\delta_0 + \dot{\alpha}_0 x_1 - \dot{\delta}_0 x_3 \sin\alpha_0 \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_{P2} \cos\delta_0 + \dot{x}_{P3} \sin\delta_0 - \dot{\delta}_0 \left(x_{P2} \sin\delta_0 - x_{P3} \cos\delta_0 \right) \end{aligned} \tag{30.62}$$

.

Es seien $r\left[\alpha, \delta\right]$ die planetozentrischen Polarkoordinaten eines Punktes im Erdäquatorsystem, $r\left[\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P\right]$ im Planetenäquatorsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[\alpha, \delta\right] \;\Leftrightarrow\; r\left[\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P\right] \tag{30.63}$$

mit den Formeln (30.59) und (30.61) oder direkt aus Bild 30-2 auf Seite 684 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P &= \sin\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta \\ \sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P &= -\cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta \sin\delta_1 + \sin\delta\cos\delta_1 \\ \sin\delta_P &= \cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta\cos\delta_1 + \sin\delta\sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.64}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \alpha_0\right)\cos\delta &= \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \\ \cos\left(\alpha - \alpha_0\right)\cos\delta &= -\sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \sin\delta_0 + \sin\delta_P \cos\delta_0 \\ \sin\delta &= \sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \cos\delta_0 + \sin\delta_P \sin\delta_0 \end{aligned} \tag{30.65}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned}
(\dot\alpha_P-\dot\alpha_{PA})\cos\delta_P &= (\dot\alpha-\dot\alpha_1)\cos\delta\left[-\cos(\alpha-\alpha_1)\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})+\right.\\
&\quad\left.+\sin(\alpha-\alpha_1)\sin\delta_1\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\right]+\\
&\quad+\dot\delta\left[\sin(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})+\right.\\
&\quad\left.+\left(\cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\right)\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\right]-\\
&\quad-\dot\delta_0\ \sin\delta_P\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\\
\dot\delta_P &= -(\dot\alpha-\dot\alpha_1)\ \cos\delta\left\{\sin(\alpha-\alpha_1)\cos\delta_1\cos\delta_P+\right.\\
&\quad\left.+\left[\cos(\alpha-\alpha_1)\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})+\sin(\alpha-\alpha_1)\sin\delta_1\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\right]\sin\delta_P\right\}+\\
&\quad+\dot\delta\left\{\left[-\cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta_1+\cos\delta\sin\delta_1\right]\cos\delta_P+\right.\\
&\quad\left.+\left[\sin(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})-\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\left(\cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\right)\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\right]\sin\delta_P\right\}+\\
&\quad+\dot\delta_0\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})
\end{aligned}\tag{30.67}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Erdäquatorsystem

$$\begin{aligned}
\dot\alpha\cos\delta &= \dot\alpha_1\ \cos\delta+\\
&\quad+(\dot\alpha_P-\dot\alpha_{PA})\ \cos\delta_P\left[-\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\cos(\alpha-\alpha_1)+\right.\\
&\quad\left.+\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)\right]-\\
&\quad-\dot\delta_P\left[\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_P\cos(\alpha-\alpha_1)+\right.\\
&\quad\left.+\left(\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_P\sin\delta_1+\cos\delta_P\cos\delta_1\right)\sin(\alpha-\alpha_1)\right]+\\
&\quad+\dot\delta_0\ \sin\delta\sin(\alpha-\alpha_1)\\
\dot\delta &= (\dot\alpha_P-\dot\alpha_{PA})\ \cos\delta_P\left\{\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\cos\delta_0\cos\delta+\right.\\
&\quad\left.+\left[\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin(\alpha-\alpha_1)+\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_0\cos(\alpha-\alpha_1)\right]\sin\delta\right\}+\\
&\quad+\dot\delta_P\left\{\left[-\sin(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_P\cos\delta_1+\cos\delta_P\sin\delta_1\right]\cos\delta+\right.\\
&\quad\left.+\left[\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_P\sin(\alpha-\alpha_1)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\left(-\cos(\alpha_P-\alpha_{PA})\sin\delta_P\sin\delta_1+\cos\delta_P\cos\delta_1\right)\cos(\alpha-\alpha_1)\right]\sin\delta\right\}+\\
&\quad+\dot\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\quad .
\end{aligned}\tag{30.68}$$

$$\tag{30.69}$$

30.4.1.2 Planetenäquatorsystem und Ekliptiksystem

Es sei Υ_P der aufsteigende Knoten des Äquators A_P eines Planeten bezogen auf die Ekliptik E (vgl. Bild 30-3 auf S. 690). Als bekannt wird die Schiefe der Ekliptik ε bezogen auf den Erdäquator

A angenommen sowie die (Erd-) äquatorialen Koordinaten $[\alpha_1, \delta_1]$ des Nordpols N_P des Planeten. Somit ist über die Formeln (30.38) und (30.39) auf S. 685 auch die Rektaszension Ω_{PA} des aufsteigenden Knotens des Planetenäquators und seine Inklination i_{PA} bezogen auf den Erdäquator bekannt.

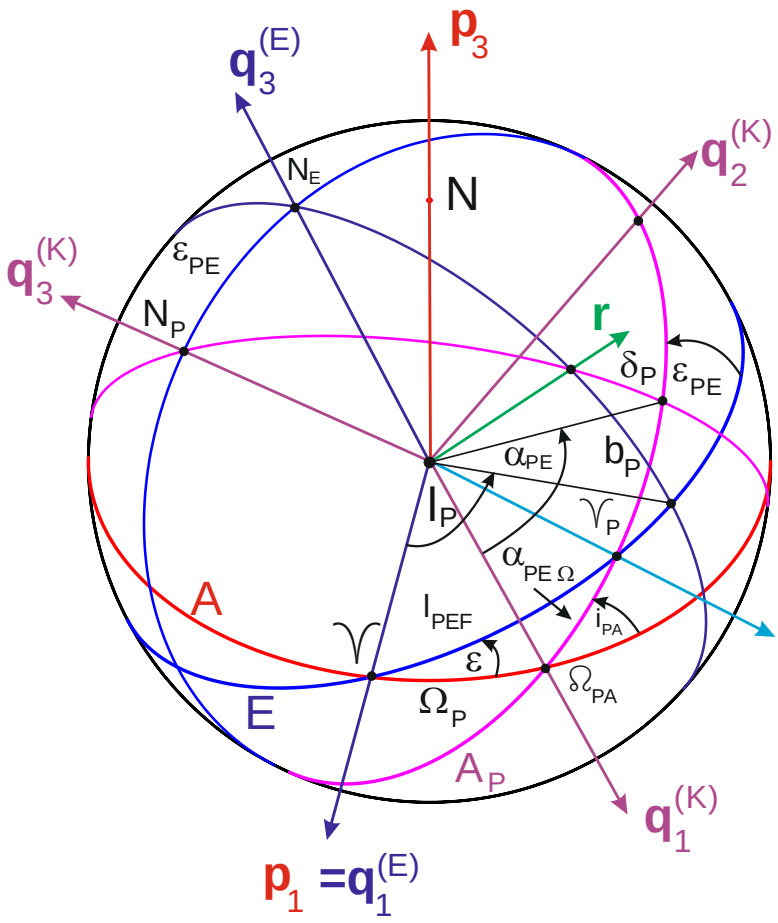


Bild 30-3: Planetenäquatorsystem A_P, Erdäquatorsystem A und Ekliptiksystem E

Der planetare Äquatorknoten Υ_P habe vom Frühlingspunkt Υ den Winkelabstand l_{PEF}, vom aufsteigenden Knoten Ω_{PA} den Winkelabstand $\alpha_{PE\Omega}$, der Planetenäquator gegenüber der Ekliptik die Schiefe ε_{PE}. Im sphärischen Dreieck $\Upsilon\Omega_{PA}\Upsilon_P$ kann der *Gauß*sche Formelsatz für die Winkel[1] angewendet werden:

$$\begin{aligned} \cos l_{PEF} \sin \varepsilon_{PE} &= \cos \Omega_{PA} \sin i_{PA} \cos \varepsilon - \cos i_{PA} \sin \varepsilon \\ \sin l_{PEF} \sin \varepsilon_{PE} &= \sin \Omega_{PA} \sin i_{PA} \\ \cos \varepsilon_{PE} &= \cos \Omega_{PA} \sin i_{PA} \sin \varepsilon + \cos i_{PA} \cos \varepsilon \quad , \end{aligned} \tag{30.70}$$

woraus die Winkel l_{PEF} und ε_{PE} eindeutig zu berechnen sind. Ihre Variationen sind

[1] etwa nach dem allgemeinen Ansatz (A.16) in Anhang A.2, Band V

$$
\begin{aligned}
\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\sin\varepsilon_{PE} \;=\;& \dot{\Omega}_{PA}\,\sin i_{PA}\left(\sin\Omega_{PA}\cos\varepsilon\sin l_{PEF}+\cos\Omega_{PA}\cos l_{PEF}\right)+\\
&+\left(i_{PA}\right)^{\cdot}\left[-\left(\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}\cos\varepsilon+\sin i_{PA}\sin\varepsilon\right)\sin l_{PEF}+\right.\\
&\left.\quad+\sin\Omega_{PA}\cos i_{PA}\cos l_{PEF}\right]+\\
&+\dot{\varepsilon}\,\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}
\end{aligned}
\tag{30.71}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{PE} \;=\;& \dot{\Omega}_{PA}\,\sin i_{PA}\left[\left(-\sin\Omega_{PA}\cos\varepsilon\cos l_{PEF}+\cos\Omega_{PA}\sin l_{PEF}\right)\cos\varepsilon_{PE}+\right.\\
&\left.\quad+\sin\Omega_{PA}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\right]+\\
&+\left(i_{PA}\right)^{\cdot}\left\{\left[\left(\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}\cos\varepsilon+\sin i_{PA}\sin\varepsilon\right)\cos l_{PEF}+\right.\right.\\
&\left.\quad+\sin\Omega_{PA}\cos i_{PA}\sin l_{PEF}\right]\cos\varepsilon_{PE}-\\
&\left.\quad-\left[\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}\sin\varepsilon-\sin i_{PA}\cos\varepsilon\right]\sin\varepsilon_{PE}\right\}-\\
&-\dot{\varepsilon}\,\cos l_{PEF}\quad .
\end{aligned}
\tag{30.72}
$$

Die Winkeldistanz $\alpha_{PE\Omega}$ des Schnittpunktes Υ_P des Planetenäquators mit der Ekliptik vom aufsteigenden Knoten Ω_{PA} des Planetenäquators bezogen auf den Erdäquator wird unter Verwendung der Formeln[1] (A.16) berechnet aus

$$
\begin{aligned}
\cos i_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}-\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\\
\sin i_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega} &= \sin\varepsilon\sin l_{PEF}\\
\cos\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}+\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA}
\end{aligned}
\tag{30.73}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha_{PE\Omega} &= \left(\cos\varepsilon\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}-\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\right)\cos i_{PA}+\sin\varepsilon\sin l_{PEF}\sin i_{PA}\\
\cos\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}+\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA}\quad .
\end{aligned}
\tag{30.74}
$$

Damit ist $\alpha_{PE\Omega}$ eindeutig berechenbar. Für seine Variation gilt

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{PE\Omega} \;=\;& \dot{\varepsilon}\,\sin l_{PEF}\left[\left(-\sin\varepsilon\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}+\cos\varepsilon\sin i_{PA}\right)\cos\alpha_{PE\Omega}+\right.\\
&\left.\quad+\sin\varepsilon\sin\Omega_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]+\\
&+\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\left\{\left[\left(\cos\varepsilon\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA}+\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\right)\cos i_{PA}+\right.\right.\\
&\left.\quad+\sin\varepsilon\cos l_{PEF}\sin i_{PA}\right]\cos\alpha_{PE\Omega}-\\
&\left.\quad-\left[\cos\varepsilon\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA}-\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}\right]\sin\alpha_{PE\Omega}\right\}-\\
&-\dot{\Omega}_{PA}\,\cos i_{PA}\quad .
\end{aligned}
\tag{30.75}
$$

Umgekehrt können bei gegebenen l_{PEF}, ε_{PE} und $\alpha_{PE\Omega}$ die bahnorientierenden Winkel Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_{PA}, i_{PA} und formal auch die Schiefe der Ekliptik ε berechnet werden. Aus

[1] nach einem *Gauß*schen Formelsatz in Anhang A.2, Band V

$$\begin{aligned}
\cos\varepsilon\sin\Omega_{PA} &= -\cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF} + \cos\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF} \\
\sin\varepsilon\sin\Omega_{PA} &= \sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} \\
\cos\Omega_{PA} &= \cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF} + \cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}
\end{aligned} \tag{30.76}$$

können Ω_{PA} und ε eindeutig berechnet werden. Mit dem Formelsatz (unter Verwendung des Kosinussatzes der Winkel)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_{PE\Omega}\sin i_{PA} &= \cos l_{PEF}\sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE} + \cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE} \\
\sin\alpha_{PE\Omega}\sin i_{PA} &= \sin l_{PEF}\sin\varepsilon \\
\cos i_{PA} &= -\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE} + \cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}
\end{aligned} \tag{30.77}$$

folgt die Inklination des Planetenäquators bei bekanntem $\alpha_{PE\Omega}$ eindeutig aus

$$\begin{aligned}
\cos i_{PA} &= -\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE} + \cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE} \\
\sin i_{PA} &= \sin l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\alpha_{PE\Omega} + \left(\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE} + \cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PE\Omega} \quad .
\end{aligned} \tag{30.78}$$

Die Variationen dieser Größen lauten

$$\begin{aligned}
\dot\varepsilon\sin\Omega_{PA} &= \dot\varepsilon_{PE}\,\sin\alpha_{PE\Omega}\left(\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\varepsilon + \cos\varepsilon_{PE}\cos\varepsilon\right) + \\
&\quad + \dot\alpha_{PE\Omega}\left[\left(\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF} + \sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}\right)\sin\varepsilon + \right. \\
&\quad \left. + \sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos\varepsilon\right] - \\
&\quad - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\cos\Omega_{PA}\sin\varepsilon
\end{aligned} \tag{30.79}$$

$$\begin{aligned}
\dot\Omega_{PA} &= \dot\varepsilon_{PE}\,\sin\alpha_{PE\Omega}\left\{\left[\cos l_{PEF}\sin\varepsilon_{PE}\cos\varepsilon + \cos\varepsilon_{PE}\sin\varepsilon\right]\cos\Omega_{PA} + \right. \\
&\quad \left. + \sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\right\} + \\
&\quad + \dot\alpha_{PE\Omega}\left\{\left[-\left(\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF} + \sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}\right)\cos\varepsilon + \right.\right. \\
&\quad \left. + \sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\sin\varepsilon\right]\cos\Omega_{PA} + \\
&\quad \left.\left. + \left[-\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF} + \sin\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}\right]\sin\Omega_{PA}\right\} + \right. \\
&\quad + \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\cos\varepsilon
\end{aligned} \tag{30.80}$$

$$\begin{aligned}
\left(i_{PA}\right)^{\cdot} &= \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\sin\varepsilon\left\{\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]\cos i_{PA} - \right. \\
&\quad \left. - \sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin i_{PA}\right\} + \\
&\quad + \dot\varepsilon\left\{\left[\left(\cos l_{PEF}\cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE} - \sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PE\Omega} + \right.\right. \\
&\quad \left. + \sin l_{PEF}\cos\varepsilon\sin\alpha_{PE\Omega}\right]\cos i_{PA} + \\
&\quad \left.\left. + \left[\cos l_{PEF}\cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE} + \sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}\right]\sin i_{PA}\right\} + \right. \\
&\quad + \dot\varepsilon_{PE}\,\cos\alpha_{PE\Omega} \quad .
\end{aligned} \tag{30.81}$$

Mit den vorstehenden Formeln ist der Bezug zwischen dem Planetenäquatorsystem und der Ekliptik vollständig beschrieben. Zur Umrechnung der Koordinaten eines beliebigen Punktes in planetenäquatorialen bzw. in ekliptikalen Koordinaten werden die folgenden Formeln benötigt. Seien die $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems. In der Beziehung

$$\mathbf{q}_k^{(E)} = a_k^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.82}$$

wird nach Bild 30-3 auf Seite 690 das Ekliptiksystem um den Nordpol der Ekliptik mit der Länge des aufsteigenden Knotens l_{PEF} in den aufsteigenden Knoten und um den Knoten mit der Schiefe ε_{PE} in die Planetenäquatorebene gedreht. Die Drehung lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)} \left[-\cos\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega}\right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_2^{(K)} \left[\cos\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega}\right] + \\
&\quad + \mathbf{q}_3^{(K)} \sin\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)} \left[\cos\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega} + \sin l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega}\right] + \\
&\quad + \mathbf{q}_2^{(K)} \left[\cos\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} - \sin l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega}\right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_3^{(K)} \sin\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)} \sin\varepsilon_{PE} \sin\alpha_{PE\Omega} + \\
&\quad + \mathbf{q}_2^{(K)} \sin\varepsilon_{PE} \cos\alpha_{PE\Omega} + \\
&\quad + \mathbf{q}_3^{(K)} \cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned} \tag{30.83}$$

Die Koeffizienten der Rotationsmatrix lauten

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{12} &= -\left(\cos\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega}\right) \\
a_{13} &= \sin\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \\
a_{21} &= \cos\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega} + \sin l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{22} &= \cos\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PE\Omega} - \sin l_{PEF} \sin\alpha_{PE\Omega} \\
a_{23} &= -\sin\varepsilon_{PE} \cos l_{PEF} \\
a_{31} &= \sin\varepsilon_{PE} \sin\alpha_{PE\Omega} \\
a_{32} &= \sin\varepsilon_{PE} \cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{33} &= \cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned} \tag{30.84}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{13} \sin\alpha_{PE\Omega} - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{21} + \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{13} \cos\alpha_{PE\Omega} - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{22} - \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{33} \sin l_{PEF} + \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{23} \sin\alpha_{PE\Omega} + \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{11} + \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{23} \cos\alpha_{PE\Omega} + \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{12} - \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{33} \cos l_{PEF} + \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{33} \sin\alpha_{PE\Omega} + \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\, a_{33} \cos\alpha_{PE\Omega} - \dot{\alpha}_{PE\Omega}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{\varepsilon}_{PE} \cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned} \tag{30.85}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(K)} \;=\; b_j{}^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} \tag{30.86}$$

ist daher analog zu (30.22) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j^{\,i}\right)=1$ und $b_i{}^j = a_j{}^i$ in Matrixschreibweise

$$\left(b_{ij}\right) \;=\; \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.87}$$

Seien x_{Pj} die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{q}_j^{(K)}$-Planetenäquatorsystem und y_k seine Komponenten im $\mathbf{q}_k^{(E)}$-Ekliptiksystem, gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} = y^k\,a_k{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} + y^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} = \dot{x}_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \end{aligned} \tag{30.88}$$

für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_P{}^j &= a_k{}^j\,y^k \\ y^k &= a_j^{\,k}\,x_P{}^j \end{aligned} \tag{30.89}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_k{}^j\,y^k + a_k{}^j\,\dot{y}^k \\ \dot{y}^k &= \dot{a}_j^{\,k}\,x_P{}^j + a_j^{\,k}\,\dot{x}_P{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.90}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= \;\; y_1\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\ &\quad + y_2\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\ &\quad + y_3\sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} \\ x_{P2} &= -y_1\left[\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\ &\quad + y_2\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}-\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\ &\quad + y_3\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega} \\ x_{P3} &= \;\; y_1\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}- \\ &\quad - y_2\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}+ \\ &\quad + y_3\cos\varepsilon_{PE} \quad . \end{aligned} \tag{30.91}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{P1}\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]- \\
&\quad - x_{P2}\left[\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\
&\quad + x_{P3}\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF} \\
y_2 &= x_{P1}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\
&\quad + x_{P2}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}-\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]- \\
&\quad - x_{P3}\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF} \\
y_3 &= x_{P1}\sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}+ \\
&\quad + x_{P2}\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}+ \\
&\quad + x_{P3}\cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.92}
$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_{Pj}$ relativ zum Planetenäquatorsystem und umgekehrt den $\dot{y}$ relativ zum Ekliptiksystem können mit den Gleichungen (30.90) auf S. 694 mit den Variationen (30.85) auf S. 693 berechnet werden.

Es seien $r\left[l_P, b_P\right]$ die Polarkoordinaten eines Punktes im Ekliptiksystem, $r\left[\alpha_{PE}, \delta_P\right]$ im Planetenäquatorsystem. Hier ist die planetare Rektaszension α_{PE} auf den aufsteigenden Knoten Υ_P des Planetenäquators mit der Ekliptik bezogen. Wenn α_P die planetare Rektaszension bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten Ω_P des Planetenäquators mit der Planetenbahn und $\alpha_{PE\Omega}$ der Abstand des Knotens Ω_{PA} mit dem Erdäquator und Υ_P ist, gilt nach Bild 30-3 auf S. 690

$$
\alpha_{PE} = \alpha_P - \alpha_{PA} - \alpha_{PE\Omega} \quad . \tag{30.93}
$$

Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgt mit dem planetozentrischen Ortsvektor **r** aus

$$
\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l_P, b_P\right] \;\Leftrightarrow\; r\left[\alpha_{PE}, \delta_P\right] \tag{30.94}
$$

mit den Formeln (30.91) und (30.84) oder direkt aus Bild 30-2 auf Seite 684 die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha_{PE}\cos\delta_P &= \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P \\
\sin\alpha_{PE}\cos\delta_P &= \sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P\cos\varepsilon_{PE} + \sin b_P\sin\varepsilon_{PE} \\
\sin\delta_P &= -\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P\sin\varepsilon_{PE} + \sin b_P\cos\varepsilon_{PE}
\end{aligned}
\tag{30.95}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P &= \cos\alpha_{PE}\cos\delta_P \\
\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P &= \sin\alpha_{PE}\cos\delta_P\cos\varepsilon - \sin\delta_P\sin\varepsilon \\
\sin b_P &= \sin\alpha_{PE}\cos\delta_P\sin\varepsilon + \sin\delta_P\cos\varepsilon
\end{aligned}
\tag{30.96}
$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{PE}\cos\delta_P = &\left[\left(l_P\right)^{\cdot} - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\right]\cos b_P\left[\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin\alpha_{PE} + \right. \\
&\left. + \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE}\right] +
\end{aligned}
\tag{30.97}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\dot{b}_P\ \Big\{\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin b_P\sin\alpha_{PE}+\\
&\qquad+\Big[-\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin b_P\cos\varepsilon_{PE}+\cos b_P\sin\varepsilon_{PE}\Big]\cos\alpha_{PE}\Big\}+\\
&+\dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin\delta_P\cos\alpha_{PE}\\
\dot{\delta}_P\ =&\Big[\left(l_P\right)^{\cdot}-\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\Big]\cos b_P\ \Big\{-\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin\varepsilon_{PE}\cos\delta_P+\\
&\qquad+\Big[\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\cos\alpha_{PE}-\\
&\qquad\quad-\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE}\Big]\sin\delta_P\Big\}+\\
&+\dot{b}_P\ \Big\{\Big[\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin b_P\sin\varepsilon_{PE}+\cos b_P\cos\varepsilon_{PE}\Big]\cos\delta_P+\\
&+\Big[\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin b_P\cos\alpha_{PE}+\\
&\qquad+\left(\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\sin b_P\cos\varepsilon_{PE}-\cos b_P\sin\varepsilon_{PE}\right)\sin\alpha_{PE}\Big]\sin\delta_P\Big\}-\\
&-\dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin\alpha_{PE}
\end{aligned}
\tag{30.98}
$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$
\begin{aligned}
\left(l_P\right)^{\cdot}\cos b_P\ =&\ \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\cos b_P+\\
&+\dot{\alpha}_{PE}\ \cos\delta_P\Big[\sin\alpha_{PE}\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)+\cos\alpha_{PE}\cos\varepsilon_{PE}\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\Big]+\\
&+\dot{\delta}_P\ \Big\{\cos\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)-\\
&\qquad-\Big[\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\varepsilon_{PE}+\cos\delta_P\sin\varepsilon_{PE}\Big]\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)\Big\}-\\
&-\dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin b_P\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)
\end{aligned}
\tag{30.99}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_P\ =&\ \dot{\alpha}_{PE}\ \cos\delta_P\ \Big\{\cos\alpha_{PE}\sin\varepsilon_{PE}\cos b_P+\\
&\qquad+\Big[\sin\alpha_{PE}\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)-\cos\alpha_{PE}\cos\varepsilon_{PE}\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\Big]\sin b_P\Big\}+\\
&+\dot{\delta}_P\ \Big\{\Big[-\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\sin\varepsilon_{PE}+\cos\delta_P\cos\varepsilon_{PE}\Big]\cos b_P+\\
&\qquad+\Big[\cos\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\left(l_P-l_{PEF}\right)+\\
&\qquad\quad+\left(\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\varepsilon_{PE}+\cos\delta_P\sin\varepsilon_{PE}\right)\sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\Big]\sin b_P\Big\}+\\
&+\dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin\left(l_P-l_{PEF}\right)\quad .
\end{aligned}
\tag{30.100}
$$

30.4.1.3 Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem

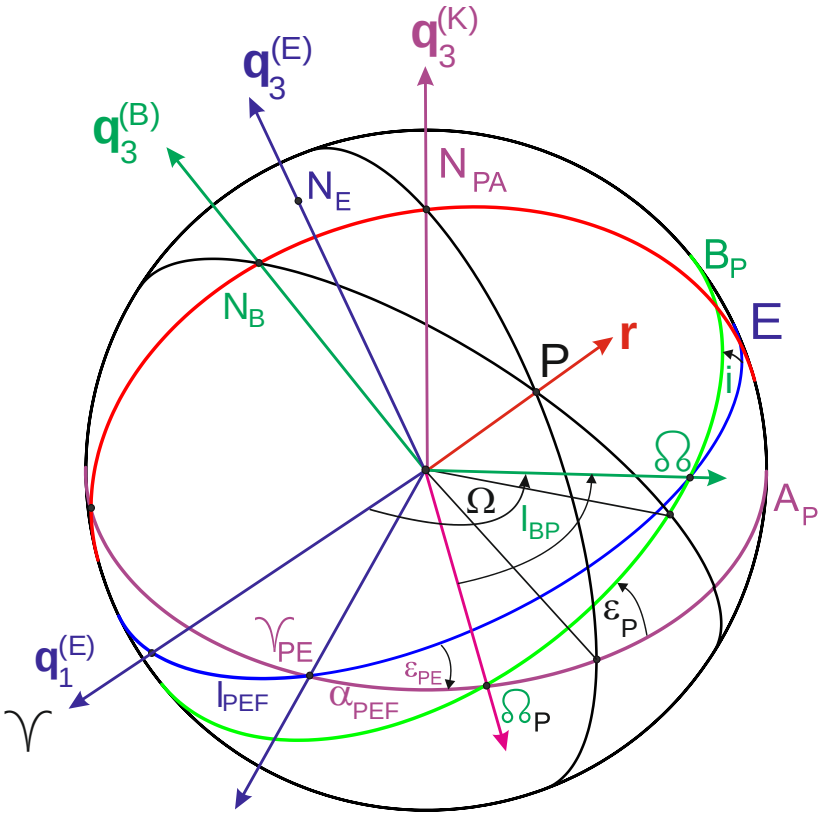


Bild 30-4: Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem

Als erstes werden die Beziehungen zwischen dem Planetenäquatorsystem und dem Planetenbahnsystem nach Bild 30-4 auf S. 697 hergeleitet. Es seien ε_P die Neigung des Planetenäquators A_P bezogen auf die Planetenbahn B_P, l_{BP} der Winkelabstand des Knotens Ω_P von A_P mit B_P vom aufsteigenden Knoten Ω. Als bekannt angenommen werden können die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens Ω der Planetenbahn und ihre Neigung i bezüglich der Ekliptik mit ihren Variationen $\dot{\Omega}$ und $(i)^{\cdot}$. Über die Formelsysteme (30.70) auf S. 690 bis (30.72) auf S. 691 sind auch der Winkelabstand l_{PEF} des Knotens Υ_{PE} auf der Ekliptik sowie die Neigung ε_{PE} des Planetenäquators mit der Ekliptik mit ihren Variationen $(l_{PEF})^{\cdot}$ und $\dot{\varepsilon}_{PE}$ bekannt. Ergänzend kann dann noch der Winkelabstand α_{PEF} zwischen dem Knoten Ω_P und dem Schnittpunkt Υ_{PE} längs des Planetenäquators berechnet werden.

Im Dreieck $\Omega\,\Upsilon_{PE}\,\Omega_P$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_{PEF}\sin\varepsilon_P &= -\cos l_{PEF}\sin i\cos\varepsilon_{PE}+\cos i\sin\varepsilon_{PE}\\
\sin\alpha_{PEF}\sin\varepsilon_P &= -\sin l_{PEF}\sin i\\
\cos\varepsilon_P &= \cos l_{PEF}\sin i\sin\varepsilon_{PE}+\cos i\cos\varepsilon_{PE}\quad ,
\end{aligned}\tag{30.101}$$

woraus die Winkel α_{PEF} und ε_P eindeutig zu berechnen sind. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\sin\varepsilon_P\sin l_{BP} &= \sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\\
\cos l_{BP} &= \cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PEF}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PEF}
\end{aligned}\tag{30.102}$$

zur eindeutigen Berechnung von l_{BP}. Ihre Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot\alpha_{PEF}\sin\varepsilon_P &= -\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\sin i\left[\sin l_{PEF}\cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PEF}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PEF}\right]+\\
&\quad+\left(i\right)^{\cdot}\left[\left(\cos l_{PEF}\cos i\cos\varepsilon_{PE}+\sin i\sin\varepsilon_{PE}\right)\sin\alpha_{PEF}-\right.\\
&\quad\left.-\sin l_{PEF}\cos i\cos\alpha_{PEF}\right]-\\
&\quad-\dot\varepsilon_P\cos\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}
\end{aligned}\tag{30.103}$$

$$\begin{aligned}
\dot\varepsilon_P &= \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\sin i\left[\left(\sin l_{PEF}\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PEF}-\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PEF}\right)\cos\varepsilon_P+\right.\\
&\quad\left.+\sin l_{PEF}\sin\varepsilon_{PE}\sin\varepsilon_P\right]-\\
&\quad-\left(i\right)^{\cdot}\left\{\left[\left(\cos l_{PEF}\cos i\cos\varepsilon_{PE}+\sin i\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PEF}+\right.\right.\\
&\quad\left.+\sin l_{PEF}\cos i\sin\alpha_{PEF}\right]\cos\varepsilon_P+\\
&\quad\left.+\left[\cos l_{PEF}\cos i\sin\varepsilon_{PE}-\sin i\cos\varepsilon_{PE}\right]\sin\varepsilon_P\right\}+\\
&\quad+\dot\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PEF}\quad .
\end{aligned}\tag{30.104}$$

Umgekehrt folgen aus bekannten l_{BP}, α_{PEF} und ε_P mit ihren Variationen $\left(l_{BP}\right)^{\cdot}$, $\dot\alpha_{PEF}$ und $\dot\varepsilon_P$ die Winkelgrößen l_{PEF}, i, ε_{PE} mit ihren Variationen nach Bild 30-4 auf S. 697 aus dem sphärischen Dreieck $\Omega\curlyvee_{PE}\Omega_P$:

$$\begin{aligned}
\cos i\sin l_{PEF} &= -\cos\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}\cos l_{BP}+\cos\alpha_{PEF}\sin l_{BP}\\
\sin i\sin l_{PEF} &= \sin\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}\\
\cos l_{PEF} &= \cos\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}\sin l_{BP}+\cos\alpha_{PEF}\cos l_{BP}\quad .
\end{aligned}\tag{30.105}$$

Da l_{PEF} nicht eindeutig aus $\cos l_{PEF}$ berechnet werden kann (das Dreieck $\Omega\curlyvee_{PE}\Omega_P$ ist ein Äquatordreieck), muss aus den ersten beiden der Gleichungen (30.105)

$$\cot i = -\cot\varepsilon_P\cos l_{BP}+\cot\alpha_{PEF}\frac{\sin l_{BP}}{\sin\varepsilon_P}\tag{30.106}$$

berechnet werden, womit die Inklination i dann eindeutig berechnet werden kann:

$$\cos i = \frac{\cot i}{\sqrt{1+\cot^2 i}}\quad ,\quad \sin i = \sqrt{1-\cos^2 i}\quad ,\tag{30.107}$$

sofern nur $\sin\varepsilon_P\neq 0$ und $\sin\alpha_{PEF}\neq 0$. Falls aber $\sin\varepsilon_P = 0$, fallen Bahnebene des Planeten und seine Äquatorebene zusammen. Dann kann $\alpha_{PEF} = 0°$ gesetzt werden, ebenso $l_{PEF} = 0°$ und $\sin l_{BP} = \sin\varepsilon_P$, wodurch die Pole eindeutig zugeordnet werden können: der Nordpol liegt nördlich der Ekliptik, wenn $\sin\varepsilon_P > 0$, sonst südlich.

Falls $\sin\varepsilon_P\neq 0$, wird l_{PEF} aus der dritten der Gleichungen (30.105) und

$$\begin{aligned}
\sin l_{PEF} &= \left(-\cos\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}\cos l_{BP}+\cos\alpha_{PEF}\sin l_{BP}\right)\cos i+\\
&\quad+\sin\varepsilon_P\sin\alpha_{PEF}\sin i
\end{aligned}\tag{30.108}$$

berechnet. Da $\varepsilon\in\left[0°,180°\right]$, genügt zu seiner Berechnung die Beziehung

$$\cos\varepsilon_{PE} = -\cos l_{BP}\sin i\sin\varepsilon_P+\cos i\cos\varepsilon_P\quad .\tag{30.109}$$

Die zugehörigen Variationen sind:

$$
\begin{aligned}
(i)^{\cdot}\sin l_{PEF} \;=\;& \dot{\varepsilon}_P\ \sin\alpha_{PEF}\left[-\sin\varepsilon_P\cos l_{BP}\sin i+\cos\varepsilon_P\cos i\right]+\\
&+\dot{\alpha}_{PEF}\ \left\{\left[\cos\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}\cos l_{BP}+\sin\alpha_{PEF}\sin l_{BP}\right]\sin i+\right.\\
&\left.\quad+\sin\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}\cos i\right\}-\\
&-(l_{BP})^{\cdot}\ \cos l_{PEF}\sin i\\
(l_{PEF})^{\cdot} \;=\;& \dot{\varepsilon}_P\ \sin\alpha_{PEF}\ \left\{\left[\sin\varepsilon_P\cos l_{BP}\cos i+\cos\varepsilon_P\sin i\right]\cos l_{PEF}+\right.\\
&\left.\quad+\sin\varepsilon_P\sin l_{BP}\sin l_{PEF}\right\}+\\
&+\dot{\alpha}_{PEF}\ \left\{\left[-\left(\cos\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}\cos l_{BP}+\sin\alpha_{PEF}\sin l_{BP}\right)\cos i+\right.\right.\\
&\left.\quad+\sin\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}\sin i\right]\cos l_{PEF}-\\
&\left.-\left[\cos\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}\sin l_{BP}+\sin\alpha_{PEF}\cos l_{BP}\right]\sin l_{PEF}\right\}+\\
&+(l_{BP})^{\cdot}\ \cos i\\
\dot{\varepsilon}_{PE} \;=\;& (l_{BP})^{\cdot}\ \sin i\left\{\left[-\sin l_{BP}\cos\varepsilon_P\cos\alpha_{PEF}+\cos l_{BP}\cos\alpha_{PEF}\right]\cos\varepsilon_{PE}-\right.\\
&\left.\quad-\sin l_{BP}\sin\varepsilon_P\sin\varepsilon_{PE}\right\}+\\
&+(i)^{\cdot}\ \left\{\left[\left(\cos l_{BP}\cos i\cos\varepsilon_{PE}-\sin i\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PEF}+\right.\right.\\
&\left.\quad+\sin l_{BP}\cos i\sin\alpha_{PEF}\right]\cos\varepsilon_{PE}+\\
&\left.+\left[\cos l_{BP}\cos i\sin\varepsilon_P+\sin i\cos\varepsilon_P\right]\sin\varepsilon_{PE}\right\}+\\
&+\dot{\varepsilon}_P\ \cos\alpha_{PEF}\quad .
\end{aligned}
\tag{30.110--30.112}
$$

Der Bezug des Planetenäquatorsystems zum Planetenbahnsystem wird entsprechend Bild 30-4 auf Seite 697 durch Drehung um den Nordpol N_P des Planeten mit dem Winkel α_{PA} in den Knoten Ω_P des Planetenäquators A_P bezogen auf die Planetenbahn hergestellt, sodann Drehung um diesen Knoten mit dem Winkel ε_P in die Planetenbahnebene B_P und schließlich durch Drehung um den Nordpol N_B der Bahnebene um den Winkel l_{BP} in den Knoten Ω der Planetenbahn mit der Ekliptik. Seien die $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(B)}$ die Basisvektoren des Planetenbahnsystems. Die gesamte Transformation kann in der Beziehung

$$\mathbf{q}_k^{(B)} \;=\; a_k^{\,j}\,\mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.113}$$

zusammengefasst werden, die im Einzelnen lautet:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(B)} \;=\;& \mathbf{q}_1^{(K)}\left[-\cos\varepsilon_P\sin l_{BP}\sin\alpha_{PA}+\cos l_{BP}\cos\alpha_{PA}\right]-\\
&-\mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P\sin l_{BP}\cos\alpha_{PA}+\cos l_{BP}\sin\alpha_{PA}\right]+\\
&+\mathbf{q}_3^{(K)}\sin\varepsilon_P\sin l_{BP}\\
\mathbf{q}_2^{(B)} \;=\;& \mathbf{q}_1^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P\cos l_{BP}\sin\alpha_{PA}+\sin l_{BP}\cos\alpha_{PA}\right]-\\
&+\mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P\cos l_{BP}\cos\alpha_{PA}-\sin l_{BP}\sin\alpha_{PA}\right]+\\
&-\mathbf{q}_3^{(K)}\sin\varepsilon_P\cos l_{BP}\\
\mathbf{q}_3^{(B)} \;=\;& \mathbf{q}_1^{(K)}\sin\alpha_{PA}\sin\varepsilon_P+\mathbf{q}_2^{(K)}\cos\alpha_{PA}\sin\varepsilon_P+\mathbf{q}_3^{(K)}\cos\varepsilon_P\quad .
\end{aligned}
\tag{30.114}
$$

Die Rotationsmatrix $\left(a_i{}^j\right)$ hat die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} \\
a_{12} &= -\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} \\
a_{13} &= \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \\
a_{21} &= \cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} \\
a_{22} &= \cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} \\
a_{23} &= -\sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \\
a_{31} &= \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} \\
a_{32} &= \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} \\
a_{33} &= \cos\varepsilon_P \quad .
\end{aligned} \tag{30.115}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{13} \sin\alpha_{PA} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{21} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{13} \cos\alpha_{PA} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{22} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \sin l_{BP} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{23} \sin\alpha_{PA} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{11} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{23} \cos\alpha_{PA} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{12} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \cos l_{BP} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \sin\alpha_{PA} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \cos\alpha_{PA} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{\varepsilon}_P \sin\varepsilon_P \quad .
\end{aligned} \tag{30.116}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(K)} = b_j{}^k\, \mathbf{q}_i^{(B)} \tag{30.117}$$

ist daher (wieder) mit dem System (30.22) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right) = 1$ und $b_i{}^j = a_j{}^i$ in Matrixschreibweise

$$\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.118}$$

Seien $x_B{}^i$ die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{q}_{Bi}$-Planetenbahnsystem, gilt wegen

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x_B{}^i\, \mathbf{q}_k^{(B)} = x_B{}^i\, a_i{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}_B{}^k\, \mathbf{q}_k^{(B)} + x_B{}^k\, \dot{\mathbf{q}}_k^{(B)} = \dot{x}_P{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(K)}
\end{aligned} \tag{30.119}$$

und für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned}
x_P{}^j &= a_i{}^j\, x_B{}^i \\
x_B{}^i &= a^i_j\, x_P{}^j
\end{aligned} \tag{30.120}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_i{}^j\, x_B{}^i + a_i{}^j\, \dot{x}_B{}^i \\ \dot{x}_B{}^i &= \dot{a}^i_{\ j}\, x_P{}^j + a^i_{\ j}\, \dot{x}_P{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.121}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= x_{B1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad - x_{B2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B3} \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} \\ x_{P2} &= x_{B1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B3} \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} \\ x_{P3} &= x_{B1} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} - \\ &\quad - x_{B2} \sin\varepsilon_P \cos l_{BP} + \\ &\quad + x_{B3} \cos\varepsilon_P \quad . \end{aligned} \tag{30.122}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenbahnsystem ergeben sich mit den Formeln (30.117) auf S. 700 aus den Beziehungen (30.121). Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} x_{B1} &= x_{P1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] - \\ &\quad - x_{P2}\left[\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{P3} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \\ x_{B3} &= x_{P1}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{P2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] - \\ &\quad - x_{P3} \sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \\ x_{B3} &= x_{P1} \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} + \\ &\quad + x_{P2} \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} + \\ &\quad + x_{P3} \cos\varepsilon_P \quad . \end{aligned} \tag{30.123}$$

Die entsprechenden Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenäquatorsystem folgen mit den Formeln (30.116) wieder aus den Beziehungen (30.121).

Ein beliebiger Ort P über oder auf der Oberfläche eines Planeten mit planetozentrischem Abstand r_P habe im Planetenbahnsystem den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r_P\left[l_B, b_B\right] \quad , \tag{30.124}$$

im Planetenäquatorsystem

$$\mathbf{r} = r_P\left[\alpha_P, \delta_P\right] \quad . \tag{30.125}$$

Die Transformation zwischen diesen Systemen erfolgt nach Bild 30-4 auf S. 697, wobei die Kenntnis der Winkel $l_{BP} = \sphericalangle(\Omega, \Omega_P)$, $\alpha_{PA} = \sphericalangle(\Omega_P, \Omega_{PA})$ und der Schiefe ε_P mit ihren Variationen aus den Formeln (30.99) auf S. 696 bis (30.116) auf S. 700 vorausgesetzt werden kann. Somit gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_P \cos\delta_P &= \cos\left(l_B - l_{BP}\right)\cos b_B \\
\sin\alpha_P \cos\delta_P &= \sin\left(l_B - l_{BP}\right)\cos b_B \cos\varepsilon_P + \sin b_B \sin\varepsilon_P \\
\sin\delta_P &= -\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\cos b_B \sin\varepsilon_P + \sin b_B \cos\varepsilon_P
\end{aligned} \tag{30.126}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\cos\left(l_P - l_{BP}\right)\cos b_B &= \cos\alpha_P \cos\delta_P \\
\sin\left(l_P - l_{BP}\right)\cos b_B &= \sin\alpha_P \cos\delta_P \cos\varepsilon_P - \sin\delta_P \sin\varepsilon_P \\
\sin b_B &= \sin\alpha_P \cos\delta_P \sin\varepsilon_P + \sin\delta_P \cos\varepsilon_P
\end{aligned} \tag{30.127}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_P \cos\delta_P = &\left[\left(l_B\right)^{\cdot} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot}\right]\cos b_B \left[\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\sin\alpha_P + \right. \\
&\left. + \cos\left(l_B - l_{BP}\right)\cos\varepsilon_P \cos\alpha_P\right] + \\
&\dot{b}_B \left\{\cos\left(l_B - l_{BP}\right)\sin b_B \sin\alpha_P + \right. \\
&\left. + \left[-\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\sin b_B \cos\varepsilon_P + \cos b_B \sin\varepsilon_P\right]\cos\alpha_P\right\} + \\
&+ \dot{\varepsilon}_P \sin\delta_P \cos\alpha_P
\end{aligned} \tag{30.128}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_P = &\left[\left(l_B\right)^{\cdot} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot}\right]\cos b_B \left\{-\cos\left(l_B - l_{BP}\right)\sin\varepsilon_P \cos\delta_P + \right. \\
&\left. + \left[\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\cos\alpha_P - \cos\left(l_B - l_{BP}\right)\cos\varepsilon_P \sin\alpha_P\right]\sin\delta_P\right\} + \\
&\dot{b}_B \left\{\left[\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\sin b_B \sin\varepsilon_P + \cos b_B \cos\varepsilon_P\right]\cos\delta_P + \right. \\
&\left. + \left[\cos\left(l_B - l_{BP}\right)\sin b_B \cos\alpha_P + \right.\right. \\
&\left.\left. + \left(\sin\left(l_B - l_{BP}\right)\sin b_B \cos\varepsilon_P - \cos b_B \sin\varepsilon_P\right)\sin\alpha_P\right]\sin\delta_P\right\} - \\
&- \dot{\varepsilon}_P \sin\alpha_P
\end{aligned} \tag{30.129}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Planetenbahnsystem

$$\begin{aligned}
\left(l_B\right)^{\cdot}\cos b_B = &+ \left(l_{BP}\right)^{\cdot}\cos b_B + \\
&\dot{\alpha}_P \cos\delta_P \left[\sin\alpha_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right) - \cos\alpha_P \cos\varepsilon_P \cos\left(l_B - l_{BP}\right)\right] + \\
&+ \dot{\delta}_P \left[\cos\alpha_P \sin\delta_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right) + \right. \\
&\left. + \left(\sin\alpha_P \sin\delta_P \cos\varepsilon_P + \cos\delta_P \sin\varepsilon_P\right)\cos\left(l_B - l_{BP}\right)\right] + \\
&+ \dot{\varepsilon}_P \sin b_B \cos\left(l_B - l_{BP}\right)
\end{aligned} \tag{30.130}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_B \;=\;& \dot{\alpha}_P \cos\delta_P \left\{ \cos\alpha_P \sin\varepsilon_P \cos b_B + \right. \\
& \left. + \left[\sin\alpha_P \cos\left(l_B - l_{BP}\right) + \cos\alpha_P \cos\varepsilon_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right) \right] \sin b_B \right\} + \\
& + \dot{\delta}_P \left\{ \left[-\sin\alpha_P \sin\delta_P \sin\varepsilon_P + \cos\delta_P \cos\varepsilon_P \right] \cos b_B + \right. \\
& \left. + \left[\cos\alpha_P \sin\delta_P \cos\left(l_B - l_{BP}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\sin\alpha_P \sin\delta_P \cos\varepsilon_P + \cos\delta_P \sin\varepsilon_P\right) \sin\left(l_B - l_{BP}\right) \right] \sin b_B \right\} - \\
& - \dot{\varepsilon}_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.131}
$$

30.4.2 Das planetographische System

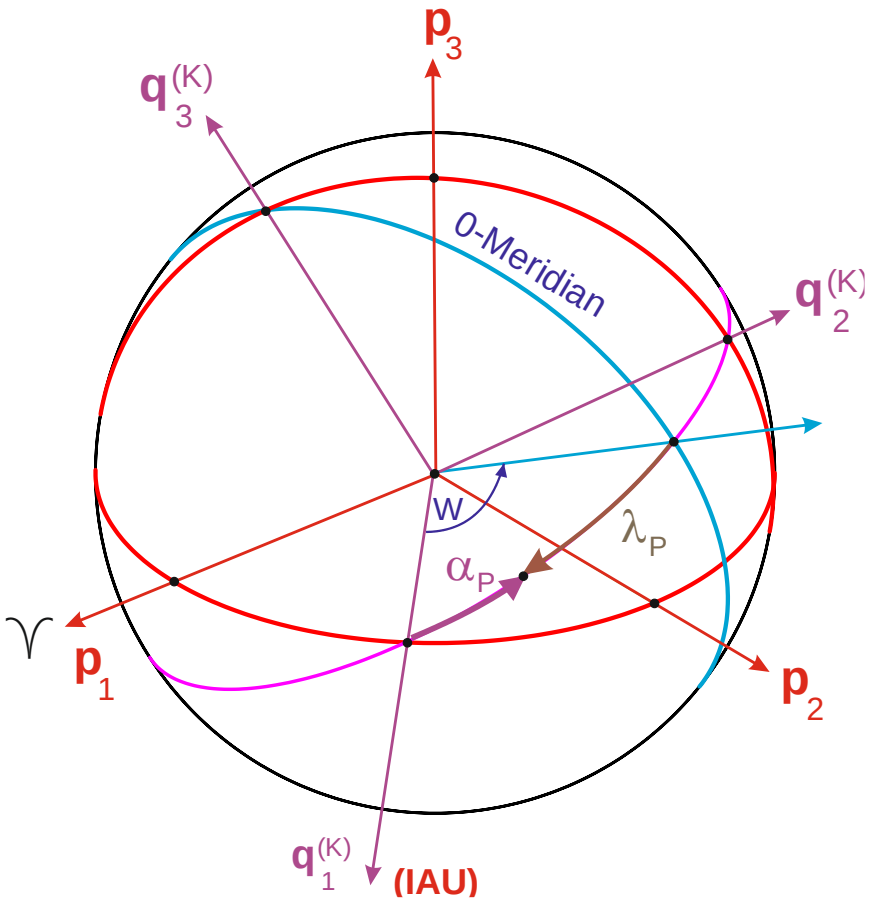


Bild 30-5: Die planetographische Länge λ_P bei rechtläufiger Rotation eines Planeten. Der 0-Meridian hat bezogen auf den IAU-Vektor (Schnittpunkt des Planeten-Äquators mit dem Erd-Äquator) die Winkeldistanz W_0. Die planetographische Länge wird entgegengesetzt zur Rotation des Planeten gezählt[1].

Um den Bezug eines Planetenorbiters zur Oberfläche des Planeten zu beschreiben, etwa für Überdeckungs- oder Sichtbarkeitsuntersuchungen, wird seine Bewegung in einem mitrotierenden planetozentrischen System dargestellt. Ausgangspunkt dazu ist das Planetenäquatorsystem, dessen Nord-

[1] Achtung: die geographische Länge auf der Erde wird im Gegensatz zur Definition bei den Planeten mit der Erdrotation gezählt.

polrichtung durch die auf das Erd-Äquatorsystem[1] bezogenen Koordinaten (α_1, δ_1) mit ihren Variationen zu jedem Zeitpunkt bekannt sind. Es wird (wie auf der Erde) zwischen *planetozentrischen* und *planetographischen* Koordinaten unterschieden. Das planetographische System beschreibt den Planetenkörper durch ein Referenzellipsoid. Dieses wird durch Angabe des mittleren Äquatorradius R_E und der Abplattung f beschrieben. Dies ist physikalisch gesehen willkürlich, da für die Körper des Sonnensystems unterschiedliche Bezugsoberflächen gewählt werden müssen, für die Erde etwa der ideale mittlere Meeresspiegel (ideal bedeutet hier Außerachtlassung der Schwereanomalien des Erdkörpers), für die gasförmigen Planeten die Oberfläche mit einem Druck von 1 bar[2].

Die Planeten-äquatorialen Koordinaten planetare Rektaszension α_P und Deklination δ_P sind entweder in Bezug auf den Schnittpunkt Ω_P zwischen Planetenäquator und Planetenbahnebene gegeben (α_P, δ_P) oder mit Bezug auf den Schnitt Ω_{PA} zwischen Planetenäquator und Erdäquator $(\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P)$. Für einen Punkt auf der Referenzoberfläche des Planeten ist die *planetozentrische Breite* φ'_P der planetaren Deklination δ_P gleich. Die *planetographische Breite* φ_P wird berechnet aus[3]

$$\sin\varphi_P = \frac{\sin\varphi'_P}{\sqrt{\sin^2\varphi'_P + (1-f)^4\cos^2\varphi'_P}} \quad . \tag{30.132}$$

Ein Punkt mit der Höhe H' über dem Referenzellipsoid kann mit den in Kapitel 38 (Band V) hergeleiteten Formeln (wie im Fall der Erde) behandelt werden.

Bei den Planeten wird zwischen *planetozentrischer Länge* λ'_P und *planetographischer Länge* λ_P und unterschieden. Die planetozentrische Länge λ'_P wird längs des Planetenäquators vom Planetennordpol aus gesehen im Uhrzeigersinn (also „westlich“) gezählt. Die planetographische Länge λ_P wird dagegen auf die Rotation des Planeten bezogen. Sie wird positiv entgegen der Rotationsrichtung des Planeten gezählt. Bei rechtläufig rotierenden Planeten stimmen planetozentrische und planetographische Länge überein.

Zur Charakterisierung der Rotation eines Planeten wird für eine Epoche t_0 die planetare Rektaszension W_0 eines für den betreffenden Planeten ausgewählten Bezugsmeridians („Nullmeridian“) zum Schnitt Ω_P mit dem (mittleren) Erdäquator (zum betreffenden Zeitpunkt) vorgegeben. Für einen beliebigen Zeitpunkt *t* hat der 0°-Meridian das Argument

$$W = W_0 + \dot{W}(t - t_0) \quad , \tag{30.133}$$

---

[1] Siehe die Definitionen in Abschnitt 29.4 auf Seite 624 sowie die Beschreibung in Bild 30-2 auf Seite 682

[2] vgl. SEIDELMANN P. K., ed. [1992], pp. 383–388; DAVIES ET AL. [1986]; Zusammenstellung der wichtigsten physikalischen Parameter von Sonne und Planeten in Anhang E.7 (Band V)

[3] etwa mit einer der Formeln (37.38) bis (37.43) in Abschnitt 37.2.3, Band V

welches der Sternzeit auf der Erde entspricht („Stundenwinkel des Nullmeridians“). $\dot{W}$ charakterisiert die Rotation des Planeten. Für retrograde Planeten (Venus, Uranus, Pluto) ist $\dot{W} < 0$ (siehe in Tabelle 30-2).

Planet	Rotation des Planeten um seine Achse $\dot{W}\left(\approx \dot{\Theta}\right)[\mathrm{rad/sec}]$
Merkur	1.24001250×10^{-6}
Venus	-2.99243084×10^{-7}
Erde	7.29211537×10^{-5}
Mars	7.08821808×10^{-5}
Jupiter	1.75853234×10^{-4}
Saturn	1.63784990×10^{-4}
Uranus	-1.01237196×10^{-4}
Neptun	1.08338253×10^{-4}
Pluto	-1.13855098×10^{-5}

Tabelle 30-2: Die tropische Rotation[1] der Planeten um ihre Rotationsachse, Daten zur Epoche J2000.0

Die planetographische Länge wird aus der planetaren Rektaszension berechnet durch die Beziehung (vgl. auch Bild 30-5)

$$\lambda_P \;=\; \mathrm{sgn}\left(\dot{W}\right)\left(W-\alpha_P\right) \quad . \tag{30.134}$$

Planetographische Systeme werden in der sphärischen Astronomie im Rahmen der Berechnung der physischen Ephemeriden der Körper des Sonnensystems verwendet.

Die planetographische Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenorbiterbahn hat dann mit Formel (30.134) die säkulare Variation

$$\dot{\lambda}_{p\Omega s} = \mathrm{sgn}\left(\dot{W}\right)\left[\dot{W}-\dot{\Omega}_p\right] \quad . \tag{30.135}$$

Damit können Untersuchungen der drakonitischen Bewegung von Planetenorbitern durchgeführt werden, wie es in Kapitel 23 im Fall der Erdsatelliten geschieht.

30.4.3 Der subterrestrische Punkt auf einer Planetenoberfläche

Die planetographischen Koordinaten der Erde auf einer Planetenoberfläche definieren *den subterrestrischen Punkt.* Zu einem Zeitpunkt *t* habe der Mittelpunkt des Planeten die geozentrischen äqua-

[1] die aber zur Berechnung sonnensynchroner Bahnen nicht benötigt wird. Zahlenwerte aus SEIDELMANN P. K., ed. [1992], Table 15.7, p. 705

torialen Koordinaten (α, δ) und die geozentrische Distanz Δ. Der Nordpol des Planeten habe die Koordinaten (α_1, δ_1), die durch Umrechnung aus den Epocheelementen (α_0, δ_0) und ihren Variationen auf den gewünschten Zeitpunkt t umgerechnet sind. Die planetozentrische Rektaszension $\alpha_{P\odot}$ und Deklination $\delta_{P\odot}$ der Erde errechnen sich mit den Formeln (30.64) auf S. 688 und unter Beachtung, dass von dem Planeten aus gesehen $\alpha \to \alpha + 12^h$ und $\delta \to -\delta$ gesetzt werden muss, aus

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{P\odot} - \alpha_{PA}) \cos\delta_{P\odot} &= \sin(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1 \\ \sin(\alpha_{P\odot} - \alpha_{PA}) \cos\delta_{P\odot} &= \cos(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1 \\ \sin\delta_{P\odot} &= -\cos(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta\cos\delta_1 - \sin\delta\sin\delta_1 \quad . \end{aligned} \tag{30.136}$$

Die planetographische Länge $\lambda_{P\odot}$ des subterrestrischen Punktes folgt aus Formel (30.134):

$$\lambda_{P\odot} = \operatorname{sgn}(\dot{W})(W - \alpha_{P\odot}) \quad . \tag{30.137}$$

Für eine Beobachtung dieses Punktes von der Erde aus muss die Lichtlaufzeit entsprechend der Distanz Δ in der Berechnung der Zeit berücksichtigt werden. In diesem Fall muss der Stundenwinkel *W* aus der gegenüber Formel (30.133) erweiterten Beziehung

$$W = W_0 + \dot{W}\left(t - t_0 - \frac{\Delta}{c}\right) \tag{30.138}$$

berechnet werden[1]. Wird die Distanz Δ in astronomischen Einheiten gegeben und das Zeitintervall in Tagen (TDB) verlangt, lautet der Umrechnungsfaktor mit den IAU 1984-Werten[2]

$$\frac{\Delta}{c}\left[\frac{AU}{\text{km/s}}\right] = \frac{1.49597810\times10^8}{86400\times299792.458}\Delta\ [\text{d}] = 0.005775518\Delta\ [\text{d}] \quad . \tag{30.139}$$

Die planetographische Breite folgt aus Formel (30.132), da wieder die planetozentrische Breite $\varphi'_{P\odot}$ auf der Referenzfläche der Deklination $\delta_{P\odot}$ als gleich angenommen werden kann,

$$\sin\varphi_{P\odot} = \frac{\sin\delta_{P\odot}}{\sqrt{\sin^2\delta_{P\odot} + (1-f)^4\cos^2\delta_{P\odot}}} \tag{30.140}$$

und umgekehrt

$$\sin\delta_{P\odot} = \frac{(1-f)^2\sin\varphi_{P\odot}}{\sqrt{\cos^2\varphi_{P\odot} + (1-f)^4\sin^2\varphi_{P\odot}}} \quad . \tag{30.141}$$

Ein BEISPIEL für die Darstellung des subterrestrischen Punktes auf einer Planetenoberfläche ist in Bild 30-34 auf Seite 756 für die Beobachtung eines Marsorbiters gesehen von der Erde gegeben. ◄

Anmerkung: der subterrestrische Punkt der Planeten wird im astronomischen Jahrbuch[1] tabelliert in Schrittweiten von 4 Tagen aufbereitet. Analog zu den vorstehenden Formeln kann auch der subsolare Punkt berechnet werden, der ebenfalls im astronomischen Jahrbuch zu finden ist. ◄

---

[1] vgl. etwa AA 1993 [1982], p. E88

[2] siehe Anhang E.1 (Band V)

30.5 Physikalische Ephemeriden der Planeten

Die physikalischen Ephemeriden von Planeten und ihren Monden, wozu auch die Kleinen Planeten gezählt werden, werden üblicherweise in zwei Gruppen behandelt[2]:

1. Die Eigenschaften der Planetenoberfläche, die Rotationseigenschaften und die kartographischen Koordinaten. Das Arbeiten mit diesen Daten wird im vorhergehenden Abschnitt behandelt. Die dazu benötigen Zahlenwerte sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt.
2. Die Phasen und die damit verbundenen Helligkeiten der interplanetaren Objekte, wie sie von der Erde aus erscheinen. Die Phase wird in Abschnitt 30.8.3 (auf Seite 723) behandelt, wie sie aus einer Ephemeridenrechnung erhalten werden kann. Die Berechnung der scheinbaren Helligkeit („Magnitude“) ist nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes.

30.6 Die erdbezogene synodische Bewegung der Planeten

Die relative Bewegung zweier Planeten (und anderer interplanetarer Objekte) wird vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels untersucht. Aus diesem Grund müssen die siderischen Bewegungen dieser Körper betrachtet werden. Der Bezug der siderischen Bewegungen der beiden aufeinander wird als synodische Bewegung bezeichnet. Markante Punkte der synodischen Bewegung sind die Opposition bzw. die Konjunktion bei Bezug auf die Sonne. Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Opposition und entsprechend durch die Konjunktion wird als synodischer Umlauf (der Planeten) bezeichnet.

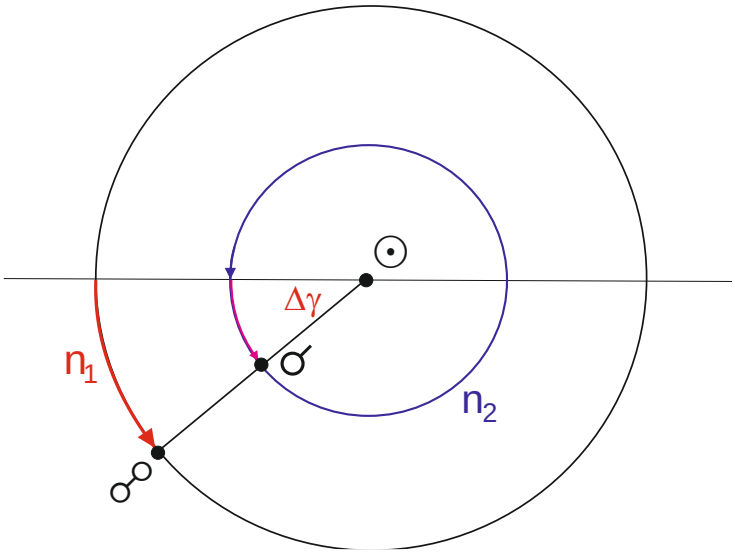


Bild 30-6: Zur Herleitung der synodischen Bewegung zwischen zwei Planeten mit den mittleren siderischen Bewegungen n_1, n_2. Planet 1 befindet sich von Planet 2 aus gesehen in Opposition (σ°) zur Sonne, von Planet 1 aus gesehen befindet sich Planet 2 in Konjunktion (σ) mit der Sonne

---

[1] Astronomical Almanac herausgegeben vom Nautical Almanac Office, USNO, und Her Majesty's Nautical Almanac Office, Rutherford Appleton Laboratory, ISBN 0 11 887323 7, ISSN 0737-6421

[2] siehe hierzu die ausführlichen Darstellungen in SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], chapter 7, pp.383-419

Für bahnanalytische Zwecke ist es üblich, die mittleren siderischen Bewegungen der beiden Objekte zu vergleichen. Um die beiden Bewegungen einheitlich vergleichen zu können, werden ihre Projektionen auf die Ekliptik verwendet[1]. Wenn es nicht auf die letzte Genauigkeit ankommt, wird die siderische mittlere Bewegung durch die tropische mittlere Bewegung $\left(\dot{L}\right)$ ersetzt, die als säkularer Anteil in der mittleren Länge eines Planeten auftritt[2].

Die beiden betrachteten Planeten haben die siderische Umlaufzeit $\overline{P_{ps1}}, \overline{P_{ps2}}$ und die zugehörigen mittleren siderischen Bewegungen $\overline{n_1} = 360° / \overline{P_{ps1}}$, $\overline{n_2} = 360° / \overline{P_{ps2}}$.

Zur Berechnung der synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S} = 360° / \overline{n_S}$ wird (siehe Bild 30-6) der Winkel $\Delta\gamma$, der von Planet 1 in einem synodischen Umlauf durchlaufen wird mit der Bewegung des zweiten Planeten verglichen, der im selben Zeitraum den Winkel durchläuft. Daraus wird

$$\Delta\gamma = \overline{n_1}\,\overline{P_S} = \overline{n_2}\,\overline{P_S} - 360° = \overline{n_2}\,\overline{P_S} - \overline{n_S}\,\overline{P_S} \tag{30.142}$$

somit

$$\overline{n_1} = \overline{n_2} - \overline{n_S} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\overline{P_{ps1}}} = \frac{1}{\overline{P_{ps2}}} - \frac{1}{\overline{P_S}} \quad . \tag{30.143}$$

Für die Berechnung der synodischen Umlaufzeit ergeben sich daraus die beiden möglichen Fälle

$$\overline{P_S} = \frac{\overline{P_{ps1}}\,\overline{P_{ps2}}}{\pm\left(\overline{P_{ps1}} - \overline{P_{ps2}}\right)} \tag{30.144}$$

je nachdem, ob

$$\begin{aligned} (+) \;&\Leftrightarrow\; \overline{P_{ps1}} > \overline{P_{ps2}} \;\Leftrightarrow\; \text{Planet 2 innerer Planet zu Planet1} \\ (-) \;&\Leftrightarrow\; \overline{P_{ps1}} < \overline{P_{ps2}} \;\Leftrightarrow\; \text{Planet 2 äußerer Planet zu Planet1} \quad . \end{aligned} \tag{30.145}$$

Diese Unterscheidung ist bei der Beobachtung der Planeten von Bedeutung, wenn die synodische Bewegung auf die Erde bezogen werden soll. Eine Aussage über die Größenordnung der synodischen Umlaufzeit kann durch Vergleich der Größen der siderischen Umlaufzeit der Planeten in Bezug auf die Erde erhalten werden:

- Wenn $\left|\overline{P_{\oplus}} - \overline{P_{sp}}\right|$ klein ist, wird $\overline{P_S}$ groß, was für Venus und Mars zutrifft.
- Wenn $\left|\overline{P_{\oplus}} - \overline{P_{sp}}\right|$ groß ist, wird $\overline{P_S}$ klein, was für Merkur, Jupiter und Saturn zutrifft.

Diese Eigenschaften werden in Tabelle 30-3 quantitativ unterlegt.

Eine Aussage über die synodische Bewegung der Planeten bei Bezug auf die Erde kann (näherungsweise) aus Beziehung (30.143) mit Hilfe der tropischen mittleren Bewegung der Planeten erhalten werden

$$\dot{L}_S = \pm\left(\dot{L}_{sP} - \dot{L}_{s\oplus}\right) \quad . \tag{30.146}$$

---

[1] Reduktion auf die Ekliptik, analog zur Reduktion auf den Äquator (siehe in Abschnitt 24.2.5)

[2] Siehe in den Planetenparametern in Abschnitt 30.2.2 auf Seite 672

Planet	Siderische Umlaufzeit	Mittlere synodische Umlaufzeit	Mittlere tägliche Bewegung	Mittlere Bahn-geschwindig-keit
Merkur	87.968435728 d	115.8775 d	4°.09237706	47.8725 km/s
Venus	224.695433692 d	583.9214 d	1°.60216874	35.0214 km/s
Erde	365.17190955 d		0°.98564736	29.7859 km/s
Mars	686.929711912 d	779.9361 d	0°.52407109	24.1309 km/s
1 Ceres	1679.89633786 d	466.6004 d	0°.21429894	17.9101 km/s
Jupiter	4330.59576356 d	398.8840 d	0°.08312944	13.0697 km/s
Saturn	10746.9404426 d	378.0919 d	0°.03349791	9.6724 km/s
Uranus	30588.7403410 d	369.6560 d	0°.01176904	6.8352 km/s
Neptun	59799.9004436 d	367.4867 d	0°.006020076	5.4778 km/s
Pluto	90589.5972 d	366. 7207 d	0°.003973966	4.7490 km/s

Tabelle 30-3: Die mittlere synodische Umlaufzeit der Planeten[1] und zugehörige Bewegungsgrößen zur Epoche J2000.0

Hier bedeuten: $\dot{L}_S$ - mittlere synodische Umlaufzeit, $\dot{L}_{sP}$ - mittlere tropische (ungefähr siderische) Umlaufzeit eines Planeten, $\dot{L}_{s\oplus}$ - mittlere tropische (ungefähr siderische) Umlaufzeit der Erde. Auch hier gilt das positive Vorzeichen für die inneren Planeten, das negative für die äußeren. Innere Planeten durchlaufen in Bezug auf die Erde keine Opposition, sondern die innere (manchmal auch obere genannt) Konjunktion, wenn Planet und Erde sich auf derselben Seite zur Sonne befinden (der Planet steht vor der Sonne, ein Moment der in der Planetentheorie von besonderer Bedeutung ist), die untere Konjunktion, wenn Planet und Erde sich auf verschiedenen Seite der Sonne befinden (der Planet steht hinter der Sonne und kann schlecht oder gar nicht beobachtet werden). Bei bestimmten Familien von Kleinen Planeten und insbesondere bei interplanetaren Raumsonden auf elliptischen Bahnen muss mit Oppositionen und verschiedenartigen Konjunktionen gerechnet werden.

30.7 Beispiele zur Darstellung der Bewegung interplanetarer Objekte

BEISPIEL 1: Bild 30-7 (auf Seite 710) zeigt den Verlauf der Planeten Merkur (☿), Venus (♀), Erde (♁), Mars (♂), Jupiter (♃) und Saturn (♄) über je ein siderisches Jahr (Daten in Tabelle 30-3 auf Seite 709). Der Beginn der Darstellung ist am 1. Januar 2017, 12h (UT1). Der Ort des Planeten ist für diesen Zeitpunkt auf seiner Bahn markiert. Deutlich sind die elliptischen Bahnen von Merkur $\left(e_{\☿} = 0.0206\right)$ und Mars $\left(e_{\♂} = 0.093\right)$ zu erkennen. Nicht so stark ausgeprägt sind die Elliptizitäten von Jupiter und Saturn. Die entsprechende Darstellung unter Einschluss der äußeren Plane-

[1] Kopie aus SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 704, Table 15.6; 1 Ceres aus T. GEHRELS [1979]

ten Uranus (⛢), Neptun (♆) und des Zwergplaneten Pluto (♇) ist in Bild 30-8 gegeben. Auch hier fällt die Elliptizität der Neptunbahn auf $(e_{\text{♆}} = 0.086)$.

Völlig aus dem Rahmen des Planetensystem fällt der Zwergplanet Pluto auf Grund seiner großen Exzentrizität $(e_{\text{♇}} = 0.249)$, wodurch seine Bahn zeitweise innerhalb der Neptunbahn verläuft. Besonders auffällig ist auch seine Bahnneigung gegenüber der Ekliptik $(i_{\text{♇}} = 17°.142)$, wie durch den schrägen Blick auf die Ekliptik in Bild 30-9 zu erkennen ist. Schon auf Grund dieser für Planeten ungewöhnlichen Bahndaten fällt Pluto aus dem Rahmen des Planetensystems heraus. ◄

30.7.1 Heliozentrischen Bewegung

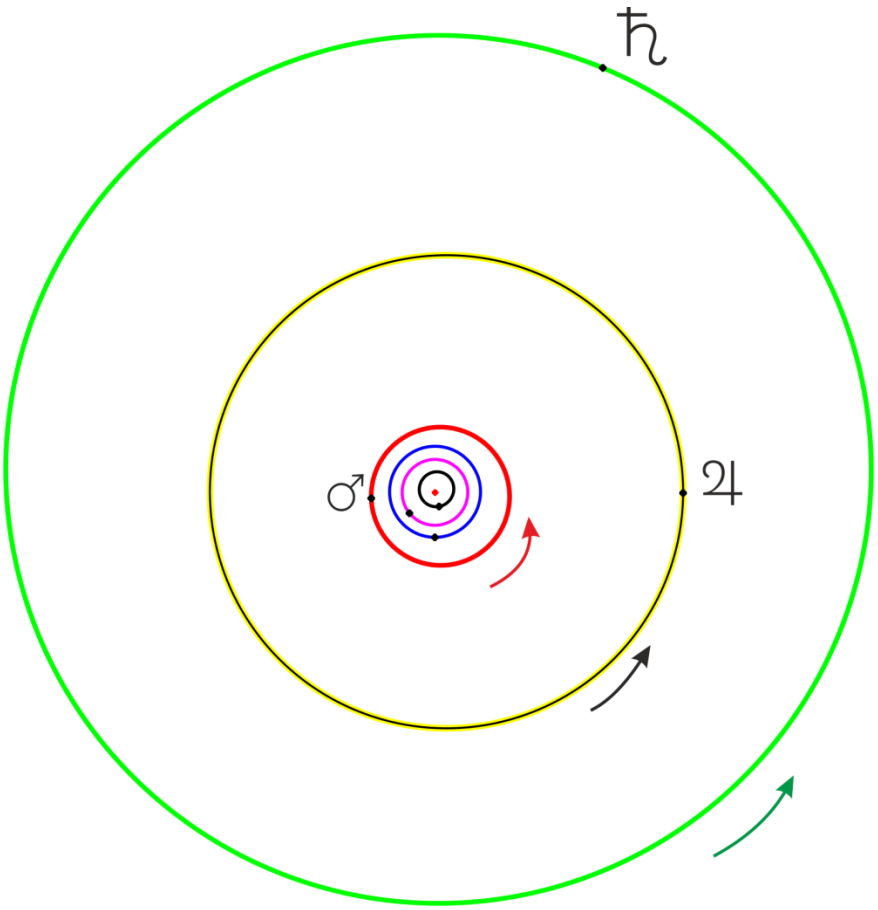


Bild 30-7: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

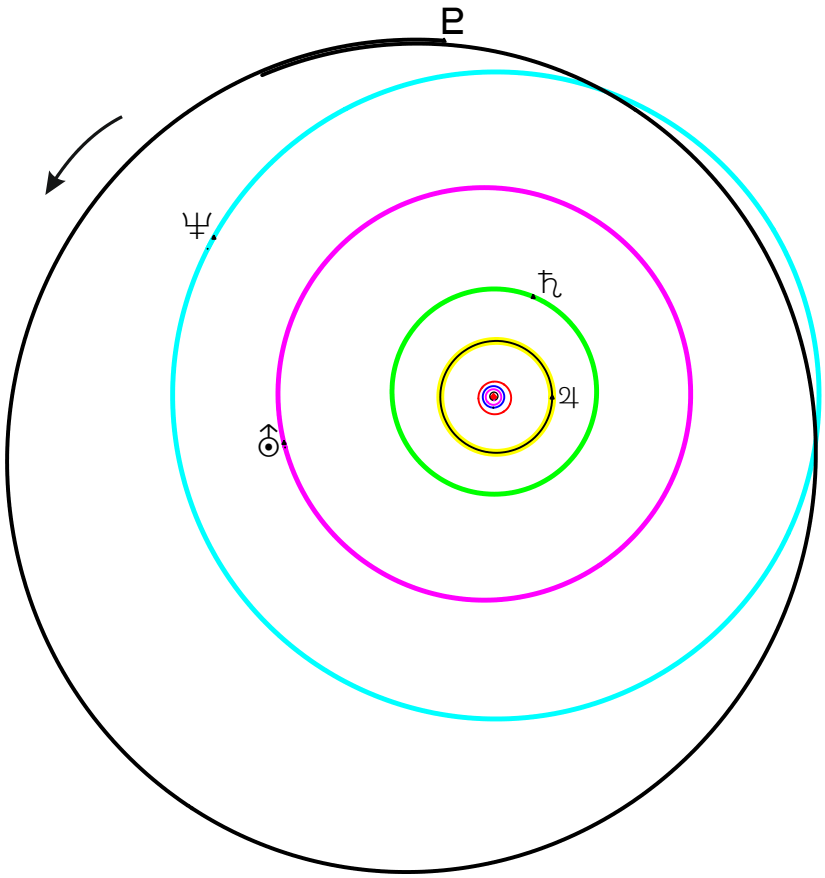


Bild 30-8: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

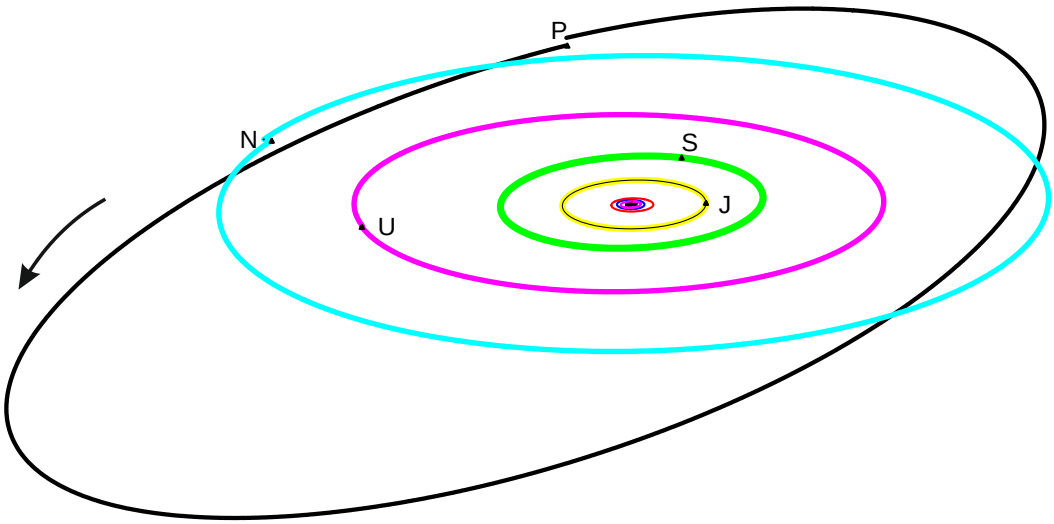


Bild 30-9: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $\beta = 20°$.

Zur Veranschaulichung werden einige aktuelle Darstellungen von Planetenbahnen in realistischen Größenverhältnissen demonstriert[1].

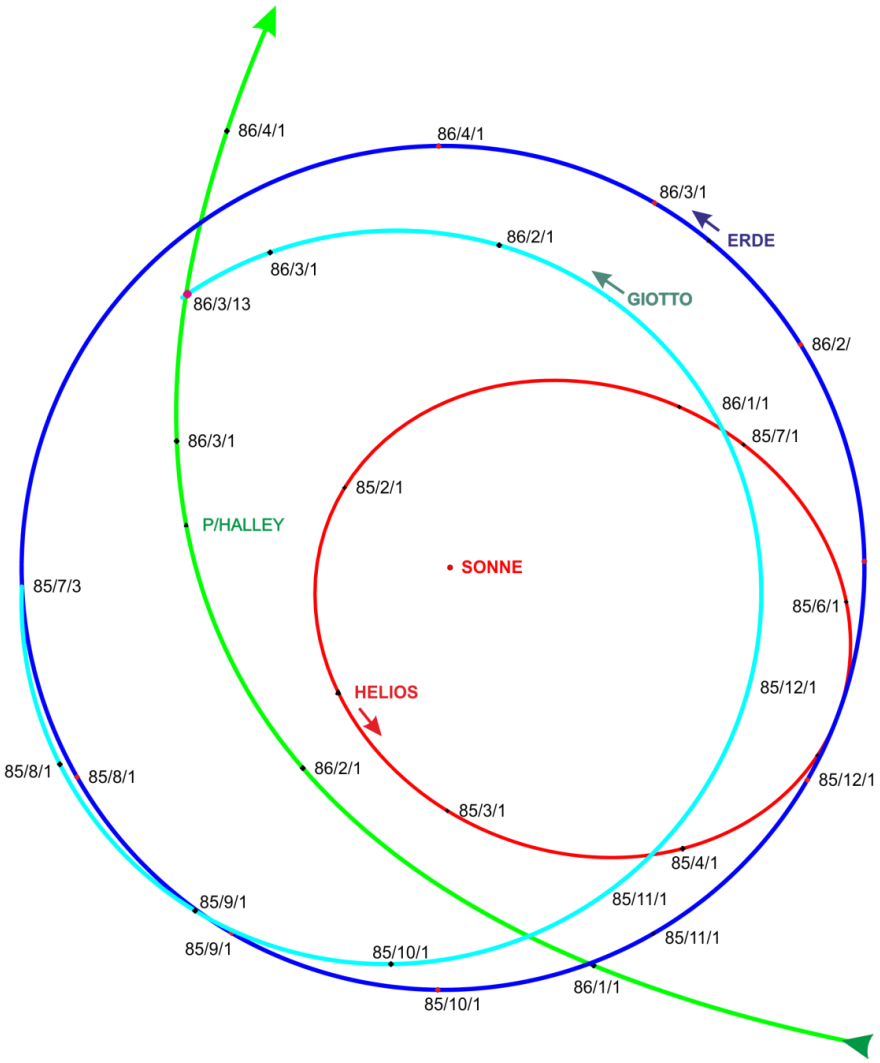


Bild 30-10: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist angedeutet. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik und lässt die extreme Exzentrizität der Kometenbahn mit $e = 0.967$ und ihre Rückläufigkeit mit $i = 162°$ erkennen.

BEISPIEL 2: Als weiteres Beispiel wird die Bahn der interplanetaren Raumsonde GIOTTO zur Begegnung mit dem Kometen P/Halley am 13. März 1986 in Bild 30-10 (auf Seite 712) vorgestellt. Die hier verwendeten Bahnparameter sind:

GIOTTO, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

[1] Die benötigten Bahnparameter sind in Abschnitt 30.2.2 auf Seite 672 zusammengestellt

Halbachse	a = 131751253.594 km
Exzentrizität	e = 0.177302
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 2°.0904719
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 281°.69921851
Argument des Perihels	ω = 204°.66258995
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 178°.48627974
Epoche t_0 :	1985-07-31/00:00:0.00

P/Halley, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

Halbachse	a = 2684217919.0000 km
Exzentrizität	e = 0.967279234
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 162°.239212
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 58°.143695
Argument des Perihels	ω = 111°.847256
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 0°.0
Epoche t_0 :	1986-02-09/23:00:0.00

Während der Vorbereitung der GIOTTO Mission war die Sonnensonde HELIOS 1 noch in Betrieb und musste noch mit den Antennen zur Beobachtung interplanetarer Missionen beobachtet werden. Aus diesem Grund musste diese Bahn in die Untersuchungen einbezogen werden:

HELIOS 1, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

Halbachse	a = 96810322.391 km
Exzentrizität	e = 0.521699686
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 0°.0249406
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 79°.5632522981
Argument des Perihels	ω = 178°.6312961597
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 249°.2098906816
Epoche t_0 :	1982-05-01/00:00:0.00

Bild 30-10 zeigt, dass die Bahn der Kometensonde GIOTTO im Wesentlichen innerhalb der Erdbahn verläuft, da der Encounter der Sonde mit dem Kometen innerhalb der Erdbahn erfolgen soll um eine große Aktivität des Kometen in der Nähe der Sonne beobachten zu können. Entsprechend wurde die Sonde beim Einschuss gegenüber der Erdbewegung abgebremst. Sie bleibt somit gegenüber der Erde zurück, was aus den Zeitzuordnungen abgelesen werden kann. Die Sonde begegnet dem Kometen, der sich mit der Bahninklination i=162° auf einer rückläufigen Bahn befindet mit der Relativgeschwindigkeit von etwa $\Delta V \approx 69\,\text{km/s}$. Bild 30-11 zeigt denselben Sachverhalt jedoch aus einer Sicht unter der ekliptikalen Breite $b = 5°$, wodurch die räumliche Dimensionierung des Vorganges zu erkennen ist. ◄

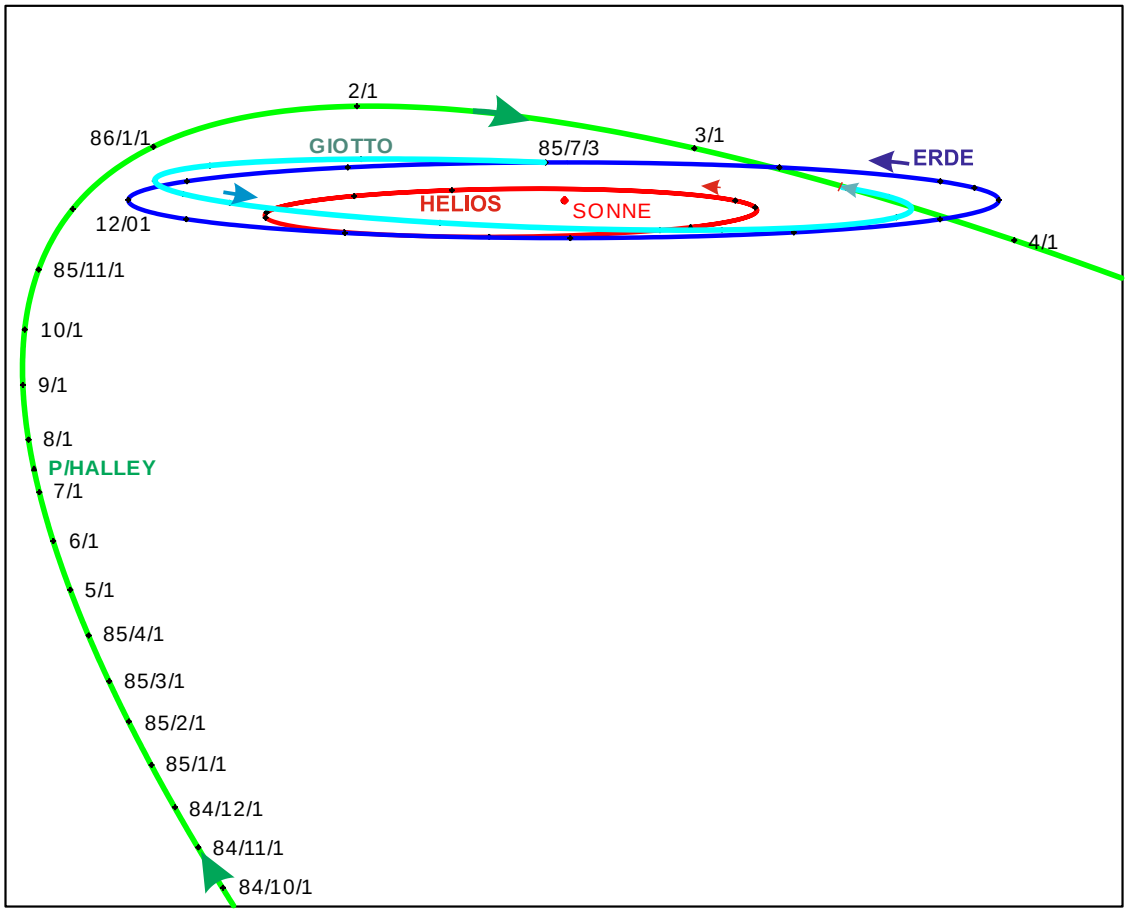


Bild 30-11: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist angedeutet. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $b = 5°$ und lässt die Neigung mit i = 162° und entsprechender Rückläufigkeit der Kometenbahn erkennen.

BEISPIEL 3: Auf interplanetaren Missionen, die in den Asteroidengürtel eindringen bzw. durchqueren, ist es üblich im Vorbeiflug einen oder mehrere der Kleinen Planeten zu beobachten. Die Galileo-Mission 1991 wurde deshalb zu den Kleinen Planeten 951 Gaspra und 243 Ida gelenkt[1]. Allerdings ist der Zwischenraum zwischen den Kleinen Planeten auch im Asteroidengürtel relativ groß, so dass es notwendig ist, bei einer sorgfältigen Missionsplanung bestimmte Objekte gezielt anzusteuern.

Bild 30-12 aus einer Studie für eine Mission zum Kleinen Planeten 4 Vesta zeigt im Verlauf der Missionszeit, wie die Sonde in den Asteroidengürtel eindringt und einigen Kleinen Planeten begegnet. Die Kleinen Planeten, in deren Nähe die Sonde kommt werden nach ihrer Größe klassifiziert. Ein weiterer Charakterisierungspunkt ist die geophysikalische Zusammensetzung neben weiteren Punkten von Interesse, welche die Auswahl eines geeigneten Objektes einschränken. „Zufällig“ darf also kein interessantes Objekt im Vorbeiflug erwartet werden. ◄

[1] Siehe Bild 1-1 im Vorwort zu Band I

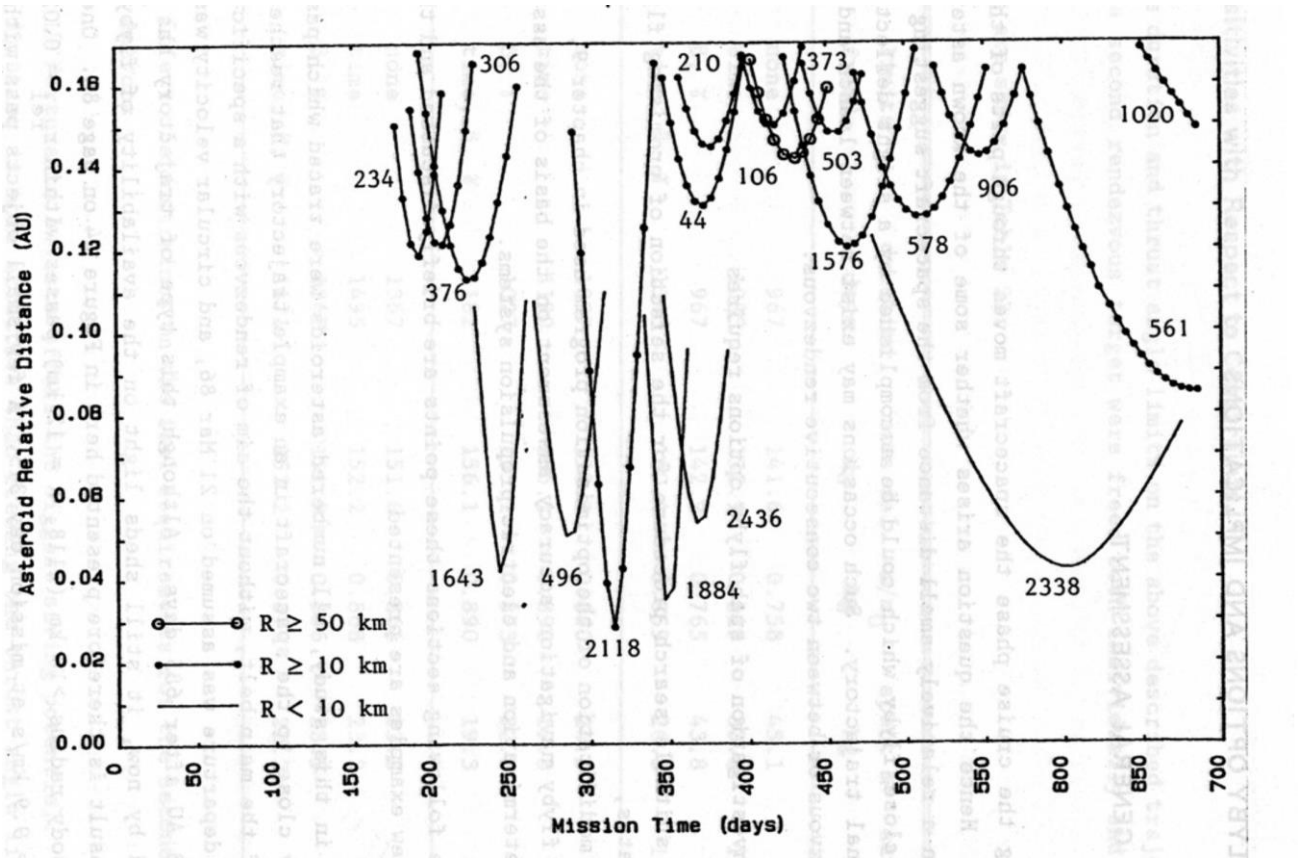


Bild 30-12: Mögliche nahe Begegnungen einer Raumsonde mit einigen Asteroiden (Bild aus einer Studie[1] einer mit Jonentriebwerken angetriebenen Probe zum Kleinen Planeten 4 Vesta). Die in Frage kommenden Kleinen Planeten sind nach ihrer Größe klassifiziert.

30.7.2 Erdbezogene Bewegung

Die Beobachtung interplanetarer Bewegungen von der Erde aus erscheint völlig anders, als die „physikalisch richtige“ heliozentrische Darstellung vorgibt. Der Bezug auf die bewegte Erde muss mit Hilfe der Planeten-bezogenen synodischen Bewegung durchgeführt werden. Dazu wird die Verbindungstrecke der Sonne zur mittleren Erde mit der mittleren tropischen Bewegung $n_\odot$ (der Unterschied zur siderischen Bewegung wird vernachlässigt) um die Sonne bewegt. Dadurch erscheint die Bewegung der wahren Erde als kleine Ellipse um den Ort der mittleren Erde. Bei gröberen Darstellungen schrumpft diese Ellipse zu einem Punkt zusammen.

Bild 30-13 zeigt die synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Saturn über den Zeitraum eines siderischen Jahres der Erde. Die Erdbahn erscheint als Punkt, die scheinbaren Bahnen der Planeten sind nicht geschlossen was eine Folge der Tatsache ist, dass die synodischen Umläufe der Planeten alle größer als die siderische Umlaufzeit der Erde sind. Insbesondere fällt auf, dass die scheinbare Bewegung der Venus (ebenso wie die des Merkur, was aber in der groben Darstellung nicht zu erkennen ist) rechtläufig im Sinne der Bewegung aller Planeten erfolgt, die äußeren Planeten sich alle scheinbar rückläufig bewegen. Dies ist mit der mittleren synodischen Bewegung aus Formel (30.143) (auf Seite 708) zu erklären:

$$n_S = n_{sP} - n_\odot \quad . \tag{30.147}$$

[1] Kopie aus: ECKSTEIN, M. C. et al. [1983]

Die Bewegung eines Planeten erscheint

$$\begin{aligned} &\text{rechtläufig bei inneren Planeten mit} \quad n_S > 0 \\ &\text{rückläufig bei äußeren Planeten mit} \quad n_S < 0 \quad . \end{aligned} \tag{30.148}$$

Bild 30-14 schließt in Ergänzung zu dem vorstehenden Bild auch die äußeren Planeten Uranus und Neptun sowie den Zwergplaneten Pluto ein. Auch hier zeigt sich im Verlauf eines irdischen siderischen Jahres keine geschlossene Bahn für die scheinbare Bewegung der Planeten.

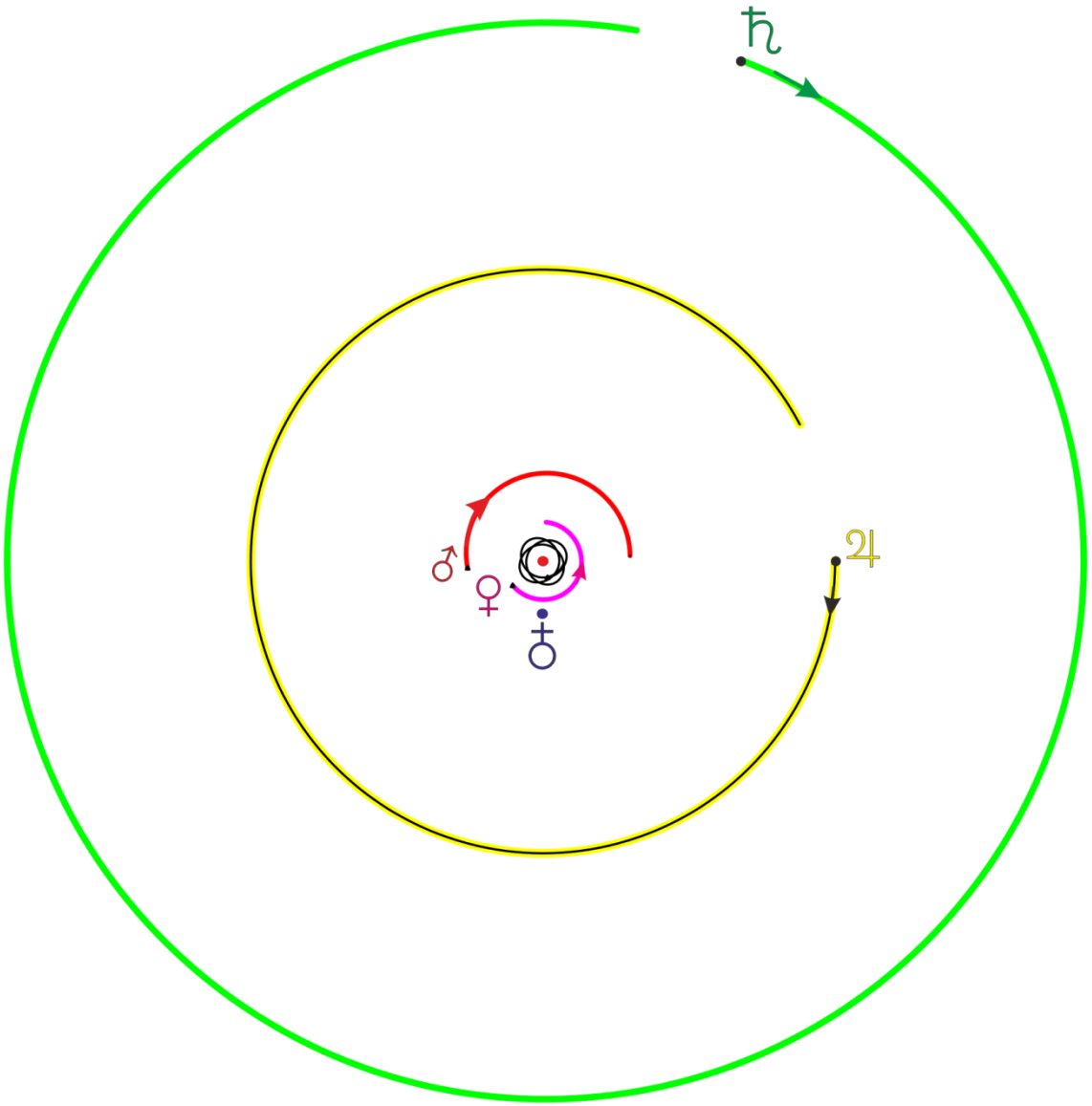


Bild 30-13: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über ein irdisches siderisches Jahr, richtige Größenverhältnisse

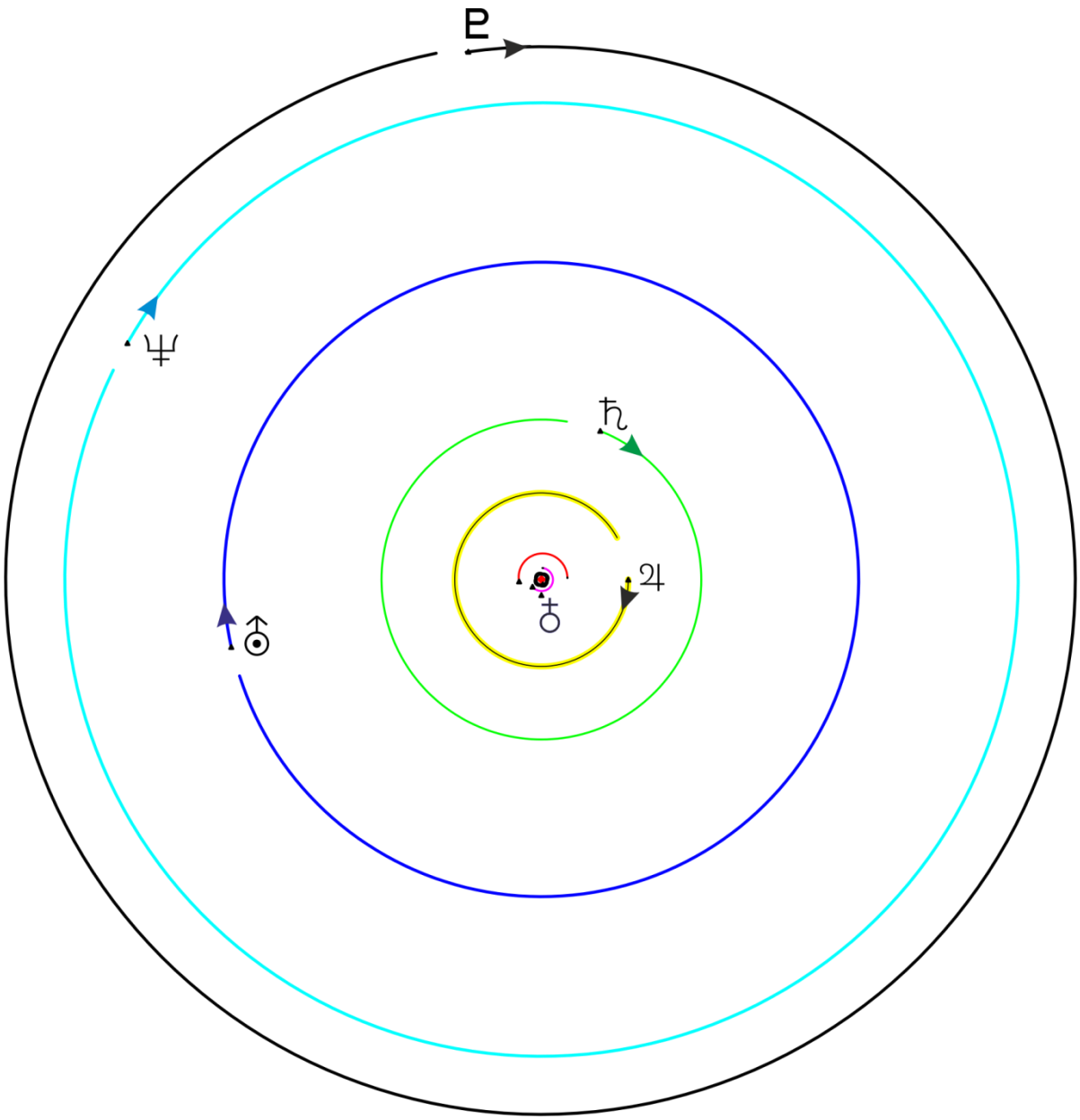


Bild 30-14: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über ein irdisches siderisches Jahr, beginnend am 1. Januar 2017; richtige Größenverhältnisse

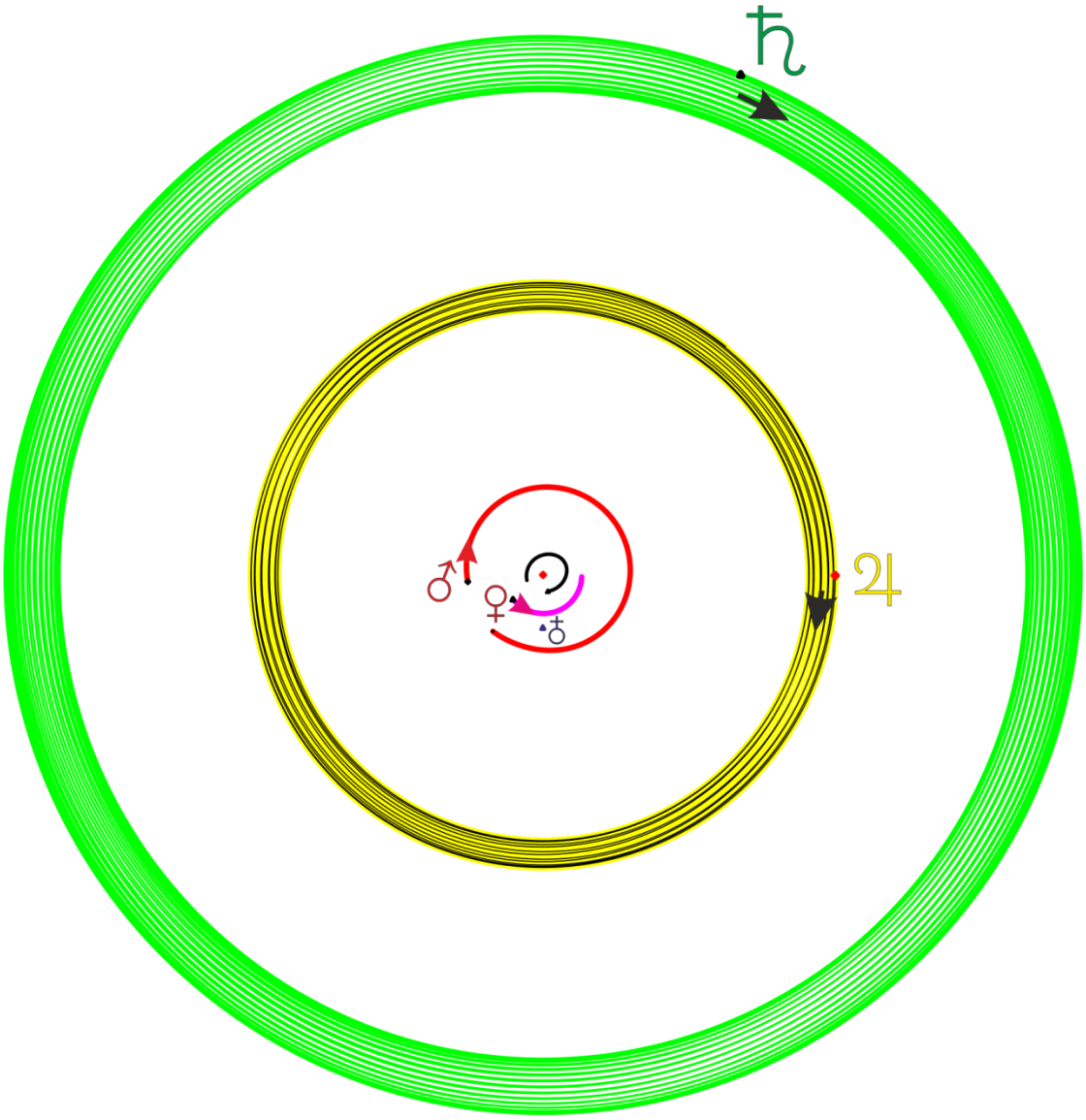


Bild 30-15: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Saturn über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017

In Erweiterung der bisherigen Darstellungen wird in Bild 30-15 und Bild 30-16 die Bewegung der betrachteten Planeten über je einen siderischen Umlauf aufgetragen. Die (scheinbaren) Bahnen der Planeten Merkur bis Mars sind nicht geschlossen. Wie aus Tabelle 30-3 (auf Seite 709) entnommen werden kann ist Ursache dafür die Tatsache, dass für diese Planeten die siderische Umlaufzeit kleiner als ihre synodische Umlaufzeit ist. Anders ist es für die äußeren Planeten. Hier übertrifft die siderische Umlaufzeit wesentlich die synodische Umlaufzeit. Zum Beispiel entsprechen bei Saturn etwa 31 synodische Umläufe bei Bezug auf die Erde einem siderischen Umlauf um die Sonne. Entsprechend der Exzentrizität der Saturnbahn sind die scheinbaren synodischen Umläufe in einem breiten Band zu erkennen. Noch extremer trifft dies für den Zwergplaneten Pluto zu. Bei ihm sind es 247 synodische Umläufe für einen siderischen Umlauf. Wegen der großen Exzentrizität ist das scheinbar überdeckte Gebiet erschreckend groß. Man beachte aber in allen Darstellungen die korrekte Größenordnung.

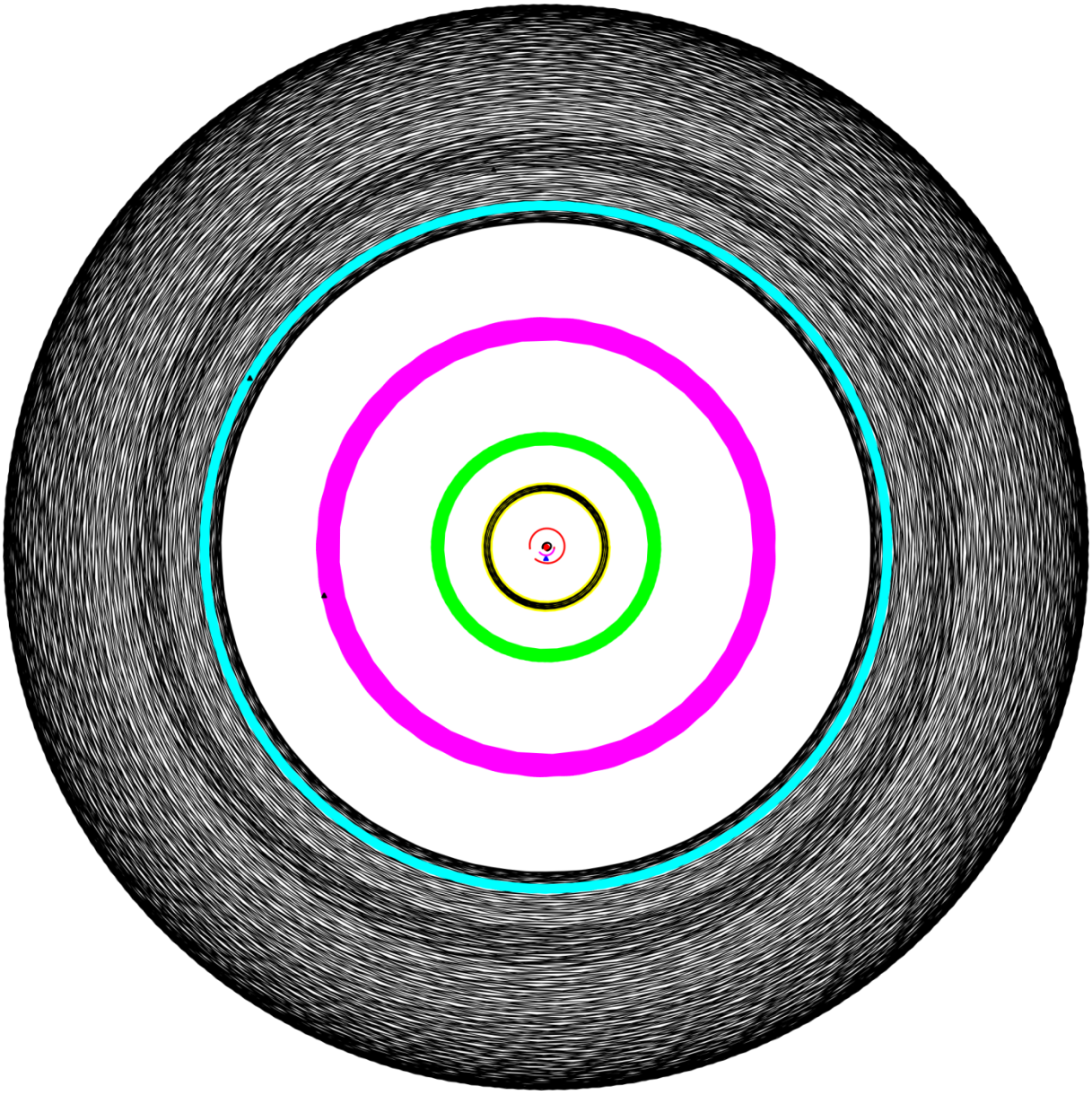


Bild 30-16: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017

Als letztes Beispiel soll Bild 30-17 in Ergänzung zu Bild 30-10 (bzw. Bild 30-11) die erdbezogene Bewegung der Kometensonde GIOTTO und ihrer Begegnung mit dem Kometen P/Halley dargestellt werden. Der Hintergrund für eine solche Darstellung ist die Notwendigkeit die Beobachtung der interplanetaren Mission mit der Beobachtung von einer Bodenstation aus zu koordinieren. In diesem Fall einer detaillierten Darstellung des inneren Bereiches des Sonnensystems ist die Ellipse der wahren Erde bei Bezug auf die mittlere Erde gut zu erkennen. Die beobachtende Antenne kann dem Lauf der Kometensonde gut folgen. Die scheinbare Bahn der Kometensonde ist von der Antenne aus gesehen etwa zwei Monate nach Einschuss bis zum Encounter nahezu geradlinig. Die Bedingung für die Beobachtung des Kometenschweifes ist optimal. Die Bahn des Kometen, die in Wirklichkeit fast parabolisch ist, erscheint hier fast kreisnah. Auffällig ist die scheinbare Bahn der Sonnensonde HELIOS 1, die in dieser Darstellung der erdbezogenen Bewegung als rotierende Doppelacht erscheint. Die Darstellung erlaubt die Abschätzung, ob eine Beobachtung der Kometensonde mit der Beobachtung der Sonnensonde kollidieren könnte.

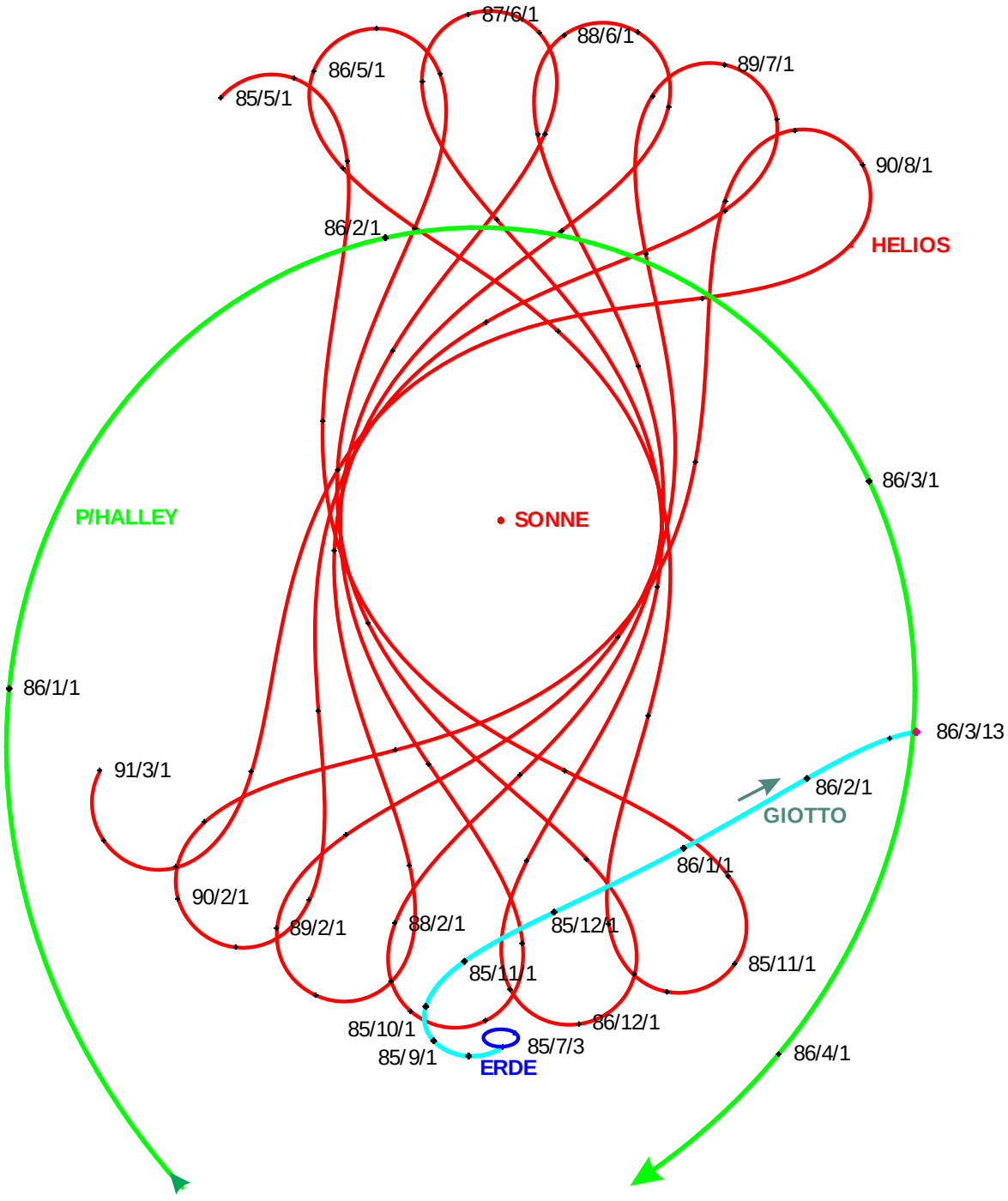


Bild 30-17: Die geozentrischen Bahnen der wahren Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist zur Ergänzung eingetragen. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

30.8 Die Beobachtung interplanetarer Bewegungen

In diesem Abschnitt werden einige spezielle Parameter zur Beobachtung interplanetarer Bewegungen untersucht.

30.8.1 Geozentrische Distanzen und Lichtzeit interplanetarer Objekte

Die geozentrischen Distanzen (in der Dimension 1 Astronomische Einheit) werden mit Kenntnis der entsprechenden heliozentrischen Ortsvektoren berechnet:

$$\rho = \left| \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{\odot\!+} \right| \quad . \tag{30.149}$$

Entsprechend folgt die Lichtzeit mit der (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit aus

$$\tau = \frac{\rho}{c} \quad . \tag{30.150}$$

BEISPIEL: Die geozentrischen Distanzen der Planeten sind für die Jahre 2017-2018 in Bild 30-18 berechnet. Die entsprechenden Lichtzeiten, die zur Reduktion der Beobachtungen benötigt werden, sind in Bild 30-19 für die Planeten Jupiter bis Pluto mit der Dimension in Stunden berechnet. Die Lichtzeiten der erdnahen Planeten Merkur, Venus, sind mit der Dimension Minute in Bild 30-20 aufgetragen.

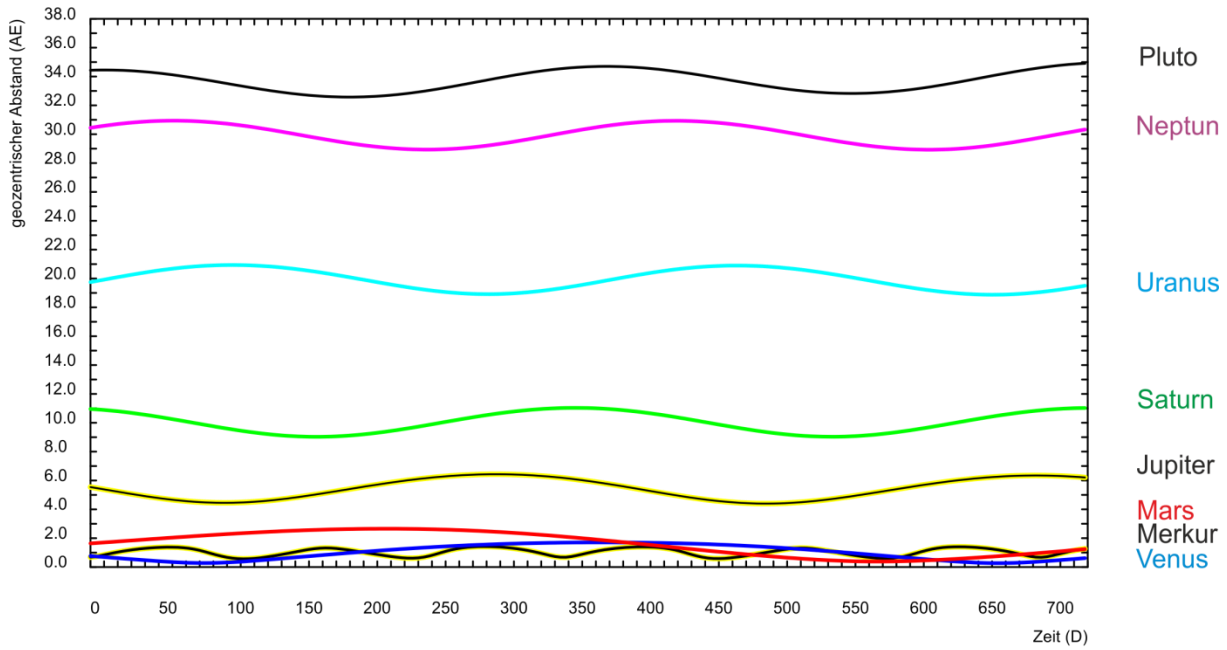


Bild 30-18: Geozentrische Distanzen der Planeten sowie des Zwergplaneten Pluto von der Erde in den Jahren 2017-2018

Die Zahlenwerte zur Beschreibung der großen Schwankungen in geozentrischer Entfernung und Lichtzeit sind:

Mars: $\rho_{\min} = 0.3847147$ AE, $\tau_{\min} = 3.199575$ min, $\rho_{\max} = 2.658167$ AE, $\tau_{\max} = 22.10730$ min

Venus: $\rho_{\min} = 0.2721882$ AE, $\tau_{\min} = 2.263720$ min, $\rho_{\max} = 1.711033$ AE, $\tau_{\max} = 14.23022$ min

Merkur: $\rho_{\min} = 0.5683169$ AE , $\tau_{\min} = 4.726548$ min , $\rho_{\max} = 1.426142$ AE , $\tau_{\max} = 11.86086$ min

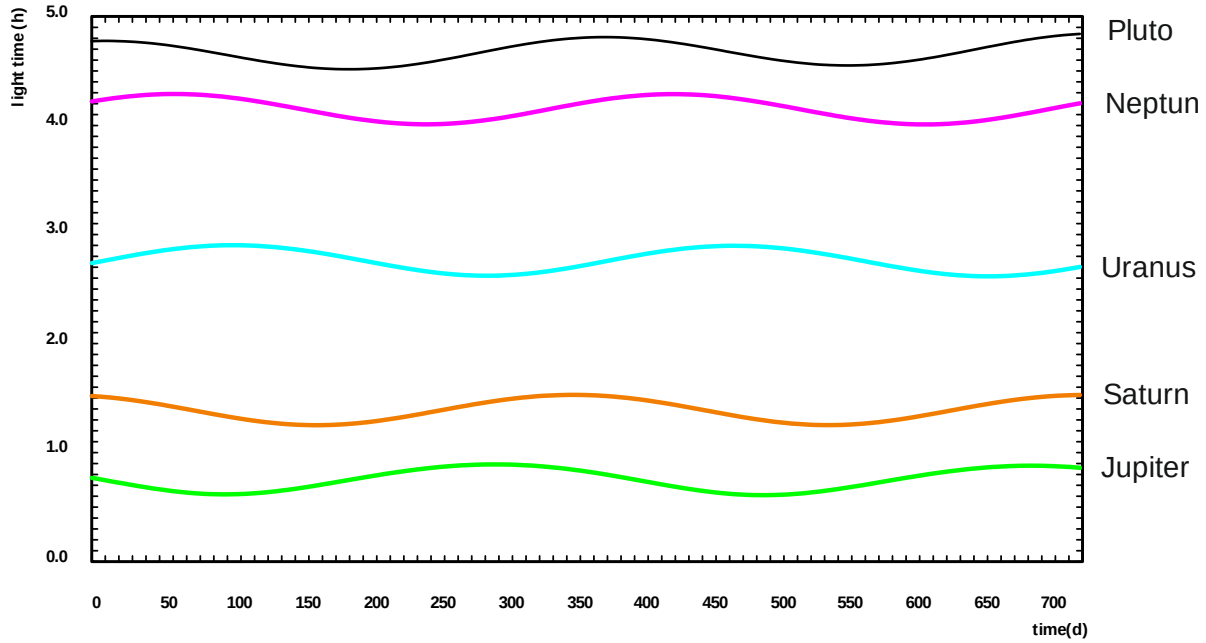


Bild 30-19: Lichtzeit (Stunden) zwischen der Erde und den äußeren Planeten inclusive den Zwergplaneten Pluto in den Jahren 2017-2018

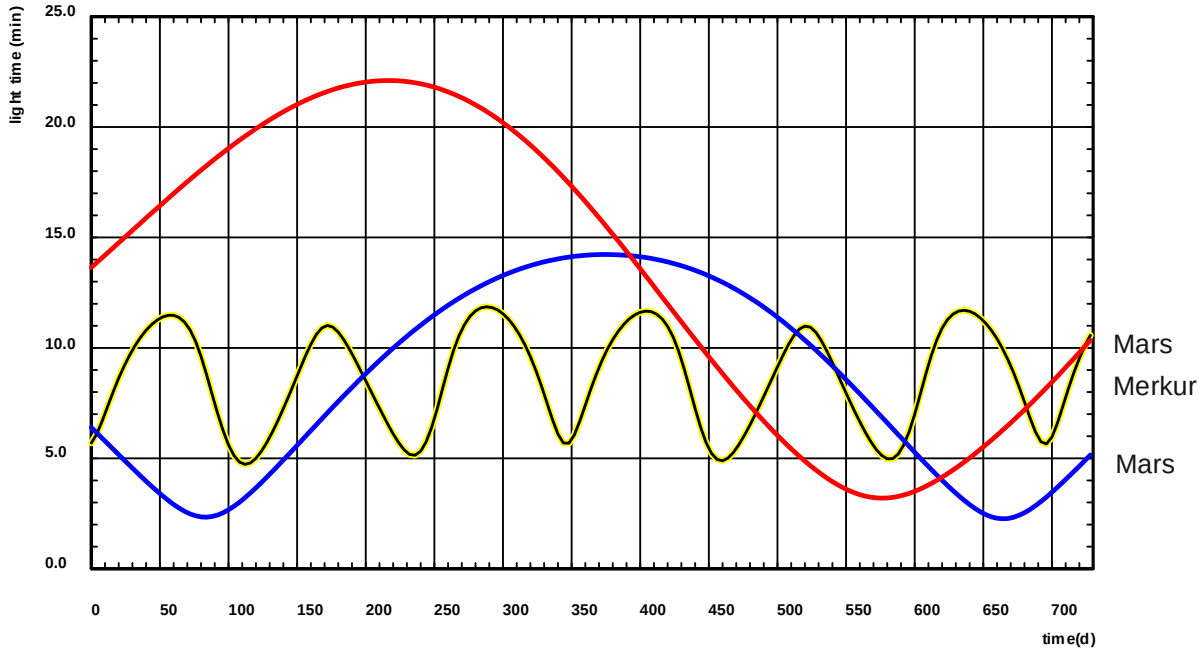


Bild 30-20: Lichtzeit (Minuten) zwischen der Erde und den inneren Planeten sowie Mars in den Jahren 2017-2018 ◀

30.8.2 Die Beobachtung interplanetarer Missionen von einer irdischen Station aus

Infolge der Erdrotation sind zur lückenlosen Beobachtung interplanetarer Objekte grundsätzlich drei irdische Bodenstationen erforderlich.

BEISPIEL: Bild 30-21 zeigt die lückenlose Beobachtung des Mars über einen Tag (am 28. Juni 2017, U.T.) von den drei irdischen Bodenstationen Perth (Australien, grün), Weilheim (Bayern, rot), Goldstone (Kalifornien, blau). ◄

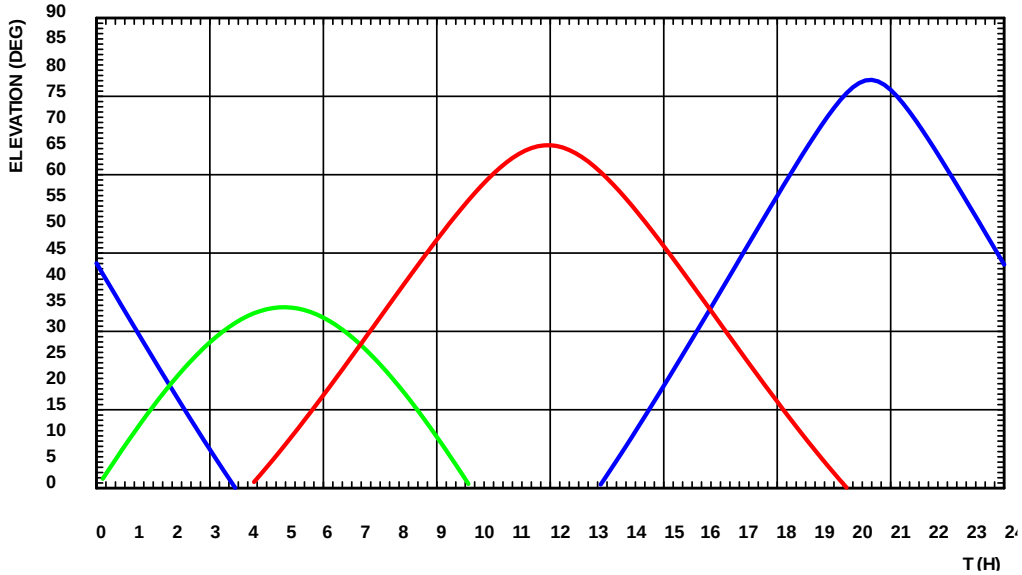


Bild 30-21: Beobachtung des Mars über einen Tag von den drei Bodenstationen Perth (grün), Weilheim (rot), Goldstone (blau)

30.8.3 Der Phasenwinkel interplanetarer Objekte

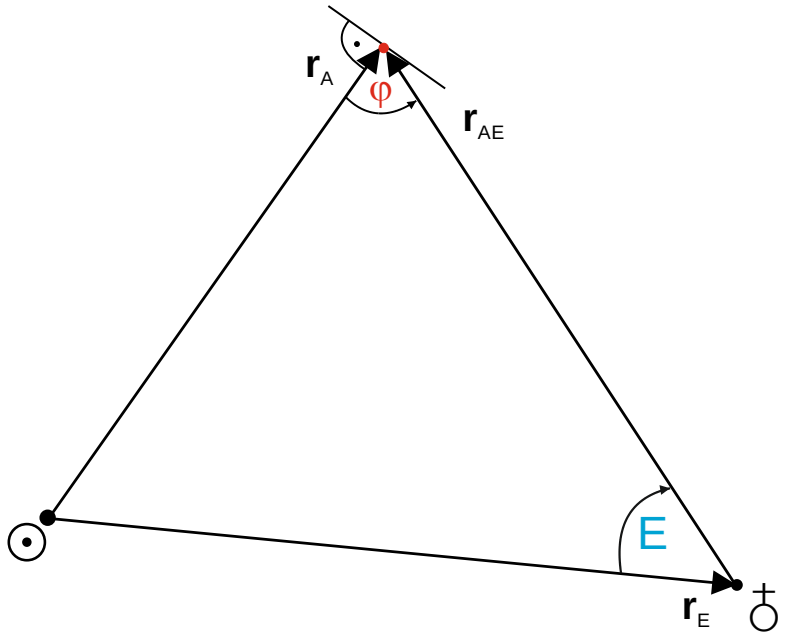


Bild 30-22: Zur Definition des Phasenwinkels φ und der Elongation E eines Planetenortes von der Sonne bei Bezug auf die Erde

Bei der Beobachtung eines interplanetaren Objektes wird als Phasenwinkel φ der Winkel zwischen den planetozentrischen Richtungen zur Sonne und zum Beobachtungsort bezeichnet (siehe Bild 30-22). Damit kann eine Aussage etwa über die Beleuchtung des Objektes durch die Sonne und die Beobachtbarkeit der Wechselwirkungen der Sonnenstrahlung mit diesem Objekt wesentlich unterstützt werden.

BEISPIEL 1: Bild 30-23 zeigt den Verlauf des Phasenwinkels φ der großen Planeten sowie des Zwergplaneten Pluto über die zwei Jahre 2017 und 2018. Innere und äußere Planeten sind klar unterschieden.

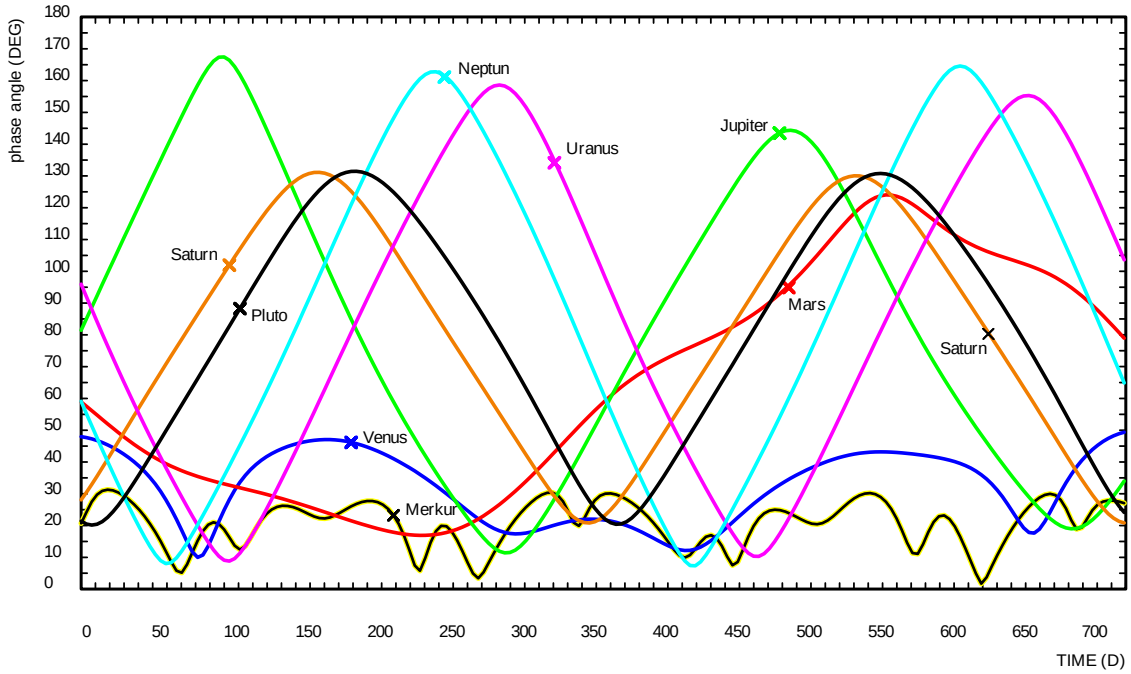


Bild 30-23: Verlauf des Phasenwinkels der großen Planeten in den Jahren 2017, 2018 bei Bezug auf die Beobachtung von der Erde aus

BEISPIEL 2: Beobachtung des Durchflugs einer Raumsonde durch den Schweif eines Kometen bei Beobachtung mit Antennen auf der Erde. Das Beispiel enthält die Begegnung[1] („encounter“) der Kometensonde GIOTTO mit dem Kometen P/*Grigg-Skjellerup* am 10. Juli 1992.

Die Kometensonde GIOTTO hatte zur Epoche t_0: 1992-07-10/15:18:43.6 die heliozentrischen äquatorialen kartesischen Koordinaten $\left(\mathbf{r}_{G\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{G\odot}\right)$, bezogen auf das Fundamentalsystem zur mittleren Epoche 1949-12-31/22:09:07.2 (*Bessel*sche Epoche B1975.0)

[1] Alle Zustandsvektoren von ESOC: TREVOR MORLEY (6. Jan. 2003); MORLEY, T. [2003] *Acta Astronautica* 66 (2010) 309-330; SCHWEHM, G., T. MORLEY, H. BOENHARDT [1991]: ‘Giotto to Visit Comet P/Grigg-Skjellerup in 1992‘, www.eso.org/sci/publications/messenger/no.65-Sep.91/messenger-no65-37-39.pdf; http://sci.esa.int/giotto/31880-grigg-skjellerup/

$$x_{G\odot 1} = -142124192.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 1} = 10.784293 \text{ km/s}$$
$$x_{G\odot 2} = -37003540.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 2} = -26.534798 \text{ km/s}$$
$$x_{G\odot 3} = -31707948.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 3} = -10.865080 \text{ km/s}$$

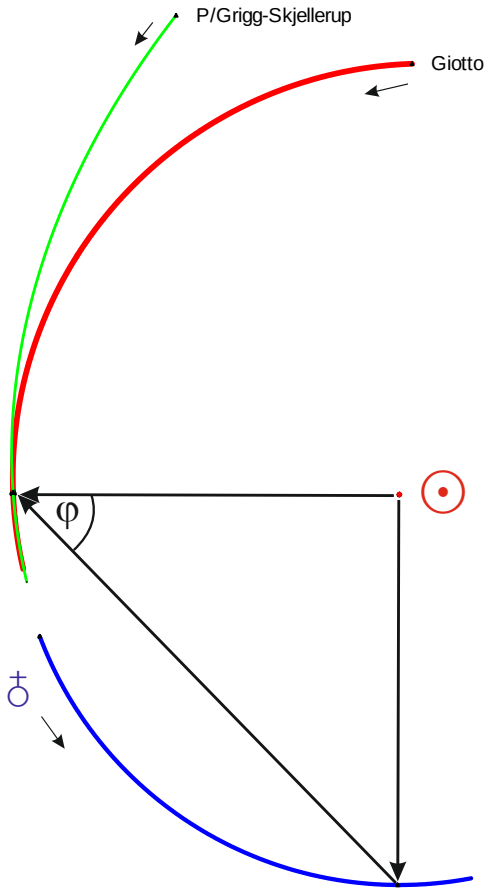


Bild 30-24: Die Bewegung des Kometen Grigg-Skjellerup, der Kometensonde GIOTTO und der Erde vom 1. Mai 1992 bis einige Tage nach dem Encounter der Sonde mit dem Kometen, gesehen vom Nordpol der Ekliptik. Für den Moment des Encounters am 10. Juli 1992 ist der Phasenwinkel eingezeichnet

Der Komet P/*Grigg-Skjellerup* hatte zur selben Epoche 1992,07,10/15:18:43.6 den ebenfalls auf die dieselbe *Bessel*sche Epoche (B1950.0) bezogenen heliozentrischen äquatorialen Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{C\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{C\odot}\right)$

$$x_{C\odot 1} = -142124182.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 1} = 13.647338 \text{ km/s}$$
$$x_{C\odot 2} = -37003531.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 2} = -35.692948 \text{ km/s}$$
$$x_{C\odot 3} = -31707942.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 3} = -0.682822 \text{ km/s}$$

Der heliozentrische äquatoriale Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{\earth\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{\earth\odot}\right)$ der Erde zur selben Epoche t_0 und bezogen auf dieselbe *Bessel*sche Koordinatenepoche lautet

$$x_{\earth\odot 1} = 47380110.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{\earth\odot 1} = 27.832484 \text{ km/s}$$
$$x_{\earth\odot 2} = -132226708.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{\earth\odot 2} = 8.367410 \text{ km/s}$$
$$x_{\earth\odot 3} = -57343476.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{\earth\odot 3} = 3.626565 \text{ km/s}$$

Um hochgenaue Berechnungen zu ermöglichen wurde auch der baryzentrische äquatoriale Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{\odot B}, \dot{\mathbf{r}}_{\odot B}\right)$ der Sonne bei Bezug auf dieselbe Epoche t_0 und dieselbe Besselsche Fundamentalepoche zur Verfügung gestellt:

$$x_{\odot B1} = 366296.0\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B1} = 0.000066\,\text{km/s}$$
$$x_{\odot B2} = 470474.0\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B2} = 0.008841\,\text{km/s}$$
$$x_{\odot B3} = 190814.0\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B3} = 0.003848\,\text{km/s}$$

Mit diesen Bahnparametern werden die Bahnen des Kometen, der Sonde und der Erde in Bild 30-24 als *Kepler*bahnen gerechnet. Der Moment des Encounters der Sonde mit dem Kometen ist eingetragen. Der Sichtstrahl Erde-Sonde durchdringt den Schweif des Kometen. Der Phasenwinkel, der zur Beurteilung dieses Vorganges erforderlich ist, wird berechnet aus

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{r}_{G\odot} \cdot \left(\mathbf{r}_{G\odot} - \mathbf{r}_{♁\odot}\right)}{\left|\mathbf{r}_{G\odot}\right| \cdot \left|\mathbf{r}_{G\odot} - \mathbf{r}_{♁\odot}\right|} \quad . \tag{30.151}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich: $\varphi = 45°.24955790$. ◄

30.8.4 Die Elongation interplanetarer Objekte

Als Elongation bei der Beobachtung interplanetarer Objekte wird der geozentrische Winkel zwischen der Richtung zur Sonne und dem Planeten bezeichnet (siehe Bild 30-22 auf Seite 723). Dieser Winkel ist ein Maß für die Wechselwirkung zwischen Planet und Sonne. Zum Beispiel ist dieser Winkel ein wichtiger Parameter um die Helligkeit eines Planeten gesehen von der Erde aus abzuschätzen.

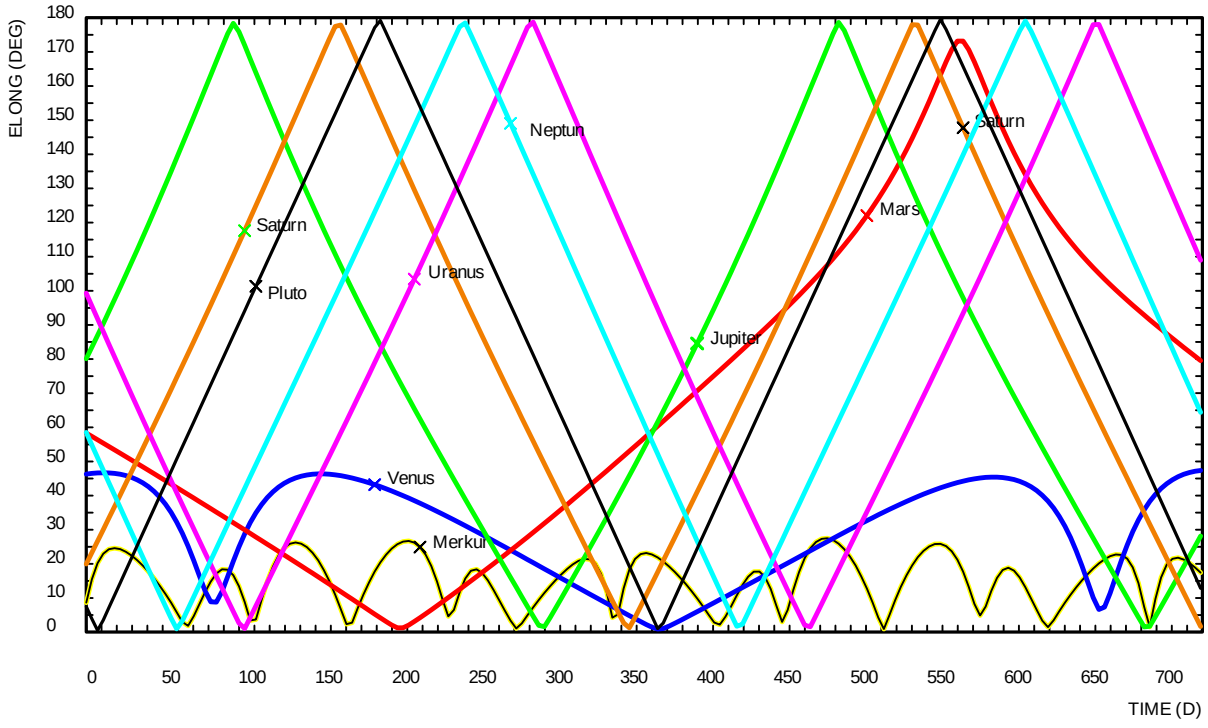


Bild 30-25: Die geozentrischen Elongationen der großen Planeten zur Sonne in den Jahren 2017 und 2018

BEISPIEL 1: Bild 30-25 zeigt die Elongationen zwischen den geozentrischen Richtungen zur Sonne und den Großen Planeten sowie zum Zwergplaneten Pluto über zwei Jahre. Die dazu benötigten Bahnelemente sind in Abschnitt 30.2.2 ab Seite 674 zusammengestellt.

BEISPIEL 2: Zur Darstellung der Elongationen einiger Kleiner Planeten (in Bild 30-26 auf Seite 728) werden folgende (ekliptikale) Bahnelemente verwendet[1]:

	1 Ceres	2 Pallas	3 Juno	4 Vesta
Große Bahnhalbachse a [km]	2.7656 AE ≙ 413727873.321	2.7709 AE ≙ 414643848.2896	2.6678 AE ≙ 399236304.2553	2.3610 AE ≙ 353200574.5265
Exzentrizität e	0.0784	0.2344	0.2583	0.0906
Inklination i bzgl. Ekliptik	10°.607	34°.797	12°.998	7°.139
eklipt. Länge Ω des aufsteigenden Knotens	80°.704	173°.328	170°.576	104°.019
Argument des Perihels ω	72°.045	309.784	246°.865	150°.335
Mittl. Anomalie zur Epoche M_0	200°.828	188.274	294°.390	294°.514
Epoche t_0	1988-08-27/0h	1988-08-27/0h	1987-07-24/0h	1988-08-27/0h

Tabelle 30-4: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente der ersten 4 Kleinen Planeten (einschließlich des Zwergplaneten 1 Ceres)

	243 Ida	951 Gaspra	2062 Aten	2100 Ra-Shalom
Große Bahnhalbachse a [km]	2.8608 AE ≙ 428115496.192	2.2102 AE ≙ 330635246.555	0.9664506 AE ≙ 144588355.147	0.832082 AE ≙ 124483641.355
Exzentrizität e	0.0420817	0.1733601	0.18251596	0.436471389
Inklination i bzgl. Ekliptik	1°.13586	4°.09901	18°.9313982	15°.7543432
eklipt. Länge Ω des aufsteigenden Knotens	323°.90828	252°.67577	108°.7238893	170°.98274711
Argument des Perihels ω	109°.60629	129°.22968	147°.838893	355°.9270889
Mittl. Anomalie zur Epoche M_0	41°.68377	173°.04378	274°.530270	68°.37959438
Epoche t_0	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h

Tabelle 30-5: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente 4 unterschiedlicher Kleiner Planeten

[1] Daten aus T. GEHRELS [1979]

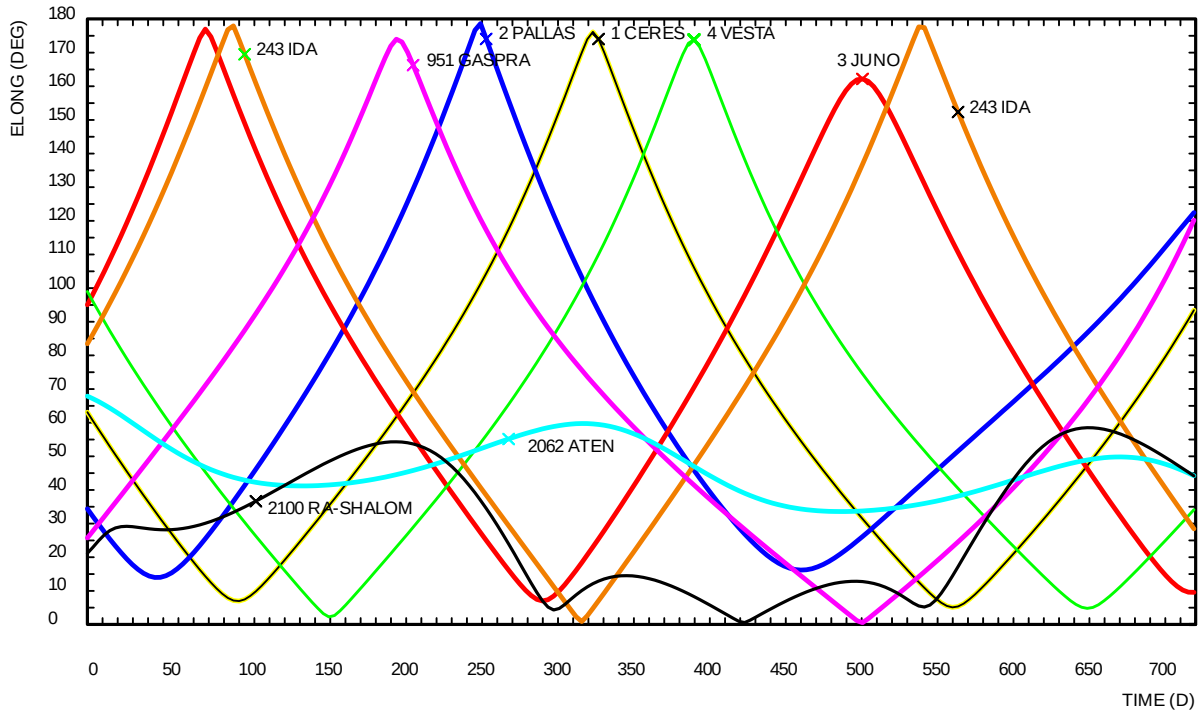


Bild 30-26: Die geozentrischen Elongationen einige Kleiner Planeten zur Sonne in den Jahren 1998 und 1999

30.9 Anmerkungen zur Bewegung von Raumsonden

Eine erschöpfende Beschreibung der Bewegung interplanetarer Objekte wird im vorliegenden Bericht nicht angestrebt. Einige wesentliche Aspekte (auf die im folgenden Abschnitt hingewiesen wird) finden sich in systematischem Zusammenhang in den ersten 4 Bänden der Satellitenbewegung.

30.9.1 Die Bewegung von Raumsonden

Die Beschleunigungsgleichungen interplanetarer Raumsonden unterscheiden sich in qualitativer Hinsicht von denen der Erdsatelliten. Primär handelt es sich dann um ein Mehrkörperproblem (siehe die Bewegungsgleichungen (10.105) bzw. (10.106) sowie (17.48) in Band III). Die hierzu benötigten Ephemeriden der Planeten können zur Zeit den JPL-Ephemeriden als bekannt entnommen werden. Je nach Form und Größe einer Sonde wirken sich der Strahlungsdruck der Sonne, eventuell der Sonnenwind, sowie spezielle Effekte aus (siehe in Kapitel 17, Band III), wobei die Einflüsse auf Satelliten und Raumsonden quantitativ sehr unterschiedlich ausfallen können[1].

[1] Siehe allgemeine Darstellungen und astrodynamische Basiswerke, etwa in BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996], [1998]; auch BATTIN, R. H. [1987] (insbesondere Kapitel 14 “Space Navigation”); MURRAY, CARL. D. AND DERMOTT, STANLEY, F. [1999]; aber auch spezielle Werke, wie “Solar Sailing” von MCINNES, COLIN R. [1999]; jeweils unter Zitierung zahlreicher weiterführender Literatur

30.9.2 Natürliche und gesteuerte Beeinflussung der Bewegungen von Raumsonden

Neben der primären Beeinflussung einer interplanetaren Bahn durch die großen Körper des Sonnensystems können weitere Effekte die Bahn eines interplanetaren Objektes beeinflussen, wozu insbesondere Bahnmanöver von Raumflugkörpern zählen (ausführlich untersucht in Kapitel 12, Band III).

Es seien hier drei spezielle Effekte erwähnt:

1. Die Ablenkung der Bahn bei einem nahen Vorbeiflug an einem der großen Planeten. Dies wird bei Raumsonden zur gezielten Änderung der Bahn angewandt (Gravitationsmanöver, „SwingBy“, siehe in Kapitel 12, insbesondere Abschnitt 12.9, Band III).

2. In diesem Zusammenhang kann etwa das *Tisserand* Kriterium auch für Raumsonden von Interesse sein. In diesem werden aus dem *Jacobi* Integral hergeleitete Bedingungen für die Halbachse *a*, die Exzentrizität *e* und die Inklination *i* vor und nach einem Flyby verglichen um auf diese Weise die Identität eines Objektes zu überprüfen (siehe in Abschnitt 2.7.18, Band I).

3. Ein ähnlicher Effekt ist der von *Y. Kozai* entdeckte „Kozai Effekt“. Danach sind die Exzentrizität und die auf die Jupiterbahnebene bezogene Inklination unter bestimmten Randbedingungen über die *Kozai-Konstante* gekoppelt. Hier kann es für große Inklinationen zu einer Resonanz kommen, die sich in einer Librationsbewegung des interplanetaren Objektes auswirkt. Die Folge kann auch ohne SwingBy an einem großen Planeten die Zunahme der Exzentrizität sein, was etwa zu einer Absenkung des Perihels und dann Absturz in die Sonne oder zu einer Gefährdung für eine Kollision mit einem anderen Körper (etwa mit der Erde) führen kann (siehe in Abschnitt 2.10.3, Band I).

30.10 Messungen von Distanz-Variationen interplanetarer Objekte

Topozentrische Entfernungsänderungen (“range-rate”) können mit Einweg- oder Zweiwegmessungen (Einweg-*Doppler*, Zweiweg-*Doppler*) gemessen werden. Zweiwegmessungen werden als stabiler bevorzugt, stehen aber nicht immer zur Verfügung. Unterschiede zwischen Einweg- und Zweiwegmessungen können physikalisch deutbar sein. Dies soll nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes sein. Im Folgenden wird eine mathematische Untersuchung dieses Problemkreises vorgestellt, wie derartige Unterschiede behandelt werden können.

30.10.1 Das Beobachter-System

Das $\mathbf{p}_i$ – Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem werde als „inertiales“ Fundamentalsystem betrachtet[1]. Sein Eigenbewegungsvektor wird somit als Nullvektor definiert:

$$\mathbf{D}_p \equiv 0 \quad . \tag{30.152}$$

[1] Etwa bei Bezug auf die mittlere Fundamentalepoche J2000.0, siehe z.B. in Abschnitt 8.1.3 (Band II)

Auf dieses System werde das bewegliche $\mathbf{q}_j$ – Beobachter-System („T-System“ in Bild 30-28 auf Seite 731) bezogen. Dieses entsteht durch Drehung um die drei *Euler*-Winkel A, B, C mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.153}$$

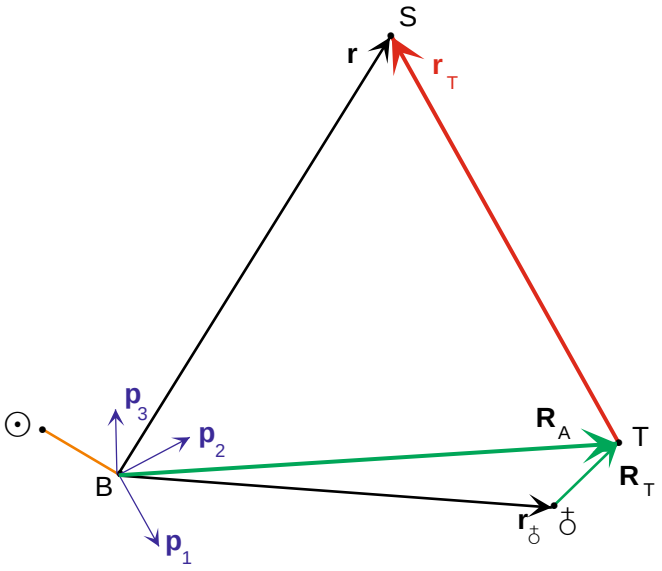


Bild 30-27: Ortsvektor der Raumsonde bezogen auf das Baryzentrum *B* des Sonnensystems, sowie auf den Ort *T* des Beobachters; ♁ bezeichnet den Mittelpunkt der Erde

Die Transformationskoeffizienten lauten[1]

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A \\
a_{12} &= \cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A \\
a_{13} &= \sin B \sin C \\
a_{21} &= -\cos B \cos C \sin A - \sin C \cos A \\
a_{22} &= \cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A \\
a_{23} &= \sin B \cos C \\
a_{31} &= \sin B \sin A \\
a_{32} &= -\sin B \cos A \\
a_{33} &= \cos B \quad .
\end{aligned} \tag{30.154}$$

Diese Koeffizienten gilt es aus den Bedingungen der Transformation herzuleiten, die folgendermaßen erhalten werden:

Die berechnete Bewegung habe den geozentrischen Zustandsvektor[2] $\left(\mathbf{r}_{GC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{♁}, \dot{\mathbf{r}}_{GC} = \dot{\mathbf{r}}_C - \dot{\mathbf{r}}_{♁}\right)$. Bekannt sei für denselben Zeitpunkt der geozentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{R}_T, \dot{\mathbf{R}}_T\right)$ des Beobachters (Antenne, Teleskop). Der topozentrische (auf den Beobachter bezogene) Zustandsvektor lautet dann

$$\mathbf{r}_{TC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{♁} - \mathbf{R}_T \, , \, \dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\mathbf{r}}_C - \dot{\mathbf{r}}_{♁} - \dot{\mathbf{R}}_T \quad . \tag{30.155}$$

[1] Herleitung in Abschnitt 6.3.2. (Band II), insbesondere Formel (6.91)

[2] Der Index „C“ steht für „computed“

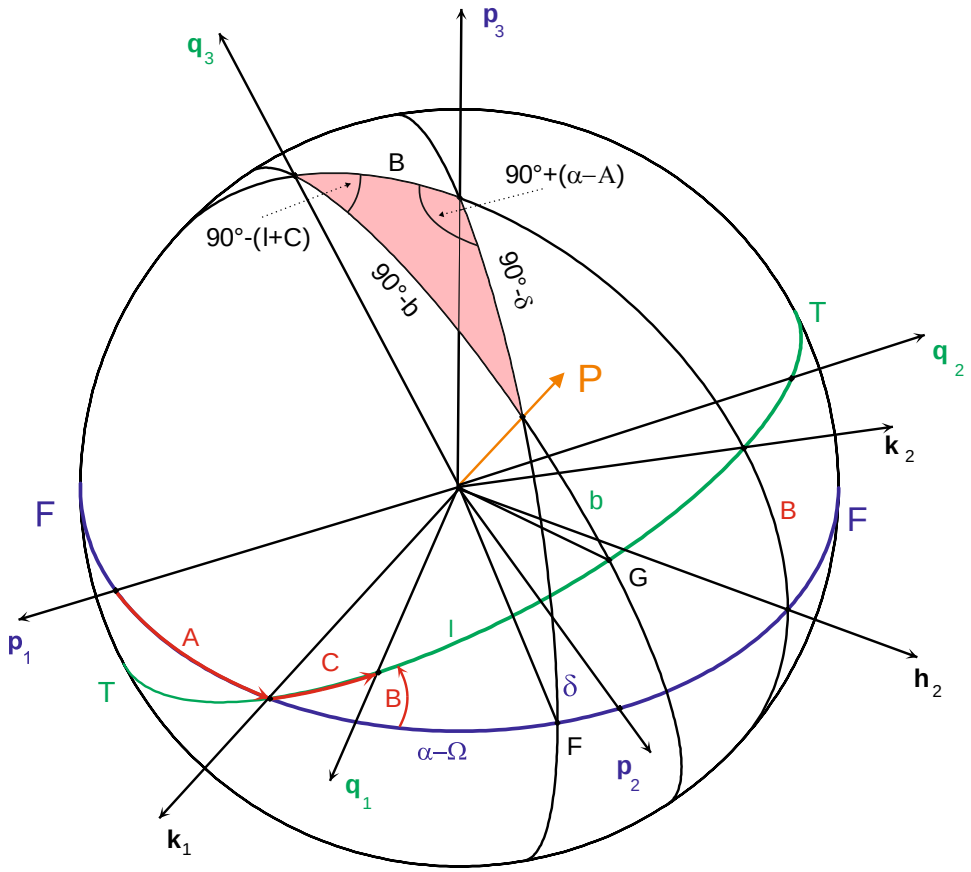


Bild 30-28: Transformation vom $\mathbf{p}_i$ – Frühlingspunkt-bezogenen Basissystem F in das $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem T um die *Euler*winkel *A* („Knotenlänge“), *B* („Inklination“), *C* („Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der T-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der F-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene T nach $\mathbf{k}_2$. Eine Sichtrichtung P (Planet, Sonde, Satellit, Stern) hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel $\alpha - A$, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ (Deklination), im $\mathbf{q}_j$ – System die Richtungswinkel *l* (Länge), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und *b* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$.

Dem Beobachter sei ein orthonormiertes auf die berechnete Bewegung zugeordnetes $\mathbf{q}_j$ – Basissystem zugeordnet, dessen $\mathbf{q}_1$ – Achse in die berechnete Richtung zu dem gewünschten Objekt gerichtet sei. Damit sind die Richtungsvektoren des so definierten Beobachter-Systems bestimmt durch

$$\mathbf{q}_1 := \frac{\mathbf{r}_{TC}}{|\mathbf{r}_{TC}|} \quad , \quad \mathbf{q}_3 := \frac{\mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC}}{|\mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC}|} \quad , \quad \mathbf{q}_2 := \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.156}$$

Der berechnete Geschwindigkeitsvektor liegt somit in der $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ – Basisebene und es ist

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \quad . \tag{30.157}$$

Es gelten die Bezeichnungen

$$\rho_C := |\mathbf{r}_{TC}| \quad , \quad V_0 := |\dot{\mathbf{r}}_{TC}| \quad , \quad V_0 \cos\beta = \dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_1 =: \dot{\rho}_C \quad , \quad V_0 \sin\beta = \dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2 \quad . \tag{30.158}$$

Der topozentrische Geschwindigkeitsvektor kann daher in der Form

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = V_0 \left(\mathbf{q}_1 \cos\beta + \mathbf{q}_2 \sin\beta \right) = \dot{\rho}_C \, \mathbf{q}_1 + \left(\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2 \right) \mathbf{q}_2 \tag{30.159}$$

dargestellt werden. Hier ist $\dot{\rho}_C$ die berechnete Entfernungsänderung („range rate“) des Objektes zum Beobachter. Der Vektor

$$\mathbf{D}_{qpc} \coloneqq D_{qpc}{}^{j}\,\mathbf{q}_j \tag{30.160}$$

sei der zum $\mathbf{p}_i$ – System relative Eigenbewegungsvektor[1] des Beobachtersystems. Wegen (30.152) kann hier gesetzt werden

$$\mathbf{D}_{qpC} = \mathbf{D}_{qC} - \mathbf{D}_p \triangleq \mathbf{D}_{qC} \quad . \tag{30.161}$$

Die Variationen der Basisvektoren des Beobachtersystems haben den Zusammenhang[2]

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.162}$$

Aus den Formeln (30.156) und (30.158) folgt für den topozentrischen Zustandsvektor

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_{TC} = \rho_C\,\mathbf{q}_1 \\ &\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\rho}_C\,\mathbf{q}_1 + \rho_C\,\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\rho}_C\,\mathbf{q}_1 + \rho_C\,\mathbf{D}_{qpc} \times \mathbf{q}_1 = \dot{\mathbf{r}}_{TqC} + \mathbf{D}_{qpc} \times \mathbf{r}_{TC} \quad . \end{aligned} \tag{30.163}$$

Der Geschwindigkeitsanteil in der topozentrischen radialen Richtung („pseudoradialer Geschwindigkeitsanteil“) ist

$$\dot{\mathbf{r}}_{TqC} \coloneqq \dot{\rho}_C\,\mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.164}$$

Der topozentrische Ortsvektor hat in den beiden Systemen die kartesische Darstellung

$$\mathbf{r}_{TC} = y_{TC}^{j}\,\mathbf{q}_j = x_{TC}^{i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{30.165}$$

Nach (30.156) lauten die Koeffizienten im $\mathbf{q}_j$ – System

$$y_{TC1} = \rho_C \;,\; y_{TC2} = y_{TC3} = 0 \quad . \tag{30.166}$$

Die Transformation in das $\mathbf{p}_i$ – System

$$x_{TC}^{i} = y_{TC}^{j}\,a_j{}^{i} \tag{30.167}$$

ergibt somit die ersten drei der gesuchten Transformationskoeffizienten (29.180)

$$a_{1i} = \frac{x_{TCi}}{\rho_C} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.168}$$

Für den topozentrischen Geschwindigkeitsvektor bestehen die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{x}_{TC}^{i}\,\mathbf{p}_i + x_{TC}^{i}\,\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{y}_{TC}^{j}\,\mathbf{q}_j + y_{TC}^{i}\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{30.169}$$

wobei wegen der Annahme (30.152)

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad \langle i = 1,2,3,\ \mathbf{D}_p \equiv 0 \tag{30.170}$$

gesetzt werden kann. Mit (30.166) lauten die Geschwindigkeitskomponenten im $\mathbf{q}_j$ – System

$$\dot{y}_{TC1} = \dot{\rho}_C \;,\; \dot{y}_{TC2} = \dot{y}_{TC3} = 0 \quad . \tag{30.171}$$

---

[1] vgl. etwa die Herleitungen in Abschnitt 6.1.5 (Band II)

[2] vgl. etwa die Formeln (6.123) in Abschnitt 6.3.4 (Band II)

Der Eigenbewegungsvektor des Beobachtersystems habe die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC}{}^{j}\ \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.172}$$

Damit kann der topozentrische Geschwindigkeitsvektor in der Form

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\mathbf{r}}_{TC} + \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} = \dot{\rho}_C\, \mathbf{q}_1 + \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} \tag{30.173}$$

geschrieben werden. Skalare Multiplikation mit dem Normalenvektor ergibt

$$\mathbf{q}_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TC} = \rho_C\, \mathbf{D}_{qpC} \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_3) = -\rho_C\, \mathbf{D}_{qpC} \cdot \mathbf{q}_2 = -\rho_C\, D_{qpC2} \quad . \tag{30.174}$$

Wegen (30.157) folgt notwendig

$$D_{qpC2} = 0 \quad . \tag{30.175}$$

Es bleibt daher

$$\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC1}\, \mathbf{q}_1 + D_{qpC3}\, \mathbf{q}_3 \tag{30.176}$$

und wegen $\mathbf{r}_{TC} = \rho_C\, \mathbf{q}_1$

$$\mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} = D_{qpC3}\, \mathbf{q}_2 \quad . \tag{30.177}$$

Im verbleibenden Ausdruck für den topozentrischen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\rho}_C\, \mathbf{q}_1 + \rho_C\, D_{qpC3}\, \mathbf{q}_2 \tag{30.178}$$

können radialer und transversaler Anteil klar getrennt werden. Danach kann die dritte Komponente des Eigenbewegungsvektors berechnet werden:

$$D_{qpC3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2}{\rho_C} \quad . \tag{30.179}$$

Werde für den Betrag des Normalenvektors der Flächenparameter

$$G := \left| \mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC} \right| \tag{30.180}$$

eingeführt, ergibt sich aus (30.178) auch

$$D_{qpC3} = \frac{G}{\rho_C^2} \quad . \tag{30.181}$$

Werde in (30.178) die Fundamentalbasis $\mathbf{p}_i$ eingesetzt, wird mit den Transformationsformeln (30.165)

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{x}^i_{TC}\, \mathbf{p}_i = \dot{\rho}_C\, a^i_1\, \mathbf{p}_i + \frac{G}{\rho_C}\, a^i_2\, \mathbf{p}_i \tag{30.182}$$

Daraus kann die zweite Gruppe der Transformationskoeffizienten (29.180) berechnet werden:

$$a_{2i} = \rho_C\, \frac{\dot{x}_i - \dot{\rho}_C\, a_{1i}}{G} \quad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.183}$$

Zwischen den Basisvektoren bestehen die Transformationen

$$\mathbf{p}_i = a^j{}_i\, \mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{q}_j = a_j{}^i\, \mathbf{p}_i \quad , \tag{30.184}$$

somit für den Normalenvektor

$$\mathbf{q}_3 = a_3{}^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{30.185}$$

In üblicher Weise ist

$$\begin{aligned} G\,\mathbf{q}_3 &= \mathbf{r}_{TC}\times\dot{\mathbf{r}}_{TC} = x_C^i\,\mathbf{p}_i\times\dot{x}_C^i\,\mathbf{p}_i = \\ &= \left(x_{2C}\,\dot{x}_{3C} - x_{3C}\,\dot{x}_{2C}\right)\mathbf{p}_1 + \left(x_{3C}\,\dot{x}_{1C} - x_{1C}\,\dot{x}_{3C}\right)\mathbf{p}_3 + \left(x_{1C}\,\dot{x}_{2C} - x_{2C}\,\dot{x}_{1C}\right)\mathbf{p}_3 \quad . \end{aligned} \tag{30.186}$$

Die dritte Gruppe der Transformationskoeffizienten kann daher berechnet werden aus

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{x_{2C}\,\dot{x}_{3C} - x_{3C}\,\dot{x}_{2C}}{G} \\ a_{32} &= \frac{x_{3C}\,\dot{x}_{1C} - x_{1C}\,\dot{x}_{3C}}{G} \\ a_{33} &= \frac{x_{1C}\,\dot{x}_{2C} - x_{2C}\,\dot{x}_{1C}}{G} \quad . \end{aligned} \tag{30.187}$$

Jetzt können die drei Eulerwinkel berechnet werden: Der Inklinationswinkel B folgt eindeutig aus

$$a_{33} = \cos B \quad , \quad \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} \quad . \tag{30.188}$$

Der Winkel A längs des Äquators zum aufsteigenden Knoten folgt aus

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sin B \sin A \\ a_{32} &= -\sin B \cos A \quad . \end{aligned} \tag{30.189}$$

Der Winkel C vom aufsteigenden Knoten längs der Basisebene des Beobachtersystems zur Hauptstrahlrichtung $\mathbf{q}_1$ des Beobachters folgt aus

$$\begin{aligned} a_{13} &= \sin B \sin C \\ a_{23} &= \sin B \cos C \quad . \end{aligned} \tag{30.190}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor in das Beobachtersystem zu transformieren, werden die Variationen der Transformationskoeffizienten a_{ij} benötigt. Aus der Zuweisung (30.168) folgt

$$\dot{a}_{1i} = \frac{\dot{x}_{TCi} - a_{1i}\,\dot{\rho}_C}{\rho_C} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.191}$$

Weiter gelten die Variationen (nach (6.99) in Abschnitt 6.2.2 (Band II))

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \dot{B}\,a_{31}\sin C + \dot{C}\,a_{21} - \dot{A}\,a_{12} \\ \dot{a}_{12} &= \dot{B}\,a_{32}\sin C + \dot{C}\,a_{22} + \dot{A}\,a_{11} \\ \dot{a}_{13} &= \dot{B}\,a_{33}\sin C + \dot{C}\,a_{23} \quad . \end{aligned} \tag{30.192}$$

Hieraus können die Variationen der drei Drehwinkel allerdings nicht berechnet werden, da diese drei Gleichungen linear abhängig sind. Aus der Transformation (30.184) folgt nämlich

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i\,\mathbf{q}_j + a^j{}_i\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad , \tag{30.193}$$

somit

$$\mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_i = a^j{}_i\,\mathbf{q}_j\cdot\dot{a}^k{}_i\,\mathbf{q}_k + a^j{}_i\,\mathbf{q}_j\cdot a^k{}_i\,\dot{\mathbf{q}}_k = a^j{}_i\,\dot{a}^k{}_i\,\delta_{jk} = a^j{}_i\,\dot{a}_{ji} = 0 \quad . \tag{30.194}$$

Mit bekannten $\dot{a}_{1i}$ $(i = 1,2,3)$ können aus diesem System etwa zwei unabhängige Gleichungen erhalten werden:

$$\dot{a}_{13} = \dot{B}\cos B\sin C + \dot{C}\sin B\cos C \quad ,$$

woraus die Beziehung

$$\dot{C}\sin B = \frac{\dot{a}_{13} - \dot{B}\cos B\sin C}{\cos C} \tag{30.195}$$

folgt. Es sind noch die Beziehungen für die Variationen $\dot{A}, \dot{B}$ zu suchen. Aus (30.168) folgen

$$\begin{aligned} y_{Tc}^{\ j} &= a^{j}_{\ i}\ x_{Tc}^{\ i} \\ \dot{y}_{Tc}^{\ j} &= \dot{a}^{j}_{\ i}\ x_{Tc}^{\ i} + a^{j}_{\ i}\ \dot{x}_{Tc}^{\ i} \end{aligned} \tag{30.196}$$

mit

$$\begin{aligned} y_{Tc1} &= \rho_c\ , \quad y_{Tc2} = y_{Tc3} = 0 \\ \dot{y}_{Tc1} &= \dot{\rho}_c\ , \quad \dot{y}_{Tc2} = \dot{y}_{Tc3} = 0 \end{aligned} \tag{30.197}$$

und daher etwa die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{y}_{Tc3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{3i}\, x_{Tc}^{\ i} = -a_{3i}\, \dot{x}_{Tc}^{\ i} =: A_3 \\ \dot{y}_{Tc2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{2i}\, x_{Tc}^{\ i} = -a_{2i}\, \dot{x}_{Tc}^{\ i} =: B_4 \quad . \end{aligned} \tag{30.198}$$

mit bekannten rechten Seiten A_3 und B_4. Dies führt auf

$$x_{Tc1}\left(\dot{B}\cos B\sin A + \dot{A}\sin B\cos A\right) + x_{Tc2}\left(-\dot{B}\cos B\cos A + \dot{A}\sin B\sin A\right) - x_{Tc3}\,\dot{B}\sin B = A_3$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_1 &:= x_{Tc1}\cos B\sin A - x_{Tc2}\cos B\cos A - x_{Tc3}\sin B \\ A_2 &:= x_{Tc1}\cos A + x_{Tc2}\sin A \end{aligned} \tag{30.199}$$

und

$$\begin{aligned} x_{Tc1}\left(\dot{B}\,a_{31}\cos C - \dot{C}\,a_{11} - \dot{A}a_{22}\right) + x_{Tc2}\left(\dot{B}\,a_{32}\cos C - \dot{C}\,a_{12} + \dot{A}a_{21}\right) + \\ + \ x_{Tc3}\left(\dot{B}\cos B\cos C - \dot{C}\,a_{13}\right) = B_4 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_1 &:= x_{Tc1}\,a_{31}\cos C + x_{Tc2}\,a_{32}\cos C + x_{Tc3}\cos B\cos C \\ B_2 &:= x_{Tc1}\,a_{11} + x_{Tc2}\,a_{12} + x_{Tc3}\,a_{13} \\ B_3 &:= x_{Tc1}\,a_{22} + x_{Tc2}\,a_{21} \quad . \end{aligned} \tag{30.200}$$

Damit kann die Variation des Inklinationswinkels B berechnet werden:

$$\dot{B} = \frac{A_3 B_3\cos C - A_2 B_4\sin B\cos C - B_2 A_2\,\dot{a}_{13}}{A_1 B_3\cos C - A_2 B_1\sin B\cos C - A_2 B_2\cos B\sin C} \quad , \tag{30.201}$$

sowie die Variation des Knotenwinkels

$$\dot{A}\sin B = \frac{1}{A_2}\left(A_3 - \dot{B}\,A_1\right) \quad , \tag{30.202}$$

sofern die jeweiligen Nenner nicht verschwinden.

Mit den Variationen $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ können die Komponenten des zum Frühlingspunktsystem relativen Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC}{}^{j}\,\mathbf{q}_j$ nach dem Formelsystem (6.136) (aus Band II) berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_{qpC1} &= \dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C \\ D_{qpC2} &= -\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C \\ D_{qpC3} &= \dot{A}\cos B + \dot{C} \quad . \end{aligned} \tag{30.203}$$

Hier sind die Größen $D_{qpC2} = D_{qC2} = 0$ aus der Beziehung (30.175) und $D_{qpC3} = D_{qC3}$ aus (30.181) bekannt. Sie müssen durch die beiden letzten der Gleichungen (30.203) bestätigt werden können. Im vorliegenden Fall ergeben sich auch die manchmal nützlichen Beziehungen

$$\begin{aligned} D_{qpC1}\cos C &= \dot{B} \\ D_{qpC1}\sin C &= \dot{A}\sin B \qquad , \quad \left(D_{qC2} = D_{qpC2} = 0\right) \end{aligned} \tag{30.204}$$

sowie

$$\dot{C}\sin B = -D_{qpC1}\cos B\sin C + D_{qpC3}\sin B \quad , \tag{30.205}$$

außerdem die Beziehung

$$\dot{a}_{13} = D_{qpC3}\sin B\cos C \quad , \tag{30.206}$$

die zur Kontrolle benutzt werden kann.

Mit den Formeln (30.204) ist schließlich auch die erste Komponente D_{qpC1} des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{qpC}$ bekannt und damit die *Frenet*schen Formeln des Beobachtersystems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \qquad\qquad D_{qpC3}\,\mathbf{q}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{qpC3}\,\mathbf{q}_2 \qquad + D_{qpC1}\,\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= \qquad\qquad -D_{qpC1}\,\mathbf{q}_2 \quad . \end{aligned} \tag{30.207}$$

30.10.2 Beobachtung einer „gestörten“ Bewegung

Es werde jetzt angenommen, dass die wahre Bewegung des beobachteten Objektes durch eine nicht modellierte bzw. nicht modellierbare Beschleunigung beeinflusst werde. Wie wirkt sich diese Variation auf die Beobachtung der Entfernungsvariation (range rate) aus, wenn die Antenne nach wie vor auf die („ungestörte“ also berechnete) Nominalbewegung pointiert ist?

Es wird die als bekannt angenommene berechenbare Bewegung eines Objektes (interplanetare Raumsonde, Planet, Satellit, Orbiter, interstellares Objekt) mit einer unbekannten realen Bewegung verglichen. Die Berechnung der Abweichung (wir wollen sie als „Störung“ bezeichnen) der wahren Bewegung von der berechneten Bewegung wird unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C \quad , \tag{30.208}$$

wobei $\mathbf{r}$ die gestörte, $\mathbf{r}_C$ die ungestörte (= berechnete) Position der Sonde bezeichne. Vom Antennenort aus gesehen lautet entsprechend die gestörte Position bei Bezug auf die ungestörte topozentrische Position $\mathbf{r}_{Tc}$

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r} \quad . \tag{30.209}$$

Auch die Geschwindigkeit der Sonde wird von der Störung betroffen. Sie wird um den heliozentrischen Störvektor $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ verändert

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_c + \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.210}$$

Dieser ist, wie Gleichung (30.209) zeigt (vgl. auch Bild 30-29), mit dem topozentrischen Störvektor identisch und es gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} + \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.211}$$

Die Störung verändere den heliozentrischen Ort der Sonde um den Differenzvektor $\Delta\mathbf{r}$.

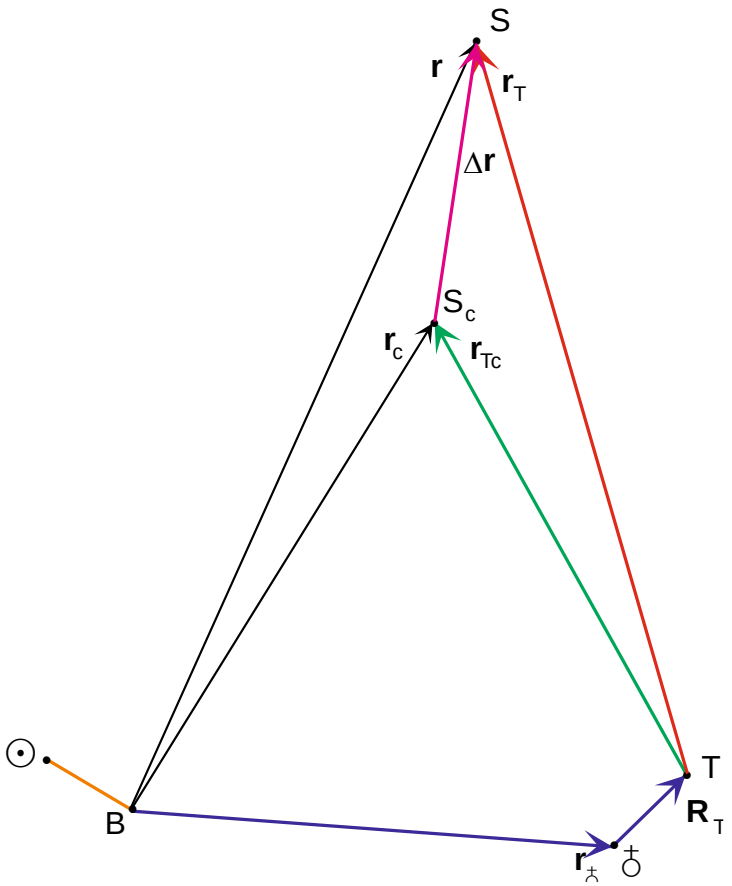


Bild 30-29: Berechneter Ort ($\mathbf{r}_c$) und „gestörter“ Ort ($\mathbf{r}$) gesehen vom Baryzentrum *B* sowie der Antenne *T* aus.

Die Untersuchung wird im vorliegenden Bericht unter folgende Prämisse durchgeführt:

- *Wie müsste die Beobachtungsrichtung bewegt werden um der wahren Bewegung des Himmelskörpers folgen zu können? Diese Bewegung muss auf die gesteuerte da berechnete Bewegung der Antenne bezogen werden. Wie kann diese (fehlerhafte, d.h. „gestörte“) Bewegung in der berechneten Bewegung der Antenne dargestellt und somit beobachtet werden?*

Das mitbewegte Antennensystem[1] sei aus dem Bewegungszustand $\left(\mathbf{r}_{Tc}, \dot{\mathbf{r}}_{Tc}\right)$ der berechneten Bewegung des Himmelskörpers mit den Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ aus den Gleichungen (30.156) bekannt. Der

[1] Dieses System, das auf die Hauptkeulenachse der beobachtenden Antenne bezogen sein kann, wird gelegentlich statt Beobachtungssystem gelegentlich auch als „*Antennensystem*“ bezeichnet.

Geschwindigkeitsanteil $\dot{\mathbf{r}}_{TqC}$ in der radialen Beobachtungsrichtung ist mit den Formeln (30.163) und (30.178) bekannt. In diesem Fall kann die durch den Parameter D_{qpC3} repräsentierte Eigenbewegung des Beobachters keinen Einfluss auf die radiale Entfernungsvariation $\dot{\rho}_C$ nehmen (wie es die klassische *Doppler*lehre beinhaltet).

Wenn das Beobachtungssystem der wahren Bewegung des Himmelskörpers nachgeführt würde, würde das Antennensystem die Basis

$$\mathbf{q}'_1 = \frac{\mathbf{r}_T}{|\mathbf{r}_T|} \quad , \quad \mathbf{q}'_3 = \frac{\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T}{|\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T|} \quad , \quad \mathbf{q}'_2 = \mathbf{q}'_3 \times \mathbf{q}'_1 \tag{30.212}$$

haben (vgl. Bild 30-30). In diesem System würde der Zustand des Himmelskörpers mit den Ausdrücken (30.209) und (30.211) $\mathbf{r}_T$, $\dot{\mathbf{r}}_T$ betragen. Der radiale also in der wahren Beobachtungsrichtung erfolgende Geschwindigkeitsanteil würde

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq} = \dot{\mathbf{r}}_T - \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}_T \tag{30.213}$$

sein, wobei die Eigenbewegung des Beobachters $\mathbf{D}_{qp}$ in Richtung der gestörten Bewegung des Himmelskörpers von der realen berechneten Eigenbewegung $\mathbf{D}_{qpC}$ als verschieden angenommen werden muss. Schrägentfernung, radiale Variation und Parameter des Antennen-Eigenbewegungsvektors errechnen sich in diesem („Stör-„) Fall aus

$$\rho' := |\mathbf{r}_T| \quad , \quad \dot{\rho}' := |\dot{\mathbf{r}}_{Tq}| = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}'_1 \quad , \quad \rho' D_{qp3} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}'_2 \quad . \tag{30.214}$$

Damit gilt (analog wie in Formel (30.178)) auch die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq} = \dot{\rho}' \mathbf{q}'_1 = \dot{\mathbf{r}}_T - \rho' D_{qp3} \mathbf{q}'_2 \quad , \tag{30.215}$$

wobei im Allgemeinen

$$D_{qp3} \neq D_{qpC3} \tag{30.216}$$

akzeptiert werden muss.

In der klassischen *Doppler*lehre wird weder die Missweisung der Beobachtungsrichtung, die in Bild 30-30 (auf Seite 739) durch den Winkel δ zwischen den Radiusvektoren $\mathbf{r}_{Tc}$ und $\mathbf{r}_T$ repräsentiert wird mit

$$\cos\delta = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}'_1 \quad , \tag{30.217}$$

noch die fehlerhafte Antennenbewegung, die durch die Beziehung (30.216) ausgedrückt wird, berücksichtigt[1]. Vielmehr wird die fehlerhafte radiale Entfernungsvariation einfach durch den Ausdruck

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 \quad , \tag{30.218}$$

also die Projektion des „gestörten“ Geschwindigkeitsvektors auf die berechnete Beobachtungsrichtung, angegeben.

Die Fragestellung lautet[1]:

---

[1] Man beachte, dass die in Abschnitt 30.10 verwendeten hier mathematischen Symbole $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta)$ ausschließlich hier zur Beschreibung der modifizierten Dopplertheorie verwendet werden, also nichts mit den in den anderen Kapiteln definierten Symbole gemein haben.

▶ *Muss und wenn wie müssen Missweisung und fehlerhafte Antennenbewegung in der Berechnung der radialen Entfernungsvariation berücksichtigt werden?*

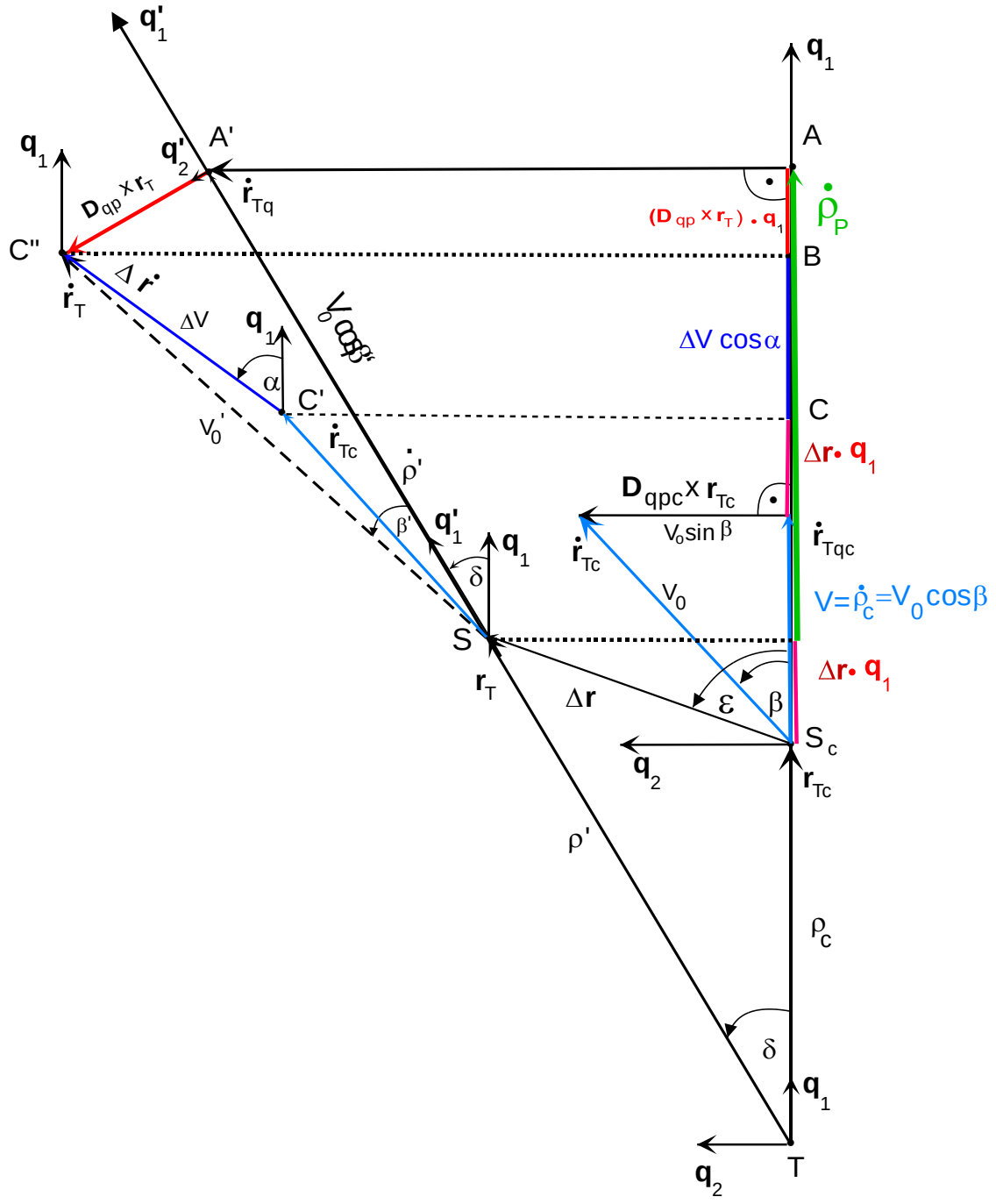


Bild 30-30: Zur Berechnung der „gestörten“ Ein-Weg Entfernungsvariation

Eine Möglichkeit diese Fehler zu berücksichtigen könnte aus folgender Überlegung kommen: Wenn der Beobachter zum gestörten topozentrischen Ort $\mathbf{r}_T$ gerichtet ist, wird die Entfernungsvariation in der üblichen Weise aus der Projektion des („gestörten“) Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}_T$ in diese Beobachtungsrichtung berechnet:

[1] Nach den Überlegungen in H. PORSCHE [1999]

$$\dot{\rho}' = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' = \left|\dot{\mathbf{r}}_{Tq}\right| \quad . \tag{30.219}$$

Nun werde aber der Beobachter in die berechnete Beobachtungsrichtung gedreht. Dadurch wird die modifizierte fehlerhafte Entfernungsvariation

$$\dot{\rho}_P = \dot{\mathbf{r}}_{Tq} \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho}'\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 - \left(\mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}_T\right) \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho} - \rho' D_{qp3}\left(\mathbf{q}_2' \cdot \mathbf{q}_1\right) \tag{30.220}$$

bzw. einfach

$$\dot{\rho}_P = \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1'\right)\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = \dot{\rho}' \cos\delta \tag{30.221}$$

erhalten. Dieser Ausdruck enthält sowohl die Missweisung der Antenne wie ihre fehlerhafte Eigenbewegung, da D_{qp3} in Formel (30.220) und damit implizit auch in Formel (30.221) enthalten ist. Ob jedoch mit dieser Formel die reale physikalische Einweg *Doppler* Beobachtung beschrieben werden kann, muss die Beobachtung ergeben.

30.10.3 Geometrische Interpretation der modifizierten Einweg-*Doppler*-Formel

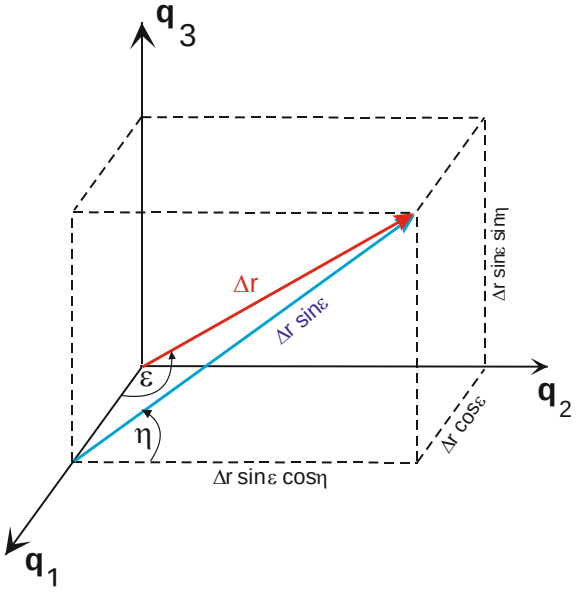


Bild 30-31 : Darstellung der Koordinaten des Orts-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem

Für eine verfeinerte geometrische Untersuchung sei ein topozentrisches orthonormales Koordinatensystem entsprechend Bild 30-32 und Bild 30-32 eingeführt mit den Winkeln

$$\alpha := \sphericalangle\left(\Delta\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \beta := \sphericalangle\left(\dot{\mathbf{r}}_{Tq}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \varepsilon := \sphericalangle\left(\Delta\mathbf{r}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \beta' := \sphericalangle\left(\dot{\mathbf{r}}_T, \mathbf{q}_1'\right) \quad . \tag{30.222}$$

Außerdem bezeichne γ die Abweichung des Geschwindigkeits-Fehlervektors sowie η die Abweichung des Orts-Fehlervektors von der topozentrischen Bahnebene ($\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\right)$ – Ebene). Mit den Zuordnungen $\Delta r := \left|\Delta\mathbf{r}\right|$, $\Delta V := \left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right|$ kann der Fehler-Zustandsvektor dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \Delta r \left(\mathbf{q}_1 \cos\varepsilon + \mathbf{q}_2 \sin\varepsilon\cos\eta + \mathbf{q}_3 \sin\varepsilon\sin\eta\right) \\ \Delta\dot{\mathbf{r}} &= \Delta V \left(\mathbf{q}_1 \cos\alpha + \mathbf{q}_2 \sin\alpha\cos\gamma + \mathbf{q}_3 \sin\alpha\sin\gamma\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.223}$$

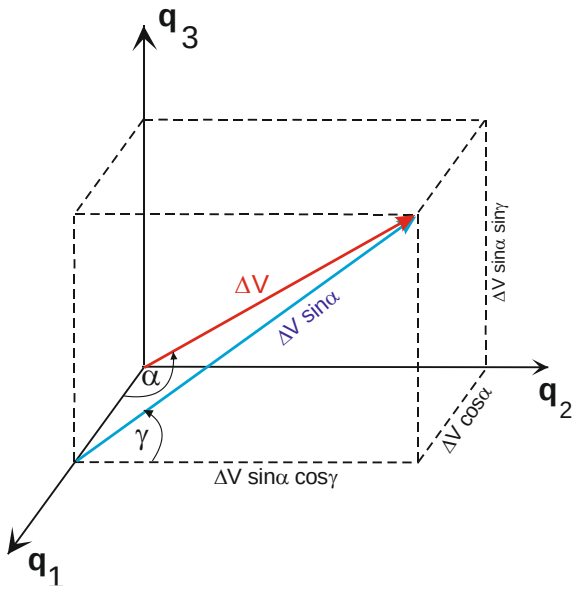


Bild 30-32 : Darstellung der Koordinaten des Geschwindigkeits-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem

Der Winkel δ zwischen der berechneten und der fehlerhaften („wahren“) Beobachtungsrichtung kann berechnet werden aus

$$\sin\delta = \frac{\Delta r\ \sin\varepsilon}{\rho'} \quad , \quad \cos\delta = \frac{\rho_C + \Delta r\cos\varepsilon}{\rho'} \quad . \tag{30.224}$$

Der Geschwindigkeitsvektor der wahren Bewegung kann im Beobachtersystem der berechneten Bewegung mit (30.215) und mit Hilfe der Beziehungen (30.158) dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_T &= \dot{\mathbf{r}}_{Tq} + \mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{r}_T = \\
&= \left(\dot{\mathbf{r}}_T\cdot\mathbf{q}_1'\right)\mathbf{q}_1' + \left(\dot{\mathbf{r}}_T\cdot\mathbf{q}_2'\right)\mathbf{q}_2' + \left(\dot{\mathbf{r}}_T\cdot\mathbf{q}_3'\right)\mathbf{q}_3' = \\
&= \dot{\rho}'\,\mathbf{q}_1' + \rho'\,D_{qp3}\,\mathbf{q}_2' = \\
&= \left(\dot{\rho}_C + \Delta V\cos\alpha\right)\mathbf{q}_1 + \left(\rho_C\,D_{qpC3} + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\mathbf{q}_2 + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\,\mathbf{q}_3 = \\
&= \left(V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha\right)\mathbf{q}_1 + \left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\mathbf{q}_2 + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\,\mathbf{q}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{30.225}$$

Dies führt mit Formel (30.218) auf die klassische Formel der topozentrischen Entfernungsänderung („range-rate“)

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T\cdot\mathbf{q}_1 = V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha \quad . \tag{30.226}$$

Der Richtungsvektor der gestörten („wahren“) Bewegung $\mathbf{q}_1'$ kann auf das berechnete Beobachtersystem bezogen werden:

$$\begin{aligned}
\rho'\,\mathbf{q}_1' &= \mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r} \\
&= \left(\rho_C + \Delta r\cos\varepsilon\right)\mathbf{q}_1 + \Delta r\sin\varepsilon\cos\eta\,\mathbf{q}_2 + \Delta r\sin\varepsilon\sin\eta\,\mathbf{q}_3
\end{aligned} \tag{30.227}$$

Damit kann die Entfernungsvariation in der gestörten Beobachtungsrichtung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}' = \dot{\mathbf{r}}_T\cdot\mathbf{q}_1' &= \left(V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha\right)\cos\delta\ + \\
&+\ \frac{\Delta r\ \sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0\sin\beta\ +\ \Delta V\ \sin\alpha\ \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\ \sin\alpha\ \sin\gamma\ \sin\eta\right] .
\end{aligned} \tag{30.228}$$

Die modifizierte Entfernungsänderung hat dann wieder entsprechend Formel (30.221) die Darstellung

$$\dot{\rho}_P = \dot{\rho}' \cos\delta \quad . \tag{30.229}$$

Wenn es also möglich ist, die Störausdrücke Δr, ΔV und die zugehörigen Winkel ε, η und α, γ zu messen, kann auch der Fehler-Zustandsvektor $\Delta\mathbf{r}$, $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ berechnet werden.

Der Zusammenhang dieser modifizierten Formel zu den geometrischen Parametern der gestörten Bewegung kann nun auf die folgende Weise hergeleitet werden: der gestörte Geschwindigkeitsvektor habe den Betrag

$$V_0' := \left|\dot{\mathbf{r}}_T\right| \quad . \tag{30.230}$$

Sei der Winkel β' zwischen den Vektoren $\dot{\mathbf{r}}_T$ und $\mathbf{q}_1'$ definiert, wird

$$\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' = V_0' \cos\beta' \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_2' = V_0' \sin\beta' \tag{30.231}$$

und

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}'\mathbf{q}_1' + \rho' D_{qp3}\,\mathbf{q}_2' = V_0'\cos\beta'\;\mathbf{q}_1' + V_0'\sin\beta'\,\mathbf{q}_2' \quad . \tag{30.232}$$

Mit diesen Beziehungen kann Formel (30.220) geschrieben werden in der Form

$$\dot{\rho}_P = \dot{\mathbf{r}}_{Tq} \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho}'\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = V_0 \cos\beta + \Delta V \cos\alpha - V_0' \sin\beta'\;\mathbf{q}_2' \cdot \mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.233}$$

Für manche Anwendungen kann es erforderlich sein, die anderen Richtungsvektoren des $\mathbf{q}_j'$ – Systems in Beziehung zum berechneten $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem darzustellen:

$$\begin{aligned}
\rho'\, D_{qp3}\,\mathbf{q}_2' = {} & \mathbf{q}_1\left[\dot{\rho}_c + \Delta V\,\cos\alpha - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'}\left(\rho_c + \Delta r\cos\varepsilon\right)\right] + \\
& + \mathbf{q}_2\left[\rho_c\, D_{qpc3} + \Delta V\,\sin\alpha\,\cos\gamma - \frac{\dot{\rho}'\Delta r}{\rho'}\sin\varepsilon\cos\eta\right] + \\
& + \mathbf{q}_3\left[\Delta V\,\sin\alpha\,\sin\gamma - \frac{\dot{\rho}'\Delta r}{\rho'}\sin\varepsilon\sin\eta\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{30.234}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T = {} & \left|\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T\right| \mathbf{q}_3' = \\
& = \mathbf{q}_1\,\Delta r \sin\varepsilon\left[\Delta V \sin\varepsilon\,\sin\alpha\,\sin\gamma - \rho_c\; D_{qpC3}\sin\eta - \Delta V\,\sin\eta\,\sin\alpha\,\cos\gamma\right] + \\
& + \mathbf{q}_2\,\left[\dot{\rho}_C\,\Delta r \sin\varepsilon\,\sin\eta + \Delta r\,\Delta V \sin\varepsilon\,\cos\alpha\sin\eta - \right. \\
& \qquad \left. - \rho_C\;\Delta V \sin\alpha\,\sin\gamma - \Delta r\,\Delta V\,\cos\varepsilon\,\sin\alpha\,\sin\gamma\right] + \\
& + \mathbf{q}_3\left[\rho_C^2\; D_{qpC3} + \rho_C\;\Delta V\,\sin\alpha\,\cos\gamma + \rho_c\,\Delta r\; D_{qpc3}\,\cos\varepsilon + \right. \\
& \qquad \left. + \Delta r\,\Delta V\cos\varepsilon\,\sin\alpha\cos\gamma - \dot{\rho}_C\;\Delta r\,\sin\varepsilon\,\cos\eta - \Delta r\,\Delta V\sin\varepsilon\,\cos\eta\,\cos\alpha\right] \quad .
\end{aligned} \tag{30.235}$$

Diese Formel wird benutzt, um das geometrische Verhalten der fehlerhaften Beobachtung in den verschiedenen Anwendungen (terrestrisch, interplanetar, stellar) zu untersuchen.

30.10.4 Zweiweg-*Doppler*messungen in der modifizierten Theorie

Interplanetare Raumflugkörper in gleicher Weise wie Erdsatelliten können üblicherweise ein von der Bodenstation ausgesandtes Signal an Bord empfangen und ein anderes Signal (etwa mit Beobachtungswerten) an die Bodenstation zurücksenden. Das zur Bodenstation zurückgesandte Signal selbst kann für wissenschaftliche Untersuchungen genutzt werden, was im Rahmen von „Radio Science“ geschieht.

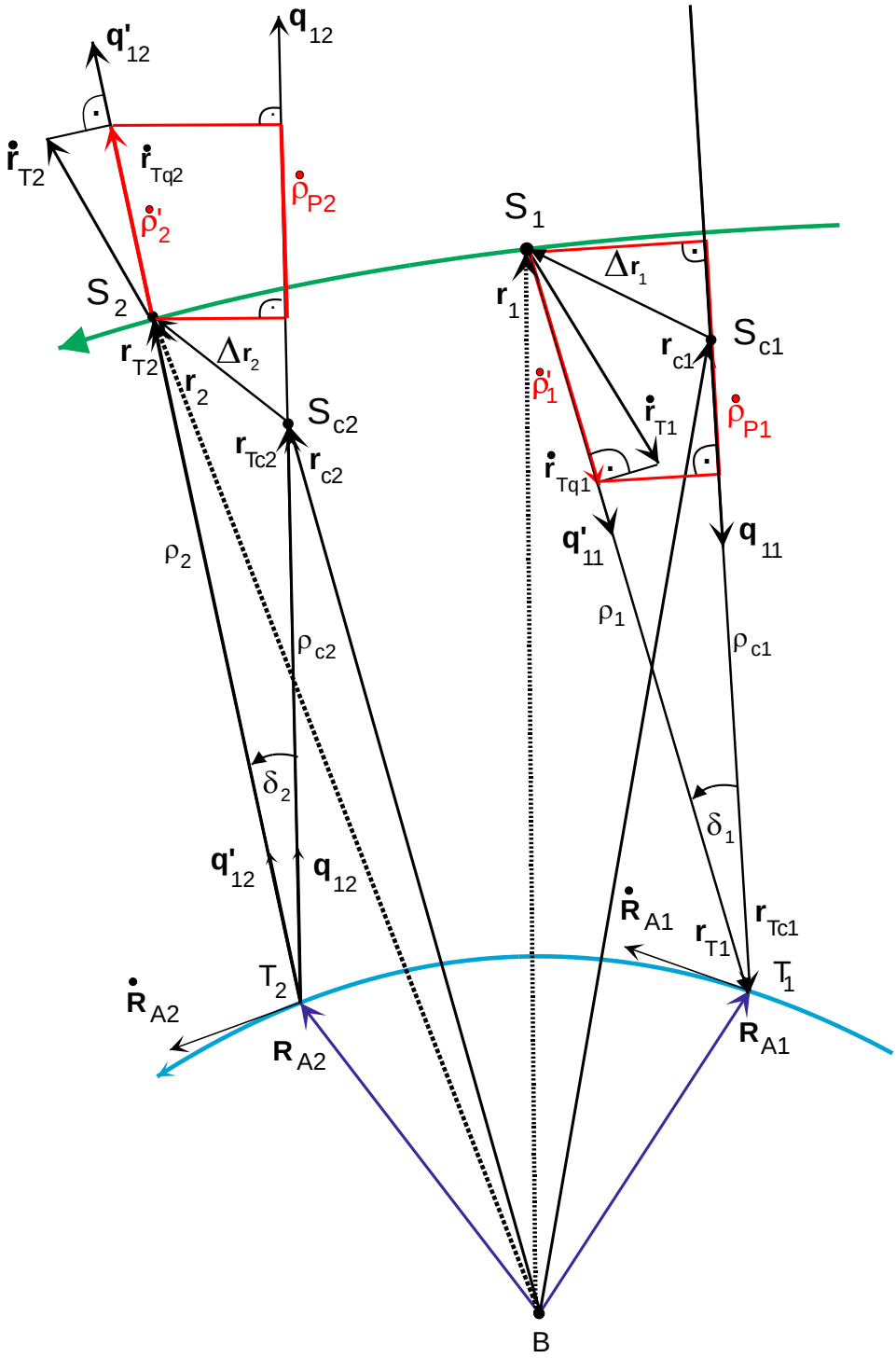


Bild 30-33: Die radiale Geschwindigkeit einer „gestörten“ Bewegung mit Abweichung der beobachtenden Antenne im Zweiweg-*Doppler*: Aufwärtsbeobachtung $T_1 \rightarrow S_{c1}$, Abwärtsbeobachtung $T_2 \rightarrow S_{c2}$

Das allgemeine Verhalten einer Zwei- Wege-Beobachtung wird für den Fall einer fehlerhaften Beobachtung in Bild 30-33 demonstriert. In diesem allgemeinen Fall wird eine inertiale Drehung der Beobachtungsrichtung während Aussendung und Empfang des Signals angenommen, sowie eine Zeitdifferenz zwischen dem Empfang des Signals an Bord des Raumflugkörpers und dem Senden des Signals zurück an die Bodenstation. In diesen beiden Fällen würde eine richtige Ausrichtung der Antenne des Beobachters die Zwei-Wege-Entfernungsvariation (was dem Zwei-Wege-*Doppler* entspricht) verursachen

$$\dot{\rho}'_{2Weg} \;=\; \dot{\rho}'_2 \;+\; \dot{\rho}'_1 \quad . \tag{30.236}$$

Um das Verhältnis zwischen den beiden Teilen der radialen Entfernungsvariation abschätzen zu können, wird entsprechend Bild 30-33 folgender Ausdruck verwendet:

$$\mathbf{R}_{A2} + \mathbf{r}_{T2} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{T1} - \mathbf{R}_{A1} \;=\; 0 \quad . \tag{30.237}$$

Zu den zwei verschiedenen Zeitpunkten (Empfang und Rücksendung des Signals) lauten die radialen Richtungsvektoren der gestörten (= wahren) Bewegung

$$\mathbf{q}'_{11} := \frac{\mathbf{r}_{T1}}{|\mathbf{r}_{T1}|} = \frac{\mathbf{r}_{T1}}{\rho_1} \;\;,\;\; \mathbf{q}'_{12} := \frac{\mathbf{r}_{T2}}{|\mathbf{r}_{T2}|} = \frac{\mathbf{r}_{T2}}{\rho_2} \quad . \tag{30.238}$$

Entsprechend haben die geozentrischen Geschwindigkeitsvektoren des Beobachters die Relation

$$\Delta\dot{\mathbf{R}}_A \;:=\; \dot{\mathbf{R}}_{A2} - \dot{\mathbf{R}}_{A1} \quad . \tag{30.239}$$

Die topozentrischen Geschwindigkeitsvektoren der gestörten Bewegung können (entsprechend Formel (30.215)) in einen radialen und einen transversalen Richtungsanteil getrennt werden. Mit den Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{qp1} := \mathbf{D}_{qp}(t_1), \mathbf{D}_{qp2} := \mathbf{D}_{qp}(t_2)$ der gestörten Bewegung lauten die Geschwindigkeitsvektoren

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{T1} \;&=\; \dot{\mathbf{r}}_{Tq1} \;+\; \mathbf{D}_{qp1} \times \mathbf{r}_{T1} \\ \dot{\mathbf{r}}_{T2} \;&=\; \dot{\mathbf{r}}_{Tq2} \;+\; \mathbf{D}_{qp2} \times \mathbf{r}_{T2} \quad . \end{aligned} \tag{30.240}$$

Die Eigenbewegung des Beobachters (Bodenantenne) werde auf die wahre Beobachtungsrichtung bezogen und nicht auf die berechnete und verwendete Beobachtungsrichtung. Es muss deshalb die Beobachtungsrichtung als fehlerhaft angenommen werden. Es gilt die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq2} + \mathbf{D}_{qp2} \times \mathbf{r}_{T2} + \dot{\mathbf{r}}_{Tq1} + \mathbf{D}_{qp1} \times \mathbf{r}_{T1} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \left(\dot{\mathbf{R}}_{A2} - \dot{\mathbf{R}}_{A1}\right) \quad . \tag{30.241}$$

Der Eigenbewegungsvektor des Beobachtersystems kann entsprechend Formel (30.176) in einen radialen und einen transversalen Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{qp1} \;&=\; \mathbf{D}_{qp}(t_1) := \; D_{qp11}\,\mathbf{q}'_{11} \;+\; D_{qp31}\,\mathbf{q}'_{31} \quad , \\ \mathbf{D}_{qp2} \;&=\; \mathbf{D}_{qp}(t_2) := \; D_{qp12}\,\mathbf{q}'_{12} \;+\; D_{qp32}\,\mathbf{q}'_{32} \quad . \end{aligned} \tag{30.242}$$

Die Entfernungsvariation in der "gestörten" Beobachtungsrichtung ist zu den beiden Beobachtungszeitpunkten

$$\dot{\rho}'_1 \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}_{Tq1}\right| \;\;,\;\; \dot{\rho}'_2 \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}_{Tq2}\right| \quad . \tag{30.243}$$

Deshalb kann die Beziehung (30.241) in der Form geschrieben

$$\dot{\rho}'_2\,\mathbf{q}'_{12} + \rho_2\,D_{qp32}\mathbf{q}'_{32} \;+\; \dot{\rho}'_1\,\mathbf{q}'_{11} + \rho_1\,D_{qp31}\mathbf{q}'_{31} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A \quad . \tag{30.244}$$

werden. Die Projektion auf die "gestörte" Beobachtungsrichtung beträgt am zweiten Zeitpunkt

$$\dot{\rho}'_2 = -\dot{\rho}'_1 \mathbf{q}'_{11} \cdot \mathbf{q}'_{12} - \rho_1 D_{qp31} \mathbf{q}'_{31} \cdot \mathbf{q}'_{12} + \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A\right) \cdot \mathbf{q}'_{12} \quad . \tag{30.245}$$

Offensichtlich muss im allgemeinen Fall beachtet werden, dass die Entfernungsvariation im aufsteigenden Ast zum ersten Zeitpunkt abweicht von der Entfernungsvariation im absteigenden Ast zum zweiten Zeitpunkt:

$$\dot{\rho}'_1 \neq \dot{\rho}'_2 \quad . \tag{30.246}$$

Im Fall einer fehlerhaften Beobachtungsrichtung und einer fehlerhaften Eigenbewegung des Beobachters muss eine zweite Projektion entsprechend Formel (30.221) angewendet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{P2} &= \dot{\rho}'_2 \mathbf{q}'_{12} \cdot \mathbf{q}_{12} = \\ &= -\dot{\rho}'_1 \left(\mathbf{q}'_{11} \cdot \mathbf{q}_{12}\right) - \rho_2 D_{qp32} \mathbf{q}'_{22} \cdot \mathbf{q}_{12} - \rho_1 D_{qp31} \mathbf{q}'_{21} \cdot \mathbf{q}_{12} + \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A\right) \cdot \mathbf{q}_{12} \quad . \end{aligned} \tag{30.247}$$

Diese Beziehung beschreibt die Wirkung einer fehlerhaften Ausrichtung der Beobachtungsantenne und einer fehlerhaften Eigenbewegung in Überlagerung der Bewegung des Raumflugkörpers sowie der Bodenstation auf eine unterschiedliche Beobachtung der Entfernungsänderung in den Augenblicken des Aussendens eines Signals und des Empfangs.

In diesem Fall kann die Zwei-Wege-Entfernungsänderung (d.h. der 2-Wege *Doppler*) berechnet werden aus

$$\dot{\rho}_{P-2way} = \dot{\rho}_{P1} + \dot{\rho}_{P2} \quad . \tag{30.248}$$

Es tritt somit gegenüber dem „ungestörten" Fall, der bei richtiger Ausrichtung und richtiger Eigenbewegung der Antenne besteht, ein nicht zu vernachlässigender Unterschied auf:

$$\dot{\rho}_{P1} \neq \dot{\rho}_{P2} \quad . \tag{30.249}$$

Nach der Behandlung des qualitativen Aspektes des hier untersuchten Problemkreises wird im Folgenden die Näherung quantitativ untersucht, mit der üblicherweise in der Beobachtung von Satelliten und Raumflugkörpern gearbeitet wird. Dazu wird bei Untersuchungen der Zwei-Wege Entfernungsänderung die Bewegung des Raumflugkörpers während Empfang und Rücksendung des Signals vernachlässigt:

$$\mathbf{r}_{c1} = \mathbf{r}_{c2} = \mathbf{r}_c \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_{c1} = \dot{\mathbf{r}}_{c2} = \dot{\mathbf{r}}_c \quad . \tag{30.250}$$

Im Fall einer "Störung" wird auch eine Veränderung des Fehler-Zustandsvektors in dem entsprechenden Zeitraum vernachlässigt

$$\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} \quad , \quad \Delta\dot{\mathbf{r}}_1 = \Delta\dot{\mathbf{r}}_2 = \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.251}$$

Dagegen muss die Eigenbewegung der Bodenantenne während des Zeitraumes zwischen Aussenden und Empfang des Signals berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T1} &= -\mathbf{r} + \mathbf{R}_{A1} \ , \ \mathbf{r}_{T2} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{A2} \ , \\ \dot{\mathbf{r}}_{T1} &= -\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}_{A1} \ , \ \dot{\mathbf{r}}_{T2} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}_{A2} \ , \end{aligned} \tag{30.252}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{T1} - \dot{\mathbf{R}}_{A1} = -\dot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}}_{T2} + \dot{\mathbf{R}}_{A2} \quad , \quad \left(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \ , \ \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}\right) \quad . \tag{30.253}$$

Formel (30.247) vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{P2} \;=\; & -\dot{\rho}_1'\left(\mathbf{q}_{11}'\cdot\mathbf{q}_{12}\right) - \rho_2\, D_{qp32}\left(\mathbf{q}_{22}'\cdot\mathbf{q}_{12}\right) - \\ & -\rho_1\, D_{qp31}\left(\mathbf{q}_{21}'\cdot\mathbf{q}_{12}\right) - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A\cdot\mathbf{q}_{12} \quad , \left(\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2\,,\,\dot{\mathbf{r}}_1=\dot{\mathbf{r}}_2\right)\end{aligned} \tag{30.254}$$

Und es bleibt im "gestörten" Fall sicherlich $\dot{\rho}_{P1} \neq \dot{\rho}_{P2}$.

Als weitere Vereinfachung werde jetzt auch die Eigenbewegung des Beobachterstandortes und dann auch die Eigenbewegung der Antenne vernachlässigt, es bleibt dann

$$\mathbf{R}_{A1} \;=\; \mathbf{R}_{A2} \quad , \quad \dot{\mathbf{R}}_{A1} \;=\; \dot{\mathbf{R}}_{A2} \quad , \quad \Delta\dot{\mathbf{R}}_A = 0 \quad , \quad \mathbf{D}_{qp1} \;=\; \mathbf{D}_{qp2}\,,\, D_{qp31}=D_{qp32}$$

und

$$\mathbf{r}_{T1} \;=\; -\mathbf{r}_{T2} \;,\; \dot{\mathbf{r}}_{T1} \;=\; -\dot{\mathbf{r}}_{T2} \;,$$

daher

$$\rho_1 \;=\; \mathbf{r}_{T1}\cdot\mathbf{q}_{11}' \;=\; \mathbf{r}_{T2}\cdot\mathbf{q}_{12}' \;=\; \rho_2 \quad .$$

Die gestörte Richtung der Antenne vereinfacht sich dann zu

$$\mathbf{q}_{11}' \;=\; \frac{\mathbf{r}_{T1}}{\rho_1} \;=\; -\frac{\mathbf{r}_{T2}}{\rho_2} \;=\; -\mathbf{q}_{12}' \quad .$$

Die Konsequenz ist: In diesem und nur in diesem Fall von Vereinfachungen wird Formel (30.254) reduziert auf

$$\dot{\rho}_{P2} \;=\; \dot{\rho}_1'\;\mathbf{q}_{11}'\cdot\mathbf{q}_{11} \;=\; \dot{\rho}_{P1} \quad , \left(\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1\,,\dot{\mathbf{r}}_2=\dot{\mathbf{r}}_1\,,\mathbf{R}_{A1}=\mathbf{R}_{A2}\,,\dot{\mathbf{R}}_{A1}=\dot{\mathbf{R}}_{A2}\,,\mathbf{D}_{qp1}=\mathbf{D}_{qp2}\right) \quad . \tag{30.255}$$

In diesem in der Praxis vor allem bei der Beobachtung von Erdsatelliten wichtigen Spezialfall sind die beiden Anteile des Zwei-Wege-*Doppler*s gleichgewichtig. Eine fehlerhafte Ausrichtung der Bodenantenne wirkt sich auf den Betrag des Zwei-Wege-*Doppler*s aus, während eine fehlerhafte Eigenbewegung der Antenne keinen Einfluss hat[1].

Werden kleine Zeitdifferenzen zugelassen und somit eine allerdings geringfügige Eigenbewegung, ist zu erwarten, dass die Beziehung (30.255) nur sehr wenig modifiziert werden muss, so dass mit einem kleinen Betrag $\Delta\dot{\rho}$ gesetzt werden darf

$$\dot{\rho}_{P2} \;=\; \dot{\rho}_{P1} \;+\; \Delta\dot{\rho} \quad . \tag{30.256}$$

30.10.5 Anwendung auf interplanetare Beobachtungen

f_0 sei die Frequenz des Transponders an Bord des Raumflugkörpers. δf sei die Ein-Weg *Doppler* Frequenzverschiebung, Δf die um den Faktor 2 reduzierte Zwei-Weg-*Doppler*verschiebung. Unter der Annahme, dass der Winkel γ bekannt sei (Bild 30-32), können der Fehler ΔV in der Geschwindigkeit des Raumflugkörpers sowie die Winkel α und β (vgl. Bild 30-30) mit Hilfe der Formeln (30.226) and (30.228) (c = Vakuum Lichtgeschwindigkeit) berechnet werden:

[1] PORSCHE, H. [1999]

$$\Delta\dot\rho := \dot\rho - \dot\rho_c = \Delta\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{q}_1 = -c\frac{\Delta f}{f_0} = \Delta V\cos\alpha$$

$$\Delta\dot\rho_P := \dot\rho_P - \dot\rho_c = -c\frac{\delta f}{f_0} \approx \Delta V\cos\alpha + \tag{30.257}$$

$$+\frac{\Delta r\sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\sin\eta\right] .$$

Entsprechend ergeben sich die beiden Ausdrücke

$$\frac{\delta f}{\Delta f} = 1 + \frac{\Delta r\sin\varepsilon\left[\left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\sin\eta\right]}{\rho'\,\Delta V\cos\alpha} \tag{30.258}$$

und

$$-c\frac{\delta f}{f_0} + c\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta r\sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\sin\eta\right]. \tag{30.259}$$

Die Geschwindigkeit V_0 der berechneten Bewegung erlaubt die Berechnung des Winkels β mit den Formeln $\dot\rho_c = V_0\cos\beta$, $\rho_c D_{qpc3} = V_0\sin\beta$. Mit Hilfe einer Bahnbestimmung des Raumflugkörpers basierend auf einer Serie von Beobachtungen können die Parameter $\Delta r, \varepsilon, \eta, \Delta V, \alpha, \gamma$ als bekannt angenommen werden. Entsprechend kann dann auch die Basis des $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystems aus der berechneten Bewegung erhalten werden[1]. Mit Formel (30.223) sind auch die Fehlerzustandsvektoren bekannt. Sei zur Abkürzung

$$A := \left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\sin\eta \tag{30.260}$$

gesetzt, folgt aus (30.258)

$$\frac{\Delta r}{\rho'} = \frac{\Delta V\cos\alpha}{A\,\sin\varepsilon}\left(\frac{\delta f}{\Delta f} - 1\right) \tag{30.261}$$

und mit (30.224)

$$\sin\delta = \frac{\Delta V\cos\alpha}{A}\left(\frac{\delta f}{\Delta f} - 1\right) . \tag{30.262}$$

Aus Gründen der Beobachtbarkeit ist sicherlich $\cos\delta > 0$. Der Winkel ist somit aus der obigen Formel eindeutig bestimmbar. Somit hat der Fehlerortsvektor den Betrag

$$\Delta r = \frac{\rho'\sin\delta}{\sin\varepsilon} \tag{30.263}$$

und die gestörte Entfernung folgt aus

$$\rho' = \rho_c\frac{\sin\varepsilon}{\cos\delta\sin\varepsilon - \sin\delta\cos\varepsilon} = \rho_c\frac{\sin\varepsilon}{\sin\left(\varepsilon - \delta\right)} . \tag{30.264}$$

Wenn jedoch $\sin\varepsilon = 0$, folgen aus dem Ausdruck (30.258) die Beziehungen $\delta f = \Delta f$ und $\dot\rho_P = \dot\rho'$, d.h. in diesem Fall darf keine Störung vermutet werden. Zusätzlich kann mit Hilfe der *Doppler* Messungen nicht nur die Radialgeschwindigkeit erhalten werden, sondern auch die Richtung zu

[1] Abschnitt 30.10.1 ab Seite 727

dem Raumflugkörper, wobei die Erdrotation und damit auch die Eigenbewegung der Antenne der Bodenstation berücksichtigt werden[1]. Damit können dann auch die geometrischen Parameter (d.h. die Winkel nach Bild 30-30 auf Seite 739) geschätzt werden.

30.10.6 1. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Halley

Die Bewegung einer interplanetaren Raumsonde werde durch eine unbekannte Beschleunigung beeinflusst. Die Antenne der Bodenstation ist nach wie vor in die berechnete Richtung orientiert. Daher wird ein Fehler in der radialen Geschwindigkeit („Range rate") beobachtet. Die kontrovers diskutierte physikalische Deutung dieses Vorganges[2] ist nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen. Die mathematische Behandlung beruht auf Vorschlägen von H. PORSCHE [1999][3].

Während der Begegnung der europäischen Raumsonde GIOTTO mit dem Kometen P/Halley wurden die folgenden Parameter berechnet bzw. aus der Beobachtung zur Epoche 1986-03-14/00:03:1.84 (U.T.1) abgeleitet. Der berechnete Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_c, \dot{\mathbf{r}}_c\right)$ der Raumsonde hat die heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten (J2000.0):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{-0.80171187187242D+08 km} \\
x_2 &= \text{-0.10854734148444D+09 km} \\
x_3 &= \text{-0.36184290742135D+07 km} \\
\dot{x}_1 &= \text{21.299416885262 km/s} \\
\dot{x}_2 &= \text{-22.482162378519 km/s} \\
\dot{x}_3 &= \text{0.60385539849442 km/s}
\end{aligned}
$$

Die Beobachtungsparameter sind:

$$
\begin{aligned}
\delta f &= 16.5 \pm 0.5\ Hz \\
\Delta f &= 4.64 \pm 0.05\ Hz \\
f_0 &= 8.429 \cdot 10^9\ Hz \\
\gamma &\approx -60°.000 \\
V_0 &= 25.970099\ \text{km/s} \\
\beta &= 77°.34623 \quad .
\end{aligned}
$$

Diese führen (mit der ersten der Formeln (30.257)) auf

$$\Delta V \cos\alpha = -0.165029897\ m/s \quad .$$

Von zentralem Interesse ist die relative Abweichung der Ein-Weg-*Doppler* Messung von der Zwei-Weg-*Doppler*messung

$$\left|\frac{\delta f - \Delta f}{\Delta f}\right| = 2.556 \quad . \tag{30.265}$$

---

[1] PH. HARTL [1973]

[2] PÄTZOLD, M, BIRD, M. K. [2001]; PÄTZOLD, M, et al. [1991]; PORSCHE, H. [2015]

[3] Die Herleitungen und Rechnungen im vorliegenden Abschnitt wurden dankenswerterweise von *H. Porsche* begleitet

Mit dem berechneten Winkel $\alpha = 228°.93462$ nimmt die fehlerhafte Geschwindigkeit den Betrag $\Delta V = 25.1547$ cm/s an. Die Positionswinkel des fehlerhaften Ortsvektors werden geschätzt auf $\varepsilon = 120°, \eta = 10°$. Damit hat der Fehlervektor den Betrag $\Delta r = 2789$ km. Als Folge hat der Fehler-Zustandsvektor die Komponenten (mit den Ausdrücken (30.223) auf Seite 740)

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1436.757\,\text{km} \\ \Delta y &= 1924.120\,\text{km} \\ \Delta z &= 1418.092\ \text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= \text{-0.1643036072D-03 km/s} \\ \Delta\dot{y} &= \text{0.2127953121D-04 km/s} \\ \Delta\dot{z} &= \text{0.1892817099D-03 km/s} \quad . \end{aligned}$$

Die ekliptikalen *Kepler*elemente des Raumflugkörpers (bezogen auf J2000.0) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst: linke Spalte die "ungestörten" Elemente, wie sie vor dem Encounter errechnet wurden (berechnet aus dem Zustandsvektor $(\mathbf{r}_c, \dot{\mathbf{r}}_c)$), rechte Spalte die Elemente unter Berücksichtigung der zuvor hergeleiteten "Störungen" (berechnet aus $(\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \Delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_c + \Delta\dot{\mathbf{r}})$):

a = 131824122.742 km	a = 131817447.181 km
e = 0.176318003175	e = 0.17632208382808
i = 2°.083	i = 2°.0833
Ω = 280°.799	Ω = 281°.02990
ω = 204°.764	ω = 204°.71584
M_0 = 87°.827	M_0 = 87°.83732

Die Schrägentfernung des Raumflugkörpers beträgt $\rho = 0.1428760 * 10^9$ km. Die Entfernungsänderung (range-rate) beträgt in den unterschiedlichen Fällen (mit den Zuordnungen $(\mathbf{r}_{TC}, \dot{\mathbf{r}}_{TC})$ aus (30.155), $(\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}_{TC} + \Delta\dot{\mathbf{r}})$ aus (30.209), $\mathbf{q}_1$ aus (30.156), $\mathbf{q}_1'$ aus (30.227)):

Berechneter Wert: $\dot{\rho}_c = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} \cdot \mathbf{q}_1 = 5.684111\ km/s$

Klassische Formel: $\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 = 5.697945\ km/s$

Modifizierte Formel: $\dot{\rho}_P = (\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1')(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1) = 5.698368\ km/s$.

Die absoluten Fehler lauten

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\rho} &:= \dot{\rho} - \dot{\rho}_c = \text{-0.1654243} \cdot 10^{-3}\ km/s \\ \Delta\dot{\rho}_P &:= \dot{\rho}_P - \dot{\rho}_c = 0.2573392 \cdot 10^{-3}\ km/s \end{aligned}$$

Der Unterschied der klassischen von der modifizierten Formel (30.221) beträgt

$$\Delta^{(2)}\dot{\rho} := \Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho} = 0.4227635 \cdot 10^{-3}\ km/s \approx 0.4\ m/s\,.$$

Die relativen Abweichungen sind

$$\frac{\Delta\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c} = -2.9103 \cdot 10^{-5} \quad \text{and} \quad \frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c} = 7.4376 \cdot 10^{-5} \quad .$$

Dies führt mit einer zum Ausdruck (30.265) analogen Betrachtung zu dem Wert

$$\left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\dot{\rho}_P - \dot{\rho}}{\dot{\rho} - \dot{\rho}_c}\right| = 2.556 \quad . \tag{30.266}$$

Beachte: Der Ausdruck (30.265) ist durch Auswertung der direkten Beobachtungen erhalten worden. Das hier hergeleitete Ergebnis (30.266) ist eine Folge der modifizierten Theorie, der Schätzung der Winkelgrößen im Fehler-Ortsvektor und der entsprechenden Berechnungen. Die zahlenmäßige Übereinstimmung ist eine Bestätigung der Richtigkeit der modifizierten Theorie[1].

Eine weitere interessante Beobachtung kann aus der Auswahl der Richtungswinkel des Fehler-Ortsvektors insbesondere des Winkels ε abgeleitet werden. Der beste Wert für diesen Winkel, um die charakteristischen Zahlenwerte in den Ausdrücken (30.265) und (30.266) zur Übereinstimmung zu bringen, ist ε = 120°. Das bedeutet, die relative Bewegung des Raumflugkörpers ist zum Beobachter gerichtet, obgleich dieser auf die berechnete Position bezogen ist. Deshalb darf eine Blauverschiebung des *Doppler*-Signals erwartet werden, die tatsächlich während der Begegnung der Sonde mit dem Kometen beobachtet worden ist.

Der Missweisungswinkel δ wird mit Formel (30.262) berechnet. Er beträgt im vorliegenden Fall $\delta = 3''.5$. Obgleich dieser Winkel sehr klein ist, darf er auf keinen Fall vernachlässigt werden. Würde er vernachlässigt $(\delta \to 0°)$, würde mit $\left(\Delta^{(2)}\dot{\rho} \to 0.0\right)$ der Unterschied zwischen der klassischen und der modifizierten Theorie verschwinden.

- *Bei der Berechnung der Entfernungsvariation im Fall einer unbekannten Bahnstörung muss eine Missweisung der Antenne unbedingt berücksichtigt werden, auch wenn wie im Fall interplanetarer Bahnen diese Missweisung nur sehr gering ausfällt.*

30.10.7 2. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Grigg-Skjellerup 1992

Um die modifizierte Theorie des Einweg-*Doppler* mit einer weiteren unabhängigen Beobachtung zu testen, wird die Begegnung der Raumsonde GIOTTO mit dem Kometen P/Grigg-Skjellerup untersucht. Diese hat sich unter völlig anderen geometrischen Randbedingungen als die Begegnung mit P/Halley ereignet.

Der Encounter fand zur Epoche 1992 Juli 10/ 15:18:43.6 (UTC) statt. Die ekliptikalen *Kepler* Elemente der Raumsonde bei Bezug auf die Fundamentalepoche B1950.0 waren

$$\begin{aligned} a &= 160251227.571 \text{ km} \\ e &= 0.0768075562 \\ i &= 5°.5552 \\ \Omega &= 279°.2533 \\ \omega &= 317°.1198 \\ M_0 &= 326°.9386 \quad . \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass zur obigen Epoche eine Störung auf die Raumsonde stattgefunden hat, wurden folgende Radio Science Messungen erhalten:

---

[1] Basierend auf den Überlegungen von PORSCHE, H. [1999]

$$\delta f = -124.5\,Hz \qquad [X-\text{Band, gemessen in Madrid}]$$
$$\Delta f = 0.01283\,Hz \qquad [S-\text{Band}]$$
$$\Delta f = 0.01283 \cdot \frac{11}{3}\,Hz = 0.04704\,Hz \qquad [\text{entsprechend der Frequenz im } X-\text{Band}]$$
$$f_0 = 8.429 \cdot 10^9\,Hz$$
$$\cos\gamma \approx 0.5 \quad , \quad \alpha = 269°.94435 \approx -90° \quad , \gamma \approx -60°.0 \quad .$$

Die relative Abweichung der Einweg-Doppler Messung in Bezug auf die Zweiweg-Doppler-Messung beträgt

$$\left|\frac{\delta f - \Delta f}{\Delta f}\right| = 2647.5 \quad . \tag{30.267}$$

Die Orientierungswinkel des Fehler-Ortsvektors werden so gewählt, dass die Ergebnisse in Ausdruck (30.268) bestmöglich mit dem Zahlenwert in (30.267) übereinstimmen. Die Abhängigkeit dieser Winkel ist sehr empfindlich:

$$\varepsilon = 5°.324 \quad , \quad \eta = 4°.0 \qquad .$$

Die berechnete Geschwindigkeit der Raumsonde und die zugehörigen Winkel sind

$$V_0 = 41.1183 \text{ km/s}$$
$$\beta = 93°.16775$$
$$\Delta V \cos\alpha = -0.1673062 \cdot 10^{-5}\ km/s$$
$$\Delta V = 1.722\ m/s$$

Diese Zahlenwerte führen auf die Komponenten des Fehler-Zustandsvektors

$$\Delta x = -214158.930\,\text{km}$$
$$\Delta y = 80577.419\,\text{km}$$
$$\Delta z = 21293.668\,\text{km}$$

mit dem Betrag $\Delta r = 249204.245$ km. Für den Fehler-Geschwindigkeitsvektor ergibt sich

$$\Delta\dot{x} = 0.3057041191\text{D-}03 \text{ km/s}$$
$$\Delta\dot{y} = 0.1655472791\text{D-}03 \text{ km/s}$$
$$\Delta\dot{z} = 0.1687093827\text{D-}02 \text{ km/s} \quad .$$

Die Missweisung beträgt in diesem Fall $\delta = 21''.5$ während des Encounters. Die Raumsonde hat von der Bodenstation die Entfernung

$$\rho = 213532500\,\text{km} \mathrel{\hat{=}} 1.4273556\,\text{AU} \qquad .$$

Mit diesen Zahlenwerten ergeben sich für die Entfernungsvariation ("range-rate") der Raumsonde unter den unterschiedlichen Annahmen die Zahlenwerte.

Berechnete Entfernungsvariation:	$\dot{\rho}_c = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} \cdot \mathbf{q}_1$	$= -2.255134\,\text{km/s}$
Klassische Formel:	$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1$	$= -2.255132\,\text{km/s}$
Modifizierte Formel:	$\dot{\rho}_P = \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1'\right)\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right)$	$= -2.250791\,\text{km/s}$.

Die absoluten Fehler betragen

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_c = 0.163990 \cdot 10^{-5}\ \text{km/s}$$
$$\Delta\dot{\rho}_P := \dot{\rho}_P - \dot{\rho}_c = 0.4342725 \cdot 10^{-2}\ \text{km/s}\ .$$

Somit beträgt die Abweichung der Entfernungsvariation nach der klassischen Theorie von der modifizierten Theorie für die gestörte Bewegung der Raumsonde

$$\Delta^{(2)}\dot{\rho} := \Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho} = 4.341085\ \text{m/s}\ .$$

Die relativen Fehler sind

$$\left|\frac{\Delta\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c}\right| = 7.27 \cdot 10^{-7}\ , \quad \left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c}\right| = 1.925 \cdot 10^{-3}$$

Dies führt schließlich (in analoger Untersuchung wie zu Ausdruck (30.267)) auf

$$\left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\dot{\rho}_P - \dot{\rho}}{\dot{\rho} - \dot{\rho}_c}\right| = 2647.2\quad . \tag{30.268}$$

Kritische Anmerkungen: Die Beobachtungsgenauigkeit während des Vorbeiflugs der Raumsonde am Kometen wurde zu 25% geschätzt[1]. Der Wert $\cos\alpha \approx 0.0$ zeigt für die Beobachtung eine sehr ungünstige Randbedingung. Außerdem muss beachtet werden, dass seit der Begegnung der Raumsonde mit dem Kometen P/Halley 6 Jahre vergangen sind, was zu einer Degradation der Instrument an Bord geführt haben dürfte. Deshalb sind die Messungen beim Encounter mit dem Kometen P/Grigg-Skjellerup sicherlich mit einer wesentlich höheren Unsicherheit behaftet als bei der Begegnung mit dem Kometen P/Halley. Daher muss akzeptiert werden, dass die Näherungen in den Formeln (30.251), (30.253) und (30.256) für die Auswertung der Daten in diesem Zusammenhang benutzt werden müssen. Der Zahlenwert in Ausdruck (30.267) beruht unmittelbar auf den direkten Beobachtungen. Dagegen ist der Ausdruck (30.268) eine Folgerung aus den Annahmen der modifizierten Theorie und den darauf beruhenden Berechnungen. Würde die klassische Theorie angewendet, würde der Wert in (30.268) notwendig verschwinden.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse in den Ausdrücken (30.267), basierend auf den Beobachtungen, und in (30.268), basierend auf Berechnungen, bestätigt die modifizierte Ein-Weg-*Doppler* Theorie nicht nur in quantitativer sondern auch in qualitativer Hinsicht. Die Ergebnisse, die in den letzten beiden Abschnitten vorgestellt werden, zeigen, dass trotz aller geometrischen und technischen Benachteiligungen, die beobachteten Daten als Folge einer (physikalisch) unbekannten Änderung im Zustand des Raumflugkörpers interpretiert werden **können**. Die beeindruckende Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Daten wurden im Fall der Begegnung des GIOTTO mit P/Halley wie mit P/Grigg-Skjellerup durch Anpassung der Richtungswinkel ε and η des Fehler-Ortsvektors erhalten.[2]

[1] PÄTZOLD, M, et al. [1993]

[2] Weitere Untersuchungen und Beispiele zu dem in Abschnitt 30.10 behandelten Problemkreis finden sich in der Veröffentlichung E. F. JOCHIM [2009] sowie in der technischen Note E. F. JOCHIM [2008]

30.10.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen in Abschnitt 30.10

- Eine auch noch so kleine Missweisung der Beobachtungsantenne darf bei Einweg Doppler Messungen grundsätzlich nicht vernachlässigt werden.
- Eine fehlerhafte Ausrichtung und Eigenbewegung der beobachtenden Bodenantenne muss durch eine doppelte Projektion (entsprechend Formel (30.221) auf Seite 740) berechnet werden.
- Der Bezug der doppelten Projektion liegt im Referenzpunkt der beobachtenden Antenne.
- Der Einfluss der doppelten Projektion im Fall des Zweiweg-Dopplers kann bei kleinen Missweisungen der beobachtenden Antenne vernachlässigt werden (*Porsche* (1999)).
- Die Auswirkungen einer auch noch so geringfügigen fehlerhaften Ausrichtung und Eigenbewegung des Beobachtungsgerätes (Bodenantenne) auf die Bestimmung der radialen Geschwindigkeit aus einer Einweg Dopplermessung insbesondere bei Objekten, für deren Beobachtung kein Zweiweg-Doppler zur Verfügung steht (etwa stellaren Objekten), darf auf keinen Fall vernachlässigt werden.
- Beim Zweiweg Doppler kann bei kleinen Zeitdifferenzen und insbesondere bei der Beobachtung von nahen Erdsatelliten die Eigenbewegung des Beobachters näherungsweise eliminiert werden (Formeln (30.255) und (30.256)).

30.11 Bewegung eines Planetenorbiters

Bei der Untersuchung der Bewegung eines künstlichen Satelliten um einen Planeten hat es sich eingebürgert, diese als Planeten*orbiter* im Gegensatz zu Erd*satelliten* zu bezeichnen. Diese Definition ist nicht zwingend, aber charakterisierend, wenn der Unterschied zu Erdsatelliten betont werden soll.

30.11.1 Die Bewegungsparameter eines Planetenorbiters

Die Untersuchung der Bewegung eines Planetenorbiters wird analog wie die Bewegung eines Erdsatelliten auf die Äquatorebene des Planeten bezogen. Entsprechend wird die Bewegung des Planetenorbiters in einem planetozentrischen äquatorialen Koordinatensystem mathematisch beschrieben. Bevorzugt wird dazu das auf den IAU-Vektor (gerichtet zum aufsteigenden Knoten des Planetenäquators bezüglich des Erdäquators) bezogene Planetenäquatorsystem benutzt, das in Abschnitt 29.4 auf Seite 626 vorgestellt wird. Der Vorteil in der Verwendung dieses Systems liegt darin, dass die Rotation des Planeten im astronomischen IAU 1976 System[1] ebenfalls auf diesen Vektor bezogen ist, so dass der Bezug der Bewegung eines Planetenorbiters zur Planetenoberfläche in einfacher Weise hergestellt werden kann. Entsprechend erfolgt die Umrechnung eines Zustandsvektors in diesem System auf Bahnparameter mit den in Abschnitt 11.1.1 (Band III) zusammengestellten Formeln. Dabei muss der Bezug auf den Ursprung des Planetenäquatorsystems, üblicherweise also auf den IAU-Vektor, betont werden. Dies ist anstelle des Bezugs auf den Frühlingspunkt wie bei Erdsatelliten. Werden die *Kepler*elemente verwendet, zeigt sich dieser Bezug daher ausschließlich in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, die also auf den IAU-Vektor bezogen ist.

[1] siehe etwa in AA 1984 [1983], p. S28–S33

Alternativ zum IAU-System wird gelegentlich auch (etwa in der russischen Raumfahrt) ein System benutzt, das auf den Schnittpunkt des Planetenäquators mit der Bahn des Planeten um die Sonne bezogen ist (die Formeln sind in Abschnitt 30.4.1.3 auf Seite 697 zusammengestellt). Auf dieses System wird im Rahmen dieses Kapitels nicht weiter eingegangen.

Die Integration der Bewegung eines Planetenorbiters erfolgt in dem auf den IAU-Vektor bezogenen Planetenäquatorsystem in gleicher Weise wie sie auch für Erdsatellitenbahnen durchgeführt wird. Das verwendete Bahnmodell ist planetenspezifisch und hängt von den Genauigkeitsanforderungen ab.

Ein Planetenorbiter um einen Planeten mit der planetozentrischen Gravitationskonstante[1] $\mu_P \left[km^3 / s^2 \right]$ hat die (planetozentrische) Bewegungsgleichung entsprechend der allgemeinen Darstellungen[2] (17.1) und (17.2)

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \, \mathbf{r}_0 + b_T \, \mathbf{q}_0 + b_N \mathbf{c}_0 = -\mu_P \frac{\mathbf{r}}{r_P^3} + \mathbf{R}_2 \quad . \tag{30.269}$$

Der dominierende („Stör“-) Einfluss auf die Bahn eines Planetenorbiters dürfte normalerweise die *Kepler*sche Beschleunigung $b_K = -\mu_P \, \mathbf{r} / r^3$ sein. $\mathbf{R}_2$ fasst dann alle „Rest“-Beschleunigungen zusammen, welche das Zweikörperproblem Orbiter-Planet „stören“. Damit kann auch die Bewegung eines Planetenorbiters mit den in Abschnitt 17 vorgestellten Formelsystemen bearbeitet werden

In speziellen Fällen etwa bei Bewegung einer Raumsonde um einen Kometen können andere Effekte die *Kepler*bewegung dominieren. Um einen Orbiter in einer Umlaufbahn um einen solchen Körper zu ermöglichen, kann es sein, dass nur künstlich erzeugte Bewegungseinflüsse eine solche Bahn ermöglichen (Beispiel: ROSETTA).

BEISPIEL 1: Für die Einschussbahn des europäischen Marsorbiters MARS-EXPRESS in eine erste Marsumlaufbahn seien die in Tabelle 30-6 zusammengestellten Bahnparameter angenommen.

Es wird verlangt, dass die Einschussbahn vollständig von der Erde aus beobachtet werden kann. Dazu wird für den Moment der Epoche der subterrestrische Punkt auf der Marsoberfläche benötigt und damit die Bahn des Orbiters „inertial“ festgehalten während sich der Mars unter der Bahn weiterdreht. Zum Zeitpunkt der Epoche lauten die planetographischen Koordinaten des subterrestrischen Punktes (entnommen dem astronomischen Jahrbuch von 1996):

$$\lambda_{P\leftmoon^{\pm}} = 54°.300 \;,\; \varphi_{P\leftmoon^{\pm}} = -20°.954 \quad .$$

Das Argument W_0 des Nullmeridians kann dem astronomischen Jahrbuch entnommen werden, ebenso die Rotation $\dot{W}$ des Planeten[3]. Im Moment t_A der Beobachtung von der Erde aus, d.h. unter Berücksichtigung der Lichtzeit τ (nach Formel (30.150)), hat das Argument des Nullmeridians den Betrag $W = 224°.503$. Dieser Wert ist auf Erd- bzw. Marsmittelpunkt bezogen, die Parallaxen

[1] Die Zahlenwerte sind in Anhang E.7 (Band V) wiedergegeben

[2] nach Kapitel 17, Band III

[3] Beispiel: für 2004, Januar, 0 /0h TT können dem Jahrbuch für 2014 folgende Werte für den Planeten Mars entnommen werden: $W_0 = 23°.50$, $\dot{W} = 350°.8919993 / \text{day}$. Nähere Erklärungen und Formeln sind im jeweiligen astronomischen Jahrbuch zu finden. Siehe auch SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], Table 15.7, Planets: Rotational Data, p. 705, hier Bezug der Daten auf 2000, Januar, 1.5 TDB

zwischen Erdmittpunkt und Beobachter auf der Erde sowie zwischen Marsmittelpunkt und dem subterrestrischen Punkt auf der Marsoberfläche sind somit vernachlässigt.

Mit Formel (30.133) (auf Seite 704) ergeben sich im auf den Frühlingspunkt bezogenen Erdäquatorsystem aus Formel (30.134) die planetozentrische Rektaszension $\alpha_{P\mathrm{♂}}$ und mit (30.141) die zugehörige Deklination $\delta_{P\mathrm{♂}}$

$$\alpha_{P\mathrm{♂}} = 170°.203 \quad , \quad \delta_{P\mathrm{♂}} = -20°.954 \ .$$

Würde die Lichtzeit nicht berücksichtigt, hätte das Argument des Nullmeridians den Wert $W' = 229°.334$. Ein Zeitfehler wirkt sich also erheblich aus. Selbst eine Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen terrestrischer Weltzeit (U.T.1) und baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) würde bei der Berechnung der Marsrotation einen Fehler von etwa $0°.5$ zur Folge haben.

Große Bahnhalbachse	a = 14531.834 km
Exzentrizität	e = 0.745871
Inklination (bezogen auf Marsäquator)	i = 100°.1
Rektaszension des aufsteigenden Knotens (bezogen auf Marsäquator und IAU-Vektor)	Ω = 359°.958
Argument des Perimartiums	ω = 155°.772
Mittlere Anomalie	M_0 = 0°.000
Epoche	t_A = 1996–05–01 / 18:00:00.0 (TDB)

Tabelle 30-6: Bahnparameter eines Mars-Orbiters (aus Projekt MARS-EXPRESS)

Bild 30-34 zeigt die Projektion eines Marsorbiters auf die Marsoberfläche gesehen von der Erde aus, die wahre Bahn sowie den subterrestrischen Punkt. Im Bild sind die Apsiden markiert

Apomartium H_A = 21973.508 km

Perimartium H_P = 295.760 km .

Die physischen Daten des Mars, welche die Bahn des Orbiters beeinflussen, Mars-zentrierte Gravitationskonstante, mittlerer Äquatorradius, Abplattung, dynamischen Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4, sind Anhang E7 (Band V) entnommen. Weitere Bewegungseinflüsse wie Luftwiderstand, Solarstrahlung, Attraktion durch Jupiter und andere Planeten sind hier vernachlässigt. ◄

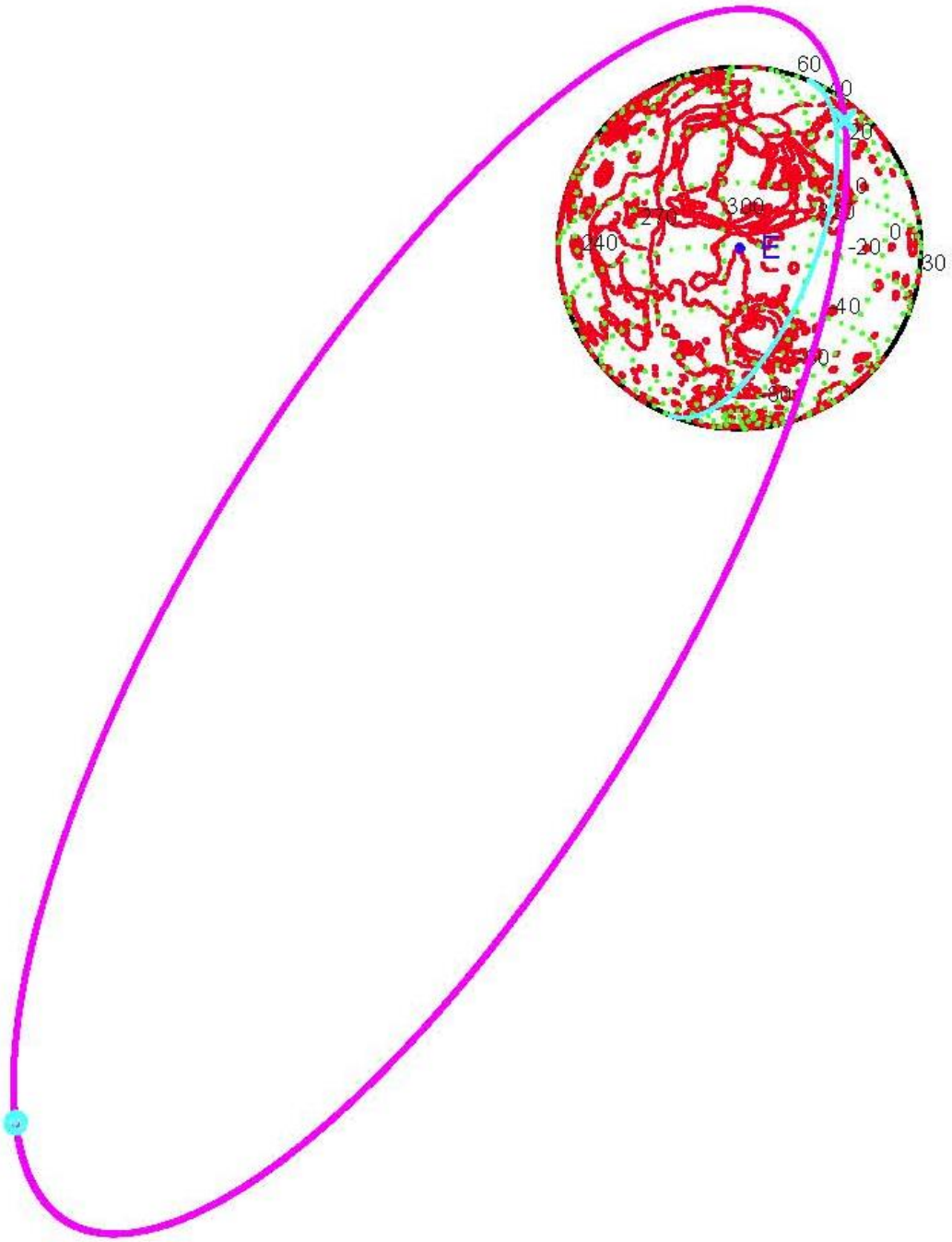


Bild 30-34: Einschussbahn eines Marsorbiters (MARS-EXPRESS) in eine hochexzentrische Marsumlaufbahn, die vollständig von der Erde aus eingesehen werden kann. Der subterrestrische Punkt ist auf der Marsoberfläche durch „E“ gekennzeichnet[1]. Die Subsatellitenbahn sowie das Perimartium und das Apomartium sind durch hellblaue Punkte gekennzeichnet

[1] Daten der Marsoberfläche von *G. Balmino* (Feb. 1994)

BEISPIEL 2: Tabelle 30-7 dient dem Vergleich der Bahnparameter eines Erdsatelliten mit denen eines Marsorbiters. Beide Bahnen haben dieselben Einschusselemente Perizentrums- und Apozentrumshöhe sowie die geographische Länge des ersten absteigenden Knotens. Berechnet werden jeweils die *Kepler*elemente sowie die säkularen Variationen von Rektaszension des aufsteigenden Knotens, des Argumentes des Perizentrums sowie der mittleren Epocheanomalie. Die Unterschiede sind eine Folge der unterschiedlichen Körperdaten (mittlerer Äquatorradius und planetozentrische Gravitationskonstante) sowie der dynamischen Potentialkoeffizienten (J_2, J_4). In Ergänzung zu diesen Berechnungen zeigt Bild 30-35 den Verlauf der Rektaszension des aufsteigenden Knotens einiger Marsorbiter mit der obigen Bahnform und für einige Inklinationen des Marsorbiters bezüglich des Mars-Äquators.

Bahnparameter	Erde	Mars
Apozentrumshöhe	H_A = 18000 km	H_A = 18000 km
Perizentrumshöhe	H_P = 250 km	H_P = 250 km
Planetographische Länge des ersten absteigenden Knotens	$\lambda_{ab} = 0°$	$\lambda_{ab} = 0°$
Mittlerer Äquatorradius	$R_E = 6378.140\,\text{km}$	$R_E = 3397.2\,\text{km}$
Planetozentrische Gravitationskonstante	$\mu_{\oplus} = 398600.5\,\text{km}^3/\text{s}^2$	$\mu_{\mathcal{O}^{\prime}} = 4282.28596\,\text{km}^3/\text{s}^2$
Erster Potentialkoeffizient	$J_2 = 0.00108263$	$J_2 = 0.001964$
Große Bahnhalbachse	a = 15503.137 km	a = 12522.515 km
Exzentrizität	e = 0.57246479	e = 0.70872345
Inklination	i = 75°	i = 75°
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω = 280°.41441656	Ω =337°.08716784
Argument des Perizentrums	ω = 180°	ω = 180°
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 0°	M_0 = 0°
Epoche	t_0: 1994-01-01/00:00:0.00	t_0: 1994-01-01/00:00:0.00
Säkulare Variation des Knotens	$\dot{\Omega}_s = -0.51404799\times10^{-7}/\text{sec}$	$\dot{\Omega}_s = -0.33189876\times10^{-7}/\text{sec}$
Säkulare Var. des Perizentrums	$\dot{\omega}_s = -0.66117951\times10^{-7}/\text{sec}$	$\dot{\omega}_s = -0.42888412\times10^{-7}/\text{sec}$
Säkulare Variation der Epocheanomalie	$(M_0)^{\cdot}_s = -0.65140674\times10^{-7}/\text{sec}$	$(M_0)^{\cdot}_s = -0.36400573\times10^{-7}/\text{sec}$

Tabelle 30-7: Vergleich der Bahnelemente eines Erdsatelliten mit denen eines Marsorbiters unter Voraussetzung derselben Einschussbahnelemente[1].

[1] Physikalische Daten des Mars (im Vergleich zur Erde) in Abschnitt E.7 (Band V)

➢ Folgende weitere Beispiele für das Rechnen mit einem Marsorbiter sind in Band V zu finden:

BEISPIEL 3: Der Verlauf der wahren Bahnhöhe eines Marsorbiters über der als Rotationsellipsoid angenommen Marsoberfläche unter Einfluss der dynamischen Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4 ist in Abschnitt 38.4.1 (Band V) an einem Beispiel dargestellt (Bild 38-19). ◄

BEISPIEL 4: Das Überdeckungsband einer hochexzentrischen Marsorbiterbahn zur Beobachtung mit einer optischen Kamera (HRSC auf Mars Express) ist in Abschnitt 38.4.3 (Band V) dargestellt (Bild 38-23). ◄

BEISPIEL 5: In Bild 38-25 ist das Geschwindigkeitsverhalten des Endpunktes eines scannenden optischen Sensors auf einem Mars Orbiter für verschiedene Sensorgeometrien dargestellt (Abschnitt 38.4.5, Band V). ◄

Anmerkung: Eine systematische Zusammenstellung von Mars Orbiter Parametern findet sich in WERTZ, JAMES R. [2001], Table F-2, pp. 880-885 ◄

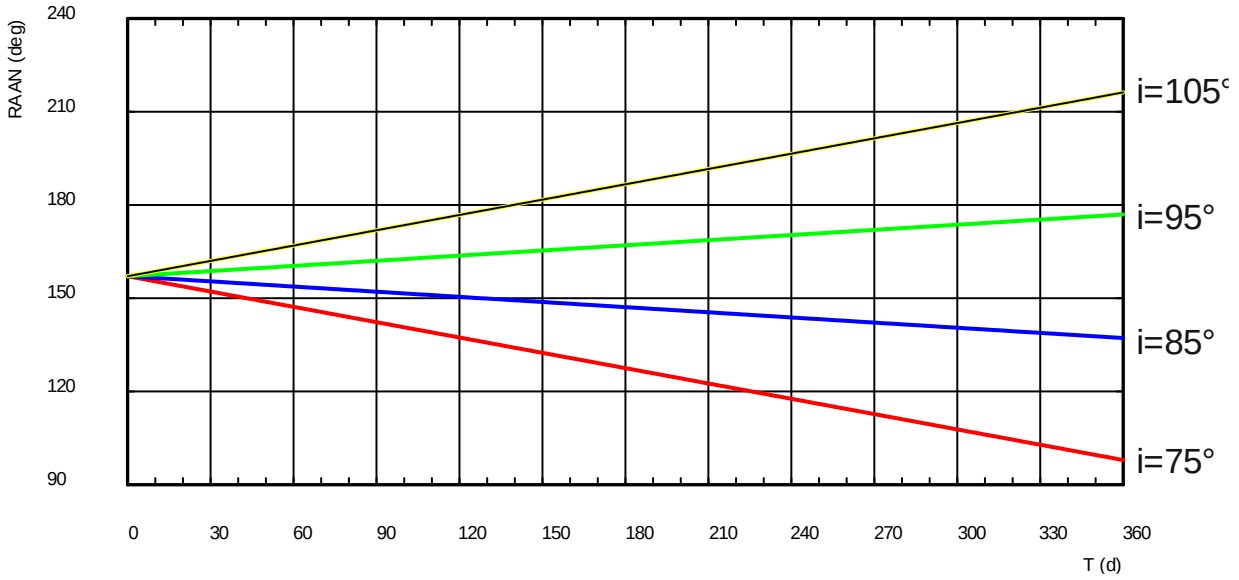


Bild 30-35: Die säkulare Änderung der äquatorialen Länge (Rektaszension) des aufsteigenden Knotens einiger Marsorbiter für verschiedene Inklinationen über ein Jahr (Bahn H_P=250 km, H_A=18000 km)

30.11.2 Sonnensynchrone Bewegung eines Planetenorbiters

Sonnensynchrone Orbiterbahnen sind, ähnlich wie die entsprechenden Bahnen von Erdsatelliten, von Interesse für die Fernerkundung von Planetenoberflächen unter möglichst gleichbleibenden Beleuchtungsverhältnissen. Die Definition der sonnensynchronen Bahnen wird auf den (mittleren) Planetenäquator bezogen. Dazu wird die mittlere Bewegung der Bahnebene längs des Planetenäquators, gegeben durch die säkulare Drift $\dot{\Omega}_s$ des aufsteigenden Knotens bezüglich des Planetenäquators, wie schon im Fall von sonnensynchronen Erdsatellitenbahnen in Relation gesetzt zur tropischen Bewegung $n_\odot$ einer mittleren fiktiven Sonne. Diese wird wie im Fall der Erde durch Reduktion der wahren Sonne auf den Planetenäquator und durch Mittelung (mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung) erhalten. Diese mittlere Sonnenbewegung wird im Fall von Planetenorbitern näherungsweise aus der siderischen mittleren Bewegung des Umlaufs eines Planeten um die Sonne erhalten (der Fehler wird im Rahmen einer Orbiteranalyse üblicherweise vernachlässigt).

Mit Hilfe der Bedingung

$$\dot{\Omega}_s = n_\odot \tag{30.270}$$

kann eine sonnensynchrone Bahn konstruiert werden. Die säkulare Variation $\dot{\Omega}_s$ ist eine Funktion der mittleren Bahnelemente des Orbiters sowie der physikalischen Einflüsse („Störungen“) auf die Bahn. Im Fall des Mars ist wie bei der Erde die Abplattung des Mars, im Wesentlichen repräsentiert durch den ersten zonalen Potentialkoeffizienten J_2, wie aus Formel[1] (20.15) ersichtlich, die Hauptursache für die Drift des Knotens. Aus Formel[2] (23.228) folgt dann

$$n_\odot = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu_P}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{30.271}$$

Da die mittlere tropische Bewegung $n_\odot$ des Planeten um die Sonne für alle Planeten eine positive Größe ist (siehe Tabelle 30-8 auf Seite 760) können sich auch Planetenorbiter nur dann auf einer sonnensynchronen Bahn bewegen, wenn die Bahn bezogen auf den Planeten rückläufig verläuft. Die Bahninklination bezogen auf den Planetenäquator muss also größer als 90° sein.

Im Folgenden (Bild 30-36 - Bild 30-40) wird für alle Planeten untersucht, ob es sonnensynchrone Orbiterbahnen geben kann und wenn, um was für Bahnen es sich handelt. Dazu werden die Bahnparameter große Halbachse, Exzentrizität und Inklination mit Hilfe der Bedingungsgleichung (30.271) variiert. Im Fall von Sonnensynchronität haben diese drei Parameter für jede Bahn genau eine charakteristische Relation. Kriterien für die Auswahl sind: die Bahnen dürfen eine Mindesthöhe (Perizentrumshöhe) nicht unterschreiten. Die benötigten physikalischen Parameter sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt.

Zusammenfassung der Ergebnisse:

1. Um Merkur und Venus können sich Orbiter nicht auf sonnensynchronen Bahnen bewegen (sonnensynchrone Bahnen würden im Inneren dieser Planeten verlaufen). Werden um diese Planeten sonnensynchrone Bahnen benötigt, müssen diese durch andere Bahneinflüsse erzeugt werden. Eine in der Literatur ausführlich diskutierte Möglichkeit nutzt den Einsatz eines Sonnenseglers[3].

2. Mars hat, obwohl kleiner als die Erde, ein ähnliches Verhalten sonnensynchroner Bahnen wie sonnensynchrone Erdsatellitenbahnen. Im Gegensatz zur Erde sind sogar noch Bahnen mit größerer Exzentrizität möglich. Die Grenzexzentrizität kann nicht überschritten werden. Alle sonnensynchronen Bahnen um Mars sind somit wie die um die Erde stabil an den Planeten gekoppelt.

[1] Band III

[2] Abschnitt 23.5.1

[3] LEIPOLD, M. [2000], pp. 76-86

Planet	Siderische Umlaufzeit P_{sid}	Mittlere siderische Bewegung des Planeten um die Sonne $n_{\odot}$ [rad / sec]
Merkur	87.968435728 d	8.26683482×10^{-7}
Venus	224.695433692 d	3.23647219×10^{-7}
Erde	365.17190955 d	1.99106385×10^{-7}
Mars	686.929711912 d	1.05865348×10^{-7}
1 Ceres	1679.89633786 d	4.32896075×10^{-8}
Jupiter	4330.59576356 d	1.67926208×10^{-8}
Saturn	10746.9404426 d	6.76676877×10^{-9}
Uranus	30588.7403410 d	2.37741317×10^{-9}
Neptun	59799.9004436 d	1.21608967×10^{-9}
Pluto	90589.5972 d	8.0276379×10^{-10}

Tabelle 30-8: Die mittleren siderischen Bewegungen der Planeten[1] um die Sonne und die (tropische) Rotation[2] der Planeten um ihre Rotationsachse, Daten zur Epoche J2000.0

Planet	Bezugsperizentrum	Maximale Bahnhalbachse	Maximale Exzentrizität
Merkur	100 km	keine sonnensynchrone Bahn	
Venus	200 km		
Erde	200 km	a = 15579.81 km	e =0.5777113
Erdmond	10 km	a = 1954.594	e = 0.106004
Mars	100 km	a = 14550.30 km	e = 0.7664986
Jupiter	200 km	(bis zu hyperbolischer Bahn) Entweichbahn	
Saturn	200 km		
Uranus	200 km		
Neptun	200 km		

Tabelle 30-9: Grenzexzentrizität und Grenzhalbachse für sonnensynchrone Planetenorbiter

[1] Kopie aus SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 704-705, Table 15.6 und Table 15.7; 1 Ceres aus T. GEHRELS [1979]

[2] die aber zur Berechnung sonnensynchroner Bahnen nicht benötigt wird

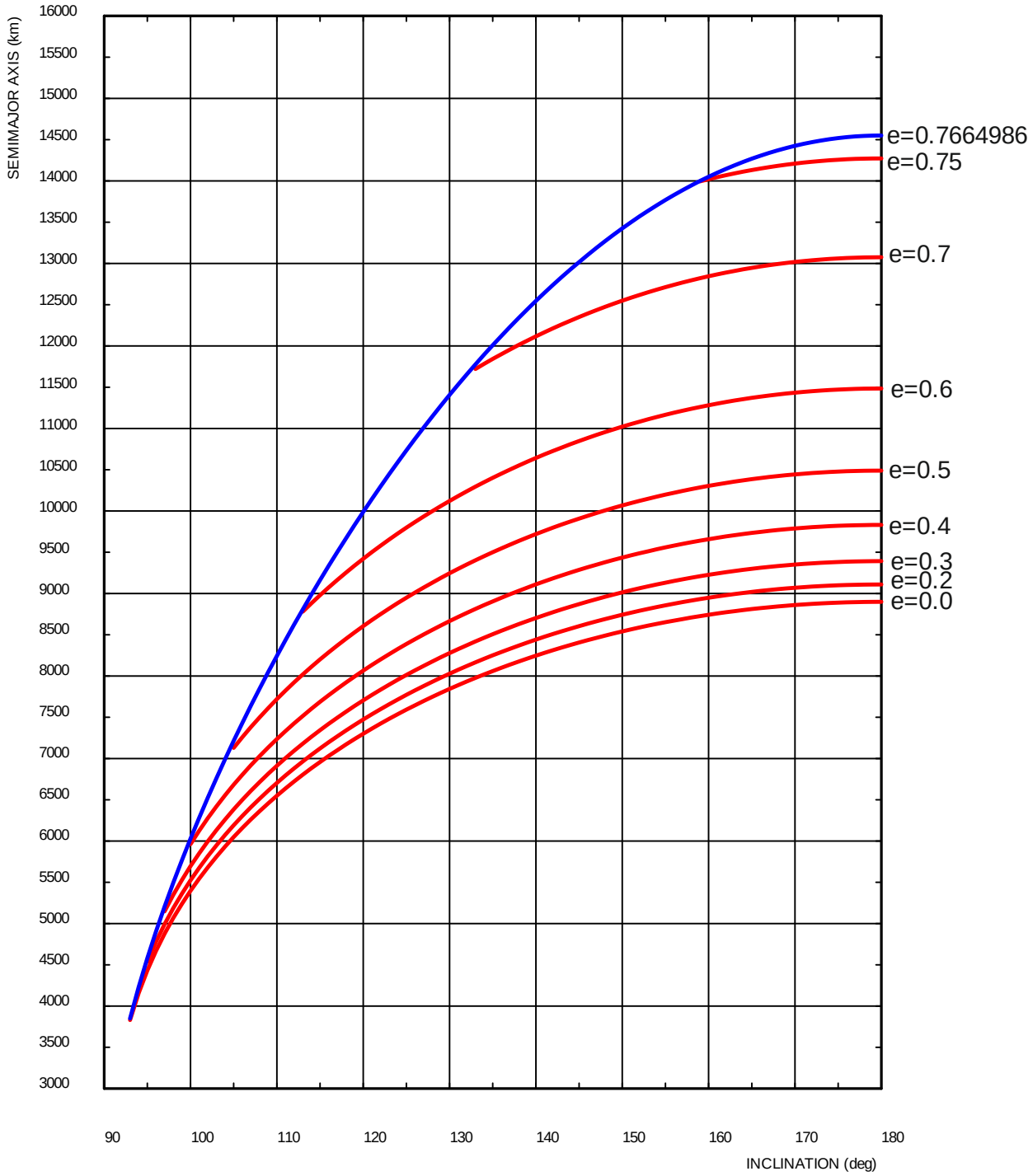


Bild 30-36: Die sonnensynchronen Bahnen eines Mars-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Perimartiumhöhe $H_p = 100\,\text{km}$

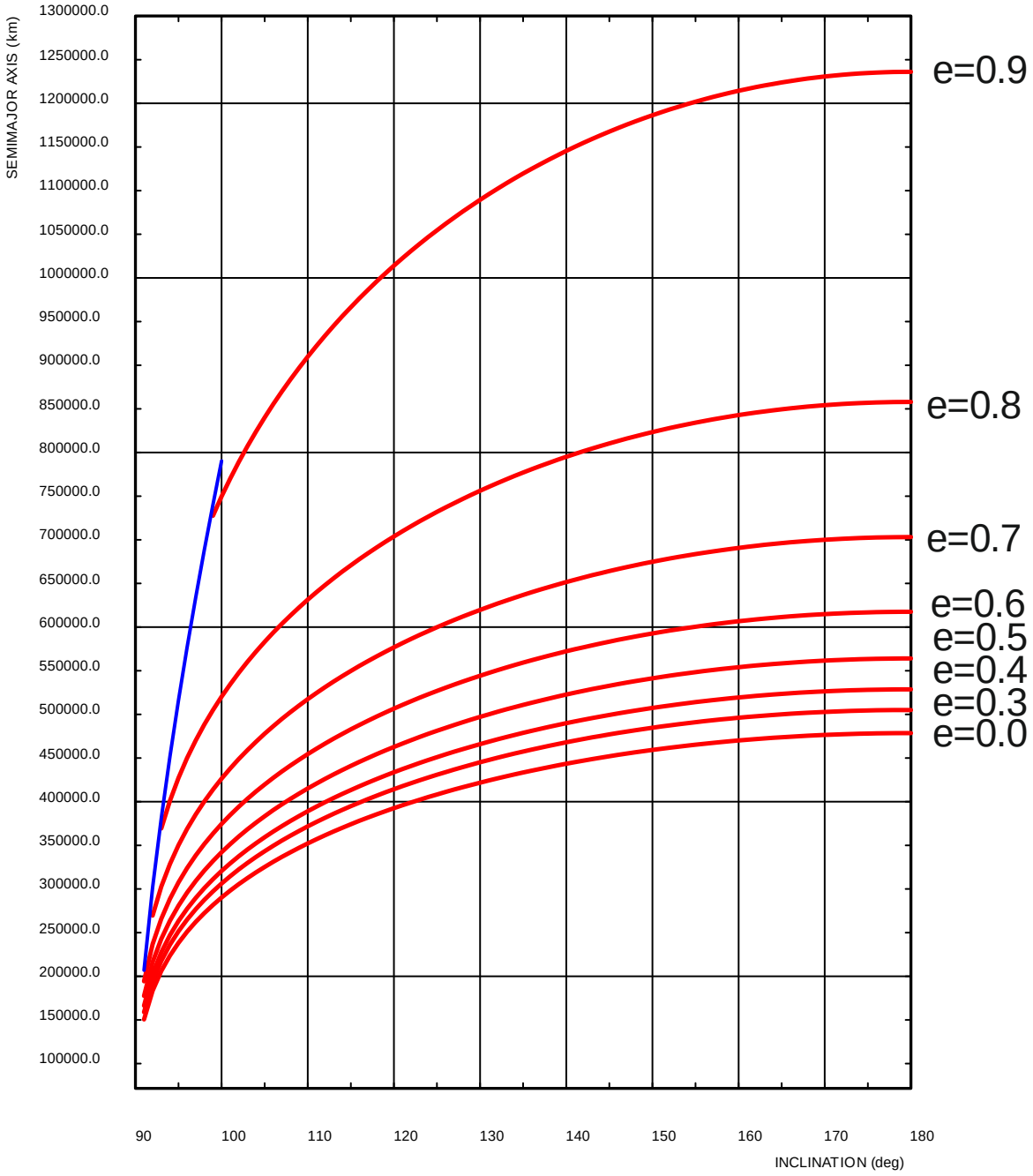


Bild 30-37: Die sonnensynchronen Bahnen eines Jupiter-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perijoviumhöhe $H_p = 200\,\mathrm{km}$.

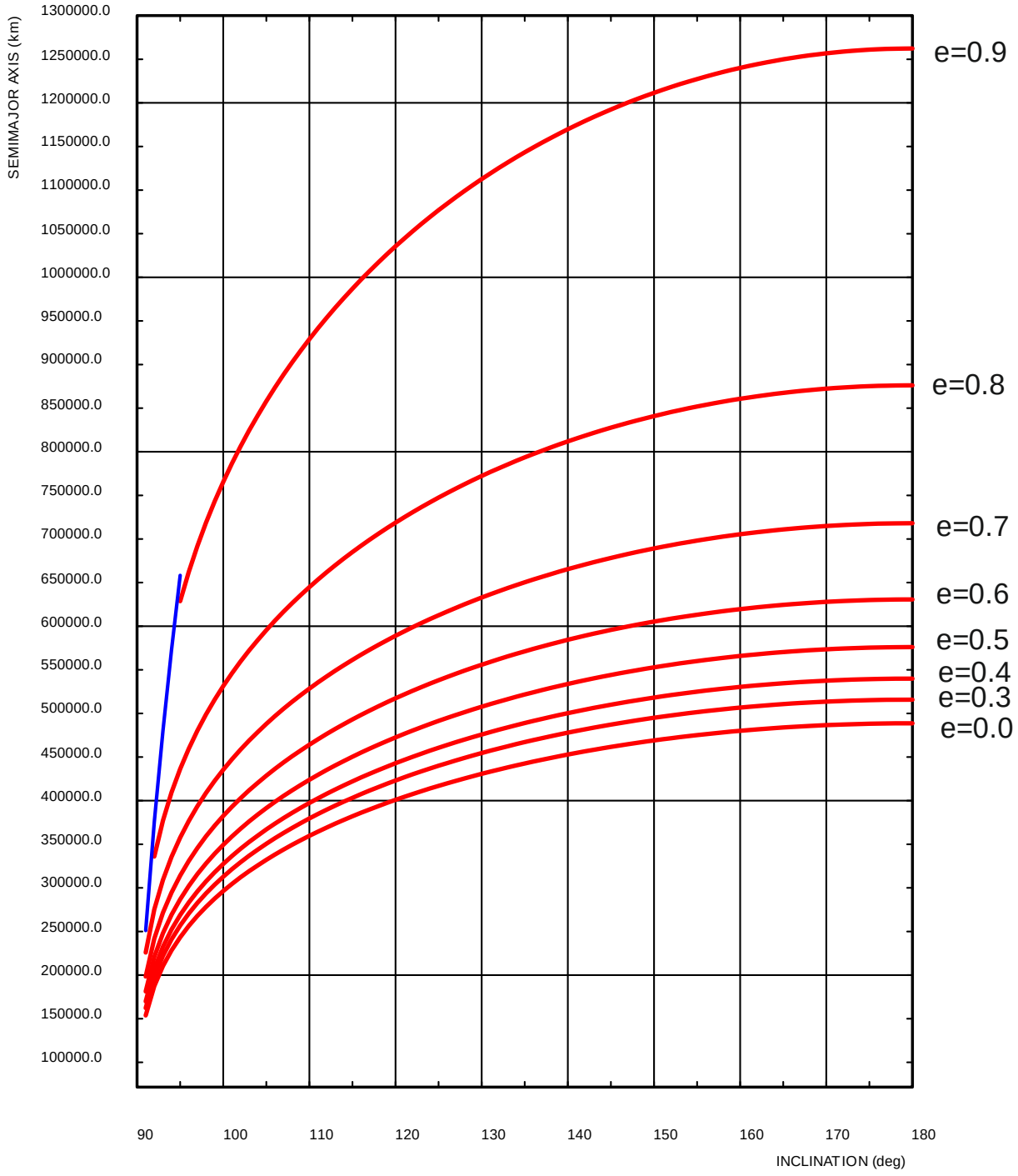


Bild 30-38: Die sonnensynchronen Bahnen eines Saturn-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\text{km}$

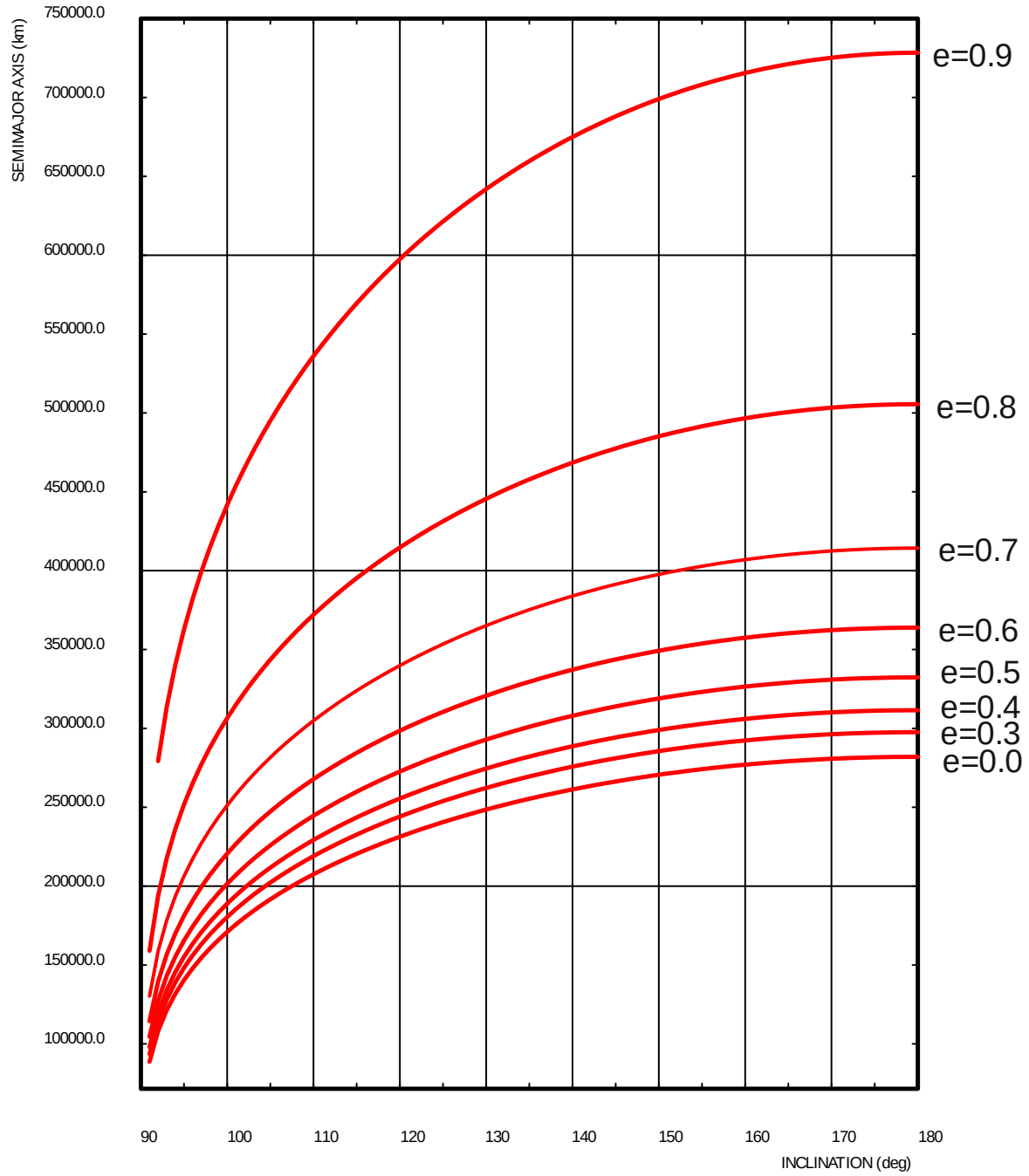


Bild 30-39: Die sonnensynchronen Bahnen eines Uranus-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten.

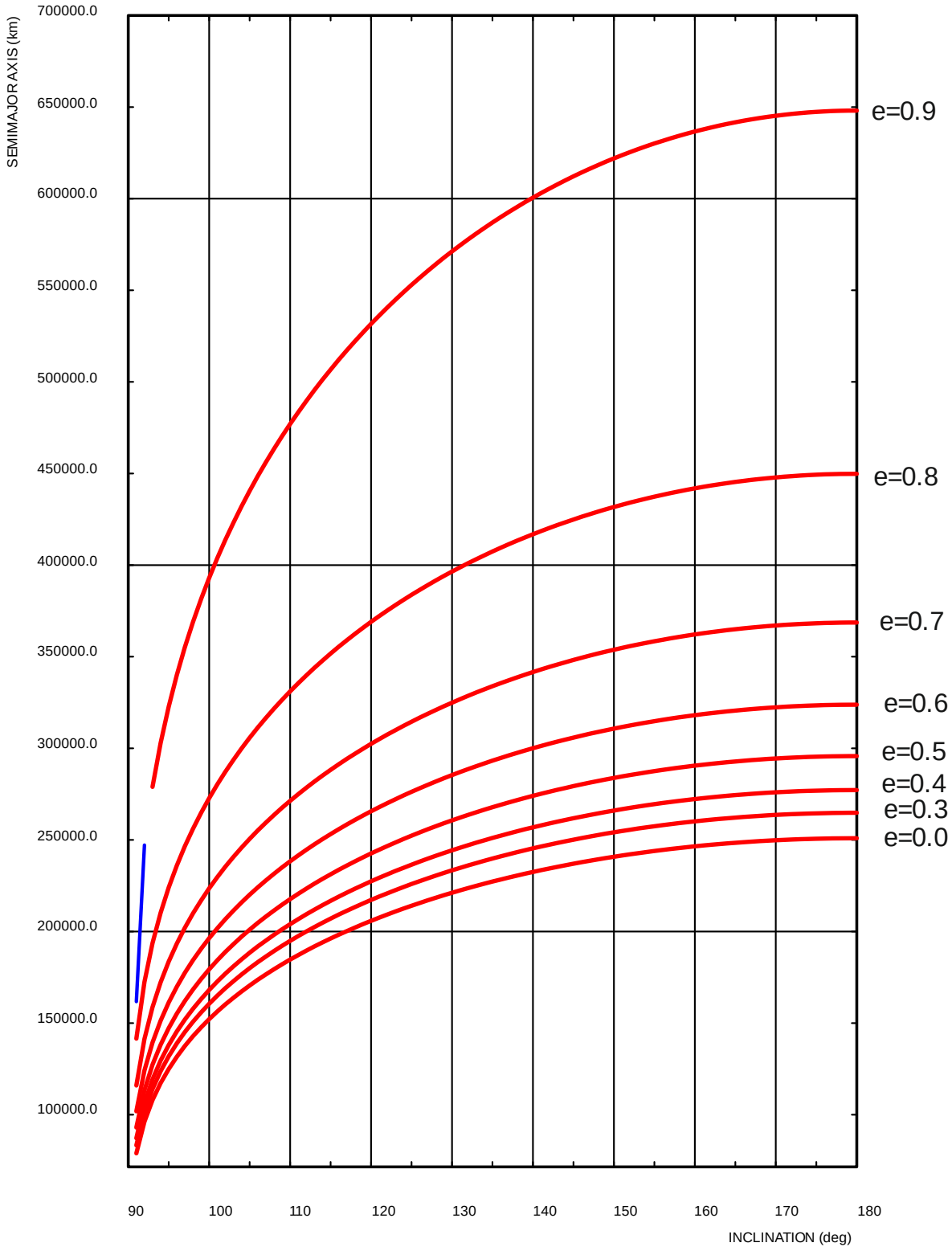


Bild 30-40: Die sonnensynchronen Bahnen eines Neptun-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$

3. Die vier Gasplaneten erlauben wegen ihrer großen Abplattung und damit großen Potentialkoeffizienten J_2 in allen Bahnhöhen sonnensynchrone Orbiterbahnen. Hohe sonnensynchrone Bahnen können aus dem Umlauf um den Planeten herausgeschleudert werden.
4. Da alle Planeten sich rechtläufig um die Sonne bewegen, können nur rückläufige Bahnen sonnensynchron sein. Würde dagegen ein Planet sich rückläufig um die Sonne bewegen $(n_\odot < 0)$, würden um diesen Planeten sonnensynchrone Bahnen (wenn möglich) rechtläufig sein.
5. Die hier untersuchten sonnensynchronen Bahnen können nur als Näherungsbahnen akzeptiert werden, da nur der Potentialkoeffizient J_2 berücksichtigt wurde. Andererseits kann infolge der unterschiedlichen Neigungen des Planetenäquators zur Ekliptik als Bezugsebene im Sonnensystem sowie der unterschiedlichen Exzentrizitäten der Planetenbahnen um die Sonne die Abweichung zwischen fiktiver mittlerer Sonne und wahrer Sonne beträchtlich sein. Dies schränkt die Bedeutung der Sonnensynchronität ein und macht detaillierte Untersuchungen entsprechender Bahnen nicht überflüssig. Die Bahnen hoher Exzentrizität um die Gasplaneten sind nur von theoretischem Interesse. Man muss davon ausgehen, dass diese Bahnen instabil werden, infolge von Bahnstörungen durch die Gravitation anderer Planeten und anderer physikalischer Einflüsse. Im Einzelnen sind hierzu weitere Untersuchungen nötig, die nicht Bestandteil der vorliegenden Studien sein sollen.

30.12 Ergänzende Literatur zu Mars-Orbitern

Nach dem Mond ist der Mars das bevorzugte Ziel interplanetarer Missionen. Aus diesem Grund ist die Literatur zu Marsmissionen, zu Mars-Orbitern und zu Mars-Landemissionen unübersichtlich. Hier soll ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit auf einige Arbeiten zu Mars-Orbitern verwiesen werden:

BERNARD, JACQUES; DELOBETTE, DAMIEN; DUFOUR, C.; BONNEAU F.; CHAFFAUT, F. X. [1994]: 'Mission and System Design for a Martian Spatial Segment', AAS Spaceflight Dynamics Symposium, May. 21-28, 1994

DESAI, PRASUN N., BRAUN, ROBERT D. [1990]: 'Mars Parking Orbit Selection', AIAA 90-2890-CP

ESPOSITO, P. B., DEMCAK, S. N. [1989]: 'Atmospheric Drag Perturbations on the Mars Observer Orbiter', AAS 89-405

ESPOSITO, P. B., DEMCAK, S. N., SANTEE, M. L. [1986]: 'Mars Observer Orbital Accuracy Analysis ', AIAA/AAS Astrodynamics Conference, August 18-20, 1986, Williamsburg, Virgina, AIAA 86-2057

GILL, E. [1994]: 'Force Modeling for the Mars-95 Orbiter', AAS Space Flight Dynamics Symposium, May 21-28, 1994

GLICKMAN, R. E., STUART, J. R. [1981]: 'Low Cost Transfer into Useful Sun-Synchronous Orbits at Mars', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, August 3-5, 1981, Lake Tahoe, Nevada, AAS 81-136

HALSELL, C. ALLEN [1989]: 'Maneuver Analysis for the Mars Observer Mission', AIAA 89-472

KONOPLIV, ALEX; WOOD, LINCOLN J. [1990]: 'High Accuracy Mars Approach Navigation with Radio Metric and Optical Data', AIAA 90-2907-CP

LEMOINE, FRANK G.; ROSBOROUGH, GEORGE W. [1990]: 'Modelling Issues in Precision Orbit Determination for Mars Orbiters', AIAA 90-2953-CP

MCKINLEY, E. L.; BEERER, J. G. [1990]: 'Mars Observer, Planetary Constants and Models', JPL D-3444, November 1990

PERNICKA, HENRY J.; SWEETSER, THEODORE H.; AND RONCOLI, RALPH B. [1993]: 'A Strategy to Rotate the Mars Observer Orbit Node Line to Advance the Mapping Schedule', Paper AAS 93-150, AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Feb. 22-24, 1993, Pasadena, Ca.

UPHOFF, C. [1984]: 'Orbit Selection for a Mars Geoscience / Climatology Orbiter', *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting*, Jan. 9-12, 1984, Reno, Nevada, AIAA 84-0318

31 Synodische Bewegung zweier Satelliten

Das wechselseitige Bewegungsverhalten mehrerer Satelliten spielt in den Anwendungen der Satellitenbahnanalyse eine große Rolle, etwa bei der Kommunikation mit einem tieffliegenden Satelliten (z.B. dem Space Shuttle) über einen hochfliegenden Relay-Satelliten, der Bahnvermessung eines Satelliten mit Hilfe von Satelliten eines Positionsvermessungssystems (etwa den Satelliten des „Global Positioning Systems“ GPS), der interferometrischen Beobachtung von zwei Satelliten aus, beim Andocken eines Satelliten an einen anderen Satelliten (z.B. an eine Raumstation), der gleichzeitigen Beobachtung ein und desselben Gebietes von zwei Satelliten mit unterschiedlichen Sensoren, usw.. Dazu werden in diesem Kapitel zunächst Sichtbarkeitsbedingungen untersucht, anschließend die synodische Bewegung zweier koplanarer Satelliten behandelt, anschließend Bedingungen für die Untersuchungen der synodischen Bewegung von Satelliten auf beliebigen Bahnen hergeleitet.

31.1 Sicht Satellit-Satellit

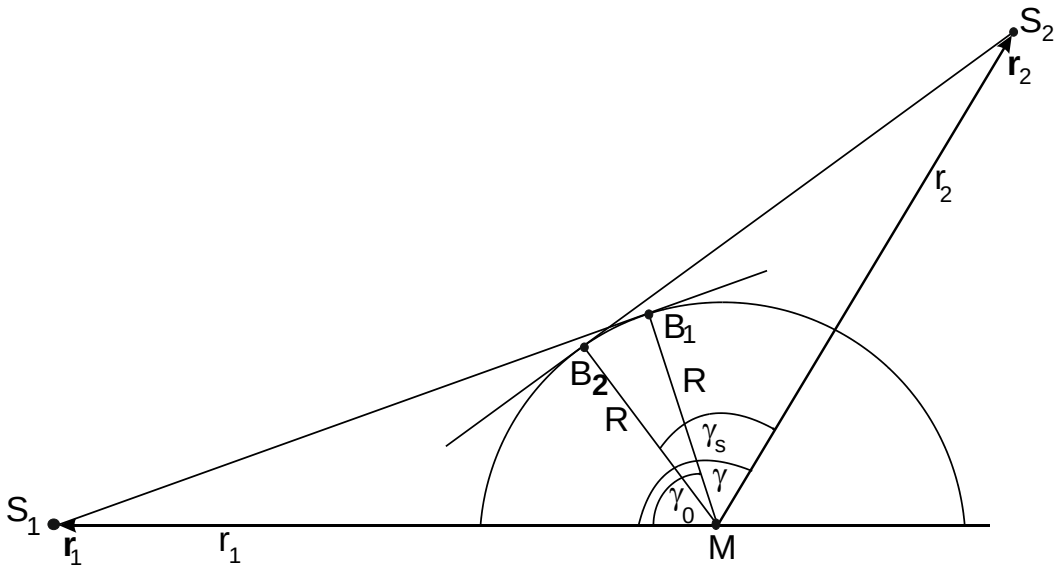


Bild 31-1: Zur Herleitung der Sichtbarkeitsbedingung bei Sicht Satellit-Satellit

Die Positionen zweier Satelliten seien durch ihre geozentrischen äquatorialen erdfesten oder auf den Frühlingspunkt bezogenen Polarkoordinaten

$$S_1\left(r_1,\lambda_1,\delta_1\right),\ S_2\left(r_2,\lambda_2,\delta_2\right)$$

vorgegeben. Der Sichtkontakt zwischen den beiden Satelliten wird durch den Erdkörper mit Radius R_E bzw. bei Berücksichtigung einer Atmosphäre oder sonstigen Einschränkung von der Höhe H eingeschränkt. Um die Sichtbarkeitsbedingung herzuleiten, genügt es in den meisten Anwendungen als Grenzkugel ein überhöhte Erdkugel vom Radius $R = R_E + H$ anzunehmen. Der Zentralwinkel γ zwischen den beiden Satelliten wird aus

$$\cos\gamma \;=\; \cos\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\cos\delta_2\cos\delta_1+\sin\delta_2\sin\delta_1 \qquad (31.1)$$

berechnet, wobei der Zwischenwinkel längs des Äquators auf den Nullmeridian oder den Frühlingspunkt bezogen sein kann. Da für die beiden Satelliten die Beobachtung zum selben Zeitpunkt erfolgt, gilt

$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad . \tag{31.2}$$

Falls aus einer Ephemeridenrechnung die geozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ der beiden untersuchten Satelliten bekannt sind, kann der Winkel γ wie üblich auch berechnet werden aus

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2} \quad \langle \; r_1 := |\mathbf{r}_1| \; , \; r_1 := |\mathbf{r}_2| \quad . \tag{31.3}$$

B_1 sei der Berührpunkt einer Tangente von S_1 an die Grenzkugel, B_2 von S_2. Die Grenzkugel habe den Radius $R = R_E + H$, mit dem mittleren Erdäquatorradius R_E und einer Überhöhung um die Höhe *H*. Die Zentralwinkel γ_0 im Dreieck S_1MB_1 sowie γ_s im Dreieck S_2MB_2 sind aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{R}{r_1} \quad , \quad \cos\gamma_s = \frac{R}{r_2} \tag{31.4}$$

bekannt. Der Sichtstrahl zwischen den Satelliten berührt nach Bild 31-1 auf Seite 768 die Grenzkugel genau dann, wenn

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_s \quad .$$

Es besteht somit Sichtbarkeit, wenn

$$\gamma \le \gamma_0 + \gamma_s \quad \text{bzw.} \quad \cos\gamma \ge \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \quad ,$$

kein Sichtkontakt, wenn

$$\gamma \ge \gamma_0 + \gamma_s \quad \text{bzw.} \quad \cos\gamma \le \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \quad .$$

Somit kann die *Sichtbarkeitsgleichung*

$$S := \cos\gamma - \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \tag{31.5}$$

definiert werden. Es besteht somit

Sichtbarkeit, wenn $S \ge 0$ keine Sichtbarkeit, wenn $S < 0$.	(31.6)

Da für die Winkel $\gamma_0 \le 180°$ und $\gamma_s \le 180°$ gilt, kann die Sichtbarkeitsgleichung in der Form

$$S = \cos\gamma - \frac{R}{r_1} \cdot \frac{R}{r_2} + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_1}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_2}\right)^2} \tag{31.7}$$

verwendet werden, womit das unmittelbare Rechnen mit Winkeln vermieden werden kann, was für das automatische Rechnen von Vorteil ist.

Anmerkung: Stehen die Beobachtungswinkel unmittelbar zur Verfügung, kann eine Sichtbarkeitsbedingung für die Sicht Satellit-Satellit alternativ auf folgende Weise erhalten werden[1]:

Die Sichtwinkel an den Satelliten seien nach Bild 31-2 die Winkel γ_1 und γ_2, welche aus

$$\sin\gamma_1 = \frac{R}{r_1} \quad , \quad \sin\gamma_2 = \frac{R}{r_2} \tag{31.8}$$

zu berechnen sind.

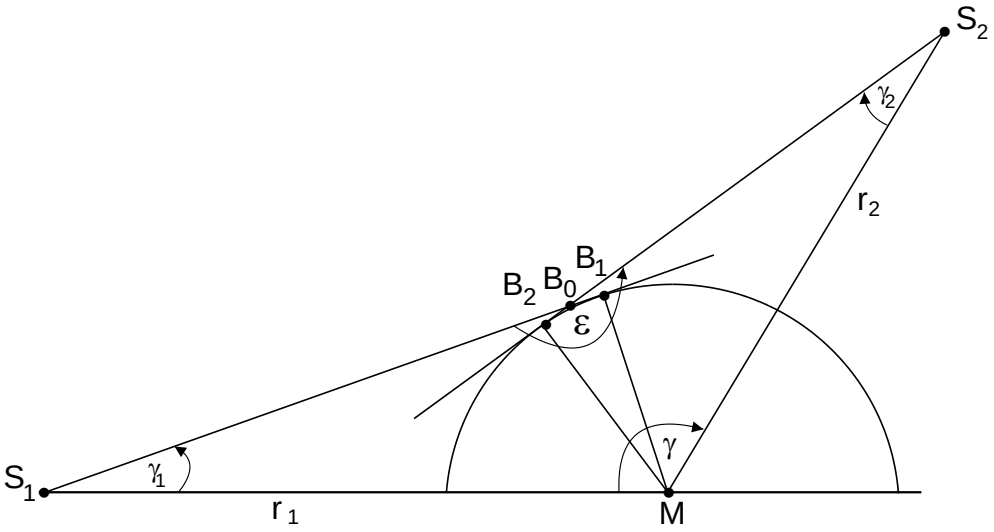


Bild 31-2: Winkelbedingung für Sicht Satellit-Satellit

B_0 sei der Schnittpunkt der beiden Tangenten S_1B_1 bzw. S_2B_2 und ε der Innenwinkel im Viereck $S_1MS_2B_0$. Dann besteht Sichtkontakt, wenn

$$\varepsilon \geq 180°$$

bzw.

$$180° \geq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma \quad . \tag{31.9}$$

BEISPIEL 1: In diesem Beispiel wird in einigen Darstellungen demonstriert, wie die relative Bewegung zweier Satelliten untersucht werden kann. Gegeben sind ein Satellit auf einer LEO-Bahn, der auf einen Satelliten auf einer MEO Bahn bezogen werden soll.

Satellit 1: a=7007.138 km, e = 0.0, i = 97°.93, Ω=0°.0, $\overline{P_d} = 5844.688\,\mathrm{s} \triangleq 97.41147\,\mathrm{min}$

Satellit 2: a= 20378.137 km, e = 0.0, i = 50°.0, Ω=316°.379,

$$\overline{P_d} = 28947.6037\,\mathrm{s} \triangleq 482.46\,\mathrm{min} \triangleq 8.041\,\mathrm{h}\,.$$

Der Verlauf der geozentrischen Winkeldistanz γ ist über einen Tag in Bild 31-3 aufgetragen. Pro drakonitischem Umlauf des tieffliegenden ist der Sichtkontakt (nach Formel (31.7)) zu dem hohen Satelliten nur kurzzeitig unterbrochen.

In Bild 31-4 ist die relative Distanz zwischen dem LEO- und dem MEO-Satelliten über einen Umlauf des tief-fliegenden Satelliten aufgezeichnet. Der Sichtkontakt, der berechnet wird, ist nur kurzzeitig unterbrochen.

[1] G. K. RAJASINGH [1977]

Die Entwicklung der relativen Sichtbarkeiten zwischen den beiden Satelliten ist in dem Sichtbarkeitsdiagramm Bild 31-5 über einen längeren Zeitraum dargestellt. ◄

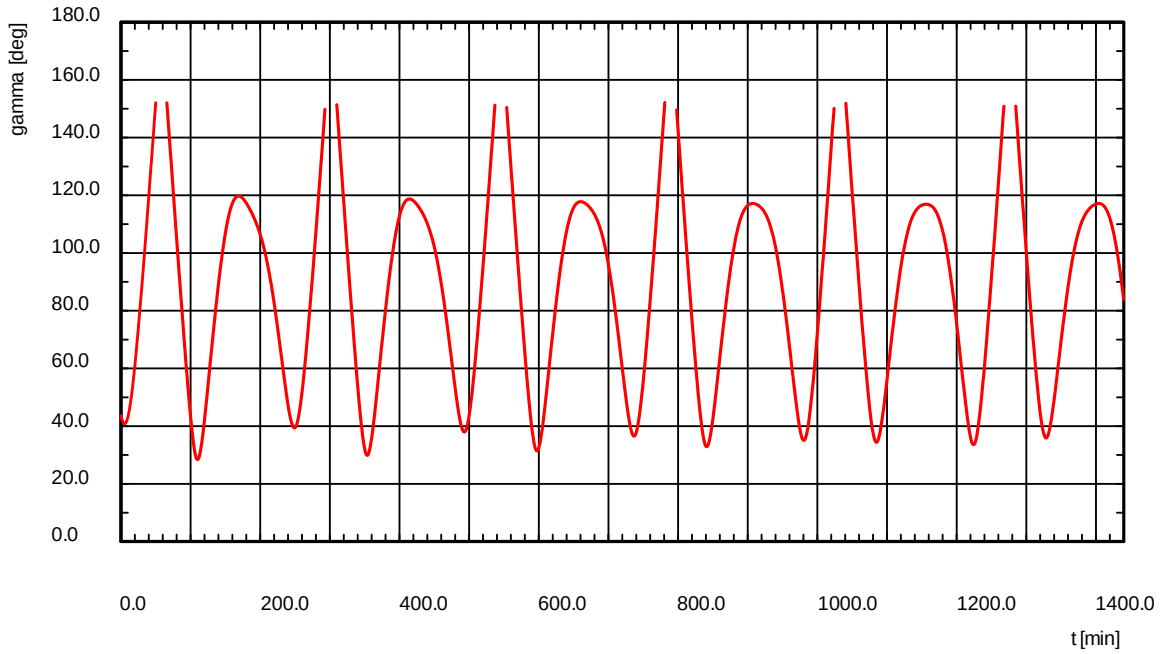


Bild 31-3: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen

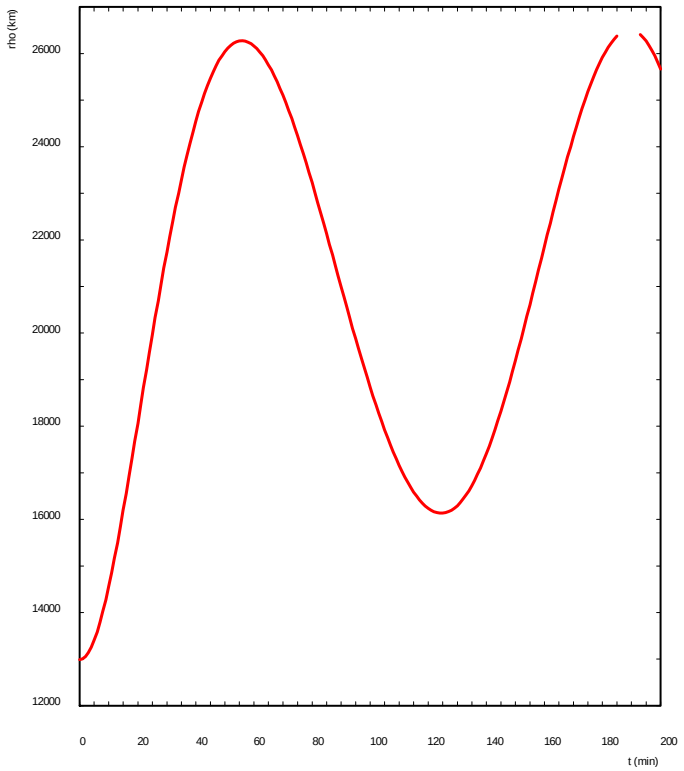


Bild 31-4: Die relative Distanz zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über nicht ganz zwei drakonitische Umläufe des tieffliegenden Satelliten berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieses Umlaufs nur kurzzeitig unterbrochen



Bild 31-5: Die Entwicklung der relativen Distanz zwischen zwei Satelliten zwischen einer LEO-Bahn (a=7007 km, e = 0.0, i = 97°.93) und einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) über knapp zwei Monate. Auflösung 12 Minuten pro Bildpunkt

BEISPIEL 2: Es werden die Sichtkontakte zwischen zwei Satelliten auf erdnahen aber unterschiedlichen Bahnen dargestellt.

Satellit 1: a= 6879.321 km, e = 0.0, i = 88°.2123, Ω=278°.732, $\overline{P_d} = 5686.337\,\mathrm{s} \triangleq 94.77228\,\mathrm{min}$

Satellit 2: a= 7121.556 km, e = 0.0, i = 98°.3907, Ω=0°.0, $\overline{P_d} = 5980.371\,\mathrm{s} \triangleq 99.67285\,\mathrm{min}$.

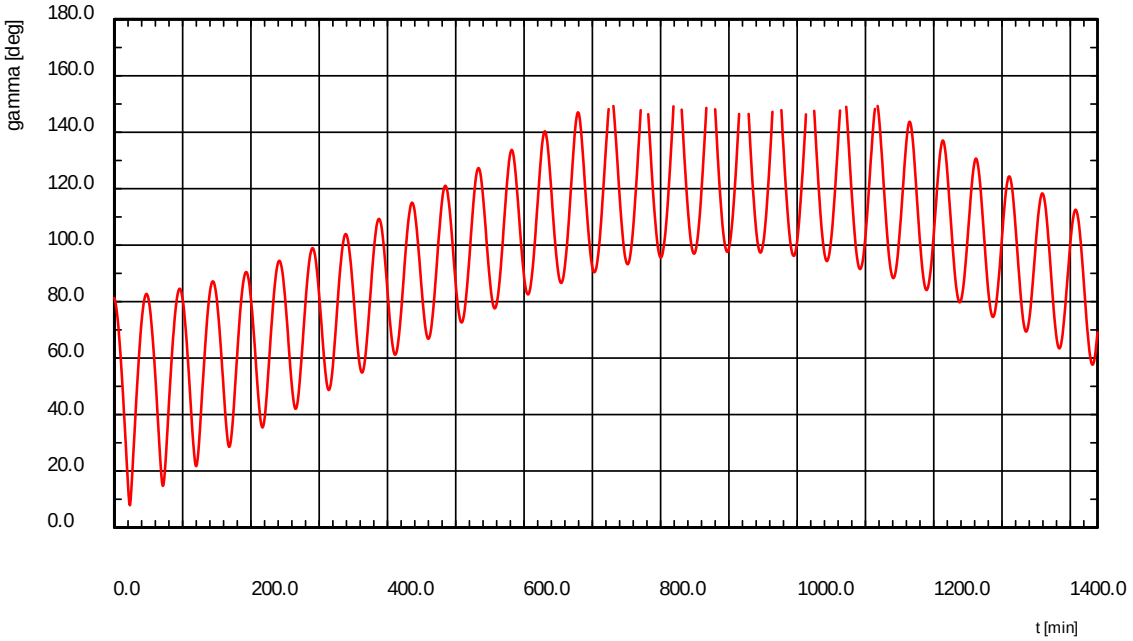


Bild 31-6: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen

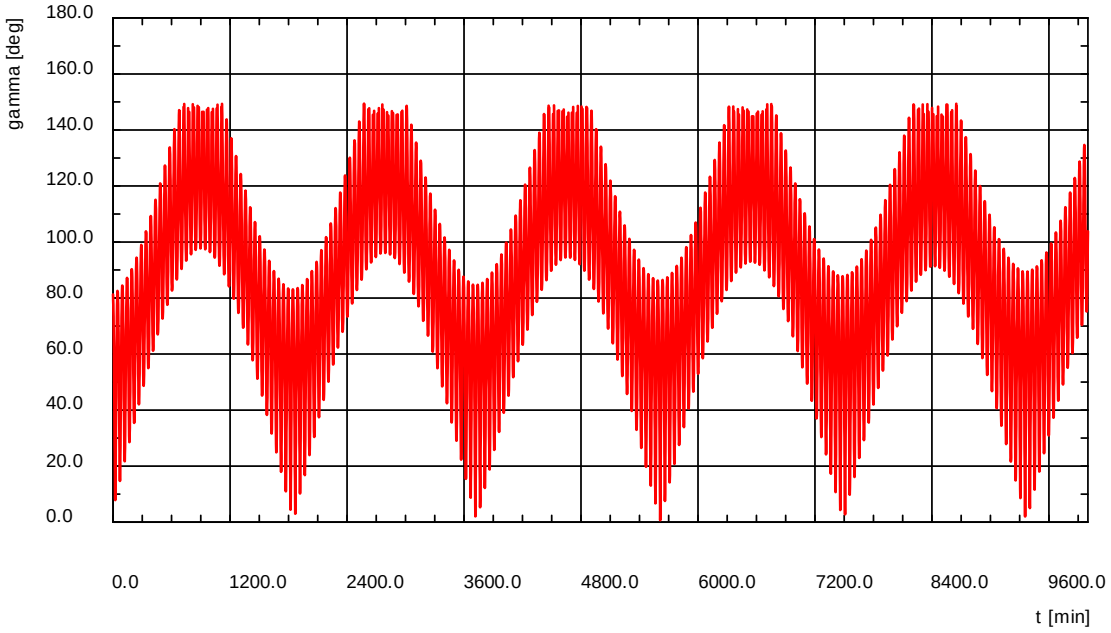


Bild 31-7: Der Sichtbarkeitsverlauf zwischen den beiden erdnahen Satelliten wie in Bild 31-6, jedoch über 7 Tage

Abhängig von den relativen Einschussdaten zeigt Bild 31-6 fast über einen halben Tag ständigen Sichtkontakt zwischen den Satelliten. Zu Beginn kommen sich die beiden Satelliten sehr nahe, was durch die minimale geozentrische Winkeldistanz von etwa 7°.9 ausgedrückt wird. In den folgenden etwa 6 Stunden ist kurzzeitiger Sichtverlust zu erkennen. Wegen der unterschiedlichen Bahnhöhe und somit unterschiedlicher Umlaufzeit, sowie unterschiedlicher Inklination ist im Verlauf eines Jahres eine sehr unterschiedliche Entwicklung der Sichtkontakte zu erwarten.

In Ergänzung zeigt Bild 31-7 den Sichtbarkeitsverlauf zwischen den beiden Satelliten über einen Zeitraum von etwa 7 Tagen. ◄

31.2 Die synodische Bewegung zweier koplanarer Satelliten

Der einfachste Fall der synodischen Bewegung zweier Satelliten ist gegeben, wenn sich die beiden Satelliten in derselben Bahnebene bewegen. Bereits aus der Betrachtung der mittleren Bewegung können für bahnanalytische Untersuchungen weitreichende Aussagen erhalten werden.

31.2.1 Mittlere synodische Bewegung koplanarer Satelliten

Gegeben sei die mittlere Bewegung der beiden untersuchten Satellitenbahnen, wofür ohne Einschränkung die mittlere drakonitische Bewegung $n_{d,1}, n_{d,2}$ gewählt werden kann. Die *mittlere synodische Bewegung* der beiden Satelliten relativ zueinander kann aus dem Unterschied ihrer mittleren Bewegungen d.h. aus der relativen mittleren Drift des einen Satelliten bezogen auf den anderen

$$n_{s,syn} = n_{d2} - n_{d1} \tag{31.10}$$

berechnet werden. Die *mittlere synodische Umlaufzeit* zweier Satelliten lautet

$$\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{n_{s,syn}} \tag{31.11}$$

wenn die mittlere Bewegung in [Grad/s] gegeben ist.

NUMERISCHES BEISPIEL: Gegeben seien zwei Satelliten in koplanaren Bahnen mit leicht unterschiedlichen Bahnhöhen. Wie lange dauert es, bis sie wieder zusammentreffen, d.h. genau übereinander stehen bzw. wieder denselben Bahnwinkel haben? Zu berechnen ist also die synodische Umlaufzeit der beiden Satelliten.

Gegeben seien für den ersten Satelliten mit kreisförmiger Bahn ($\overline{e_1} = 0.0$) die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_1} = 6778.140$ km und die Bahnneigung $\overline{i_1} = 51°.0$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit lautet dann $\overline{P_{d1}} = 5548.970\,\text{sec}$.

Ein zweiter Satellit werde auf einer koplanaren Kreisbahn allerdings etwas tiefer als der erste geflogen. Die entsprechende synodische Umlaufzeit dieses Satelliten in Bezug auf den ersten kann aus Tabelle 31-1 abgelesen werden. Die Tabelle enthält zur Referenz auch die drakonitischen Umlaufzeiten und mittleren drakonitischen Bewegungen, sowie zur Ergänzung die zugehörigen Kreisbahngeschwindigkeiten V_K. Es ist zu ersehen, wie auch zu erwarten ist, dass bei kleiner relativer Drift der beiden Satelliten die synodische Umlaufzeit beträchtlich anwachsen, das Zusammentreffen der

beiden Satelliten sich also erheblich verzögern kann. Die Tabelle enthält die entsprechenden Werte für verschiedene Bahnen um den großen Einfluss der relativen Bewegung zu demonstrieren.

Satellit	$\bar{a}\,[\mathrm{km}]$	$\overline{P_d}\,[\mathrm{sec}]$	n_d	$V_K\,[\mathrm{km/s}]$	$n_{s,syn}$	$\overline{P_{s,syn}}$
1	6778.140	5548.972	5605°.36 /d	7.66856	-	-
2	6740.140	5502.322	5652°.89 /d	7.69014	47°.530 /d	7.57416 d
3	6768.140	5536.683	5617°.84 /d	7.67422	12°.480 /d	28.84156 d
4	6771.140	5540.369	5614°.07 /d	7.67252	8°.710 /d	41.33180 d
5	6777.140	5547.743	5606°.60 /d	7.66912	1°.240 /d	290.32258 d
6	6778.040	5548.849	5605°.49 /d	7.66861	0°.130 /d	2769.23077 d

Tabelle 31-1: Beispiele der mittleren synodischen Umlaufzeit zweier Satelliten auf kreisförmigen Bahnen mit der Inklination i = 51°.

Man muss allerdings beachten, dass dieses Beispiel nur näherungsweise als zutreffend angesehen werden darf, da die Knotendrift auf Grund der unterschiedlichen Bahnhalbachse (vgl. den Ausdruck (20.15) in Abschnitt 20.2.1, Band III) für die beiden Bahnebenen allmählich auseinander driften lässt. (Dies wird in Abschnitt 31.3 auf Seite 777 näher untersucht)◀

31.2.2 Säkular gestörte synodische Bewegung koplanarer Satelliten

Bei erdnahen Satellitenbahnen wird die große Bahnhalbachse durch den Luftwiderstand allmählich verringert. Dieser Effekt kann sich beträchtlich auf die mittlere synodische Umlaufzeit der beiden untersuchten Satelliten auswirken.

Für die Variation der mittleren Bewegung werde die drakonitische mittlere Bewegung $\overline{n_d}$ der mittleren *Kepler*schen Bewegung n_K gleichgesetzt. Dann liefert das dritte *Kepler*sche Gesetz in der für ellipsennahe *Kepler*bahnen gültigen Form (11.83) $\mu=n^2 a^3$ die bekannte Beziehung[1]

$$\dot{n} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\dot{a} \qquad . \tag{31.12}$$

Die beiden Satelliten mögen bezogen auf eine mittlere (ohne Einschränkung drakonitische) Bewegung zu einem Anfangszeitpunkt t_0 die mittlere (drakonitische) Bewegung

$$\begin{aligned} n_{d1} &= n_{d1,0} + (n_{d1})_s^{\cdot}(t-t_0) \\ n_{d2} &= n_{d2,0} + (n_{d2})_s^{\cdot}(t-t_0) \end{aligned} \tag{31.13}$$

haben, woraus für die Differenz

$$n_{s,syn} := \Delta n_d := n_{d2,0} - n_{d1,0} + [(n_{d2})_s^{\cdot} - (n_{d1})_s^{\cdot}](t-t_0)$$

bzw.

[1] Abschnitt 11.1.5 (Band III)

$$
\begin{aligned}
n_{s,syn} &= \Delta n_{d,0} + \Delta(n_d)_s^{\cdot}(t - t_0) \\
\Delta n_{d,0} &:= n_{d2,0} - n_{d1,0} \\
\Delta(n_d)_s^{\cdot} &:= (n_{d2})_s^{\cdot} - (n_{d1})_s^{\cdot}
\end{aligned}
\tag{31.14}
$$

folgt. Nun ist Δn_d die mittlere synodische Bewegung, so dass für die mittlere synodische Umlaufzeit

$$
\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{\Delta n_d} \quad , \quad \overline{P_{s,syn,0}} = \frac{360°}{\Delta n_{d,0}} \tag{31.15}
$$

gesetzt werden kann. Damit wird nach einem synodischen Umlauf

$$
n_{s,syn} = \Delta n_d = \frac{360°}{\overline{P_{s,syn}}} = n_{s,syn,0} + \Delta(n_d)_s^{\cdot} \cdot \overline{P_{s,syn}} \tag{31.16}
$$

Die „gestörte“ mittlere synodische Umlaufzeit kann daher berechnet werden aus

$$
\Delta(n_d)_s^{\cdot} \cdot \left(\overline{P_{s,syn}}\right)^2 + n_{s,syn,0} \cdot \overline{P_{s,syn}} - 360° = 0
$$

mit der eindeutigen (da nicht negativen) Lösung

$$
\overline{P_{s,syn}} = \frac{2 \cdot 360°}{n_{s,syn,0} + \sqrt{(n_{s,syn,0})^2 + 4 \cdot 360° \cdot \Delta(n_d)_s^{\cdot}}} \quad . \tag{31.17}
$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Es sei die große Halbachse des ersten Satelliten $\overline{a}_{1,0} = 6778.140\,\text{km}$. Dann beträgt mit den entsprechenden Werten von Tabelle 31-1 auf Seite 775 die mittlere drakonitische Bewegung des ersten Satelliten $n_{d,1}$= 5605°.36 /d . Das Querschnitt zu Masse Verhältnis sei bekannt zu

$$
\frac{A_D}{m} = \frac{1}{500}\frac{m^2}{kg} \quad ,
$$

der Luftwiderstandsbeiwert sei c_D = 2.3, die (mittlere) Luftdichte für den gegebenen Höhenbereich[1]

$$
\rho[400km] = 5\frac{g}{km^3} \quad .
$$

Mit V = 7.66856 km/s wird nach Formel (17.43)[2]

$$
\dot{a}_{1,s} = -\rho \cdot c_D \cdot \frac{A_D}{m} \cdot \frac{a^2}{\mu} \cdot V^3 = -1.1955 \times 10^{-6}\frac{km}{s} \cong -0.10329\frac{km}{d} \cong -37.72653\frac{km}{a}
$$

und für die Variation der mittleren Bewegung nach Formel (31.12)

$$
\dot{n}_{d1,s} = 0°.12814\frac{1}{d^2} \quad .
$$

[1] Aus Tabelle 17-12 in Abschnitt 17.3.1 (Band III)

[2] In Abschnitt 17.3.2 (Band III)

Ein zweiter Satellit habe die Ausgangshalbachse $\overline{a_{6,0}} = 6778.040$ km, so dass nach Tabelle 31-1 die mittlere drakonitische Bewegung den Wert $n_{d,6}$= 5605°.490 /d annimmt. Bei einem doppelt so groß angenommenen Querschnitt zu Masse Verhältnis wie beim ersten Satelliten wird

$$\dot{n}_{d6,s} = 0°.25627 \frac{1}{d^2}.$$

Somit lautet zur Anfangszeit t_0 die mittlere synodische Bewegung

$$n_{s,syn,0} = \Delta n_d = 0°.130 \frac{1}{d}$$

und die zugehörige Variation nach der dritten der Formeln (31.14)

$$\Delta(n_{s,syn})_s^{\cdot} = 0°.12814 \frac{1}{d^2} \quad .$$

Mit der mittleren synodischen Umlaufzeit $\overline{P_{syn,0}} = 2769.231\,\mathrm{d}$ aus Tabelle 31-1 auf Seite 775 liefert Formel (31.17) schließlich die mittlere synodische Umlaufzeit für den ersten mittleren synodischen Umlauf bei Berücksichtigung einer mittleren Bahnhöhenabnahme infolge des Luftwiderstandes

$$\overline{P_{syn}} = 52.49920\,\mathrm{d} \quad .$$

Das Ergebnis zeigt den beträchtlichen Einfluss der unterschiedlichen Wirkung des Luftwiderstandes auf die synodische Umlaufzeit der beiden Satelliten. ◄

- *Bei der Berechnung der synodischen Bewegung zweier Satelliten sind die unterschiedlichen Störungen auf die beiden Bahnen so weit wie möglich zu beachten.* ◄

31.3 Die synodische Bewegung von Satelliten auf kreisnahen Bahnen

Das synodische Bewegungsverhalten zweier Satelliten, die sich auf kreisförmigen Bahnen bewegen, kann mit Hilfe ihrer mittleren Bewegungen wie im vorstehenden Abschnitt untersucht werden. Ist eine Begegnung der beiden Satelliten gefunden, wird mit Formel (31.11) auf Seite 774 nach dem Zeitintervall

$$\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{n_{s,syn}} \tag{31.18}$$

ein gleichartiges Ereignis zu erwarten sein. Hier können auch etwas kompliziertere Verhältnisse berücksichtigt werden, wie im folgenden Beispiel demonstriert wird. Allerdings gilt diese Formel nur bei nahezu koplanaren Bahnen. Wenn die Bahnen auseinander triften, wie im linken Bild 31-10 angedeutet wird, kann es lange dauern, bis es wieder zu einer Überlappung außerhalb der Polgebiete kommen kann. Diese Dauer kann aus der Beziehung

$$\overline{P_{s,syn,II}} = \frac{360°}{|\dot{\Omega}_{s2} - \dot{\Omega}_{s1}|} \tag{31.19}$$

berechnet werden, wenn die säkularen Driften der Rektaszensionen der aufsteigenden Knoten der beiden Satellitenbahnen verglichen werden.

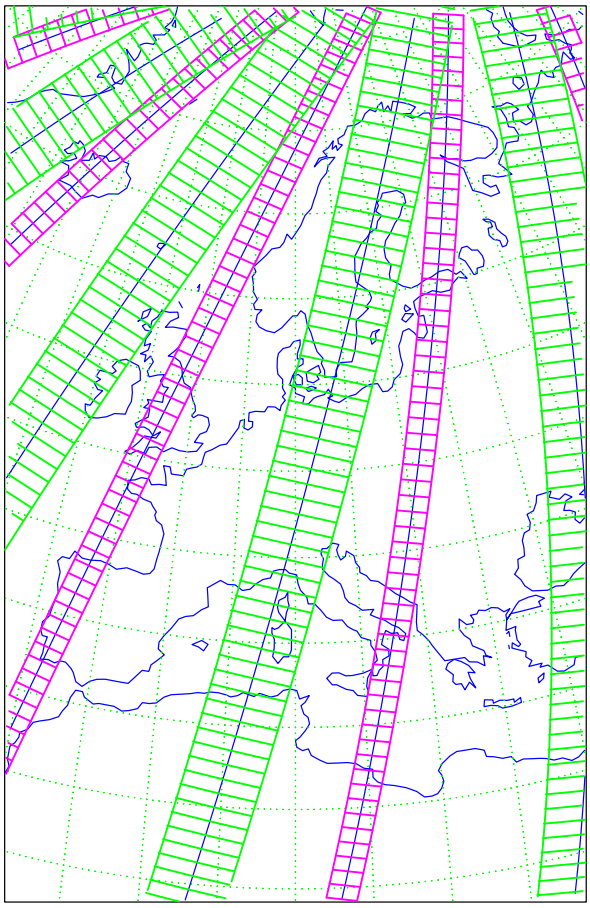


Bild 31-8: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, ohne Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet

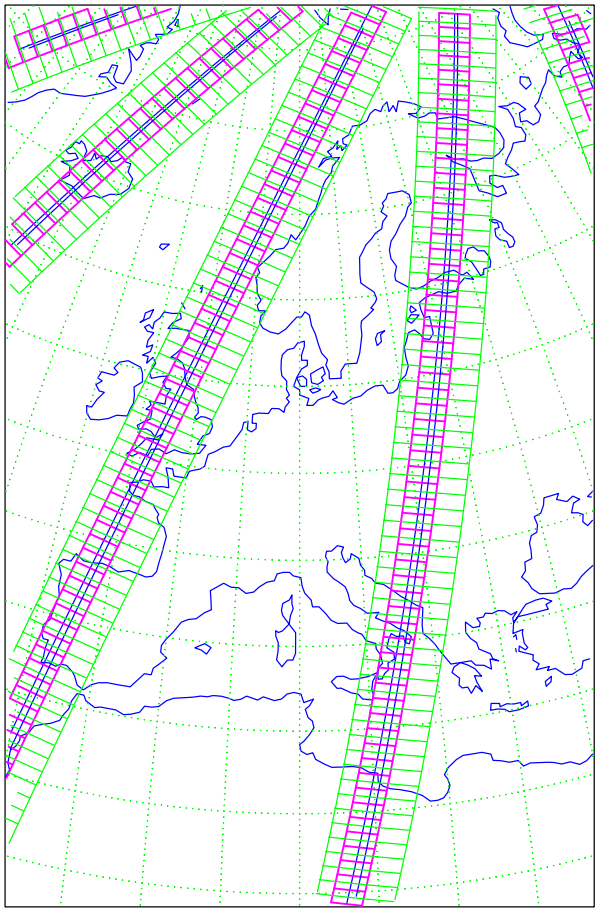


Bild 31-9: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, mit Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet

NUMERISCHES BEISPIEL: Mit ihren Sensoren sollen die beiden Satelliten ERS-2 (a = 7159.483 km, e = 0.0001, i = 98°.5433, Ω = 34°.6764, ω = 98°.0306, M_0 = 262°.1017, t_0 : 1996-Nov-17, 20^h 0^m $9^s.25$; $\overline{P_d} = 100.59865\,\text{min}$) und ADEOS (a = 7174.908 km, e = 0.0002, i = 98°.6198, Ω = 36°.6995, ω = 66°.6295, M_0 = 293°.5041, t_0 : 1996-Nov-17, 23^h 8^m $54^s.84$; $\overline{P_d} = 100.92321\,\text{min}$) ein und dasselbe Gebiet auf der Erdoberfläche innerhalb von ±15 min und nicht weiter als 160 km (entsprechend einer Pixelgröße der betreffenden Sensoren) voneinander getrennt beobachten können. Außerdem soll das beobachtete Gebiet von der Sonne unter der Mindesthöhe h = 20° beschienen sein. Bild 31-8 zeigt die aufeinanderfolgenden Bodenspuren und Überdeckungsbänder der beiden Satelliten im jeweils absteigenden Bahnast. Die eingezeichneten Querscanstreifen sind in 15 Sekunden getaktet. Es tritt keine Überlappung der überdeckten Gebiete außerhalb der Polbereiche auf. Bild 31-9 zeigt mit den Bodenspuren am 10. Januar 1997 eine Überlappung im gesamten absteigenden Bahnast. Hiervon ausgehend wurden in Bild 31-10 die Zeitpunkte aller möglichen Überlappungen eingetragen, zu denen alle geforderten Bedingungen erfüllt sind. Mit den entsprechenden Werten für die mittlere drakonitische Bewegung der beiden Satelliten wird

$$P_{syn} = \frac{360°}{0°.691/h} = 520^h.98408 \cong 21^d.7067$$

erhalten. Eine gewünschte Begegnung ist somit nach mehr als 21 Tagen zu erwarten. Dies kann in Bild 31-10 nachvollzogen werden.

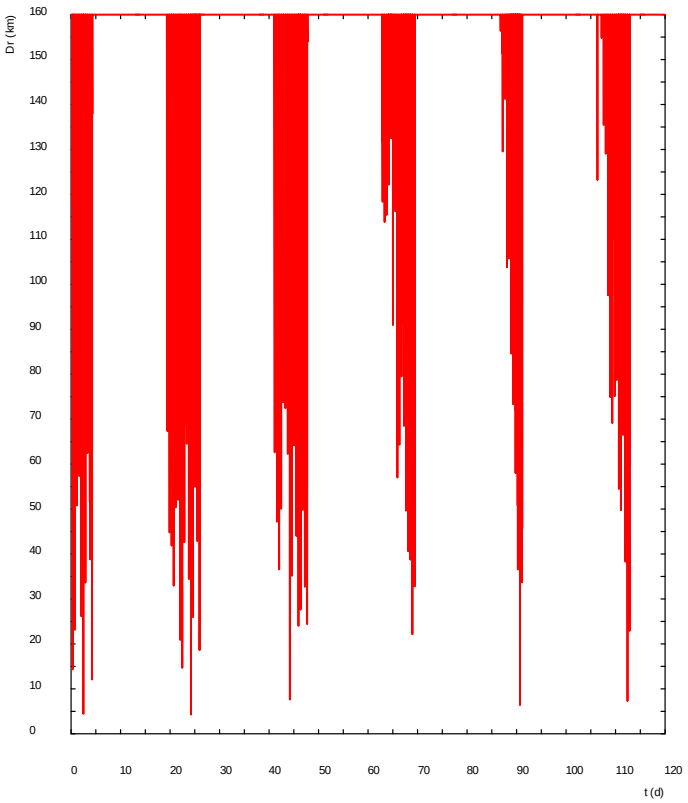


Bild 31-10: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_{\odot} = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 120 Tage, Zeitschrittweite 2 Minuten

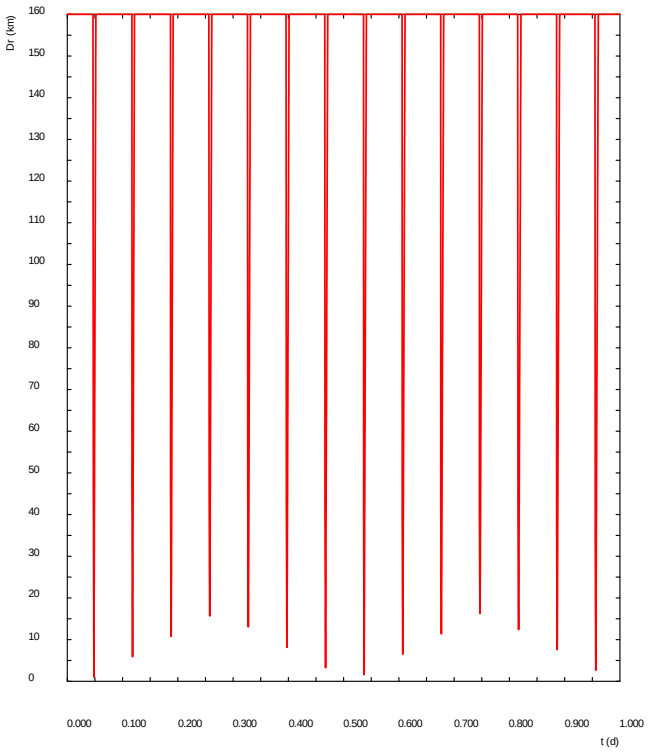


Bild 31-11: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_{\odot} = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 1 Tag, Zeitschrittweite 5 Sekunden

Das Bild zeigt über den Zeitraum von etwa 4 Monaten den minimalen Abstand zwischen den Subsatellitenpunkten der beiden Satelliten im Moment der kürzesten Distanz als den unteren Endpunkt der roten Linie zur Nulllinie: In der ersten Serie möglicher Überlappungen beträgt der minimale Abstand somit etwa 4.4 km. Das Bild ist mit einer zeitlichen Auflösung von 2 Minuten gerechnet. Für eine feinere Auflösung werden in Bild 31-11 mit der Schrittweite 5 Sekunden die möglichen Überlappungen über einen Tag gerechnet. Dazu wurde der erste Tag des für Bild 31-10 berechneten Zeitraumes gewählt. Hier wurde eine Begegnung mit der minimalen Distanz von 1 km gefunden. Es zeigt sich, dass von dem hier gewählten Verfahren nur eine grobe langfristige Übersicht möglicher überlappender Beobachtungsmöglichkeiten erwartet werden darf. ◄

31.4 Stationäre Punkte und Rückläufigkeit bei Sicht Satellit-Satellit

31.4.1 Bewegung auf koplanaren Bahnen

Zwei Satelliten mögen sich um den Zentralkörper auf koplanaren Bahnen mit den Halbachsen $a_1, a_2\,(a_2 > a_1)$ und Exzentrizitäten (e_1, e_2) bewegen.

Für welche Bedingung wird die Bewegung des äußeren Satelliten vom inneren aus gesehen scheinbar stationär bzw. rückläufig?

Die Bearbeitung dieser Frage erfolgte in der klassischen Himmelsmechanik im Rahmen der Untersuchung der scheinbaren Bewegung der Planeten[1]. Da sich diese nahezu in der instantanen Ebene des Sonnensystems bewegen, hat die Reduktion auf die koplanare Bewegung von Erde und Planeten Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit ergeben. Diese werden im vorliegenden Fall der Satellitenbahnmechanik bei Bezug auf eine ungestörte *Kepler*-Bewegung verallgemeinert nachvollzogen. Der allgemeine Fall wird in Abschnitt 31.4.3 diskutiert.

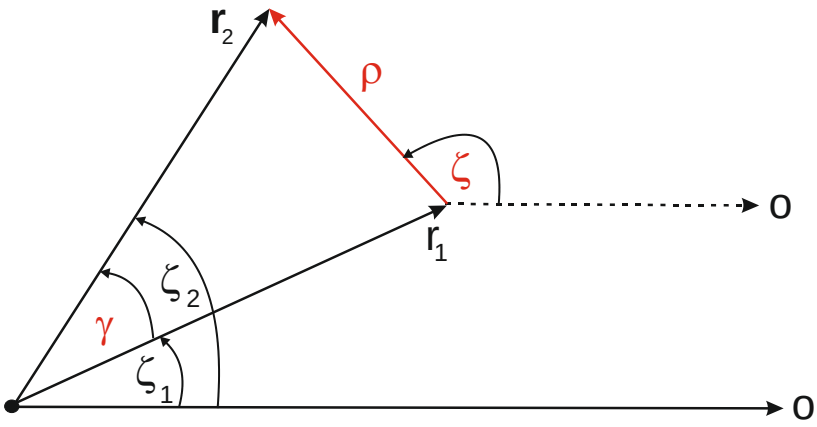


Bild 31-12: Zur Geometrie der relativen Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren Bahnen, O – Ursprung eines *Hansen-Systems*

Zugrunde gelegt werde ein *Hansen*-System mit dem orthonormierten Basissystem $\mathbf{q}_j^{(I)}$. Wenn die Bewegung als eben angesetzt werden kann, haben die Radiusvektoren der beiden Bewegungen die Darstellung

[1] Siehe etwa in BAUSCHINGER, J. [1928], pp. 246-253

$$\mathbf{r}_i = r_i\,\mathbf{r}_{i0} = r_i\left(\mathbf{q}_{i1}^{(I)}\cos\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\sin\zeta_i\right) \quad \langle r_i = |\mathbf{r}_i| \ , \ i = 1,2 \ . \tag{31.20}$$

Der Zusammenhang zwischen dem $\left(\mathbf{r}_{i0}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{c}_{i0} = \mathbf{r}_{i0} \times \mathbf{q}_{i0}\right)$ *Leibniz*-Systemen und den *Hansen*-Systemen ist gegeben durch[1]

$$\mathbf{r}_{i0} = \mathbf{q}_{i1}^{(I)}\cos\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\sin\zeta_i \ , \ \mathbf{q}_{i0} = -\mathbf{q}_{i1}^{(I)}\sin\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\cos\zeta_i \ , \ \mathbf{c}_{i0} = \mathbf{q}_{i3}^{(I)} \quad \langle i = 1,2 \ . \tag{31.21}$$

Im vorliegenden Fall einer koplanaren Bewegung können die beiden Bewegungen auf ein und dasselbe *Hansen*-System bezogen werden. Dieses hat den Vorteil unverrückbar in der gemeinsamen Bahnebene der beiden bewegten Körper zu liegen[2]. Man kann daher setzen

$$\mathbf{q}_j^{(I)} := \mathbf{q}_{ij}^{(I)} \qquad \langle i = 1,2; \ j = 1,2,3 \ ; \ \text{koplanar} \quad . \tag{31.22}$$

Somit kann für den Geschwindigkeitsvektor geschrieben werden

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{r}_i\mathbf{r}_{0i} + r_i\,\dot{\zeta}_i\,\mathbf{q}_{0i} = \mathbf{q}_1^{(I)}\left(\dot{r}_i\cos\zeta_i - r_i\,\dot{\zeta}_i\sin\zeta_i\right) + \mathbf{q}_2^{(I)}\left(\dot{r}_i\sin\zeta_i + r_i\,\dot{\zeta}_i\cos\zeta_i\right) \quad \langle \dot{r}_i \equiv 0 \ , i = 1,2. \tag{31.23}$$

Die radialen Geschwindigkeiten der beiden Satelliten sowie die Variationen der zugehörenden *Hansen*schen Bahnwinkel werden berechnet aus

$$\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = r_i\,\dot{r}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{q}_{i0} = r_i\,\dot{\zeta}_i \qquad \langle i = 1,2 \quad . \tag{31.24}$$

Der radiale und der transversale Richtungsvektor im *Leibniz*-System folgen aus

$$\mathbf{r}_{i0} = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad , \quad \mathbf{q}_{i0} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{r}_i\,\mathbf{r}_{i0}}{r_i\,\dot{\zeta}_i} \quad \langle i = 1,2 \ ; \ \dot{\zeta}_i \neq 0 \quad . \tag{31.25}$$

Das *Hansen*-System kann durch einen Anfangswert festgelegt werden. Sei etwa zu einem Anfangszeitpunkt t_0 der Radiusvektor des ersten Satelliten gegeben, so kann

$$\mathbf{q}_1^{(I)} := \mathbf{r}_1(t_0) \tag{31.26}$$

gewählt werden. Wegen $\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{r}_{10} \times \mathbf{q}_{10} = \mathbf{c}_{10}$ ist damit auch der zweite Richtungsvektor des *Hansen*-Systems bekannt:

$$\mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_3^{(I)} \times \mathbf{q}_1^{(I)} \quad . \tag{31.27}$$

Die *Hansen*schen Bahnwinkel der beiden Satelliten bei Bezug auf das so definierte *Hansen*-System werden berechnet aus

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} = r_i\cos\zeta_i \quad , \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{q}_2^{(I)} = r_i\sin\zeta_i \quad \langle i = 1,2 \quad . \tag{31.28}$$

Die beiden Satelliten mögen den Abstand ρ haben. Der relative Ortsvektor des zweiten Satelliten bei Bezug auf den ersten Satelliten möge den relativen *Hansen*schen Bahnwinkel ζ haben (vgl. Bild 31-12):

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 := \rho\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) \quad . \tag{31.29}$$

Aus den hieraus folgenden Beziehungen

---

[1] siehe etwa in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

[2] Satz H23, Abschnitt 4.4.6 (Band II)

$$\begin{aligned}\rho\cos\zeta &= r_2\cos\zeta_2 - r_1\cos\zeta_1\\ \rho\sin\zeta &= r_2\sin\zeta_2 - r_1\sin\zeta_1\end{aligned} \tag{31.30}$$

kann nach Differentiation nach der Zeit und Elimination der Variation des Abstandes $\dot\rho$ für die Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels die Beziehung erhalten werden

$$\rho\dot\zeta = \dot r_2\sin(\zeta_2-\zeta) + r_2\dot\zeta_2\cos(\zeta_2-\zeta) - \dot r_1\sin(\zeta_1-\zeta) - r_1\dot\zeta_1\cos(\zeta_1-\zeta) \quad . \tag{31.31}$$

Aus den Beziehungen (31.30) können erhalten werden

$$\begin{aligned}\rho\cos(\zeta_2-\zeta) &= r_2 - r_1\cos(\zeta_2-\zeta_1)\\ \rho\cos(\zeta_1-\zeta) &= r_2\cos(\zeta_2-\zeta_1) - r_1\\ \rho\sin(\zeta_2-\zeta) &= -r_1\sin(\zeta_2-\zeta_1)\\ \rho\sin(\zeta_1-\zeta) &= -r_2\sin(\zeta_2-\zeta_1) \quad .\end{aligned} \tag{31.32}$$

Dies in (31.31) eingesetzt führt auf die skalare Form des Flächensatzes im Fall der relativen Bewegung, wenn noch die Flächenparameter der beiden Bewegungen $G_i = r_i^2\,\dot\zeta_i \;\; (i=1,2)$ berücksichtigt werden:

$$\rho^2\dot\zeta = G_1 + G_2 + (r_2\dot r_1 - r_1\dot r_2)\sin(\zeta_2-\zeta_1) - r_1 r_2(\dot\zeta_1+\dot\zeta_2)\cos(\zeta_2-\zeta_1) \quad . \tag{31.33}$$

Die Variation $\dot\zeta$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels ist nun entscheidend für die relative Bewegung des zweiten Satelliten gesehen vom ersten Satelliten. Nach Bild 31-12 ist wegen der Koplanarität der beiden Bahnen der Zwischenwinkel γ zwischen den beiden Ortsvektoren gleich der Differenz der beiden *Hansen*schen Bahnwinkel, so dass diese im Einzelfall nicht explizit berechnet werden müssen:

$$\gamma = \zeta_2 - \zeta_1\,,\;\; \cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2}{r_1 r_2} \quad \langle\text{koplanare Bahnebenen} \quad . \tag{31.34}$$

In diesem Fall kann die Bedingungsgleichung (31.33) auch in der für den Rechner geeigneten Form geschrieben werden

$$\rho^2\dot\zeta = G_1\left(1-\frac{r_2}{r_1}\cos\gamma\right) + G_2\left(1-\frac{r_1}{r_2}\cos\gamma\right) + (r_2\dot r_1 - r_1\dot r_2)\sin(\zeta_2-\zeta_1) \quad . \tag{31.35}$$

Das Ergebnis lautet:

- *Wenn* $\dot\zeta = 0$ *erscheint der zweite Satellit für den ersten als stationär, für* $\dot\zeta > 0$ *rechtläufig, für* $\dot\zeta < 0$ *rückläufig.*

Falls etwa berechnet werden soll, für welche Zwischenwinkel stationäre Punkte auftreten, muss wegen der Abhängigkeiten der Radien und der radialen Geschwindigkeiten, sowie der Variationen der *Hansen*schen Bahnwinkel von der Zeit bzw. von den *Hansen*schen Bahnwinkel als unabhängigen Variablen, iterativ gerechnet werden. Als Anfangsnäherung kann eine Lösung im Fall von Kreisbahnen gewählt werden (siehe im nächsten Abschnitt).

Da sich der zweite Satellit für $\gamma = 0°$ vom inneren Satelliten aus gesehen in Opposition befindet, vereinfacht sich die Bedingungsgleichung (31.35) auf

$$(r_2^2 - r_1^2)\dot\zeta[\gamma = 0°] = G_1\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right) + G_2\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right) \quad . \tag{31.36}$$

Scheinbare Rückläufigkeit sowie Stationarität können nur in der Nähe der Opposition des zweiten in Bezug auf den ersten Satelliten erwartet werden.

BEISPIEL: Das hier vorgestellte realistische Beispiel aus der Satellitenbewegung geht zum Test der Theorie zunächst von einer koplanaren Bewegung aus. Angenommen sind zwei Kreisbahnen mit den Halbachsen $a_1 = 7000\text{km}$ und $a_2 = 12000\text{km}$ bei einer gemeinsamen Inklination i=60°. Bild 31-13 zeigt den Verlauf der Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels entsprechend Formel (31.35). Wegen der unterschiedlichen Bahnhöhen haben die beiden Bahnen eine unterschiedliche Drift $\dot{\Omega}$ des jeweiligen aufsteigenden Knotens der Bahn, so dass die Annahme von Koplanarität nur näherungsweise am Beginn der Rechnung gemacht werden darf. Das Bild zeigt über zwei Umläufe des inneren Satelliten je einen kurzen Abschnitt eines scheinbar rückläufigen Bahnabschnitts des äußeren Satelliten, gesehen vom inneren Satelliten aus. Wenn $\dot{\zeta} = 0$ ist der äußere Satellit stationär, die scheinbare Bewegung wird umgekehrt.

Bild 31-14 zeigt den Verlauf von $\dot{\zeta}$ über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ der Ortsvektoren der beiden Satelliten. Der Zwischenwinkel nimmt auch im Bahnast der scheinbaren Rückläufigkeit nicht den Wert $\gamma = 0°$ an, was für eine exakt stattfindende Opposition erwartet wird. Die näherungsweise Opposition findet für den minimalen Zwischenwinkel $\gamma = 4°.713$ statt, was auf die relative Drift der beiden Bahnebenen zurückgeführt werden kann. Zum Zeitpunkt der Opposition sind die beiden Bahnebenen nicht mehr koplanar.

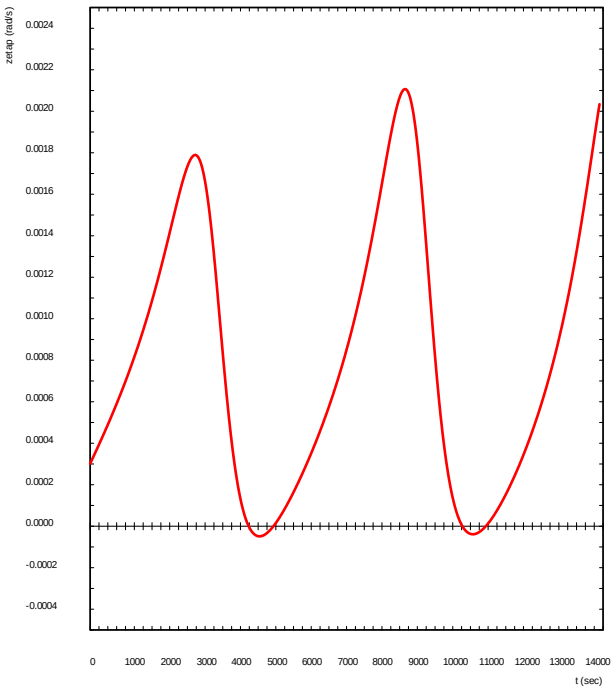


Bild 31-13: Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ über der Zeit *t* für die relative Sicht zwischen zwei kreisförmigen Satellitenbahnen mit den Bahnhalbachsen: $a_1 = 7000\,\text{km}$, $a_2 = 12000\,\text{km}$ und mit derselben Inklination $i_1 = i_2 = 60°$.

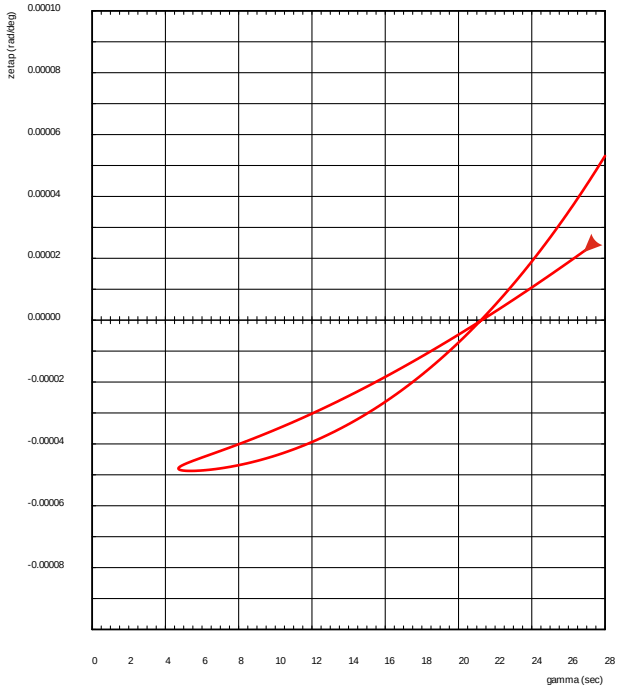


Bild 31-14: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten. Die Wirkung der unterschiedlichen Knotendrift wirkt sich erkennbar auf den Kurvenverlauf aus

Eine langfristig zu erwartende Koplanarität der Bahnebenen zweier Satellitenbahnen kann nur im Fall äquatorialer Bahnen erwartet werden. Dieser Fall wird in Bild 31-15 bestätigt. Auch hier treten

die beiden scheinbar stationären (Umkehr-) Punkte für denselben Zwischenwinkel γ ein. Dass die Kurven vor und nach der Opposition nicht völlig identisch verlaufen, kann darauf zurückgeführt werden, dass für die Berechnung hier das vollständige analytische *Brouwer*sche Bahnmodell unter Einschluss alle periodischen Störeinflüsse auf die *Kepler*bewegung verwendet wurde.

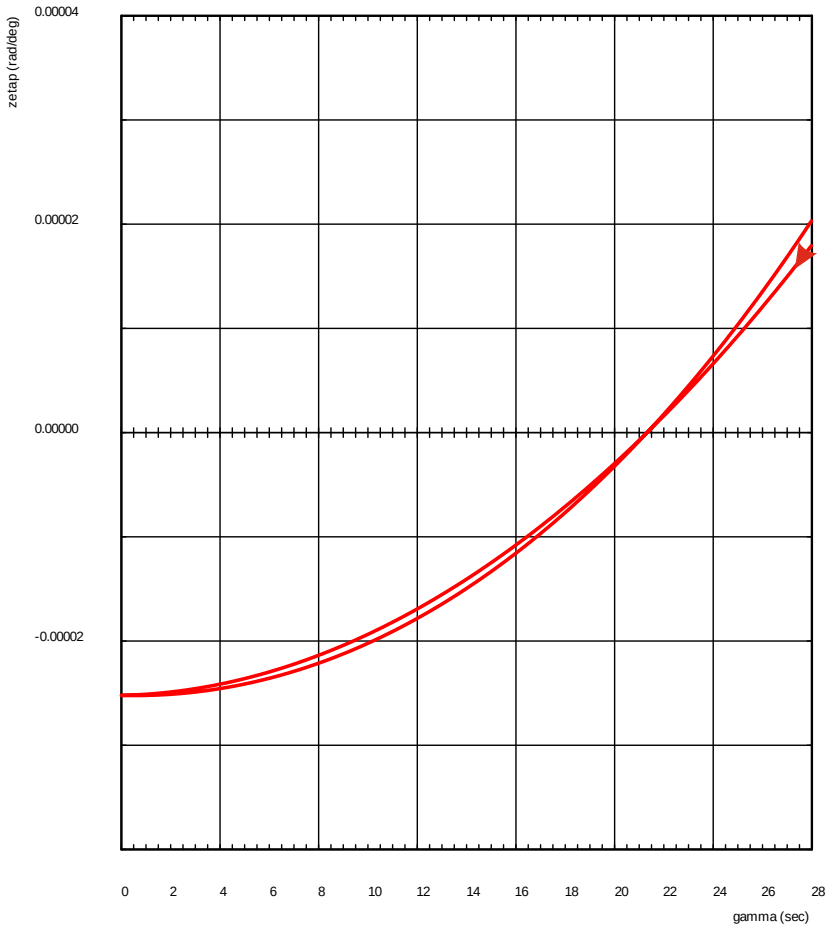


Bild 31-15: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten für in der Äquatorebene liegende Kreisbahnen (andere Bahnelemente wie in Bild 31-13 und Bild 31-14)

31.4.2Der Fall koplanarer Kreisbahnen

Im Fall von Kreisbahnen betragen die Geschwindigkeiten V_i der beiden Satelliten

$$V_i^2 = \dot{\mathbf{r}}_i^2 = r_i^2\,\dot{\zeta}_i^2 = \frac{\mu}{r_i} \quad \langle e_i = 0.0,\ a_i = r_i,\ i = 1,2 \quad . \tag{31.37}$$

Deshalb und wegen des für eine *Kepler*bewegung gültigen Flächensatzes in der Form $r_i^2\dot{\zeta}_i = G_i = \sqrt{\mu a_i\left(1-e_i^2\right)}$ errechnet sich die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels aus

$$\dot{\zeta}_i = \frac{1}{r_i}\sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \qquad \langle r_i = a_i = const.,\quad i = 1,2 \quad . \tag{31.38}$$

Da Kreisbahnen keine radialen Geschwindigkeiten haben, bleibt für Beziehung (31.31)

$$\rho\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\cos(\zeta_2 - \zeta) - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\cos(\zeta_1 - \zeta) \quad . \tag{31.39}$$

Mit dem Zwischenwinkel mit $\gamma := \zeta_2 - \zeta_1$ folgt aus (31.33) schließlich

$$\rho^2\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1 r_2}}\left\{-\left[r_1\sqrt{r_1} + r_2\sqrt{r_2}\right]\cos\gamma + \left[r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}\right]\right\} \quad . \tag{31.40}$$

Die hier verwendeten Wurzeln werden alle als positiv angenommen. Die Radien r_i sind konstant. Damit folgen die Bedingungen für das scheinbare Bahnverhalten des zweiten Satelliten beobachtet vom ersten Satelliten:

Scheinbare Bahn	Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels	Bedingung für den Zwischenwinkel γ		
stationär	$\dot{\zeta} = 0$	$\cos\gamma$	=	$\frac{r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}}{r_2\sqrt{r_2} + r_1\sqrt{r_1}}$
rechtläufig	$\dot{\zeta} > 0$		<	
rückläufig	$\dot{\zeta} < 0$		>	

Tabelle 31-2: Die Bedingungen für das scheinbare Bahnverhalten zweier Satelliten auf koplanaren Kreisbahnen

Sind die Radien r_1, r_2 der beiden Satelliten gegeben, so können die Zwischenwinkel γ_0 berechnet werden, für die der zweite Satellit in Bezug auf den ersten Satelliten stationär erscheint. Dieser Winkel kann nach Tabelle 31-2 berechnet werden aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}}{r_2\sqrt{r_2} + r_1\sqrt{r_1}} \quad . \tag{31.41}$$

Bild 31-16 beschreibt die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren kreisförmigen rechtläufigen Bahnen in der Umgebung der Opposition, die für den Zwischenwinkel $\gamma = \zeta_2 - \zeta_1 = 0°$ durchlaufen wird. Befindet sich der innere Satellit um den Winkel γ_0 vor der Opposition im Punkt 1 seiner Bahn, durchläuft der Satellit auf der äußeren Bahn Punkt 3. In diesem Moment erscheint der äußere Satellit stationär und kehrt seine scheinbare Bewegungsrichtung um. Er durchläuft die Opposition scheinbar rückläufig, bis er Punkt 4 erreicht, der wieder den Winkelabstand γ_0 hat. In diesem Moment durchläuft der innere Satellit Punkt 2 seiner Bahn, der äußere Satellit erscheint stationär und kehrt seine Bewegungsrichtung um. Er bewegt sich dann wieder rechtläufig.

BEISPIEL 1: Es seien zwei Satelliten auf koplanaren kreisförmigen Bahnen mit den Kreisbahnhöhen $H_1 = r_1 - R_E = 500\,\text{km}$ und $H_2 = r_2 - R_E = 800\,\text{km}$ gegeben. Die relativen Bahnwinkel für stationäre Punkte werden berechnet aus der Bedingung $\cos\gamma_0 = 0.999544537$, entsprechend

$$\gamma_{01} = 1°.72934\,,\ \gamma_{02} = 358°.27066 \quad .◀$$

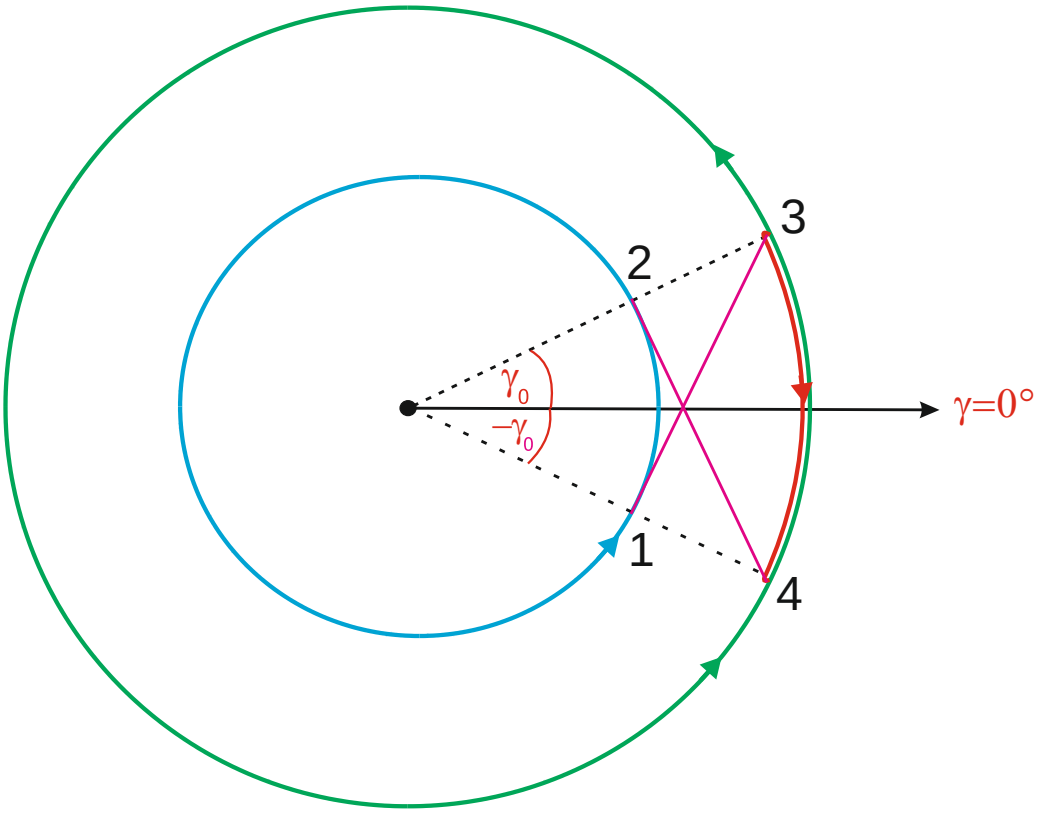


Bild 31-16: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren kreisförmigen rechtläufigen Bahnen in der Nähe der Opposition

BEISPIEL 2: Betrachtet[1] werden die Jupitermonde[2] Europa $\left(r_{II} = 6.71\times10^5\,\text{km}\right)$ und Ganymed $\left(r_{III} = 10.70\times10^5\,\text{km}\right)$. Ganymed wird von Europa aus gesehen stationär, wenn $\cos\gamma_0 = 0.9479$, d.h. für die Zwischenwinkel $\gamma_{01} = 18°.576$, $\gamma_{02} = 341°.424$. In der Umgebung der Opposition $\left(\gamma = 0°\right)$ ist Ganymed für Europa rückläufig, was für γ_{01} eintritt. Ab γ_{02} wird Ganymed wieder rechtläufig.

Als zusätzliche Aufgabe soll untersucht werden, welche Bedingung die relativen Bewegungen die Jupitermonde erfüllen, wenn die beiden Jupitermonde Europa (II) und Ganymed (III) vom inneren Mond Io (I) $\left(r_I = 422000\,\text{km}\right)$ aus gesehen in Konjunktion stehen. Die Bahnen der drei Monde werden als kreisförmig und koplanar angenähert. Der Grenzfall tritt ein, wenn die Verbindungsstrecke durch die Monde II und III die Bahn des inneren Mondes I berührt (siehe Bild 31-17). Es werde angenommen, dass die Entfernung von I zu II mit x_1, die von I zu III mit x_2 bezeichnet werde. Dann sind

$$\dot{x}_1^2 = r_{II}^2 - r_I^2 \quad , \quad \dot{x}_2^2 = r_{III}^2 - r_I^2 \quad .$$

In einem Inertialsystem können die Ortsvektoren im Grenzfall durch

[1] nach SuW, 1972, Januar, p.27

[2] Daten aus Anhang I (Band V)

$$\mathbf{r}_{II} = r_{II}\mathbf{p}_1 + x_1\mathbf{p}_2 \quad , \quad \mathbf{r}_{III} = r_{III}\mathbf{p}_1 + x_1\mathbf{p}_2$$

dargestellt werden. Der maximal mögliche Zwischenwinkel kann dann aus

$$\cos\gamma^* = \frac{\mathbf{r}_{II}\cdot\mathbf{r}_{III}}{r_{II}\,r_{III}} = \frac{r_I^2 + x_1\,x_2}{r_{II}\,r_{III}}$$

berechnet werden. Im Fall der Jupitermonde ergibt sich

$$\cos\gamma^* = 0.9623 \quad \Rightarrow \gamma^* = 15°.783 \quad .$$

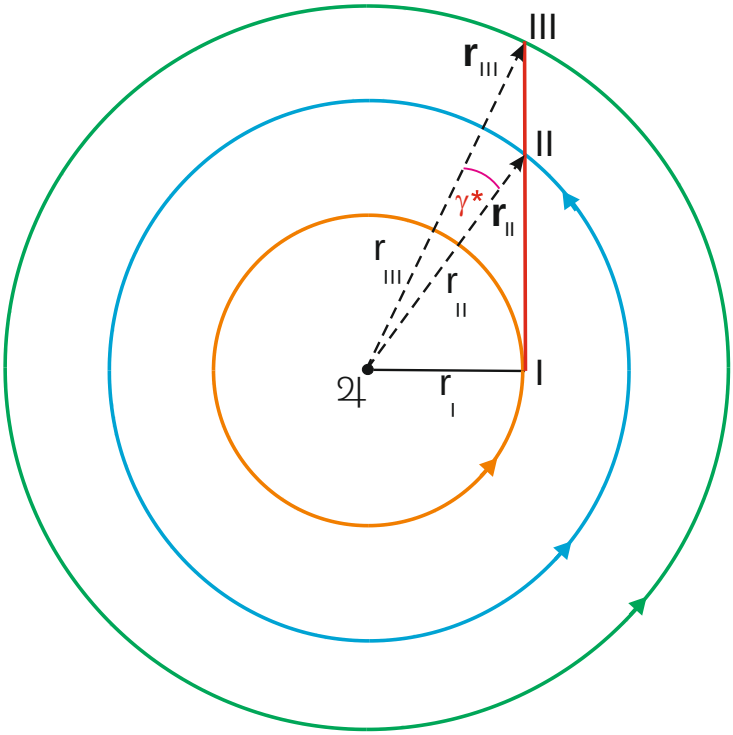


Bild 31-17: Zur Problematik der Konjunktion der Jupitermonde Europa (II) und Ganymed (III) gesehen vom inneren Mond Io (I) aus. Unter der Annahme, dass alle Bahnen kreisförmig seien

Der Zwischenwinkel γ^* ist kleiner als der Winkel γ_0, für den der Mond III von II aus gesehen scheinbar stationär wird, III bewegt sich also dann stets rückläufig bezüglich II. Bewegt sich Mond I auf seiner Bahn, so wird der Zwischenwinkel zwischen den Monden II und III, wenn diese Monde in Konjunktion zu I stehen, kleiner als γ^*, so dass als generelles Ergebnis formuliert werden kann: Falls die Monde II und III in Konjunktion zum Mond I stehen, bewegt sich III bezüglich II stets scheinbar rückläufig. ◀

31.4.3 Diskussion beliebiger relativer Bewegungen zweier Satelliten

Zwei Satelliten mit im Wesentlichen unterschiedlichen Bahnhöhen haben eine unterschiedliche Drift $\dot{\Omega}$ der Bahnebene längs des Äquators. Dies bewirkt, dass die beiden Bahnebenen nach einem bestimmten Zeitraum für einen Moment koplanar werden können. Dann können auch exzentrische

Bahnen mit den Formeln aus Abschnitt 31.4.1 näherungsweise auf ihr scheinbares relatives Bahnverhalten untersucht werden[1].

Als BEISPIEL wird in Bild 31-18 das Beispiel aus Bild 31-13 aufgenommen, hier allerdings mit exzentrischen Bahnen: die innere Bahn mit der großen Bahnhalbachse a_1=7000 km habe die Exzentrizität e_1=0.01 und die Inklination i=60°. Der zweite äußere Satellit habe die große Bahnhalbachse a_2=12000 km, die Exzentrizität e_2=0.3 und wieder die Inklination i=60°. Das Bild zeigt, dass bei Beginn der Rechnung die beiden Bahnen noch als näherungsweise koplanar aufgefasst werden können. Im ersten Umlauf des inneren Satelliten erscheint der äußere Satellit knapp 12 Minuten lang als rückläufig. Danach driften die Bahnebenen auseinander, für minimales $\dot{\zeta}$ befindet sich der äußere Satellit in Opposition aber nicht mehr auf einem (scheinbar) retrograden Bahnast. ◄

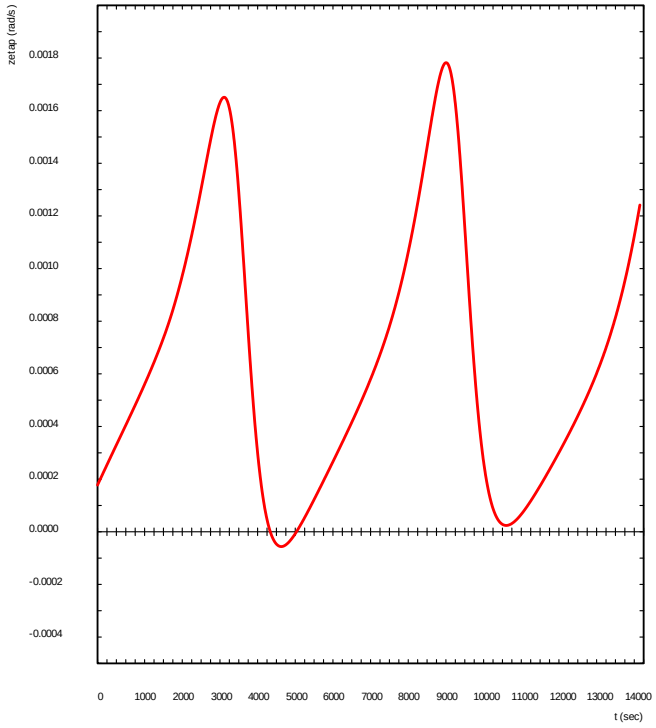


Bild 31-18: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf exzentrischen Bahnen. Die Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels wird über der Zeit aufgetragen: für $\dot{\zeta} < 0$ bewegt sich der äußere Satellit scheinbar retrograd, was im ersten Umlauf für den inneren Satelliten sichtbar wird.

Die Untersuchung des scheinbaren Bahnverhaltens zwischen zwei Satelliten ist im allgemeinen Fall wesentlich aufwendiger. Sie soll in diesem Abschnitt hergeleitet werden.

Um die Bewegung eines zweiten Satelliten auf einen ersten allgemein zu beziehen, muss die Bahn des zweiten in Koordinaten des ersten dargestellt werden. Da ein *Hansen*-System der allgemeinste Bezug einer Bahnbewegung ist und notwendig unverrückbar an die Bahnebene gekoppelt ist, sollen beide Bewegungen in *Hansen*-Koordinaten gegeben sein. Der Bezug zwischen den Systemen werde über die Kopplung in das als fundamental betrachtete Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem her-

[1] Für eine numerische Aussage kann dazu etwa die säkulare Bahndrift $\dot{\Omega}_s$ aus Formel (20.15) (Band III) herangezogen werden

gestellt. Dieses System habe die Orthonormalbasis $\mathbf{p}_i$. Die beiden *Hansen*-Systeme $\mathbf{q}^{(I)}_{1/j}, \mathbf{q}^{(I)}_{2/j}$ haben dann die Transformationen

$$\mathbf{p}_i = a^j_{k/i}\, \mathbf{q}^{(I)}_{k/j} \quad , \quad \mathbf{q}^{(I)}_{k/j} = a_{kj}{}^{i}\, \mathbf{p}_i \tag{31.42}$$

mit den Koeffizienten[1]

$$\begin{aligned}
a_{k/11} &= \cos i_k \sin\sigma_k \sin\Omega_k + \cos\sigma_k \cos\Omega_k \\
a_{k/12} &= -\cos i_k \sin\sigma_k \cos\Omega_k + \cos\sigma_k \sin\Omega_k \\
a_{k/13} &= -\sin i_k \sin\sigma_k \\
a_{k/21} &= -\cos i_k \cos\sigma_k \sin\Omega_k + \sin\sigma_k \cos\Omega_k \\
a_{k/22} &= \cos i_k \cos\sigma_k \cos\Omega_k + \sin\sigma_k \sin\Omega_k \\
a_{k/23} &= \sin i_k \cos\sigma_k \\
a_{k/31} &= \sin i_k \sin\Omega_k \\
a_{k/32} &= -\sin i_k \cos\Omega_k \\
a_{k/33} &= \cos i_k \qquad\qquad \langle k = 1,2 \quad .
\end{aligned} \tag{31.43}$$

Hier sind i, Ω die *Kepler*elemente Inklination und Rektaszension des aufsteigenden Knotens. σ ist der *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens (definiert durch $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$) bezogen auf den Ursprung O_k des jeweiligen *Hansen*-Systems. Wenn eine Lösung eines Bahnproblems mit den *Kepler*elementen a, e, i, Ω, ω bekannt ist, kann der Winkel σ durch die direkte Integration über die Zeit bzw. den *Hansen*schen Bahnwinkel

$$\sigma = \sigma_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}\cos i\, dt = \sigma_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\Omega}{d\zeta}\cos i\, d\zeta \tag{31.44}$$

erhalten werden. Je nach verwendetem Bahnmodell kann die Integration mit $\dot{\Omega}$ aus Formel[2] (11.71) numerisch oder analytisch in jedem Bahnpunkt durchgeführt werden. Eine häufige ausreichende Näherungslösung wird für die praktische Anwendung in Abschnitt 21.2.2 vorgeschlagen. Diese dürfte auch für die hier behandelte Problematik ausreichend sein. Der Anfangswinkel σ_0 kann hierbei willkürlich festgelegt werden. Bisweilen wird auch $\sigma_0 := \Omega_0 \cos i_0$ mit den Anfangswerten i_0, Ω_0 gewählt. Einmal gewählt darf σ_0 nicht verändert werden, da das zugrunde gelegte *Hansen*-system unveränderlich an die Bahnebene geknüpft ist. In den meisten Fällen der Praxis wird die folgende Näherung ausreichen

$$\sigma \approx \sigma_0 + \Delta\Omega\cos i \quad , \tag{31.45}$$

wobei die Werte $\Delta\Omega := \Omega(t) - \Omega(t_0)$, $i = i(t)$ als oskulierende Werte aus der Ephemeridenrechnung entnommen werden können. Im Verlauf eines längeren Rechenprozesses kann statt eines Epochewertes für die Epoche t_0 in jedem Schritt t_{n+1} der Bezug auf den vorhergehenden Schritt t_n genommen werden. In diesem Fall errechnet sich der *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens aus

$$\sigma = \sigma(t_{n+1}) \approx \sigma(t_n) + \left[\Omega(t_{n+1}) - \Omega(t_n)\right]\cos i(t_{n+1}) = \sigma(t_n) + \Delta\Omega\cos i \quad . \tag{31.46}$$

---

[1] Mit den Formeln (8.426) aus Abschnitt 8.12.1 (Band II)

[2] In Abschnitt 11.1.5 (Band III)

Um Eindeutigkeit zu wahren und da die trigonometrischen Funktionen der Elemente i, σ, Ω für die Transformationen (31.43) benötigt werden, wird $\Delta\Omega$ berechnet aus

$$\sin(\Delta\Omega) = \sin\Omega_{n+1}\cos\Omega_n - \cos\Omega_{n+1}\sin\Omega_n \quad . \qquad (31.47)$$

Die trigonometrischen Funktionen des *Hansen*-Winkels σ folgen dann aus

$$\begin{aligned} \sin\sigma \triangleq \sin\sigma_{n+1} &= \sin\sigma_n \cos\left[\Delta\Omega\cos i_{n+1}\right] + \cos\sigma_n \sin\left[\Delta\Omega\cos i_{n+1}\right] \\ \cos\sigma \triangleq \cos\sigma_{n+1} &= \cos\sigma_n \cos\left[\Delta\Omega\cos i_{n+1}\right] - \sin\sigma_n \sin\left[\Delta\Omega\cos i_{n+1}\right] \quad . \end{aligned} \qquad (31.48)$$

Aus dem Vergleich (nach (31.42))

$$\mathbf{p}_i = a^j_{1/i}\,\mathbf{q}^{(I)}_{1/j} = a^j_{2/i}\,\mathbf{q}^{(I)}_{2/j} \qquad \langle i, j = 1,2,3 \qquad (31.49)$$

können die Basisvektoren des *Hansen*-System des Satelliten 2 dargestellt im *Hansen*-System des Satelliten 1 gefunden werden:

$$\mathbf{q}^{(I)}_{2/j} = b_j{}^i\,\mathbf{q}^{(I)}_{1/i} \quad \langle i, j = 1,2,3 \quad . \qquad (31.50)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten b_{ji} dieser Transformation werden die folgenden Hilfsgrößen eingeführt:

$$\begin{aligned} A_1 &:= a_{2/21}\,a_{2/12} - a_{2/22}\,a_{2/11} \\ A_2 &:= a_{2/31}\,a_{2/12} - a_{2/32}\,a_{2/11} \\ A_3 &:= a_{2/21}\,a_{2/13} - a_{2/23}\,a_{2/11} \\ A_4 &:= a_{2/31}\,a_{2/13} - a_{2/33}\,a_{2/11} \\ A_5 &:= a_{2/11}\,a_{2/33} - a_{2/13}\,a_{2/31} = -A_4 \\ A_6 &:= a_{2/21}\,a_{2/33} - a_{2/23}\,a_{2/31} \\ A_7 &:= a_{2/12}\,a_{2/33} - a_{2/13}\,a_{2/32} \\ A_8 &:= a_{2/22}\,a_{2/33} - a_{2/23}\,a_{2/32} \end{aligned} \qquad (31.51)$$

$$\begin{aligned} &B_1 := A_4\,a_{2/12} - A_2\,a_{2/13} \;,\; B_2 := -A_4\,a_{2/11} \;,\; B_3 := A_2\,a_{2/11} \;, \\ &B_4 := A_8\,a_{2/33} \;,\; B_5 := -A_6\,a_{2/33} \;,\; B_6 := A_6\,a_{2/32} - A_8\,a_{2/31} \;, \\ &B_7 := A_3\,a_{2/12} - A_1\,a_{2/13} \;.\; B_8 := -A_3\,a_{2/11} \;,\; B_9 := A_1\,a_{2/11} \end{aligned} \qquad (31.52)$$

$$D_1 := A_5\,A_8 - A_6\,A_7 \quad , \quad D_2 := A_1\,A_4 - A_2\,A_3 \qquad (31.53)$$

Damit lauten die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \left(B_4\, a_{1/11} + B_5\, a_{1/12} + B_6\, a_{1/13} \right) / D_1 \\
b_{12} &= \left(B_4\, a_{1/21} + B_5\, a_{1/22} + B_6\, a_{1/23} \right) / D_1 \\
b_{13} &= \left(B_4\, a_{1/31} + B_5\, a_{1/32} + B_6\, a_{1/33} \right) / D_1 \\
b_{21} &= \left(B_1\, a_{1/11} + B_2\, a_{1/12} + B_3\, a_{1/13} \right) / D_2 \\
b_{22} &= \left(B_1\, a_{1/21} + B_2\, a_{1/22} + B_3\, a_{1/23} \right) / D_2 \\
b_{23} &= \left(B_1\, a_{1/31} + B_2\, a_{1/32} + B_3\, a_{1/33} \right) / D_2 \\
b_{31} &= -\left(B_7\, a_{1/11} + B_8\, a_{1/12} + B_9\, a_{1/13} \right) / D_1 \\
b_{32} &= -\left(B_7\, a_{1/21} + B_8\, a_{1/22} + B_9\, a_{1/23} \right) / D_1 \\
b_{33} &= -\left(B_7\, a_{1/31} + B_8\, a_{1/32} + B_9\, a_{1/33} \right) / D_1 \quad .
\end{aligned}
\qquad (31.54)
$$

Aus einer Ephemeridenrechnung seien die Ortsvektoren der beiden Satelliten im Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – System mit ihren Koeffizienten $x_{k/i}$ bekannt:

$$
\mathbf{r}_k = x_{k/}{}^{i}\, \mathbf{p}_i \qquad \langle k = 1,2;\ i = 1,2,3 \quad . \qquad (31.55)
$$

Die Basisvektoren der beiden *Hansen*-Systeme seien ebenfalls im $\mathbf{p}_i$ – System gegeben:

$$
\mathbf{q}^{(I)}_{k/j} = a_{k/j}{}^{i}\, \mathbf{p}_i \qquad \langle k = 1,2;\ i, j = 1,2,3 \quad . \qquad (31.56)
$$

In den beiden *Hansen*-Systemen haben die Ortsvektoren mit den auf den jeweiligen Ursprung bezogenen *Hansen*-Winkel ζ_k die Darstellung

$$
\mathbf{r}_k = r_k \left(\mathbf{q}^{(I)}_{k/1} \cos\zeta_k + \mathbf{q}^{(I)}_{k/2} \sin\zeta_k \right) \qquad \langle k = 1,2 \quad . \qquad (31.57)
$$

Die ζ_k-Winkel können durch skalare Multiplikation der Ortsvektoren (31.55) mit den Basisvektoren (31.56) erhalten werden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{q}^{(I)}_{k/1} &= x_{k/1}\, a_{k/11} + x_{k/2}\, a_{k/12} + x_{k/3}\, a_{k/13} = r_k \cos\zeta_k \\
\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{q}^{(I)}_{k/2} &= x_{k/1}\, a_{k/21} + x_{k/2}\, a_{k/22} + x_{k/3}\, a_{k/23} = r_k \sin\zeta_k \quad .
\end{aligned}
\qquad (31.58)
$$

Der relative Ortsvektor, unter dem Satellit 2 von Satellit 1 aus beobachtet werden kann, habe im *Hansen*-System von Satellit 1 die Darstellung

$$
\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 =: c^j\, \mathbf{q}^{(I)}_{1/j} \qquad . \qquad (31.59)
$$

Die Koeffizienten c_j werden aus

$$
\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = r_2 \left[\cos\zeta_2\, \mathbf{q}^{(I)}_{2/1} + \sin\zeta_2\, \mathbf{q}^{(I)}_{2/2} \right] - r_1 \left[\cos\zeta_1\, \mathbf{q}^{(I)}_{1/1} + \sin\zeta_1\, \mathbf{q}^{(I)}_{1/2} \right] \qquad (31.60)
$$

mit Hilfe der Transformation (31.50) erhalten

$$
\begin{aligned}
c_1 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{11} + \sin\zeta_2\, b_{21} \right) - r_1 \cos\zeta_1 \\
c_2 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{12} + \sin\zeta_2\, b_{22} \right) - r_1 \sin\zeta_1 \\
c_3 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{13} + \sin\zeta_2\, b_{23} \right) \qquad .
\end{aligned}
\qquad (31.61)
$$

Mit diesen Koeffizienten kann die Blickrichtung von Satellit 1 bezogen auf die (momentane) Bahnebene dieses Satelliten zu Satellit 2 in Beobachtungswinkeln dargestellt werden (Bild 31-19). In der

Bahnebene werde dazu der auf den Anfangspunkt des *Hansen*-Systems bezogene Winkel ζ_B eingeführt, aus der Bahnebene heraus die Deklination δ_B. Diese Winkel können berechnet werden aus

$$\begin{aligned} c_1 &= \rho \cos\delta_B \cos\zeta_B \\ c_2 &= \rho \cos\delta_B \sin\zeta_B \\ c_3 &= \rho \sin\delta_B \quad . \end{aligned} \tag{31.62}$$

Insbesondere sind

$$\begin{aligned} \rho\cos\delta_B &= c_1\cos\zeta_B + c_2 \sin\zeta_B = \sqrt{1-c_3^2} \geq 0 \\ \cos\zeta_B &= \frac{c_1}{\rho\cos\delta_B} \;,\; \sin\zeta_B = \frac{c_2}{\rho\cos\delta_B} \quad . \end{aligned} \tag{31.63}$$

Die Variationen $\dot\zeta_B, \dot\delta_B$ der Winkel ζ_B in der Bahnebene des ersten Satelliten und mit der entsprechenden Deklination δ_B können aus den Beziehungen (31.62) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \dot\zeta_B &= \frac{-\dot c_1 \sin\zeta_B + \dot c_2 \cos\zeta_B}{c_1\cos\zeta_B + c_2\sin\zeta_B} = \frac{-\dot c_1 \sin\zeta_B + \dot c_2 \cos\zeta_B}{\rho\cos\zeta_B} \\ \rho^2\,\dot\delta_B &= \left(\dot c_3 c_1 - c_3 \dot c_1\right)\cos\zeta_B + \left(\dot c_3 c_2 - c_3 \dot c_2\right)\sin\zeta_B \quad . \end{aligned} \tag{31.64}$$

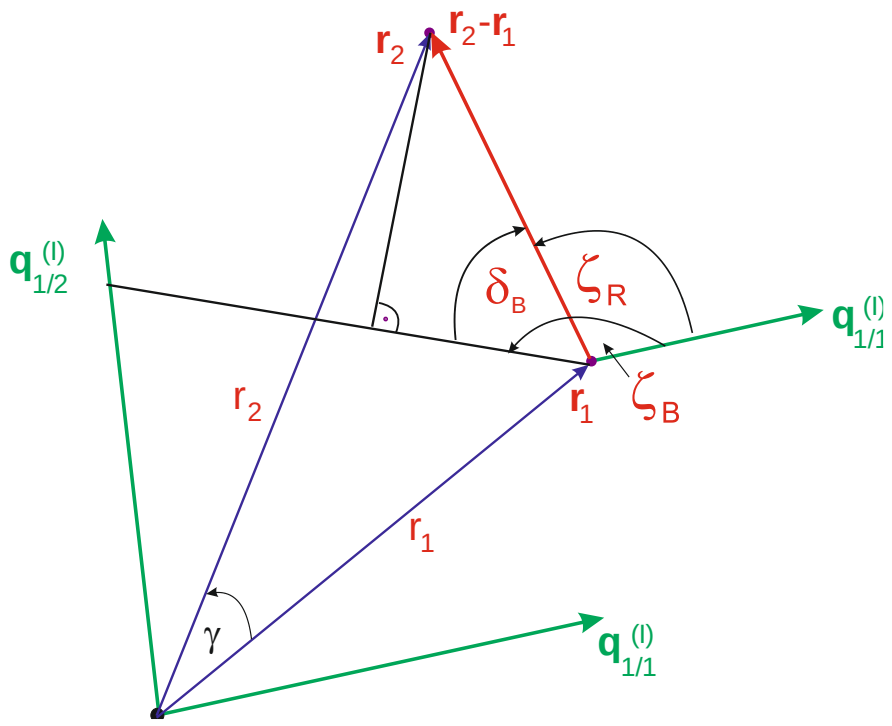


Bild 31-19: Die Beobachtung des zweiten Satelliten vom ersten Satelliten aus bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-System des ersten Satelliten

Damit kann die relative Bewegung von Satellit 2 gesehen von Satellit 1 aus ähnlich wie die relative Bewegung eines Satelliten gesehen von einem Beobachtungsort auf der Erde untersucht werden[1].

[1] siehe in den Kapiteln 26 und 27

Der relative Ortsvektor schließe mit dem ersten Basisvektor des *Hansen*-Systems 1 den Winkel ζ_R ein. Der Betrag dieses Vektors sei $\rho := |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Dann kann der Zwischenwinkel, der nur zwischen 0° und 180° liegen kann, berechnet werden aus

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{q}_{1/1}^{(I)} = \rho \cos \zeta_R \quad . \tag{31.65}$$

Mit den Koeffizienten c_j aus der Definition (31.59) wird

$$\begin{aligned} &\rho \cos \zeta_R = c_1 \\ &\rho \sin \zeta_R = \sqrt{\rho^2 - c_1^2} = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \geq 0 \quad \langle \zeta_R \in [0°, 180°] \quad . \end{aligned} \tag{31.66}$$

Analog zu den beiden vorhergehenden Abschnitten des koplanaren Falles interessiert auch hier die Variation $\dot{\zeta}_R$ des relativen *Hansen*-Winkels ζ_R, der im Fall scheinbar stationärer Punkte des Satelliten 2 gesehen vom Satelliten 1 aus verschwindet, im Fall scheinbar rückläufiger Bewegung negativ wird. Dazu werden die Variationen der Ausdrücke (31.66)

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} \cos \zeta_R - \rho \dot{\zeta}_R \sin \zeta_R = \dot{c}_1 \\ &\dot{\rho} \sin \zeta_R + \rho \dot{\zeta}_R \cos \zeta_R = \frac{c_2 \dot{c}_2 + c_3 \dot{c}_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}} \end{aligned} \tag{31.67}$$

gebildet. Nach Elimination der Variation $\dot{\rho}$ der relativen Distanz zwischen den beiden Satelliten bleibt in der Form des relativen Flächensatzes der Ausdruck

$$\rho^2 \dot{\zeta}_R = -\dot{c}_1 \sqrt{c_2^2 + c_3^2} + c_1 \frac{c_2 \dot{c}_2 + c_3 \dot{c}_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}} \quad . \tag{31.68}$$

Um die Variation des relativen Bahnwinkels ζ_R und der Ortswinkel ζ_B, δ_B berechnen zu können, müssen die Variationen der Parameter c_i und aller darin enthaltenen Größen bekannt sein. Aus den Gleichungen (31.61) folgen

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \dot{r}_2 (\cos \zeta_2 b_{11} + \sin \zeta_2 b_{21}) - \dot{r}_1 \cos \zeta_1 + \dot{\zeta}_1 r_1 \sin \zeta_1 + \\ &\quad + r_2 \left[\dot{\zeta}_2 (-\sin \zeta_2 b_{11} + \cos \zeta_2 b_{21}) + \dot{b}_{11} \cos \zeta_2 + \dot{b}_{21} \sin \zeta_2 \right] \\ \dot{c}_2 &= \dot{r}_2 (\cos \zeta_2 b_{12} + \sin \zeta_2 b_{22}) - \dot{r}_1 \sin \zeta_1 - \dot{\zeta}_1 r_1 \cos \zeta_1 + \\ &\quad + r_2 \left[\dot{\zeta}_2 (-\sin \zeta_2 b_{12} + \cos \zeta_2 b_{22}) + \dot{b}_{12} \cos \zeta_2 + \dot{b}_{22} \sin \zeta_2 \right] \\ \dot{c}_3 &= \dot{r}_2 (\cos \zeta_2 b_{13} + \sin \zeta_2 b_{23}) + \\ &\quad + r_2 \left[\dot{\zeta}_2 (-\sin \zeta_2 b_{13} + \cos \zeta_2 b_{23}) + \dot{b}_{13} \cos \zeta_2 + \dot{b}_{23} \sin \zeta_2 \right] \end{aligned} \tag{31.69}$$

Die radialen Geschwindigkeiten sind aus den vorgegebenen Zustandsvektoren bekannt

$$\dot{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1}{r_1} \quad , \quad \dot{r}_2 = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{r_2} \quad . \tag{31.70}$$

Die Variationen des *Hansen*schen Bahnwinkels folgen aus dem jeweils gültigen Flächensatz

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{G_1}{r_1^2} \quad , \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{G_2}{r_2^2} \quad . \tag{31.71}$$

Die Flächenparameter G_k können im vorliegenden Fall der Untersuchung der Bewegung von Erdsatelliten auf ellipsennahen Bahnen auf die große Bahnhalbachse und die Exzentrizität zurückgeführt werden, die aus der Ephemeridenrechnung bekannt sind:

$$G_1 = \sqrt{\mu\, a_1 \left(1 - e_1^2\right)} \quad , \quad G_2 = \sqrt{\mu\, a_2 \left(1 - e_2^2\right)} \quad . \tag{31.72}$$

Die noch fehlenden $\dot{b}_{ij}$ können aus den Gleichungen (31.54) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{11} &= \left\{ \left[\dot{B}_4\, a_{1/11} + B_4\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_5\, a_{1/12} + B_5\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_6\, a_{1/13} + B_6\, \dot{a}_{1/13} \right] - \dot{D}_1\, b_{11} \right\} / D_1 \\
\dot{b}_{12} &= \left\{ \left[\dot{B}_4\, a_{1/21} + B_4\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_5\, a_{1/22} + B_5\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_6\, a_{1/23} + B_6\, \dot{a}_{1/23} \right] - \dot{D}_1\, b_{12} \right\} / D_1 \\
\dot{b}_{13} &= \left\{ \left[\dot{B}_4\, a_{1/31} + B_4\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_5\, a_{1/32} + B_5\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_6\, a_{1/33} + B_6\, \dot{a}_{1/33} \right] - \dot{D}_1\, b_{13} \right\} / D_1 \\
\dot{b}_{21} &= \left\{ \left[\dot{B}_1\, a_{1/11} + B_1\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_2\, a_{1/12} + B_2\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_3\, a_{1/13} + B_3\, \dot{a}_{1/13} \right] - \dot{D}_2\, b_{21} \right\} / D_2 \\
\dot{b}_{22} &= \left\{ \left[\dot{B}_1\, a_{1/21} + B_1\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_2\, a_{1/22} + B_2\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_3\, a_{1/23} + B_3\, \dot{a}_{1/23} \right] - \dot{D}_2\, b_{22} \right\} / D_2 \\
\dot{b}_{23} &= \left\{ \left[\dot{B}_1\, a_{1/31} + B_1\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_2\, a_{1/32} + B_2\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_3\, a_{1/33} + B_3\, \dot{a}_{1/33} \right] - \dot{D}_2\, b_{23} \right\} / D_2 \\
\dot{b}_{31} &= \left\{ -\left[\dot{B}_7\, a_{1/11} + B_7\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_8\, a_{1/12} + B_8\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_9\, a_{1/13} + B_9\, \dot{a}_{1/13} \right] - \dot{D}_1\, b_{31} \right\} / D_1 \\
\dot{b}_{32} &= \left\{ -\left[\dot{B}_7\, a_{1/21} + B_7\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_8\, a_{1/22} + B_8\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_9\, a_{1/23} + B_9\, \dot{a}_{1/23} \right] - \dot{D}_1\, b_{32} \right\} / D_1 \\
\dot{b}_{33} &= \left\{ -\left[\dot{B}_7\, a_{1/31} + B_7\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_8\, a_{1/32} + B_8\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_9\, a_{1/33} + B_9\, \dot{a}_{1/33} \right] - \dot{D}_1\, b_{33} \right\} / D_1
\end{aligned} \tag{31.73}$$

Hier werden folgende Variationsausdrücke benötigt: mit (31.53)

$$\begin{aligned}
\dot{D}_1 &= \dot{A}_5\, A_8 + A_5\, \dot{A}_8 - \dot{A}_6\, A_7 - A_6\, \dot{A}_7 \\
\dot{D}_2 &= \dot{A}_1\, A_4 + A_1\, \dot{A}_4 - \dot{A}_2\, A_3 - A_2\, \dot{A}_3
\end{aligned} \tag{31.74}$$

sowie mit (31.52)

$$\begin{aligned}
\dot{B}_1 &= \dot{A}_4\, a_{2/12} + A_4\, \dot{a}_{2/12} - \dot{A}_2\, a_{2/13} - A_2\, \dot{a}_{2/13} \\
\dot{B}_2 &= -\dot{A}_4\, a_{2/11} - A_4\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_3 &= \dot{A}_2\, a_{2/11} + A_2\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_4 &= \dot{A}_8\, a_{2/33} + A_8\, \dot{a}_{2/33} \\
\dot{B}_5 &= -\dot{A}_6\, a_{2/33} - A_6\, \dot{a}_{2/33} \\
\dot{B}_6 &= \dot{A}_6\, a_{2/32} + A_6\, \dot{a}_{2/32} - \dot{A}_8\, a_{2/31} - A_8\, \dot{a}_{2/31} \\
\dot{B}_7 &= \dot{A}_3\, a_{2/12} + A_3\, \dot{a}_{2/12} - \dot{A}_1\, a_{2/13} - A_1\, \dot{a}_{2/13} \\
\dot{B}_8 &= -\dot{A}_3\, a_{2/11} - A_3\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_9 &= \dot{A}_1\, a_{2/11} + A_1\, \dot{a}_{2/11}
\end{aligned} \tag{31.75}$$

Aus den Zuordnungen (31.51) folgen

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_1 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/12} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/12} - \dot{a}_{2/22}\, a_{2/11} - a_{2/22}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_2 &= \dot{a}_{2/31}\, a_{2/12} + a_{2/31}\, \dot{a}_{2/12} - \dot{a}_{2/32}\, a_{2/11} - a_{2/32}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_3 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/13} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/13} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/11} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_4 &= \dot{a}_{2/31}\, a_{2/13} + a_{2/31}\, \dot{a}_{2/13} - \dot{a}_{2/33}\, a_{2/11} - a_{2/33}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_5 &= \dot{a}_{2/11}\, a_{2/33} + a_{2/11}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/13}\, a_{2/31} - a_{2/13}\, \dot{a}_{2/31} = -\dot{A}_4 \\
\dot{A}_6 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/33} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/31} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/31} \\
\dot{A}_7 &= \dot{a}_{2/12}\, a_{2/33} + a_{2/12}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/13}\, a_{2/32} - a_{2/13}\, \dot{a}_{2/32} \\
\dot{A}_8 &= \dot{a}_{2/22}\, a_{2/33} + a_{2/22}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/32} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/33}
\end{aligned}
\qquad (31.76)
$$

Schließlich müssen noch die $\dot{a}_{k/ij}\ \langle k = 1,2;\ i, j = 1,2,3$ zur Verfügung gestellt werden. Sie sind in den Ausdrücken (8.428) (Abschnitt 8.12.2, Band II) gegeben. Unter Berücksichtigung der Variationsgleichung $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$ haben sie im vorliegenden Zusammenhang die Darstellung (mit *k*=1,2 für die beiden zu betrachtenden Satellitenbahnen)

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{k/11} &= -(i_k)^{\cdot}\, a_{k/31} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k \left(a_{k/21} \cos i_k + a_{k/12} \right) \\
\dot{a}_{k/12} &= -(i_k)^{\cdot}\, a_{k/32} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k \left(a_{k/22} \cos i_k + a_{k/11} \right) \\
\dot{a}_{k/13} &= (i_k)^{\cdot}\, a_{k/33} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k\, a_{k/23} \cos i_k \\
\dot{a}_{k/21} &= (i_k)^{\cdot}\, a_{k/31} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k \left(a_{k/11} \cos i_k - a_{k/22} \right) \\
\dot{a}_{k/22} &= (i_k)^{\cdot}\, a_{k/32} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k \left(a_{k/12} \cos i_k + a_{k/21} \right) \\
\dot{a}_{k/23} &= (i_k)^{\cdot}\, a_{k/33} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k\, a_{k/13} \cos i_k \\
\dot{a}_{k/31} &= (i_k)^{\cdot}\, a_{k/33} \cos\Omega_k - \dot{\Omega}_k\, a_{k/32} \\
\dot{a}_{k/32} &= -(i_k)^{\cdot}\, a_{k/32} \cos\Omega_k + \dot{\Omega}_k\, a_{k/31} \\
\dot{a}_{k/33} &= -(i_k)^{\cdot} \sin i_k .
\end{aligned}
\qquad (31.77)
$$

Die allgemeinen Variationsgleichungen für die Inklination und die Rektaszension des aufsteigenden Knotens sind in Abschnitt 11.1.5 (Band III) in den Ausdrücken (11.70) und (11.71) gegeben:

$$
(i_k)^{\cdot} = \frac{r_k}{G_k} \cos u_k\, b_{Nk} \quad , \quad \dot{\Omega}_k = \frac{r_k \sin u_k}{G_k \sin i_k} b_{Nk} \qquad \langle k = 1,2 \quad . \qquad (31.78)
$$

Das Argument der Breite u_k ist für beide Bahnen aus der Ephemeridenrechnung bekannt. Der Flächenparameter G_k ist im vorliegenden Problem durch (31.72) gegeben. Die normale Beschleunigung b_{Nk} muss aus dem verwendeten Bahnmodell bekannt sein. Für Erdsatelliten genügt normalerweise die Darstellung (17.33) (in Abschnitt 17.2.2 (Band II)). Im Rahmen einer Bahnanalyse wird häufig nur der säkulare Epocheanteil der Variationen der *Kepler*elemente aus (20.12) und (20.15) genommen, was den Rechenprozess erheblich vereinfachen kann.

BEISPIEL: Zur Demonstration des hier hergeleiteten Verfahrens zur Beobachtung eines Satelliten von einem anderen Satelliten aus, werden zwei kreisförmige Satellitenbahnen betrachtet. Der beobachtende Satellit bewege sich in der Äquatorebene mit den mittleren Epoche-*Kepler*elementen

$$
a_1 = 7000\,\mathrm{km}, \mathrm{e}_1 = 0.0, i_1 = 0°, \Omega_1 = 0°, \omega_1 = 0° \quad .
$$

Der zweite Satellit bewege sich auf einer höheren Bahn, die gegenüber der Äquatorebene um 20° geneigt sei:

$$a_2 = 12000\,\text{km}, \text{e}_2 = 0.0, i_2 = 20°, \Omega_2 = 0°, \omega_2 = 0° \ .$$

Zur Epoche befinden sich beide Satelliten über dem Äquator. Die $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Systems des ersten Satelliten werde so gewählt, dass der zweite Satellit in diesem Moment sich genau in dieser Richtung befindet. Dies gibt eine charakteristische Darstellung, der gegenüber sich die relative Darstellung im Laufe der Zeit erheblich verändern muss.

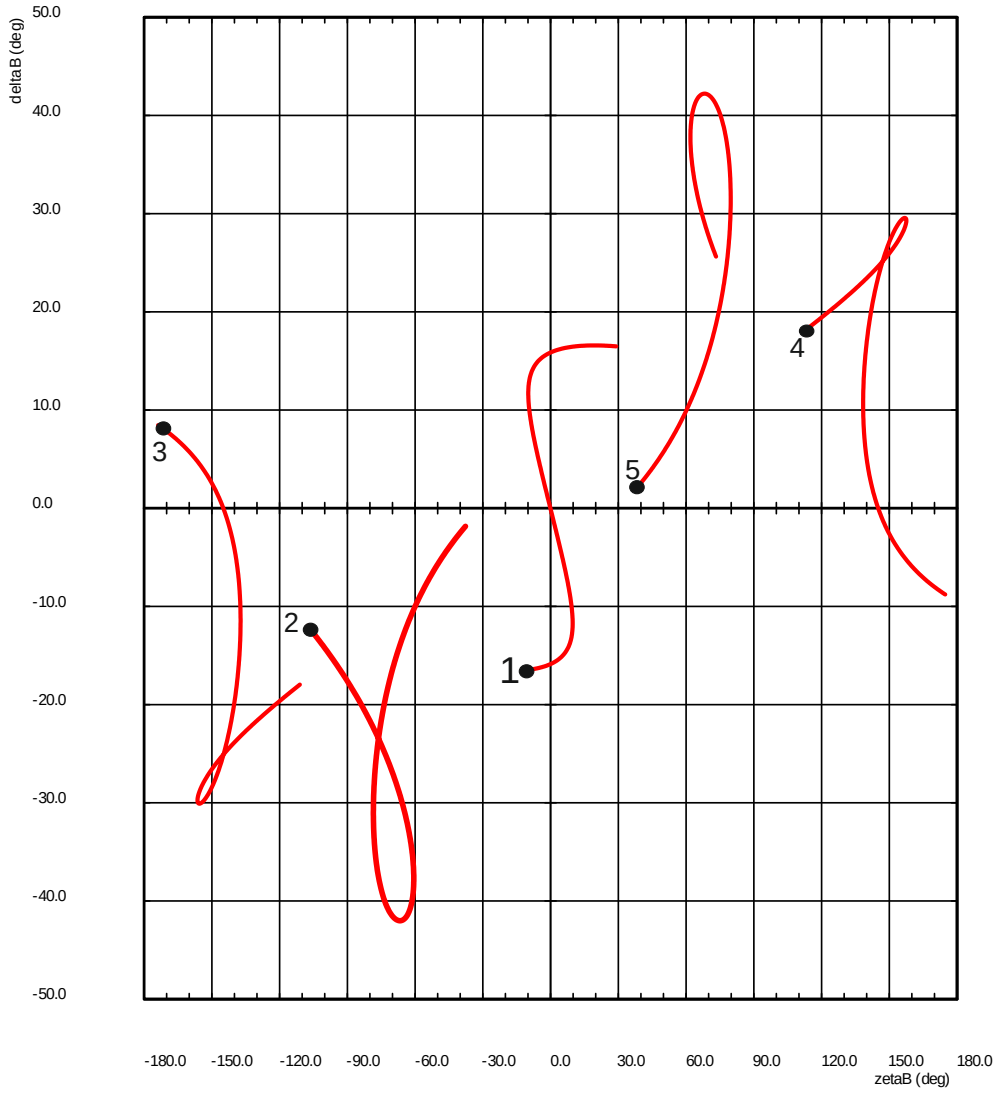


Bild 31-20: Verlauf der lokalen Beobachtungswinkel δ_B über ζ_B bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-Systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°)

Bild 31-20 zeigt den Verlauf der Beobachtungswinkel des zweiten Satelliten im Gesichtsfeld des ersten Satelliten. Basisebene ist die Bahnebene des ersten Satelliten. In ihr wird der Azimutwinkel ζ_B gezählt, wobei der Nullpunkt in der Richtung der $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse liegt. Die Abweichung von der Bahnebene wird durch den Elevationswinkel δ_B charakterisiert. Die Darstellung erfasst den gesamten „Sichthimmel“ des ersten Satelliten. Wird die Sichtlinie zwischen den beiden Satelliten unter-

brochen – der beobachtete Satellit befindet sich „hinter“ dem Erdkörper -, wird der Blickkontakt unterbrochen. Die hier gewählte Darstellung beginnt eine halbe Stunde vor der Epoche. Im Moment der Epoche hat die Sichtrichtung die Sichtwinkel $\zeta_{B0} = \delta_{B0} = 0°$. Der Verlauf der Sichtrichtung durchläuft hier die charakteristische S-Kurve. Die anderen Begegnungen weisen Schleifen und Doppelpunkte auf. Auch Umkehrpunkte der scheinbaren Bewegungsrichtung und scheinbar stationäre Punkte lassen sich erkennen. Um die zeitliche Zuordnung zu erkennen, wird der separate Verlauf der Beobachtung über der Zeit benötigt. Dies geschieht in Bild 31-21. Hier wird der Verlauf der Elevation δ_B aufgetragen, in diesem Bild über 12.5 Stunden. Damit kann die zeitliche Zuordnung in Bild 31-20 erfolgen.

Die Variationen der beiden Beobachtungswinkel entsprechend den Formeln (31.64) sind in Bild 31-22 aufgetragen: in roter Farbe die Variationen $\dot{\zeta}_B$, darüber in blauer Farbe die Variationen $\dot{\delta}_B$. Negative Werte in $\dot{\zeta}_B$ zeigen Rückläufigkeit in azimutaler Bewegung, in $\dot{\delta}_B$ absteigende Bewegung. Bei Nulldurchgang ändert sich die Bewegungsrichtung. Die Zuordnung kann durch Vergleich mit den Kurven in Bild 31-20 nachvollzogen werden.

In Ergänzung dieser Darstellungen werde auch der Verlauf des relativen *Hansen*-Winkels ζ_R untersucht, der entsprechend den Formeln (31.66) die relative Sicht von Satellit 1 zu Satellit 2 bei Bezug auf die $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse des ersten Satelliten beschreibt. Da dieser Winkel nur im Bereich $\zeta_R \in [0°,180°]$ gezählt wird, ist im Moment der Epoche eine Umkehr dieses Winkels zu erwarten. Dies wird in Bild 31-23 demonstriert, wo auch der weitere Verlauf dieses Winkels für die folgenden Sichtbarkeitspassagen dargestellt wird. Die Variationen dieses Winkels sind in Bild 31-24 berechnet. Das Sprungverhalten im Moment der Epoche ist deutlich erkennbar. ◄

Hinweis: Aus der Theorie der Planetenbewegung, die im Rahmen der klassischen Himmelsmechanik und ihrer Anwendungen entwickelt worden ist, sind auch Aussagen über das scheinbare Bewegungsverhalten der Planeten von der Erde aus gegeben. Diese Aussagen können wesentlich verallgemeinert auf das scheinbare Bewegungsverhalten von Erdsatelliten übertragen werden, wie es in diesem Kapitel versucht wurde. In diesem Zusammenhang kann auf einige Sätze hingewiesen werden[1], welche Bedingungen zur Bildung von Doppelpunkten und Schleifen sowie zur Berechnung der Oppositionszeit zum Inhalt haben. Entsprechende Überlegungen finden sich im Zusammenhang mit der Meridianbezogenen sowie der topozentrischen Satellitenbewegung in den Kapiteln 26 und 27. Eine allgemeingültige Übertragung auf die synodische Bewegung zweier Satelliten soll hier nicht weiterverfolgt werden. Der allgemeine Fall beliebiger und vor allem auch exzentrischer Bahnen muss im Spezialfall direkt untersucht werden. ◄

[1] etwa nach BAUSCHINGER, J. [1928], p. 253

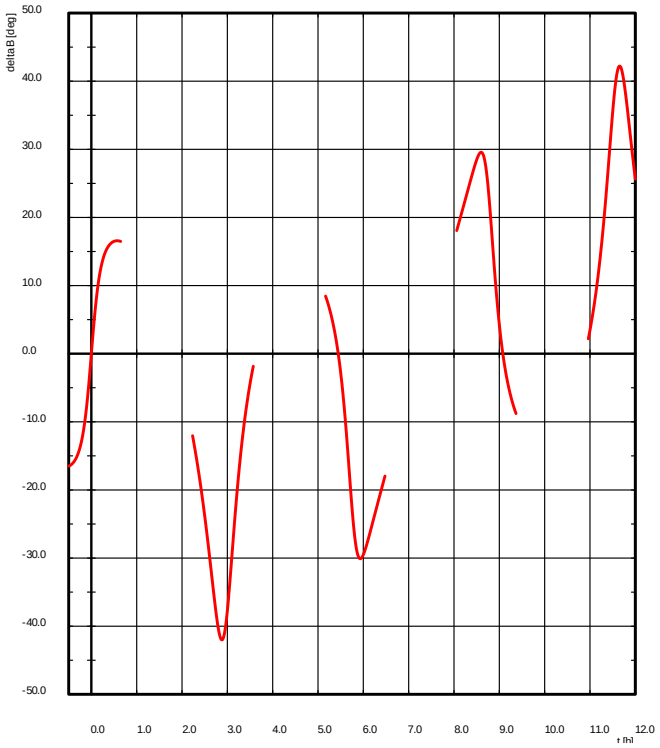


Bild 31-21: Verlauf des lokalen Beobachtungswinkel Elevation δ_B über der Zeit bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°)

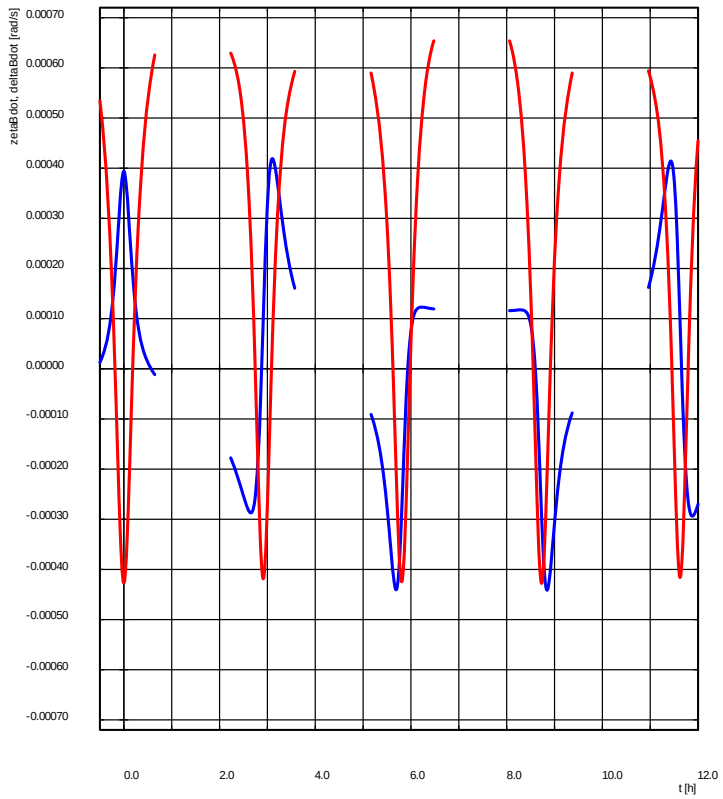


Bild 31-22: Die Variationen der lokalen Beobachtungswinkel (ζ_B, δ_B) von Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°) gesehen vom Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) aus: $\dot{\zeta}_B$ in rot, $\dot{\delta}_B$ in blau

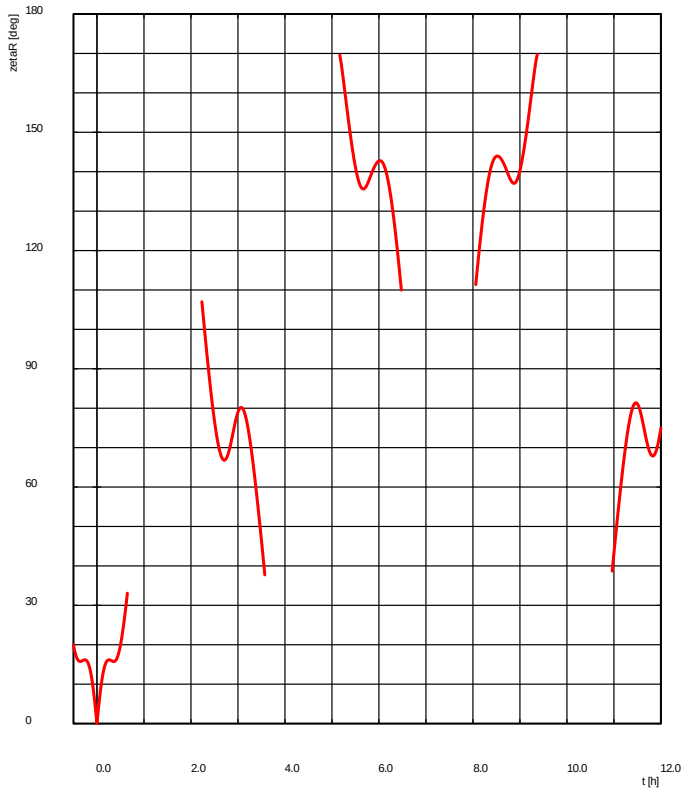


Bild 31-23: Verlauf des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) zu Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°)

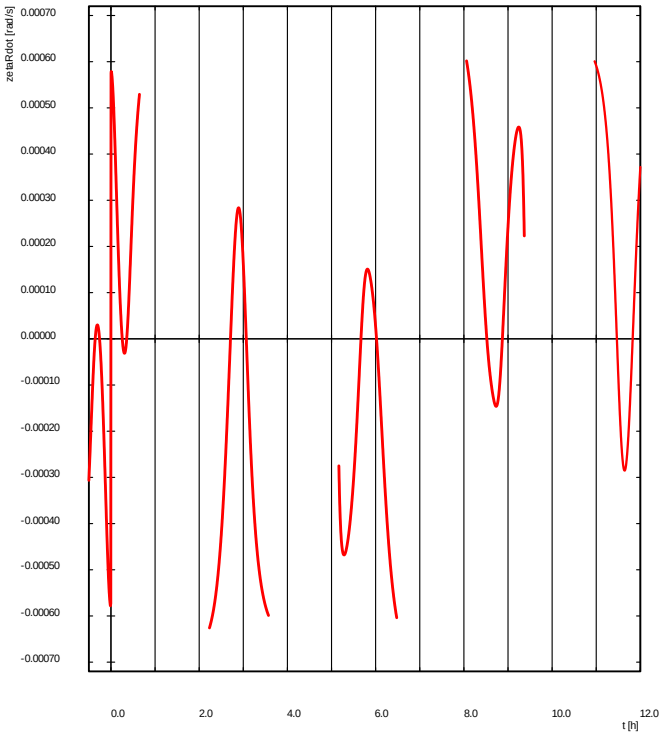


Bild 31-24: Die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satellit 1 (a=7000 km, e=0.0, i=0°) zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°)

Schrifttum zu Band IV

In diesem Literaturverzeichnis sind nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur aufgenommen. Einige weitere Einzelreferenzen sind in direktem Bezug im fortlaufenden Text enthalten. Siehe zur Ergänzung auch das ausführliche Literaturverzeichnis in Band I.

AA 1984 [1983]: *The Astronomical Almanac for the Year 1984*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2004 [2002]: *The Astronomical Almanac for the Year 2004*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2015 [2014]: The Astronomical Almanac for the year 2015 , ISBN 978-0-7077-41499, ISSN 0737-6421, published by the United Kingdom Hydrographic Office http://www.ukho.gov.uk , Crown Copyright 2014BATTIN, R. H. [1987]: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

AKILA, S. AND C. K. RAJASINGH [1983]: 'Statistical Visibility Analysis of near Earth circular orbits', Orbital Mechanics Section, Mission Operations and Planning Division, ISRO Satellite Centre, Bangalore – 560058, December 1983, Doc. No. ISAC-42-83-12-05-016

BATTIN, R. H. [1987]: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BAUSCHINGER, J. [1928]: *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Zweite Auflage, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig

BECKER, Friedrich [1968]: *Geschichte der Astronomie*, BI Hochschultaschenbücher, 298/298a, Mannheim

BECKMAN, MARK & MARCO CONCHA [1998]: 'Lunar Prospector Orbit Determination Results', AIAA 98-4561

BLANCHARD, DOUGLAS [1987]: 'Planetary Exploration in the 1990's', AAS 87-639

BLITZER, L. [1957]: 'Effect of Earth's Oblateness on the Period of a Satellite', *Jet Propulsion*, Vol. **27**, p.405-406

BLITZER, L. [1964]: 'Nodal Period of an Earth Satellite', *AIAA Journal* ***2***, No. 8, 1459-1460

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996]: *Theory of Orbits, Volume 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, ISBN 3-540-58963-5 Springer Verlag, Berlin Heidelberg NewYork,

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1998]: *Theory of Orbits, Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*, ISSN 0941-7834, ISBN 3-540-60355-7 Springer Verlag, Berlin Heidelberg NewYork

BÖHNARDT, H., H. RUEDER, M. SCHNEIDER [1981]: 'Modelle des Strahlungsdrucks für die Theorie der Satellitenbahnen', *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerichen Akademie der Wissenschaften*, Reihe **A**, Theoretische Geodäsie, Heft Nr. 93; ISBN 3-7696-81754

BOHRMANN, A. [1963]: *Bahnen künstlicher Satelliten,* BI Hochschultaschenbücher Nr. 40, Mannheim; zweite Auflage 1966

BRENDEL, MARTIN [1905]: 'Theorie des Mondes', *Astronomische Mittheilungen der Königlichen Sternwarte zu Göttingen,* Achter Theil. Aus den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge. Band III. No.4. Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

BRETAGNON, P. AND G. FRANCOU [1988]: 'Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions', *Astronomy and Astrophysics* **202**, 309–315

BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962]: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Frankfurt/Main

BROUWER, D. [1959]: 'Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **64**, 378–397

BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961]: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press

BROWN, E. W. [1896/1960]: *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge University Press, Cambridge; Neuauflage: Dover Publication, New York 1960

BROWN, E. W. [1897-1908]: 'Theory of the Moon containing a new calculation of the expressions for the coordinates of the Moon in terms of time', *Memoirs Roy. Astronom. Soc.*, London

Brown, E. W. [1936], 'On the Calculation of the Principal Parts of the Motions of the Lunar Perigee and Node', *Astronomical Journal*, **45**, No. 1044, pp. 84-88

BROWN, E. W. and CLARENCE A. SHOOK, [1933]: *Planetary Theory*, Cambridge at the University Press, Cambridge; Cambridge University Press London, New York, Toronto, Bombay, Calcutta, Madras, Tokyo

BRUMBERG, V. A. [1995]: *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BRUMBERG, V. A.; L. S. EVDKIMOVA and N. G. KOCHINA [1971]: 'Analytical methods for the orbits of artificial satellites of the Moon', *Celestial Mechanics* **3**, pp. 197-221

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968]: *Himmelsmechanik II,* BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

BURNS, RICH. et al. [2000]: 'Solar Radiation Pressure Effects on Formation Flying of Satellites with Different Area to Mass Ratios', Paper AIAA-2000-4132, presented at AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Denver, Co.

CAPDEROU, MICHEL [2003]: *Satellites, Orbites et Missions* , Springer-Verlag France, ISBN 2-287-59772-7

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. [1976]: *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

Cayley, A. [1857]: 'On Hansen's Lunar Theory', *Quarterly Mathematical Journal*, Vol. **1**, pp. 112-125 (oder in: *Coll. Works*, Vol. III, 1890)

CLAUS, A. J. AND LUBOWE, A. G. [1963]: 'A High Accuracy Perturbation Method with Direct Application to Communication Satellite Orbit Prediction', *Astronautica Acta*, Vol. **IX** Fasc. 5-6, 275–301

CLEMENCE, G. M. [1949]: 'First-Order Theory of Mars', *Astronomical Papers*, prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. **XI** Part II, United Government Printing Office, Washington

CLOHESSY, W. H. AND WILTSHIRE, R. S. [1960]: 'Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous', *Journal of the Aerospace Sciences*, **27** (9), 653–674

COFFEY, S. L., DEPRIT, A. AND DEPRIT E. [1994]: 'Frozen Orbits for Satellites close to an Earth-like Planet*', Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **59**, 37-72

COOK, A. H. [1988]: *The Motion of the Moon*, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia

COOK, G. E. [1962]: 'Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol **6**, 271

COOK, RICHARD A.; ANDREY B. SERGEYEVSKY; EDWARD A. BELBRUNO and THEODORE H. SWEETSER [1990]: 'Return to the Moon: the lunar observer mission', AIAA-90-2888-CP

COOK, RICHARD A. and THEODORE H. SWEETSER [1992]: 'Orbit Maintenance for low altitude near-circular lunar orbits', AIAA-92-185

COUNSELMAN, C. C. [1970]: 'VLBI observations of ALSEP transmitters', Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Dept. of Earth and Planetary Sciences (MJ700802), 3153 HC A02/MF A01

CUTTING, E., BORN, G. H., FRAUTNICK, J. C., MCLAUGHLIN, W. I., NEILSON, R. A., THIELEN, J. A. [1977]: 'Mission Design for SEASAT-A, An Oceanographic Satellite', AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting , Los Angeles, Calif. January 24–26, 1977, AIAA 77-31

CUTTING, E., BORN, G. H., FRAUTNIK, J. C. [1978], 'Orbit Analysis for SEASAT-A', The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. **XXVI**, No. 4, pp. 315-342, Oct.-Dec., 1978

DANJON, A. [1980]: *Astronomie Générale, Astronomie Sphérique et éléments de Mécanique Céleste*, Seconde Edition, revue et corrigée, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis, 75006 Paris

DICKEY, J. O., BENDER, P. L., FALLER, J. E., NEWHALL, X X, RICKLEFS, J. G., RIES, J. G., SHELUS, P. J., VEILLET, C., WHIPPLE, A. L., WIANT, J. R., WILLIAMS, J. G. YODER, C. F. [1994]: 'Lunar Laser Ranging: A Continuity Legacy of the Apollo Program', *Science Reprint Series*, 22. July 1994, Volume **265**, pp. 482-490; copyright 1994 by the American Association for the Advancement of Science

DURIEZ, L. [1988]: 'Long-Term Evolution of the Orbits of Natural Satellites', *Celestial Mechanics* **43**, pp. 331-348

ECKART, P. [2006], *The Lunar Base Handbook: An Introduction to Lunar Base Design, Development and Operations*, New York, McGraw-Hill

ECKHARDT, DONALD H. [1981]: 'Theory of the Libration of the Moon', in *The Moon and the Planets*, **25**, pp. 3-49

ECKHARDT, DONALD H. [1982]: 'Planetary and Earth Figure Perturbations in the Libration of the Moon', in *High-Precision Earth Rotation and Earth-Moon Dynamics,* O. Calame ed., (Reidel, Dordrecht, Holland), pp.193-198

ECKSTEIN, M. C. [1980]: 'Optimal Station Keeping by Electric Propulsion with Thrust Operation Constraints', Cel. Mech. **21**, pp. 129–147

ECKSTEIN, M. C. [1983]: 'Approximate TV-SAT Orbit Injection Optimization by Means of Impulsive Hohmann Transfers', DFVLR-FB 83-02

ECKSTEIN, M.C., JOCHIM, E.F., LEIBOLD, A.F., LORENZ, J.K., PIETRASS, A.E. [1983]: „Design and Navigation Accuracy Assessment of an Ion Drive Asteroids Flyby and Rendezvous Mission, Launched by Ariane 4 APEX Demonstration Flight", Internal Report GSOC 83-1, DFVLR Oberpfaffenhofen

EDENHOFER, P., GLESNER, D., STEIN, V. [1973]: 'Ausbreitungsfehler elektromagnetischer Wellen bei der Bahnvermessung von Erdsatelliten. Korrektur der systematischen und Abschätzung der statistischen Ausbreitungsfehler', DLR-FB 73-56

EL'YASBERG, P. E. [1967]: *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites* , translated from Russian, Moskva 1965, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem

ENDERLE, WERNER; HAUKE FIEDLER; SERGIO DE FLORIO; GERHARD KRIEGER; FRIEDRICH JOCHIM; SIMONE D'AMICO; SHANNON DAWSON; WILLIAM KELLAR [2006]: 'Next Generation GNSS for Navigation of Future SAR Constellations', IAC-06-C1.8.06

ESCOBAL, P. R. [1965]: *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

EUROPEAN SPACE AGENCY, SCIENCE PROGRAMME COMMITTEE [1981]: 'Polar Orbiting Lunar Observatory (POLO) Studies', ESA/SPC (81) 19, Att.: Annex 1, Paris, 19 November 1981

EXPLANATORY SUPPLEMENT [1971] *to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections 1962

FARQUHAR, R. W.; MUHONEN, D.; NEWMAN, CH.; HEUBERGER, H. [1979]: 'The first Libration Point Satellite: Mission Overview and Flight History', AAS 79-126

FARQUHAR, R. W.; DUNHAM, D. W. [1986]: 'Orbital Acrobatics in the Sun-Earth-Moon System', Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Dynamics, Darmstadt, 20–23 October 1986, ESA SP-255, 191–198

FAUVEL, J.; FLOOD, R.; SHORTLAND, M.; WILSON, R. ed. [1993]: *Newtons Werk, Die Begründung der modernen Naturwissenschaft,* Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, ISBN 3-7643-2890-8

FEKETE, THOMAS A., LESTER L. SACKETT and ANDREAS H. VON FLOTOW [1992]: 'Trajectory design for solar sailing from low-Earth orbit to the Moon', AAS 92-184

FERRARI, A., J. AND HEFTRON, W. G. [1973]: 'Effects of physical librations of the Moon on the orbital elements of a lunar satellite', *Celest. Mech.* **8**, 1973-1974, pp. 111-120

FIEDLER, H., G. KRIEGER, E. F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002 a]: 'Analysis of Bistatic Configurations for Spaceborne SAR Interferometry', EUSAR 2002, Ko-

eln, 4.-6. June 2002, ITG VDE, Proceedings EISAR 2002, VDE Verlag, ISBN: 3-8007-2697-1, pp. 29-32

FIEDLER, H., G. KRIEGER, E. F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002 b]: 'Analysis of Satellite Configurations for Spaceborne SAR Interferometry‘' , CNES, Formation Flying, Toulouse, France, 29-31. Oct. 2002, published in: International Symposium Formation Flying Missions & Technologies, Proceedings

FLURY, W. [1973]: ‘Station Keeping of a Geostationary Satellite', ELDO-CECLES/ESRO-CERS Scient. And Techn. Rev. **5**, 131-156

FLURY, W. [1976]: ‘The Drift of a Near-Geostationary Satellite', ESOC, IHD.M.A.D. Working Paper No. 12

FRAUTNIK, J. C. [1976]: ‘Dynamics of Frozen Orbits', JPL Interoffice Memorandum, 392.6-922, 3 February 1976

GACKSTÄTTER, FRITZ [2000]: *Von den Monden der Planeten im Sonnensystem, über die Kommensurabilitätsphänomene in Saturnring und Planetoidengürtel zu den Gravitationswellen. Beiträge zu Keplers Neuer Astronomie und Weltharmonik, zur Newtonschen Himmelsmechanik und zur Einstein‘schen Relativitätstheorie mit Methoden der Differentialgeometrie*, 1. mathematisches Institut der Freien Universität, Berlin [Eigenverlag]

GACKSTATTER, F. H. [2007]: ‘Lunisolar Effect on Spring Tides, Earthquakes, and Tsunamis', *Journal of Coastal Research*, **23**, 528

GACKSTATTER, F. H. AND GACKSTATTER, C. F. [2011]: ‘Lunisolar effect on the trigger of earthquakes', *Astron. Nachr.* / AN **332**:8, 795-804/ **DOI** 10.1002/asna.201111583

GEHRELS, T. ed. [1979]: *Asteroids*, The University for Arizona Press, Tucson, Arizona

GIACAGLIA, G. E. O. , MURPHY, J. P., FELSENTREGGER, T. L. [1970], 'A semianalytical theory for the motion of a lunar satellite', *Celestial Mechanics* **3**, (1970-1971), pp. 3-66

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1976]: 'A note on Hansen’s Coefficients in Satellite Theory', *Celest. Mech.* **14,** 515-523

GIACAGLIA, G. E. O. et alii [1965], 'The Motion of a Satellite of the Moon', TR NASA GSFC No. X-547-65-218

GIACAGLIA, G. E. O. et alii [1975], 'Evaluation of Geopotential and Luni-Solar Perturbations by a Recursive Algorithm', Appl. Mech. Res. Lab. Paper No. 1073, Univ. of Texas at Austin

GIACAGLIA, GIORGIO EUGÊNIO OSCARE; PRADO, ANTONIO FERNANDO BERTACHINE DE ALMEIDA [2003]: *Third Body Perturbations on Satellites*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Sâo José dos Campos, SP, Brazil, ISBN 85-17-00010-2

GIESE, R. H. [1966]: *Weltraumforschung I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher 107/107a

GOODWIN, P. S. [1974]: Koordinaten der ALSEP Mondsender, Persönliche Mitteilung (15. Mai 1974)

GREEN, R. M. [1985]: *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

GRIFFITH, J. S. [1971]: 'On some approximations in Brown's lunar theory', *Celest. Mech.* ***4***, 1971, pp. 54 - 59

GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT, D. S. [1986]: 'The Motion of the Moon as Computed by the Method of Hill, Brown, and Eckert', Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. XXIII, Part I, U. S. Government Printing Office, Washington

HALBRITTER, J-P. [1981]: 'Study on the Extension of the Stroboscopic Method to the Second Order', Analytical and Computational Mathematics, ACM Schänis AG, Switzerland, ESA Report Reference CR(P) 1488, ESA Contract No. 3856/79/D/JS(SC), April 1981

HALBRITTER, J-P. [1982]: 'Study on the Extension of the Stroboscopic Method to the Second Order, Volume 2, Perturbation by the Higher Degree Zonal Harmonics', Analytical and Computational Mathematics, ACM Schänis AG, Switzerland, ESA Report Reference CR(P) 1488, ESA Contract No. 3856/79/D/JS(SC)/Rider No.2, February 1982

HANSEN, P.A. [1838/1]: *Fundamenta Nova Investigationis Orbitae verae quam Luna perlustrat*, Gotha

HANSEN, P. A. [1838/2]: 'Bemerkungen über die Behandlung der Theorie des Störungen des Mondes', Astron. Nachr., Vol.XIX, Cols. 33-92, (cit. nach: E. W. BROWN [1896/1960], p. 161)

HANSEN, P.A. [1864]: 'Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, erste, zweite Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, sechster und siebenter Band [1865], bei S. Hirzel, Leipzig

HARRISON, E. F., NASA Langley Research Center, Hampton, Va., and G. G. GIBSON, Kentron International, Inc. [1980]: 'Orbital Analysis for the Upper Atmosphere Research Satellite Mission', *AIAA 18th Aerospace Sciences Meeting*, January 14-16, 1980/Pasadena, California, AIAA-80-0236

HARTL, PH. [1973]: 'Die Bedeutung der Doppler- und Laufzeitmessung für erdferne Raumfahrt-Missionen', DLR-FB 73-104

HARTL, PH. [1977]: *Fernwirktechnik der Raumfahrt, Telemetrie, Telekommando, Bahnvermessung*, Nachrichtentechnik, herausgegeben von H. Marko, Band 2, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-08172-0

HAYN, FRIEDRICH [1902]: 'Selenographische Koordinaten I', in: *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften , math-phys. Klasse*, **27**, pp. 861-921

HEIKEN, GRANT H.; DAVID T. VANIMAN; and BEVAN M. FRENCH [1991]: *Lunar Sourcebook: A User's Guide to the Moon*, Cambridge: Cambridge University Press

HENRARD, J. [1974]: 'Virtual Singularities in the Artificial Satellite Theory', *Celest. Mech.* ***10***, 437

HENRARD, J. AND MOONS, M. [1978]: 'Hamiltonian Theory of the Libration of the Moon', Proceedings of the 14th Colloquium of the International Astronomical Union, edited by Victor G. Szebehely, Cambridge, England 17-19 August, 1976

HERGET, PAUL AND MUSEN, PETER [1958]: 'A modified Lunar Theory for Artificial Satellites', *The Astronomical Journal **63***, No. 1264, 430-433

HILL, G. W. [1878]: 'Researches in the Lunar Theory', *American Journal of Mathematics, Pure and Applied. **1***, 5–26

Hill, G. W. [1881], 'Note on Hansen's Theory of Perturbations', *Am. J. Math.*, **4**, 256-259 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 348)

Hill, G. W. [1886], 'On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon ', *Acta Math*., **8**, 1 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 243) (first separately published in 1877, Cambridge, Mass.)

HOOTS, FELIX R. AND RONALD L. ROEHRICH [1980]: 'Models for Propagation of NORAD Element Sets', *Office of Astrodynamics, Peterson AFB, Co.*, Spacetrack Report No.3, ADA 093 554, pp.1–100

IERS [1989]: 'IERS Standards 1989, IERS Technical Note 3', Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, 61, avenue de l'observatoire, F-75014 Paris, France

ILE [1954]: 'Improved Lunar Ephemeris 1952-1959, a joint Supplement to the American Ephemeris and the (British) Nautical Almanac', prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United States of America and the United Kingdom, issued by the Nautical Almanac Office United States Naval Observatory, United States Government Printing Office, Washington 1954

JACOBSON, R. A., SYNOTT, S. P. AND CAMPBELL, J. K. [1989): 'The Orbits of the Satellites of Mars from Spacecraft and Earth based Observations', *Astronomy and Astrophysics* **225**, 548–554

JANIN, G. [1981]: 'The stability of eccentric polar orbits around the Moon', *Acta Astronautica*, vol. **9**, pp. 421-423

JAZWINSKI, ANDREW H. [1970]: *Stochastic Processes and Filtering Theories*, Volume 64 in the series *Mathematics in Science and Engineering*, ed. by Richard Bellman, Academic Press New York-San Francisco-London,

JEFFREYS, H. [1961]: 'On the Figure of the Moon', *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. **122**, p. 421

JENSEN, J., TOWNSEND, G., KORK, J., KRAFT, D. [1962]: *Design Guide to Orbital Flight*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

JOCHIM, E. F. [1983]: 'The Synodic Motion of Satellites Related to Sun'. *Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, Lake Placid, New York, August, 22 - 25, 1983. AAS 83-334

JOCHIM, E. F. M. [2008]: 'Einweg Doppler bei Bahnstörungen, Mathematische Verifizierung der von Porsche veröffentlichten Formel, 2. Ansatz', DLR-TB-EWD-0003, December 2008

JOCHIM, E. F. M. [2009]: 'On One-Way Doppler Measurements of Space Craft and Celestial Objects', *Acta Astronautica*, AA3598, (AA-D-09-00290)

JOCHIM, E. F. M. [2011] 'Die Verwendung von Hansen-Systemen in Himmelsmechanik und Astronautik', ISSN 1434-8454, ISRN DLR-FB—2011-04

JOCHIM, E. F. M. [2012]: 'The Significance of the Hansen Ideal Space frame', Astr. Nachr. / AN **333**, No. 8, 774-783 (2012) / **DOI** 10.1002/asna.202222711

JOCHIM, E. F. M. [2015]: ‘The Circle will Now be Closed, Finally (On the Inability to Adapt Circular Motions) ‘, *Journal of Space Operations and Communicator*, April 02, 2015, Vol. 12 Issue 2, ISSN 2410-0005

JOCHIM, E. F. M. [2016]: ‘Rectilinear Motion: A Basis for the Adaptation of Arbitrary Motion‘, *Journal of Space Operations and Communicator* (ISSN 2410-0005), Vol. **13** Issue 2, 2016

JOCHIM, E. F.; SLIWINSKI, P.***)** [1976] *) DFVLR Inst. Flugfunk und Mikrowellen, Oberpfaffenhofen, 'Bestimmung elevationsabhängiger Korrekturen für die Hauptstrahlrichtung der 30-m-Antenne der HELIOS-Kommandostation mit Hilfe der ALSEP-Sender auf dem Mond'. *ZfW **24***, Heft 2, pp.101-108, 1976, überarbeitete Fassung in DGLR-Jahrbuch 1976 nach Vortrag auf der 9. Jahrestagung der DGLR, München, 15. Sep. 1976 unter Nr. DGLR 76-174, 'Bestimmung elevationsabhängiger Korrekturen für die Haupt- Strahlrichtung der 30m-Helios-Kommando-Antenne'. *Nachrichten-Elektronik* **31**, August 1977

JOCHIM, E. F.; ECKSTEIN, M. C. [1980]: 'On the True Circular Orbit of a Satellite'. *Celest. Mech. **21***, 1980, pp. 149 - 153

JOCHIM, E. F.; MÁRIO M. QUINTINO DA SILVA; REINHARD SCHRÖDER; IRENA HAJNSEK; JÜRGEN PULS [2005]: ‘Orbit Analysis for the Brazilian-German Space Project MapSar based on User Requirements‘, Paper IAA-B5-1001,Selected Proceedings of the 5th International Symposium of the International Academy of Astronautics, Berlin, April 4 – 8, 2005, ed. By Hans-Peter Röser, Rainer Sandau, Arnoldo Valenzuela, de Gruyter, Berlin, New York, ISBN: 3-11-018851-1

JOCHIM, E. F. M.; HAUKE FIEDLER; GERHARD KRIEGER [2010]: ‘Fuel Consumption and Collision Avoidance Strategy in Multi-Static Orbit Formations’, *Acta Astronautica*, AA-68 (2011) 1002-1014

JONES, BRIAN L. and ROBERT H. BISHOP [1993]: ‘Stable rendezvous for a small radius translunar halo orbit’, AAS 93-144Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

JORDAN-ENGELN, GISELA; FRITZ REUTTER [1981]: *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*, BI Hochschultaschenbücher, Band 106, 3. Auflage, ISBN 3-411-06106-5

KAULA, W. M. [1962]: 'A Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite', *NASA Technical Note* , D-1126, NASA, Washington, January 1962; [1962]: Astronomical Journal, Vol. **67**, n.2., pp. 300-303

KAWAKATSU, YASUIHIRO; KEN NAKAJIMA; MASAHIRO OGASAWARA; YUTAKA KANEKO; YOSHISADA TAKIZAWA[1999], 'Selene translunar trajectory and lunar orbit injection', ISSFD XIV

KELSO, D. T. [1995] „Satellite Times Orbit Determination,“ July 1995., [Online]. Available: http://celestrak.com/columns/v01n06/

KIEDRON, K., COOK, R. [1991], 'Frozen Orbits in the J_2 + J_3 Problem', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-426

KIRSCHNER, M., JOCHIM, E. F. [2000], **‘**Project CartWheel, Assessment of Collision and Contamination Risks', DLR GSOC IB 2000-07, 21 Dec. 2000

KLINKRAD, H. [1982]: 'ERS-1 Orbit Maintenance Manoeuvre Strategy and Fuel Consumption Estimation', ESOC Working Paper No. 212, Darmstadt, Nov 1982

KLINKRAD, H. [1983]: *Analytische Berechnung erdnaher Satellitenbahnen unter Verwendung eines realistischen Luftwiderstandsmodells,* von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

KLINKRAD, H. [1985]: 'Orbit Design of the First ESA Remote Sensing Satellite ERS-1', IAF-85-254

KLINKRAD, H. [2006]: *Space Debris, Models and Risk Analysis*, Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

KOELLE, H. H. ED. [1961]: *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

KOPAL, ZDENEK [1966]: *An Introduction to the Study of the Moon*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

KOZAI, YOSIHIDE [1959]: 'The Motion of a Close Earth Satellite', *Astronomical Journal* **64**, 367–377

KOZAI, YOSIHIDE [1978]: 'Secular Perturbations of Asteroids and Comets', in: *Dynamics of the Solar System*, Reidel, Dordrecht

KRAMER, HERBERT J. [2002]: *Observation of the Earth and Its Environment*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-42388-5

KRIEGER, GERHARD, ALBERTO MOREIRA, HAUKE FIEDLER, IRENA HAJNSEK, MARIAN WERNER, MARWAN YOUNIS, MANFRED ZINK [2007]: 'TanDEM-X: A Satellite Formation for High-Resolution SAR Interferometry', *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. **45**, No. 11, November 2007

KRISCH, A. [etwa 1901]: *Astronomisches Lexikon*, A. Hartlebens Verlag, Wien. Pest. Leipzig

KRISH, V., BELBRUNO, E. A., and HOLLISTER, W. M. [1992], 'An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories', AIAA-92-4581-CP

KUGA, HELIO KOITI, VALCIR ORLANDO [2003], 'Assessing Orbit Determination Through One Way Doppler Signals', 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, June, 16th – 20th, Aerospace Sciences and Technology, Paper 12-3

KUZNIK, F. [1983]: 'Visit to a Small Comet', *Space World*, July 1983, 23–26

LEIPOLD, M. [2000]: 'Solar Sail Mission Design', Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München

LENSE, JOSEF [1940]: 'Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie', *Astronomische Nachrichten **271***, 121–132

LEXIKON DER ASTRONOMIE, Band 1 [1989], Band 2 [1990], Herder Verlag, Freiburg – Basel - Wien

LIDOV, M. L. ;V. A. LYAKHOVA AND A. A. SOLOV'EV [1974/75]: 'Semianalytical calculation of the motion of an artificial satellite of the Moon', translated from *Kosmicheskie*

Issledovaniya, vol. **13**, No. 3, pp. 283-310, May-June 1975; copyright: Plenum Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York, N. Y. 10011

LONG, ANNE C. et al. [1989]: 'Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Mathematical Theory (Revision 1)', FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001, Goddard Space Flight Center, NASA

LYDDANE, R. H. [1963]: 'Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite', *Astronomical Journal **68***, 555–558

MASSONNET, D. [2001]: 'Capabilities and Limitations of the Interferometric Cartwheel', IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, Vol. **39**, No3, pp.506-520

MC CLAIN, W. D. [1987]: 'Eccentricity Control and the Frozen Orbit Concept for the Navy Remote Ocean Sensing System (NROSS) Mission', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Kalispell, Montana, August 10-13, 1987, Paper AAS 87-516

MCINNES, COLIN R. [1999]: *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer–Praxis Series in Space Science and Technology, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 1-85233-102-X

MERSON, R. H. [1961]: 'The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **4**, 17–52

MERSON, R. H. [1963]: 'The Perturbations of a Satellite Orbit in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Technical Note*, No. Space 26, Royal Aircraft Establishment [Farnborough], U.D.C No. 629.195.077.3 : 531.261

MEYER, KURT W. [1992]: 'Development of a simplified gravitational model for lifetime studies of lunar satellite orbits', AAS 92-128

MIGUS, A. [1980]: 'Analytical Lunar Libration Tables', *The Moon and the Planets*, **23**, pp. 391-427

MITTERMAYER, J., F. JOCHIM, G. KRIEGER, M. EINEDER, M. HUBIG, KH. ZELLER, S. BUCKREUß [2000]: 'Preliminary Prformance Estimation for CartWheel Combined with ASAR', 2nd ENVISAT – CartWheel Technical Meeting, 14 November 2000, ESA HQ, Paris

MITTERMAYER, J., F. JOCHIM, G. KRIEGER [2000]: 'Timing and Squint Angle Analysis', ASAR – CartWheel Workshop, DLR Oberpfaffenhofen 10 November 2000

MOONS, M. [1982]: 'Physical Libration of the Moon', *Celestial Mechanics* **26**, pp. 131-142

MORANDO, B. [1974]: *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre*, Gordon & Beach, Paris, London, New York

MORBIDELLI, A. [2002]: *Modern Celestial Mechanics, Aspects of Solar System Dynamics*, ISBN 0-415-27939-9, Taylor & Francis, London

MUELLER, I. I. [1977]: *Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy*, Second Printing, Frederick Ungar Publishing Co., New York

MURRAY, CARL. D. AND DERMOTT, STANLEY, F. [1999]: *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press

MUSEN, P. [1963]: 'On a Modification of Hansen's Lunar Theory', *Journal of Geophysical Research,* **68,** No. 5, 1439-1456

MUSEN, P. [1968 a]: 'On Some Possible Simplificatio9ns and Changes in Hansen's Lunar Theory', *The Journal of the Astronautical Sciences* , Vol. **XV**, No. 3, pp. 124-135

MUSEN, P. [1968 b]: 'Investigations in Hansen's Planetary Theory', [NASA TN D-4169, 19 pages], *Bulletin Astronomique,* Série 3, **3,** Fascicule 3, 253–263

MUSEN, P. [1969]: 'A Discussion of Hill's Method of Secular Perturbations and its Application to the Determination of the Zero-Rank Effects in Non-Singular Vectorial Elements of a Planetary Motion', *Celestial Mechanics,* **2**, pp. 41-59

MUSEN, P. [1971]: 'The Influence of the Great Inequality on the Secular Disturbing Function of the Planetary System', *Celestial Mechanics,* **4**, pp. 378-396

MUSEN, P., A. BAILIE AND E. UPTON [1961]: 'Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite', Technical Note NASA TN D-494, Washington D.C., January 1961

NEWCOMB, S. [1898]: 'Tables of the motion of the Earth on its Axis and around the Sun', Astronomical Papers of the American Ephemeris **VI/1**,1-170, Washington

OESTERWINTER, C. [1969]: 'The motion of a lunar satellite', *Celestial Mechanics,* **1**, (1969-1970) pp. 368-436

OESTERWINTER, C. AND COHEN, C. J. [1971]: 'New orbital elements for Moon and Planets', *Celestial Mechanics,* **5**, pp. 54-59

OPPOLZER, HOFRATH PROF. THEODOR RITTER V. [1887]: 'Canon der Finsternisse', Herausgegeben von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften als LIL Band ihrer Denkschriften, mit 160 Tafeln, Wien aus der kaiserlich-königlichen Hof und Staatsdruckerei in Commission bei Karl Gerold's Sohn

PARK, SANG-YOUNG and JOHN L. JUNKINS [1994]: 'Orbital mission analysis for a lunar mapping satellite', AIAA-94-3717-CP

PÄTZOLD, M, M. K. BIRD, H. VOLLAND, P. EDENHOFER, H. BUSCHERT [1991]: 'Dynamics of the GIOTTO spacecraft in the inner dust coma of Comet P/Halley', *ZFW* **15** (159), pp. 89-96

PÄTZOLD, M, P. EDENHOFER, M. K. BIRD, H. VOLLAND [1993]: 'The GIOTTO encounter with comet P/Grigg-Skjellerup: first results from the GIOTTO radio-science experiment', *Astronomy & Astrophysics* **268**, L13-L16

PÄTZOLD, M, M. K. BIRD [2001]: 'Velocity changes of the GIOTTO spacecraft during the comet flybys: on the interpretation of perturbed Doppler data', *Aerospace Sciences and Technology* **5**, pp. 235-241

PORSCHE, H. [1999]: 'Velocity changes of GIOTTO spacecraft induced during the flyby of the comets P/Halley and P/Grigg-Skjellerup', *Aerospace Sciences and Technology* **3**, pp. 107-110

PORSCHE, H. [2015]: 'GIOTTO: Artificial Asteroid Probing the Comet P/Halley', *The Journal of Space Operators & Communicator* **12**, Issue 2, April 07, 2015, ISSN 2410-0005, http://opsjournal.org/

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986]: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

ROSBOROUGH, G. W., OCAMPO, C. A. [1991], 'Influence of Higher Degree Zonals on the Frozen Orbit Geometry', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-428

ROSENGREN, M. [1988/1]: 'The Duration of the Orbit Control Cycle for ERS', ESOC OAD Working Paper No. 363, Darmstadt March 1988

ROSENGREN, M. [1988/2]: 'Study of the Optimal Eccentricity Control of ERS', OAD Working Paper No. 367, Orbit Attitude Division, ESA Computer Department, ESOC (European Space Operations Centre), Darmstadt, April 1988

ROSENGREN, M. [1989]: 'Improved Technique for Passive Eccentricity Control', Paper AAS 89-155

ROTH, ERNST A. [1975]: 'Perturbation of a Satellite Orbiter by the Oblateness of the Primary Planet', ESA Scientific Report SR-26 (ESOC)

ROTH, ERNST A. [1981]: 'On the Perturbations of the Anomalistic Period of a Highly Eccentric Orbit Satellite due to the Zonal Harmonics', *Celestial Mechanics* **23** , pp. 83-87

ROTH, ERNST A. [1982]: 'Construction of a consistent semianalytic theory of a planetary or Moon orbiter perturbed by a third body', *Celestial Mechanics* **28** , pp. 155-169

ROTH, ERNST A. [1982]: 'On the Nodal Period of a Satellite perturbed by the Earth Oblateness (J2)', ESA M.A.O. Working Paper No. 167, April 1982

ROY, A. E. [1982]: *Orbital Motion*, Adam Hilger Ltd, Bristol, ISBN 0-85274-462-5

RUNGE, H., R. BAMLER, J. MITTERMAYER, E. F. JOCHIM, D. MASSONNET, E. THOUVENOT [2001]: 'The Interferometric CartWheel for Envisat'' ,3rd IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, April 2-6, 2001 Berlin, Germany

RUPPE, H. O. [1966/1967]: *Introduction to Astronautics*, Vol. 1, 1966, Vol. 2, 1967, Academic Press, New York and London, Library of Congress Catalog Card Number: 66-14469

SCHNEIDER, M. [1992]: *Himmelsmechanik, Band I: Grundlagen, Determinierung*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15223-0

SCHNEIDER, M. [1993]: *Himmelsmechanik, Band II: Systemmodelle*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15981-2

SCHNEIDER, M. [1996]: *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie,* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN-10: 3860257188 , ISBN-13: 978-3860257180

SCHNEIDER, M. [1999]: *Himmelsmechanik, Band IV: Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN 3-8274-0484-3, ISBN-13: 978-3827404848

SCHULZ, W. ed. [1980]: 'Vorträge auf dem Walter-Hohmann-Symposium der DGLR über Raumflugmechanik', Köln, 12. und 13. März 1980, DLR-Mitt. 80-01

SEIDELMANN, P. K. ED. [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Alma-

nac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SIRY, J. W. [1970], 'Goddard astronomic and geodynamic parameters', *Goddard Space Flight Center, Preprint Nr*. X-550, pp. 70-481

SMITH, J. C. [1986], 'Analysis and Application of Frozen Orbits for the TOPEX Mission', JPL, California Insitute of Technology, Pasadena, CA, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, August 18-20, 1986/Williamsburg, Virginia, Paper AIAA 86

SOOP, E. M. [1983]: *Introduction to Geostationary Orbits*, ESA SP-1053

STANDISH, E. MYLES, JR. [1982]: 'The JPL Planetary Ephemerides', *Celestial Mechanics* **26** , pp. 181-186

STANEK, B. [1983]: *Raumfahrtlexikon*, Hallwag Verlag, Bern und Stuttgart

STEICHEN, DANIEL [1993]: 'Study of a Moon's artificial satellite dynamics valid for all eccentricities and inclinations', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **57**, pp. 245-246

STIEFEL, EDUARD [1965]: *Einführung in die numerische Mathematik*, 3. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart

STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. [1971]: *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STOFFELS, K. P. [1985], 'Untersuchungen zur Verbesserung Brownscher Mondentfernungen aufgrund von Variationen der Integrationskonstanten und anderer Parameter', Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität, Bonn, Nr. 66, ISSN 0723-4325

STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933]: *Lehrbuch der Astronomie*, Springer-Verlag, Berlin

STUMMEL, F. und HAINER, K. [1971]: *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner Stuttgart, ISBN 3-519-02040-8

STUMPFF, K. [1959, 1965, 1974]: *Himmelsmechanik I* [1959); *Himmelsmechanik II* [1965]; *Himmelsmechanik III* [1974], DVW Berlin

STUMPFF, P. [1981]: 'The Motion of the Earth-Moon System between 1700 and 2100 in Newcombs Theory and in JPL-Ephemerides', *Astronomy and Astrophysics **101***, 52–71

STUMPFF, P. and LIESKE, J. H. [1984]: 'The Motion of the Earth-Moon System in modern tabular ephemerides', *Astronomy and Astrophysics* **130**, 211–226

SWENSON, B. I. [1971]: 'Orbit Selection Considerations for Earth Resources Observations', Office of Advanced Research and Technology, Mission Analysis Division, Moffett Field, Calif., 94035, *Report No .NASA TM X-2156*, Performing Organisation Report No. a-3640, Work Unit No. 130-06-13-15, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. 20546, February 1971

SYNNES, D. C. [1993], 'Precision Control of Frozen, Exact Repeat Orbits', AAS 93-726

SZEBEHELY, VICTOR G. (ed.) [1978]: Proceedings of the 14th Colloquium of the International Astronomical Union, Cambridge, England 17-19 August, 1976, Astrophysics

and Space Science Library, Volume 72, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland, Boston: U.S.A., ISBN 90-277-0869 x

TANG, C. C. H. [1987], 'A Second – Order Analytic Analysis for Frozen Orbits', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Kalispell, Montana, August 10-13, 1987, Paper AAS 87-447

TISSERAND, F. [1889-1896]: *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I – Tome IV, Gauthiers-Villars, Paris

ULIVIERI C. ; P. D'AVANCO [1996], 'Passive stabilized high lunar orbits', AIAA-96-3581-CP

UPHOFF, C. [1985], 'Identification of Frozen Orbits Without Integration', JPL Interoffice Memorandum, 312/85.2-942, 3 April 1985

URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2012], *Explanatory Supplement to The Astronomical Almanac*. Mill Valley, CA: University Science Books

VALLADO, DAVID A. [2001]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VAN FLANDERN, T. C. [1969]: 'Corrections to the improved lunar ephemeris', *Celestial Mechanics* **1** , pp. 163-166

VINCENT, M. A. [1991], 'Eccentricity and Argument of Perigee Control for Orbits with Repeat Ground Tracks', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-516

VOIGT, H.-H. [1983]: *Abriss der Astronomie I,* BI Hochschulskripten, 807/807a, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, *Band II,* 819/819a

VOLK, O. [1969]: 'Eulers Beiträge zur Theorie der Bewegungen der Himmelskörper', in: Leonhard Euler 1707-1783, Beiträge zu Leben und Werk, Basel 1983, pp. 345-362

WAGNER et al. [2017]: *Icarus,* **283,** pp. 92-103

WALKER, J. G. [1970]: 'Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage', *Royal Aircraft Establishment, Technical Report 70211,* Departmental Reference: Space 350, November 1970 [UDC 629.195 : 521.6]

WALKER, J. G. [1977/1]: 'Continuous Whole-Earth Coverage by circular Orbit Patterns', *Royal Aircraft Establishment, Technical Report 77044,* Departmental Reference: Space 522, 24 March 1977 [UDC 629.195 : 527]

WALKER, J. G. [1977/2]: 'Satellite Patterns for Continuous Multiple Whole Earth Coverage', *Space Department, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, UK,* Published in IEE Conference Publication No. 160, pp 119-122

WALKER, J. G. [1984]: 'Satellite Constellations', *Journal of the British Interplanetary Society, 37,* 559–571

WALTER, H. G. and SOVERS, O. S. [2000]: *Astrometry of Fundamental Catalogues,* The Evolution from Optical to Radio Reference Frames, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67436-5

WALTER, U. [2008]: *Astronautics,* Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, Weinheim, ISBN 978-3-527-40685-2

WERTZ, JAMES R. [2001]: *Mission Geometry; Orbit and Constellation Design and Management*, Space Technology Library, Microcosm Press, El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-6903-3

WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON (editors) [1999, ninth printing 2007]: *Space Mission Analysis and Design*, Space Technology Library, Space Technology Series, Microcosm Press, Hawthorne, California, Springer New York, ISBN 978-1881883-10-4, ISBN 978-0-7923-5901-2

WILLIAMS, J. G. and HIERATH, J. E. [1987]: 'Palomar-Leiden Minor Planets: Proper Elements, Frequency Distribution, Belt Boundaries, and Family Memberships', *Icarus* **72**, 276-303

WILLIAMS, J. G., NEWHALL X. X., and DICKEY, J. O. [1996]: 'Relativity parameters determined from lunar laser ranging', *Physical Review D,* Vol. **53**, No. 11, 6730-6730, copyright: The American Physical Society

WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]: DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates. *JPL IOM 335-JW, DB, WF-20080314-001*

WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]: DE430 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates. *JPL IOM 335-JW, DB, WF-20130722-016*

WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966]: *Spherical Astronomy,* Academic Press, New York and London

YAMAKAWA HIROSHI, JUN'ICHIRO KAWAGUCHI, NOBUAKI ISHII, HIROKI MATSUO [1990]: 'On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture', AAS 93-633

YANG, WEILIAN [1990]: 'FROZEN ORBITS WITH ITS APPLICATION', Chinese Academy of Sciences, Beijing, People's Republic of China, *Chinese Society of Astronautics, Journal*, No. **1** , pp. 23-32, in Chinese with Abstract in English

ZHONGOLOVITCH, I. D. [19*60*]*:* 'Nekotorye formuly otonosyashchiesya k dvizheniyu material'noi tochki i pole tyagoteniya urovennogo ellipsoida vrashcheniya', (Quelques formules qui ont lieu dans le mouvement d'un point matériel dans le champ d'attraction d'une ellipsoide de niveau à deux axes), *Bjull. ITA **7***, 521–536

In Ergänzung zur gedruckten Version *Astronomical Almanac* sind die aktuellen astronomischen Daten auch in der Online Version (*The Astronomical Almanac Online*) erhältlich:

http://asa.usno.navy.mil , http://asa.hmnao.com

(weitere Anmerkungen dazu in AA2015)

Liste der verwendeten Symbole

Zusammenstellung der wichtigsten verwendeteten Symbole (Liste unvollständig, ersetzt nicht die Definitionen in den einzelnen Kapiteln).

Lateinische Symbole

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
A	Grad	Azimut (positiv von Nord über Ost nach Süd)
A	m^2	Fläche
$\mathbb{A}_n$	---	Affiner Punktraum
A_D	m^2	Anströmfläche bei Luftwiderstand
A_0	<Länge>	Auslenkung einer Welle (nur in Kapitel 9)
A_1	Grad	Azimut der Sichtrichtung bezogen auf Bewegungsrichtung des Satelliten (Beobachtungsort)
A_{Pyx}	Grad	Azimut des Pols des satellitenzentrierten y-Systems im x-System
A_{Pxy}	Grad	Azimut des Pols des satellitenzentrierten x-Systems im y-System
A_T	Grad	Azimut der transversalen Bewegungskomponente des Satelliten
a	km	große Bahnhalbachse
a	< Länge >	große Halbachse einer Ellipse, Rotationsellipsoid (siehe Kapitel 31, Band IV)
a_a	km	Näherungswert für a, wenn P_a gegeben ist
a_B	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *D. Brouwer*
a_d	km	Näherungswert für a, wenn P_d gegeben ist
a_g	km	große Bahnhalbachse der geostationären Bahn
a_{g0}	km	Näherungswert für a_g

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
a_H	km	erste Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
a_K	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *Y. Kozai*
a_m	km	Näherungswert für *a*, wenn *Pm* gegeben ist
a_t	km	Näherungswert für *a*, wenn *Pt* gegeben ist
a_S	km	Näherungswert für *a*, wenn P_S gegeben ist
a_{ss}	km	Näherungswert für *a* für eine sonnensynchrone Bahn
a_λ	km	Näherungswert für *a*, wenn $\Delta\lambda_\Omega$ gegeben ist
$a_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$	km oder *AU*	große Bahnhalbachse der Erdbahn um die Sonne
$a_\odot$	km oder *AU*	große Bahnhalbachse der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
a	km, Grad	*Kepler*element $\mathbf{a} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$
$\mathbf{a}_L$	km, Grad	*Kepler*element mit langperiodischen Störungen (kurzperiodische Störungen weggelassen)
B		*Bessel*sche Epoche (z. B. B1950.0)
B_2		$1.5\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2$
B_D	km^2/kg	ballistischer Koeffizient $B_D := c_D\,A_D / m$ **Anmerkung**: In der Literatur finden sich unterschiedliche Definitionen des ballistischen Koeffizienten, etwa $0.5\,c_D\,A_D / m$, aber auch $m / (c_D\,A_D)$
b	Grad	ekliptikale Breite
b	< Länge >	kleine Halbachse einer Ellipse, eines Rotationsellipsoids (nur in Kapitel 31)
b_{BS}	Grad	Breite im selenozentrischen Bahnsystem
b_M	Grad	ekliptikale Breite des Mondes
b_C	km	Kollisionsradius

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
b_H	km	zweite Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
b_{HN}	$\mathrm{km/s^2}$	Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen
b_N	$\mathrm{km/s^2}$	Normalbeschleunigung
b_R	$\mathrm{km/s^2}$	Radialbeschleunigung
b_T	$\mathrm{km/s^2}$	Transversalbeschleunigung
b_V	$\mathrm{km/s^2}$	Tangentialbeschleunigung
C	–	Konstante bei Wellenvorgang (nur in Kapitel 9)
C_J		*Jacobi*sche Konstante (nur in Kapitel 2)
C_{JH}		*Jacobi*sche Konstante im *Hill*schen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems
c	km/s	Lichtgeschwindigkeit
c_D	-	Luftwiderstandsbeiwert
c_R	-	Strahlungsdruckbeiwert
$\mathbf{c}$	$\mathrm{km^2}$ / s	2. *Kepler*scher Vektor (1. *Laplace*scher Vektor, Normalenvektor der Bahnebene, Drallvektor, Drehmomentenvektor, Inklinationsvektor), $\mathbf{c} = c^i \, \mathbf{p}_i$, $G = \lvert\mathbf{c}\rvert$
$\mathbf{c}_0$		Richtungsvektor in Richtung des Normalenvektors der Bahnebene, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} \,/\, G$
$\mathbf{D}$		*Darboux*scher Vektor (allgemeiner Drehvektor, allgemeiner Systemeigenbewegungsvektor)
$\mathbf{D}_p$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des selenozentrischen $\mathbf{p}_i$ – Systems
$\mathbf{D}_q$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j\right)$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{D}_{q^{(L)}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des Leibniz-Systems
$\mathbf{D}_{qp}$		relativer Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\mathbf{D}_{qp} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)$
D		Tag [Bürgerliches Datum)
D_f		Defekt, von der Erde aus sichtbarer aber nicht von der Sonne beschienener Anteil der Mondoberfläche
$D_p{}^i$		Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i\right)$
$D_{qp}{}^j$		Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j\right)$
$D_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Elongation des Mondes von der Sonne $D_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - L_{\odot}$
$\mathbf{d}$	$\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$	1. *Kepler*'scher Vektor (*Herrmann-Laplace*-Vektor, 2. *Laplace*-scher Vektor, Exzentrizitätsvektor, Perizentrumsvektor), $\mathbf{d} = d^i \mathbf{p}_i,\ e\mu = \lvert\mathbf{d}\rvert$
dm	kg	Massenänderung (Massenausstoß bei Raketenmotor)
dV	km/s	Geschwindigkeitsänderung (durch Zünden eines Raketenmotors)
E	Grad	exzentrische Anomalie [bei Bezug auf Perizentrum)
$\mathbb{E}_n$		n-dimensionaler eigentlich euklidischer Vektorraum
E_{A}	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Apozentrum) $E_A = E + 180°$
$E^{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kontravariant
$E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kovariant
$\mathbf{E}$		beliebiger Bahnelementevektor
$\mathbf{E}$		Einheitstensor der zweiten Stufe: $\mathbf{E} = \mathbf{g}^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$
e		Exzentrizität (numerische)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
e_H		Exzentrizität einer Hohmann-Übergangsbahn
e_F		numerische Exzentrizität einer formstabilen Bahn („eingefrorene Bahn“)
e_f		numerische Exzentrizität einer Ellipse, eines Ellipsoids
e_l	Grad	säkularer und langperiodischer Anteil der Exzentrizität einer Bahnellipse ($e_l := \bar{e} + \delta e_l$)
$e_{\sun}$		numerische Exzentrizität der Erdbahn
$e_{\odot}$		numerische Exzentrizität der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
F	km kg/s^2	Kraftvektor
F	-	Phasing Parameter einer *Walker* Konstellation (T/P/F)
$F_{\leftmoon}$	Grad	mittleres Argument des Mondes von der Sonne $F_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}$
f_N	km^3 kg^{-1} s^{-2}	*Newton*sche Gravitationskonstante
f		Abplattung des Zentralkörpers
f_0	Hz	Sendefrequenz
f		3. *Kepler*scher Vektor = Hilfsvektor in Richtung $\upsilon = 90°$, $\mathbf{f} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}$ („Parametervektor“)
G	km^2 / s	Flächenparameter (= Betrag des Bahnnormalenvektors), in *Kepler*scher Bewegung: $G := \lvert\mathbf{c}\rvert = \sqrt{\mu\, p}$, (5. *Delaunay* Element bei Bezug auf eine elliptische Bewegung)
G_N	km^3 s^{-1} kg^{-1}	*Newton*sche Gravitationskonstante (alternative Bezeichnung)
$g_{\odot}$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne (Bezeichnung verwendet in AA und der klassischen Literatur. In diesem Bericht ist $g_{\odot} = M_{\odot}$ gesetzt.)
g_{ik}		kovarianter Metriktensor (= kovarianter Fundamentaltensor)
g^{ik}		kontravarianter Metriktensor (= kontravarianter Fundamentaltensor)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
H	km	Höhe über R_E = „mittlere Äquatorbahnhöhe“
H'	km	Höhe über abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
H_A	km	Apogäumshöhe über R_E
h	kg km$^{2/}$s^2	Gesamtenergie
H_P	km	Perigäumshöhe über R_E
h	Grad	Elevation (astronomisch: „Höhe“)
h_{Pyx}	Grad	Elevation des Pols des satellitenzentrierten y-Systems im x-System
h_{Pxy}	Grad	Elevation des Pols des satellitenzentrierten x-Systems im y-System
I	Grad	Überflugwinkel über Breitenkreis
I'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Breitenkreis bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
I_1, I_2, I_3		skalare Invariante des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe
i	-	Imaginäre Einheit $\left(i^2 = -1\right)$
i	Grad	Inklination
i'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Äquator bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
i_{ss}	Grad	Inklination einer sonnensynchronen Bahn
$i_{\pm}$	Grad	Inklination der Erdbahn bezüglich Ekliptik
$i_{\odot}$	Grad	Inklination der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde bezüglich Ekliptik
i_B	Grad	Inklination der Mondbahn um die Erde bezüglich des Erdäquators
i_M	Grad	Inklination des Mondäquators bezüglich des Erdäquators
J		*Lagrange*sche Funktion (in Kapitel 2)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
J		julianische Epoche (z. B. J2000.0)
J_D		julianisches Datum
J_d		julianische Tagesnummer
$J_2, J_3, J_4, J_5, \ldots$		geodynamische Formfaktoren (Zonale des Schwerefeldes eines Zentralkörpers)
J_n		*Bessel* Funktionen
K		Reproduktionszyklus, Wiederholungszyklus (Anzahl der Perioden der Knotenlänge, bei sonnensynchronen Bahnen identisch mit mittleren Sonnentagen)
K		Aberrationskonstante
K_1, K_2		natürliche Zahl ($K = 2K_1$ oder $K = 2K_1 - 1$)
K_x	Grad	Knotenlänge des satellitenzentrierten x-Systems
K_y	Grad	Knotenlänge des satellitenzentrierten y-Systems
$\mathbf{k}_j$	–	Basisvektoren des Knotensystem: $\mathbf{k}_j := \mathbf{q}_j^{(D)}$
k^2	$\mathrm{AU}^3\,\mathrm{d}^{-2}\,\mathrm{M}_\odot^{-1}$	*Gauß*sche Gravitationskonstante
l	Grad	ekliptikale Länge
l	Grad	wahre Länge ($l = \upsilon + \omega + \sigma_i \Omega$)
$l_\odot$	Grad	wahre Länge der Sonne in ihrer Bahn
$(l_\odot)^{\cdot}$	Grad	Variation der wahren Länge der Sonne
$l_\mathbb{C}$	Grad	wahre Länge des Mondes in seiner Bahn
l_{BS}	Grad	Länge im selenozentrischen Bahnsystem
l_M	Grad	ekliptikale Länge des Mondes
L	Grad	mittlere Länge ($l = M + \omega + \sigma_i \Omega$)
L_E	Grad	exzentrische Länge ($L_E = E + \omega + \sigma_i \Omega$)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$L_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Länge des Mondes (in seiner Bahn)
$L_{\earth}$	Grad	mittlere Länge der Erde (in ihrer Bahn)
$L_{\odot}$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne
L_0	Grad	mittlere Epochelänge in der Bahn ($L_0 = M_0 + \omega + \sigma_i \Omega$)
M	Grad	mittlere Anomalie
M	---	Monat (bürgerliches Datum)
$\mathbb{M}$	---	Metrischer Raum
M_{JD}		modifiziertes julianisches Datum
M_0	Grad	mittlere Epocheanomalie
$\dot{M}_{0s}$	Grad/s	säkulare Variation in M_0
$M_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Anomalie des Mondes
$M_{\odot}$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne
m	kg	Masse
$\mathbb{N}$		natürliche Zahlen
N_d	–	Anzahl der drakonitischen Umläufe
N_s	–	Brechungsindex (siehe Abschnitt 9.9)
N_0		Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Knotenumlauf [= pro Tag bei sonnensynchronen Bahnen]
N_1		Restzahl an Umläufen pro Tag: ($N = N_0 K + N_1$)
N_2		natürliche Zahl ($N_0 = 2N_2$ oder $N_0 = 2N_2 - 1$)
N_3		natürliche Zahl ($N_1 = 2N_3$ oder $N_1 = 2N_3 - 1$)
n	rad/s	oskulierende (= Keplersche) mittlere Bewegung $n = \sqrt{\mu / a^3}$
$\bar{n}$	rad/s	mittlere mittlere Bewegung $\bar{n} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
n_K	rad/s	*Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu/a^3}$
$\overline{n_K}$	rad/s	mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu/\overline{a}^3}$
$\overline{n_{K\,0}}$	rad/s	mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung zur Epoche t_0: $\overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\mu/\overline{a}_0^3}$
n_a	rad/s	anomalistische mittlere Bewegung
n_d	rad/s	drakonitische mittlere Bewegung
n_t	rad/s	tropische mittlere Bewegung
n_m	rad/s	Meridian-bezogene mittlere Bewegung
n_S	rad/s	synodische mittlere Bewegung
n_{sid}	rad/s	siderische mittlere Bewegung
n_t	rad/s	tropische mittlere Bewegung
$n_\odot$	rad/s	tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne
P	-	Anzahl der Bahnebenen einer Walker Konstellation (T/P/F)
P_a	h oder s	anomalistische Umlaufzeit
P_d	h oder s	drakonitische Umlaufzeit
P_H	h oder s	*Hansen*sche Umlaufzeit (Bezug auf einen festen Anfangspunkt im *Hansen*-System)
P_j	d	julianisches Jahr (zu 365.25 mittleren Sonnentagen)
P_K	h oder s	*Kepler*sche Umlaufzeit
P_m	h oder s	Meridian-bezogene Umlaufzeit
P_S	h oder s	synodische Umlaufzeit
P_s	h oder s	siderische Umlaufzeit
P_t	h oder s	tropische Umlaufzeit
$P_{\odot,s}$, $\left[P_{\odot,sid}\right]$	a oder d	siderisches Jahr

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$P_{\odot,t}$	a oder d	tropisches Jahr
$\overline{P_{\odot,t}}$	a oder d	mittleres tropisches Jahr
$P_{\mathbb{C},a}$	d oder h	anomalistischer Monat
$P_{\mathbb{C},d}$	d oder h	drakonitischer Monat
$P_{\mathbb{C},s}$, $\left[P_{\mathbb{C},sid}\right]$	d oder h	siderischer Monat
$P_{\mathbb{C},S}$	d oder h	synodischer Monat
$P_{\mathbb{C},t}$	d oder h	tropischer Monat
p	km	Bahnparameter, Parameter des Kegelschnitts [semilatus rectum)
p	mbar	Druck (nur in Abschnitt 9.9)
$\mathbf{p}_i$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ \ (1 = 1, 2, 3)$, $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})}$		Kartesische Basis des körperfesten Äquator-Systems des Mondes (selenographisches System)
Q	----	Überlappungsfaktor
q	km	Perizentrumsdistanz
q	Grad	Positionswinkel (PA – „position angle“) (in Kapitel 29)
$\mathbf{q}_0$		transversaler Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0$
$\mathbf{q}_j$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j \ \ (i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(A)}$		Kartesische Basis des Antennensystems
$\mathbf{q}_j^{(B)}$		Kartesische Basis des Bahnsystems eines Planeten oder anderen interplanetaren Objektes bei Bezug auf das Ekliptiksystem des Sonnensystems
$\mathbf{q}_j^{(E)}$		Kartesische Basis des Ekliptik Systems

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{q}_j^{(G)}$		Kartesische Basis des geographischen und des Greenwich bezogenen Koordinatensystems
$\mathbf{q}_j^{(H)}$		Kartesische Basis des topozentrischen Horizontsystems
$\mathbf{q}_j^{(I)}$		Kartesische Basis des mitgeführten (= mitbewegten) Koordinatensystems („*Hansen*“ System)
$\mathbf{q}_j^{(D)}$		Kartesische Basis des Knotensystems (drakonitisches System)
$\mathbf{q}_j^{(K)}$		Kartesische Basis des planetaren Äquatorsystems
$\mathbf{q}_j^{(M)}$		Kartesische Basis des (geozentrischen oder topozentrischen) Koordinatensystems (Bezug auf den Ortsmeridian)
$\mathbf{q}_j^{(P)}$		Kartesische Basis des Apsidensystems (anomalistisches System, Perigäum bezogenes System)
$\mathbf{q}_j^{(S)}$		Kartesische Basis eines satellitenzentrierten Systems
$\mathbf{q}_j^{(T)}$		Kartesische Basis des Tangenten bezogenen Systems
$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}$		Kartesische Basis des Bahn-Systems des Mondes
R	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche
$\mathbb{R}$	---	Körper der reellen Zahlen
R'	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche
R_E	km	mittlerer Äquatorradius der Erde
R_G		Gravitationspotential
R_M	km	Referenzradius des Mondes
R_Q	km	Querkrümmungsradius des Ellipsoids
R_φ	km	Radius des Parallelkreises unter der Breite φ
$R_\mathbb{C}$	km	Mittlerer Radius des Mondes

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$R_{\mathbb{C}a}, R_{\mathbb{C}b}, R_{\mathbb{C}c}$	km	Radius des Mondes in Richtung der Hauptträgheitsachsen $A < B < C$: a in Ríchtung zur Erde, b in Bahnrichtung, c zum Nordpol des Mondes
r	km	zentrische Distanz („Radius“) eines Satelliten oder Raumflugkörpers
r_0	km	Abstand des Mittelpunktes der Attraktionssphäre vom Mittelpunkt des Ablenkkörpers
r_{32H}	[km], [AE]	Radius der Hillschen Gravitationssphäre (um einen Körper m_2 im eingeschränkten Dreikörperproblem)
r_A	km	Apozentrumsdistanz
r_F	km	antifokaler Radius ($r_F = 2a - r$)
r_g	km	Radius der geostationären Bahn
r_{g0}	km	Näherungswert für r_g
r_K	km	Radius der Attraktionssphäre
r_M	km	Selenozentrischer Radius eines Ortes auf oder über dem Mond
r_m	km	Geozentrische Distanz des Mondmittelpunktes
r_P	km	Perizentrumsdistanz
$\mathbf{r}$	km	Ortsvektor
$\mathbf{r}_{B\sun}$	km	Baryzentrischer Ortsvektor der Erde
$\mathbf{r}_{B\earth}$	km	Baryzentrischer Ortsvektor der Erde
$\mathbf{r}_{\earth\mathbb{C}}$	km	Geozentrischer Ortsvektor des Mondes
$\mathbf{r}_{\odot\earth}$	km	Heliozentrischer Ortsvektor der Erde
$\mathbf{r}_{\odot\mathbb{C}}$	km	Heliozentrischer Ortsvektor des Mondes
$\dot{\mathbf{r}}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (absoluter)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{r}$	km (AE)	Heliozentrischer Ortsvektor eines interplanetaren Objektes (Plane, Raumsonde, etc.)
$\mathbf{r}_P$	km	Planetozentrischer Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{p}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (relativ zum $\mathbf{p}_i$ --System) $\left(\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i\right)$
$\ddot{\mathbf{r}}$	km/s^2	Beschleunigungsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}_0$		radialer Richtungsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$
s	km	Bogenlänge
T	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$ seit Fundamentalepoche J2000.0
T	C (oder Kelvin)	Temperatur (siehe Abschnitt 9.9)
T	-	Anzahl der Satelliten in einer Walker Konstellation (T/P/F)
T	kg km^2/s^2	kinetische Energie
$\mathbf{T}$		Tensor
T_0	Jhrh.	Zeit einer Koordinatenepoche in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche $\text{J2000.0} \Leftrightarrow JD = 2451545.0$
T_A	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$ seit Fundamentalepoche J1900.0
T_m	h	mittlere Sonnenzeit
T_w	h	wahre Sonnenzeit
T_λ	h	mittlere Ortssonnenzeit für Meridian der (östlichen) geographischen Länge λ
T_Ω	h	mittlere Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten
t	s	Zeit
t_0	s	Epochezeit (U.T.)
t_P	s	Perigäumsdurchgangszeit (U.T.)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
t_Ω	s	Zeit (U.T.) im aufsteigenden Knoten
$t^{ij}{}_{,l}$		kovariante Ableitung: $t^{ij}{}_{,l} := \frac{\partial t^{ij}}{\partial y^l}$, wenn $t^{ij} = t^{ij}\left(y^l\right)$
t	km	Tangente
U	kg km^2/s^2	potentielle Energie (Potential)
u	km/s	Geschwindigkeit einer Rakete in Bezug auf ein Ruhesystem (im Rahmen der spez. Relativitätstheorie)
u	Grad	Argument der Breite $(u = \upsilon + \omega)$
u	km/s	Betrag des Geschwindigkeitsvektors **u**
$u_1, u_2, u_3, u_4,$	---	*Gauß-Rodrigues* Parameter („*Euler* Parameter“)
V	km/s	Geschwindigkeit
$\mathbb{V}$	---	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	---	n-dimensionaler Vektorraum
V_A	km/s	Geschwindigkeit im Apozentrum der Bahn
V_A	km/s	Drehgeschwindigkeit des Äquators mit der Rotation des Zentralkörpers
V_B	km/s	Drehgeschwindigkeit eines Breitenkreises mit der Rotation des Zentralkörpers
V_E	km/s	elliptische Geschwindigkeit
V_e	km/s	Austritts – Geschwindigkeit der Treibgase eines Raketenmotors
V_F	km/s	Fluchtgeschwindigkeit (= Entweichgeschwindigkeit, = parabolische Geschwindigkeit im Perizentrum)
V_g	km/s	Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers
V'_{g0}	km/s	scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Äquatorüberflug auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
V'_{gB}	km/s	Scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Überflug eines Breitenkreises auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V_H	km/s	hyperbolische Geschwindigkeit
V_K	km/s	Kreisbahngeschwindigkeit
V_P	km/s	Geschwindigkeit im Perizentrum der Bahn
V_R	km/s	radiale Geschwindigkeit
V_T	km/s	transversale Geschwindigkeit
V_{TC}	km/s	Konstanter (ungestörter) Anteil der transversalen Geschwindigkeit einer Keplerbewegung $V_C := \frac{G}{p}$, $V_T = V_{TC} + eV_C \cos\upsilon$
$V_{\overset{+}{\bigcirc}}$	km/s	Geschwindigkeit der Erde um die Sonne
V_∞	km/s	asymptotische Geschwindigkeit
ν	Grad	wahre Anomalie
ν_F	Grad	antifokale Anomalie
ν_∞	Grad	asymptotische Anomalie (= hyperbolischer Exzess)
$\mathbf{v}_i$		begleitendes Dreibein
$\dot{\mathbf{v}}_q$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{q}_j$ – System $\left(\dot{\mathbf{v}}_q = \ddot{y}^j \mathbf{q}_j\right)$
$\dot{\mathbf{v}}_p$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{p}_i$ – -System $\left(\dot{\mathbf{v}}_p = \ddot{x}^i \mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{v}_1$		Tangentialvektor $\dot{\mathbf{r}} = V\,\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$		Hauptnormalenvektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$		Binormalenvektor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_0$
$\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_{e0}$	km/s	Austrittsgeschwindigkeit von Raketentreibstoff [in Bezug auf ein bewegtes bzw. ruhendes System)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
W	km	Überdeckungsstrecke
W_d		Wochentag (0 – Montag, 1 – Dienstag, 2 – Mittwoch, 3 – Donnerstag, 4 – Freitag, 5 – Samstag, 6 – Sonntag)
W_0	km	Überdeckung des Äquators
W_φ	km	Überdeckung eines Breitenkreises
$W_{\lambda\Omega}$	km	Distanz auf Äquator, die $\Delta\lambda_\Omega$ entspricht
$\mathbf{x}$	km, km/s	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_m\left[t; t_0\right]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t in Koordinaten, die auf den mittleren Äquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Epoche $t0$ bezogen sind
$\mathbf{x}_w[t]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t in Koordinaten, die auf den wahren momentanen Äquator und den wahren momentanen Frühlingspunkt bezogen sind
$\mathbf{x}_T$	km, km/s	topozentrischer Zustandsvektor
$x_{,j}$		kovariante Ableitung: $x_{,j} := \dfrac{\partial x}{\partial y^j}$, wenn $x = x\left(y^j\right)$
$x^i_{\ ,j}$		kovariante Ableitung: $x^i_{\ ,j} := \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$, wenn $x^i = x^i\left(y^j\right)$
$\mathbf{x}_{,j}$		kovariante Ableitung: $\mathbf{x}_{,j} := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^j}$, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(y^j\right)$
$x_{♁☾i}$	km	kartesische geozentrische Koordinaten des Mondes im Erdäquatorsystem $\mathbf{r}_{♁☾} = x^i_{♁☾}\,\mathbf{p}_i$
x_{Aj}	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondäquatorsystem $\mathbf{r} = x_A\,\mathbf{p}^{(☾)}_j$
x_{BSi}	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondbahnsystem $\mathbf{r} = x_{BS}^{\ \ i}\,\mathbf{p}^{(☾)}_i$
x_{MAi}	km	kartesische Koordinaten eines Mondorbiters im beweglichen Erdäquatorsystem $\mathbf{r}_M = x_{MA}^{\ \ i}\,\mathbf{p}_i$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Y		*Euler*winkel
Y	d	Jahr (bürgerliches Datum)
Y_B	d	*Bessel*sches Jahr (annus fictus)
Y_{sid}	d	siderisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,s}$)
Y_{trop}	d	tropisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,t}$)
$y_j^{(\mathbb{C})}$	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondbahnsystem $\mathbf{r} = x^{(\mathbb{C})j}\,\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})}$
Z	Grad, Min	Zeitgleichung
z	Grad	Zenitdistanz ($z = 90° - h$)
z_A	”	$90° + z_A \triangleq$ Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit $T0$ auf dem mittleren Äquator zur Zeit T [siehe auch ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)

Griechische Symbole

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
α	Grad	Rektaszension
α	–	$\alpha := \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ (nur in Kapitel 8.17)
α	Grad	Orientierungswinkel für Geschwindigkeitsfehlervektor (nur in Kapitel 30.10)
α_1	Grad	Rektaszension des Nordpols eines Planeten bezogen auf das Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem
α_h	Grad	Steigungswinkel der Asymptote einer hyperbolischen Bahn
α_Ω	Grad	knotenbezogene Rektaszension $\alpha_\Omega(t) = \sigma_i\left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\alpha_{L\Omega}$	Grad	lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens eines Mondorbiters
$\alpha_{\odot}$	Grad	Rektaszension der wahren Sonne
$\overline{\alpha_{\odot}}$	Grad	Rektaszension der mittleren Sonne
$\alpha_{\bar{\odot}}$	Grad	Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne
β	Grad	Orientierungswinkel für topozentr. Geschwindigkeitservektor (nur in Kapitel 30.10)
β	---	β=V/c im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (V = Geschwindigkeit des bewegten Inertialsystems, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)
β	---	$\beta := \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)/e = e/\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)$, e = numerische Exzentrizität [im Rahmen von *Bessel* Funktionen)
β	Grad	Nadirwinkel
β_g	Grad	Grenznadirwinkel an kugelförmige Oberfläche
β'_g	Grad	Grenznadirwinkel an Rotationsellipsoid
β_N	Grad	Sonneneinfallswinkel in Satellitenbahnebene (Komplement zum Sonnenaspektwinkel $\triangleq$ NASA Beta-Winkel $= \beta_N = 90° - \sigma$
β_M	Grad	Breite im selenozentrischen Äquatorsystem
$\Gamma_{\odot}$	Grad	mittlere Länge des Perigäums der (scheinbaren) Sonne $\Gamma_{\odot} = \omega_{\odot} + \Omega_{\odot}$
$\Gamma'_{\mathbb{C}}$	Grad	mittlere Länge des Perigäums des Mondes $\Gamma'_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}} - M_{\mathbb{C}}$ (in der Literatur häufig dargestellt durch $\Gamma'_{\mathbb{C}}$)
$\Gamma^{l}{}_{ik}$		*Christoffel*symbol, gemischtvariantes (einfach kontravariant, zweifach kovariant) (= *Christoffel*symbol der zweiten Art) $\Gamma^{l}{}_{jk} := \frac{\partial y^l}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^i \partial y^k}$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Γ_{nik}		*Christoffel*symbol, rein kovariant (= *Christoffel*symbol der ersten Art) $\Gamma_{nik} := g_{nj}\,\Gamma^{j}_{ik}$
γ	Grad	Zentralwinkel
γ	Grad	Orientierungswinkel für Geschwindigkeitsfehlervektor (nur in Kapitel 30.10)
γ_g	Grad	Grenzzentralwinkel an kugelförmige Oberfläche
γ'_g	Grad	Grenzzentralwinkel an Rotationsellipsoid
γ_0	Grad	kürzester Zentralwinkel zwischen Sichtpunkt und Subsatellitenbahn
Δ	Grad	Überdeckung auf Äquator
Δ	Grad	Zwischenwinkel zwischen Radius und Tangente
Δ_A	Grad	Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten des Mondäquators mit der Erdäquatorebene und dem aufsteigenden Knoten mit der Ekliptik
Δ_φ	Grad	Überdeckung auf Parallelkreis φ
Δa_a	km	Korrektur zu a_a
Δa_d	km	Korrektur zu a_d
Δa_L	km	Korrektur zu a_L
Δa_R	km	Korrektur zu a_R
Δa_S	km	Korrektur zu a_S
Δa_t	km	Korrektur zu a_t
Δa_{ss}	km	Korrektur zu a_{ss}
Δa_g	km	Korrektur zu a_g
Δr_{g0}	km	Korrektur zu r_{g0}
Δt	s, h	Zeitintervall
Δu	Grad	Intervall im Argument der Breite während des Zeitintervalls Δt

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ΔV	km/s	Geschwindigkeitsinkrement
ΔV_{char}	km/s	charakteristische Geschwindigkeit (für Manöver bei Bahnänderungen)
$\Delta\alpha$	”	Gleichung der Äquinoktien (Nutation in Rektaszension) $\Delta\alpha = \Delta\psi \cos\varepsilon$
$\Delta\delta$	”	Nutation in Deklination
$\Delta\varepsilon$	”	Nutation in Schiefe
Δf	Hz	Zweiweg-Doppler
$\Delta\lambda_k$	Grad	Toleranz-Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Spurstabilität
$\Delta\lambda_\Omega$	Grad	Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\lambda_{\Omega K}$	Grad	Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Umläufen der Knotenlänge
$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	Grad	Spurfehler = Fehler der mittleren geographischen Länge des aufsteigenden Knotens infolge von Variationen in den Anfangsbahnelementen
$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}$	Grad	Spurfehler beim *N*-ten Überflug des aufsteigenden Knotens
$\Delta\tau_k$	s	Toleranz-Zeitintervall für Zeitstabilität
$\Delta\tau_\Omega$	Grad	Verschiebung des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\psi$	”	Nutation in Länge
δ	Grad	Deklination
δ	Grad	Missweisung bei fehlerhafter Antennenausrichtung (nur in Kapitel 30.10)
δ_1	Grad	Deklination des Nordpols eines Planeten bezogen auf das Frühlingspunkt bezogene Erdäquatorsystem
δ_h	Grad	Umlenkwinkel einer hyperbolischen Bewegung

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta_i^{\ j}$		*Kronecker*symbol $\delta_i^{\ j} = 0$ für $i = j$, $\delta_i^{\ j} \neq 0$ für $i \neq j$ [*Kronecker*-tensor der zweiten Stufe)
$\delta_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n}$		*Kronecker*tensor der (2*n*)-ten Stufe
δ_m	Grad	Deklination des Grenzparallelkreises für Überdeckung
$\delta_\odot$	Grad	Deklination der wahren Sonne
$\overline{\delta_\odot}$	Grad	Deklination der mittleren Sonne
$\delta_{\bar{\odot}}$	Grad	Deklination der fiktiven mittleren Sonne
$\delta\mathbf{a}\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in a zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
δa_l	Grad	langperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta a_l = \delta a\left[t, t_0\right]_l$
δa_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 , $\delta a_k = \delta a\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\mathbf{a}\left[t, t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein Keplerelement $\mathbf{a} = \left\{a, e, i, \Omega, \omega, M_0\right\}$
δ_B	Grad	Deklination eines Breitenkreises (parallel zum Äquator)
δf	Hz	Einweg-Doppler
$\delta\mathbf{E}\left[t, t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein beliebiges Bahnelement zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
$\delta e\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
δe_l	Grad	langperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 , $\delta e_l = \delta e\left[t, t_0\right]_l$
δe_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 , $\delta e_k = \delta e\left[t, t_0\right]_k$
$\delta i\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
δi_l	Grad	langperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 $\delta i_l = \delta i\left[t, t_0\right]_l$
δi_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta i_k = \delta i\left[t, t_0\right]_k$
$\delta M_0\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *M*0 bezogen auf die Epoche *t*0
δM_l	Grad	langperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_l = \delta M\left[t, t_0\right]_l$
δM_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_k = \delta M\left[t, t_0\right]_k$
$\delta P\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *P*
$\delta\Omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
$\delta\Omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_l = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\Omega_{lG}$	Grad	Langperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{lG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{lG}$
$\delta\Omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_k = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\Omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{kG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in ω bezogen auf die Epoche *t*0
$\delta\omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_l = \delta\omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\omega_{lG}$	Grad	langperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{lG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{lG}$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta\omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_k = \delta\omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{kG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\lambda_\Omega\left[t_1, t_2\right]$	Grad	Änderung der Knotenlänge im Zeitintervall t_1 bis t_2
ε	Grad	wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$
$\bar{\varepsilon}$	Grad	mittlere Schiefe der Ekliptik
$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kovariant
$\varepsilon^{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kontravariant
ε	Grad	Orientierungswinkel für Ortsfehlervektor (nur in Kapitel 30.10)
ζ	Grad	Bahnwinkel (wahre Länge in der Bahn, erster *Hansen* Winkel) $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma$
ζ	cm	Koordinate bei Parallelprojektion in Richtung zum Blickpunkt
ζ_A	”	$90° + \zeta_A$ = Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit T auf dem mittleren Äquator zur Zeit $T0$ (siehe auch z_A; benötigt zur Berechnung der Präzession) (siehe Abschnitt 9.3)
Θ	Grad	Sternzeit (lokale, mittlere)
Θ	Grad	Wahre Neigung des Mondäquators bezüglich Ekliptik $\Theta = I + \rho_L$
Θ^*	Grad	scheinbare Sternzeit $\left(\Theta^* = \Theta + \Delta\Psi\ \cos\varepsilon\right)$
Θ_A	”	Inklination des mittleren Äquators zur Zeit t_0 bezüglich des mittleren Äquators zur Zeit T (siehe auch z*A*, ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)
Θ_B	Grad	Sternzeit in Beobachtungsstation $\Theta_B = \Theta_A + \lambda_B$ (λ_B geographische Länge der Station)

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Θ_G	Grad	Sternzeit in Greenwich (mittlere), bezogen auf Nullmeridian, zu beliebiger (mittlerer) Tageszeit
Θ_L	Grad	lunare Sternzeit bezogen auf Nullmeridian
Θ_0	Grad	lokale Sternzeit (mittlere) zur (Fundamental-) Epoche t_0
Θ_{L0}	Grad	lunare Sternzeit (mittlere) zur (Fundamental-) Epoche t_0
$\dot{\Theta}$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit eines Zentralkörpers
$\dot{\Theta}_L$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit des Mondes, Variation der lunaren Sternzeit
ϑ	Grad	Stundenwinkel
ϑ	Grad	Winkel zwischen Wellenfront und Bewegungsrichtung des Bezugssystems (nur in Kapitel 9)
$\vartheta_\odot$	Grad	Stundenwinkel der wahren Sonne
$\overline{\vartheta_\odot}$	Grad	Stundenwinkel der mittleren Sonne
$\vartheta_{\bar{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne (auf Äquator)
η	Grad	Auslenkung einer Welle (nur in Abschnitt 9.7)
η	Grad	Drehwinkel der Bahnebene bei beliebiger Bewegung (zweiter Bahnwinkel im *Hansen*-System)
η	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Norden
η	Grad	Orientierungswinkel für Ortsfehlervektor (nur in Kapitel 30.10)
κ	1/km	Krümmung
κ	Grad	Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9, Band II)
κ_g	Grad	Grenz-Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9, Band II)
λ	Grad	östliche geographische Länge auf der Erde
λ_M	Grad	östliche Länge im selenozentrischen Äquatorsystem

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
λ_P	Grad	westliche planetographische Länge auf der Oberfläche eines Planeten
$\lambda_{P_{\ddagger}^{\dagger}}$	Grad	westliche planetographische Länge des subterrestrischen Punktes auf der Oberfläche eines Planeten
λ_Ω	Grad	geographische Länge des aufsteigenden Knotens auf der Erde (positiv nach Ost)
$\lambda_{K\Omega}$	Grad	Länge bezogen auf den wahren Knoten $\lambda_{K\Omega}(t) = \sigma_i \left[\lambda_\Omega(t_\Omega) - \lambda(t)\right]$
$\lambda_{M\Omega}$	Grad	selenographische Länge des aufsteigenden Knotens einer Mondorbiterbahn
$\dot{\lambda}_\Omega$	Grad/s	Variation der Knotenlänge
$\dot{\lambda}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift der Knotenlänge
λ_O	Grad	östliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
λ_W	Grad	westliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
μ	km^3 / s^2	zentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse des Zentralkörpers)
μ_α	,,	Präzession in Rektaszension
μ_δ	,,	Präzession in Deklination
ξ		Erste Koordinate bei Zerlegung des Beschleunigungsvektors im *Leibniz*-System $\left(\dot{\xi} = -\dot{\zeta}\right)$ (siehe in den Abschnitten 4.4.2 – 4.4.5, Band II)
ξ	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Osten
π		Kreiszahl (π = 3.14159265358979323846264338327950288419 71…)
π_1	,,	Parallaxe
π_2	,,	Parallaxe
$\pi_{B,1}$	,,	Parallaxe
$\pi_{E,1}$	,,	Parallaxe

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ρ	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf kugelförmiger Oberfläche des Zentralkörpers
ρ'	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
$\dot{\rho}$	km/s	Entfernungsänderung („range rate“)
$\dot{\rho}_c$	km/s	Berechnete Entfernungsänderung (nur Abschnitt 30.10)
$\dot{\rho}_P$	km/s	Berechnete Entfernungsänderung modifizierte Theorie (nur Abschnitt 30.10)
ρ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes in Inklination
σ	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–Sonne
σ	Grad	Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf Anfangspunkt eines Hansen-Systems $\left(\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i\right)$
$\bar{\sigma}$	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–mittlere Sonne
σ_i		relative Bewegungsrichtung der Bahn: $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)\right)$ $\sigma_i = 1 \triangleq$ rechtläufig, $\sigma_i = -1 \triangleq$ rückläufig
σ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes des Mondknotens
τ	Grad	Sonnenwinkel $(\tau = \alpha - \alpha_\odot) \triangleq$ Argument des sonnenbezogenen synodischen Umlaufs (auf dem Äquator)
τ	1/km	Torsion
τ	sec	Lichtzeit $\left(\tau = \rho / c\right)$
τ_G	Grad	Sonnenwinkel $(\tau = \Theta_G - \alpha_\odot)$ des Nullmeridians (Greenwich)
$\bar{\tau}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel $(\bar{\tau} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}})$, bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
τ_Ω	Grad	Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens $(\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot)$
$\overline{\tau_\Omega}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens $(\overline{\tau_\Omega} = \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}})$, bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
$\dot{\tau}_\Omega$	Grad/s	Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens
$\dot{\tau}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
τ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes in Länge
Φ	Grad	Phase (nur in Kapitel 9)
Φ		Pseudo Potential (nur in Kapitel 2)
Φ	Grad	Winkeldistanz des Ursprungs des Mondäquators (mittlerer subterrestrischer Punkt) vom absteigenden Knoten mit der Ekliptik
Φ_H		Pseudo Potential im *Hill*schen Spezialfall (nur in Kapitel 2)
φ	Grad	Phasenwinkel (bei Beobachtung des Mondes oder eines interplanetaren Objektes)
φ	Grad	geodätische Breite
φ_P	Grad	Planetographische Breite
$\varphi_{P\mathrm{♁}}$	Grad	Planetographische Breite des subterrestrischen Punktes auf einer Planetenoberfläche
φ'	Grad	geozentrische Breite
φ'_P	Grad	Planetozentrische Breite
$\varphi'_{P\mathrm{♁}}$	Grad	Planetozentrische Breite des subterrestrischen Punktes auf der Oberfläche eines Planeten
χ	Grad	geozentrische Elongation Satellit–Sonne
χ	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch die Abplattung des Zentralkörpers (in Abschnitt 2.9)
$\bar{\chi}$	Grad	geozentrische Elongation Satellit–mittlere Sonne
Ψ	Grad	Ekliptikale Länge des absteigenden Knotens des Monäquators
ψ	Grad	Bahnwinkel in einem Bahnsystem, das kein *Hansen-System* ist
ψ	Grad	Depressionswinkel ($\psi = 90° - \beta$)
$\psi_\odot, \psi_\leftmoon$	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch Sonnen- bzw. Mondattraktion (in Abschnitt 2.9)
Ω	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\Omega_{\sun}^{+}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der Erdbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_{\leftmoon}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_{\odot}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der (scheinbaren) Sonnenbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
Ω_A	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens des Mondäquators
Ω_B	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Mondbahn
$\dot{\Omega}_s$	Grad/s	säkulare Störung in Ω
ω	Grad	Argument des Perizentrums
ω	–	Kreisfrequenz (nur in Kapitel 9)
ω_A	Grad/s	Rotationswinkelgeschwindigkeit des Äquators bei Eigenrotation des Zentralkörpers
ω_E	Grad/s	Erdrotation (siderisch)
ω_l	Grad	säkularer und langperiodischer Störungsanteil im Argument des Perizentrums ω $(\omega_l := \bar{\omega} + \delta\omega_l)$
$\omega_{\sun}^{+}$	Grad	Argument des Perihels der Erdbahn um die Sonne
$\omega_{\odot}$	Grad	Argument des Perigäums der [scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\dot{\omega}_s$	Grad/s	Säkulare Störung in ω
$\tilde{\omega}$	Grad/s	Länge des Perizentrums $\tilde{\omega} = \omega + \sigma_i \Omega$

Indizes

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
A	Apozentrum (Apogäum, Aphel)
a	anomalistisch (bezogen auf das Perizentrum)
B	Attraktion durch dritte Körper
D	Luftwiderstand
d	drakonitisch (bezogen auf den aufsteigenden Knoten)
E	Entweich (nur bei Fluchtgeschwindigkeit *VE*)
G	Greenwich (Nullmeridian)
G	Schwerefeld des Zentralkörpers
g	geostationär
H	Hyperbel (hyperbolisch)
K	Kreis, kreisförmig
k	kurzperiodisch
l	langperiodisch
m	bezogen auf einen Meridian
m	mittlerer Wert von …
N	Nutation
PAR	Parabel, parabolisch
P	Präzession
P	Perizentrum [Perigäum, Perihel)
R	Strahlungsdruck
R	radial
S	synodisch [bezogen auf einen anderen Körper)
s	säkular
ss	sonnensynchron
T	transversal
t	tropisch [bezogen auf den [mittleren) Frühlingspunkt)
w	wahrer Wert von …
0	Epoche
0	bei Vektoren: Einheitsvektor
λ	Längenkreis der Länge λ
Ω	… des aufsteigenden Knotens
φ	Breitenkreis der Breite φ

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
♁	… der Erde
☾	… des Mondes
☉	… der Sonne
☉̄	… der fiktiven mittleren Sonne
♀	… der Venus
♂	… des Mars
♃	… des Jupiter
♄	… des Saturn
♆	… des Neptun
♈	… des Frühlingspunktes

Mathematische Symbole

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbb{A}_n$	endlich dimensionaler affiner Punktraum
$\mathbb{E}_n$	endlich dimensionaler euklidischer Punktraum
$\mathbb{M}$	Metrischer Raum
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}_n$	Tangentialraum an einen n-dimensionalen Punktraum [$\mathbb{A}_n$ oder $\mathbb{E}_n$)
$\mathbb{V}$	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	endlicher Vektorraum (n-dimensionaler Vektorraum)
$\mathbb{V}_{En}$	endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum
:=	Definition eines Ausdrucks BEISPIEL: $g_1 := V \cos\zeta_A$, die Größe g_1 wird durch den rechts stehenden Ausdruck definiert
$\in$	Element von …
a	Vektor
T	Tensor

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	tensorielles Produkt
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	äußeres Produkt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\left(a_i{}^j\right)$	Matrix mit Reihenindex *i*, Spaltenindex *j*
$\det\left(a_i{}^j\right)$	Determinante der Matrix $\left(a_i{}^j\right)$
[ ]	geschlossenes Intervall
( )	offenes Intervall
[ )	links geschlossenes, rechts offenes Intervall
( ]	links offenes, rechts geschlossenes Intervall
$[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Richtungsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $[\lambda, \varphi] := \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$r[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Ortsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $\mathbf{x} \Leftrightarrow r[\lambda, \varphi] := r \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i)$	Vektorfeld mit den Koordinaten x^i [i te Koordinate [kein Exponent, *Einstein*sche Schreibweise])
$\mathbf{r}_{,i}$	[partielle) Ableitung eines Vektorfeldes nach der i-ten Koordinate: $\mathbf{r}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$
$x^i{}_{,j}$	[partielle) Ableitung eines Skalarfeldes $x^i = x^i\left(y^j\right)$ nach der j-ten Koordinate: $x^i{}_{,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$
$[A, h]$	Horizontsystem
$[\alpha, \delta]$	bewegliches Äquatorsystem [Bezug Frühlingspunkt)
$[\vartheta, \delta]$	festes Äquatorsystem [Bezug Ortsmeridian)

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$[\lambda, \delta]$	geozentrisches System [Bezug Nullmeridian)
$[\lambda, \varphi]$	geographisches System [Bezug Nullmeridian)
$[A_x, h_x]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„x-System“)
$[A_y, h_y]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„y-System“)
$[l, b]$	ekliptikales System
$[l_{II}, b_{II}]$	galaktisches System [neu)
$[\lambda, \varphi] \xrightarrow{A, B, C} [\alpha, \delta]$	Darstellung einer Rotation: Ein Einheitsvektor $[\lambda, \varphi]$ im λ, φ - System wird durch Drehung um die Winkel *A*, *B*, *C* [in dieser Reihenfolge) in den Einheitsvektor $[\alpha, \delta]$ des α, δ - Systems transformiert.
$A \in [0°, 180°)$	Beispiel für ein links geschlossenes, rechts offenes Intervall
O	Ordnung einer Funktion: In $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon)$ ist $O(\varepsilon)$ ein Restterm der Form $\varepsilon \mathbf{R}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, wobei R von $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0$ und ε abhängig ist.

Astronomische Symbole

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
♁	Erde
☉	Sonne
☉̄	fiktive mittlere Sonne
☾	Erdmond
☿	Merkur
♀	Venus
♂	Mars
♃	Jupiter
♄	Saturn
♆	Neptun
⛥	Satellit / Orbiter
♈	Frühlingspunkt
☍	Opposition

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
☌	Konjunktion

Abbildungsverzeichnis

Bild 21-1: Symptomatische Darstellung eines Fixpunktverfahrens zur Berechnung des Zeitpunktes t_F, der einem gegebenen Bahnwinkel zugeordnet wird mit Hilfe der Winkeldifferenz $\Delta\zeta = \zeta(t) - \zeta(t_F)$ 21

Bild 21-2: Beispiel für ein Fixpunktverfahren mit Sinus-Funktion als überlagerter Funktion 21

Bild 21-3: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit über der Inklination bei Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“). Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten 23

Bild 21-4: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit über der Inklination bei Berücksichtigung aller (d.h. säkularer und periodischen) Bewegungseinflüssen („Störungen“) durch die zonalen Harmonischen (J_2, J_3, J_4). Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten (Anordnung wie in Bild 21-3) 23

Bild 22-1: Anomalistische Bewegung einer hochexzentrischen Erdsatelliten Bahn: Apogäumshöhe 20000km, Perigäumshöhe 200 km, Inklination 60°. Das Bild zeigt die wahre Bahn und die zugehörige Subsatellitenbahn über einen anomalistischen Umlauf. Die Rotation der Erde ist im Bild nicht dargestellt. Der Terminator ist für den 1. Oktober 1985 um 00:25:0.0 eingezeichnet. Das Perigäum der Bahn liegt im Erdschatten, der in hellblauer Farbe markiert ist. In grüner Farbe sind der Erdäquator und der Nullmeridian eingezeichnet. 28

Bild 22-2: Das $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem in Bezug auf das $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ – *Leibniz*-System. υ-wahre Anomalie, M-Mittelpunkt der Ellipse, E-Brennpunkt der Ellipse („Erdmittelpunkt“), A-Apogäum, P_E-Perigäum 29

Bild 22-3: Die Differenz wahre υ – mittlere Anomalie *M* über der mittleren Anomalie für die große Bahnhalbachse *a* = 66000 km, die Inklination i = 80°, die Exzentrizitäten *e*=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 36

Bild 22-4: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 0.8]$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°. 43

Bild 22-5: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 1.0)$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°. Man beachte, dass die untere Grenze der Umlaufzeit $\overline{P_a}(e = 0.0) = 1.47490\ \mathrm{h}$ beträgt. 44

Bild 22-6: Verlauf der Differenz zwischen wahrer und mittlerer anomalistischer Umlaufzeit für die Erdsatellitenbahn a=8300 km, e = 0.2, i = 60°, bezogen auf die Epoche t_0, über einen (anomalistischen) Umlauf unter Berücksichtigung unterschiedlicher Bahnmodelle. Kurve 1 (rot): komplettes analytisches Bahnmodell, Kurve 2 (hellblau): ohne J_4, Kurve 3 (blau): nur mit J_2, Kurve 4 (grün): mit J_2 und J_4, ohne J_3. 53

Bild 22-7: Die ersten 6 anomalistischen Umläufe der Transferbahn des Satelliten Symphonie-A in die geostationäre Bahn mit Kennzeichnung der Apsiden: X für Perigäum, O für Apogäum 55

Bild 22-8: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)} \Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der

mittleren anomalistischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für verschiedene Exzentrizitäten 68

Bild 22-9: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta M_0\,[\mathrm{Grad}]$ der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahn a = 8300 km mit den Exzentrizitäten e=0.0 (rote Kurve), e=0.1 (blaue Kurve), e = 0.2 (grüne Kurve). 76

Bild 22-10: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta M_0\,[\mathrm{Grad}]$ der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 8300 km (rote Kurve), a = 10000 km (blaue Kurve), a = 12000 km (grüne Kurve) und mit der Exzentrizität e=0.1. 76

Bild 22-11: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}\,[\mathrm{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 7350, 8000, 10000, 12000, 15000 km mit der Exzentrizität e=0.1 78

Bild 22-12: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}\,[\mathrm{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 30000 km mit den Exzentrizitäten e=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.75 78

Bild 22-13: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für die Bahn a=24354.797 km, e=0.73, i=0°.0. Zur Veranschaulichung ist die Abplattung der Erde um das 100 fache überhöht mit der Annahme J_2=0.1. 80

Bild 22-14: Veranschaulichung der Wirkung des Luftwiderstandes (angedeutete Atmosphäre in hellblau um die Erde). 80

Bild 22-15: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für eine Bahn unter Einwirkung des Luftwiderstandes 80

Bild 22-16: Zu Berechnung der geographischen Länge λ_P des Perigäums P mit Hilfe der geographischen Länge λ_Ω des aufsteigenden Knotens Ω. G bezeichnet den Schnittpunkt des Meridians durch Greenwich mit dem Äquator A, B die Bahnebene unter der Inklination *i* gegenüber dem Äquator 82

Bild 22-17: Theoretische Beschreibung der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene große Bahnhalbachsen für Kreisbahnen, zum Vergleich ist die tropische Erd-Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) (der negative Wert) eingetragen 85

Bild 22-18: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse a = 10000 km und minimale Perigäumshöhe über 200 km. Zum Vergleich ist die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) eingetragen 86

Bild 22-19: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für eine Übergangsbahn in eine geostationäre Bahn 86

Bild 22-20: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten bei Annahme der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, Die Berechnung wird eingeschränkt durch Vorgabe der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Im Beispiel ist $\bar{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben. 91

Bild 22-21: Verlauf der (mittleren) Exzentrizität $\overline{e}_0$ über der Inklination für Satellitenbahnen mit der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$ und bei der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Dies ist die Grenzexzentrizität, die erreicht werden kann, wenn die obige säkulare Drift der Perigäumslänge eingehalten werden soll. Im Beispiel ist $\overline{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben. 92

Bild 22-22: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten bei Annahme der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, Die Berechnung wird eingeschränkt durch Vorgabe der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Im Beispiel ist $\overline{\omega}_0 = 90°$ vorgegeben. 94

Bild 22-23: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ über der Inklination für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -355°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$ 95

Bild 22-24: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -357°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$ 96

Bild 22-25: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -359°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$ 96

Bild 22-26: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -362°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$ 97

Bild 22-27: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ für die Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -364°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$, $\overline{\omega}_0 = 0°$ .. 97

Bild 22-28: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch Bahnmanöver des zweiten Satelliten über eine elliptische Zwischenbahn (E_1 außerhalb, E_2 innerhalb der gegebenen Kreisbahn mit Radius a_1) in eine enge Konstellation in der Position S_2 gebracht..... 108

Bild 22-29: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch zwei bzw. drei Bahnmanöver des zweiten Satelliten über einen elliptischen Bahnbogen in eine gewünschte Konstellation in der Position S_1 gebracht, während der erste Satellit in der Position S_2 verharrt..... 116

Bild 23-1: Ein drakonitischer Umlauf eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn um die als fest angenommene Erde vom aufsteigendem Knoten Ω_0 zum nächsten aufsteigenden Knoten Ω_1. 117

Bild 23-2: Das knotenbezogene $\mathbf{q}_j^{(D)}$ – Bahnsystem, Bezug auf das Frühlingspunkt-bezogene $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem mit Hilfe der *Euler*winkel *A, B, C*, wobei hier *C*=0 gesetzt werden kann, $\mathbf{r}_0$ ist der Richtungsvektor zu einem Ort auf der Bahn, $u = \sphericalangle\left(\mathbf{q}_1^{(D)}, \mathbf{r}_0\right)$ ist der Bahnwinkel im Knotensystem (Argument der Breite), O ist der Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems 118

Bild 23-3: Bezug des $\mathbf{k}_j$ – Knotensystems (grüne Basisebene K-K, „Bahnebene“) auf das $\mathbf{p}_i$ – Äquator-System (blaue Basisebene A-A, „Äquator“) mit den *Euler*winkel Ω

Rektaszension des aufsteigenden Knotens) und i („Inklination“). Eine Sichtrichtung P hat im $\mathbf{p}_i -$ System die Richtungswinkel α_1, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ_1 (Deklination), im $\mathbf{k}_j -$ System die Richtungswinkel u (Argument der Breite), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und w (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{k}_3$..... 124

Bild 23-4: Das Argument der Breite u als Bahnwinkel bei Bezug der Bewegung auf den aufsteigenden Knoten Ω. $P \leftrightarrow$ Ort des Satelliten in seiner Bahn (mit Deklination bei Bezug auf ein zentrisches Äquatorsystem), Bogen $GG_0 \leftrightarrow$ 0-Meridian (auf Erde durch Greenwich G), Θ_G Sternzeit des Nullmeridians, Bezug auf das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem durch die Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens (mit $\Omega = A$) und Inklination $i(=B)$ 125

Bild 23-5: Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für die Bahn: a=14000 km, e=0.5, i=50°, $\Omega=\omega=M_0$=0° (Bahnmodell nach Brouwer mit J_2, J_3, J_4)..... 147

Bild 23-6: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.0 -0.5, i=50°, $\Omega=\omega=M_0$=0°, beginnend im aufsteigenden Knoten... 151

Bild 23-7: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.5, $\Omega=\omega=M_0$=0°, und verschiedene Inklinationen, beginnend im aufsteigenden Knoten..... 151

Bild 23-8: Die Differenz von mittlerer drakonitischer Umlaufzeit zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit über alle Inklinationen, einige Exzentrizitäten und die große Bahnhalbachse a = 20000 km..... 153

Bild 23-9: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für Exzentrizitäten $e \le 0.5$ 159

Bild 23-10: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, über der Inklination für Exzentrizitäten e>0.5 (Ergänzung zu Bild 23-9) .◀ 160

Bild 23-11: Verlauf des Bahnradius der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe 166

Bild 23-12: Verlauf der Bahngeschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe..... 166

Bild 23-13: Verlauf der radialen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe..... 167

Bild 23-14: Verlauf der transversalen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe 167

Bild 23-15: Tägliche Drift des aufsteigenden Knotens verschiedener Erdsatellitenbahnen mit unterschiedlichen großen Bahnhalbachsen, je mit der Exzentrizität e=0.1 über allen Inklinationen..... 169

Bild 23-16: Tägliche Drift des aufsteigenden Knotens verschiedener Erdsatellitenbahnen je mit der großen Bahnhalbachse *a*=30000 km, mit verschiedenen Exzentrizitäten *e*=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.75 und je über allen Inklinationen 169

Bild 23-17: Qualitative Veranschaulichung der Verschiebung einer Bahn auf Grund der inertialen Knotenverschiebung als Folge der Erdabplattung. Zeitdauer 1 Tag (Die Erdrotation unter der inertialen Bahn ist nicht berücksichtigt) 170

Bild 23-18: Qualitative Veranschaulichung der säkularen Bahnverschiebung auf Grund von Knoten- und Apsidendrift als Folge der Erdabplattung 170

Bild 23-19: Wie Bild 23-18 jedoch zusätzlich mit Überlagerung durch den Luftwiderstand 170

Bild 23-20: Die Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf für alle Kreisbahnen im Höhenbereich H = 200 – 1600 km für verschiedene Inklinationen (i=1°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 179°) (seine auch die Tabelle 23-4 auf Seite 174) 173

Bild 23-21: Die Knotenlängendrift über der Inklination für kreisförmige Bahnen und verschiedene große Bahnhalbachsen (a = 7000 km bis a = 35000 km) 175

Bild 23-22: Die Knotenlängendrift über der Inklination für Bahnen mit der großen Halbachse a = 15000 km und verschiedene Exzentrizitäten von e =0.0 bis e = 0.5 über der Inklination 175

Bild 23-23: Ein drakonitischer Umlauf in Projektion auf die Erdoberfläche (auf einen Zentralkörper). Oben: Rückläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 130°), unten: rechtläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 50°)..... 178

Bild 23-24: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum über Mitteleuropa. $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180° / \overline{P_d}$, *a*= 26554.2276 km, *e* = 0.7222, *i* = 63°.43495, ω = 270°, $\overline{P_d}$ = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km 181

Bild 23-25: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum südlich von Australien. $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180° / \overline{P_d}$, *a*= 26554.2276 km, *e* = 0.7222, *i* = 63°.43495, ω = 90°, $\overline{P_d}$ = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km..... 181

Bild 23-26: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für die Kreisbahn mit Inklination i = 80° und variiert über den Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$ 196

Bild 23-27: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für Kreisbahnen mit den Inklinationen i = 1°, 60°, 90°, 120°, 179° in Abhängigkeit vom Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$ 197

Bild 23-28: Das bezüglich der Erdoberfläche feststehende, daher mit der Erdrotation mit rotierende, Netz einer reproduzierbaren kreisförmigen Bahn unter der Inklination i=40° und mit dem Reproduktionsverhältnis $K{:}N_d$=5:43..... 202

Bild 23-29: Übersicht über alle kreisförmigen spurreproduzierbaren Erdsatellitenbahnen unter der Neigung i = 70°, im Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1500\,\text{km}$ und im Bereich 1 bis 25 Knotenumläufe 204

Bild 23-30: Die Anordnung der Knotenlängenrestverschiebung für einige nach 7 Tagen reproduzierbare kreisförmige Bahnen unter der Bahnneigung 70°..... 207

Bild 23-31: Verlauf der Abhängigkeit der Bahnhalbachse von der Inklination aller kreisförmigen Bahnen, die im Verhältnis K:N_d=7:104 reproduzierbar sind und für zwei Subzyklen 211

Bild 23-32: Suche nach einem geeigneten Subzyklus der kreisförmigen unter i=97°.8 geneigten 8:119 Bahn 211

Bild 23-33: Veranschaulichung der Knotenlängenabfolge für die beiden Bahnen 8:119 und 39:580 213

Bild 23-34**:** Die geographischen Längen von auf - und absteigenden Knoten einer auf die Oberfläche des zugehörigen Zentralkörpers projizierten Satellitenbahn. Beispiel: a=7528.155 km, e=0.0, i=57°.5, $\lambda_{\Omega 0} = 280°$, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -27°.38 / \overline{P_d}$, $\lambda_{\ddot{\Omega}0} = 61°.674$ 214

Bild 23-35**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten für die Bahn mit Reproduktionszyklus K = 3 nach N_d = 43 drakonitischen Umläufen, Inklination i = 57°, Kreisbahn 216

Bild 23-36: Auf- und absteigende Knoten auf Lücke für die Bahn mit Reproduktionszyklus K = 3 nach N = 44 drakonitischen Umläufen, Inklination i = 57°, Kreisbahn 218

Bild 23-37: Gemittelte Exzentrizität einer formstabilen Bewegung in Abhängigkeit von der Inklination für die mittlere Bahnhalbachse $\bar{a}$ = 6978.140 km, für J_3 allein (durchgezogene Kurve) und unter Einschluss von J_5 (Kurve mit Polstellen)..... 223

Bild 23-38 : Variation der eingefrorenen Exzentrizität über der Inklination für die großen Bahnhalbachsen a = 6578 km (äußere bzw. obere Kurve), 6778 km, 6978 km, 7178 km, 7378 km, 7578 km, 7778 km..... 224

Bild 23-39: Variation der Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. 226

Bild 23-40: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, für verschiedene Inklinationen über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 1: i=0°, Kurve 2: i=20°, Kurve 3: i=40°, Kurve 4: i=60°, Kurve 5: i=80°, Kurve 6: i=100°, Kurve 7: i=120°, Kurve 8: i=140°, Kurve 9: i=160°, Kurve 10: i=180°. Die Kurven für die Inklinationen i und 180°-i sind identisch..... 227

Bild 23-41: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität für eine Bahn mit mittleren Bahnhalbachse $\bar{a} = 6678.140\,\text{km}$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e} = 0.001$ und der mittleren Inklination $\bar{i}$ = 57°, für verschiedene mittlere Argumente des Perigäums über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 3: $\bar{\omega}$=180°, Kurve 4: $\bar{\omega}$=90°, Kurve 5: $\bar{\omega}$=0°, Kurve 6: $\bar{\omega}$=270°. In Ergänzung zeigen die Kurven 1 und 2 das Verhalten der Kreisbahn $\bar{e} = 0.0$ wie in Bild 23-39 für die Perigäumsargumente $\bar{\omega}$=180° (Kurve 1) bzw. $\bar{\omega}$=90° (Kurve 2, diese beiden Kurven sind identisch, werden aber in unterschiedlicher Reihenfolge durchlaufen) ◀ 228

Bild 23-42: Variation der Exzentrizität einer mittleren kreisförmigen Umlaufbahn um den Mars mit der mittleren Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf 228

Bild 23-43: Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn über der Erdoberfläche der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1:

Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der „Störungen“ durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur Störungen durch J_2 ; Kurve 3: „mittlere“ Bahn 230

Bild 23-44: Bewegung eines Mars-Orbiters um das Massenzentrum des Mars (martiozentrische Bewegung): Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1: Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der Bewegungseinflüsse durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur mit J_2 ; Kurve 3: „mittlere Bahn. 231

Bild 23-45: Librationen von kreisnahen Bahnen um die eingefrorene Bahn mit den Parametern Höhe $\bar{H}$ = 300 km (Bezug auf den Erdäquator $R_E = 6378.140\,km$), mittlere (*Brouwer*schen) Exzentrizität $\bar{e} = 0.0000$, Inklination $\bar{i} = 57°.0$. Das langperiodische Argument des Perigäums hat notwendig den Wert $\omega_l = 90°.0$. Für die Librationsbahnen wurde die jeweils vorgegebene mittlere Exzentrizität $\bar{e}$ variiert in Schritten von $\Delta e = 0.00015$. Die Abszisse enthält die langperiodische Bewegung des Argumentes des Perigäums, die Ordinate die langperiodische Variation der Exzentrizität unter Einschluss der Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4. In diesem Modell hat die „eingefrorene“ Exzentrizität den Wert $e_F = 0.000939$. Die entsprechende „eingefrorene“ Bahn wird in diesem Bild durch einen Punkt in der Mitte der Librationskurven repräsentiert. Die Librationsperiode beträgt etwa 178 Tage. 232

Bild 23-46: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine mittlere Kreisbahn mit den mittleren Bahnparametern $\bar{a}_0 = 6678.140\,km, \bar{e}_0 = 0.0, \bar{i}_0 = 57°.0$. 233

Bild 23-47: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine nichtkreisförmige Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\bar{a} = 6678.140\,km, \bar{e} = 0.001, i = 57°.0$, an der Epoche, nach 5, 10 und 14 Jahren 233

Bild 23-48: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.0, bzw. $e_F = 0.00939$, $\bar{a}_0$ = 6678.155 km. Die Librationsbewegung hat die Periode 178 Tage. 234

Bild 23-49: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\bar{i}_0$ = 97°.93: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.0, bzw. $e_F = 0.001057$. Die Librationsbewegung hat die Periode 111 Tage 235

Bild 23-50: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\bar{i}_0 = 97°.93$: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreis: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittlere

Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.00111. Schleifenbewegungen: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.00111, bzw. $e_{(F)} = 0.00225$ an vier verschiedenen Tagen des Librationszyklus 111 Tage. 237

Bild 23-51: Langperiodische Bewegung der Exzentrizität e_L über dem Argument des Perigäums ω_L für die Bahn $\bar{a}_0 = 7007.137\,km$, $\bar{e}_0 = 0.001494$, $\bar{i}_0 = 97°.93$, $\bar{\omega}_0 = 90°.0$. Diese langperiodische Bewegung hat die Periode 111 Tage. Die Kurve der langperiodischen Bewegung ist überlagert mit den entsprechenden kurzperiodischen Verläufen über je einen drakonitischen Umlauf an den Tagen 1, 28, 56, 84 während des 111 tägigen Zyklus. Die Kurven für den jeweiligen kurzperiodischen Verlauf zeigen den typischen Doppel-Acht-Kurvenverlauf. Der Durchlaufsinn der langperiodischen Kurve ist angedeutet, ebenso das Manöver, das nötig ist, um die langperiodische Bewegung in der Nähe des zur formstabilen Bahn gehörigen Argumentes des Perigäums ω_L = 90° zu halten. 238

Bild 23-52: Berechnung von Manöver Parametern 255

Bild 23-53: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Zeit für das Toleranz-Knotenlängenintervall $\pm$ 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit 257

Bild 23-54: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Knotenlängenintervall ±10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit 257

Bild 23-55: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Inklination für das Toleranz-Knotenlängenintervall $\pm$ 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit 258

Bild 23-56**:** Korrekturzyklen zur Spurstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\bar{a}_0$ = 7153 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.498. Die vier Kurven für minimalen Solarflux sind (von unten nach oben) folgenden Zeitpunkten für den Überflug des aufsteigenden Knotens zugeordnet: 9:40 Dezember, 9:40 Juni, 11:00 Dezember, 11:00 Juni 263

Bild 23-57: Verlauf der Abweichung der Position des Satelliten in Abhängigkeit vom Verlauf der großen Bahnhalbachse während eines Korrekturzyklus zur Bahnstabilisierung (Knotenüberflug). Die Satellitenbewegung erfolgt in rechtläufiger Richtung (großer Pfeil), die Alongtrackbewegung in entgegengesetzter Richtung. Der Pfeil für die Korrektur der großen Bahnhalbachse ist ebenfalls eingezeichnet 269

Bild 23-58: Beispiel einer *Walker*-Konstellation mit T/P/F = 18/6/1, somit Δu = 120°, $\Delta\Omega$ = 60°, Φ = 20° 270

Bild 23-59: Relativbewegung zweier Satelliten in Formationsflug 271

Bild 23-60: Die Relativbewegung zweier Slave-Satelliten in Bezug auf einen Master-Satelliten: Innerhalb der Master-Bahn bewegt sich einer der Slave-Satelliten schneller als der Master und eilt daher voraus. Deutlich zu erkennen ist das Achsenverhältnis 1:2 der Relativellipse. Man beachte die Bewegungsrichtung des Hauptsatelliten, die in Vergleich zu Bild 23-59 gegenläufig ist. 272

Bild 23-61: Absolute und relative Bewegung der drei CartWheel Satelliten: Trennung der Apsidenlinien der drei CTW Ellipsen um 120°. 274

Bild 23-62: Zu Berechnung der großen Halbachse der relativen CartWheel Ellipse aus der effektiven Basislänge für SAR Interferometrie 275

Bild 23-63: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der CartWheel-Konstellation über einen drakonitischen Umlauf. Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhöhe 7000 km und die Inklination 97°.5. und verlaufen in derselben Bahnebene, die Exzentrizitäten der drei Bahnen haben den Wert $\bar{e}_0 =$ 0.05. Dargestellt ist Satellit $SL-1$ im Moment des Apogäumsdurchganges, der in den aufsteigenden Knoten gelegt ist. Alle drei Satelliten bewegen sich auf der relativen CartWheel Ellipse im Verlauf eines drakonitischen Umlaufes 276

Bild 23-64: Geometrie zur Definition der Positionierung der drei CartWheel Satelliten innerhalb der relativen CartWheel Ellipse 277

Bild 23-65: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der Dreiknoten-Pendulum-Konstellation (Trinodal Pendulum Constellation) über einen drakonitischen Umlauf. Bahn 2 ist eine (mittlere) Kreisbahn, Bahn 1 mit kleiner Exzentrizität hat ihr Perigäum in der nördlichen Wende, Bahn 3 mit derselben Exzentrizität wie Bahn 1 hat ihr Perigäum in der südlichen Wende. (Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhalbachse 6883.495 km und Inklination 97°.425. Die Abstände am Äquator betragen $\Delta\Omega_1$=-10° bzw. $\Delta\Omega_2$=5°, die Exzentrizitäten der Bahnen 1 und 3 haben den Wert $\bar{e}_0 =$ 0.05) 279

Bild 23-66: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand von Satellit 2 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_2$=1.426 km, der Abstand des dritten Satelliten vom ersten $\Delta\Omega_1$=1.9 km. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den beiden Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$) 281

Bild 23-67: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand der Satelliten 2 und 3 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_1$=1.426 km.. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$) 282

Bild 23-68: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Alle drei Satellitenbahnen haben denselben aufsteigenden Knoten. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$) 282

Bild 23-69-SL3-prop-1.cdr: Langperiodische Librationsbewegung des gemittelten Argumentes des Perigäums für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums 270° positioniert wurde. Die Librationsbewegung erfolgt auch in diesem Fall um die eingefrorene Exzentrizität. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$) 283

Bild 23-70: Kurzperiodischer Verlauf der Exzentrizität für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 270°$ positioniert wurde. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$) 283

Bild 23-71: Ergänzende Darstellung einer Trinodal Pendulum Konstellation (Doppel-Helix)283

Bild 23-72: Das Bahnverhalten der drei Satelliten im Trinodal Pendulum Konzept: Bild (a) zeigt die jeweiligen Abstände zwischen den drei Satelliten über einen drakonitischen Umlauf, Kurve 1 den Abstand zwischen Satellit 1 und 2, Kurve 2 zwischen Sat 3 und Sat 2, sowie Kurve 3 zwischen den Satelliten 1 und 3 auf ihren schwach elliptischen Bahnen; die Bilder (b) – (d) zeigen die Zerlegung der jeweiligen Distanzvektoren in einem HCL-System (H – radiale, L-transversale, C – normale Komponente) eines Bezugssatelliten, in Bild (b) Sat 1 in Bezug auf Sat 2, in Bild (c) Sat 3 in Bezug auf Sat 2, in Bild (d) Sat 3 in Bezug auf Sat1. Die pendelnde Bewegung der drei Satelliten umeinander ist in diesen Darstellungen gut zu erkennen. 284

Bild 23-73: Demonstration einer Helix-Konfiguration 285

Bild 23-74: Das Bahnverhalten der zwei Satelliten in einer Helix Formation, dargestellt in Aufriss, Seitenriss und Grundriss. Eingezeichnet ist die effektive Basislinie für SAR Interferometrie 286

Bild 23-75: Verlauf der relativen Distanz der beiden Satelliten TerraSAR-X und TanDEM-X in Helix Formation über einen drakonitischen Umlauf (Epoche: 22. August 2016, Elemente aus Tabelle 23-36, gerechnet ab 12 Uhr UTC über 95 Minuten) ◀ 287

Bild 23-76: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen drakonitischen Umlauf 288

Bild 23-77: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen ganzen Tag 289

Bild 24-1: Oskulierende wahre und zugehörende Subsatellitenbahn ohne Rotation der Erde über einen tropischen Umlauf bei Bezug auf den Frühlingspunkt ♈ (Bahndaten: a=8578 km, e=0.15154, i=75°, ω=240°) 291

Bild 24-2: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem und einem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System mit Drehungen um die drei *Euler*winkel (Ω, i, σ), bezogen auf den Frühlingspunkt ♈ als Bezugspunkt des (tropischen) Frühlingspunkt bezogenen Äquatorsystems, den aufsteigenden Knoten ☊, den (willkürlich auf der Bahnebene festgelegten) Anfangspunkt O des *Hansen*-Systems 293

Bild 24-3: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt ♈ bezogenen Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten α (Rektaszension) und δ (Deklination) und der Satellitenbahn mit dem Argument der Breite *u*, ☊ – aufsteigender Knoten, S – Ort des Satelliten, F-Fußpunkt auf Äquator, M-Mittelpunkt der Sphäre, **c –** Normalenvektor der Bahnebene296

Bild 24-4: Die Lösungen von Gleichung (24.34) 299

Bild 24-5: Oskulierender Knoten und oskulierendes Argument der Breite für erdnahe Satellitenbahnen, wahre Bahn in grün, oskulierende Bahn in rot 300

Bild 24-6: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten längs des Äquators für verschiedene Exzentrizitäten während eines tropischen Umlaufs. Bahndaten: a=13200 km, i= 70°. 303

Bild 24-7: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten längs des Äquators für verschiedene Inklinationen. Bahndaten: a=13200 km, e= 0.5. 303

Bild 24-8: Der Unterschied der mittleren tropischen Umlaufzeit bei Bezug auf die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit für Bahnen mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten 306

Bild 24-9: Die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_t}$ in Relation zur mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit $\overline{P_K}$, zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_a}$ und zur mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_d}$ für Bahnen mit dem mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$ und Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.5$ über der Inklination 307

Bild 25-1: Transformation des Äquatorsystems als Folge der lunisolaren Präzession 310

Bild 26-1: Das Meridian bezogene geozentrische erdfeste Koordinatensystem 314

Bild 26-2: Der Unterschied $\left(\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right)$ zwischen einer rechtläufigen tropischen mittleren Satellitenbewegung und der tropischen Erdrotation für die geosynchrone Bahn $\overline{a}_0 = 42166.27133$ und $\overline{e}_0 = 0.0$ über alle Inklinationen $0° \le i < 90°$ 319

Bild 26-3: Der Unterschied $\left(\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right)$ zwischen einer rückläufigen tropischen mittleren Satellitenbewegung und der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ für die geosynchrone Bahn $\overline{a}_0 = 42166.27133$ und $\overline{e}_0 = 0.0$ über alle Inklinationen $90° < i \le 180°$ 319

Bild 26-4: Kreisförmige geosynchrone Bahn mit der Inklinationen i=80° (Aufsichtpunkt der Parallelprojektion: λ=350°, φ=15° 328

Bild 26-5: Kreisförmige geosynchrone Bahnen mit den Inklinationen (von links): i=10°, 30°, 50°, 70°, 80°, 60°, 40°, 20° 328

Bild 26-6: Geosynchrone Bahn mit Inklinationen i= 50° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 230°$. Räumliche Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung $\lambda = 350°, \varphi = 15°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A..... 329

Bild 26-7: Geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A. 329

Bild 26-8: Wahre geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A. Dieselbe Bahn wie in Bild 26-7, jedoch in räumlicher Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung: $\lambda = 350°, \varphi = 15°$. 330

Bild 26-9: Die Bewegung eines Satelliten auf einer äquatorialen Kreisbahn im Gravitationsfeld seines Zentralkörpers mit Störeinfluss allein durch die zonale Harmonische J_2: Der bewegte Körper befindet sich stets im Perizentrum seiner elliptischen Bahn (blau gestrichelt). Dieses bewegt sich mit dem Körper längs seiner kreisförmigen Bahn (rote Kurve). Das rechte Bild zeigt die entsprechenden Zahlenwerte für den Fall von Erdsatelliten, die Abweichung $\Delta r\left[\mathrm{km}\right]$ des Bahnradius von der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}\left[\mathrm{km}\right]$. Grüne Linie: geostationäre Bahn. 339

Bild 26-10: Familien von Kreisbahnen mit stationären Punkten (rote Kurve oben) und Stillstandpunkten (blaue Kurve unten), sowie Polbahnen mit Pseudoumkehrpunkten (grüne Kurve). Die Bahn des Mondes wird als scheinbare Erdsatellitenbahn gedeutet (in gleicher Weise auch die Sonne). 341

Bild 26-11: Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbar stationären Bahnpunkten (Spitzenpunkte), große Bahnhalbachse $\bar{a} = 56610.894$ km 342

Bild 26-12: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbaren Stillstandbahnpunkten (d.h. keine Ost-West-Drift) in den Bahnknoten, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 31404.597$ km 345

Bild 26-13: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 42166.2614$ km. Die vier Umkehrpunkte sind gekennzeichnet 348

Bild 26-14: Kreisförmige Schleifenbahn mit der Bahnneigung i=70° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 70000.000$ km. ◀ 351

Bild 26-15: Kreisförmige Schleifenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 45000.000$ km ◀..... 352

Bild 26-16: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 39000.000$ km ◀..... 353

Bild 26-17: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 25000.000$ km ◀ 353

Bild 26-18: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30°$, der Bahnneigung i=87° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Umkehrpunkte sind markiert ◀..... 355

Bild 26-19: Scheinbare Bewegung einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel der ersten beiden Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Apsiden und die Umkehrpunkte sind markiert 358

Bild 26-20: Das Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel zweier Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Variation der Rektaszension $\dot{\alpha}$ (Kurve 1, rot), der Deklination $\dot{\delta}$ (Kurve 2, grün), der geographischen Länge $\dot{\lambda}$ (Kurve 3, blau)358

Bild 26-21: Das scheinbare Bewegungsverhalten einer *Tundra* Bahn über einen drakonitischen Umlauf 359

Bild 27-1: Beziehungen im geographischen System (φ_B – geodätische Breite des Topozentrums, δ_B – Deklination des Topozentrums, R_B – geozentrische Distanz des Beobachters, R_Q – Querkrümmungsradius, H' – Höhe des Beobachters über dem Referenzellipsoid) 362

Bild 27-2: Verlauf der Elevation dreier Satelliten über der Zeit, Beurteilung einer Einschussdispersion 366

Bild 27-3: Sichtwinkelplot zur Beurteilung der Einschussgenauigkeit eines Satelliten unter Berücksichtigung der nominalen Einschussdispersion: mittlere Kurve (rot) Nominalbahn, obere Kurve (blau): Bahn zu tief, untere Kurve (grün): Bahn zu hoch. 366

Bild 27-4: Sichtwinkelplot des Satelliten TerraSar-X gesehen von der Bodenstation in Weilheim aus über einen Tag. Die Sichtbarkeit beginnt mit der Elevation h=-10° ◀. 370

Bild 27-5: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) eines Satelliten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn (Höhe zwischen 527 km und 556 km, i = 53°) über einen Tag, beobachtet von der Bodenstation bei Weilheim ◀..... 371

Bild 27-6: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) für eine Transferbahn (GTO) in eine geostationäre Position über einen Tag beobachtet von verschiedenen Bodenstationen:

Weilheim (rot), Madrid (blau), Goldstone (grün), Canberra (hellblau). Eine lückenlose Überwachung der Transferbahn ist mit den ausgewählten Bodenstationen nicht erreichbar. 371

Bild 27-7: Verlauf der Elevation („Höhe“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim 374

Bild 27-8: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim 374

Bild 27-9: Verlauf der topozentrischen Geschwindigkeit des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim 374

Bild 27-10: Verlauf der Lichtzeit zwischen dem Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° und der Bodenstation Weilheim für einen Überflug der Station 376

Bild 27-11: Verlauf der Entfernung („slant range“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug von der Bodenstation Weilheim 376

Bild 27-12: Verlauf der Elevation („Höhe“) einer geostationären Transferbahn beobachtet von der Bodenstation in Weilheim über eine Sichtbarkeitspassage von etwa 10h Dauer. ... 376

Bild 27-13: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) einer hochexzentrischen GTO Bahn: Annäherung an die Station über fast die ersten 5 Stunden des Bodenkontaktes, danach Entfernung. 377

Bild 27-14: Die topozentrische Geschwindigkeit des Satelliten auf einer GTO über den gesamten Verlauf des Bodenkontaktes mit Weilheim: die geringste Geschwindigkeit wird im Apogäum durchlaufen. 377

Bild 27-15: Verlauf der Lichtzeit vom Satelliten auf einer GTO zu Weilheim. 377

Bild 27-16: Verlauf der topozentrischen Distanz („slant range“) vom Satelliten auf einer GTO. 378

Bild 27-17: Sichtwinkelplot einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau aus 379

Bild 27-18: Verlauf der Variation des Azimuts $\dot{A}$ (rote Kurve) und der Elevation $\dot{h}$ (blaue Kurve) einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau 380

Bild 27-19: Verlauf der Elevation h einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten) 380

Bild 27-20: Verlauf des Azimut *A* einer geostationären Transferbahn über einen Durchgang (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten) 381

Bild 27-21: Beobachtung von radialer ($V_R = \dot{\rho}$) und transversaler (V_T) Geschwindigkeit eines Objektes mit Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, gesehen von einem Beobachter B aus 382

Bild 27-22: Topozentrische Bewegung des Satelliten SYMPHONIE-A in horizontalen Koordinaten infolge Störungen durch Sonne und Mond, gesehen von der ZdBS in Weilheim-Lichtenau aus, im Zeitraum 15.3.1975 bis 7.4.1975. 384

Bild 28-1: Die überlagerte jährliche Variation der Rektaszension der wahren Sonne bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\alpha_\odot - \alpha_{\bar{\odot}}$ im Verlauf eines Jahres. Der negative Wert dieser

Differenz entspricht zugleich dem Unterschied aus wahrer und mittlerer Sonnenzeit, somit der Zeitgleichung. 411

Bild 28-2: Die überlagerte jährliche Variation der wahren Sonnenbewegung gegenüber der mittlere Sonnenbewegung $\dot{\alpha}_\odot - n_\odot$, punktiert: Mittelpunktsgleichung, gestrichelt: Reduktion auf den Äquator, durchgezogene Linie: Gesamtvariation 411

Bild 28-3: Die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ auf dem Erdäquator A und die Rektaszension $\alpha_\odot$ der wahren scheinbaren Sonne, die sich mit der ekliptikalen Länge $l_\odot$ längs der Ekliptik bewegt 412

Bild 28-4: Der Unterschied von wahrer scheinbarer und mittlerer fiktiver Sonne bezogen auf die Erdäquatorebene und die Zeitgleichung 413

Bild 28-5: Die Analemma der Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres: die wahre Sonnenzeit jeweils um 12 Uhr MEZ gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau 415

Bild 28-6: Analemma in horizontalen Koordinaten: die Beobachtungswinkel Azimut und Elevation der wahren Sonne jeweils um 6, 9, 12, 15, 18 Uhr UT gesehen von der Beobachtungsstation Weilheim aus jeweils im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Elevation ist bis zu 10° unter den Horizont eingezeichnet. 416

Bild 28-7: Vergleich der Äquator-bezogenen sonnensynodischen Umlaufzeit P_S mit der tropischen Umlaufzeit P_t, der drakonitischen Umlaufzeit P_d und der anomalistischen Umlaufzeit P der Erdsatellitenbahn a=8300 km, e=0.2, i=60° über einen Umlauf P_S 426

Bild 28-8: Die Äquator-bezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen a=8300 km, e=0.2, i=0°, 30°, 60°, 80°, 103°, 150° über einen Umlauf P_S 427

Bild 28-9: Die Äquator-bezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen a=20000 km, i= 60°, für verschiedene Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, über einen Umlauf P_S 427

Bild 28-10: Berechnung des Argumentes der Breite aus vorgegebener Rektaszension 428

Bild 28-11: Die Sonnensynodische Satellitenbewegung bei Bezug auf die Ekliptik, A-Äquator, E-Ekliptik, B-Bahnebene des Satelliten 434

Bild 28-12: Der Sonnenwinkel auf Äquator A und längs der Satellitenbahn B, E - Ekliptik , S-Ort des Satelliten 435

Bild 28-13: Sonnenwinkel der Bahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung. Start Datum 2018-05-02,12h. rot: Bezug auf Äquator, blau: auf Ekliptik, grün: auf Satellitenbahn 437

Bild 28-14: Variationen (Bewegungen) der Sonnenwinkel $\dot{\tau}, \dot{\tau}_E, \dot{\tau}_S$ der Bahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung über einen Umlauf. Startdatum 2018-05-02/12h. 438

Bild 28-15: Satellitenbahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der

Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über einen synodischen Umlauf. Startdatum 1983-01-25/14^h 438

Bild 28-16: Satellitenbahn a=12000 km, e=0.2, i=60°, Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnensynodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über zwei Jahre, Beginn am 2018-05-02/12^h..... 438

Bild 28-17: Bewegung eines Satelliten in mittlerer lokaler Sonnenzeit 439

Bild 28-18: Zur Definition des Knoten-Sonnenwinkels zwischen subsolarem Punkt und dem aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn. Der Sonnenterminator ist eingezeichnet. Im Bild ist der Moment berücksichtigt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt durchläuft... 440

Bild 28-19: Markierung der mittleren Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt, Abszisse: geographische Länge, Ordinate: geodätische Breite, Auflösung 3°.333, Bahn: a=7570.554 km, e=0.0, i=100°.35652..... 441

Bild 28-20: Das relative Verhalten der Rektaszension Ω des aufsteigenden Bahnknotens (blaue Kurve) und der Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne (rote Kurve) im Verlauf eines Jahres (im Bild wurde die Bahnparameter verwendet: a = 7128.137 km, e=0.0, i=40°). Die Einstellung eines bestimmten Knotensonnenwinkel τ_Ω^+ ist angedeutet. 451

Bild 28-21: Die Variation der säkularen Drift des Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_\Omega$ in Relation zur wahren Sonne in Bezug auf den mittleren säkularen Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_{\Omega s}$ relativ zur fiktiven mittleren Sonne $\bar{\odot}$ im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Darstellung ist wegen Beziehung (28.224) von den Parametern einer Satellitenbahn unabhängig. 453

Bild 28-22: Die mittlere Knotensonnendrift für kreisförmige Erdsatellitenbahnen für verschiedene Inklinationen..... 454

Bild 28-23: Die mittlere Knotensonnendrift für Erdsatellitenbahnen mit verschiedenen Exzentrizitäten sowie die Grenzinklinationen i=0° (linke Kurven), i=180° (rechte Kurven)..... 455

Bild 28-24: Dauer eines Sonnensynodischen Umlaufs $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ der Bahnebene eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn für verschiedene Inklinationen. Negative Werte beziehen sich auf westliche Bewegung der Bahnebene von der Sonne weg 457

Bild 28-25: Die mittlere Sonnenverschiebung des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn für verschiedene Inklinationen über der großen Bahnhalbachse..... 459

Bild 28-26: Die mittlere Sonnenverschiebung des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf in der Äquatorebene umlaufender Erdsatellitenbahnen (i=0° linke Kurven, i = 180° rechte Kurven) für verschiedene Exzentrizitäten über der großen Bahnhalbachse 460

Bild 28-27: Die Schwingungen der wahren Knotensonnenverschiebung um die mittlere für Kreisbahnen mit großer Halbachse a = 9578.155 km für verschiedene Inklinationen .. 461

Bild 28-28: Zur Deutung der mittleren Knotendrift bei Bezug auf die Äquatorebene der Erde. Der Satellit bewegt sich auf rechtläufiger Bahn. Die Bahnebene dreht sich westwärts von der Sonne weg. 463

Bild 28-29: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_\odot > \dot{\Omega}_s$: Die Bahnebene dreht sich westwärts von der mittleren Sonne weg. 463

Bild 28-30: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_\odot < \dot{\Omega}_s$: Die Bahnebene dreht sich ostwärts von der mittleren Sonne weg. 464

Bild 28-31: Der Zusammenhang zwischen der Reproduzierbarkeit gleichartiger (synodischer) Stellungen zwischen Bahnknoten und Sonne und der großen Bahnhalbachse und der Bahninklination für kreisförmige Satellitenbahnen. Die Zahlen im Bild bezeichnen die Anzahl der Tage zwischen den gleichartigen Stellungen..... 474

Bild 28-32: Die wahre Knotensonnenverschiebung in der Umgebung einer sonnensynchronen Bahn 478

Bild 28-33: Sonnensynchrone Bahnfamilien, große Bahnhalbachse über der Inklination, parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität e = 0.5777113 (bezogen auf Einfluss durch J_2), Perigäumshöhe der exzentrischen Bahn H_P=200 km. Man beachte die umkehrbar eindeutige Relation zwischen großer Bahnhalbachse und Inklination .. 482

Bild 28-34: Mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Satellitenumlauf und mittlere Knotenlängenrestverschiebung pro Tag für alle kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen im Höhenverlauf 200 km bis 1600 km 485

Bild 28-35: Kreisförmige reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen im Höhenbereich 200 km – 1200 km und für 1 – 21 Tage Reproduzierbarkeit 488

Bild 28-36: Beispiel für einen Treibstoff-geringen Übergang zwischen zwei reproduzierbaren kreisnahen sonnensynchronen Bahnen..... 491

Bild 28-37: Verlauf der radialen Geschwindigkeit $V_R = \dot{r}$ für die formstabile sonnensynchrone Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\overline{a} = 6769.14\,\text{km}$ unter Berücksichtigung der Bewegungseinflüsse durch J2, J3, J4 über einen drakonitischen Umlauf..... 492

Bild 28-38: Die Relationen N_S / N_d des Saroszyklus über alle Inklinationen für verschiedene Bahnhöhen für kreisförmige Satellitenbahnen. Die sonnensynchrone Bahn mit $N_S / N_d = 1$ ist markiert..... 494

Bild 28-39: Zur Berechnung des Kernschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt. 499

Bild 28-40: Zur Berechnung des Halbschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen, Erd- und Satellitenmittelpunkt. 501

Bild 28-41: Das Zylindermodell für Schattenberechnungen..... 503

Bild 28-42: Schattenfunktion für Kern, Halb- und Zylinderschattenmodell. Bahn: a = 6578 km, e=0.0, i = 53°, $\lambda_0 = 279°.31$, $\varphi_0 = 28°.5$, $M_0 = 0°.0$, t_0 :1990 – 02-22/22:46:0.0, $\dot{a}_S$ = -8.8572 $\times 10^{-7}$ km/s. 506

Bild 28-43: Schattenfunktion einer hochexzentrischen Bahn (H_A = 38138 km, H_P = 398 km, i = 13°.27)..... 507

Bild 28-44: Schnitt des Kernschattenkegels mit der Bahnebene zur Berechnung er Schattenzeiten in Auf- und Grundriss ohne Erdabplattung, C – Konjunktion, O - Opposition Satellit-Sonne, Apo – Apogäum der Satellitenbahn, P - Perigäum, ☊ - der aufsteigenden Bahnknoten, **c** - Normalenvektor der Satellitenbahn, $\sigma_\odot$ - Sonnenaspektwinkel, τ_S -Sonnenwinkel bei Schatteneintritt S_1, S_2 -Schattenaustritt, $u_\odot$ -

Argument der Breite der in die Satellitenbahnebene projizierten Sonne $S_\odot$, R'_A-Radius des Erdkörpers in der Satellitenbahnebene, R_A-große Halbachse der Schnittellipse des Schattenkegels mit der Bahnebene, r_{S1}-geozentrischer Radius des Satellitenortes bei Schatteneintritt, y-geozentrische Distanz der Gegensonne K, A'- Scheitel des Schattenkegels in der Satellitenbahnebene. 509

Bild 28-45: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57°, Referenzort: $\lambda = -80°.69, \varphi = 28°.5$, Referenzepoche Mitternacht Ortszeit, am 6. August 2018, Verlauf der Schattenkurven über das Jahr 2018 516

Bild 28-46: Verlauf der Schattendauer der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57° für verschiedene Einschusszeiten in mittlerer Sonnenzeit zwischen T=5h und T=12h. Aufgetragen ist der Verlauf über 2 Wochen. 516

Bild 28-47: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 12h Ortszeit im aufsteigenden Knoten (Start 1.Jan. 2018) 517

Bild 28-48: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 6h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018 517

Bild 28-49: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 18h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018 518

Bild 28-50: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer hochelliptischen Transferbahn in die geostationäre Bahn im Verlauf eines tropischen Jahres 519

Bild 28-51: Die Schattenstrecken auf der Transferbahn von SYMPHONIE-A während der ersten sechs Umläufe nach Bahneinschuss 519

Bild 28-52: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer geostationären Bahn (Position λ = 350°) im Jahresverlauf (gerechnet für das Jahr 2018) 520

Bild 28-53: Zur Berechnung des Terminators 521

Bild 28-54: Darstellung von Terminator und Schattenabschnitt einer leicht exzentrischen Bahn. 522

Bild 28-55: Verlauf des subsolaren Punktes auf der Erdoberfläche um 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) über ein Jahr im Abstand von je einem Monat mit jeweils zugehörigem Sonnenterminator. Eingezeichnet ist ferner die wahre Bahn und die Subsatellitenspur einer sonnensynchronen Satellitenbahn (i = 99°) mit Reproduzierbarkeit nach einem Tag (integer orbit 1:14, mittlere Bahnhöhe H = 888.33 km), deren aufsteigender Knoten um jeweils 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit stattfindet. 523

Bild 28-56: Wanderung der Sonne und des zugehörigen Terminators auf der rotierenden Erdoberfläche während eines drakonitischen Umlaufs eines Satelliten auf kreisförmiger Shuttlebahn. Die subsolaren Punkte sind als kleine Punkte unterhalb der Sonnensymbole zu erkennen. Darstellung in Parallelprojektion 524

Bild 28-57: wie Bild 28-56 jedoch in linearer Projektion 524

Bild 28-58: Die Kurven konstanter Sonnenelevation 0° (Terminator), 10°, 20°, 30°, 40°,50°, 60°, 70°, 80°. Ort des subpolaren Punktes für das Datum 1979-12-03/12 525

Bild 28-59: Zur Berechnung des Sonnenokkultationspunktes von einem Satelliten im Moment des Schattenaustritts. Der gesuchte Punkt liegt auf dem Terminator. Eingezeichnet ist der Sichtkreis, der vom Satelliten aus auf der Erdoberfläche überdeckt werden kann: Horizontkreis. Der subsolare Punkt ist am unteren Rand des Erdballes erkennbar 526

Bild 28-60: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Tages. Die Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert (im Süden um die Antarktis) , bei Schattenaustritt durch ▲ (über der Nordhalbkugel) 528

Bild 28-61: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Monats. Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert, bei Schattenaustritt durch ▲ 529

Bild 28-62: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 21. März 1982 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲) 529

Bild 28-63: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 17. August 2018 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲) 529

Bild 28-64: Sonnenokkultationsgebiete gesehen von einer Shuttlebahn aus (Daten wie in den Beispielen 2 und 3) im Verlauf eines Jahres, blaue Kurven: Schatteneintritt (Sunset), rote Kurven: Schattenaustritt (Sunrise), Startzeitpunkt 1. Jan. 1984 530

Bild 28-65: Zur Abschätzung der Schattenzeit im Kegel- und Zylindermodell am Beispiel einer kreisnahen Bahn in der Ekliptik 531

Bild 28-66: Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ und der Beta-Winkel in der NASA-Definition β_N ... 535

Bild 28-67: Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn über ein tropisches Jahr 536

Bild 28-68: Der Beta-Winkel β_N einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn bei unterschiedlichen Startzeitpunkten an 4 verschiedenen Tagen 537

Bild 28-69: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen geozentrischer Richtung zum Apogäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: Equator-S) 537

Bild 28-70: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor im Perigäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: Equator-S) 538

Bild 28-71: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der geozentrischen Richtung zur Sonne im Moment des Schattenaustritts des Subsatellitenpunktes (Bahndaten IRS-1E, Projekt ASIS) 538

Bild 28-72: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer STS-Bahn über einen drakonitischen Umlauf. 539

Bild 28-73: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer kreisnahen und erdnahen Satellitenbahn. Die Subsatellitenbahn wird unter der Mindestelevation 20° von der Sonne beschienen- 540

Bild 28-74: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen im Jahresverlauf im Abstand von einem Monat um die Mittagszeit in U.T.. Die Subsatellitenbahn ist nur für den Fall

gezeichnet, dass die Sonne dort die Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20° übersteigt. Als Bahn wurde wieder (wie Bild 28-74) die MIR Stationsbahn gewählt. Die Monate sind durch Nummern bezeichnet..... 540

Bild 28-75: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer sonnensynchronen Bahn mit Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20°. ERS-1 Daten (H = 780 km, e = 0.0, i = 96°.55, mittlere Sonnenzeit im absteigenden Knoten: $T_{desc} = 10^h 30^m$) . Bahnbogen um die Mittagszeit U.T. im Abstand von einem Monat über ein tropisches Jahr..... 541

Bild 28-76: Von der Sonne beschienener Bahnbogen in der mittleren lokalen Sonnenzeit 17h – 19h (M.S.T.). Bahndaten ERS-1, alle Umläufe am 1. Juli 1980..... 541

Bild 28-77: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ=45° einer STS-Bahn im Verlauf eines Jahres, rote Kurve im aufsteigenden, blaue Kurve im absteigenden Bahnast. 542

Bild 28-78: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ=49° einer sonnensynchronen Bahn im Verlauf eines Jahres. 543

Bild 28-79: Verlauf der Sonnenelevation im Sensoraufsichtspunkt über einen drakonitischen Umlauf. Bahn: a = 6769.140, sonnensynchron, formstabil, aufsteigender Knoten um 18:00 Lokalzeit, Sensorgeometrie: rechts zur Bahn (Azimut = 90°), Nadirwinkel β = 35°, an den Äquinoktien und Solstitien 544

Bild 28-80: Zur Deutung des Verlaufs der Sonnenelevation aus Bild 28-79 im Fall des Verlaufs am 21. März. Die im Abstand von 1 Minute getaktete Subsatellitenbahn überquert den Äquator im aufsteigenden Knoten um 18 Uhr Ortszeit. Eingezeichnet ist die Überdeckungsspur rechts zur Bahn mit Nadirwinkel 35°. Der Sonnenterminator ist für 18 Uhr mittlerer Sonnenzeit dargestellt. Der subsolare Punkt des wahren Sonnenortes ist markiert (westlich von Mittelamerika). 545

Bild 28-81: Punkt der Sonnenspiegelung (Sun glint point) bei querscannendem Sensor, Bahndaten ATMOS..... 547

Bild 28-82: Verlauf der Sonneneinfallswinkel in einen Satelliten über einen synodischen Umlauf. Bahn: STS (H=300 km, e=0.0, i=57°). Start am 10. Nov. 1987 von KSC zu 7 verschiedenen Zeiten in mittlerer lokaler Sonnenzeit. 550

Bild 28-83: Verlauf der Winkeldistanz von Tangentialpunkten zur Sonne über einen synodischen Umlauf gesehen von einem STS aus in Nadir orientierter Satellitenlage: unten zu B_1, oben zu B_2..... 551

Bild 28-84: Zur Definition der Sonneninertialen Lage eines Satelliten..... 552

Bild 28-85: Poldreieck zur Berechnung der Drehung der gewünschten Lage P_y in die Sonnenrichtung ⊙ realisiert in den Drehformeln (28.386). 552

Bild 28-86: Verlauf des Azimut der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 553

Bild 28-87: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 553

Bild 28-88: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 553

Bild 28-89: Verlauf des Azimuts der Nadirrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage 553

Bild 28-90: Verlauf der Elevation der Nadirrichtung in Bezug auf die sonneninertiale Lage553

Bild 28-91: Verlauf der Elevation über dem Azimut der Nadirrichtung bei sonneninertialer Lage 553

Bild 28-92: Verlauf der Winkeldistanz zwischen der transversalen Bewegungsrichtung und der STS-Spitze („Nose“) 554

Bild 28-93: Winkel zwischen Nadirrichtung und Satellitennormale in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 554

Bild 28-94: Das Azimut des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 554

Bild 28-95: Elevation des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 554

Bild 28-96: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_1 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 554

Bild 28-97: Die geographischen Koordinaten Länge λ_{B1} und Breite φ_{B1} des Tangentialpunkt B_1 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 555

Bild 28-98: Elevation des Tangentialpunktes B_2 in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 555

Bild 28-99: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_2 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die sonneninertiale Lage über einen sonnensynodischen Umlauf eines STS 555

Bild 28-100 : Verlauf der wahren Sonnenzeit im Jahresverlauf im absteigenden Knoten der Bahnen (Kurve 1) a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55 559

Bild 28-101: Verlauf des Sonnenaspektwinkels $\sigma_{\odot}$ (Winkel zwischen Bahnnormale und Sonnenrichtung) pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55 560

Bild 28-102: Verlauf der Schattendauer pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55 561

Bild 28-103: Verlauf der Schattendauer über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 18h MST im absteigenden Knoten: a = 7153.133 km, e = 0.0, i = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) a = 7162.4 km, e = 0.0, i = 98°.49 und (Kurve 3) a = 7143.88 km, e = 0.0, i = 98°.55 562

Bild 28-104: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Zeit für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43 572

Bild 28-105: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Zeitlängenintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43 572

Bild 28-106: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Inklination für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43 573

Bild 28-107: Korrekturzyklen zur Zeitstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\bar{a}_0$ = 7153 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.523 576

Bild 29-1: Orientierung der erdbezogenen Bahn des Mondes (BM) und des Mondäquators (AM) in Bezug auf die Ekliptik (E): Der mittlere aufsteigende Knoten der Mondbahn fällt stets mit dem mittleren absteigenden Knoten des Mondäquators zusammen. Die Orientierung des mittleren subterrestrischen Punktes ist angedeutet $(\dot{\subset})$ 581

Bild 29-2: Die Bahn des Erdmondes um die Sonne im Jahr 2017 in realistischen Größenverhältnissen: man beachte die leichten Schwankungen der Mondbahn als Folge der hier nicht eingezeichneten gekoppelten Bewegung mit der Erde. Die Größe der Sonnenscheibe entspricht den realen Verhältnissen 614

Bild 29-3: Die Bahnen von Mond (rot) und Erde (blau) um die Sonne im Verlauf eines synodischen Monats in realistischen Größenverhältnissen 614

Bild 29-4**:** Das $\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}$ − Bahnsystem des Mondes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ − Ekliptik-System616

Bild 29-5: Die geometrische Verknüpfung des Mondbahnsystems BM mit dem Erdäquatorsystem A über die Ekliptik E 625

Bild 29-6: Zur Definition der Eulerschen Drehwinkel bei Bezug des Mondäquators auf die Ekliptik sowie die Orientierung des wahren subterrestrischen Punktes $\dot{\subset}$ unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen 627

Bild 29-7: Plakative Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes: Äquatorsystem in rot, Ekliptik in blau, Bahnebene in grün. Zur Veranschaulichung sind die Neigungen von Ekliptik (hier 5° statt 1°.5), und der Bahnebene (15° statt 6°.6) überhöht dargestellt. Sichtrichtung der Parallelprojektion in selenographischen Koordinaten: $\lambda_0 = 345°$, $\beta_0 = 10°$. Der aufsteigende Knoten der Bahnebene ist zur selenographischen äquatorialen Länge $\lambda_{\Omega} = 300°$ angenommen. Der mittlere subterrestrische Punkt $(\dot{\subset})$ ist auf dem Mondäquator markiert. Der wahre subterrestrische Punkt befindet sich jedoch auf der (grünen) Mondbahn 628

Bild 29-8: Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes wie in Bild 29-7 jedoch mit aufsteigendem Knoten in der äquatorialen Länge $\lambda_{\Omega} = 100°$ 628

Bild 29-9: Zur Definition der geometrischen Librationen in äquatorialer Länge ℓ‘, Breite b‘, Positionswinkel C‘ bezogen auf den wahren Mondort M. N ist der Nordpol des Erdäquatorsystems („Himmelspol“), L ist der Nordpol des Mondäquatorsystems. Der Nullmeridian des Mondäquatorsystems ist punktiert angedeutet. 642

Bild 29-10: Auswirkungen der physikalischen Librationen auf die Orientierung des Mond-Äquatorsystems bei Bezug auf die Ekliptik: dargestellt ist die Orientierung des

Mondäquatorsystems im Mittel $\left(\mathbf{p}_{j/0}^{(☾)}\right)$ und unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen $\left(\mathbf{p}_{j}^{(☾)}\right)$ 644

Bild 29-11: Darstellung der physikalischen Librationen in Bezug auf die momentane Ekliptik (E) („ecliptic of date“), zur Berechnung der ersten Achse des Mond-Äquatorsystems (AM) ausgerichtet auf den mit (♁) markierten mittleren subterrestrischen Punkt 645

Bild 29-12: Die Bewegung des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche je über 2 Monate im Jahre 2018 (rote Kurve) und im Abstand von 9 Jahren im Jahr 2027 (blaue Kurve)..... 648

Bild 29-13: Zur Demonstration des Einflusses der topozentrischen Libration auf die Beobachtbarkeit der Mondoberfläche. Der subtopozentrische Punkt 1 gesehen von einer irdischen Station auf der Nordhalbkugel ist der Mittelpunkt des Sichtkreises. Punkt 2 ist von derselben Station aus gesehen etwa einen halben siderischen Monat später. Die Punkte 3 und 4 markieren die subtopozentrischen Punkte zu denselben Zeitpunkten, jedoch gesehen von einer Station auf der irdischen Südhalbkugel. Die verwendeten Zahlenwerte sind in Tabelle 29-5 zusammengestellt. 650

Bild 29-14: Der Phasenwinkel Δ des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche gesehen von einem Erdsatelliten aus..... 652

Bild 29-15: Sichteinschränkungen bei Beobachtung des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche von einem Erdsatelliten *S* aus 654

Bild 29-16: Landeorte einiger bis zum Jahr 1991 auf der Vorderseite des Mondes gelandeter bemannter und unbemannter Mondmissionen. 656

Bild 29-17: Beobachtung eines Punktes auf der Mondoberfläche von der Erdoberfläche aus. Der Pfeil weist von der deutschen Bodenstation in Weilheim – Lichtenau (WHM) zum Landeplatz von Apollo 11. 658

Bild 29-18: Bahn eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters mit Subsatellitenbahn in realistischen Größenverhältnissen 662

Bild 29-19: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in Parallelprojektion der Mondvorderseite662

Bild 29-20: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in linearer Projektion der Gesamt-Mondoberfläche 662

Bild 29-21: Überdeckungsstreifen eines querscannenden optischen Sensors mit Onboard Off-Nadir-Winkel $\beta = \pm 11°.5$ über der Mondoberfläche, Mondorbiter (H=100 km, e=0.0, i=85°) Zeittaktung der Bodenspur $\Delta t = 1\,\mathrm{min}$. Ausschnitt einer Parallelprojektion oberhalb des Mare Imbrium 663

Bild 29-22: Überdeckungsstreifen über der Südpolgegend in stereographischer Projektion. Daten wie in Bild 29-21 663

Bild 29-23: Kreisförmige mondsynchrone Mondorbiterbahn mit Inklination i = 6° bezüglich des Mondäquators in wahren Größenverhältnissen. Der Knoten der Orbiterbahn liegt über der Rückseite des Mondes..... 665

Bild 29-24: Die möglichen sonnensynchronen Bahnen eines Mond-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Periselenhöhe H_P = 10 km..... 666

Bild 29-25: Zur Abschätzung, wann ein Mondorbiter S gesehen von einem irdischen Beobachter T hinter der Mondscheibe verschwindet..... 667

Bild 29-26: Zur Reduktion der Mondbahn BM auf den Erdäquator A über die Ekliptik E... 669

Bild 30-1**:** Das $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – Bahnsystem eines Planeten oder eines anderen interplanetaren Objektes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik-System..... 679

Bild 30-2: Das $\mathbf{q}_j^{(K)}$ – Planetenäquatorsystem bei Bezug auf den IAU-Vektor $\left(\mathbf{q}_1^{(K)}\right)$, Bezug zum $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem, das hier durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt des Planeten transformiert ist..... 684

Bild 30-3: Planetenäquatorsystem A_P, Erdäquatorsystem A und Ekliptiksystem E..... 690

Bild 30-4: Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem..... 697

Bild 30-5: Die planetographische Länge λ_P bei rechtläufiger Rotation eines Planeten. Der 0-Meridian hat bezogen auf den IAU-Vektor (Schnittpunkt des Planeten-Äquators mit dem Erd-Äquator) die Winkeldistanz W_0. Die planetographische Länge wird entgegengesetzt zur Rotation des Planeten gezählt. 703

Bild 30-6: Zur Herleitung der synodischen Bewegung zwischen zwei Planeten mit den mittleren siderischen Bewegungen n_1, n_2. Planet 1 befindet sich von Planet 2 aus gesehen in Opposition $\left(\sigma^{\circ}\right)$ zur Sonne, von Planet 1 aus gesehen befindet sich Planet 2 in Konjunktion $\left(\sigma\right)$ mit der Sonne..... 707

Bild 30-7: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik..... 710

Bild 30-8: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik..... 711

Bild 30-9: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $\beta = 20°$..... 711

Bild 30-10: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist angedeutet. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik und lässt die extreme Exzentrizität der Kometenbahn mit e = 0.967 und ihre Rückläufigkeit mit i = 162° erkennen..... 712

Bild 30-11: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist angedeutet.

Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $b = 5°$ und lässt die Neigung mit i = 162° und entsprechender Rückläufigkeit der Kometenbahn erkennen. 714

Bild 30-12: Mögliche nahe Begegnungen einer Raumsonde mit einigen Asteroiden (Bild aus einer Studie einer mit Jonentriebwerken angetriebenen Probe zum Kleinen Planeten 4 Vesta). Die in Frage kommenden Kleinen Planeten sind nach ihrer Größe klassifiziert.715

Bild 30-13: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über ein irdisches siderisches Jahr, richtige Größenverhältnisse 716

Bild 30-14: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über ein irdisches siderisches Jahr, beginnend am 1. Januar 2017; richtige Größenverhältnisse 717

Bild 30-15: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Saturn über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017 718

Bild 30-16: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017 719

Bild 30-17: Die geozentrischen Bahnen der wahren Erde, der Kometensonde GIOTTO und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde HELIOS 1 ist zur Ergänzung eingetragen. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik..... 720

Bild 30-18: Geozentrische Distanzen der Planeten sowie des Zwergplaneten Pluto von der Erde in den Jahren 2017-2018..... 721

Bild 30-19: Lichtzeit (Stunden) zwischen der Erde und den äußeren Planeten inclusive den Zwergplaneten Pluto in den Jahren 2017-2018..... 722

Bild 30-20: Lichtzeit (Minuten) zwischen der Erde und den inneren Planeten sowie Mars in den Jahren 2017-2018 ◀..... 722

Bild 30-21: Beobachtung des Mars über einen Tag von den drei Bodenstationen Perth (grün), Weilheim (rot), Goldstone (blau)..... 723

Bild 30-22: Zur Definition des Phasenwinkels φ und der Elongation E eines Planetenortes von der Sonne bei Bezug auf die Erde 723

Bild 30-23: Verlauf des Phasenwinkels der großen Planeten in den Jahren 2017, 2018 bei Bezug auf die Beobachtung von der Erde aus..... 724

Bild 30-24: Die Bewegung des Kometen Grigg-Skjellerup, der Kometensonde GIOTTO und der Erde vom 1. Mai 1992 bis einige Tage nach dem Encounter der Sonde mit dem Kometen, gesehen vom Nordpol der Ekliptik. Für den Moment des Encounters am 10. Juli 1992 ist der Phasenwinkel eingezeichnet..... 725

Bild 30-25: Die geozentrischen Elongationen der großen Planeten zur Sonne in den Jahren 2017 und 2018..... 726

Bild 30-26: Die geozentrischen Elongationen einige Kleiner Planeten zur Sonne in den Jahren 1998 und 1999..... 728

Bild 30-27: Ortsvektor der Raumsonde bezogen auf das Baryzentrum B des Sonnensystems, sowie auf den Ort T des Beobachters; ♁ bezeichnet den Mittelpunkt der Erde 730

Bild 30-28: Transformation vom $\mathbf{p}_i$ – Frühlingspunkt-bezogenen Basissystem F in das $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem T um die *Euler*winkel A („Knotenlänge“), B („Inklination“), C

(„Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der T-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der F-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene T nach $\mathbf{k}_2$. Eine Sichtrichtung P (Planet, Sonde, Satellit, Stern) hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel $\alpha - A$, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ (Deklination), im $\mathbf{q}_j$ – System die Richtungswinkel *l* (Länge), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und *b* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$..... 731

Bild 30-29: Berechneter Ort ($\mathbf{r}_C$) und „gestörter“ Ort ($\mathbf{r}$) gesehen vom Baryzentrum *B* sowie der Antenne *T* aus..... 737

Bild 30-30: Zur Berechnung der „gestörten“ Ein-Weg Entfernungsvariation..... 739

Bild 30-31 : Darstellung der Koordinaten des Orts-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem740

Bild 30-32 : Darstellung der Koordinaten des Geschwindigkeits-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem..... 741

Bild 30-33: Die radiale Geschwindigkeit einer „gestörten“ Bewegung mit Abweichung der beobachtenden Antenne im Zweiweg-*Doppler*: Aufwärtsbeobachtung $T_1 \rightarrow S_{c1}$, Abwärtsbeobachtung $T_2 \rightarrow S_{c2}$ 743

Bild 30-34: Einschussbahn eines Marsorbiters (MARS-EXPRESS) in eine hochexzentrische Marsumlaufbahn, die vollständig von der Erde aus eingesehen werden kann. Der subterrestrische Punkt ist auf der Marsoberfläche durch „E“ gekennzeichnet. Die Subsatellitenbahn sowie das Perimartium und das Apomartium sind durch hellblaue Punkte gekennzeichnet..... 756

Bild 30-35: Die säkulare Änderung der äquatorialen Länge (Rektaszension) des aufsteigenden Knotens einiger Marsorbiter für verschiedene Inklinationen über ein Jahr (Bahn H_P=250 km, H_A=18000 km) 758

Bild 30-36: Die sonnensynchronen Bahnen eines Mars-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Perimartiumhöhe $H_P = 100\,\mathrm{km}$ 761

Bild 30-37: Die sonnensynchronen Bahnen eines Jupiter-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perijoviumhöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$ 762

Bild 30-38: Die sonnensynchronen Bahnen eines Saturn-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$ 763

Bild 30-39: Die sonnensynchronen Bahnen eines Uranus-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. 764

Bild 30-40: Die sonnensynchronen Bahnen eines Neptun-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$ 765

Bild 31-1: Zur Herleitung der Sichtbarkeitsbedingung bei Sicht Satellit-Satellit..... 768

Bild 31-2: Winkelbedingung für Sicht Satellit-Satellit..... 770

Bild 31-3: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn

(a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen 771

Bild 31-4: Die relative Distanz zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über nicht ganz zwei drakonitische Umläufe des tieffliegenden Satelliten berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieses Umlaufs nur kurzzeitig unterbrochen 771

Bild 31-5: Die Entwicklung der relativen Distanz zwischen zwei Satelliten zwischen einer LEO-Bahn (a=7007 km, e = 0.0, i = 97°.93) und einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) über knapp zwei Monate. Auflösung 12 Minuten pro Bildpunkt 772

Bild 31-6: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen 773

Bild 31-7: Der Sichtbarkeitsverlauf zwischen den beiden erdnahen Satelliten wie in Bild 31-6, jedoch über 7 Tage 773

Bild 31-8: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, ohne Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet 778

Bild 31-9: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, mit Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet 778

Bild 31-10: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_\odot = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 120 Tage, Zeitschrittweite 2 Minuten 779

Bild 31-11: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_\odot = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 1 Tag, Zeitschrittweite 5 Sekunden 779

Bild 31-12: Zur Geometrie der relativen Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren Bahnen, O – Ursprung eines *Hansen-System*s 780

Bild 31-13: Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ über der Zeit *t* für die relative Sicht zwischen zwei kreisförmigen Satellitenbahnen mit den Bahnhalbachsen: $a_1 = 7000\,\mathrm{km}$, $a_2 = 12000\,\mathrm{km}$ und mit derselben Inklination $i_1 = i_2 = 60°$ .783

Bild 31-14: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten. Die Wirkung der unterschiedlichen Knotendrift wirkt sich erkennbar auf den Kurvenverlauf aus 783

Bild 31-15: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten für in der Äquatorebene liegende Kreisbahnen (andere Bahnelemente wie in Bild 31-13 und Bild 31-14) 784

Bild 31-16: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren kreisförmigen rechtläufigen Bahnen in der Nähe der Opposition 786

Bild 31-17: Zur Problematik der Konjunktion der Jupitermonde Europa (II) und Ganymed (III) gesehen vom inneren Mond Io (I) aus. Unter der Annahme, dass alle Bahnen kreisförmig seien 787

Bild 31-18: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf exzentrischen Bahnen. Die Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels wird über der Zeit aufgetragen: für $\dot{\zeta} < 0$ bewegt sich der äußere Satellit scheinbar retrograd, was im ersten Umlauf für den inneren Satelliten sichtbar wird. 788

Bild 31-19: Die Beobachtung des zweiten Satelliten vom ersten Satelliten aus bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-System des ersten Satelliten 792

Bild 31-20: Verlauf der lokalen Beobachtungswinkel δ_B über ζ_B bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-Systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°) 796

Bild 31-21: Verlauf des lokalen Beobachtungswinkel Elevation δ_B über der Zeit bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°)..... 798

Bild 31-22: Die Variationen der lokalen Beobachtungswinkel (ζ_B, δ_B) von Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°) gesehen vom Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) aus: $\dot{\zeta}_B$ in rot, $\dot{\delta}_B$ in blau 798

Bild 31-23: Verlauf des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) zu Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°) 799

Bild 31-24: Die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satellit 1 (a=7000 km, e=0.0, i=0°) zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°)..... 799

Tabellenverzeichnis

Tabelle 22-1: Beispiel für die Abhängigkeit der wahren *Hansen*schen sowie der mittleren und wahren anomalistischen Umlaufzeit von der Bahninklination für Bahnen mit a = 8300 km, e = 0.2 52

Tabelle 22-2: Die Abfolge der Apsiden und ihrer Positionen bezüglich der Erdoberfläche für eine Transferbahn in eine geostationäre Sollbahn (Beispiel Symphonie A) 54

Tabelle 22-3: Die Abfolge von Perigäen (P) und Apogäen (A) und ihre geographischen Positionen für die Bahn $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, a=11327.456, e=0.4192750, i=25°, ω=0°. ... 93

Tabelle 22-4: Übersicht über das Bahnverhalten bei Vorgabe der säkularen Drift des Perigäums $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$ 94

Tabelle 22-5: Beispiel für Übergangsbahnen und zugehörige Manöver zum Aufbau einer gegebenen Satellitenformation für verschiedene Verhältnisse N:M der ursprünglichen und der Übergangsbahn. 114

Tabelle 23-1: Vergleich der mittleren *Kepler*schen und der mittleren anomalistischen mit der mittleren und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für kreisförmige Bahnen mit unterschiedlicher großer Halbachse, sowie in allen Fällen der Inklination i=80° 149

Tabelle 23-2: Vergleich der wahren *Hansen*schen mit der mittleren, der säkularen und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=20000 km und der Inklination i=80° und variierend mit Exzentrizitäten $e \in [0.00, 0.65]$ 149

Tabelle 23-3: Vergleich der wahren *Hansen*schen mit der mittleren, säkularen und wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=12000 km und der Exzentrizität e=0.4, für alle Inklination $i \in [5°, 175°]$ 150

Tabelle 23-4: Variationsbereich der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Kreisbahnen über den Höhenbereich *H* = 200 bis 1600 km für verschiedene Inklinationen (entsprechend der Grafik in 176

Tabelle 23-5: Die Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Knotenumläufen für die Bahn $\bar{a}_0 = 7128.140\,\mathrm{km}$, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 98°.37$ 200

Tabelle 23-6**:** Spur-reproduzierbare kreisförmige Bahnen für die Inklination *i* = 57° bis zu 1000 km Bahnhöhe. *K* Anzahl der Knotenumläufe, N_d Anzahl der drakonitischen Umläufe, *H* – mittlere Bahnhöhe bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde, $\overline{P_d}/d$ *-Anzahl der mitt*leren drakonitischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag, $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ -mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ -mittlere Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf, $\overline{\Delta\lambda_0}$ -kleinstes mögliches Intervall einer Knotenlängenverschiebung pro Reproduktionszyklus (aus Formel (23.307)). 203

Tabelle 23-7: Charakteristika des Verhaltens des Knotens für einige nach 7 Knotenumläufen reproduzierbaren kreisförmigen Bahnen unter der Bahnneigung *i*=70°, für verschiedene Anzahlen N_d von drakonitischen Umläufen. 206

Tabelle 23-8: Alle spurreproduzierbaren kreisförmigen Erdsatellitenbahnen mit der Bahnneigung i=65° und dem Knotenverhältnis $K_1 : K_2 = 5 : 11$ ◀..... 209

Tabelle 23-9: Die Entwicklung der Knotenlängenrestverschiebung der kreisförmigen Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H=796.211 km und der Neigung i=68° 210

Tabelle 23-10: Mittlere *Kepler*sche Bahnelemente für eine im Verhältnis 8:119 reproduzierbare Basisbahn und für eine Bahn im Subzyklus 39:580 mit erheblich verfeinerter kleinster Knotenlängenverschiebung. 212

Tabelle 23-11**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten spur-reproduzierbarer Bahnen 219

Tabelle 23-12: Langperiodische Ephemeride für eine Bahn in der Umgebung einer formstabilen Bahn unter Berücksichtigung des analytischen Erdmodells unter Einschluss von J_2, J_3, J_4. Die zugehörige mittlere Bahn hat die Parameter $\bar{a}_0 = 7007.137\,km,\ \bar{e}_0 = 0.001494,\ \bar{i}_0 = 97°.93,\ \bar{\omega}_0 = 90°.0.$ 236

Tabelle 23-13: Manöver zur Stabilisierung der Drift des Argumentes des Perigäums für die Bahn aus 237

Tabelle 23-14**:** Mögliche Bahnen bei Berücksichtigung des Einschussfehlers in der Bahnhöhe bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713241

Tabelle 23-15: Auswirkungen der Einschussfehler auf die drakonitische Umlaufzeit bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713..... 241

Tabelle 23-16**:** Zeitfehler nach etwa 2 Jahren N_d = 10266 drakonitischen Umläufen der Nominalbahn für verschiedene Einschussfehler in Bahnhöhe und Inklination bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713..... 242

Tabelle 23-17**:** Fehler in der mittleren Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713 242

Tabelle 23-18: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Gradmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713..... 243

Tabelle 23-19: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Längenmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713..... 243

Tabelle 23-20: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge nach 2 Jahren bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713 ◀ 243

Tabelle 23-21: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Bogensekunden infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination 261

Tabelle 23-22: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Meter infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination 261

Tabelle 23-23. Korrekturzyklus für Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination 261

Tabelle 23-24**:** Änderungen in der großen Bahnhalbachse zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination 261

Tabelle 23-25**:** Änderungen in der Inklination zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination 262

Tabelle 23-26**:** Halbachsenkorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement262

Tabelle 23-27**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren 262

Tabelle 23-28**:** Inklinationskorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente262

Tabelle 23-29**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren 263

Tabelle 23-30: Beispiel zur Korrektur eines Längenfehlers auf Grund der Einwirkung des Luftwiderstandes auf einen Kleinsatelliten 268

Tabelle 23-31: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes 276

Tabelle 23-32: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes als Beispiel für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\mathrm{km}$ 278

Tabelle 23-33: Treibstoffbedarf für Positionierung sowie Bahn- und Formationshaltung eines Kleinsatelliten mit Startmasse 130 kg, der Luftwiderstandsangriffsfläche $2\mathrm{m}^2$ über die Lebensdauer 2 Jahre. Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten gelten für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\mathrm{km}$. Der Treibstoffbedarf wurde für Heißgastriebwerke mit der Ausströmgeschwindigkeit $c_e = 2800\,\mathrm{m/s}$ gerechnet ◀..... 278

Tabelle 23-34: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten im Fall des Trinodal Pendulum Konzeptes. Als Referenz sind die Bahnparameter des aktiven Bezugssatelliten (Master Satellite) eingefügt 280

Tabelle 23-35: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten für das Trinodal Pendulum Konzept im Fall des numerischen Beispiels 285

Tabelle 23-36: Die mittleren *Kepler*elemente von TerraSAR-X und TanDEM-X für den Zeitpunkt 22. August 2016, 12:00:23.8 UTC..... 286

Tabelle 26-1: Beispiele für die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für einige Satellitenbahnen mit unterschiedlichen Bahnhöhen, Exzentrizitäten und Inklinationen317

Tabelle 26-2: Vergleich der Umlaufzeiten bei unterschiedlichen Beziehungen für die Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\bar{a}_0$=6883.502 km , $\bar{e}_0$ = 0.00125034 , $\bar{i}_0$=97°.447126 ◀318

Tabelle 26-3: Übersicht über das Verhalten der scheinbaren mittleren Satellitenbewegung 326

Tabelle 26-4: Die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für rückläufige Kreisbahnen in 200 km Bahnhöhe..... 327

Tabelle 26-5: Klassifizierung der scheinbaren Bewegung von Erdsatelliten in Ost-West-Richtung 332

Tabelle 26-6: Besondere Punkte im Bewegungsverhalten eines Satelliten bei Bezug auf die Erdoberfläche 332

Tabelle 26-7: Scheinbares Bewegungsverhalten auf rechtläufigen äquatorialen Kreisbahnen. a_G ist die große Bahnhalbachse einer geostationären Bahn 336

Tabelle 26-8: Die großen Halbachsen kreisförmiger Satellitenbahnen mit stationären Punkten bzw. mit Stillstandpunkten über der Inklination. Randpunkte des Bereichs kreisförmiger Schleifenbahnen (siehe in Bild 26-10, auf Seite 339) 347

Tabelle 27-1: Spezielle Punkt der topozentrischen Satellitenbewegung 379

Tabelle 28-1: Die *Kepler*schen Elemente der Erdbahn 385

Tabelle 28-2: Die *Kepler*schen Elemente der scheinbaren Sonnenbahn 386

Tabelle 28-3: Mittlere Bahnelemente der scheinbaren Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0 389

Tabelle 28-4: der tägliche Bahnbogen der Sonne längs der Ekliptik 408

Tabelle 28-5: Die Extremalwerte des täglichen Bahnbogens der Sonne längs des Äquators und die extremale Dauer des Rotationssonnentages 410

Tabelle 28-6: Die Extrema im Jahresverlauf und die Auswirkung auf die wahre Sonnenzeit 414

Tabelle 28-7: Die Extremalwerte der Abweichung in der Tageslänge der wahren Sonne von der mittleren Sonnen bezogen auf den täglichen Bahnbogen der Sonne längs des Äquators. 416

Tabelle 28-8: Liste mit Konjunktionen und Oppositionen Satellit-Sonne für die Satellitenbahn a=12000 km, SAB-Sonne-b10.venie=0.2, i=60°, Ω=0°, ω=5°, M0=0°, Epoche 2018.04.27 00:00: 0.00 431

Tabelle 28-9: Übersicht über das zeitliche Verhalten eines Satelliten in mittlerer Sonnenzeit 440

Tabelle 28-10: Beispiel zur Berechnung der Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\bar{\omega}_0$ aus vorgegebenem Überflug über einer geographischen Position mit vorgegebener Überflugrichtung ◀.. 448

Tabelle 28-11: Schematische Zusammenfassung des Verhaltens der mittleren Knotensonnendrift sowie Vergleich der drakonitischen und der sonnensynodischen Bewegung 464

Tabelle 28-12: Sonnensynchrone Bahnfamilie für Kreisbahnen 480

Tabelle 28-13: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.1 481

Tabelle 28-14: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.2 481

Tabelle 28-15: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0. 481

Tabelle 28-16: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.4 483

Tabelle 28-17: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5 483

Tabelle 28-18: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.55 483

Tabelle 28-19: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5777781 483

Tabelle 28-20: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.599734 (Grenzfall) 483

Tabelle 28-21: Die sonnensynchrone Bahnfamilie mit Perigäumshöhe 200 km (blaue Grenzkurve in Bild 28-33) 484

Tabelle 28-22: **Z**usammenstellung aller reproduzierbaren kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen von Erdsatelliten bis in etwa 1200 km Höhe und Wiederholbarkeit nach 1 - 7 Tagen 487

Tabelle 28-23: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 39:580 490

Tabelle 28-24: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 41:614 491

Tabelle 28-25: Knotensonnendrift pro drakonitischem Umlauf abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.007513. 557

Tabelle 28-26: Zeitdrift nach N = 10226 drakonitischen Umläufen (etwa 2 Jahre) abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.007513. 557

Tabelle 28-27 Säkulare Variation der Knotenüberflugzeit infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination 574

Tabelle 28-28 Korrekturzyklus für Zeitstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination 574

Tabelle 28-29: Halbachsenkorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement574

Tabelle 28-30: Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren..... 575

Tabelle 28-31 : Inklinationskorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente 575

Tabelle 28-32: Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren 575

Tabelle 29-1: Physikalische Parameter der Gestalt des Mondes..... 583

Tabelle 29-2: Als konstant betrachtete Basisparameter der Mondbewegung bezüglich der Erde584

Tabelle 29-3: Zusammenstellung der Zahlenwerte der mittleren Monate und Umlaufzeiten nach *Ptolemäus* und aktuelle Werte, die auf die Fundamentalepoche J2000.0 bezogen sind. 594

Tabelle 29-4: Die *Kepler*schen Bahnelemente der Bewegung des Erde-Mond-Baryzentrums um die Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0610

Tabelle 29-5: Beispiel zur Berechnung des subtropischen Punktes auf der Mondoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten und von verschiedenen irdischen Beobachtungsstationen. 651

Tabelle 29-6: Selenozentrische Koordinaten (λ_M, β_M) der Apollo Mondlandungspositionen und der ALSEP Stationen. 657

Tabelle 29-7: Bahndaten eines niedrigfliegenden kreisförmigen Mondorbiters auf polnaher Bahn 661

Tabelle 29-8: Die säkularen Variationen der Keplerelemente eines Mondorbiters im Verlauf eines tropischen Jahres, mit Halbachse a = 1840 km, Exzentrizität e=0.01, Inklination i = 85°, mit der Perigäumshöhe $H_p = 82\,\text{km}$. 663

Tabelle 30-1: Die Genauigkeiten der mittleren Bahnparameter der Planeten im Zeitraum 1800–2050 gegeben in heliozentrischen äquatorialen Koordinaten Rektaszension, Deklination und Distanz (nach SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 316) 678

Tabelle 30-2: Die tropische Rotation der Planeten um ihre Rotationsachse, Daten zur Epoche J2000.0 705

Tabelle 30-3: Die mittlere synodische Umlaufzeit der Planeten und zugehörige Bewegungsgrößen zur Epoche J2000.0 709

Tabelle 30-4: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente der ersten 4 Kleinen Planeten (einschließlich des Zwergplaneten 1 Ceres)..... 727

Tabelle 30-5: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente 4 unterschiedlicher Kleiner Planeten 727

Tabelle 30-6: Bahnparameter eines Mars-Orbiters (aus Projekt MARS-EXPRESS)..... 755

Tabelle 30-7: Vergleich der Bahnelemente eines Erdsatelliten mit denen eines Marsorbiters unter Voraussetzung derselben Einschussbahnelemente. 757

Tabelle 30-8: Die mittleren siderischen Bewegungen der Planeten um die Sonne und die (tropische) Rotation der Planeten um ihre Rotationsachse, Daten zur Epoche J2000.0 760

Tabelle 30-9: Grenzexzentrizität und Grenzhalbachse für sonnensynchrone Planetenorbiter760

Tabelle 31-1: Beispiele der mittleren synodischen Umlaufzeit zweier Satelliten auf kreisförmigen Bahnen mit der Inklination $i = 51°$. 775

Tabelle 31-2: Die Bedingungen für das scheinbare Bahnverhalten zweier Satelliten auf koplanaren Kreisbahnen..... 785

Index

1 Ceres 729
  Zwergplanet 711, 762
2 Pallas 729
2-line elements 69, *288*
3 Juno 729
4 Vesta 716, 729
Aberrationskonstante 409
Abplattung 706
absoluter
  Eigenbewegungsvektorr 295
Almanach
  astronomischer 389
Analemma 417
Anomalie
  mittlere des Mondes 587
anomalistische
  Bewegung des Mondes 587
anomalistische Umlaufzeit
  wahre 41
APOLLONIUS 580
Approximation
  sukzessive 155
Apsidenlinie
  säkulare Drift im Erdgravitationsfeld 79
Äquatorradius 706
Äquatorsystem 686
  des Mondes 628
  geozentrisches Frühlingspunkt bezogenes 294
Äquinoktien 546
Argument
  mittleres des Mondes 589
Argument der Breite
  differentielle Beziehungen 128
Argument des Perizentrums
  säkulare Drift 77
Asteroidengürtel 716
Astronomical Almanac 650, 709
ATMOS 549
Bahn
  eingefrorene 222
  frozen orbit 222
  geosynchron 501
  integer 198, 200
Bahnänderungen 246, 564
Bahnänderungen, kleine 60
Bahnauswahl
  aus anomal- Umlaufzeit und Drift der Perigäumslänge 101
  aus Argument der Breite 127
  aus drakonitischen Tagesumläufen 164
  aus drakonitischer Umlaufzeit 157
  aus drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift 186
  aus Drift der Perigäumslänge 88
  aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene 476
  aus Knotenlängendrift 184
  aus Knotenlängenrestverschiebung 200
  aus Knotenlängenverschiebung 180
  aus Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift 186
  aus Knotensonnendrift 470
  aus Knotensonnenverschiebung 471
  aus Knotenüberflug 445
  aus Meridian-bezogener Satellitenbewegung 322
  aus mittlerem Sonnenwinkel 452
  aus mittlerer anomalistischer Umlaufzeit 67
  aus mittlerer sonnensynodischer Umlaufzeit 434
  aus Reproduzierbarkeit in Zeit und Spur 499
  aus sonnenbezogener Umlaufzeit einer Bahnebene 476
  aus Überflugzeit über Subsatellitenpunkt 447
  Exzentrizität aus drakonitischer Umlaufzeit 161
  für sonnensynchrone Bahnen 481
  für Spur-reproduzierbare Bahnen 204
  Halbachse aus drakonitischer Umlaufzeit 157
  Inklination aus drakonitischer Umlaufzeit 162
  Kreisbahnen mit Spitzen 342, 346
  mit Saros-Zyklus 497
  mit Stillstandpunkten 345
Bahnebene
  Bewegung der 169
Bahnelemente
  Argument des Perizentrums 61
  Mittlere Anomalie 62
  Rektaszension des aufsteigenden Knotens 60
Bahnkorrekturen 60, 246, 564
Bahnkorrektursystem 240
Bahnmodell 14
Bahnparameter 755
Bahnradius 14
  oskulierender 228
Bahnsystem 617, 680
Bahnwinkel
  erster Hansenscher 10
  zweiter Hansenscher 11
Baker-Nunn-Kamera 371
ballistischer
  Koeffzient 71
BALMINO. G. 758
Baryzentrum
  des Erde-Mond-Systems 402
  Erde-Mond-System 614
Basislinie 289
BAUSCHINGER, J. 782, 799
Beschleunigung
  Keplersche 15
BESSEL, F. W. 646
  Besselsches Jahr 407
Bewegung
  anomalistische 1, 28
  anomalistische mittlere 34, 35
  drakonitische 1, 117, 222

drakonitische mittlere 127
drakonitische, identisch mit anomalistischer 154
eingefrorene 222
erdbezogene der Planeten 717
formstabile 222
frozen motion 222
intermediäre 15
Keplersche mittlere 34
Korrekturen der drakonitischen 246
martiozentrische 233
Meridian bezogene 2
mittlere drakonitische mittlere 127
mittlere Keplersche mittlere 34
Planetenorbiter 755
relative 636
scheinbar rückläufig 344
scheinbare 2
scheinbare von Kreisbahnen 333
siderische 1, 312
synodische
zweier Satelliten 770
synodische der Planeten 717
topozentrische 372
topozentrische, Bahnabschätzung 366
tropische 1
Bewegung
synodische
koplanarer Satelliten 776
Bewegung der Planeten
scheinbare 718
Bewegungseinflüsse 14
Bewegungsgrößen
topozentrische 369
Bildverarbeitung 375
BRAHE, TYCHO
Variation des Mondes 588
Breite 617, 680
BROUWER, D. 72, 223, 341
BROWN, E. W. 582, 596
CartWheel 283, 288
CASSINI, J. C. 583
CASSINI, J. D. 645
Gesetze der Mondrotation 583, 628, 643, 648, 666
CASSINI, JACQUES 583
CAYLEY, A. 12
CLAIRAUT, A. C.
Théorie de la Lune 581
*Cramer*sche Regel 189
CUTTING, E. 222
D'ALEMBERT, JEAN LE ROND
Théorie de la Lune 581
Dämmerungsbahn 520
Dämmerungsgebiete 527
Dämmerungslinie 523
DE200/LE200 388
Defekt
des Mondes 655
Deklination, planetare 687
DELAUNAY, CH. E. 582
departure point 12
DESCARTES, R.
Vorzeichenregel 472
Doppel-Helix 288, 289
Doppler Beobachtungen 383
*Doppler*messung 374
Doppler-Messungen 731
Drehungen 632
Drehvektor
knotenbezogenes Bahnsystem 120
Dreikörperproblem 615
ECKSTEIN, M. C. 339, 386, 664, 717
Eclipse year 407
Eigenbewegungsvektor
absoluter 295
des Äquatorsystems 294
des Greenwich-Systems 366
des Hansen-Systems 13
des Mondäquatorsystems 636
des Mondbahnsystems 621
knotenbezogenes Bahnsystem 120
relativer 295, 636
relativer des Mondäquatorsystems zur Ekliptik 636
Einschussdispersion 366
Einschussfehler 243
Einweg-Doppler 731
Ekliptik 293, 388, 390
mittlere scheinbare
ekliptikale Breite 391
ekliptikale Länge 391
ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens 391
Exzentrizität 391
geozentrische Deklination 393
geozentrische Distanz 392
große Halbachse 391
Inklination 391
Länge des Perigäums 391
mittlere Anomalie 391
ekliptikale Breite der Sonne
Genauigkeit im Jahrbuch 389
geometrische geozentrische 389
scheinbare 390
ekliptikale Länge der Sonne
Genauigkeit im Jahrbuch 389
geometrische geozentrische 389
scheinbare 390
Elongation
mittlere des Mondes von der Sonne 588
El'Yasberg, P. E. 664
Epizykelmodell 580
Epocheanomalie
säkulare Drift 75
EQUATOR-S
Satellitenmission 539
Erde 677, 762
Masse 613
Erdgravitationsfeld 129
Erdmond
scheinbare Bewegung um Erde 344
Erdrotation

tropische 316
Erdsatelliten 755
Erstbahnabschätzung 366
ESCOBAL, R. B. 375
EULER, L.
kinematische Gleichungen 636
Evektion 580, 588
Exeligmos 591
Exzentrizität
eingefrorene 225, 227
oskulierende 227, 228, 234
Exzentrizitätsvektor 223
Fernerkundung 375
FIEDLER, H. 285, 287
Finsternisjahr 407
FK5-Referenzsystem 404
Flächenparameter 14
Flächensatz 10
FLURY, W. 339, 385
Formationsflug
Aufbau einer Formation 108
Bewegung in Länge 266
Frenetsche Formeln
Beobachtersystem 738
der Astrodynamik 11
des Apsidensystems 30
des Äquatorsystems 294
des Hansen-Systems 12
des Leibniz Systems 11, 120
des Mondäquatorsystems 636, 641
Frühlingspunkt 293, 387
Fundamentalepoche 676
Fundamentalsystem 12
Funktion
überlagerte 20, 101, 128, 147, 155, 158, 182, 188, 307, 310, 318, 426, 430, 432, 434, 435, 438, 447, 449, 450, 498, 548
Galileo-Mission 716
Gaspra 951 716
*Gauß*sche Variationsgleichung
der Deklination des Perigäums 83
der geographischen Länge des Perigäums 83
Gegensonne 501
GEHRELS, T. 711, 762
geometrische Daten 389
geometrische Länge
mittlere des Mondes 586
geostationäre Bahn 339
geostationäre Satellitenbahnen
Eigenschaften 338
geosynchrone Bahnen 329
kreisnahe 349
Geschwindigkeitsinkrement 110
Geschwindigkeitsvektor
absoluter im Hansen-System 12
relativer 294
GIOTTO
Kometensonde 714, 716, 721, 722, 726
Gradmaß 617, 680
Gravitationskonstante
geozentrische 15
planetozentrische 756
Gravitationsmanöver 731
Greenwich
0-Meridian 315
Größenordnung
Drift der Epocheanomalie 66
Drift des Perigäums 66
Knotendrift 65
GTO 377
GYLDÉN, H. 582
Halbierung
Verfahren der fortgesetzten 26, 91
HANSEN, P. A.
Bahnwinkel 18, 146
Bahnwinkel, Variation des 316
Hansenbewegung 1
Hansen-System 9, 19, 121, 141, 146, 782, 790, 792
Hansenwinkel 342
Mondtheorie 582
System 10
Umlaufzeit 150
zweiter Bahnwinkel 11
HARTL, PHILIPP 374, 750
HAYN, F. 582, 646
HELIOS
Sonnensonden 1974, 1976 659
HELIOS 1
Sonnensonde 714, 716, 721, 722
heliozentrisches System 680
Helix-Bewegung 615
Helix-Konzept 289
HILL, G. W. 582, 596
HIPPARCH 302, *580*, 587, 590
HOHMANN, W.
Transfer 109, 284
Horizontalparallaxe
der Sonne 420
Horizontsystem 365
IAU-Vektor 686, 687, 755
Ida 243 716
ILE 582
Inklination
kritische 77, 154, 158
integer orbit 333, 338
IRS-1E
indischer Erdbeobachrungssatellit 540
IRS-P3 657
ISS 117
Jahr
annus fictus 407
anomalisisches 406
anomalisisches, mittleres 406
astronomisches 407
Besselsches 407
Mondjahr 407
siderisches 406
siderisches, mittleres 406
tropisches 404
tropisches, mittleres 404
jährliche Gleichung
der Mondbewegung 581
jährliche Variation 590

Jonentriebwerk 717
JPL 388
-Ephemeride 673
Jupiter 678, 710, 762
Orbiter, sonnensynchron 764
Jupitermonde 788
KAHLE, RALPH 288
KARP, E. E. 56
KEPLER, J. 581
Beschleunigung 15
*Kepler*bewegung 1
exakte 38
Kernschattengleichung 503
KIRSCHNER, M. 266, 287
Kiruna
Esrange 423
KLINKRAD, H. 227
Knoten
der Mondbahn 589
Wanderung der 168
Knotendurchgangszeit 449
Knotenlänge eines Mondorbiters
säkulare Drift 661
Knotenlängendifferenz 351
Knotenlängendrift 174, 333
eines Mondorbiters 661
Knotenlängenrestverschiebung 198
kleinste mögliche für reproduzierbare Bahnen 207
Knotenlängenverschiebung 174, 333, 338
Knotensonnendrift 455, 496
Knotensonnenintervall 565, 567
Knotensonnenverschiebung 496
pro drakonitischem Umlauf 461
wahre pro wahrem drakonitischem Umlauf 464
Knoten-Sonnenverschiebung
pro drakonitischem Umlauf 479
Knotensonnenwinkel 558
mittlerer 453, 565
Knotensonnenwinkeldrift 565
Knotenumlauf 179, 197
Koeffizient
ballistischer 71
Koeffizientendeterminante 189
Konjunktion 426
innere (oder obere) 711
Sonne-Mond 424
von Planeten 709
Konstellation
Walker- 271
Konstellationen
kreisförmige Bewegung 271
Koordinaten
topozentrische 363
Koordinatensystem
Apsidensystem 29
Äquatorsystem des Mondes 628
Hansen-System 29
Leibniz-System 29
Mondbahn- 617
Perizentrum-bezogenes 29
Planetenäquator- 686
Planetenbahn- 680
planetographisches 706
planetozentrisches 706
satellitenzentriert 552
satellitenzentriertes 549
KOPAL, Z 646
KOPERNIKUS, N. 409
Mondtheorie 580
Korrekturzyklus 256, 258, 572, 573
KOZAI, Y. 222, 223, 341
Kozai Effekt 731
KOZIEL, K. 582
KRAUSE, H. G. L. 129, 341
KRIEGER, G. 281, 285, 287
kritische Inklination 77
KSC 552
Kulmination eines Sterns
obere, untere 421
LANDSAT 377
Länge
ekliptikale des aufst. Knotens der Mondbahn 589
mittlere geometrische des Mondes 586, 594
selenographische des Knotens eines Mondorbiters 661
Länge in der Bahn 299, 617, 680
Langzeituntersuchungen 60
Laufzeitänderung 375
Leibniz System
Frenetsche Formeln 120
LEIBNIZ, G. W.
Bahnsystem 550
System 10
LEIBNIZ. G. W.
Bahnsystem 29, 121, 673
Frenetsche Formeln des Leibnizsystems 11
LENSE, JOSEF.
Lense-Thirring-Effekt 612
Libration
physikalische 661
physikalische des Mondes 582
Librationen
des Mondes 643
physikalische des Mondes 628, 645
Lichtzeit 375
Lichtzeit der Sonne 392
Lichtzeiten
der Planeten 723
Luftwiderstandsbeiwert 72
Lunation 425, 593, 653
LYDDANE, R. H. 339
MAPLE 129
Mars 678, 708, 710, 762
MARS-EXPRESS 756
Orbiter 756
Orbiter, sonnensynchron 763
Marsorbiter 230
Massenverhältnis
Erde zu Mond 613
MASSONET, D. 275

MAYER, TOBIAS 582
Mehrpass-Interferometrie 207
Meridian-bezogene
  mittlere Umlaufzeit 318
  Umlaufzeit 317
Meridian-bezogenen Bewegung
  mittlere 317
  wahre 316
Merkur 677, 710, 712, 713, 717, 723, 762
METON
  Zyklus 591
MIR 117, 541, 542
Mittelpunktsgleichung 32, 392, 580
  in Mondbewegung 587
mittlere Bewegung
  anomalistische 34, 35
  Hansensche einer kreisförmigen Äquatorbahn 340
  Keplersche 35
  mittlere anomalistische 43
  mittlere Keplersche 34
  mittlere sonnensynodische 427
MOE, M. M. 56
Molnija 361
Molnija 77, 184
Monat
  drakonitischer 580
  synodischer 580, 653
Monatslängen
  mittlere 596
Mond
  Bewegung um Erde 579
  Masse 613
  Mondalter 402
  Mondjahr 407
  Mondperioden, Monate 590
  Orbiter, sonnensynchron 666, 668
  Phase 654
  Phasenwinkel 654
  synodische Bewegung 653
Mondalter 402, 580, 653, 657
Mondbahnsystem 617
Mondorbiter 660
Mondsynchrone Bahn
  eines Mondorbiters 666
Mondsynodische Bewegung
  von Erdsatelliten 670
Mondtheorie
  Hauptproblem 597
MOREIRA, A. 281
MORLEY, T. 726
NASA-Betawinkel 537
NEFF, THOMAS 658
Neigung
  kritische 154, 158
Neptun
  Orbiter, sonnensynchron 767
Neptun 679, 710, 713, 718, 762
NEWCOMB, S.
  Sonnentheorie 395
NEWTON, I.
  Mondtheorie 581
  numerische Lösung einer Gleichung 431
Newton-Verfahren
  mit quadratischer Konvergenz 48
  vereinfachtes 48, 103, 155
nodal period 165
NORAD 72
Nord-Süd-Richtung
  Bewegung in 333
Nullmeridian
  Argument, auf Planetenoberfläche 757
Nullmeridian bei Planeten 706
Oktanten 581
Opposition 426, 784
  von Planeten 709
Orbiter 755
Ortssonnenzeit
  mittlere 442
Ost-West-Richtung
  Bewegung in 333
P/Grigg-Skjellerup
  Komet, Begegnung mit GIOTTO 726
P/Halley 714, 716, 721, 722
Parameterachse 29
Partialausdrücke 60
  Argument des Perizentrums 61
  Mittlere Anomalie 62
  Rektaszension des aufsteigenden Knotens 60
Perigäum
  mittlere Länge der Sonne 836
  mittlere Länge des Mondes 647, 836
Perigäum des Mondes
  mittlere geometrische Länge 587
Perigäumsdurchgangszeit 449
period
  nodal 165
Periselen 668
Perizentrum 1
Perizentrumsdurchgangszeit 38
Phase
  des Mondes 654
Phasenwinkel 656, 726
Phasing 271
Phasing Orbit 108
Planeten
  retrograde 707
Planetenäquatorsystem 686, 755
Planetenbahnsystem 680
  mittlere Bahnparameter 676
Planetenorbiter 755
  sonnensynchrone Bahnen 760
planetographische Länge 706
planetographisches System 705
planetozentrische Länge 706
planetozentrisches System 686
Pluto 679, 762
  Zwergplanet 713, 720, 723
  Zwerplanet 710, 718
Polarkreis 423
PORSCHE, H. 750
Positionswinkel
  der physikalischen Libration 648
Präzession

durch die Planeten 314
Projekt OASIS 540
Pseudoumkehrpunkte
auf kreisförmigen Polbahnen 348
PTOLEMÄUS 302, 409, 579, 580, 587, 588, 591, 596
Evektionstheorie 580
Querkrümmungsradius 364, 369
Radio Science 745, 752
range 374
slant range 374
range rate 374
Reduktion
auf die Ekliptik 581, 590
Reduktion auf Äquator
der Mondbahn 670
Reduktion auf den Äquator 302, 411
Reduktion auf die Ekliptik 302
Referenzellipsoid 363, 706
Rektaszension
knotenbezogene 302
lunare 661
Rektaszension, planetare 686, 687
Relaissatellit 666
relativer
Eigenbewegungsvektorr 295
Repetitionsdauer 333
Repetitionszyklus 333
Reproduktionsdauer 203, 338
Reproduktionszyklus 203, 216, 338
Reproduzierbarkeit 202
in Zeit und Subsatellitenbahn 498
Nachweis 210
näherungsweise 210
sonnensynchroner Bahnen 487
retrograde
Planeten 707
revisiting period 315, 322
ROSAT 374
ROSETTA 756
Rotation
der Erde 169
Rotation des Mondes
mittlere Rate 661
Rotationsellipsoid 222, 363
Rotationssonnentag 419
Rotationssonnenzeit 414, 419
ROTH, E. A. 128, 165
anomalistische Umlaufzeit 56
San Marco
Raketenstartplatz vor Kenia 539
SAR Interferometrie 289
Saros-Zyklus 590
auf Satellitenbahnen 495
Satelliten 755
Satelliten Konstellationen
CartWheel Concept 275
Trinodal Pendulum Concept 281
Satellitenbahnmechanik
Hauptproblem 15
Satellitenbewegung
sonnensynodisch bezogen auf Satelliten-Bahnebene 437
tropische 293
Satellitenformation 108
Satellitenkonstellationen
kreisförmige Bewegung 271
Satellitenlage 551
Satellitenstabilisierung 551
Saturn 678, 710, 712, 717, 720, 762
Orbiter, sonnensynchron 765
Schatten
-dauer 517, 560
-faktor 517
-grenze 523
-index 517
-kontakte 509
-zeiten 563
Schattengleichung 500
allgemeine 506, 507
Halb- 505
Kern- 503
Zylinder- 506
scheinbare Bewegung 333
äquatoriale Kreisbahnen 336
elliptischer Bahnen 357
Spitzenpunkte 342
stationäre Bahnpunkte 333, 336
Stillstandpunkte geneigter Kreisbahnen 345
Wendepunkte geneigter Kreisbahnen 345
zweier Satelliten
rückläufig 782
stationär 782
scheinbare Bewegung zwischen Satelliten
rechtläufig 784
rückläufig 784
stationär 784
Schiefe der Ekliptik 314
Schleifenbahn
kreisförmige 347
kreisförmige ohne Überschneidung 355
Schleifenbildung
mit Überschneidung 351
Schwerefeld 60
SEASAT 222
SEIDELMANN, P. K 711, 762
SGP4 70
Sichtbarkeitsgleichung
bei Sicht Satellit-Satellit 771
Sichtwinkelplot 372
Solstitien 546
Sonne
Ephemeride 388
fiktive mittlere 390, 408, 415, 427
mittlere 390
mittlere scheinbare 390
scheinbare Bewegung um Erde 344
Sonnenzeit
Rotations- 414
Sonnenaspektwinkel 437, 512, 537, 560, 562
Sonnendrift 426, 559
mittlere knotenbezogene 461

Sonnenelevation 545
Sonnenspiegelung 547
sonnensynchron 478
sonnensynchrone
  Bewegung der Bahnebene 465, 478
sonnensynchrone Bahnen 499
  Eigenschaften 478
  Planetenorbiter 760
Sonnensystem
  Baryzentrum 388
Sonnenwinkel
  mittlerer 441
  wahrer 425
Sonnenzeit
  mittlere 415, 442, 565
  mittlere eines Satelliten 441
  mittlere und Weltzeit 445
  wahre 415
Space Shuttle 117, 552, 553, 555
Spiralbewegung
  quasiperiodische 79
Spitzen
  der scheinbaren Bahn 334
Spitzenpunkte 380
Spur einer Satellitenbahn 250
Spurdrift 244, 250
Spurfehler 251, 838
  mittlerer 242
stationäre Punkte
  scheinbare 358, 380
Sterntag 333
Sternzeit 315, 365
  für Greenwich Meridian 315
  lunare 661
Stillstandpunkte 358
Subsatellitenbahn
  reproduzierbare 202
subsolarer Punkt
  auf der Mondoberfläche 655
  auf Mondoberfläche 654, 655, 656
  der fiktiven mittleren Sonne 443
subterrestrischer Punkt
  auf der Mondoberfläche 583, 628, 643, 649, 655
  auf Planetenoberfläche 707
Subtopozentrischer Punkt
  auf Mondoberfläche 651
Sun glint points 547
SwingBy 731
SYMPHONIE-A 359, 360, 377, 380, 381, 382, 383, 386, 507, 521, 522
Syzygien 580
Tag- und Nachtgleiche 424
Tagesumläufe
  drakonitische 163
Tagesumlaufzahl 338
TanDEM-X 289, 374, 615
Tangentialpunkte
  Sonnendistanz 553
*Taylor*entwicklung 188
TDT 390
Terminator 523
TerraSAR-X 289, 373, 615
THIRRING, HANS
  Lense-Thirring-Effekt 612
TISSERAND, F.
  Kriterium 731
Topozentrum 369
Transferbahn 81, 110, 359
Transformationsmatrix 632
  Drehungen von Orthonormalsystemen 632
Transit
  der Sonne in TDT 420
Trinodal Pendulum Konzept 288
Tschebyscheff-Approximationen 404, 673
Tundra 361
TYCHO BRAHE 581
Überschneidungspunkte
  von Schleifenbahnen 352
übersonnensynchron 467
Umkehrpunkt 334
Umkehrpunkte 359
Umlauf
  synodischer von planetaren Objekten 709
Umlaufzeit
  anomalistische 41
  drakonitische 146, 302
  Keplersche 51, 152
  Meridian-bezogene 318
  minimale von Erdsatelliten 154
  mittlere anomalistische 43, 67
  mittlere drakonitische 148, 352
  mittlere drakonitische mit Luftwiderstand 153
  mittlere Hansensche 24
  mittlere Hansensche 24
  mittlere sonnensynodische 427
  oskulierende anomalistische 55
  säkulare anomalistische 45
  säkulare drakonitische 150, 160
  säkulare Hansensche 24
  sonnensynodische 426
  sonnensynodische des Bahnknotens 459, 538
  tropische 307
  wahre anomalistische 41
  wahre drakonitische 146
  wahre Hansensche 24
Umlaufzeit
  synodische
    zweier Satelliten 776
Ungleichheit
  erste 580
  große 580
untersonnensynchron 466
Uranus 679, 710, 718, 762
  Orbiter, sonnensynchron 766
Variation
  der Mondbewegung 581
  in der eklipt. Länge des Mondes 588
  jährliche 590
Vektor
  Drehvektor, knotenbezogenes Bahnsystem 120
  Eigenbewegungs- 120
  Exzentrizitätsvektor 223
  IAU- 686
Venus 677, 710, 723, 762

Verzerrungsrelation 180
VSOP87-System 404
WALKER, J. G.
  Konstellation 271
Weilheim 374
Weltzeit 415
  und mittlere Sonnenzeit 445
Widerstandskoeffizient
  im SGP4 Modell 71
Zarya 70
Zeit
  baryzentrische dynamische 388, 757
  mittlere Sonnen 565
  Sonnenzeit
    Rotations- 414
Zeitfehler 565, 569
Zeitgleichung 415, 560, 562
Zeitstabilität 572
ZHONGOLOVICH, I. D. 59
  anomalistische Umlaufzeit 56
Zweiweg-Doppler 731
Zweizeilenelemente 69, 288
  Genauigkeitsfragen 72
Zwergplaneten
  1 Ceres 711, 762
  Pluto 713

Forschungsbericht 2018-31

Satellitenbewegung

Band IV: Bewegungsanalyse

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und
Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

904 Seiten
361 Bilder
100 Tabellen
235 Literaturstellen

DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Anomalistische Bewegung, Drakonitische Bewegung, Tropische Bewegung, Siderische Bewegung, Meridian-bezogene Bewegung, Sonnensynodische Bewegung, synodische Bewegung bei Bezug auf Mond, Planeten, andere Satelliten, Reproduzierbare Bewegungen, Geosynchrone Bewegungen, Sonnensynchrone Bewegungen von Satelliten und Orbitern

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme des DLR, Oberpfaffenhofen

Satellitenbewegung, Band IV: Bewegungsanalyse

DLR-Forschungsbericht 2018-31, 2018, 904 Seiten, 361 Bilder, 100 Tabellen, 236 Literaturstellen, 148,00 € zzgl. MwSt.

Im vierten Band der Satellitenbewegung werden basierend auf einer allgemeinen Hansen-Bewegung die Bezüge einer Satellitenbewegung in unterschiedlichen Relationen zusammengestellt, wie sie zur Erfüllung spezieller Missionsanforderungen benötigt werden. Bezüge auf den Basiskörper (insbesondere die Erde) sind die anomalistische, drakonitische, tropische, siderische, Meridianbezogene und topozentrische Bewegung. Synodische Bewegungen stellen die Bezüge zu anderen Körpern dar, zur Sonne, zum Mond, zu Planeten und anderen interplanetaren sowie interstellaren Objekten, zu anderen Satelliten ezwa bei Formationsflügen. Spezielle insbesondere für die Erdbeobachtung interessante Bewegungsarten sind reproduzierbare, geosynchrone, sonnensynchrone, formstabile („eingefrorene"), Librations- Bewegungen. Eine Erweiterung des Begriffes der reproduzierbaren sonnenbezogenen Bewegung wird vorgestellt.

Anomalistic motion, draconic motion, tropical motion, sidereal motion, Meridian-related motion, Sun synodical motion, synodical motion related to Moon, planets or other satellites, repetitive motion, geosynchronous motion, Sun-synchronous motion of satellites und orbiters

(Published in German)

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Microwave and Radar Institut of the German Aerospace Centre (DLR), Oberpfaffenhofen

Satellite Motion, volume IV: Analysis of Satellite Motions

DLR-Forschungsbericht 2018-31, 2018, 904 pages, 361 figs., 100 tabs., 236 refs., 148.00 €

The fourth part of satellite motion is dedicated based on general Hansen-motions to any relations of satellite motions with respect to the basis elliptical motion (anomalistic motion), to the nodal crossing (draconic motion), to the vernal equinox (tropical motion), to interstellar reference points (sidereal motion), as well as synodical motions with respect to Sun, Moon, Planets and other interplanetary and interstellar objects. Included are special orbits as repetitive, Geo-synchronous, Sun-synchronous, frozen, librational motions. An extension of a repetitive-sun-synchronous motion will be included. A special focus is directed to the analysis of remote sensing orbits of satellites and orbiters.