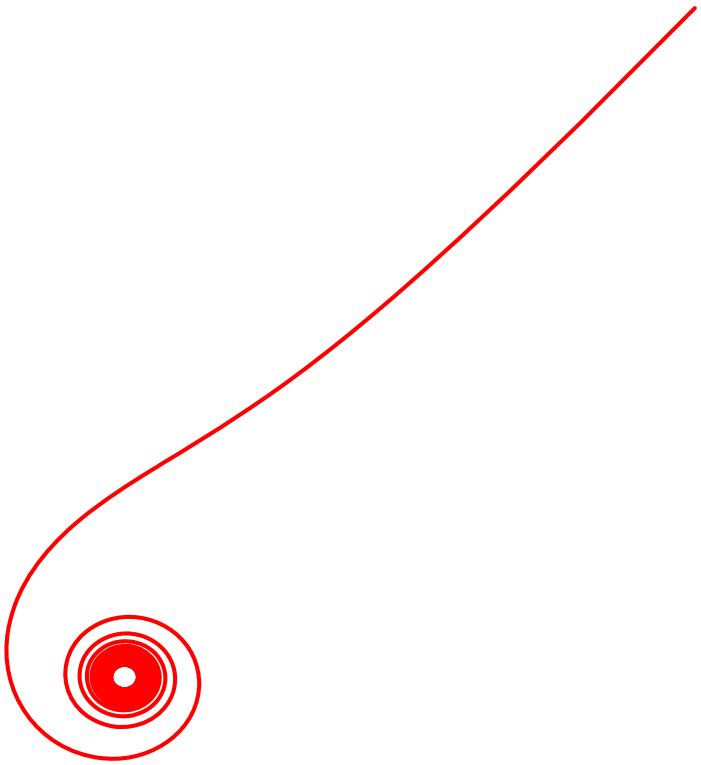
Ernst Friedrich Maria Jochim

Satellitenbewegung



Band II: Bewegung in Raum und Zeit

Herausgeber: Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt
Bibliotheks- und
Informationswesen
D-51170 Köln
Porz-Wahnheide
Linder Höhe
D-51147 Köln

Telephon (022 03) 6 01- 44 44
Telephax (022 03) 6 01- 47 47

Als Manuskript gedruckt.
Abdruck oder sonstige Verwendung
nur nach Absprache mit dem DLR gestattet

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2012-13

© Dr. E. F. M. Jochim (vormals Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

\ documents \ SAB \ SAB-gesamt \SAB-II-gesamt.docx \

Dienstag, 10. April 2018

Titelbild: Dreier-Spirale (aus Abschnitt 5.5.4, insbesondere Bild 5-19))

Vorwort zu Band II

Im zweiten Band wird die Untersuchung von Bewegungen zu einer modernen Methode allgemeiner Anpassung beliebiger Bewegungen geführt. Dies schließt die mathematische sowie die sphärisch astronomische Grundlegung und die Behandlung geeigneter Koordinatensysteme ein. Die Liste der verwendeten Symbole und die für Band II relevante Literatur sind in diesen Band der Satellitenbewegung aufgenommen. Für kritische Hilfe beim Korrekturlesen sei wieder *M. Sebastian Tailhades* und *Dr. Thomas Neff* sehr herzlich gedankt. Für die Aufnahme dieses Bandes in die Reihe der DLR Forschungsberichte darf wieder den Herren Prof. *Dr. Alberto Moreira* und Prof. *Dr. Helmuth Süß* (DLR-HR) besonders gedankt werden.

Inhaltsverzeichnis

VORWORT ZU BAND II III

INHALTSVERZEICHNIS V

BEWEGUNGEN IN RAUM UND ZEIT 1

4 BEZUGSSYSTEME ZUR BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGEN 7

4.1 DER MATHEMATISCHE RAUMBEGRIFF 7
4.1.1 Vektorräume 7
4.1.2 n-dimensionale Punkträume 16
4.1.3 Metrische Räume 19
4.2 KOORDINATENDARSTELLUNGEN 20
4.2.1 Basisdarstellungen 20
4.2.2 Kartesische und Polarkoordinaten des Ortsvektors 21
4.2.3 Kartesische und Polarkoordinaten des Geschwindigkeitsvektors 26
4.2.4 Kartesische und Polarkoordinaten des Beschleunigungsvektors 32
4.2.5 Differentielle Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten 36
4.3 SPEZIELLE BEZUGSSYSTEME 37
4.3.1 Geradlinige Systeme 37
4.3.2 Krummlinige Systeme 39
4.3.3 Zusammenhang zwischen geradlinigen und krummlinigen Koordinaten 40
4.3.4 Transformationen zwischen krummlinigen Systemen 41
4.3.5 Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten 41
4.3.6 Tangentialräume 44
4.3.7 Geradlinig bewegte Systeme 44
4.3.8 Inertiale Systeme 45
4.3.9 Feste Systeme 45
4.3.10 Hansen-ideale Systeme 46
4.3.11 Die Variationsgleichungen eines orthonormierten Basissystems 48
4.3.12 Transformationen mit Hilfe der Variationsmatrix 48
4.3.13 Additionstheorem fortlaufender Transformationen 51
4.3.14 Der absolute Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems 52
4.3.15 Einige Charakteristiken von Hansen-idealen Systemen 53
4.3.16 Die Notwendigkeit von Hansen-idealen Systemen 56
4.4 MITBEWEGTE SYSTEME IM DREIDIMENSIONALEN RAUM 64
4.4.1 Das begleitende Dreibein 64
4.4.2 Das mitbewegte Leibniz-System 67
4.4.3 Das bewegungsbezogene Hansen-ideale System 71
4.4.4 Beziehungen zwischen den mitbewegten Systemen 75
4.4.5 Zur geometrischen Deutung des räumlichen Bahnwinkels 76
4.4.6 Ergänzende Betrachtungen zur Einordnung der Hansen-Systeme 77
4.4.7 Der Zusammenhang von Hansen-Systemen und der Methode der Variation der Parameter 80
4.4.8 Die Bewegungsgleichungen in Hansen Koordinaten 82
4.4.9 Die Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung 84
4.4.10 Die Bewegung einer Satellitenbahnebene 86

5 DIE MATHEMATISCHE ANPASSUNG BELIEBIGER BEWEGUNGEN 88

5.1 DIE VARIATIONSGLEICHUNGEN DER ALLGEMEINEN BEWEGUNG 88
5.2 ALLGEMEINE MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGEN 89
5.2.1 Die geradlinige Bewegung 89
5.2.2 Der Zustandsvektor der geradlinigen Bewegung, die erste Konstante 95
5.2.3 Der Flächensatz 96
5.2.4 Die Basisvektoren der geradlinigen Bewegung 97
5.2.5 Anpassung einer Bewegung durch Kurven erster Ordnung 100

5.2.6 Das Abstandsgesetz *108*
5.2.7 Anpassung mit Kurve 1. Ordnung im bewegungsbezogenen Bahnsystem (Hansen System) *109*
5.3 DIE BESCHLEUNIGUNGEN UM EINEN BESTIMMTEN BEWEGUNGSVORGANG ZU ERZWINGEN 111
5.4 ANPASSUNG EINER BEWEGUNG DURCH KURVEN ZWEITER ORDNUNG 113
5.4.1 Bewegung auf einem Kegelschnitt *113*
5.4.2 Anpassung mit Kurve 2. Ordnung im bewegungsbezogenen Bahnsystem *116*
5.4.3 Anpassung einer Kegelschnittbewegung durch eine Kurve 1. Ordnung *118*
5.4.4 Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt *122*
5.5 ANPASSUNG EINER BEWEGUNG DURCH SPIRALARTIGE KURVEN 126
5.5.1 Bewegung auf hyperbolischer Spirale *126*
5.5.2 Verallgemeinerung der Anpassung mit spiralartigen Kurven *128*
5.5.3 Der Anpassungsvorgang mit spiralartigen Kurven *131*
5.5.4 Konstruktion weiterer Spiralen *132*
5.5.5 Systematischer Überblick über einige wichtige Spiralen *134*
5.6 ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER ANPASSUNG BELIEBIGER BEWEGUNGEN 135
5.6.1 Problematik einer Anpassung mit einer Kreisbewegung *135*
5.6.2 Elemente einer Kreisbewegung *140*
5.6.3 Abgrenzung des Begriffes der Anpassung *141*
5.6.4 Die Anpassungsgleichungen *142*
5.7 WEITERFÜHRENDE AUSSAGEN ÜBER DIE METHODE DER VARIATION DER PARAMETER 147
5.7.1 Der Zusammenhang von Hansen-Systemen und der Methode der Variation der Parameter *147*
5.7.2 Überblick über die klassische Methode der Variation der Parameter *149*
5.7.3 Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung *152*
5.8 SCHRITTWEISE INTEGRATION MIT HILFE BELIEBIGER ANPASSUNGEN 158
5.9 BEISPIELE ZUR DEMONSTRATION DES INTEGRATIONSVERFAHRENS 167
5.9.1 Schub in radialer Richtung *167*
5.9.2 Beschleunigung in tangentialen Koordinaten *179*

6 BEWEGUNG IN GERADLINIGEN KOORDINATEN 186

6.1 DIE GRUNDLEGENDEN TRANSFORMATIONSREGELN 186
6.1.1 Transformation der Basissysteme *186*
6.1.2 Transformation geradliniger dreidimensionaler Systeme *187*
6.1.3 Die Transformation orthonormierter Systeme *190*
6.1.4 Transformation des Ortsvektors *192*
6.1.5 Transformation des Geschwindigkeitsvektors *192*
6.1.6 Hansen-ideale Transformationen *194*
6.1.7 Transformation des Beschleunigungsvektors *195*
6.2 GERADLINIGE BEWEGUNGEN 198
6.2.1 Geradlinig bewegte Systeme *198*
6.2.2 Gleichförmig geradlinig bewegte Systeme *199*
6.3 DREHBEWEGUNGEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM 201
6.3.1 Einige Anwendungen der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie *201*
6.3.2 Drehungen von Orthonormalsystemen *204*
6.3.3 Drehungen in Polarkoordinaten *209*
6.3.4 Zur Transformation der Systemeigenbewegungsvektoren *210*
6.3.5 Die Problematik des Zusammenfallens zweier Systeme *215*
6.3.6 Die Addition von Eigenbewegungsvektoren *215*
6.3.7 Die Variation des Knotens bei Hansen-idealen Systemen *216*
6.3.8 Die Variationsparameter des Polarkoordinatensystems *218*
6.3.9 Transformationen mit Rodrigues Parametern und räumliche Variationsgleichungen *219*
6.3.10 Die Rodrigues Parameter in Hansen Systemen *222*
6.3.11 Die Drehachsen *224*
6.3.12 Die Drehbeschleunigungen bei Rotation orthonormaler Systeme *225*
6.3.13 Additionstheorem fortgesetzter Transformationen des Geschwindigkeitsvektors *227*
6.3.14 Schrittweise Integration mit Hilfe von Transformationen des bewegungsbezogenen Hansen-idealen Bahnsystems *228*

7 BEWEGUNG IN KRUMMLINIGEN KOORDINATEN 231

7.1 GRUNDZÜGE DER TENSORALGEBRA 232
5.9.3 Kovariante und kontravariante Basen *232*
5.9.4 Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors *234*

7.1.3 Tensoren erster Stufe ... 235
5.9.5 Tensoren zweiter Stufe ... 239
5.9.6 Tensoren höherer Stufe ... 246
7.1.6 Regeln der Tensoralgebra ... 247
7.1.7 Spezielle Tensoren ... 251
7.2 GRUNDZÜGE DER TENSORANALYSIS ... 262
7.2.1 Krummlinige Koordinaten ... 262
7.2.2 Die Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten ... 270
7.2.3 Die kovariante Ableitung ... 276
7.2.4 Der Riemannsche Tensor ... 284
7.3 FLÄCHENTHEORIE ... 291
7.3.1 Beschreibung einer Fläche ... 292
7.3.2 Flächenvektoren, Flächentensoren ... 292
7.3.3 Die Tangentialebene ... 292
7.3.4 Der Metriktensor auf Flächen ... 293
7.3.5 Das Flächenelement ... 296
7.3.6 Die Fundamentalgrößen der 2. Ordnung der Flächentheorie ... 296
7.3.7 Die Krümmung von Flächenkurven ... 299
7.3.8 Die Hauptkrümmungen ... 300
7.3.9 Die Christoffel Symbole der Flächentheorie ... 303
7.3.10 Die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie ... 305
7.3.11 Die kovariante Ableitung auf der Fläche ... 305
7.3.12 Geodätische Linien ... 308
7.3.13 Parallelverschiebung auf Flächen ... 310
7.4 MÖGLICHE ENTWICKLUNGEN ... 311

8 EINIGE SPEZIELLE KOORDINATENSYSTEME ... 312

8.1 DAS GEOZENTRISCHE FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM ... 312
8.1.2 Koordinatendarstellungen im Äquatorsystem ... 313
8.1.3 Das Äquatorsystem als (inertiales) Fundamentalsystem ... 315
8.1.4 Eigenbewegungen des Äquatorsystems ... 317
8.1.5 Relativ bewegte Äquatorsysteme ... 320
8.2 DAS GEOZENTRISCHE EKLIPTIKSYSTEM ... 323
8.2.1 Koordinatendarstellungen des Ekliptiksystems ... 324
8.2.2 Transformationen ... 326
8.2.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das äquatoriale Fundamentalsystem ... 329
8.2.4 Systembezogene Darstellungen eines Geschwindigkeitsvektors ... 331
8.3 DAS GALAKTISCHE SYSTEM ... 333
8.3.1 Koordinatendarstellungen des galaktischen Systems II ... 333
8.3.2 Transformationen ... 334
8.3.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des galaktischen Systems zum Äquatorsystem ... 336
8.4 DAS GEOZENTRISCHE MERIDIAN - BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM ... 337
8.4.1 Koordinatendarstellungen im geozentrischen Meridian - bezogenen Äquatorsystem ... 337
8.4.2 Transformationen ... 339
8.4.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des geozentrischen Meridian - bezogenen Äquatorsystems 341
8.5 DAS GEOZENTRISCHE ERDFESTE SYSTEM (GREENWICH SYSTEM) ... 342
8.5.1 Koordinatendarstellungen im erdfesten System ... 342
8.5.2 Transformationen ... 344
8.5.3 Der Systemeigenbewegungsvektor des erdfesten Systems ... 347
8.6 DAS GEOGRAPHISCHE SYSTEM ... 347
8.6.1 Koordinatendarstellungen im geographischen System ... 348
8.6.2 Der Eigenbewegungsvektor des geographischen Systems ... 352
8.6.3 Der Beschleunigungsvektor im geographischen System ... 353
8.7 DAS TOPOZENTRISCHE FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM ... 354
8.7.1 Koordinatendarstellungen im topozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem ... 354
8.7.2 Der Eigenbewegungsvektor des topozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems ... 356
8.8 DAS TOPOZENTRISCHE MERIDIAN-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM ... 357
8.8.1 Koordinatendarstellungen im topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystem ... 357
8.8.2 Transformationen ... 358
8.8.3 Der Eigenbewegungsvektor des topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystems ... 360
8.9 DAS HORIZONTSYSTEM ... 360

8.9.1 Koordinatendarstellungen im Horizontsystem ... 360
8.9.2 Das Basisyssystem des Horizontsystems in Bezug auf ein Basisellipsoid ... 363
8.9.3 Transformationen mit anderen Systemen ... 365
8.9.4 Der Eigenbewegungsvektor des Horizontsystems ... 370
8.9.5 Einschussbahnelemente einer Satellitenbahn ... 372
8.9.6 Die tägliche Bewegung des Sternhimmels ... 375
8.10 DAS ANTENNENSYSTEM ... 375
8.10.1 Grundformeln des Antennensystems ... 375
8.10.2 Transformationen des Antennensystems ... 379
8.10.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des Antennensystems ... 381
8.11 DAS *LEIBNIZ* SYSTEM ... 382
8.11.1 Die Eigenbewegung des Leibniz-Systems ... 382
8.11.2 Transformationen des Leibniz-Systems ... 384
8.11.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des Leibniz-Systems ... 385
8.11.4 Beispiel zur Anwendung des Leibniz-Systems: Relativbewegung ... 386
8.12 DAS *HANSEN* SYSTEM ... 391
8.12.1 Eigenschaften und Besonderheiten des Hansen Systems ... 391
8.12.2 Transformationen des Hansen Systems ... 393
8.12.3 Der Eigenbewegungsvektor des Hansen-Systems ... 395
8.13 DAS APSIDENSYSTEM ... 397
8.13.1 Eigenschaften des Apsidensystems ... 397
8.13.2 Transformationen des Apsidensystems zu anderen Systemen ... 397
8.13.3 Darstellung der Geschwindigkeit im Apsidensystem für eine Keplerbewegung ... 402
8.13.4 Eigenbewegungsvektoren des Apsidensystems ... 404
8.14 DAS KNOTENSYSTEM ... 406
8.14.1 Eigenschaften des Knotensystems ... 406
8.14.2 Transformationen zu anderen Systemen ... 407
8.14.3 Der Eigenbewegungsvektor des Knotensystems ... 409
8.15 DAS TANGENTEN-BEZOGENE SYSTEM ... 410
8.15.1 Tranformationen des Tangentensytems zu anderen Systemen ... 411
8.15.2 Die Eigenbewegung des Tangenten-orientierten Bahnsystems ... 415
8.16 SATELLITENZENTRIERTE SYSTEME ... 416
8.16.1 Satellitenzentriertes Basissystem ... 416
8.16.2 Die Eigenbewegung des Satelliten-zentrierten Basissystems ... 418
8.16.3 Relative Orientierung zweier Systeme zueinander ... 419
8.16.4 Beziehungen zwischen den Satellitensystemen über Eulerwinkel ... 427
8.16.5 Der Eigenbewegungsvektor eines satellitenzentrierten Systems ... 433
8.17 *LORENTZ*-TRANSFORMATIONEN ... 434
8.17.1 Allgemeine Lorentz-Transformation ohne Drehung ... 436
8.17.2 Allgemeine Lorentz-Transformation mit Drehung ... 438
8.17.3 Inhomogene Lorentz-Transformation ... 439
8.18 *GAUß*SCHE KOORDINATEN ... 439

9 BEWEGUNGEN IN ZEIT ... 440

9.1 DIE ZEIT ... 440
9.1.2 Die Sternzeit ... 444
9.1.3 Überblick Zeitskalen ... 448
9.2 EIGENBEWEGUNG ... 451
9.2.1 Eigenbewegung von Satelliten und heliozentrischen Objekten ... 451
9.2.2 Baryzentrische Eigenbewegung stellarer Objekte ... 451
9.2.3 Geozentrischer Ort stellarer Objekte ... 455
9.3 PRÄZESSION ... 456
9.3.1 Die lunisolare Präzession ... 457
9.3.2 Die Präzession durch die Planeten ... 461
9.3.3 Die allgemeine Präzession ... 462
9.3.4 Exakte Formeln zur Berücksichtigung der Präzession ... 464
9.3.5 Die Erdrotation ... 470
9.4 NUTATION ... 470
9.4.1 Mathematische Beschreibung der Nutation ... 471
9.4.2 Nutation in äquatorialen Koordinaten ... 473
9.4.3 Approximation der Nutation nach Tschebyscheff ... 475

9.4.4 Die scheinbare Sternzeit *477*
9.5 POLBEWEGUNG 478
9.6 PARALLAXE 479
9.6.1 Exakte Formulierung der Parallaxe *480*
9.6.2 Tägliche Parallaxe *481*
9.6.3 Jährliche Parallaxe *484*
9.7 DOPPLEREFFEKT 488
9.7.1 Der relativistische Dopplereffekt *488*
9.7.2 Der Zweiweg-Doppler *492*
9.8 ABERRATION 493
9.8.1 Die tägliche Aberration *494*
9.8.2 Die Lichtzeit bei Erdsatelliten *497*
9.8.3 Die jährliche Aberration *499*
9.8.4 Die Aberrationskonstante der jährlichen Aberration *499*
9.8.5 Der E-Term der jährlichen Aberration *501*
9.9 REFRAKTION 501
9.9.1 Näherungsweise Berechnung der Refraktion *501*
9.9.2 Refraktion bei Beobachtung eines Erdsatelliten *505*
9.9.3 Refraktion bei Auf- oder Untergang eines Satelliten *507*
9.9.4 Refraktion bei Sicht von einem Satelliten durch die Atmosphäre *508*
9.10 ÜBERBLICK DER KORREKTUREN AN DEN BEOBACHTUNGSÖRTERN 513
9.10.1 Die exakte Ephemeride eines Erdsatelliten *513*
9.10.2 Korrekturen der Beobachtungen *515*
9.10.3 Korrekturen berechneter Beobachtungsörter *516*

SCHRIFTTUM ZU BAND II **517**

LISTE DER VERWENDETEN SYMBOLE **523**

ABBILDUNGSVERZEICHNIS **547**

TABELLENVERZEICHNIS **552**

INDEX **553**

INHALT VON BAND I

DER BEWEGUNGSBEGRIFF

BEGRIFFLICHE DIMENSIONIERUNG DER BEWEGUNG

1. Die Antike Bewegungslehre

2. Die Klassische Bewegungslehre

3. Ansätze einer Nachklassischen Bewegungslehre

Schrifttum zu Band I

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND III

NATÜRLICHE UND GESTEUERTE BEWEGUNG

DIE BEWEGUNG DER NATÜRLICHEN UND KÜNSTLICHEN HIMMELSKÖRPER

10. Die spezielle Keplerbewegung

11. Bewegungsparameter

12. Natürliche und gesteuerte Bewegungsänderungen

13. *Kepler*bewegung in uniformisierter Darstellung

14. Parameterräume

15. Partialausdrücke

16. Bahnbestimmung und Bahnverbesserung

17. Bewegungseinflüsse

18. Anmerkungen zur Integration der Bewegungsgleichungen

19. Überblick Analytische Störungstheorie periodischer Bewegungen

20. Ergebnisse analytischer Satellitenbahntheorien

Schrifttum zu Band III

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND IV

BEWEGUNGSANALYSE

ZENTRUM BEZOGENE BEWEGUNGEN

21. Keplerbewegung auf der Grundlage von Hansen Systemen

22. Anomalistische Bewegung

23. Drakonitische Bewegung

24. Tropische Bewegung

25. Siderische Bewegung

26. Meridianbezogene Bewegung

27. Topozentrische Bewegung

SYNODISCHE BEWEGUNGEN

28. Sonnenbezogene synodische Bewegung

29. Synodische Bewegung in Bezug auf Erdmond und Mondorbiter

30. Synodische Bewegung eines Satelliten in Bezug auf einen Planeten oder ein anderes interplanetares Objekt

31. Synodische Bewegung eines Erdsatelliten in Bezug auf einen anderen Satelliten

Schrifttum zu Band IV

Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND V

DIE VERKNÜPFUNG VON BEWEGUNG UND BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

BEWEGUNG IN SPHÄRISCHER BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

32. Sphärische Beobachtungsgeometrie
33. Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises
34. Überdeckung eines sphärischen Breitenkreises
35. Lokale Überdeckung
36 Sichtbarkeitsuntersuchungen

BEWEGUNG ÜBER REFERENZELLIPSOID

37. Allgemeine Beziehungen auf einem Rotationsellipsoid
38. Satellitenbewegung über Rotationsellipsoid

ANHANG

A. Grundformeln der sphärischen Trigonometrie
B. Näherungsausdrücke
C. Tschebyscheff-Approximationen
D. Integraltafel
E. Astronomische Konstante
F. Das julianische Datum
G. Tabellen reproduzierbarer Bahnen
H. Hohmann Übergänge im Interplanetaren Raum
I. Parameter der Attraktionssphären und kollinearen Librationspunkte im Sonnensystem
J. Sichtbarkeitsgrenzen geostationärer Satelliten für einige Bodenstationen
K. Parameter der Luftdichte nach MSIS
Schrifttum zu Band V
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

Bewegungen in Raum und Zeit

Im Rahmen der klassischen Bewegungslehre ist es üblich das Bewegungsverhalten eines bewegten Körpers, seine *Kinematik*, zu jedem Zeitpunkt durch seinen Zustandsvektor zu beschreiben. Ob dies die einzige Möglichkeit ist, einen Bewegungszustand zu beschreiben, wird damit nicht ausgesagt. Der Zustandsvektor kann mathematisch als Orts- und Geschwindigkeitsvektor dargestellt werden. Änderungen des Bewegungszustandes werden durch Beschleunigungen auf den bewegten Körper verursacht. Beschleunigungen werden im Rahmen der *Newtonschen* Mechanik dem Einfluss einwirkender Kräfte zugeschrieben. Die Beschleunigungsgleichung, die üblicherweise als *Bewegungsgleichung* bezeichnet wird, lässt sich als eine vektorielle Differentialgleichung allgemeiner als ein System von Differentialgleichungen darstellen, in der alle Einflüsse auf eine Bewegung zusammengefasst werden.

Im Zusammenhang mit der Untersuchung der Bewegung im Raum werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften der mathematischen Beschreibung von Bewegungen und vor allem das so wichtige Transformationsverhalten in völliger Allgemeinheit ohne Rücksicht auf irgendeine Dynamik untersucht. Insbesondere werden die von *P. A. Hansen* so bezeichneten *idealen Systeme* in allgemeinerem Zusammenhang behandelt um ihre Bedeutung aber auch Grenzen allgemein kennenzulernen. Kernpunkt ist die Aufstellung der Variationsgleichungen der allgemeinen Bewegung im Raum sowie der Versuch einer Anpassung beliebiger Bewegungen durch beliebige Bahnkurven. Einige in der Satellitenbahnmechanik häufig gebrauchte Systeme und ihre Beziehungen zueinander werden in Kapitel 8 zusammengestellt. Die Zeit wird in diesem Kapitel als absolut aufgefasst.

Im Rahmen der Bewegung in der Zeit (Kapitel 9) werden die zeitabhängigen Einflüsse auf Beobachtungen und Systeme, wie sie Gegenstand der sphärischen Astronomie sind, behandelt. Außerdem werden hier die Einflüsse einer Variabilität der Zeit auf die Beschreibung von Bewegungen untersucht.

Bewegungen im Raum

Bewegungen geschehen in physikalischen Räumen. Zur mathematischen Beschreibung dieser Bewegungen werden Koordinatensysteme benötigt. Diese Koordinatensysteme sind mathematische Projektionen in physikalische Räume, also keine Eigenschaften der physikalischen Räume und der physikalischen Vorgänge in diesen Räumen. Die physikalischen Eigenschaften sind systemimmanent, d.h. unabhängig vom Koordinatensystem, in dem sie beschrieben werden[1]: Physikalische Gesetzmäßigkeiten müssen sich somit Koordinatensystem-invariant darstellen lassen. Dies wird durch die vektorielle bzw. allgemeiner die tensorielle Schreibweise der physikalischen Gesetze geleistet. Eine geeignete Auswahl von Koordinatensystemen kann die mathematische Erfassung einer Bewegung erleichtern, in vielen Fällen gar erst ermöglichen. Besondere Sorgfalt muss deshalb darauf verwendet werden, dass durch die Umrechnung auf andere Koordinaten, durch Transformationen von einem in ein anderes Koordi-

[1] Den Begriff eines „physikalischen Systems“ wollen wir in diesem Bericht vermeiden. Der oft unkontrollierte Gebrauch des Begriffs „System“ vor allem in der technischen Literatur verwirrt mehr als dass er klärt. So wird der Begriff der „inneren Eigenschaften eines Systems“ (FALK [1966], p.41 ff.) in unserem Zusammenhang äquivalent den „physikalischen Eigenschaften physikalischer Körper“ aufgefasst.

natensystem keine physikalischen Eigenschaften verwischt werden oder verloren gehen. Koordinatensysteme, die an physikalische Körper und mit physikalischen Bewegungen gekoppelt werden, können sich in Raum und Zeit ändern. Die Beschreibung eines Koordinatensystems ist also ohne räumlichen **und** zeitlichen Bezug wertlos. Diesen Bezug sorgfältig herzustellen ist eine der wichtigsten und grundlegendsten Aufgaben der sphärischen Astronomie.

Unter *Bewegung im Raum* wollen wir in diesem Kapitel folgendes verstehen: Die Bewegung eines Körpers geschieht durch Ortsveränderung also relativ zu einem Bezugssystem. Wir wissen, dass ein Körper nicht gleichzeitig an zwei Orten sein kann, sondern nur nacheinander. Bewegung geschieht also in der Zeit. Allerdings ist Zeit ohne Bewegung, konkret ohne Bewegung in der materiellen Welt, sinnlos[1]. Die Zeit ist, wie *Platon* formulierte, an die Bewegung gekoppelt und läuft daher nicht notwendig konstant ab. Eine Zeit, die konstant abläuft, wird als *absolute Zeit*: bezeichnet. Wir wissen seit *Einstein*, dass es keine absolute Zeit gibt. Es kann auch keine absolute Bewegung geben. Jede Bewegung ist relativ. Wird eine Bewegung so betrachtet, dass auch die Zeit als variabel zugelassen wird, wird die Bewegung als *relativistisch* bezeichnet. In diesem Kapitel wollen wir die Zeit jedoch als nichtvariabel, somit absolut annehmen. Mit dieser Betrachtungsweise lassen sich viele Bewegungsvorgänge ausreichend genau beschreiben, dann nämlich, wenn die betrachteten Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden können. Unter *Bewegung im Raum* wollen wir also *Bewegung in absoluter Zeit* verstehen. Die Bewegung in nicht-absoluter Zeit wird im Rahmen der Abschnitte 8.17 und 9.8 diskutiert.

Die detaillierte Besprechung von Koordinatensystemen in diesem Abschnitt und die formelmäßige Herleitung ihrer allgemeinen Beziehungen zueinander soll in den später zu besprechenden mathematischen Beschreibungen der physikalischen (also realen) Bewegungen eine klare Trennung der Anteile erleichtern, die einerseits vom gewählten *mathematischen Koordinatensystem* andererseits von der *physikalischen Dynamik* herrührt, die Bewegung eines Systems einem anderen gegenüber steuert und wie sie ab Kapitel 10 (Band III) beschrieben wird.

Es ist wichtig zwischen *festen* und *bewegten* Systemen zu unterscheiden. Die Beschreibung einer Bewegung in einem selbst bewegten System ist wesentlich aufwendiger als in einem festen (speziell: inertialen) System, weshalb gewöhnlich sofern nur möglich oder sinnvoll ein als fest angenommenes System zugrunde gelegt wird. Ferner lässt sich die Bewegung eines bewegten Systems nur in Bezug auf ein festes System feststellen und beschreiben, so dass ein als fest angenommenes System primär stets Basis zur Beschreibung einer Bewegung sein muss. Freilich sind bewegte Systeme unentbehrlich. Ein Beobachter auf der Erde etwa rotiert mit dieser um die Drehachse der Erde, die Erde um die Sonne, ein Satellit, der sich um seinen Zentralkörper bewegt, führt ein (oder mehrere) Koordinatensystem mit sich, usw..

Aus dem Transformationsverhalten eines Systems in ein anderes treten Effekte auf, die sich bei bekannter Dynamik eines bewegten Systems physikalisch fassen lassen. Nun ist physikalisch gesehen ein fester Raum, in dem das Trägheitsgesetz gilt, ein *inertiales* System. Für inertiale Systeme, die gegeneinander gleichmäßig und drehungsfrei bewegt werden, gilt das *spezielle Relativitätsprinzip*, wonach die Naturgesetze für alle Inertialsysteme übereinstimmen ("Translationsrelativität")[2]. Dies wirft bereits ein Schlaglicht auf die Bedeutung der mathematischen Formulierung von Koordinatensystemen und wechselseitigen Transformationen in diesem Kapitel.

---

[1] vgl. die sehr hübschen Bemerkungen von *Stephen W. Hawkings* in *Three hundred years of gravitation*, Cambridge [1987], p.651

[2] siehe EINSTEIN [1956], p. 15

Zur Darstellung der Koordinaten eines bewegten Punktes werden die in der sphärischen Astronomie und insbesondere in der Bahnmechanik ständig verwendeten kartesischen und Polarkoordinaten und ihre Beziehungen zueinander in Kapitel 4 ab Seite 7 detailliert und sodann in einen allgemeineren Rahmen der Darstellungen von Koordinatensystemen eingeordnet.

Die in der sphärischen Astronomie üblicherweise verwendeten Koordinatensysteme werden in Kapitel 8 vorgestellt und ihre Beziehungen untereinander hergeleitet. Ihre Eigenschaften werden im Hinblick auf eine Satellitenbahnanalyse vertieft dargestellt. Es ist üblich zu jedem Zeitpunkt den Bewegungszustand eines Himmelskörpers durch Orts- und Geschwindigkeitsvektor zu beschreiben. Daher ist nicht nur das Transformationsverhalten des Ortsvektors sondern vor allem auch des Geschwindigkeitsvektors von Bedeutung, wie es im Fall einer Rotation in vollständiger Allgemeinheit in Kapitel 6 dargestellt werden kann. In den klassischen Werken der sphärischen Astronomie (siehe etwa BRÜNNOW [1881], NEWCOMB [1904], SMART [1962], DANJON [1980], WOOLARD AND CLEMENCE [1966], auch in dem heutigen Standardwerk von GREEN [1985]) wird die Transformation abgeleiteter Koordinaten nur im Zusammenhang der sogenannten "differentiellen Koordinaten" untersucht, welche die Auswirkungen kleiner Veränderungen in der Position von Sternörtern auf Transformationen zu untersuchen gestatten. Im Prinzip genügt es der Positionsastronomie Geschwindigkeiten aus der Differenz zweier bekannter Positionen zu berechnen, was für die Satellitenbahnmechanik, die den Geschwindigkeitsvektor explizit benötigt, wegen der großen Relativgeschwindigkeiten nicht ausreicht. In Arbeiten über Satellitenbahnen ist der Problemkreis der Transformation des Geschwindigkeitsvektors angeschnitten[1].

Bewegt sich ein zweites System gegenüber einem ersten, so treten im transformierten Geschwindigkeitsvektor zusätzliche Komponenten auf, die von der relativen Bewegung des zweiten Systems stammen. Jede Drehung im dreidimensionalen Raum kann nach *L. Euler* in eine wohldefinierte Abfolge von Einzeldrehungen um drei verschiedene Drehachsen zerlegt werden. Die zusätzlichen Komponenten stammen von den Drehgeschwindigkeiten des Systems um die drei Drehachsen. Das bedeutet nun nicht, wie in der technischen Literatur gelegentlich behauptet wird, dass das erste System, demgegenüber das zweite rotiert, ein "inertiales" sei. Es lässt sich ja umgekehrt formal mathematisch auch das zweite System als fest auffassen, demgegenüber das erste rotiert und die Transformation insbesondere des Geschwindigkeitsvektors wird analog ablaufen. Das in diesem Sinn als "fest" bezeichnete System kann sich freilich gegenüber einem dritten bewegen, dieses gegenüber einem vierten usw.. Die Problematik ein wirklich *inertiales System* zu finden ist wohlbekannt. In der sphärischen Astronomie wird das baryzentrische System des Sonnensystems als inertial aufgefasst, da seine Bewegungen gegenüber dem Zentrum der Milchstraße und dessen Bewegungen gegenüber anderen Galaxien bei der Sternbeobachtung mit den derzeit erhältlichen Beobachtungsgenauigkeiten vernachlässigt werden können. Die Beschreibung der Bewegung eines Satelliten wird nur dann vollständig sein, wenn auch das Bezugssystem, in dem die Bewegung dargestellt wird, vollständig beschrieben wird.

In der Himmelsmechanik spielt die Einführung eines Systems, das gegenüber einem ersten um nur eine Achse rotiert, eine berühmte Rolle. Es führte im eingeschränkten Dreikörperproblem zu einem zusätzlichen Integral, das von *C. G. Jacobi* (1804-1851) gefunden wurde. Berechnet man den Beschleunigungsvektor in einem um eine Achse rotierenden Koordinatensystem, so treten für den mitrotierenden Beobachter die bekannten, unglücklicherweise so genannten, "Scheinbeschleunigungen" auf, etwa die *Zentrifugalbeschleunigung* und die *Coriolisbeschleunigung*. Entsprechend gibt es auch im Fall der allgemeinen Drehung um drei Achsen derartige „Schein" - Beschleunigungen.

[1] vgl. ESCOBAL [1965], p. 126 ff. und [1968], p. 245 ff..

Das Rechnen mit trigonometrischen Größen hat sich im Laufe der Zeit wegen der unterschiedlichen Rechenhilfen grundsätzlich gewandelt. *C. F. Gauß* stand seinerzeit die Logarithmentafel als wirkungsvollstes Hilfsmittel zur Verfügung, mit deren Hilfe Winkelgrößen und ihre trigonometrischen Funktionen ad libitum ineinander umgeformt werden konnten. *Gauß* brachte es zu einer unnachahmlichen Meisterschaft, um mit Hilfe von geeigneten Winkeln, Zwischenwinkeln, halben Winkeln und raffinierten Zwischenbeziehungen Probleme numerisch in den Griff zu bekommen, die vordem als unlösbar angesehen wurden. Ein Musterbeispiel ist seine Methode der Bahnbestimmung[1]. Beim heutigen automatischen Rechnen werden Winkel und ihre trigonometrischen Funktionen durch aufwendige Reihenentwicklungen bzw. Tschebyscheff-Polynome ineinander umgerechnet, wobei diese Vorgänge im Rechner jeweils neu durchgeführt werden müssen. Dies belastet den automatischen Rechenprozess in unnötiger Weise durch Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf, durch oft aufwendige Abfragen nach der Eindeutigkeit der berechneten Winkel und birgt zudem die Gefahr sich addierender Rundungsfehler, was den Rechenvorgang sogar unsicher machen kann. Man wird heutzutage daher bemüht sein das Umrechnen von Winkeln in trigonometrische Funktionen und umgekehrt weitgehendst zu vermeiden und möglichst rein trigonometrische Formelsysteme aufzubauen, die sowohl rasche wie eindeutige wie zuverlässige numerische Rechnungen erlauben. In diesem Sinne möchten die in diesem Bericht entwickelten Formelsysteme verstanden sein.

Fragen der Eindeutigkeit sowie die Gefahr von Singularitäten erschweren auch das automatische Rechnen mit der Tangens- und der Kotangensfunktion, in gleicher Weise mit den früher gelegentlich verwendeten Secans- und Cosecansfunktionen. So wird die trigonometrische Behandlung in diesem Bericht weitgehendst auf den Sinus- und die Cosinussätze zurückgeführt und lediglich durch die Sinus-Cosinussätze im Rahmen von Kapitel 6 ergänzt. Die früher noch vielfach verwendeten Tangens- und Cotangenssätze spielen heute ebenso wenig eine Rolle wie etwa die Formeln von *Borda*, *Delambre*, *Neper*, *L'Huillier* und anderen[2] außer in Spezialfällen, in denen die Regularität dieser Beziehungen außer Frage steht.

Diese Bemerkungen sollten nur tendenziell verstanden werden. Es ist nicht sinnvoll, starr ganz auf die explizite Verwendung von Winkeln oder der Tangensfunktion etwa zu verzichten. Auch gibt es nach wie vor Aufgaben, die durch Anwendung raffinierter trigonometrischer Formelsätze unnachahmlich elegant gelöst werden können. Freilich geht der Trend zur Herleitung der grundlegenden Formeln der sphärischen Trigonometrie seit der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts in die Richtung, sie ausschließlich mit Hilfe von Formeln aus der analytischen Geometrie herzuleiten. Viele spezielle Probleme der sphärischen Trigonometrie und insbesondere auch der sphärischen Astronomie können durch direkten Rückgriff auf die analytische Geometrie einfacher gelöst werden als mit Anwendung des rasch anwachsenden und unübersichtlich werdenden Formelapparates der klassischen sphärischen Trigonometrie[3].

Die Darstellungen der sphärischen Trigonometrie in diesem und dem folgenden Kapitel werden ergänzt durch einen eigenen Abschnitt über die Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises (Kapitel 33 in Band V) und allgemein geometrischen Eigenschaften auf dem Rotationsellipsoid (Kapitel 37 in Band V). Die Formelsysteme des halben Winkels, wie sie etwa zur Darstellung von Rotationen mit Hilfe von Quaternionen speziell *Euler-Rodriguez*-Parametern nützlich sein können[4], werden angedeutet[1]. Da sie im Gegensatz zu den drei *Euler* Winkeln

---

[1] GAUß [1857/1963]

[2] Diese Formeln werden ausführlich bei DANJON [1980], pp. 20-23 beschrieben

[3] siehe etwa LENSE [1940]

[4] RODRIGUEZ, O. [1840]

eine singularitätenfreie Transformation erlauben, werden sie in manchen Bahntheorien vorgezogen[2].

Wird die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, also die *Signalgeschwindigkeit*, mit der ein Signal im Weltraum übermittelt wird, als universale Konstante akzeptiert, wie in der speziellen Relativitätstheorie gefordert wird, muss auch die Konstanz der Zeit aufgegeben werden. Die Zeit kann dann als eigene Koordinate aufgefasst werden. Auch im so entstandenen vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum (dem pseudoeuklidischen *Minkowski-Raum*) werden Koordinatentransformationen betrachtet, die jedoch nur zwischen inertialen Systemen untersucht werden. Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie müssen wegen der heute erreichbaren hohen Meßgenauigkeit bei der Beobachtung stellarer Objekte zur Korrektur der Aberration und Berücksichtigung der Lichtablenkung in einem Gravitationsfeld eingebracht werden. Sie sind auch für Untersuchungen der Satellitenbewegung bedeutsam, z.B. wegen des veränderlichen Uhrgangs, der zur hochgenauen Ortsbestimmung in Rechnung gestellt werden muss. Umgekehrt gibt es das Ziel, aus der Beobachtung von Satellitenbewegungen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie nachzuweisen, z.B. den *Thirring-Lense Effekt* mit Hilfe des GP-B Satelliten (Stanford University nach Vorschlag von *Leonhard Schiff*, 1960).

[1] hierzu sei etwa auf FIRNEIS und FIRNEIS [1986] hingewiesen, Überblick in Abschnitt 6.3.9 auf Seite 219

[2] Siehe etwa in MUSEN, P. [1958], MUSEN, P. [1959], DEPRIT, A. [1975], auch in: BRUMBERG, V. A. [1995], pp. 69-74

4 Bezugssysteme zur Beschreibung von Bewegungen

Um physikalische Bewegungen mathematisch beschreiben zu können, muss ein geeigneter Raum mathematisch definiert werden, in dem diese Bewegung dargestellt werden soll. In der historischen Entwicklung bietet sich dazu der euklidische Raum an. Allgemeiner ist grundlegend der Begriff des Vektorraumes. Erst nach seiner Definition können Punkträume eingeführt werden, in denen die physikalischen Bewegungen beschrieben werden sollen.

Eine Bewegung wird mathematisch als Transformation von einem Punkt in einem Punktraum zu einem anderen Punkt dargestellt. Innerhalb eines Punktraumes sind unterschiedliche Darstellungen in verschiedenem Bezug d. h. in verschiedenen mathematischen Systemen möglich, die eine unterschiedliche mathematische Behandlung einer Bewegung erlauben. Die Untersuchung der Transformationen in der Darstellung eines Bewegungsvorganges zwischen den verschiedenen Systemen ist eine zentrale Aufgabe in der mathematischen Behandlung eines Bewegungsvorganges. Manche Bewegungsvorgänge können nur oder zumindest adäquat mathematisch behandelt werden, wenn sie durch geeignete Transformationen in einem anderen als dem ursprünglichen System betrachtet werden.

Von Bedeutung sind die mathematischen Eigenschaften von Bewegungen, die von einer solchen Transformation unabhängig sind. Diese Eigenschaften werden im Rahmen der Vektor - und allgemeiner der Tensorrechnung untersucht.

4.1 Der mathematische Raumbegriff

Aus Referenzgründen werden im Folgenden einige grundlegende Begriffe über Vektorräume zusammengetragen, wobei für die axiomatische Begründung auf die Literatur verwiesen sei. Im Rahmen einer Untersuchung der Satellitenbewegung wollen wir sie als gegeben voraussetzen[1].

4.1.1 Vektorräume

Im Rahmen der Satellitenbewegung werden ausschließlich Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen betrachtet.

4.1.1.1 Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen

Eine Menge $\mathbb{V}$ wird genau dann als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen bezeichnet, wenn es zu je zwei Elementen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ eine Verknüpfung $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ gibt, die kommutativ und assoziativ ist und wenn es ein Nullelement und ein komplementäres Element gibt, wenn also mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}$ die Beziehungen

[1] Vgl. etwa: LICHNEROWICZ [1966], pp. 7–31, LENZ [1967], FISCHER LEXIKON MATHEMATIK [1964], PESCHL [1961], MESCHKOWSKI [1965], u. a.

$$\begin{aligned}
&(Ia) && \mathbf{a}+\mathbf{b} &&= \mathbf{b}+\mathbf{a} \\
&(Ib) && (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &&= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} \\
&(Ic) && \mathbf{a}+\mathbf{0} &&= \mathbf{a} \\
&(Id) && \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &&= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

bestehen, und wenn es zu einem Element $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ eine Verknüpfung mit einem Skalar, in diesem Fall einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$, gibt: $x\,\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, die assoziativ und distributiv ist, wenn also für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(IIa) && 1 \cdot \mathbf{a} &&= \mathbf{a} \\
&(IIb) && x(y\,\mathbf{a}) &&= (xy)\,\mathbf{a} = y(x\,\mathbf{a}) \\
&(IIc) && (x+y)\,\mathbf{a} &&= x\,\mathbf{a}+y\,\mathbf{a} \\
&(IId) && x\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &&= x\,\mathbf{a}+x\,\mathbf{b} \quad .
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Elemente $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ werden dann *Vektoren* genannt. Die Verknüpfungen $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ und $x\,\mathbf{a}$ werden als *affine Operationen* bezeichnet.

Diese Vektorräume haben folgende Eigenschaften:

(1) Zu je zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ gibt es genau einen Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{V}$, so dass

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \tag{4.3}$$

gilt. $\mathbf{c}$ wird der Differenzenvektor genannt.

(2) Zu je zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x-y)\,\mathbf{a} = x\,\mathbf{a}-y\,\mathbf{a} \quad . \tag{4.4}$$

(3) Zu je zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ und der reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = x\,\mathbf{a}-x\,\mathbf{b} \quad . \tag{4.5}$$

(4) Aus der Relation

$$x\,\mathbf{a} = 0 \tag{4.6}$$

folgt, dass entweder $x = 0$ oder $\mathbf{a}$ der Nullvektor ist.

(5) Mit Vektoren $\mathbf{p}_i \in \mathbb{V}$ und reellen Zahlen $x^i \in \mathbb{R}$ (hier ist *i* ein Index, kein Exponent) ist auch der durch eine Linearkombination gebildete Vektor

$$\mathbf{r} = \sum x^i\,\mathbf{p}_i \quad \in \mathbb{V} \tag{4.7}$$

ein Element des Vektorraumes $\mathbb{V}$.

(6) Die Vektoren $\mathbf{p}_i \in \mathbb{V}$ werden genau dann als linear unabhängig bezeichnet, wenn in der Linearkombination

$$\sum x^i\,\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

Alle $x^i \in \mathbb{R}$ den Wert 0 haben.

Anmerkung: Eine etwas allgemeinere Definition eines Vektorraumes unterscheidet Rechts- und Linksvektorräume, je nachdem ob die Multiplikation eines Vektors $\mathbf{a}$ mit einem Skalar x

von „links“ $x\,\mathbf{a}$ oder von „rechts“ $\mathbf{a}\,x$ erlaubt ist. Wir benötigen diese Unterscheidung im Rahmen der Satellitenbewegung nicht. Es soll somit gelten

$$x\,\mathbf{a} \;=\; \mathbf{a}\,x \quad .\blacktriangleleft \tag{4.9}$$

4.1.1.2 Die Summenkonvention

Um die späteren Aussagen übersichtlicher gestalten zu können, führen wir die *Konvention*[1] ein, dass eine Größe

$$x_i \;, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n \;, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

stets durch x_i ohne Angabe der Dimension ersetzt wird, wobei stets $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ (n eine natürliche Zahl) angenommen wird, im Fall der Satellitenbewegung gewöhnlich $n = 3$. Weiter benutzen wir die *Einstein'sche Summenkonvention*

$$x^i\, y_i \quad :=\quad \sum_{i=1}^{n} x^i\, y_i \;, \quad x_i \,, y_i \in \mathbb{R} \quad , \tag{4.11}$$

wonach über einen Ausdruck mit hoch- und tiefgestellten Indizes über den jeweils gleichlautenden Index zu summieren ist. Man muss aber stets darauf achten, den hochgestellten Index nicht mit einer Potenz zu verwechseln.

Die folgenden „*Regeln*“ *über das Rechnen mit Tensorgleichungen* (um Spezialfälle von Tensorgleichungen handelt es sich bei diesen Ausdrücken) können zur Kontrolle benutzt werden[2].

1. *Wenn ein Index **einmal** in einem Glied einer Tensorgleichung erscheint, muss er in **jedem** Glied der Gleichung und in **derselben** Position erscheinen.*
2. *Wenn ein Index **zweimal** in einem Glied einer Tensorgleichung erscheint, handelt es sich um einen Summationsindex, der symmetrisch in einer unteren und oberen Position auftreten muss.*
3. *Wenn ein Index **dreimal** oder öfter in einem Glied einer Tensorgleichung erscheint, ist die Indizierung falsch.*

Eine Vertiefung des Tensorbegriffs erfolgt im Rahmen der Tensoralgebra in Abschnitt 7.1.

4.1.1.3 Endliche Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen

Ein Vektorraum $\mathbb{V}_n$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen mit der Dimension $n \in \mathbb{N}$, wenn n die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in diesem Vektorraum ist. Dann gibt es zu jedem Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{V}_n$ und jedem n-tupel linear unabhängiger Vektoren $\mathbf{p}_i \in \mathbb{V}_n$ genau einen Satz von Zahlen $x^i \in \mathbb{R}$, so dass die eindeutige Beziehung (geschrieben mit Hilfe der Summenkonvention)

$$\mathbf{r} \;=\; x^i\, \mathbf{p}_i \tag{4.12}$$

---

[1] nach dem bekannten Vorschlag *A. Einsteins*

[2] siehe etwa GREEN [1985], p. 494

besteht. Die $\mathbf{p}_i$ werden genau dann als eine Basis des endlich-dimensionalen Vektorraumes, die Zahlen x^i als die Koordinaten (= Komponenten) des Ortsvektors $\mathbf{r}$ bezüglich der Basis $\mathbf{p}_i$ bezeichnet.

Eigenschaften endlicher Vektorräume:

(1) In einem endlich-dimensionalen Vektorraum kann jedes linear unabhängige System der Ordnung $r < n$ durch $n-r$ weitere Vektoren zu einer Basis dieses Vektorraumes ergänzt werden.

(2) Jeder endlich-dimensionale Vektorraum hat unendlich viele Basen.

(3) Transformationsformeln der Basen:

Es seien $\mathbf{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ und $\mathbf{q}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ zwei Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes. Wegen der linearen Unabhängigkeit der beiden Basen gibt es reelle Zahlen a_{ij} bzw. b_{ji}, welche eine umkehrbar eindeutige Transformation zwischen den beiden Basen erlauben:

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\ i}\, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = b_i^{\ j}\, \mathbf{q}_j \quad . \tag{4.13}$$

(4) Transformationsformeln der Koordinaten eines Vektors bezüglich verschiedener Basen:

Ein Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{V}_n$ sei in den beiden Basen $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{q}_j$ durch

$$\mathbf{r} = x^i\, \mathbf{p}_i = y^j\, \mathbf{q}_j \tag{4.14}$$

dargestellt. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Transformationsformeln der Koeffizienten x^i und y^j

$$x^i = a_j^{\ i}\, y^j \quad , \quad y^j = b_i^{\ j}\, x^i \quad . \tag{4.15}$$

Eine weitere Aussage über die Beziehungen der Transformationsmatrizen $(a^i{}_j)$ und $(b_i{}^j)$ kann im Rahmen des allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorraumes nicht gemacht werden.

(5) Sei $\mathbf{r} \in \mathbb{V}_n$ ein Vektor und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so sind mit $x\,\mathbf{r} \in \mathbb{V}_n$ alle Vektoren längs der Geraden

$$\mathbf{g} = x\,\mathbf{r} \tag{4.16}$$

Elemente dieses Vektorraumes. Dies gilt insbesondere für die Zwischenwerte $x \in [0,1]$: „Der ganze Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{V}_n$ liegt im Vektorraum $\mathbb{V}_n$“. Nach Formel (4.5) auf Seite 8 gilt diese Aussage für alle beliebigen Vektoren eines Vektorraumes.

4.1.1.4 Der euklidische Vektorraum

Der endlich-dimensionale euklidische Vektorraum $\mathbb{V}_{En}$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen mit der Dimension $n \in \mathbb{N}$, in dem neben den affinen Operationen Addition zweier Vektoren mit den Regeln (4.1) auf Seite 8 und Multiplikation mit einem Skalar mit den Regeln (4.2) eine weitere Verknüpfung, genannt das *skalare Pro-*

dukt, mit folgenden Regeln besteht. Wenn $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{V}_{En}$ und $x \in \mathbb{R}$, seien für das Skalarprodukt in der Schreibweise $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ die Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
&(IIIa) && \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &&= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \\
&(IIIb) && (x\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} &&= \mathbf{a}\cdot(x\mathbf{b}) = x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\
&(IIIc) && \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\
&(IIId) && \textit{Wenn für alle } \mathbf{a}\in\mathbb{V}_{En} \textit{ gilt } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\,,\ \textit{ist } \mathbf{b}=0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Das Skalarprodukt ist also kommutativ, assoziativ bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar und assoziativ bezüglich der Vektoraddition. Das Skalarprodukt ist somit linear bezüglich beider Vektoren des Produktes, also eine Bilinearform.

Eigenschaften euklidischer Vektorräume:

(1) Der euklidische Vektorraum $\mathbb{V}_{En}$ habe nach Formel (4.8) auf Seite 8 die (linear unabhängige) Basis $\mathbf{p}_i$. Für zwei Vektoren $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}_{En}$ gibt es also Zahlen $x^i, y^j \in \mathbb{R}$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{x} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{y} = y^j\,\mathbf{p}_j \tag{4.18}$$

gilt. Das Skalarprodukt zweier Basisvektoren werde mit

$$g_{ij} := \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j \qquad (i,\ j=1,2,3,\cdots,n) \tag{4.19}$$

bezeichnet, wofür mit den Formeln (4.17) offenbar

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{4.20}$$

gilt. Das Skalarprodukt in einem euklidischen Vektorraum kann somit durch die Bilinearform

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = g_{ij}\,x^i\,y^j \tag{4.21}$$

dargestellt werden.

Wenn für alle $\mathbf{a}$ das Skalarprodukt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, muss nach der vierten der Regeln (4.17) $\mathbf{b}=0$ sein. Dann ist $y^j=0$. In $g_{ij}\,y^j=0$ hat die Matrix (g_{ij}) den Rang *n*, es ist also $\det(g_{ij})\neq 0$. Eine Bilinearform wird nicht ausgeartet genannt, wenn ihre Determinante nicht verschwindet. Es gilt somit:

▶ *Das Skalarprodukt des euklidischen Raumes ist eine nicht ausgeartete Bilinearform.*

(2) In Verallgemeinerung der Eigenschaften des dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes werden zwei Vektoren $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}_{En}$ des *n*-dimensionalen euklidischen Vektorraumes als *orthogonal* zueinander betrachtet, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet und keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Orthogonalität} \quad . \tag{4.22}$$

(3) Die *Norm* eines Vektors in einem euklidischen Vektorraum ist das Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst:

$$N(\mathbf{x}) \;:=\; \mathbf{x}^2 \;=\; g_{ij}\, x^i x^j \quad . \tag{4.23}$$

Ein Vektor mit Norm 1 heißt normiert bzw. ein Einheitsvektor.

(4) *Eigentlich euklidische Vektorräume* sind euklidische Vektorräume, in denen die Norm eines jeden von Null verschiedenen Vektors positiv ist, d. h. die quadratische Form von $\mathbf{x}$ ist positiv definit:

$$\mathbf{x}^2 \;=\; g_{ij}\, x^i x^j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Vektorraum } \mathbb{E}_n \text{ eigentlich euklidisch} \quad . \tag{4.24}$$

(5) In einem eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraum wird der Winkel zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}_n$ aus

$$\cos\alpha \;=\; \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \;=\; \frac{g_{ij}\, x^i y^j}{\sqrt{g_{ij}\, x^i x^j}\,\sqrt{g_{ij}\, y^i y^j}} \tag{4.25}$$

berechnet.

(6) **Orthonormalsysteme**: In einem eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraum wird eine System normierter Vektoren $\mathbf{e}_i \in \mathbb{V}_{En}$ $(\mathbf{e}_i^{\,2} = 1)$, die paarweise orthogonal sind, als *orthonormiert* bezeichnet. Für Orthonormalsysteme gilt mit dem *Kroneckersymbol* δ_{ij}

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \;&:=\; 0 \quad \textit{für} \quad i \neq j \\ \delta_{ij} \;&:=\; 1 \quad \textit{für} \quad i = j \end{aligned} \tag{4.26}$$

die Beziehung

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \;=\; \delta_{ij} \quad . \tag{4.27}$$

▶ *Jedes Orthonormalsystem ist notwendig linear unabhängig.*

(7) **Orthonormierte Basen:** Bilden in einem eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraum *n* Vektoren $\mathbf{e}_i \in \mathbb{V}_{En}$ ein Orthonormalsystem, so ist dieses System notwendig eine Basis dieses Vektorraumes.

(8) **Zu jeder Zahl** $r \leq n$ kann in einem eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraum ein Orthonormalsystem mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens konstruiert werden[1]. Daraus ergibt sich insbesondere:

▶ *Jeder eigentlich euklidische n-dimensionale Vektorraum hat Orthonormalbasen.*

(9) **Komponenten eines Vektors in Bezug auf eine Orthonormalbasis:**

Seien die $\mathbf{e}_i \in \mathbb{V}_{En}$ die Orthonormalbasis eines eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraumes, können die Komponenten $x^i \in \mathbb{R}$ eines Vektors $\mathbf{x} = x^i\, \mathbf{e}_i$ in Bezug auf diese Basis aus

$$x^i \;=\; \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i \tag{4.28}$$

berechnet werden.

[1] siehe etwa in LICHNEROWICZ [1966], p. 22.

(10) **Skalarprodukt zweier Vektoren bei Orthonormalbasen:** Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}_n$ in einem eigentlich euklidischen *n*-dimensionalen Vektorraum seien auf die Orthonormalbasis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{E}_n$ bezogen:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{y} = y^j \mathbf{p}_j \quad .$$

Für das Skalarprodukt gilt dann notwendig[1]

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i y_i \quad , \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}) \quad . \tag{4.29}$$

Im Fall einer Orthonormalbasis gilt für die Norm eines Vektors notwendig

$$N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 = x^i x_i \quad , \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}) \quad . \tag{4.30}$$

(11) **Der Betrag eines Skalarproduktes erfüllt die Schwarzsche Ungleichung**

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \quad . \tag{4.31}$$

(12) **Der Betrag einer Vektorsumme genügt der Dreiecksungleichung**

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad . \tag{4.32}$$

Es werden im Folgenden zwei Beispiele für Transformationen im euklidischen Raum behandelt, die in der Satellitenbahnmechanik beide von großer Wichtigkeit sind und wegen ihrer Analogie hier gemeinsam vorgestellt werden sollen.

4.1.1.5 Eine Transformation in der eigentlich euklidischen Ebene

Die euklidische Ebene werde durch das Orthonormalsystem $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ mit

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \tag{4.33}$$

aufgespannt. Eine Transformation auf das neue Orthonormalsystem $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ mit

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij} \tag{4.34}$$

wird mit der Transformation (4.13) auf Seite 10 $\mathbf{q}_j = a_j^{\ i} \mathbf{p}_i$, also ausführlich durch

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= a_{11} \mathbf{p}_1 + a_{12} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 &= a_{21} \mathbf{p}_1 + a_{22} \mathbf{p}_2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

gegeben. Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{\,2} &= 1 = a_{11}^{\ 2} + a_{12}^{\ 2} \\ \mathbf{q}_2^{\,2} &= 1 = a_{21}^{\ 2} + a_{22}^{\ 2} \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= 0 = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} \end{aligned} \tag{4.36}$$

folgt

[1] Das „Herunterziehen“ des Indizes in y_i zur Bildung der Summe wird im Rahmen der Tensoralgebra in Kapitel 5.9.3 auf Seite 232 begründet.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{1-a_{12}^{\,2}} = a_{22} \\ a_{21} &= -a_{12} \end{aligned} \quad ,$$

somit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \sqrt{1-a_{12}^{\,2}}\,\mathbf{p}_1 + a_{12}\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 &= -a_{12}\,\mathbf{p}_1 + \sqrt{1-a_{12}^{\,2}}\,\mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad . \tag{4.37}$$

Werde

$$b_{12} := \frac{a_{12}}{\sqrt{1-a_{12}^{\,2}}} \tag{4.38}$$

gesetzt, folgt

$$\sqrt{1-a_{12}^{\,2}} = \frac{1}{\sqrt{1+b_{12}^{\,2}}} \tag{4.39}$$

und schließlich für die Transformation der Basisvektoren die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{p}_1 + b_{12}\,\mathbf{p}_2}{\sqrt{1+b_{12}^{\,2}}} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{-b_{12}\,\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\sqrt{1+b_{12}^{\,2}}} \end{aligned} \quad . \tag{4.40}$$

Die Beziehungen (4.36) werden bekanntlich durch die Sinusfunktion erfüllt. Werde daher

$$a_{12} := \sin\alpha \tag{4.41}$$

gesetzt, wird

$$a_{11} = a_{22} = \cos\alpha = \pm\sqrt{1-a_{12}^{\,2}} \quad , \quad b_{12} = \tan\alpha \quad . \tag{4.42}$$

Die gewählte Transformation zeigt sich als die bekannte Rotation des Systems um den Winkel α.

4.1.1.6 Eine Transformation in einem pseudoeuklidischen Raum

Es sei nun eine nichteuklidische Ebene betrachtet, die von den orthogonalen Basisvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ mit

$$\mathbf{p}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{p}_2^{\,2} = -1 \tag{4.43}$$

aufgespannt werde. Wegen $\mathbf{p}_2^{\,2} = -1$ ist diese euklidische Ebene nicht-eigentlich. Sie wird daher auch als *pseudoeuklidisch* bezeichnet. Eine Transformation auf ein neues System $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ mit

$$\mathbf{q}_1^{\,2} = 1 \; , \quad \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \; , \quad \mathbf{q}_2^{\,2} = -1 \tag{4.44}$$

wird wieder mit der Transformation (4.13) auf Seite 10 $\mathbf{q}_j = a_j^{\,i}\,\mathbf{p}_i$, also ausführlich durch

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= a_{11}\,\mathbf{p}_1 + a_{12}\,\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 &= a_{21}\,\mathbf{p}_1 + a_{22}\,\mathbf{p}_2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

gegeben. Es ist offenbar

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{\,2} &= 1 = a_{11}^{\,2} - a_{12}^{\,2} \\ \mathbf{q}_2^{\,2} &= -1 = a_{21}^{\,2} - a_{22}^{\,2} \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= 0 = a_{11}\,a_{21} - a_{12}\,a_{22} \end{aligned} \tag{4.46}$$

somit

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{1 + a_{12}^{\,2}} = a_{22} \\ a_{21} &= a_{12} \end{aligned} \tag{4.47}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \sqrt{1 + a_{12}^{\,2}}\,\mathbf{p}_1 + a_{12}\,\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 &= a_{12}\,\mathbf{p}_1 + \sqrt{1 + a_{12}^{\,2}}\,\mathbf{p}_2 \quad . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Werde in diesem Fall

$$b_{12} := \frac{a_{12}}{\sqrt{1 + a_{12}^{\,2}}} \tag{4.49}$$

gesetzt, folgt

$$\sqrt{1 + a_{12}^{\,2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b_{12}^{\,2}}} \tag{4.50}$$

und schließlich für die Transformation der Basisvektoren die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{p}_1 + b_{12}\,\mathbf{p}_2}{\sqrt{1 - b_{12}^{\,2}}} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{b_{12}\,\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\sqrt{1 - b_{12}^{\,2}}} \quad . \end{aligned} \tag{4.51}$$

Die Beziehungen (4.46) werden bekanntlich durch die hyperbolischen Funktionen erfüllt:

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{12} = \sinh\alpha \\ a_{11} &= a_{22} = \cosh\alpha = \pm\sqrt{1 + a_{12}^{\,2}}\,, \quad b_{12} = \tanh\alpha \quad . \end{aligned} \tag{4.52}$$

Diese Transformation spielt als *Lorentz-Transformation* eine wichtige Rolle in der speziellen Relativitätstheorie[1].

[1] siehe etwa in BRUMBERG [1991], p. 15, sowie in Abschnitt 8.17

4.1.2 *n*-dimensionale Punkträume

n-dimensionale Punkträume können durch Zuordnung von Vektorräumen beschrieben werden. Den *affinen Punkträumen* werden die allgemeinen Vektorräume, den *euklidischen Punkträumen* werden die euklidischen Vektorräume assoziiert.

4.1.2.1 Affine Punkträume

Als affiner *n*-dimensionaler Punktraum $\mathbb{A}_n$ über dem Körper der reellen Zahlen wird eine Menge von Punkten und Vektoren bezeichnet, wenn die Vektoren Elemente eines *n*-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{V}_n$ dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bilden und wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(I) Zu jedem Punkt des affinen Raumes ordnet ein Vektor genau einen Punkt zu.

(II) Zu zwei Punkten *P, Q* gibt es genau einen Vektor $\overrightarrow{PQ}$, der *P* in *Q* überführt, bzw. den Punkt *Q* dem Punkt *P* zuordnet. *P* wird Ursprung, *Q* Spitze des Vektors genannt. Jedes geordnete Punktepaar in einem affinen Punktraum repräsentiert einen Vektor.

(IIa) Dem Punkt *Q* ordnet der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ eindeutig den Punkt *P* zu. Es ist offenbar

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \quad . \tag{4.53}$$

(IIb) Vektoren, die durch Parallelverschiebung (eine Translation) auseinander hervorgehen, sind identisch. Es handelt sich um *freie* Vektoren. Die auf einen bestimmten Punkt bezogenen Vektoren werden *gebundene* Vektoren genannt.

(III) Wird auf einen Punkt *P* ein Vektor $\overrightarrow{PQ}$ angewendet und auf den neuen Endpunkt *Q* der Vektor $\overrightarrow{QR}$, so ist die Summe dieser Vektoren ein neuer Vektor $\overrightarrow{PR}$, der dem Punkt *P* den Punkt *R* zuordnet:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \quad . \tag{4.54}$$

(IV) Die Vektoraddition ist kommutativ

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} \quad . \tag{4.55}$$

(V) Wenn *O* ein beliebiger (Bezugs-) Punkt des affinen Raumes ist, so ordnet jeder Vektor $\boldsymbol{x}$ dem Punkt *O* genau einen Punkt *X* des affinen Raumes zu:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} \quad . \tag{4.56}$$

Eigenschaften affiner Räume:

(1) Bezugssysteme des *n*-dimensionalen affinen Raumes: Wenn $\mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) die Basis eines Vektorraumes ist, der dem affinen Raum $\mathbb{A}_n$ assoziiert ist, und wenn die $\mathbf{p}_i$ zusammen mit dem Ursprung *O* des affinen Raumes $\mathbb{A}_n$ gegeben sind, bildet *O* mit den $\mathbf{p}_i$ ein Bezugssystem des affinen Raumes: $(O, \mathbf{p}_i)$.

(2) Koordinaten eines Punktes eines affinen Raumes $\mathbb{A}_n$ bezogen auf ein Bezugssystem $(O, \mathbf{p}_i)$:

Es sei *X* ein Punkt des affinen Raumes $\mathbb{A}_n$, dem der Vektor $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ zugeordnet ist. Seine Darstellung in Komponenten x^i bezüglich der Basis $\mathbf{p}_i$, d. h. als Linearkombination

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{4.57}$$

bezeichnet die *Koordinaten* x^i bezüglich des Basissystems (*O,* $\mathbf{p}_i$). Diese Zuordnung ist eindeutig. Im Sinn dieser Zuordnung kann ein Punkt eines (*n*-dimensionalen) affinen Raumes auch durch das *n*-tupel $(x^1, ..., x^n)$ bezeichnet werden. Die Skalare x^i werden als die *kartesischen Koordinaten* des Punktes *X* in Bezug auf das Basissystem (*O,* $\mathbf{p}_i$) bezeichnet.

(3) Sind zwei Punkte X, Y durch die *n*-tupel (x^i) bzw. (y^j) bezogen auf das Bezugssystem (*O,* $\mathbf{p}_i$) gegeben, gilt also

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{y} = \overrightarrow{OY} = y^i \mathbf{p}_i \tag{4.58}$$

so hat der Vektor von *X* nach *Y*

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (y^i - x^i)\,\mathbf{p}_i \tag{4.59}$$

die Komponenten $y^i - x^i$ bezüglich der Basis $\mathbf{p}_i$ und dem Ursprung *O*.

(4) Koordinatenwechsel bei Wechsel der Bezugssysteme:

In einem vorgegebenen affinen Raum $\mathbb{A}_n$ seien zwei Bezugssysteme (*O,* $\mathbf{p}_i$), (*O',* $\mathbf{q}_j$) gegeben, die also auch einen unterschiedlichen Ursprung haben. Die Transformation des einen Ursprungs auf den zweiten sei durch

$$\overrightarrow{OO'} = p^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \overrightarrow{O'O} = q^j \mathbf{q}_j \quad , \tag{4.60}$$

gegeben, die Transformation der Basen mit den Formeln (4.13) auf Seite 10

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = b_i{}^j \mathbf{q}_j \quad .$$

Ein Punkt *X* des affinen Raumes habe in Bezug auf das Bezugssystem (*O,* $\mathbf{p}_i$) die Koordinaten x^i, bezogen auf (*O',* $\mathbf{q}_j$) die Koordinaten y^j. Entsprechend der Transformation (4.13) und der Translation in Formel (4.60) lautet die vollständige Beziehung in den Koordinaten des Punktes *X* bezogen auf die beiden Bezugssysteme

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \overrightarrow{OX} = x^i \mathbf{p}_i = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = p^i \mathbf{p}_i + y^j \mathbf{q}_j = (p^i + y^j a_j{}^i)\mathbf{p}_i \\ \mathbf{y} &= \overrightarrow{O'X} = y^j \mathbf{q}_j = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = q^j \mathbf{q}_j + x^i \mathbf{p}_i = (q^j + x^i b_i{}^j)\mathbf{q}_j \end{aligned}$$

somit lautet die Transformationsformel zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei verschiedene Bezugssysteme

$$\begin{aligned} x^i &= p^i + a_j{}^i\, y^j \\ y^j &= q^j + b_i{}^j\, x^i \quad . \end{aligned} \tag{4.61}$$

(5) Geometrische Sätze, welche im Begriffssystem der affinen Punkträume bewiesen werden können, bilden die *affine Geometrie*.

4.1.2.2 Euklidische Punkträume

Euklidische (*n*-dimensionale) Punkträume $\mathbb{E}_n$ sind Punkträume, deren assoziierter Vektorraum $\mathbb{V}_{En}$ euklidisch ist.

Eigenschaften und Beispiele:

(1) Ein euklidischer Punktraum ist eigentlich euklidisch, wenn der assoziierte Vektorraum eigentlich euklidisch ist.

(2) Das *n*-Bein $(O, \mathbf{p}_i)$ eines euklidischen Punktraumes ist orthonormiert, wenn die Basis $\mathbf{p}_i$ des assoziierten euklidischen Vektorraumes orthonormiert ist.

(3) In euklidischen Räumen gilt das Parallelenaxiom, da Vektoren beliebig in ihnen verschoben werden können.

(4) Geometrische Sätze, welche im Begriffssystem der euklidischen Punkträume bewiesen werden können, bilden die ***euklidische Geometrie***.

(5) Die Ebene bildet einen zweidimensionalen eigentlich euklidischen Raum.

(6) Der dreidimensionale Punktraum der Elementargeometrie bildet einen eigentlich euklidischen Punktraum.

(7) Beliebige Flächen, die keine Ebenen sind, bilden im Allgemeinen keinen euklidischen Raum. Zum Beispiel bildet die Kugeloberfläche keinen euklidischen Raum.

(8) Die Norm (der Betrag) eines Vektors ist (entsprechend Formel (4.23) auf Seite 12 für jeden euklidischen Vektorraum)

$$N(\overrightarrow{XY}) \;=\; (\overrightarrow{XY})^2 \;=:\; (XY)^2 \quad . \tag{4.62}$$

(9) Im euklidischen Punktraum gilt die Dreiecksungleichung. Wenn

$$\overrightarrow{XZ} \;=\; \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$

ist

$$\left|\overrightarrow{XZ}\right| \;=\; XZ \;\le\; XY + YZ \;=\; \left|\overrightarrow{XY}\right| + \left|\overrightarrow{YZ}\right| \quad . \tag{4.63}$$

(10) Seien die $\mathbf{p}_i$ Basis eines (*n*-dimensionalen) euklidischen Vektorraumes mit der Metrik

$$g_{ij} \;=\; \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \quad ,$$

gilt für beliebige Vektoren $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = x^i \mathbf{p}_i$, $\mathbf{y} = \overrightarrow{OY} = y^j \mathbf{p}_j$ mit

$$(\overrightarrow{XY})^2 \;=\; (XY)^2 \;=\; g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) \quad . \tag{4.64}$$

Insbesondere gilt für die Variation eines Vektors $\boldsymbol{x = x(s)}$, der von einem Parameter *s* abhängt,

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)^2 \;=\; g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \quad , \tag{4.65}$$

bei Variation nach der „Zeit" *t*, wenn die Abhängigkeiten $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $x^i = x^i(s)$ bestehen,

$$\dot{\mathbf{x}}^2 \;=\; g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j \quad . \tag{4.66}$$

(11) Ist die Basis des *n*-dimensionalen euklidischen Vektorraumes orthonormiert

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \quad , \tag{4.67}$$

so werden die kartesischen Koordinaten in der Koordinatendarstellung

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{p}_i$$

als *rechtwinklige kartesische Koordinaten* bezeichnet. Für diese gilt bei Variation nach der Zeit zum Beispiel der Ausdruck

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{x}^i \dot{x}_i \quad \textit{für} \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \quad . \tag{4.68}$$

4.1.3 Metrische Räume

Eine nichtleere Menge $\mathbb{M}$ von Objekten *a, b, c, ...* heißt *metrischer Raum*, wenn es eine Funktion *d(a, b)* mit Werten in der Menge der nichtnegativen (reellen) Zahlen gibt und wenn für alle Elemente $a, b, c \in \mathbb{M}$ folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} &(a) \quad d(a,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \\ &(b) \quad d(a,b) = d(b,a) \quad \textit{für alle } a,b \in \mathbb{M} \\ &(c) \quad d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b) \quad . \end{aligned} \tag{4.69}$$

Die Elemente *a, b, c, ...* werden *Punkte* des metrischen Raumes $\mathbb{M}$ genannt, die Funktion *d(a, b)* der *Abstand* der beiden Punkte *a, b*. Die Abstandsfunktion *d(a, b)* wird als *Metrik* über der gegebenen Menge bezeichnet.

Eigenschaften:

(1) Sei *a* ein fester Punkt eines gegebenen metrischen Raumes $\mathbb{M}$ und $\varepsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl, so wird als *Kugelumgebung* von *a* die Menge

$$U_c(a) := \{ b \in \mathbb{M}; d(a,b) < \varepsilon \} \tag{4.70}$$

bezeichnet.

(2) Die euklidischen Punkträume $\mathbb{E}_n$ sind metrische Räume. Die Metrik lautet, wenn die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}_{En}$ Elemente des *n*-dimensionalen euklidischen Vektorraumes sind,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2} = |\mathbf{y}-\mathbf{x}| = \sqrt{g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j)} \quad . \tag{4.71}$$

Anmerkungen:

1. Erweiterungen des Raumbegriffs, wie sie im Rahmen der Topologie zur Verfügung gestellt werden, etwa die unendlich-dimensionalen Hilberträume sind im Rahmen einer Satellitenbahnmechanik zunächst ohne Bedeutung. Die Einführung des auch in einer verfeinerten Satellitenbahnmechanik bedeutsamen Begriffs der Riemannschen Räume sollte mit den vorstehenden Definitionen vorbereitet werden[1]. ◀
2. Im Allgemeinen gilt für die Basis $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = g_{ij}$. Ist der betrachtete Raum ein metrischer Raum, gibt es also eine Metrik der Form $\mathbf{x}^2 = g_{ij} x^i x^j$, so wird die Menge der Vorzeichen vor den einzelnen Gliedern der Metrik als *Signatur* der Metrik (bzw. als Signatur des met-

[1] Näheres in Kapitel 7

rischen Raumes) bezeichnet. Die in Abschnitt 4.1.1.6 auf S. 14 vorgestellte pseudoeuklidische Ebene hat zum Beispiel die Signatur „+ –“. ◀

4.2 Koordinatendarstellungen

Die mathematische Darstellung einer Bewegung wird zunächst im Sinn der klassischen Physik behandelt, es wird also angenommen, dass der Bewegungszustand zu einem gewissen Zeitpunkt durch Orts- und Geschwindigkeitsvektor in umkehrbar eindeutiger Weise beschrieben werden kann. Auf natürliche Weise kann ein mit einer Bewegung mitgeführtes Koordinatensystem eingeführt werden. Somit ist die Darstellung einer Bewegung sowohl in kartesischen wie in Polarkoordinaten und allgemeiner in geradlinigen und krummlinigen Koordinaten möglich. Einige Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten werden in den nächsten Unterabschnitten in elementarer Weise zusammengestellt. Die Eigenbewegung bewegter Bezugssysteme muss sorgfältig berücksichtigt werden, was in späteren Kapiteln, insbesondere im Zusammenhang mit der Zeitabhängigkeit der Systeme[1] durchgeführt wird.

4.2.1 Basisdarstellungen

Jedem Punkt P eines n-dimensionalen zunächst als affin angenommenen Punktraumes $\mathbb{A}_n$ wird nach Abschnitt 4.1.2.2 auf S. 18 ein System von n Zahlen $x^i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ derart zugeordnet, dass diese Zuordnung umkehrbar eindeutig erfolge. Dies bedeutet, dass jedem n-tupel von Zahlen genau ein Punkt P in umkehrbar eindeutiger Weise zugeordnet ist. Dem Punkt P werde der Vektor $\mathbf{r}$ zugeordnet. Auf diese Weise wird ein Vektorfeld

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(x^i) \tag{4.72}$$

gebildet.

Die Bewegung zu einem anderen Raumpunkt erfolgt längs einer Raumkurve, es muss also einen Parameter ζ geben, der den Ortsvektor $\mathbf{r}$ und seine Koordinaten x^i variiert:

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(\zeta) \;=\; \mathbf{r}(x^i(\zeta)) \quad . \tag{4.73}$$

Bei Variation des Parameters ζ um den Betrag $\Delta\zeta$ wird der Ort um den Differenzenvektor $\Delta\mathbf{x}$ variiert:

$$\Delta\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(\zeta + \Delta\zeta) - \mathbf{r}(\zeta) \quad . \tag{4.74}$$

Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\zeta} \;=:\; \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \quad , \tag{4.75}$$

wird dieser als Differentialquotient des Ortsvektors $\mathbf{r}$ nach dem Parameter ζ bezeichnet. Nach der Quotientenregel lautet die Variation des Ortsvektors bei Berücksichtigung seiner Koordinaten x^i

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \;=\; \sum_i \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\zeta} \quad . \tag{4.76}$$

Die Variationen des Ortsvektors in Abhängigkeit der Koordinaten sind selbst Vektoren

[1] Siehe dazu Kapitel 9 (Bewegungen in Zeit)

$$\mathbf{p}_i \;:=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad , \tag{4.77}$$

die aus $d\mathbf{r} / d\zeta$ erhalten werden können, wenn bis auf ein *i* alle x^i gleich null gesetzt werden. Diese Vektoren $\mathbf{p}_i$ müssen, wie gleich gezeigt wird, linear unabhängig sein. Für gewisse Zahlen A_i kann also

$$A^i \mathbf{p}_i \;=\; 0 \tag{4.78}$$

nur dann erfüllt sein, wenn alle $A_i = 0$ sind.

Dies kann indirekt bewiesen werden: Wenn die $\mathbf{p}_i$ nicht linear wären, gäbe es also mindestens zwei linear abhängige der Vektoren. Diese seien ohne Einschränkung $\mathbf{p}_{n-1}$ und $\mathbf{p}_n$. Dann könnte für eine bestimmte Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ sein $\mathbf{p}_n = \lambda \mathbf{p}_{n-1}$ und $d\mathbf{r} / d\zeta$ würde durch

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \;=\; \mathbf{p}_i \frac{dx^i}{d\zeta} + \left(\frac{dx^{n-1}}{d\zeta} + \lambda \frac{dx^n}{d\zeta} \right) \mathbf{p}_{n-1}$$

dargestellt werden können, d. h. durch ein (*n*-1)- tupel von Zahlen und nicht wie gefordert durch ein *n*-tupel. ◀

Die Differentialquotienten $d\mathbf{r} / d\zeta$ spannen somit einen *n*-dimensionalen linearen Vektorraum auf und die $\mathbf{p}_i$ sind eine *Basis* dieses Vektorraumes. Diese Basis wird auch als das *natürliche N-Bein* bezeichnet. Die Ortsvektoren **r** sind im Allgemeinen nicht notwendig Elemente des linearen Vektorraums mit der Basis $\mathbf{p}_i$. Dies ist nur dann der Fall, wenn eine Darstellung der Form

$$\mathbf{r} \;=\; x^i \mathbf{p}_i \tag{4.79}$$

möglich ist.

Ein Spezialfall ist gegeben, wenn die $\mathbf{p}_i$ aufeinander senkrecht stehen und wenn eventuell noch normiert werden kann. Ein solches System wird wieder als *kartesisch* bezeichnet. Kartesische Systeme erlauben meist einfachste und übersichtlichste Beschreibungen von Bewegungen und werden daher gewöhnlich auch als wichtigste Bezugssysteme gewählt. Wir werden sie im Folgenden so häufig wie möglich auch zur Grundlegung der Beschreibung von Bewegungen heranziehen.

Neben kartesischen Koordinaten sind Polarkoordinaten üblicherweise die am meisten verwendeten Systeme. Polarkoordinaten können – es sei denn als ausgeartete Darstellung – einen Ortsvektor **r** nicht in Form einer Linearform (4.79) darstellen. Bevor wir die Polarkoordinaten in Abschnitt 4.3.2 als einen Spezialfall krummliniger Koordinaten kennenlernen, werden die Beziehungen zwischen diesen Systemarten in den nächsten Abschnitten zunächst in sehr elementarer Weise untersucht.

4.2.2 Kartesische und Polarkoordinaten des Ortsvektors

Zur Beschreibung von Satellitenbewegungen werde zunächst, wie in der Satellitenbahnmechanik üblich, ein rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem zugrunde gelegt. Eine Erweiterung auf beliebige Basen wird im Rahmen der speziellen Koordinatendarstellungen (ab Abschnitt 4.3 auf Seite 37) und allgemeiner im Rahmen der Tensoralgebra angedeutet. Im folgenden Abschnitt werden Polarkoordinaten als Koordinaten eines natürlichen mitbewegten

Systems und ihre Beziehungen zu den zugehörigen kartesischen Koordinaten elementar hergeleitet. Einige erste für die Satellitenbahnmechanik interessante Beispiele werden behandelt.

Das rechtwinklige Koordinatensystem werde durch die drei Richtungsvektoren („Basisvektoren“) $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ aufgespannt, für die Orthonormie also

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^2 &= \mathbf{p}_2^2 = \mathbf{p}_3^2 = 1 \\ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0 \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1 \end{aligned} \tag{4.80}$$

angenommen werde[1]. Nach Bild 4-1 werde die Grundebene des Systems mit Mittelpunkt *M* durch die Vektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ aufgespannt, der Ursprung sei durch den Punkt *O* auf der Grundebene gegeben, $\mathbf{p}_3$ definiere die Richtung zum Pol *N* des Systems. Ein beliebiger Punkt P_0 auf der Sphäre habe den Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$ und den Fußpunkt Q_0 auf der Grundebene. P_0 lässt sich durch rechtwinklige Koordinaten im $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ - System bzw. durch die Winkel $A = \sphericalangle(O, Q_0)$, $D = \sphericalangle(Q_0, P_0)$ beschreiben. Wir führen den Hilfsvektor $\mathbf{h}_0$ durch die Beziehung

$$\mathbf{h}_0 = \cos A\, \mathbf{p}_1 + \sin A\, \mathbf{p}_2 \quad . \tag{4.81}$$

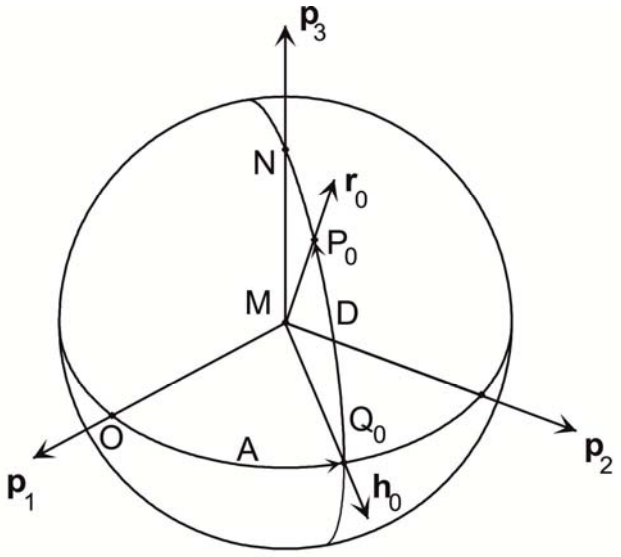


Bild 4-1: Koordinaten eines Punktes im Basissystem $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$

Damit gilt

$$\mathbf{r}_1 = \cos D\, \mathbf{h}_0 + \sin D\, \mathbf{p}_3 \quad . \tag{4.82}$$

$\mathbf{r_0}$ hat also im $\mathbf{p}_i$ – System die Darstellung

[1] Hier wird mit $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$ das *skalare* Produkt der Vektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ bezeichnet, also mit Multiplikationspunkt. Vgl. auch die Liste der Symbole

$$\mathbf{r}_0 \;=\; \cos D\cos A\,\mathbf{p}_1 + \cos D\sin A\,\mathbf{p}_2 + \sin D\,\mathbf{p}_3 \quad . \tag{4.83}$$

Die Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_1 &= \cos D\cos A \\ \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_2 &= \cos D\sin A \\ \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_3 &= \sin D \end{aligned} \tag{4.84}$$

werden als *Richtungskosinus* bezeichnet. Es ist bisweilen üblich, $\mathbf{r_0}$ auch als *Spaltenvektor* zu schreiben:

$$\mathbf{r}_0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \cos D\cos A \\ \cos D\sin A \\ \sin D \end{pmatrix} \quad . \tag{4.85}$$

Diese Darstellung erkauft den Vorteil einer übersichtlichen Schreibweise mit dem Verlust einer klaren Bezugnahme auf das Basissystem, wie es in Formel (4.83) dargestellt wird. Bei der Berechnung von Variationen eines Vektors, also auch bei Untersuchungen des Bewegungsverhaltens eines bewegten Körpers, kann sogar der Bezug auf das Basissystem, damit auf dessen Eigenbewegung und damit auf einen wesentlichen Anteil der (absoluten) Bewegung eines Körpers schlicht und einfach vergessen werden. Ein Beispiel dazu wird im Zusammenhang mit der Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung in Abschnitt 4.4.9 auf Seite 84 gegeben. Die Schreibweise des Spaltenvektors ist also nur dann sinnvoll, wenn das zugrunde liegende Koordinatensystem eindeutig bekannt ist und wenn Rechenoperationen mit Vektoren in einem und demselben Koordinatensystem erfolgen. Die Verwendung der Spaltenvektoren wird mathematisch dadurch erschwert, dass Spaltenvektoren Elemente eines affinen, nicht eines euklidischen Vektorraumes sind. Für Spaltenvektoren ist also kein skalares Produkt definiert.

▶ *Werden Transformationen eines Vektors von einem Koordinatensystem in ein anderes nötig, somit auch bei der Untersuchung von Bewegungen, ist seine Darstellung als Spaltenvektor grundsätzlich nicht sinnvoll.*

Die hier aufgezeigte Problematik könnte dadurch gemindert werden, dass jedem Koordinatensystem bestimmte Winkelpaare (***A***, ***D***) zugeordnet werden, wie sie in Kapitel 8 für einige häufig verwendete Koordinatensysteme eingeführt werden. Dazu wählen wir die Bezeichnung

$$\left[A, D\right] := \begin{pmatrix} \cos D\cos A \\ \cos D\sin A \\ \sin D \end{pmatrix} \quad , \tag{4.86}$$

in der das Winkelpaar (A, D) in der Schreibweise $\left[A, D\right]$ somit als *Richtungsvektor* aufgefasst wird. Der rechtsstehende Spaltenvektor ist nur bei eindeutigem Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem sinnvoll.

Ein beliebiger Punkt mit zentrischem Abstand r hat den *Ortsvektor*

$$\mathbf{r} \;:=\; r\,\mathbf{r}_0 \;=\; r\cos D\cos A\,\mathbf{p}_1 + r\cos D\sin A\,\mathbf{p}_2 + r\sin D\,\mathbf{p}_3 \quad . \tag{4.87}$$

Seien die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eindeutig dem System zugeordnet, das durch das Basissystem $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ aufgespannt wird, ist

$$\mathbf{r} \;=\; x_1\,\mathbf{p}_1 + x_2\,\mathbf{p}_2 + x_3\,\mathbf{p}_3 \tag{4.88}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos D\cos A \\ x_2 &= r\cos D\sin A \\ x_3 &= r\sin D \quad . \end{aligned} \tag{4.89}$$

Damit kann Formel (4.88) mit der erwähnten Einschränkung der Notwendigkeit eines eindeutigen Bezugs zu einem Basis-Koordinatensystem durch die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r\left[A, D\right] = r\begin{pmatrix} \cos D\cos A \\ \cos D\sin A \\ \sin D \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

ersetzt werden. Jeder Vektor hat also einen Betrag (r) und eine Richtung (dargestellt durch die Winkel A und D).

Die Größen r, A, D werden als *Polarkoordinaten* von P bezeichnet, x_1, x_2, x_3 als *kartesische Koordinaten*. Die Abbildung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten wird durch das Formelsystem (4.89) bzw. durch Formel (4.90) beschrieben. Die Umkehrabbildung erhalten wir aus

$$\begin{aligned} r &= |r| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \sin D &= \frac{x_3}{r} \\ \cos D &= \sqrt{1-\sin^2 D} \\ \cos A &= \frac{x_1}{r\cos D} \quad , \quad r>0\,, \ \cos D>0 \\ \sin A &= \frac{x_1}{r\cos D} \quad , \quad r>0\,, \ \cos D>0 \quad . \end{aligned} \tag{4.91}$$

Für $r = 0$ und/oder $D = 90°, 270°$ ist der Winkel A nicht erklärt. Hier deutet sich eine schwerwiegende Eigenschaft der mathematischen Koordinatendarstellungen an, die gerade in der Satellitenbahnmechanik manches Kopfzerbrechen bereitete:

- *Winkeldarstellungen (Polardarstellungen) geben häufig tiefe Einblicke in das Bewegungsverhalten sind jedoch auf bestimmte Bewegungsarten eingeschränkt, für andere nicht mehr brauchbar, was sich mathematisch durch Singularitäten ausdrückt, im obigen Ausdruck, wenn r cos D → 0. Eine kartesische Darstellung hat universelle Gültigkeit, lässt aber häufig die Übersichtlichkeit vermissen oder verhindert weitreichende Aussagen.*

Die bisher dargestellten Beziehungen erlauben bereits die Herleitung einiger für die Satellitenbahnmechanik später wichtiger

ANWENDUNGEN:

1. Normale zu einem beliebigen Großkreis

Die Normale zu einem beliebigen Großkreis soll in einem beliebigen Koordinatensystem berechnet werden. Das gewählte Koordinatensystem sei gemäß Bild 4-2 durch seine Normale N und den Ursprung O auf seiner Grundebene festgelegt. Ein *Großkreis* auf der Einheitssphäre

um den Ursprung ist die Schnittfigur eines zentrischen Schnittes einer Ebene mit dieser Kugel. Der Großkreis schneide die Grundebene im Punkt *K* (er wird später in bahnmechanischem Zusammenhang als „*Knoten*“ bezeichnet) unter dem („*Neigungs*-“) Winkel B_0 . *K* habe vom Ursprung den Winkelabstand („*Knotenlänge*“) $A_0 = \sphericalangle(O, K)$. Die Normale zur definierenden Ebene des Großkreises schneide die Einheitskugel im Punkt *C*. Im gegebenen System habe *C* die Polarkoordinaten A_C , D_C bzw. den Richtungsvektor $[A_c, D_c]$. Nach Bild 4-2 ist

$$\begin{aligned} A_c &= 270° + A_0 \\ D_c &= 90° - B_0 \end{aligned} \quad , \tag{4.92}$$

bzw. in der Schreibweise eines Richtungsvektors

$$[A_c, D_c] = [270° + A_0\ ,\ 90° - B_0] \quad . \tag{4.93}$$

Die kartesischen Koordinaten können, da auf dasselbe System bezogen, in der Form eines Spaltenvektors

$$[A_c, D_c] = \begin{pmatrix} \cos D_c \cos A_c \\ \cos D_c \sin A_c \\ \sin D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin B_0 \sin A_0 \\ -\sin B_0 \cos A_0 \\ \cos B_0 \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

geschrieben werden.

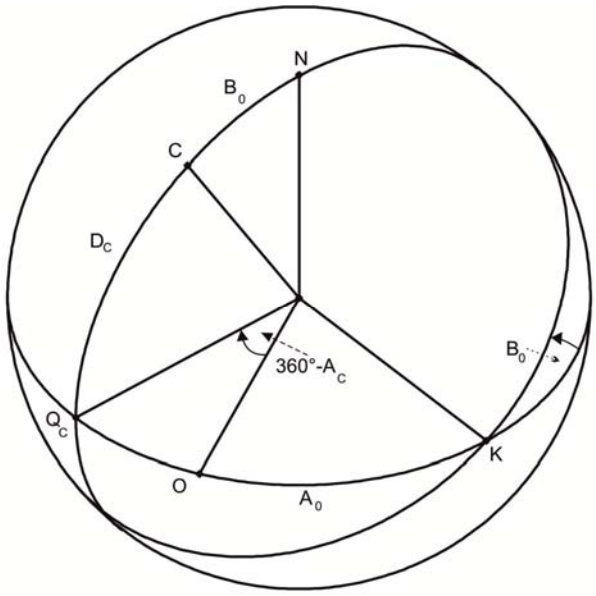


Bild 4-2: Pol *C* eines Großkreises mit Knoten A_0 und Neigung B_0

2. Großkreis durch zwei gegebene Richtungen

Durch zwei gegebene Richtungen ist ein Großkreis zu legen.

Im gegebenen (A, D)- Koordinatensystem seien die beiden Richtungen durch die Richtungsvektoren (A_1, D_1) und (A_2, D_2) vorgegeben. Da der gesuchte Großkreis durch den Ursprung des Systems geht, hat die zugehörige Normale nach Formel (4.93) den Richtungsvektor

$$[A_c, D_c] = [270° + A_0\ ,\ 90° - B_0] \quad .$$

Die Aufgabenstellung reduziert sich dann auf die Berechnung von „Neigung“ B_0 und „Knotenlänge“ A_0 . Da die Normale senkrecht auf den gegebenen Richtungen steht, ergibt sich unmittelbar in Koordinatendarstellung (die bezogen auf dasselbe System eindeutig ist)

$$\left[A_c, D_c\right] \;=\; \left[A_1, D_1\right]\times\left[A_2, D_2\right] \;=:\; \frac{1}{G}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.95}$$

wobei für den Betrag des Normalenvektors mit den kartesischen Koordinaten c_1 , c_2 , c_3

$$G \;:=\; \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \tag{4.96}$$

gesetzt wurde. A_0, B_0 erhalten wir somit aus

$$\begin{pmatrix} \sin B_0 \sin A_0 \\ -\sin B_0 \cos A_0 \\ \cos B_0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{G}\begin{pmatrix} \sin A_1 \cos D_1 \sin D_2 - \sin A_2 \cos D_2 \sin D_1 \\ \cos A_2 \cos D_2 \sin D_1 - \cos A_1 \cos D_1 \sin D_2 \\ \sin(A_2 - A_1)\cos D_1 \cos D_2 \end{pmatrix}, \quad G > 0 \quad . \tag{4.97}$$

Falls die beiden gegebenen Richtungen zusammenfallen oder um 180° auseinander liegen, kann wegen $\left[A_1, D_1\right]\times\left[A_2, D_2\right]=\left[0°, 0°\right]$ keine Ebene für den gesuchten Großkreis berechnet werden.

Diese Aufgabenstellung ist eine wichtige Grundlage, wenn in bahnmechanischem Zusammenhang eine Bahn durch zwei gegebene Ortsvektoren definiert werden soll (siehe als Beispiel die Behandlung des sogenannten *Lambert*-Problems in Abschnitt 2.7.1 (Band I)).

4.2.3 Kartesische und Polarkoordinaten des Geschwindigkeitsvektors

Wird ein Punkt *P*, für den die Darstellung $\mathbf{r} = x^i\mathbf{p}_i$ möglich ist, bewegt, hat er nach Formel (4.79) auf Seite 21 den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{4.98}$$

Für die Variationen der Basisvektoren in einem bewegten System erhalten wir aus dem Fundamentalsystem (4.80) auf Seite 22 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_i \;&=\; 0 \\ \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_j \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{4.99}$$

und speziell im dreidimensionalen Raum

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_3 \;&=\; \dot{\mathbf{p}}_1\times\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\times\dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \;&=\; \dot{\mathbf{p}}_2\times\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2\times\dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \;&=\; \dot{\mathbf{p}}_3\times\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3\times\dot{\mathbf{p}}_1 \quad . \end{aligned} \tag{4.100}$$

Differentiation des Ortsvektors in der Form (4.87) auf Seite 23 ergibt

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 \quad . \tag{4.101}$$

Diese Form ist die elementare Zerlegung eines jeden Geschwindigkeitsvektors in einen geradlinig bewegten (translatorischen) Anteil $\dot{r}\,\mathbf{r}_0$ und in eine Drehung (rotatorischer Anteil) $r\,\dot{\mathbf{r}}_0$. Diese Zerlegung ist für die Betrachtung einer jeden Bewegung von fundamentaler Bedeutung.

In diesem Abschnitt werden auf elementare Weise die Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten eines Geschwindigkeitsvektors sowie die Beziehungen der zugehörigen Basisvektoren hergeleitet.

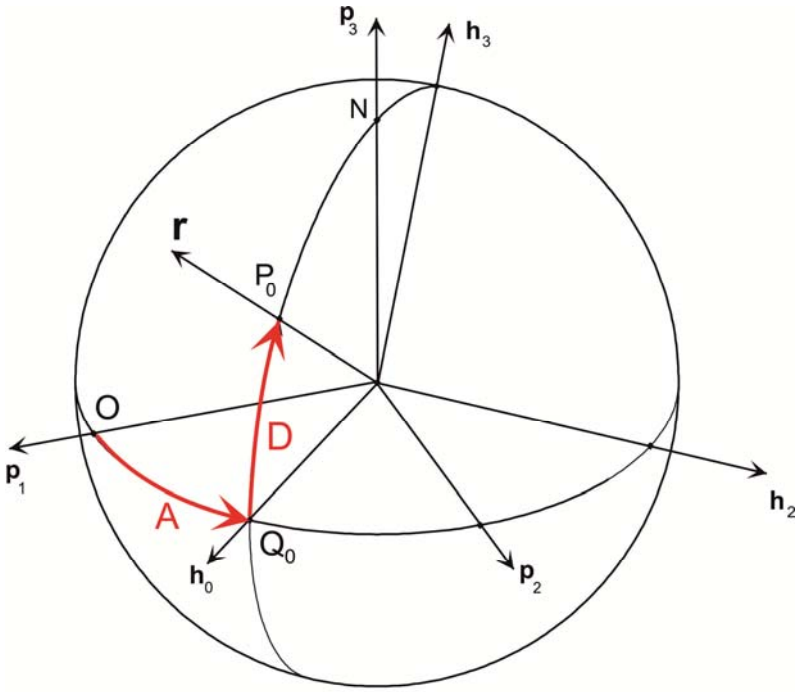


Bild 4-3: Hilfssystem zur Darstellung einer Bewegung $\mathbf{r}_0, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$

Die *Komponenten des Geschwindigkeitsvektors* bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem können mit den Formeln (4.98) und (4.101) aus

$$\dot{x}^i \mathbf{p}_i \;=\; \dot{\mathbf{r}} - x^i \dot{\mathbf{p}}_i \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 - x^i \dot{\mathbf{p}}_i \tag{4.102}$$

berechnet werden, sofern nur die $\dot{\mathbf{p}}_i$ bekannt sind. Bemerkenswert an diesem Ausdruck ist, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ nicht notwendig als *Spaltenvektor* mit den $\dot{x}^i$ als Komponenten angeschrieben werden darf, sondern die Eigenbewegung des bewegten Systems berücksichtigt werden muss.

Die Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Systems wird durch die Variation der $\dot{\mathbf{p}}_i$ dargestellt, die sich nur *relativ* zu einem anderen System ausdrücken lassen. Wenn die $\dot{\mathbf{p}}_i$ nicht bekannt sind, was prinzipiell für ein Fundamentalsystem angenommen werden muss, ist auch der (absolute) Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ nicht bekannt, wohl aber der zu dem $\mathbf{p}_i$ – System relative Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_p \;\coloneqq\; \dot{x}^i \mathbf{p}_i \quad . \tag{4.103}$$

Dies ist eine Folge davon, dass jede Bewegung prinzipiell nur relativ zu irgendeinem Bezugssystem fassbar ist.

Die Ableitung des Richtungsvektors $\mathbf{r}_0$ lautet nach Formel (4.83) auf Seite 23

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 \;=\; & (-\dot{A}\cos D\sin A - \dot{D}\sin D\cos A)\,\mathbf{p}_1 + \\ & + (\dot{A}\cos D\cos A - \dot{D}\sin D\sin A)\,\mathbf{p}_2 + \dot{D}\cos D\,\mathbf{p}_3 + \\ & + \cos D\cos A\,\dot{\mathbf{p}}_1 + \cos D\sin A\,\dot{\mathbf{p}}_2 + \sin D\;\dot{\mathbf{p}}_3 \quad . \end{aligned} \tag{4.104}$$

Es ist zu vermuten, dass die Polarkoordinaten mit der zugehörigen Basis fest verbunden sind, so dass auch ihre Variationen von der Eigenbewegung des Basissystems unabhängig sind. Eine Aussage hierzu ist aber im jetzigen Stand der Herleitungen nicht trivial. Es soll daher im Folgenden untersucht werden, ob die Variationen in den Polarkoordinaten von einer Eigenbewegung des Basissystems abhängig oder unabhängig sind. Um den Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten deutlicher darstellen zu können, führen wir entsprechend Bild 4-3 auf Seite 27 Hilfsvektoren $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ ein. $\mathbf{h}_0$ sei zunächst wie in Formel (4.81) auf Seite 22 durch den Punkt Q_0 gerichtet, $\mathbf{h}_2$ stehe senkrecht auf $\mathbf{h}_0$ und liege in der $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$- Ebene, $\mathbf{h}_3$ stehe senkrecht auf $\mathbf{r}_0$ und liege in der $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_3$- Ebene. Dann ist

$$\mathbf{h}_0 = \cos A\,\mathbf{p}_1 + \sin A\,\mathbf{p}_2 \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_2 &= -\sin A\,\mathbf{p}_1 + \cos A\,\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{h}_3 &= -\sin D\,\mathbf{h}_0 + \cos B\,\mathbf{p}_3 \end{aligned} \tag{4.106}$$

bzw.

$$\mathbf{h}_3 = -\sin D\cos A\,\mathbf{p}_1 - \sin D\sin A\,\mathbf{p}_2 + \cos D\,\mathbf{p}_3 \quad . \tag{4.107}$$

Die Ableitung des Richtungsvektors in Formel (4.104) kann damit vereinfacht geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 = {} & \dot{A}\cos D\,\mathbf{h}_2 + \dot{D}\,\mathbf{h}_3 + \\ & + \cos D\cos A\dot{\mathbf{p}}_1 + \cos D\sin A\dot{\mathbf{p}}_2 + \sin D\,\dot{\mathbf{p}}_3 \quad . \end{aligned} \tag{4.108}$$

Auf diese Weise wurde auf ganz natürliche Weise ein neues Koordinatensystem eingeführt, das durch die drei Richtungsvektoren aufgespannt wird. Diese genügen dem Formelsystem (4.82) auf Seite 22 und sind somit wieder orthonormiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j &= \delta_{ij} \\ \mathbf{h}_3 &= \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2 \times \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{h}_3 \times \mathbf{h}_1 \quad . \end{aligned} \tag{4.109}$$

Das neue $\mathbf{r}_0 = \mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ - System bewegt sich mit dem Punkt $\mathbf{r}$, sofern er sich nur selbst bewegt. Es bewegt sich somit gegenüber dem ursprünglichen $\mathbf{p}_i$ - System, gleichgültig ob dieses selbst fest oder bewegt ist. Für die Ableitungen gelten nach dem System (4.109) wegen der Orthonormie dieses Systems die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i \cdot \dot{\mathbf{h}}_i &= 0 \\ \dot{\mathbf{h}}_i \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \cdot \dot{\mathbf{h}}_j &= 0 \\ \dot{\mathbf{h}}_3 &= \dot{\mathbf{h}}_1 \times \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \times \dot{\mathbf{h}}_2 \\ \dot{\mathbf{h}}_1 &= \dot{\mathbf{h}}_2 \times \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_2 \times \dot{\mathbf{h}}_3 \\ \dot{\mathbf{h}}_2 &= \dot{\mathbf{h}}_3 \times \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_3 \times \dot{\mathbf{h}}_1 \quad . \end{aligned} \tag{4.110}$$

Die neuen Basisvektoren $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ haben die Variationen

$$\dot{\mathbf{h}}_2 = -\dot{A}\,(\cos D\,\mathbf{r}_0 - \sin D\,\mathbf{h}_3) - \sin A\dot{\mathbf{p}}_1 + \cos A\dot{\mathbf{p}}_2 \tag{4.111}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}}_3 &= -\dot{D}\mathbf{r}_0 - \dot{A}\sin D\,\mathbf{h}_2 - \\ &\quad -\sin D\cos A\dot{\mathbf{p}}_1 - \sin D\sin A\dot{\mathbf{p}}_2 + \cos D\,\dot{\mathbf{p}}_3 \quad .\end{aligned} \tag{4.112}$$

Die Variation von $\mathbf{r_0}$ ist bereits in Formel (4.108) dargestellt. Das $\mathbf{h_1} = \mathbf{r_0}, \mathbf{h_2}, \mathbf{h}_3$ - System rotiert gegenüber dem $\mathbf{p}_i$ – System um die momentanen Winkel A, D mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{A}, \dot{D}$. Nach Formel (4.101) auf Seite 26 ist noch eine Translation mit der Geschwindigkeit in Richtung des momentanen Radiusvektors mit der Geschwindigkeit $\dot{r}$ überlagert.

Umgekehrt können die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{p}}_i$ in einem bewegten System dem mitbewegten $\mathbf{h_1} = \mathbf{r_0}, \mathbf{h_2}, \mathbf{h}_3$ - System zugeordnet werden:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_1 &= \cos D\cos A\,\dot{\mathbf{h}}_1 - \sin A\,\dot{\mathbf{h}}_2 - \sin D\cos A\,\dot{\mathbf{h}}_3 - \\ &\quad -(\dot{A}\cos D\sin A + \dot{D}\sin D\cos A)\mathbf{r}_0 - \dot{A}\cos A\mathbf{h}_2 + \\ &\quad +(\dot{A}\sin D\sin A - \dot{D}\cos D\cos A)\mathbf{h}_3 \quad ,\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_2 &= \cos D\sin A\,\dot{\mathbf{h}}_1 - \cos A\,\dot{\mathbf{h}}_2 - \sin D\sin A\,\dot{\mathbf{h}}_3 + \\ &\quad +(\dot{A}\cos D\cos A - \dot{D}\sin D\sin A)\mathbf{r}_0 - \dot{A}\sin A\mathbf{h}_2 - \\ &\quad -(\dot{A}\sin D\cos A + \dot{D}\cos D\sin A)\mathbf{h}_3 \quad ,\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_3 = \sin D\,\dot{\mathbf{h}}_1 + \cos D\,\dot{\mathbf{h}}_3 + \dot{D}\cos D\mathbf{r}_0 - \dot{D}\sin D\mathbf{h}_3 \quad . \tag{4.115}$$

Aus Formel (4.101) ergibt sich mit Formel (4.108):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{h}_1 + r\dot{A}\cos D\mathbf{h}_2 + r\dot{D}\mathbf{h}_3 + \\ &\quad + r\cos D\cos A\dot{\mathbf{p}}_1 + r\cos D\sin A\dot{\mathbf{p}}_2 + r\sin D\,\dot{\mathbf{p}}_3\end{aligned} \tag{4.116}$$

bzw. da für die Beziehung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten die Formeln (4.89) auf Seite 24 gelten, auch

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{h}_1 + r\dot{A}\cos D\mathbf{h}_2 + r\dot{D}\mathbf{h}_3 + x^i\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{4.117}$$

Die Polarkoordinaten r, A, D haben somit die Variationen, wenn r ≠ 0, cos D ≠ 0, nach Formel (4.101)

$$\dot{r} = \mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \tag{4.118}$$

sowie aus Formel (4.117) mit $\mathbf{h}_2$ aus Formel (4.106)

$$\dot{A} = \frac{\mathbf{h}_2\cdot\dot{\mathbf{r}} - r(\cos D\,\mathbf{p}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_1 - \sin D\sin A\mathbf{p}_1\cdot\dot{\mathbf{p}}_3 + \sin D\cos A\mathbf{p}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_1)}{r\cos D} \tag{4.119}$$

und mit $\mathbf{h}_3$ aus Formel (4.107)

$$\dot{D} = \frac{\mathbf{h}_3\cdot\dot{\mathbf{r}} - (\cos A\dot{\mathbf{p}}_1 + \sin A\dot{\mathbf{p}}_2)\cdot\mathbf{p}_3}{r} \quad . \tag{4.120}$$

Die Variation der Polarkoordinaten A, D ist nur scheinbar von einer Eigenbewegung der Basis $\mathbf{p}_i$ abhängig. Um die kartesischen Komponenten $\dot{x}_i$ des Geschwindigkeitsvektors durch die Polarkoordinaten r, A, D und ihre Ableitungen $\dot{r}$, $\dot{A}$, $\dot{D}$ auszudrücken, wird Formel (4.117) in Formel (4.102) eingesetzt:

$$\dot{x}^i \mathbf{p}_i \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{A}\cos D\,\mathbf{h}_2 + r\dot{D}\,\mathbf{h}_3 \quad . \tag{4.121}$$

Dies ergibt die keineswegs triviale Aussage:

▶ *Die Komponenten $\dot{x}_i$ können stets **ohne** Kenntnis einer Eigenbewegung des Koordinatensystems den Änderungen $\dot{r}, \dot{A}, \dot{D}$ in den Polarkoordinaten zugeordnet werden.*

Die folgenden Beziehungen lassen sich in einfachster Weise direkt aus dem System (4.89) errechnen und werden durch Formel (4.121) bestätigt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r}\cos D\cos A - r\dot{D}\sin D\cos A - r\dot{A}\cos D\sin A \\ \dot{x}_2 &= \dot{r}\cos D\sin A - r\dot{D}\sin D\sin A + r\dot{A}\cos D\cos A \\ \dot{x}_3 &= \dot{r}\sin D + r\dot{D}\cos D \end{aligned} \tag{4.122}$$

oder auch, wenn $r > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\dot{r}}{r}x_1 - \dot{D}\,x_3\cos A - \dot{A}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\dot{r}}{r}x_2 - \dot{D}\,x_3\sin A + \dot{A}x_1 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\dot{r}}{r}x_3 + r\dot{D}\cos D \quad . \end{aligned} \tag{4.123}$$

Umgekehrt erhalten wir die Variation des Radius in Formel (4.118) mit Formel (4.98) von Seite 26 aus den kartesischen Koordinaten

$$\dot{r} \;=\; \frac{r\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \;=\; \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \;=\; \frac{x^i\dot{x}_i}{\sqrt{x^i x_i}} \quad , \quad (r \neq 0) \quad . \tag{4.124}$$

Mit Hilfe der Koordinatendarstellung in Formel (4.89) auf Seite 24 und des Hilfsvektors $\mathbf{h_2}$ aus Formel (4.106) erhalten wir

$$r\cos D\,\mathbf{h}_2 \;=\; -x_2\,\mathbf{p}_1 + x_1\,\mathbf{p}_2 \tag{4.125}$$

und mit Formel (4.121) schließlich für die Variation des ersten Polarwinkels A

$$\dot{A} \;=\; \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2\cos^2 D} \quad , \quad (r\cos D \neq 0) \quad . \tag{4.126}$$

Ferner ist

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \;=\; (x^i\mathbf{p}_i)\times(\dot{x}^i\mathbf{p}_i + x^i\dot{\mathbf{p}}_i) \quad ,$$

mit Hilfe der Formeln (4.80) von Seite 22 also

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \;=\; (x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2)\mathbf{p}_1 + (x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3)\mathbf{p}_2 + (x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)\mathbf{p}_3 + x^i\,\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}_i \quad , \tag{4.127}$$

nach Formel (4.101) auch

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \;=\; r^2\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0 \quad , \tag{4.128}$$

sowie mit Formel (4.117)

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \;=\; -r^2\dot{D}\mathbf{h}_2 + r^2\dot{A}\cos D\,\mathbf{h}_3 + x^i\,\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{4.129}$$

Aus Vergleich der Formeln (4.127) mit (4.129) sowie mit (4.125) ergibt sich schließlich die Variation in D

$$\dot{D} = \frac{x_2(x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2) - x_1(x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3)}{r^3\cos D} \quad , \quad (r\cos D \neq 0) \tag{4.130}$$

oder auch

$$\dot{D} = \frac{1}{r^2}\left[-(x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3)\cos A + (x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2)\sin A\right] \quad , \quad (r \neq 0) \quad . \tag{4.131}$$

In diesem Zusammenhang ist die Schreibweise in der Summenkonvention von Interesse: Wenn $x^i\,\mathbf{p}_i$ mit $\dot{x}^j\,\dot{\mathbf{p}}_j$ multipliziert wird, ist wegen $\mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_i = 0$ und $\mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_j + \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\mathbf{p}_j = 0$ im Fall $i, j = 1, 2, 3$

$$x^i\dot{x}^j\,\mathbf{p}_i\cdot\dot{\mathbf{p}}_j \;=\; (x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)\,\mathbf{p}_1\cdot\dot{\mathbf{p}}_2 + (x^2\dot{x}^3 - x^3\dot{x}^2)\,\mathbf{p}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_3 + (x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3)\,\mathbf{p}_3\cdot\dot{\mathbf{p}}_1 \quad . \tag{4.132}$$

Die Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten innerhalb eines gewählten Bezugssystems sind also – wie auch zu erwarten war – immanent demgegenüber ob das Bezugssystem fest oder bewegt ist. Im allgemeinen Fall muss jedoch von Fall zu Fall untersucht werden, welchen Einfluss das gewählte Bezugssystem hat. Ist die Darstellung nicht vom gewählten Bezugssystem abhängig, spricht man von *Systemimmanenz*, die durch die vektorielle bzw. allgemeiner tensorielle Schreibweise physikalischer Gesetzmäßigkeiten garantiert wird.

Die Formulierung der Tensorrechnung liefert eine von einem Koordinatensystem unabhängige Darstellung von Größen, die zugleich das Transformationsverhalten dieser Größen zwischen Systemen beinhaltet. Das bedeutet allerdings nicht, dass der Wert dieser Größen nicht von diesen Systemen abhängen würde.

Von besonderem Interesse ist allerdings die Frage, inwieweit eine Größe von einer Eigenbewegung des Koordinatensystems abhängig ist, in dem diese Größe dargestellt wird. Dies veranschaulichen folgende

BEISPIELE:

1. Das **Skalarprodukt** aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} = x^i\dot{x}^i$ ist gegenüber Bewegungen des Bezugssystems unabhängig. ◀

2. Das **Vektorprodukt** aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor ist zwar ein Vektor und daher von einer Koordinatendarstellung unabhängig. Aber es ist gegenüber Bewegungen des Bezugssystems nicht unabhängig, wie die Formeln (4.127) bzw. (4.129) zeigen. ◀

3. In Polarkoordinaten erhalten wir allgemein die **Geschwindigkeit V** aus

$$V^2 \;:=\; \dot{\mathbf{r}}^2 \;=\; \dot{r}^2 + \dot{\mathbf{r}}_0^{\,2} \quad . \tag{4.133}$$

Hierbei gilt, wenn die $\mathbf{p}_i$ nur durch die Bedingung der Orthonormie eingeschränkt sind, allgemein nach Formel (4.104)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0^{\,2} = {} & \dot{A}^2\cos^2 D + \dot{D}^2 + \cos^2 D\cos^2 A\,\dot{\mathbf{p}}_1^2 + \cos^2 D\sin^2 A\,\dot{\mathbf{p}}_2^2 + \sin^2 D\,\dot{\mathbf{p}}_3^2 + \\ & + 2\dot{A}\left[\cos^2 D\;\mathbf{p}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_1 - \cos D\sin D\sin A\,\mathbf{p}_1\cdot\dot{\mathbf{p}}_3 + \cos D\sin D\cos A\,\mathbf{p}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_3\right] + \\ & + 2\dot{D}\left[\cos A\,\mathbf{p}_3\cdot\dot{\mathbf{p}}_1 + \sin A\,\mathbf{p}_3\cdot\dot{\mathbf{p}}_2\right] + \\ & + 2\cos D\left[\cos D\cos A\sin A\,\dot{\mathbf{p}}_1\cdot\dot{\mathbf{p}}_2 + \sin D\cos A\,\dot{\mathbf{p}}_1\cdot\dot{\mathbf{p}}_3 + \sin D\sin A\,\dot{\mathbf{p}}_2\cdot\dot{\mathbf{p}}_3\right] .\end{aligned} \tag{4.134}$$

Die Geschwindigkeit ist somit von der Bewegung des Basissystems abhängig.

Ein numerisches BEISPIEL aus der Satellitenbahnmechanik: Ein geostationärer Erdsatellit hat bezogen auf die nichtrotierende Erde (exakt: bezogen auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem) die Geschwindigkeit V ≈ 3.1 km/s, bezogen auf die rotierende Erde (die Erde als mitrotierendes System) keine Geschwindigkeit. Die Eigengeschwindigkeit des Satelliten wird also durch die Eigengeschwindigkeit des mit der Erde mitrotierenden Systems „geschluckt". ◀

4. Der **Zwischenwinkel** zwischen Radius - und Geschwindigkeitsvektor ist von der Bewegung des Basissystems abhängig. Aus Formel (4.101) auf Seite 26 mit (4.133) folgt nämlich

$$\cos(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \;=\; \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|\,|\dot{\mathbf{r}}|} \;=\; \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\mathbf{r}}_0^2}} \;=\; \frac{\dot{r}}{V} \quad . \;\blacktriangleleft \tag{4.135}$$

Das mitgeführte $\mathbf{r_0}, \mathbf{h}_2, \mathbf{h_3}$- System ist selbst stets ein *bewegtes* System, sofern sich nur der dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ zugeordnete Punkt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{r} \neq 0$ bewegt, auch wenn das zugehörige Basissystem fest ist. Wird dieses mitbewegte System als orthonormiertes Basissystem gewählt, sind in ihm die Polarkoordinaten

$$r \;=\; |\mathbf{r}| \;, \quad A \;\equiv\; D \;\equiv\; 0 \quad .$$

Die kartesischen Koordinaten in diesem System lauten wegen

$$\mathbf{r} \;=\; y_1\mathbf{r}_0 + y_2\mathbf{h}_2 + y_3\mathbf{h}_3$$

dann

$$\begin{aligned} y_1 \;&=\; r \;, \quad y_2 \;=\; y_3 \;\equiv\; 0 \\ \dot{y}_1 \;&=\; \dot{r} \;, \quad \dot{y}_2 \;=\; \dot{y}_3 \;\equiv\; 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Vektoren $\mathbf{h_2}, \mathbf{h_3}$ eines mitgeführten Systems können also im Allgemeinen frei gewählt werden und müssen nicht notwendig in der Form (4.106) und (4.107) festgelegt sein. Davon wird im Einzelfall auch Gebrauch gemacht werden (siehe in Abschnitt 4.4.3 auf Seite 71).

4.2.4 Kartesische und Polarkoordinaten des Beschleunigungsvektors

Aus dem Geschwindigkeitsvektor in der vektoriellen Darstellung (4.101) auf Seite 26 erhalten wir durch Differentiation

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \ddot{r}\,\mathbf{r}_0 + 2\dot{r}\,\dot{\mathbf{r}}_0 + r\,\ddot{\mathbf{r}}_0 \tag{4.136}$$

sowie in kartesischer Darstellung nach Formel (4.88) auf Seite 24

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i + 2\dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i + x^i\,\ddot{\mathbf{p}}_i \quad , \tag{4.137}$$

wofür jetzt neben den $\dot{\mathbf{p}}_i$ auch die $\ddot{\mathbf{p}}_i$ bekannt sein müssen. Die kartesischen Koordinaten $\ddot{x}_i$ werden aus

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i &= \ddot{\mathbf{r}} - 2\dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i - x^i\ddot{\mathbf{p}}_i \;= \\ &= \ddot{r}\,\mathbf{r}_0 + 2\dot{r}\,\dot{\mathbf{r}}_0 + r\,\ddot{\mathbf{r}}_0 - 2\dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i - x^i\,\ddot{\mathbf{p}}_i \end{aligned} \tag{4.138}$$

berechnet. Sind die $\dot{\mathbf{p}}_i$ und $\ddot{\mathbf{p}}_i$ nicht bekannt, kann aus diesem Ausdruck nur der zum $\mathbf{p}_i$- System *relative* Beschleunigungsvektor

$$\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{p} \;:=\; \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i \tag{4.139}$$

berechnet werden. Der *absolute* Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}$, der sich mithin nur in einem inertialen System ($\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0, \ddot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$) finden lässt, ist dann also nicht bekannt.

Für die Beschleunigungen des $\boldsymbol{r}_0$=$\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$- Systems bei Vorgabe der $\dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i$ erhalten wir aus den Formeln (4.108) auf Seite 28, (4.111) und (4.112)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_0 \;=\; & (\dot{A}^2\cos^2 D + \dot{D}^2)\,\mathbf{r}_0 + \ddot{A}\cos D\,\mathbf{h}_2 - (\dot{A}^2\cos D\sin D - \ddot{D})\,\mathbf{h}_3 + \\ & + 2\dot{A}\cos D\,\dot{\mathbf{h}}_2 + 2\dot{D}\,\dot{\mathbf{h}}_3 + \cos D\cos A\,\ddot{\mathbf{p}}_1 + \cos D\sin A\,\ddot{\mathbf{p}}_2 + \sin D\,\ddot{\mathbf{p}}_3 \end{aligned} \tag{4.140}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{h}}_2 \;=\; & (-\ddot{A}\cos D + 2\,\dot{A}\dot{D}\sin D)\,\mathbf{r}_0 + \dot{A}^2\,\mathbf{h}_2 + (\ddot{A}\sin D + 2\dot{A}\dot{D}\cos D)\,\mathbf{h}_3 - \\ & - 2\dot{A}\cos D\,\dot{\mathbf{r}}_0 + 2\dot{A}\sin D\,\dot{\mathbf{h}}_3 - \sin A\,\ddot{\mathbf{p}}_1 + \cos A\,\ddot{\mathbf{p}}_2 \end{aligned} \tag{4.141}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{h}}_3 \;=\; & -(\dot{A}^2\sin D\cos D + \ddot{D})\,\mathbf{r}_0 - \ddot{A}\sin D\,\mathbf{h}_2 + (\dot{D}^2 + \dot{A}^2\sin^2 D)\,\mathbf{h}_3 - \\ & - 2\dot{D}\,\dot{\mathbf{r}}_0 - 2\dot{A}\sin D\,\dot{\mathbf{h}}_2 - \sin D\cos A\,\ddot{\mathbf{p}}_1 - \sin D\sin A\,\ddot{\mathbf{p}}_2 + \cos D\,\ddot{\mathbf{p}}_3 \end{aligned} \tag{4.142}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_1 \;=\; & -(\dot{A}^2\cos D\cos A + \dot{D}^2\cos D\cos A + \ddot{A}\cos D\sin A - \\ & \quad - 2\,\dot{A}\dot{D}\sin D\sin A + \ddot{D}\sin D\cos A)\,\mathbf{r}_0 - \\ & - (\ddot{A}\cos A - \dot{A}^2\sin A)\,\mathbf{h}_2 + \\ & + (-\dot{A}^2\sin D\cos A + \ddot{D}\cos D\cos A - \ddot{A}\sin D\sin A - \\ & \quad - 2\dot{A}\dot{D}\cos D\sin A - \dot{D}^2\sin D\cos A)\,\mathbf{h}_3 - \\ & - 2\,(\dot{A}\cos D\sin A + \dot{D}\sin D\cos A)\,\dot{\mathbf{r}}_0 - \\ & - 2\dot{A}\cos A\,\dot{\mathbf{h}}_2 + \\ & + 2\,(\dot{A}\sin D\sin A - \dot{D}\cos D\cos A)\,\dot{\mathbf{h}}_3 + \\ & + \cos D\cos A\,\ddot{\mathbf{r}}_0 - \sin A\,\ddot{\mathbf{h}}_2 - \sin D\cos A\,\ddot{\mathbf{h}}_3 \end{aligned} \tag{4.143}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_2 \;=\; & -(\dot{A}^2\cos D\sin A+\dot{D}^2\cos D\sin A-\ddot{A}\cos D\cos A+\\
& +2\,\dot{A}\dot{D}\sin D\cos A+\ddot{D}\sin D\sin A)\,\mathbf{r}_0-\\
& -(\ddot{A}\sin A-\dot{A}^2\cos A)\,\mathbf{h}_2+\\
& +(\dot{A}^2\sin D\sin A-\ddot{D}\cos D\sin A-\ddot{A}\sin D\cos A-\\
& -2\,\dot{A}\dot{D}\cos D\cos A+\dot{D}^2\sin D\sin A)\,\mathbf{h}_3+\\
& +2(\dot{A}\cos D\cos A-\dot{D}\sin D\sin A)\,\dot{\mathbf{r}}_0-\\
& -2\dot{A}\sin A\,\dot{\mathbf{h}}_2-\\
& -2(\dot{A}\sin D\cos A+\dot{D}\cos D\sin A)\,\dot{\mathbf{h}}_3+\\
& +\cos D\sin A\,\ddot{\mathbf{r}}_0+\cos A\,\ddot{\mathbf{h}}_2-\sin D\sin A\,\ddot{\mathbf{h}}_3
\end{aligned}
\tag{4.144}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_3 \;=\; & -(\dot{D}^2\sin D-\ddot{D}\cos D)\,\mathbf{r}_0-(\ddot{D}\sin D+\dot{D}^2\cos D)\,\mathbf{h}_3+\\
& +2\dot{D}\cos D\,\dot{\mathbf{r}}_0-2\dot{D}\sin D\,\dot{\mathbf{h}}_3+\sin D\,\ddot{\mathbf{r}}_0+\cos D\,\ddot{\mathbf{h}}_3\quad .
\end{aligned}
\tag{4.145}
$$

Werden in Formel (4.140) $\dot{\mathbf{h}}_2$ $\dot{\mathbf{h}}_3$ und die $\dot{\mathbf{p}}_i$ mit den Ausdrücken (4.108) auf Seite 28, (4.111) und (4.112) ersetzt, führt dies auf

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_0 \;=\; & -(\dot{A}^2\cos^2 D+\dot{D}^2)\,\mathbf{r}_0+(\ddot{A}\cos D-2\,\dot{A}\dot{D}\sin D)\,\mathbf{h}_2+\\
& +(\ddot{D}+\dot{A}^2\cos D\sin D)\,\mathbf{h}_3-\\
& -2\,(\dot{A}\cos D\sin A+\dot{D}\sin D\cos A)\,\dot{\mathbf{p}}_1+\\
& +2\,(\dot{A}\cos D\cos A-\dot{D}\sin D\sin A)\,\dot{\mathbf{p}}_2+\\
& +2\dot{D}\cos D\,\dot{\mathbf{p}}_3+\frac{1}{r}x^i\,\ddot{\mathbf{p}}_i\quad .
\end{aligned}
\tag{4.146}
$$

Setzt man diesen Ausdruck mit $\dot{\mathbf{r}}_0$ aus Formel (4.108) in (4.136) ein, folgt für den Beschleunigungsvektor

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} \;=\; & (\ddot{r}-r\dot{A}^2\cos^2 D-r\dot{D}^2)\,\mathbf{r}_0+\\
& +(2\dot{r}\dot{A}\cos D+r\ddot{A}\cos D-2\,r\,\dot{A}\dot{D}\sin D)\,\mathbf{h}_2+\\
& +(\dot{r}\,\dot{D}+r\,\ddot{D}+r\,\dot{A}^2\cos D\sin D)\,\mathbf{h}_3+\\
& +2\,(\dot{r}\cos D\cos A-r\dot{A}\cos D\sin A-r\,\dot{D}\sin D\cos A)\,\dot{\mathbf{p}}_1+\\
& +2\,(\dot{r}\cos D\sin A+r\,\dot{A}\cos D\cos A-r\,\dot{D}\sin D\sin A)\,\dot{\mathbf{p}}_2+\\
& +2\,(\dot{r}\sin D+r\,\dot{D}\cos D)\,\dot{\mathbf{p}}_3+x^i\ddot{\mathbf{p}}_i\quad .
\end{aligned}
\tag{4.147}
$$

Mit den $\dot{x}_i$ aus dem System (4.122) folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} \;=\; & (\ddot{r}-r\dot{A}^2\cos^2 D-r\,\dot{D}^2)\,\mathbf{r}_0+\\
& +(2\,\dot{r}\,\dot{A}\cos D+r\ddot{A}\cos D-2\,r\,\dot{A}\dot{D}\sin D)\,\mathbf{h}_2+\\
& +(2\dot{r}\,\dot{D}+r\,\ddot{D}+r\,\dot{A}^2\cos D\sin D)\,\mathbf{h}_3+2\,\dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i+x^i\ddot{\mathbf{p}}_i\quad .
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

Mit Formel (4.138) erhalten wir somit die Beziehungen der kartesischen Beschleunigungskomponenten mit den zugehörigen Polarkoordinaten, die wieder unabhängig davon sind, ob das gemeinsame Basissystem bewegt oder fest ist:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^i\mathbf{p}_i &= (\ddot{r} - r\dot{A}^2\cos^2 D - r\,\dot{D}^2)\,\mathbf{r}_0 + \\ &+ (2\,\dot{r}\,\dot{A}\cos D + r\,\ddot{A}\cos D - 2\,r\,\dot{A}\,\dot{D}\sin D)\,\mathbf{h}_2 + \\ &+ (2\dot{r}\,\dot{D} + r\,\ddot{D} + r\,\dot{A}^2\cos D\sin D)\,\mathbf{h}_3 + 2\,\dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i + x^i\ddot{\mathbf{p}}_i \quad ,\end{aligned} \tag{4.149}$$

bzw. ausführlich mit den $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$ aus den Formeln (4.83) von Seite 23 , (4.106) und (4.107) oder einfach direkt aus dem System (4.122)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \ddot{r}\cos D\cos A - 2\,\dot{r}\,\dot{D}\sin D\cos A - 2\,\dot{r}\,\dot{A}\cos D\,\sin A - \\ &- r\,\ddot{A}\cos D\sin A + 2\,r\,\dot{A}\dot{D}\sin\sin A - r\dot{A}^2\cos D\,\cos A - \\ &- r\,\dot{D}^2\cos D\cos A - r\,\ddot{D}\sin D\cos A \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{r}\cos D\sin A - r\,\dot{A}^2\cos D\sin A - r\,\dot{D}^2\cos D\sin A + \\ &+ 2\,\dot{r}\,\dot{A}\cos D\cos A + r\,\ddot{A}\cos D\cos A - \\ &- 2\,r\,\dot{A}\dot{D}\sin D\cos A - 2\,\dot{r}\,\dot{D}\sin D\sin A - r\,\ddot{D}\sin D\sin A \\ \ddot{x}_3 &= \ddot{r}\sin D - r\,\dot{D}^2\sin D + 2\,\dot{r}\,\dot{D}\cos D + r\,\ddot{D}\cos D \quad .\end{aligned} \tag{4.150}$$

Umgekehrt liefert Formel (4.136), nach Multiplikation mit $\mathbf{r_0}$

$$\ddot{r} = \frac{1}{r}x^i\ddot{x}_i + r\dot{A}^2\cos^2 D + r\dot{D}^2 \quad , \quad r \neq 0 \quad . \tag{4.151}$$

Multiplikation von Formel (4.149) mit $\mathbf{h_2}$ ergibt ferner mit Formel (4.104) auf Seite 27, wenn wieder $r\cos B > 0$ zutrifft,

$$\ddot{A} = \frac{x_1\,\ddot{x}_2 - x_2\,\ddot{x}_1 - 2\,r\,\dot{r}\,\dot{A}\cos^2 D + 2\,r^2\,\dot{A}\dot{D}\cos D\sin D}{r^2\cos^2 D} \quad . \tag{4.152}$$

Wird schließlich noch Formel (4.149) mit $\mathbf{h_3}$ multipliziert und wird die Beziehung (4.107) auf Seite 28 berücksichtigt, folgt die dritte Beschleunigungskomponente in den Polarkoordinaten aus

$$\begin{aligned}\ddot{D} &= \frac{1}{r^2}\Big[\cos A\,(x_1\,\ddot{x}_3 - x_3\,\ddot{x}_1) + \sin A\,(x_2\,\ddot{x}_3 - x_3\,\ddot{x}_2) - 2\,r\,\dot{r}\,\dot{D}\Big] - \\ &- \dot{A}^2\cos D\sin D \quad , \quad r > 0 \quad .\end{aligned} \tag{4.153}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\ddot{D} &= \frac{1}{r^3\cos D}\left[x_2\,(x_2\,\ddot{x}_3 - x_3\,\ddot{x}_2) + x_1\,(x_1\,\ddot{x}_3 - x_3\,\ddot{x}_1) - \right. \\ &\left. - 2\,r^2\,\dot{r}\,\dot{D}\cos D - r^3\,\dot{A}^2\cos^2 D\sin D\right] \quad , \quad r\cos D > 0 \quad .\end{aligned} \tag{4.154}$$

Wie im Fall des Geschwindigkeitsvektors muss auch beim Beschleunigungsvektor sorgfältig beachtet werden, ob Operationen systemimmanent sind oder nicht.

Die Formeln der beiden vorhergehenden Abschnitte werden erst in späteren Abschnitten mit numerischen Beispielen vertieft. Wir wollen hier jedoch einige theoretische Grundsätze zusammenfassen:

1. *Die Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten sind bezogen auf dasselbe Basissystem immanent gegenüber Bewegungen dieses Systems.*
2. *Operationen zwischen Größen in einem und demselben Basissystem sind nicht notwendig immanent gegenüber Bewegungen dieses Systems.*

3. *Bei der Darstellung einer Bewegung in einem beliebigen Basissystem muss die Eigenbewegung dieses Systems gegenüber einem anderen Basissystem nicht notwendig berücksichtigt werden, sofern die Systeme nicht ineinander transformiert werden.*
4. *Sind die x_i die kartesischen Koordinaten eines Vektors, so sind die $\dot{x}_i$ die Komponenten seiner Ableitung, die lediglich seine Variation relativ zu diesem System angeben*.

4.2.5 Differentielle Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Die kartesischen und Polarkoordinaten sind Beispiele für die verschiedenartige Darstellung der Komponenten eines Vektors in einem und demselben Koordinatensystem. Sie gestatten unterschiedliche Aussagen über die Eigenschaften dieses Vektors. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Bewegungen, speziell bei kleinen Veränderungen oder fehlerhaften Größen, interessieren grundsätzliche Aussagen, wie sich kleine Änderungen auswirken können. Aus diesem Grund werden in diesem Zwischenabschnitt die differentiellen Beziehungen zwischen den kartesischen und Polarkoordinaten und ihren ersten Ableitungen zusammengestellt. Von ihnen wird gelegentlicher Gebrauch gemacht werden.

Aus den Formeln (4.89) von Seite 24 und (4.122) auf Seite 30 folgt:

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= \cos D\cos A\delta r - r\sin D\cos A\delta D - x_2\delta A\\
\delta x_2 &= \cos D\sin A\delta r - r\sin D\sin A\delta D + x_1\delta A\\
\delta x_3 &= \sin D\delta r + r\cos D\delta D
\end{aligned} \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x}_1 &= -(\dot{D}\sin D\cos A - \dot{A}\cos D\sin A)\delta r + \cos D\cos A\delta\dot{r} +\\
&\quad +(-\dot{r}\sin D\cos A - x_1\dot{D} + r\dot{A}\sin D\sin A)\delta D - r\sin D\cos A\delta\dot{D} +\\
&\quad +(-\dot{r}\cos D\sin A + r\,\dot{D}\sin D\sin A - x_1\dot{A})\delta A - x_2\,\delta\dot{A}\\
\delta\dot{x}_2 &= (-\dot{D}\sin D\sin A + \dot{A}\cos D\cos A)\delta r + \cos D\sin A\delta\dot{r} -\\
&\quad -(\dot{r}\sin D\sin A + x_2\,\dot{D} + r\,\dot{A}\sin D\cos A)\delta D - r\sin D\sin A\delta\dot{D} +\\
&\quad +(\dot{r}\cos D\cos A - r\dot{D}\sin D\cos A - x_2\dot{A})\delta A + x_1\,\delta\dot{A}\\
\delta\dot{x}_3 &= \dot{D}\cos D\,\delta r + \sin D\,\delta\dot{r} + (\dot{r}\cos D - r\,\dot{D}\sin D)\delta D + r\cos D\,\delta\dot{D} \quad .
\end{aligned}$$

Umgekehrt ergeben sich die Änderungen in den Polarkoordinaten bei Vorgabe der Änderungen in den kartesischen Koordinaten aus den Formeln (4.91) auf Seite 24 sowie (4.124), (4.126) und (4.130):

$$\begin{aligned}
\delta r &= \frac{1}{r}x^i\delta x_i \quad , \quad r>0\\
\delta D &= \frac{1}{r^2}\left[r\,\delta x_3 - x_3\,\delta r\right]\\
\delta A &= \frac{1}{r^2\cos^2 D}\left[-x_2\,\delta x_1 + x_1\,\delta x_2 + r\sin D(-x_1\sin A + x_2\cos A)\delta D\right]\\
\delta\dot{r} &= \frac{1}{r}(-\dot{r}\,\delta r + \dot{x}^i\delta x_i + x^i\delta\dot{x}_i)
\end{aligned} \tag{4.156}$$

$$\delta\dot{D} = \frac{1}{r^3\cos D}\Big[r^3\dot{D}\sin D\,\delta D - 2r^2\dot{D}\cos D\,\delta r + (x_3\dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_3)\,\delta x_1 + \\ + x_1x_3\delta\dot{x}_1 + (x_3\dot{x}_2 - 2x_2\dot{x}_3)\,\delta x_2 + x_2x_3\delta\dot{x}_2 + \\ + (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)\,\delta x_3 - (x_1^2 + x_2^2)\,\delta\dot{x}_3\Big]$$

$$\delta\dot{A} = \frac{1}{r^3\cos^3 D}\Big[(\dot{x}_2\delta x_1 - x_2\delta\dot{x}_1 - \dot{x}_1\delta x_2 + x_1\delta\dot{x}_2)\,r\cos D - \\ - 2(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)(\cos D\ \delta r - r\sin D\ \ \delta D)\Big] \quad .$$

In analoger Weise können die Variationen in den Beschleunigungskomponenten aus dem Formelsystem (4.150) in einfacher Weise den entsprechenden Änderungen in den Polarkoordinaten zugeordnet werden, umgekehrt aus den Formeln (4.151) - (4.153), wovon in diesem Bericht aber kein Gebrauch gemacht wird.

4.3 Spezielle Bezugssysteme

Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens bewegter Körper ist die geschickte Wahl von Bezugssystemen unentbehrlich. Die bisher vorgestellten kartesischen und Polarkoordinaten werden in einen allgemeineren Rahmen eingeordnet und einige bedeutsame Spezialfälle angeschlossen.

4.3.1 Geradlinige Systeme

Wenn in einem *n*-dimensionalen Vektorraum jedes Element eines Vektorfeldes

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i) \tag{4.157}$$

als lineare Kombination einer Basis $\mathbf{g}_i$ darstellbar ist

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{g}_i \quad , \tag{4.158}$$

werden die Koordinaten x^i als *geradlinige Koordinaten* und die Basis $\mathbf{g}_i$ als Basis eines *geradlinigen Systems* bezeichnet.

Wird genau ein bestimmtes *i* betrachtet, was durch das Symbol (*i*) bezeichnet werden soll (es findet keine Summierung über (*i*) statt) und wird eine Bewegung der Basis $\mathbf{g}_i$ ausgeschlossen, folgt aus dem Differentialquotienten

$$\frac{d\mathbf{r}_{(i)}}{dx^{(i)}} \coloneqq \mathbf{g}_{(i)} \tag{4.159}$$

nach Integration

$$\mathbf{r}_{(i)} = x^{(i)}\,\mathbf{g}_{(i)} + \mathbf{r}_{(i,0)} \quad . \tag{4.160}$$

Die Koordinate $x^{(i)}$ variiert längs einer Geraden in Richtung $\mathbf{g}_{(i)}$. Sie ist somit eine geradlinige Koordinatenlinie im Endpunkt des Ortsvektors $\mathbf{r}$. $\mathbf{r}_{(i,0)}$ ist ein Anfangspunkt.

Für die Variation des Vektorfeldes (4.157) lautet ganz allgemein der Differentialquotient bei Variation nach einem Parameter ζ

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\zeta} \tag{4.161}$$

und speziell für geradlinige Systeme

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dx^i}{d\zeta}\mathbf{g}_i + x^i\frac{d\mathbf{g}_i}{d\zeta} \quad , \tag{4.162}$$

wobei auch für die Basis $\mathbf{g}_i$ die Beziehung

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{d\zeta} = \frac{d\mathbf{g}_i}{dx^j}\frac{dx^j}{d\zeta} \tag{4.163}$$

gilt.

Hier gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Die Basis ist ortsunabhängig, d. h. es gilt

$$\mathbf{g}_i \;\; \textit{ortsunabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \equiv 0 \quad \textit{für alle } i,\, j \quad . \tag{4.164}$$

Dann wird der Differentialquotient (4.162) vereinfacht zu

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dx^i}{d\zeta}\mathbf{g}_i + x^i\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\zeta} = \frac{dx^i}{d\zeta}\mathbf{g}_i$$

und der Vergleich mit dem Differentialquotienten (4.162) zeigt

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \equiv 0 \quad . \tag{4.165}$$

(2) Die Basis $\mathbf{g}_i$ ist ortsabhängig. Es gilt

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{d\zeta} = \frac{d\mathbf{g}_i}{dx^j}\frac{dx^j}{d\zeta} \neq 0 \quad \textit{mit} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \neq 0 \quad . \tag{4.166}$$

Somit gilt für die Variation des Ortsvektors mit den Darstellungen (4.161) – (4.163)

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\zeta} = \frac{dx^j}{d\zeta}\mathbf{g}_j + x^i\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\zeta} = \frac{dx^j}{d\zeta}\left(\mathbf{g}_j + x^i\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\right) \quad .$$

Dies führt auf die **neue** Basis

$$\mathbf{p}_i := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{g}_i + x^j\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} \quad . \tag{4.167}$$

Als Anwendung wird die Variation nach der (absoluten) Zeit betrachtet:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\,\mathbf{g}_i + x^j\,\dot{\mathbf{g}}_j = \dot{x}^i\left(\mathbf{g}_i + x^j\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}\right) = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{4.168}$$

Wir kommen hier zu der Feststellung, dass auch bei geradlinigen Systemen im allgemeinen

$$x^j\,\dot{\mathbf{g}}_j = x^j\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}\,\dot{x}^i \tag{4.169}$$

zu erwarten ist. Eine Eigenbewegung der Basisvektoren $\mathbf{g}_i$ verändert somit im allgemeinen die Beschreibung einer Variation eines Vektorfeldes.

BEISPIEL: Ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ist ein Koordinatensystem mit orthonormierter Basis. Es ist geradlinig. Für die Basis eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems gilt somit notwendig und hinreichend

$$g_i \cdot g_j \;=\; \delta_{ij} \quad . \qquad \blacktriangleleft$$

4.3.2 Krummlinige Systeme

Ein Koordinatensystem mit den Koordinaten y^j wird als *krummlinig* bezeichnet, wenn ein Vektorfeld $\mathbf{r}=\mathbf{r}(y^j)$ nicht als Linearkombination einer Basis dargestellt werden kann. Für dieses Vektorfeld hat aber auch bei krummlinigen Koordinaten der Differentialquotient nach einem Parameter ζ die Form

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \;=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\zeta} \tag{4.170}$$

und die Vektoren

$$\mathbf{q}_j \;:=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} \tag{4.171}$$

sind die Basis eines Vektorraumes. Es ist üblich, die Ableitung nach der *j*-ten Koordinate des Vektorfeldes $\mathbf{r}=\mathbf{r}(y^j)$ durch das Symbol

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} \;=:\; \mathbf{r}_{,j} \tag{4.172}$$

abzukürzen. Krummlinige Koordinaten sind stets vom Ort abhängig, es gilt also notwendig

$$\textit{System } \mathbf{q}_j \textit{ krummlinig} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial y^i} = \mathbf{q}_{\mathbf{j,i}} \neq 0 \quad \textit{für alle } i,\ j \quad . \tag{4.173}$$

Der Geschwindigkeitsvektor kann in krummlinigen Koordinaten in der Form

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j}\dot{y}^j \;=\; \mathbf{r}_{,j}\,\dot{y}^j \;=\; \mathbf{q}_j\,\dot{y}^j \tag{4.174}$$

dargestellt werden. Bei krummlinigen Koordinaten kann aus dieser Darstellung nicht notwendig auf die Darstellung des Ortsvektors geschlossen werden. Wird eine bestimmte der Koordinaten $y^{(j)}$ betrachtet, so erhält man bei Variation nur dieser Koordinate eine Koordinatenlinie, die nicht geradlinig, sondern krummlinig ist. Deshalb heißt ein solches Koordinatensystem ein krummliniges.

4.3.3 Zusammenhang zwischen geradlinigen und krummlinigen Koordinaten

Seien die x^i geradlinige, die y^j krummlinige Koordinaten eines Ortes

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(x^i) \;=\; \mathbf{r}(y^j)$$

und seien zwischen diesen beiden Koordinaten umkehrbar eindeutige Abbildungen definiert, d. h. die zugehörigen Jacobi-Determinanten sollen nicht verschwinden:

$$\begin{aligned} x^i \;&=\; x^i\left(y^j\right) \quad mit \quad \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \;\neq\; 0 \\ y^j \;&=\; y^j\left(x^i\right) \quad mit \quad \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \;\neq\; 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.175}$$

Dann gibt es die Transformation, wenn die $x^i = x^i\left(\zeta\right)$ und die $y^j = y^j(\zeta)$ von einem Parameter ζ abhängig sind[1],

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{d\zeta} \;&=\; \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\zeta} \\ \frac{dy^j}{d\zeta} \;&=\; \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\zeta} \quad . \end{aligned} \tag{4.176}$$

Hier wird es üblich, auch die folgende Schreibweise zu verwenden[2]:

$$x^i{}_{,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad , \quad y^j{}_{,i} := \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad . \tag{4.177}$$

Für das geradlinige System gilt mit den Beziehungen (4.165) bzw. (4.167) ganz allgemein zusammen genommen (die $\mathbf{g_i}$ werden jetzt als die Basis eines geradlinigen Systems angenommen auch wenn das System ortsabhängig ist) und wegen

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{\mathbf{i}}}\frac{dx^i}{d\zeta} = \mathbf{g_i}\frac{dx^i}{d\zeta} = \mathbf{g_i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\zeta} \quad ,$$

sowie im Fall der krummlinigen Koordinaten mit Beziehung (4.171)

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\zeta} = \mathbf{p}_j\frac{dy^j}{d\zeta} = \mathbf{p}_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\zeta} \quad .$$

Durch Vergleich dieser beiden Ausdrücke und Rückgriff auf die allgemeine Koordinatentransformation in den Beziehungen (4.13) auf Seite 10 werden die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_j \;&=\; \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathbf{g}_i \;=\; x^i{}_{,j}\,\mathbf{g}_i \\ \mathbf{g}_i \;&=\; \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{p}_j = y^j{}_{,i}\,\mathbf{p}_j \end{aligned} \tag{4.178}$$

---

[1] in BROUWER - CLEMENCE [1961], p. 300 wird der Buchstabe ψ statt ζ verwendet

[2] siehe auch die Definitionen in Kapitel 7

erhalten.

▶ *Zwischen den Basen der Systeme besteht eine lineare Beziehung, auch wenn zwischen den Koordinaten in den beiden Systemen keine lineare Beziehung besteht.*

4.3.4 Transformationen zwischen krummlinigen Systemen

Zur Herleitung der Transformation zwischen verschiedenen krummlinigen Systemen $\mathbf{p}_j$ mit den Koordinaten y^j und $\mathbf{q}_k$ mit den Koordinaten z^k bezieht man beide zunächst auf ein geradliniges System $\mathbf{g}_i$ mit x^i. Hier gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{p}_j = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathbf{g}_i \quad , \quad \mathbf{q}_k = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\mathbf{g}_i \end{aligned}$$

und erhält daraus unmittelbar

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{p}_j = x^i{}_{,k}\, y^j{}_{,i}\,\mathbf{p}_j \\ \mathbf{p}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\mathbf{q}_k = x^i{}_{,j}\, z^k{}_{,i}\,\mathbf{q}_k \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \frac{\partial y^j}{\partial z^k}\mathbf{p}_j = y^j{}_{,k}\,\mathbf{p}_j \\ \mathbf{p}_j &= \frac{\partial z^k}{\partial y^j}\mathbf{q}_k = z^k{}_{,j}\,\mathbf{q}_k \quad . \end{aligned} \tag{4.179}$$

▶ *Das Transformationsgesetz* (4.178) *gilt ganz allgemein zwischen den Basen beliebiger auch krummliniger Koordinatensysteme*.

4.3.5 Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten

Ein Beispiel der Transformation zwischen geradlinigen und krummlinigen Koordinaten ist die Einführung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= r\cos D\cos A \\ x^{(2)} &= r\cos D\sin A \\ x^{(3)} &= r\sin D \quad , \end{aligned} \tag{4.180}$$

wobei die r, A, D als krummlinige Koordinaten (vgl. die Beziehungen in Formel (4.91) auf Seite 24)

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= r = \sqrt{x^i x_i} \\ y^{(2)} &= A = \arctan\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} \\ y^{(3)} &= D = \frac{x^{(3)}}{\sqrt{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}} \end{aligned} \tag{4.181}$$

aufgefasst werden können. (Man beachte die hochgestellten Indizes in Klammern, da hier nicht Laufvariable sondern Einzelkomponenten). In einem geradlinigen System mit der Basis $\mathbf{g}_i$ hat ein Ortsvektor $\mathbf{r}$ die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{g}_i \quad .$$

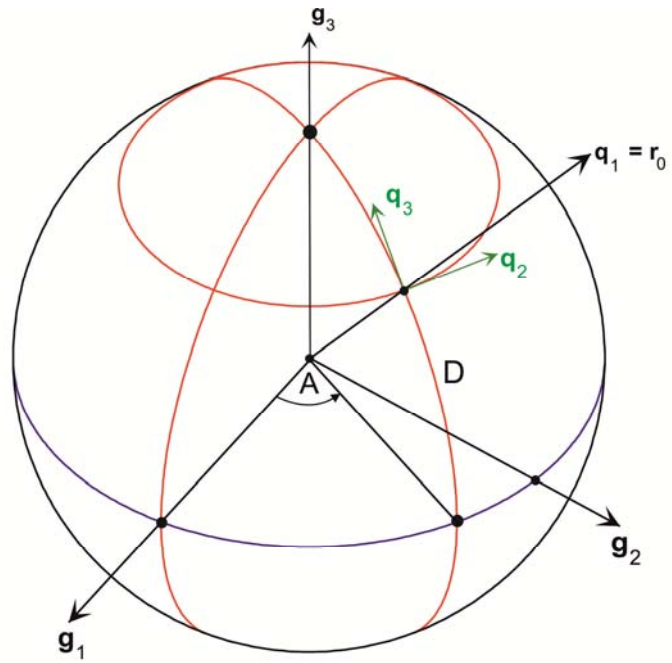


Bild 4-4: Das Basissystem des Polarkoordinatensystems als Beispiel für ein krummliniges Koordinatensystem

Die Basis $\mathbf{q}_j$ des krummlinigen Systems der y^j Koordinaten kann mit den Transformationsformeln (4.178) berechnet werden aus

$$\mathbf{q}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathbf{g}_i = x^i{}_{,j}\,\mathbf{g}_i = a_j{}^i\,\mathbf{g}_i \quad , \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{q}_j = y^j{}_{,i}\,\mathbf{q}_j = b_i{}^j\,\mathbf{q}_j \quad ,$$

also

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{g}_1 \cos D \cos A + \mathbf{g}_2 \cos D \sin A + \mathbf{g}_3 \sin D \\ \mathbf{q}_2 &= r \cos D\,(-\mathbf{g}_1 \sin A + \mathbf{g}_2 \cos A) \\ \mathbf{q}_3 &= r\,(-\mathbf{g}_1 \sin D \cos A - \mathbf{g}_2 \sin D \sin A + \mathbf{g}_3 \cos D) \quad . \end{aligned} \tag{4.182}$$

Diese Basisvektoren des krummlinigen Polarkoordinatensystems können geometrisch nach Bild 4-4 gedeutet werden. Sie werden auch als das *natürliche Dreibein* der Polarkoordinaten bezeichnet. Sie sind vom momentanen Ort $\mathbf{r}$ abhängig und daher auch bewegungsabhängig. Dies präzisiert die schon in Abschnitt 4.2.2 gemachte Aussage, dass die Einführung von Polarkoordinaten die Einführung eines bewegungsabhängigen Systems bedeutet.

$\mathbf{q_1}$ ist offenbar der Richtungsvektor des Ortsvektors (vgl. Formel (4.83) auf Seite 23)

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_0 \quad . \tag{4.183}$$

$\mathbf{q_2}$ ist ein Vektor im Punkt $\mathbf{r}$ an den Breitenkreis mit Breitenwinkel D und gerichtet in Richtung des wachsenden Winkels A. $\mathbf{q_2}$ ist kein Einheitsvektor, sondern hat die Länge

$$\left|\mathbf{q}_2\right| = r\cos D \quad . \tag{4.184}$$

$\mathbf{q_3}$ ist ein Vektor im Punkt $\mathbf{r}$ an den Meridian mit Längenwinkel A und gerichtet in Richtung des wachsenden Winkels D. Auch $\mathbf{q}_3$ ist kein Einheitsvektor, sondern hat die Länge

$$\left|\mathbf{q}_3\right| = r \quad . \tag{4.185}$$

Die $\mathbf{q}_j$ bilden ein Orthogonalsystem. Die Umkehrabbildung lautet (man beachte wieder die hochgestellten Indizes)

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{q}_1 \frac{x^{(1)}}{r} - \mathbf{q}_2 \frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} - \mathbf{q}_3 \frac{x^{(1)} x^{(3)}}{r^2 \sqrt{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}} \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{q}_1 \frac{x^{(2)}}{r} + \mathbf{q}_2 \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} - \mathbf{q}_3 \frac{x^{(2)} x^{(3)}}{r^2 \sqrt{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}} \\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{q}_1 \frac{x^{(3)}}{r} + \mathbf{q}_3 \frac{\sqrt{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}}{r^2}
\end{aligned} \tag{4.186}$$

und nach Einsetzen der x^i aus der Definitionsgleichung (4.180)

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{q}_1 \cos D \cos A - \mathbf{q}_2 \frac{\sin A}{r \cos D} - \mathbf{q}_3 \frac{\sin D \cos A}{r} \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{q}_1 \cos D \sin A + \mathbf{q}_2 \frac{\cos A}{r \cos D} - \mathbf{q}_3 \frac{\sin D \sin A}{r} \\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{q}_1 \sin D + \mathbf{q}_3 \frac{\cos D}{r} \quad .
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Werden die $\mathbf{q}_j$ mit den Beträgen (4.183) – (4.185) auf Einheitsvektoren reduziert

$$\mathbf{q}_{10} := \mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_0 \quad , \quad \mathbf{q}_{20} := \mathbf{q}_2 \frac{1}{r \cos D} \quad , \quad \mathbf{q}_{30} := \mathbf{q}_3 \frac{1}{r} \quad , \tag{4.188}$$

lautet der Ortsvektor im neuen krummlinigen System formal

$$\mathbf{r} = y^{(1)}\, \mathbf{q}_{10} \quad , \tag{4.189}$$

während die anderen Komponenten nicht in Erscheinung treten. Das Basissystem des krummlinigen Polarkoordinatensystems reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{q}_{10} \cos D \cos A - \mathbf{q}_{20} \sin A - \mathbf{q}_{30} \sin D \cos A \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{q}_{10} \cos D \sin A + \mathbf{q}_{20} \cos A - \mathbf{q}_{30} \sin D \sin A \\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{q}_{10} \sin D + \mathbf{q}_{30} \cos D \quad .
\end{aligned} \tag{4.190}$$

Wegen der Orthogonalität der $\mathbf{g}_i$ und der $\mathbf{q}_{i0}$ gilt also auch in diesem Fall

$$\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^T \quad . \tag{4.191}$$

4.3.6 Tangentialräume

In einem *n*-dimensionalen Punktraum $\mathbb{A}_{\mathbf{n}}$, dessen Punkte durch krummlinige Koordinaten y^j beschrieben werden können, werde in jedem Punkt mit Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(y^j)$ ein Raum $\mathbb{T}_{\mathrm{n}}$ zugeordnet, der durch die *n* linear unabhängigen Basisvektoren (4.171) $\mathbf{q}_j := \mathbf{r}_{,j}$ aufgespannt wird. Jeder der Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ ist tangential an den gegebenen Raum. Man bezeichnet diesen Raum $\mathbb{T}_{\mathrm{n}}$ daher als *Tangentialraum* an den gegebenen Raum $\mathbb{A}_{\mathbf{n}}$. Wenn die Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ einen euklidischen Vektorraum bilden, spricht man von einem *euklidischen Tangentialraum*, allgemeiner von einem (affinen) Tangentialraum. Die Tangentialräume $\mathbb{T}_{\mathrm{n}}$ sind von dem betrachteten Punkt im gegebenen Raum abhängig, wechseln also mit den krummlinigen Koordinaten y^j. Die Eigenschaft, dass in beliebigen Räumen euklidische, allgemeiner affine Tangentialräume gebildet werden können, ist fundamental bei der Untersuchung von Flächen[1] und allgemeiner in *Riemann*schen Räumen[2]. (Dazu wird von der allgemeingültigen Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass mit jedem Punkt einer *n*-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein *n*-dimensionaler Vektorraum verknüpft werden kann).

BEISPIELE:

1. Eine Kurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ kann als eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden. In jedem Punkt, in dem r einmal differenzierbar ist, gibt es den Tangentenvektor $\dot{\mathbf{r}}$ durch den eine Gerade, die Tangente, festgelegt werden kann, die ein 1-dimensionaler euklidischer Raum ist. ◀

2. Die Kugeloberfläche ist eine zweidimensionale (nichteuklidische) Mannigfaltigkeit. In jedem Punkt der Kugeloberfläche kann eine Tangentialebene an die Kugeloberfläche gelegt werden. Die Tangentialebene ist eine zweidimensionale euklidische Fläche. ◀

4.3.7 Geradlinig bewegte Systeme

Ist ein geradliniges System vorgegeben, so dass für das Vektorfeld $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i)$ bezogen auf die Basis $\mathbf{g}_i$ dieses Systems die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{g}_i$$

möglich ist, so ist dieses System geradlinig bewegt, wenn es keine Rotationen ausführt, wenn also gilt:

$$\dot{\mathbf{g}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{g}_i \text{ bilden geradlinig bewegtes System} \quad . \tag{4.192}$$

Denn da die $\dot{\mathbf{g}}_i$ auf den zugehörigen $\mathbf{g}_i$ senkrecht stehen, bedeutet $\dot{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}} \neq 0$ eine Rotation des betreffenden Systems[3]. Die Bedingung $\dot{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}} \equiv 0$ ist somit notwendig und hinreichend für ein geradlinig bewegtes System. Aus

[1] siehe in Kapitel 7

[2] Siehe dazu etwa A. LICHNEROWICZ [1966], p. 71 ff.

[3] Wie diese Rotation aussieht, zeigt Formel (4.227) auf Seite 52

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\dot{x}_j = 0$$

kann nicht geschlossen werden, dass das System ortsunabhängig ist, denn die Beziehung $\dot{\mathbf{g}}_i = 0$ kann auch für

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \neq 0$$

erfüllt werden. Umgekehrt erfüllt jedes ortsunabhängige System die Bedingung $\dot{\mathbf{g}}_i = 0$, ist also notwendig geradlinig bewegt.

4.3.8 Inertiale Systeme

Ein weiterer Spezialfall eines geradlinigen bewegten Systems ist ein *gleichförmig geradlinig bewegtes System*. Es entsteht, wenn das System sich mit konstanter (bzw. verschwindender) Geschwindigkeit bewegt. Physikalisch gesehen handelt es sich um ein System, auf das keine äußeren Kräfte einwirken. Das System unterliegt als Ganzes dem Trägheitssatz und wird deshalb auch als *inertial* bezeichnet. Das *Machsche Prinzip* liefert eine alternative Definition eines inertialen Systems, wie sie für die spezielle Relativitätstheorie von Bedeutung wird[1]:

„Ein System ist inertial, wenn es *gegen den Rest der Welt fest ist.*"

Inertiale Systeme spielen in der *Newton*schen Mechanik wie in der speziellen Relativitätstheorie eine zentrale Rolle. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird der absolute Charakter der inertialen Systeme gegenstandslos. In ihr können inertiale Systeme nur lokal auftreten. Im Folgenden wollen wir uns auf eine rein mathematische Definition des inertialen Systems zurückziehen.

Sei **a** der Ortsvektor des Ursprungs eines Systems bezogen auf das Fundamentalsystem $\mathbf{g}_i$, mit

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0 \quad , \quad a = |\mathbf{a}| \quad , \quad \mathbf{a}_0^2 = 1 \quad . \tag{4.193}$$

Ein Inertialsystem bewegt sich also gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit und geradlinig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist dann nach Formel (4.101) auf Seite 26 $\dot{\mathbf{a}}_0 = 0$ und es gilt

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}\mathbf{a}_0 \ , \quad \dot{a} = \text{const.} \ , \quad \dot{\mathbf{a}}_0 = 0 \ , \quad \dot{\mathbf{g}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System ist inertial.} \tag{4.194}$$

4.3.9 Feste Systeme

Ein *festes System* ist ein System, das keine Eigenbewegung besitzt. Ein festes System kann nur rein mathematisch als solches verstanden werden. Da jede Bewegung relativ zu irgendeinem System stattfindet, darf umgekehrt festgestellt werden, ob nicht ein bestimmtes Objekt fest sei, relativ zu dem sich ein umgebendes System bewegt. Dies gibt Anlass ein System als fest zu wählen, bezüglich dem Bewegungen untersucht werden können. Wurde ein System als fest gewählt, so sind prinzipiell unendlich viele andere Systeme konstruierbar, die relativ zu dem ursprünglichen festen System ebenfalls fest sind. Man wird daher ein bestimmtes System auswählen, auf das alle anderen festen oder bewegten Systeme bezogen werden. Ein solches

[1] sinngemäß in E. MACH [1933/1991], pp.233-237

System wird in der sphärischen Astronomie als *Fundamentalsystem* bezeichnet. Die Auswahl eines geeigneten Fundamentalsystems ist eine der wichtigsten Aufgaben der sphärischen Astronomie (siehe hierzu Kapitel 8).

In einem festen System sind die Basisvektoren gi notwendig konstant. Sei wieder $\mathbf{a} = a\,\mathbf{a}_0$ der Ortsvektor des Ursprungs des Systems. Dann gilt für ein festes System:

$$\dot{a} = 0\ , \quad \dot{\mathbf{a}}_0 = 0\ , \quad \dot{\mathbf{g}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System ist fest} \quad . \tag{4.195}$$

Ein festes System lässt sich mathematisch als solches definieren. Ob es auch physikalisch ein festes System gibt kann mit diesen Definitionen nicht ausgesagt werden.

4.3.10 *Hansen*-ideale Systeme

Wir nehmen wieder an, dass das Vektorfeld $\mathbf{r}$ in geradlinigen Koordinaten $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ mit Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ darstellbar sei. Der zweite Summand in der Geschwindigkeitsbeziehung (4.98) auf Seite 26 verschwindet entweder, wenn das System geradlinig bewegt ist, wenn also $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$ ist. Eine andere Möglichkeit für das Verschwinden dieses Summanden gibt es auch im Fall, dass die $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)}$ nicht verschwinden, das System also nicht geradlinig bewegt ist: In

$$\begin{aligned} & y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y^j\ ,\ \mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{bilden ein } \textit{Hansen}\text{–ideales System} \quad . \end{aligned} \tag{4.196}$$

diesem Fall wird das System nach *P. A. Hansen*[1] als *ideales System* bezeichnet[2]. Wegen der grundlegenden Bedeutung dieses Systems für die Untersuchung jedweder Bewegungsprobleme wird dieses System im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit als *Hansen*-System bezeichnet.

Wir können formulieren:

Satz H1: *Ein Koordinatensystem wird genau dann als ein* Hansen-*System bezeichnet, wenn der Geschwindigkeitsvektor die Bedingung erfüllt*

$$y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \quad . \tag{4.197}$$

Hansen-Systeme sind in der Bewegungslehre und damit auch in Himmelsmechanik und Bahnmechanik von interessanter Wichtigkeit.

Werden die Koordinaten y^j auf ein $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System bezogen, sind sie fest mit diesem System verbunden. Sie machen also jede Eigenbewegung dieses Systems mit, ohne dass diese Eigenbewegung in den Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors zum Ausdruck kommt. In

---

[1] P. HANSEN [1857] hatte dieses System als "ideales" Koordinatensystem eingeführt. Der Begriff „ideal" ist heutzutage sicher nicht ideal. Es bietet sich stattdessen der Begriff „*Hansen*-ideal" an oder einfach „*Hansen* System". V.A. BRUMBERG [1995], pp. 69–74 verwendet den Begriff „*Hansen* Koordinaten", der hier neben dem Begriff „*Hansen* System" oder „*Hansen*-ideales System" verwendet werden soll.

[2] A. DEPRIT [1975] führt darauf basierend „ideale" Elemente ein, die auf den „idealen Referenzraum" bezogen sind (siehe näheres dazu in Kapitel 11 (Band III))

diesem Fall ist also Formel (4.196) für die feste Zuordnung der Koordinaten y^j zum Basissystem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ notwendig und hinreichend. Diese Koordinaten sind also stets *Hansen*-Koordinaten (die Aussage ist gleichbedeutend mit: „bilden ein *Hansen*-ideales System", „sind *Hansen*-ideale Koordinaten", „sind ideale Koordinaten"). Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gilt dann im $\mathbf{q}_j^{(I)}$ − *Hansen*-System,

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad (\text{wenn} \quad y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \;=\; y^j\,\mathbf{q}_j^{(I)}) \quad . \tag{4.198}$$

Gleichbedeutend mit *Satz 1* ist daher:

Satz H2: *In* Hansen-*idealen Systemen ist der relative Geschwindigkeitsvektor gleich dem absoluten Geschwindigkeitsvektor.*

Da die Variationen des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ − Basissystems, wenn es *Hansen*-ideal ist, wegfallen, tritt bei der Behandlung der Bewegung keine räumliche Variation im Zusammenhang der Bewegungsgleichungen auf, die „Gleichungen der Bewegung sind im gestörten Fall gleich denen im ungestörten Fall". Deshalb wurde ein derartiges System von *P. A. Hansen* „ideal" genannt. Genauere Zusammenhänge und vor allem Einschränkungen im Zusammenhang mit dem Begriff der (*Hansen* -) idealen Systeme werden in den folgenden Kapiteln hinterfragt.

Aus Formel (4.196) folgt durch Differentiation

$$\dot{y}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} + y^j\,\ddot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$$

und für den Beschleunigungsvektor aus Formel (4.198)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \;&=\; \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i + \dot{x}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \\ \ddot{\mathbf{r}} \;&=\; \ddot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} + \dot{y}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \quad . \end{aligned}$$

Wenn neben $y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$ auch

$$y^j\,\ddot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \tag{4.199}$$

erfüllt ist, gilt wegen $\dot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} + y^j\,\ddot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$ auch

$$\dot{y}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \tag{4.200}$$

und es bleibt für den Beschleunigungsvektor die Darstellung[1]

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \ddot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad (\text{wenn} \quad y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \quad \text{und} \quad y^j\,\ddot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0) \quad . \tag{4.201}$$

Mit den Beziehungen (4.199) (bzw. (4.201)) ist nur ausgesagt, welche Eigenschaften *Hansen*-ideale Systeme haben. Ob es *Hansen*-ideale Systeme wirklich gibt, kann daraus noch nicht geschlossen werden. Allerdings werden wir bereits im nächsten Abschnitt ein solches *Hansen*-ideales System kennen lernen sowie anschließend einige grundlegende Bedingungen für *Hansen*-ideales Systeme.

---

[1] Die Beziehungen in den zweiten Ableitungen werden bei STUMPFF [1974], p.167 ff. näher betrachtet, sind jedoch für die Untersuchungen des vorliegenden Berichtes nicht weiter relevant.

4.3.11 Die Variationsgleichungen eines orthonormierten Basissystems

Für die Variationen $\dot{\mathbf{p}}_i$ einer orthonormierten Basis $\mathbf{p}_i$ lässt sich eine Beziehung herleiten, die im Zusammenhang mit der Untersuchung von Bewegungen von besonderem Interesse ist. Jeder Variationsvektor $\dot{\mathbf{p}}_i$ eines Basissystems kann wie jeder andere Vektor eines Vektorraumes $\mathbb{V}_n$ als eine Linearkombination (4.7) (von Seite 8) bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem mit Komponenten $p_i^{\ j}$ geschrieben werden

$$\dot{\mathbf{p}}_i \;=\; p_i^{\ j}\,\mathbf{p}_j \quad , \tag{4.202}$$

wobei wegen $\mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = 0$ auch $p_{ii} = 0$ für i=1,2, 3, ..., n gilt.

Im dreidimensionalen Raum bleiben dann speziell

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1 &= p_{12}\,\mathbf{p}_2 + p_{13}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= p_{21}\,\mathbf{p}_1 + p_{23}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= p_{31}\,\mathbf{p}_1 + p_{32}\,\mathbf{p}_2 \quad .
\end{aligned}$$

Da im Fall von Orthonormie $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$, ist

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_j \;=\; 0$$

und die Koeffizientenmatrix ($p_i^{\ j}$) somit *antisymmetrisch*:

$$p_{ij} \;=\; -\,p_{ji} \quad . \tag{4.203}$$

Mit den Abkürzungen

$$D_{p1} \;:=\; p_{23} \quad , \quad D_{p2} \;:=\; p_{31} \quad , \quad D_{p3} \;:=\; p_{12} \tag{4.204}$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1 &= \qquad\quad D_{p3}\,\mathbf{p}_2 - D_{p2}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= -D_{p3}\,\mathbf{p}_1 \qquad + D_{p1}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \quad D_{p2}\,\mathbf{p}_1 - D_{p1}\,\mathbf{p}_2 \quad .
\end{aligned} \tag{4.205}$$

Diese Darstellungen gelten für die Variation jedes beliebigen orthonormierten Basissystems und können als die ***Variationsgleichungen eines orthonormierten Basissystems*** bei dessen Variation bezeichnet werden[1].

Diese Variationsgleichungen können genauer als die „absoluten Variationsgleichungen“ bezeichnet werden, da sie die Variationen des Systems sich selbst gegenüber und nicht relativ zu einem anderen System beschreiben.

4.3.12 Transformationen mit Hilfe der Variationsmatrix

Die hier eingeführten allgemeinen *Frenet*schen Formeln sind bei der Aufstellung der Variationen einer Transformation zwischen verschiedenen Systemen und allgemeiner der Beschrei-

[1] Diese Formeln können eventuell auch als ***allgemeine Frenetsche Formeln*** dieses Systems im Anklang an die *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie bezeichnet werden. Einige konkrete Beispiele solcher Variationsformeln („allgemeiner *Frenet*scher Formeln“) in verschiedenen Systemen werden in Abschnitt 4.4 ab Seite 64 vorgestellt.

bung einer Bewegung von zentraler Bedeutung. Seien die Koeffizienten D_{pi} der allgemeinen *Frenet*schen Formeln (4.205) durch die schiefsymmetrische Matrix (wir können sie als „*Variationsmatrix*“ bezeichnen, da sie die Variation eines Koordinatensystems in Bezug auf sich selbst kontrolliert)

$$\left(p_i^{\ j}\right)=\begin{pmatrix} 0 & D_{p3} & -D_{p2} \\ -D_{p3} & 0 & D_{p1} \\ D_{p2} & -D_{p1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & -p_{31} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.206}$$

dargestellt und sei die Transformation auf ein neues $\mathbf{q}_j$ - Basissystem durch

$$\mathbf{p}_i = b_i^{\ j}\,\mathbf{q}_j \tag{4.207}$$

gegeben, beträgt die Variation des alten Systems in Bezug auf das neue System

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{b}_i^{\ j}\,\mathbf{q}_j + b_i^{\ j}\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{4.208}$$

Für das neue $\mathbf{q}_j$ – System werde die Variationsmatrix $\left(q_j^{\ k}\right)$ angenommen, so dass

$$\dot{\mathbf{q}}_j = q_j^{\ k}\,\mathbf{q}_k \tag{4.209}$$

gesetzt werden kann. Aus den Beziehungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i^{\ j}\,\mathbf{p}_j = p_i^{\ j}\,b_j^{\ k}\,\mathbf{q}_k = \dot{b}_i^{\ k}\,\mathbf{q}_k + b_i^{\ j}\,q_j^{\ k}\,\mathbf{q}_k$$

können wegen der Orthonormie der beiden Systeme durch Komponentenvergleich die Variationen der Koeffizienten der Transformation $\mathbf{p}_i = b_i^{\ j}\mathbf{q}_j$ berechnet werden:

$$\dot{b}_i^{\ k} = p_i^{\ j}\,b_j^{\ k} - b_i^{\ j}\,q_j^{\ k} \quad . \tag{4.210}$$

Entsprechend ergibt sich für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i$$

die Berechnung der Variation der Transformationsmatrix $\left(a_j^{\ i}\right)$ aus

$$\dot{a}_j^{\ i} = q_j^{\ k}\,a_k^{\ i} - a_j^{\ k}\,p_k^{\ i} \quad . \tag{4.211}$$

Diese Ausdrücke liefern die interessanten und sehr wichtigen Aussagen:

(1) Die Variation einer Transformation von einem gegebenen orthonormierten System in ein zweites wird vollständig durch die Koeffizienten der Variationsmatrix des ursprünglichen Systems und die Koeffizienten der Transformationsmatrix bestimmt.

(2) Für die Variation der Transformationskoeffizienten sind ausschließlich die Variationsmatrizen der beiden Systeme verantwortlich. Die Variationsmatrixen sind von einer Transformation vollständig unabhängig. Somit kontrolliert die Variationsmatrix des ursprünglichen Systems die Variation einer jeden Transformation in irgendein anderes System. Wenn eine Variationsmatrix bekannt ist, brauchen daher also keine Variationen durch Differentiation irgendwelcher Transformationskoeffizienten berechnet zu werden.

(3) Die Variationen $\left(\dot{b}_i^{\ j}\right)$ der Transformation sind nach Formel (4.210) nur dann vollständig, wenn die Variationsmatrizen der beiden Systeme bekannt sind. Der erste Anteil $p_i^{\ j}b_j^{\ k}$

zeigt den Anteil der Variation des ersten Systems bezüglich des zweiten Systems. Der zweite Anteil $b_i{}^j q_j{}^k$ enthält den Anteil der Variation, der von der Eigenbewegung des zweiten Systems herkommt und von dessen Variationsmatrix kontrolliert wird.

(4) Wenn die Variationen irgendeiner Abbildung $\left(b_i{}^j\right)$ bekannt sind, wenn $\left(a_j{}^k\right)$ die Umkehrabbildung mit $b_i{}^j a_j{}^k = \delta_i^k$ ist und wenn die Variationsmatrix eines der beiden Systeme bekannt ist, kann die Variationsmatrix des anderen Systems berechnet werden:

$$p_i{}^l = \dot{b}_i^k \, a_k{}^l + b_i{}^j \, q_j{}^k \, a_k{}^l = b_i{}^j \, q_j{}^k \, a_k{}^l - b_i{}^j \, \dot{a}_j{}^l \tag{4.212}$$

bzw.

$$q_l{}^k = a_l{}^i \; p_i{}^j \, b_j{}^k - a_l{}^i \, \dot{b}_i^k = \dot{a}_l{}^i \, b_i^k + a_l{}^j \; p_j{}^i \, b_i^k \quad . \tag{4.213}$$

(5) Da die Variationsmatrix eines Systems von jeder Transformation eines Systems unabhängig ist, kann im Grunde auch angenommen werden, dass eine Transformation auf das (absolute) inertiale System des Weltalls erfolge. Die Variationsmatrix kontrolliert somit die gesamte Bewegung dieses Systems gegenüber dem „Rest der Welt“. Hier wird also die Formulierung *E. Machs* mathematisch greifbar. Die Beobachtung eines Bewegungsvorganges hat somit die Aufgabe, alle (im dreidimensionalen Raum im Wesentlichen 3) Komponenten einer Variationsmatrix zu bestimmen. Teile der Variationsmatrix können vielleicht - und dies notwendig unabhängig von anderen Systemen - modelliert werden, Teile werden übrig bleiben, wegen der unvermeidbaren Unvollkommenheit physikalischer Messungen, deren Modellierung noch offen bleiben muss. Wenn die Bewegung eines Körpers, etwa eines Satelliten, beobachtet wird, so wird sich in dieser Bewegung, allerdings bis zur Unkenntlichkeit vielleicht versteckt und daher für eine Beobachtung je feiner umso schwieriger erkennbar, die Einwirkung des gesamten Weltalls widerspiegeln.

(6) Es werde ein bewegtes Objekt betrachtet, für das die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{r} = x^i \, \mathbf{p}_i$$

bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem besteht. Der absolute Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i + x^i \, \dot{\mathbf{p}}_i$$

kann zerlegt werden in einen Anteil

$$\dot{\mathbf{r}}_p := \dot{x}^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{4.214}$$

der die Bewegung relativ zum $\mathbf{p}_i$ – Basissystem beschreibt, und mit Hilfe der Variationsmatrix in einen Anteil

$$x^i \, \dot{\mathbf{p}}_i = x^i \; p_i{}^j \, \mathbf{p}_j \quad ,$$

der die Bewegung des Objektes gegenüber dem „ Rest der Welt“ darstellt, da $\left(p_i{}^j\right)$ die **absolute** Bewegung des Basissystems kontrolliert.

Der Zusammenhang der Variationsmatrix mit einem *Hansen*-idealen System wird in Satz H3 des Abschnittes 4.3.15 ab Seite 53 behandelt werden.

Weitere Transformationseigenschaften werden im Zusammenhang mit der Behandlung geradliniger Systeme in Abschnitt 6.1 behandelt.

4.3.13 Additionstheorem fortlaufender Transformationen

Werden zwei Transformationen

$$\mathbf{p}_i = b_i^{\ j}\,\mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{q}_j = d_j^{\ k}\,\mathbf{z}_k \tag{4.215}$$

mit den Umkehrabbildungen

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{z}_k = c_k^{\ j}\,\mathbf{q}_j \tag{4.216}$$

und den Beziehungen der Transformationsmatrizen

$$a_j^{\ i}\,b_i^{\ k} = \delta_j^{\ k} \quad , \quad c_k^{\ j}\,d_j^{\ h} = \delta_k^{\ h} \tag{4.217}$$

nacheinander ausgeführt, ergibt sich

$$\mathbf{p}_i = b_i^{\ j}\,d_j^{\ k}\,\mathbf{z}_k \quad , \quad \mathbf{z}_k = c_k^{\ j}\,a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{4.218}$$

▶ *Transformationen werden addiert indem die zugehörigen Transformationsmatrizen multipliziert werden.*

Für einen Ortsvektor mit den Darstellungen

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i = y^j\,\mathbf{q}_j = z^k\,\mathbf{z}_k \tag{4.219}$$

werden die Komponenten mit den Beziehungen

$$x^i = z^k\,c_k^{\ j}\,a_j^{\ i} \quad , \quad z^k = x^i\,b_i^{\ j}\,d_j^{\ k} \tag{4.220}$$

transformiert.

Für die Variationsvektoren der Systeme gibt es entsprechend die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{b}_i^{\ j}\,\mathbf{q}_j + b_i^{\ j}\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{d}_j^{\ k}\,\mathbf{z}_k + d_j^{\ k}\,\dot{\mathbf{z}}_k$$

und wenn das $\mathbf{z}_k$ – System den Variationsvektor

$$\dot{\mathbf{z}}_k = s_k^{\ h}\,\mathbf{z}_h \tag{4.221}$$

hat, schließlich

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \left(\dot{a}_i^{\ j}\,d_j^{\ k} + a_i^{\ j}\,\dot{d}_j^{\ k} + a_i^{\ j}\,d_j^{\ h}\,s_h^{\ k}\right)\mathbf{z}_k \quad . \tag{4.222}$$

Für die Umkehrung wird mit $\dot{\mathbf{p}}_i = p_k^{\ i}\,\mathbf{p}_i$

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i + a_j^{\ i}\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{z}}_k = \dot{c}_k^{\ j}\,\mathbf{q}_j + c_k^{\ j}\,\dot{\mathbf{q}}_j$$

somit

$$\dot{\mathbf{z}}_k = \left(\dot{c}_k^{\ j}\,a_j^{\ i} + c_k^{\ j}\,\dot{a}_j^{\ i} + c_k^{\ j}\,a_j^{\ h}\,p_h^{\ i}\right)\mathbf{p}_i \quad . \tag{4.223}$$

Für die Komponenten eines relativen Geschwindigkeitsvektors lauten die Transformationsregeln

$$\dot{x}^i = \dot{z}^k c_k{}^j a_j{}^i + z^k \dot{c}_k{}^j a_j{}^i + z^k c_k{}^j \dot{a}_j{}^i \tag{4.224}$$

und umgekehrt

$$\dot{z}^k = \dot{x}^i b_i{}^j d_j{}^k + x^i \dot{b}_i{}^j d_j{}^k + x^i b_i{}^j \dot{d}_j{}^k \quad . \tag{4.225}$$

4.3.14 Der absolute Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems

Führt man im dreidimensionalen Raum den ursprünglich von *Darboux* für die *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie eingeführten Vektor

$$\mathbf{D}_p := D_p^i \mathbf{p}_i \tag{4.226}$$

ein, erlaubt dies für die Variation der $\mathbf{p}_i$ in den Variationsgleichungen (4.205) die im dreidimensionalen Raum gültige Darstellung

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \quad . \tag{4.227}$$

$\mathbf{D}_\mathrm{p}$ kann als der *Eigenbewegungsvektor (*oder auch als *allgemeiner Darbouxscher Vektor)* bezeichnet werden. Er stellt den Vektor dar, um den ein System bei seiner Variation gedreht wird. Gemeint ist damit, dass die Differentiation der Basisvektoren $\mathbf{p}_i$ nach der unabhängigen Variablen als Drehung um den Vektor $\mathbf{D}_\mathrm{p}$ gedeutet werden kann, wobei die Drehung die Winkelgeschwindigkeit $\left|\mathbf{D}_p\right|$ hat.

Der Vektor $\mathbf{D}_\mathrm{p}$ kann auch als „System-Variationsvektor“ oder als „System-Eigenbewegungsvektor“ oder kurz als „Eigenbewegungsvektor“ bezeichnet werden, wobei zu beachten ist, dass dieses System ein geradliniges orthonormiertes Basissystem ist, wie in Formel (4.227) durch das $\mathbf{p}_i$-System beschrieben wird.

Formel (4.227) lässt sich sofort verallgemeinern:

- *Es gibt (im dreidimensionalen Raum) zu jedem variablen Einheitsvektor* **e** *einen Vektor* **E***, so dass die Variation dieses Einheitsvektors als Rotation um* **E** *gedeutet werden kann:*

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{E} \times \mathbf{e} \tag{4.228}$$

Für die Variation des allgemeinen *Darboux*schen Vektors ergibt sich ganz allgemein eine interessante Aussage: Es ist nach Formel (4.226)

$$\dot{\mathbf{D}}_p = \dot{D}_p{}^i \mathbf{p}_i + D_p{}^i \dot{\mathbf{p}}_i$$

und mit Formel (4.227)

$$\dot{\mathbf{D}}_p = \dot{D}_p{}^i \mathbf{p}_i + D_p{}^i \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \quad ,$$

worin der zweite Anteil wegen Formel (4.205) verschwindet:

$$D_p{}^i \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \mathbf{D}_p \times D_p{}^i \mathbf{p}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{D}_p = 0 \quad .$$

Es bleibt also:

$$\dot{\mathbf{D}}_p \;=\; \dot{D}_p{}^i \mathbf{p}_i \quad . \tag{4.229}$$

▶ *Die Variation des Eigenbewegungsvektors ist invariant gegenüber jeder Variation des Basissystems*.

Mit der im Ausdruck (4.196) gegebenen Definition für *Hansen*-ideale Koordinaten ist die vorstehende Aussage zu folgender äquivalent:

Satz H3: *Der System*-Eigenbewegungs*vektor bildet mit dem zugehörigen Basissystem ein* Hansen-*ideales System*.

Die Beziehungen zwischen den Komponenten des Eigenbewegungsvektors und der Variationsmatrix

$$D_{p1} = p_{23} \quad , \quad D_{p2} = p_{31} \quad , \quad D_{p3} = p_{12} \tag{4.230}$$

zeigen auch:

▶ *Die Variationsmatrix hat (im dreidimensionalen Raum) genau dann nur zwei wesentliche Koeffizienten, wenn der entsprechende Eigenbewegungsvektor des Systems in einer der Basisebenen dieses Systems liegt.*

Der hier definierte Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p$ ist auf das $\mathbf{p}_i$ – System bezogen. Wenn es gelingt, die $\dot{\mathbf{p}}_i$ und damit $\mathbf{D}_p$ zu bestimmen, ist damit die **absolute** Bewegung dieses Systems bekannt, also die Bewegung, wie sie durch alle im Weltall vorhandenen Einflüsse gesteuert wird. Die Gesamtheit dieser Einflüsse muss sich also in der (Eigen-) Bewegung dieses Systems wiederspiegeln.

4.3.15 Einige Charakteristiken von *Hansen*-idealen Systemen

Über *Hansen*-ideale Systeme sind folgende mathematische Aussagen von Bedeutung im Zusammenhang mit der Untersuchung physikalischer Bewegungen[1]:

(1) ***Satz H4:*** *Bildet der Ortsvektor* $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ *mit seiner Basis* $\mathbf{q}_j^{(I)}$ *ein* Hansen-*System, so sind die Koordinaten des skalaren Feldes f*(**r**) Hansen-*Koordinaten.*

BEWEIS: Da **r** zu einem *Hansen*–idealen System gehört, gilt

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \;=\; 0 \quad .$$

Somit ist

$$\dot{f} \;=\; \frac{df(\mathbf{r})}{dt} \;=\; \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}} \nabla f \;=\; \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)} \frac{\partial f}{\partial y^k} \mathbf{q}_k^{(I)} \;=\; \dot{y}^j \frac{\partial f}{\partial y^j} \quad .$$

[1] vgl. STUMPFF. K. [1974], p. 173

Die Variation des skalaren Feldes eines *Hansen*-Systems hängt nur von den Variationen der Koeffizienten des (einem *Hansen*-System angehörigen) Ortsvektors des Feldes, nicht von einer Variation des Basissystems ab. Bildet dagegen bei $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i$ das $\mathbf{p}_i$ -Basissystem kein *Hansen*-System, wird im dreidimensionalen Raum (entsprechendes bei höheren Dimensionen)

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \dot{\mathbf{p}}_1 \mathbf{p}_2 + \\ &+ \left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \dot{\mathbf{p}}_2 \mathbf{p}_3 + \\ &+ \left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \dot{\mathbf{p}}_3 \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad . \blacktriangleleft$$

(2) Die Einführung des allgemeinen *Darboux*schen Vektors erlaubt einen tieferen Einblick in das Wesen von *Hansen*-Systemen. Ist der Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x^i \mathbf{p}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \dot{\mathbf{p}}_i \end{aligned}$$

für das bewegte orthonormierte System

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$$

gegeben, dessen *Darboux*scher Vektor $\mathbf{D}_\mathrm{p}$ sei mit

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \quad ,$$

so wird

$$x^i \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \quad . \tag{4.231}$$

Sei der Ortsvektor auf ein *Hansen*-System bezogen mit $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$, das nichtfest, nicht inertial sei, und für das $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \neq 0$, so ist wegen $y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$ notwendig und hinreichend

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System } \textit{Hansen}\text{–ideal} \quad . \tag{4.232}$$

Wir erhalten somit folgenden auf *Hansen*[1] zurückgehenden

Satz H5: *Ein Vektor im dreidimensionalen Vektorraum bildet mit seiner Basis genau dann ein* Hansen-*System, wenn seine Richtung stets in Richtung des eine Drehung beschreibenden allgemeinen Darbouxschen Vektors zeigt.*

Der absolute Systemeigenbewegungsvektor eines *Hansen*-Systems sei definiert durch

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} := D_{q^{(I)}}{}^j \, \mathbf{q}_j^{(I)} \tag{4.233}$$

und es sei für die Variation der Basis des *Hansen*-Systems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} =: q^{(I)}{}_j{}^k \, \mathbf{q}_k^{(I)} \quad . \tag{4.234}$$

[1] P. A. HANSEN [1857], p. 67

Damit gilt

(3) ***Satz H6:*** *Ein Ortsvektor* $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ *bildet mit seiner Basis genau dann ein* Hansen-*System, wenn die Komponenten der Variationsmatrix* $\left(q^{(I)}{}_j{}^k\right)$ *dieses Systems die Bedingung*

$$y^j \, q^{(I)}{}_j{}^{(k)} = 0 \qquad \text{für } (k = 1,2,3) \tag{4.235}$$

erfüllen.

BEWEIS: $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ bildet mit den Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ genau dann ein *Hansen*-ideales System, wenn $y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$. Es seien $\left(q^{(I)}{}_j{}^k\right)$ die Variationsparameter des $\mathbf{q}_j^{(I)}-$Systems entsprechend Definition (4.234). Dann gilt

$$y^j q^{(I)}{}_j{}^k \mathbf{q}_k^{(I)} = 0 \quad .$$

Da die $\mathbf{q}_j^{(I)}$ als eine Basis linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten $y^j \, q^{(I)}{}_j{}^{(k)} = 0$ für j=1,2,3 sein. q.e.d.◀

(4) Eine wichtige Aussage über die Mächtigkeit von *Hansen*-Systemen kann direkt aus Formel (4.235) erhalten werden. Es ist

$$\begin{aligned} q_{23}^{(I)} \, y_2 - q_{31}^{(I)} \, y_1 &= 0 \\ q_{31}^{(I)} \, y_3 - q_{12}^{(I)} \, y_2 &= 0 \\ q_{12}^{(I)} \, y_1 - q_{23}^{(I)} \, y_3 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.236}$$

Es sind also nur zwei Komponenten y^j aus der Bedingung von *Hansen*-idealen Systemen bestimmbar, während die dritte Komponente willkürlich gewählt werden kann.

Satz H7: *Es sind zu jeder Bewegung unendlich viele* Hansen-*Systeme möglich.*

Die verschiedenen *Hansen*-Systeme unterscheiden sich lediglich durch eine Integrationskonstante. Man kann daher auch so formulieren, dass es „im Wesentlichen" nur genau ein *Hansen*-System gibt. Wir können also alternativ auch so formulieren:

Satz H7a: *Es gibt zu jeder Bewegung im Wesentlichen genau ein* Hansen-*System.*

(5) Die Bedingung (4.235) kann zur Konstruktion eines *Hansen*-Systems genutzt werden. Nach (willkürlicher) Vorgabe eines der drei wesentlichen Koeffizienten der *Frenet*-Matrix können seine anderen beiden Koeffizienten aus dem System (4.235) berechnet werden. Nach *P. A. Hansen* werden im bahnmechanischen Zusammenhang nur Systeme mit $y_3 = 0$ betrachtet[1].

[1] Den in der Originalarbeit von HANSEN [1857] verwendeten Parametern *A, B, C* entsprechen in diesem Bericht die Komponenten D_i des *Darboux*schen Vektors: $A = D_3$, $B = D_2$, $C = D_1$

Ein Beispiel für eine derartige Konstruktion eines *Hansen*-Systems wird in Abschnitt 4.4.3 ab Seite 71 beschrieben.

(6) Ferner können wir schließen:

***Satz H8**: Ausschlaggebend für einen Vektor mit einer Basis ein* Hansen-*System zu bilden, ist ausschließlich seine Richtung, nicht sein Betrag. Nicht die physikalischen Koordinaten eines Vektors, sondern nur die Koordinaten seines Richtungsvektors können in Bezug auf eine gewisse Basis als* Hansen-*ideale Koordinaten bezeichnet werden.*

Außerdem:

***Satz H9*:** Die *Eigenschaft eines Vektors mit seiner Basis ein* Hansen-*System zu bilden, ist an den Ortsvektor somit an die Bewegung des zugehörigen Ortes (Körpers) gebunden. Wenn es gelingt, ein* Hansen-*ideales System zu konstruieren, kann dies nur im Zusammenhang mit einem auf die Bewegung des betreffenden Körpers bezogenen System geschehen.*

4.3.16 Die Notwendigkeit von *Hansen*-idealen Systemen

(1) Über die Originalarbeit von *P. A. Hansen* hinausgehend kann eine wesentlich weiterführendere fundamentale Aussage gemacht werden. Wir betrachten dazu die aus der Bahnmechanik bekannte Polardarstellung eines Orts- und Geschwindigkeitsvektors

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \quad \dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \quad . \end{aligned} \tag{4.237}$$

Es ergibt sich folgender grundlegender

Satz H10: *Wird der Betrag der Variation des radialen Einheitsvektors einer Bewegung als Differentialquotient eines Winkels verstanden, so ist dieser Winkel (notwendig und hinreichend) die Winkelkoordinate eines* Hansen-*Systems*[1].

In mathematischer Formulierung: Wenn

$$\dot{\mathbf{r}}_0 \;=\; \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \qquad , \left(\mathbf{q}_0{}^2 = 1\right) \qquad , \tag{4.238}$$

ist ζ die Winkelkoordinate eines „idealen" Systems. Um dies zu beweisen, werden die $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Basisvektoren dieses Systems so gewählt, dass sich der radiale und der transversale Richtungsvektor mit Hilfe des Winkels ζ beschreiben lassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{r}_0 \cos\zeta - \mathbf{q}_0 \sin\zeta \\ \mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{r}_0 \sin\zeta + \mathbf{q}_0 \cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{4.239}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \cos\zeta - \dot{\mathbf{q}}_0 \sin\zeta - \mathbf{r}_0\,\dot{\zeta}\sin\zeta - \mathbf{q}_0\,\dot{\zeta}\cos\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \sin\zeta + \dot{\mathbf{q}}_0 \cos\zeta + \mathbf{r}_0\,\dot{\zeta}\cos\zeta - \mathbf{q}_0\,\dot{\zeta}\sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{4.240}$$

[1] 3. Mai 2005; AN **333**, No.8, 761-770 (2012) / **DOI** 10.1002/asna 201111711

Es seien die Koordinaten

$$y_1 = r\cos\zeta \quad , \quad y_2 = r\sin\zeta \tag{4.241}$$

eingeführt. Wegen Definition (4.238) wird daher

$$\frac{1}{r} y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = \dot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = 0 \quad . \tag{4.242}$$

Das über $\dot{\zeta} = |\dot{\mathbf{r}}_0|$ definierte Koordinatensystem ist somit im *Hansen*schen Sinne notwendig ideal.

Diese Eigenschaft ist auch hinreichend: Wenn nämlich für ein bewegungsbezogenes $\mathbf{q}_j$ – Koordinatensystem mit den Koordinaten (4.241) die Bedingung

$$y^j \dot{\mathbf{q}}_j = r\left(\dot{\mathbf{q}}_1 \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2 \sin\zeta\right) = 0$$

erfüllt ist, ist auch

$$\dot{\mathbf{q}}_1 \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2 \sin\zeta = 0 \quad . \tag{4.243}$$

Mit (4.239) wird

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1 \cos\zeta + \mathbf{q}_2 \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1 \sin\zeta + \mathbf{q}_2 \cos\zeta \end{aligned} \tag{4.244}$$

und somit

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\left(-\mathbf{q}_1 \sin\zeta + \mathbf{q}_2 \cos\zeta\right) + \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2 \sin\zeta\right) = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad .$$

Das hier gewählte bewegungsbezogene System ist also ein *Hansen*-System und es gilt in diesem Fall: $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^{(I)}$. ◀

Dieser Satz ist von großer Wichtigkeit, da er erlaubt zu jeder Bewegung ein *Hansen*-ideales Bezugssystem zu konstruieren. Es gibt sogar in jedem Fall unendlich viele solcher „idealen" Systeme, da die Integration von $\dot{\zeta} = |\dot{\mathbf{r}}_0|$ noch eine frei wählbare Integrationskonstante enthält.

Basierend auf die Beziehungen (4.237) ergibt sich

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 = r^2\,\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 = r^2 \dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = r^2 \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.245}$$

Hier tritt die Beziehung $r^2\dot{\zeta} = G$ auf, die als die skalare Form des Flächensatzes bekannt ist.

Damit ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz H10

Satz H11: *Der Polarwinkel des Flächensatzes ist notwendig und hinreichend auf ein* Hansen-*System bezogen.*

Für jede Bewegung kann üblicherweise eine radiale und eine transversale Bewegungskomponente konstruiert werden, wie die Beziehungen (4.237) nahelegen. Daraus folgt als weitere unmittelbare und allgemeingültige Konsequenz von Satz H10

Satz H12: *Für jede Bewegung kann ein* Hansen-*ideales Koordinaten Systems konstruiert werden.*

Nach Satz H7a gibt es genau ein „wesentliches“ *Hansen*-System zu einer jeden beliebigen Bewegung.

Anmerkungen: 1. In seiner Veröffentlichung 'An Ideal Reference Frame for Perturbed Orbital Motion' beschäftigte sich D. J. JEZEWSKI [1988] mit dem mitbewegten Bahnsystem als „idealem System“, aber nicht mit dem *Hansen*-Koordinatensystem. In dieser Arbeit wird der Winkel ζ als „willkürlicher Referenzwinkel“ bezeichnet, der sich aus der Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta}\dot{\zeta} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta}\left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \tag{4.246}$$

begründen lässt. ◀

2. In dem Paper PALACIOS, M, and C. CALVO [1996], p.69 wird der Winkel ζ (dort mit θ bezeichnet) auf den Flächensatz bezogen als ein Winkel, der etwas Ähnliches wie die wahre Anomalie ist. Die wahre Natur dieses Winkels als etwas Eigenständiges, der immer notwendig und hinreichend auf ein *Hansen*-System bezogen ist, wird dort nicht begründet. ◀

(2) Im bahnmechanischen Zusammenhang kann sofort ein zweiter grundlegender Satz angeschlossen werden, welcher die fundamentale Bedeutung des von *P. A. Hansen* entdeckten idealen Koordinatensystems für die gesamte Himmelsmechanik vertieft beleuchtet.

Satz H13: *Die in der skalaren Form des Flächensatzes vorkommende Variation eines Bahnwinkels führt auch bei variablem Flächenparameter notwendig auf ein* Hansen-*System, wenn das Basissystem, auf das die Bewegung bezogen wird, ein Fundamentalsystem ist*[1].

Um diesen Satz zu beweisen, werde nach Bild 4-5 die Bahnebene, welche durch die Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ aufgespannt wird, auf die $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ - Basisebene, üblicherweise das Äquatorsystem oder im Sonnensystem das Ekliptiksystem, bezogen. Der $\mathbf{p}_1$ – Vektor weist zum Frühlingspunkt Υ. Dieses System wird als ein Fundamentalsystem mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ verstanden. Der aufsteigende Knoten Ω hat vom Frühlingspunkt die Rektaszension (bzw. bei Bezug auf die Ekliptik die ekliptikale Länge) Ω, Drehung um den Knotenvektor $\boldsymbol{k}_1$ mit Inklination *i* führt in die Bahnebene, in welcher der betrachtete Himmelskörper den radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$ hat, $\mathbf{d}_0$ ist der Perizentrumsvektor, von dem $\mathbf{r}_0$ den Winkelabstand υ hat, die wahre Anomalie, und der vom aufsteigenden Knoten der Bahn um das Argument des Perizentrums ω entfernt ist, $\mathbf{f}_0$ in der Bahnebene für υ=90° ist der sogenannte Parametervektor (in seiner Richtung hat der Bahnradius als Länge im Fall einer Kegelschnittbahn genau den Kegelschnittparameter *p*). Es ist

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{d}_0 \cos\upsilon + \mathbf{f}_0 \sin\upsilon \tag{4.247}$$

[1] 2. Mai 2005

und der transversale Richtungsvektor lautet auch hier

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{d}_0 \sin\upsilon + \mathbf{f}_0 \cos\upsilon \quad . \tag{4.248}$$

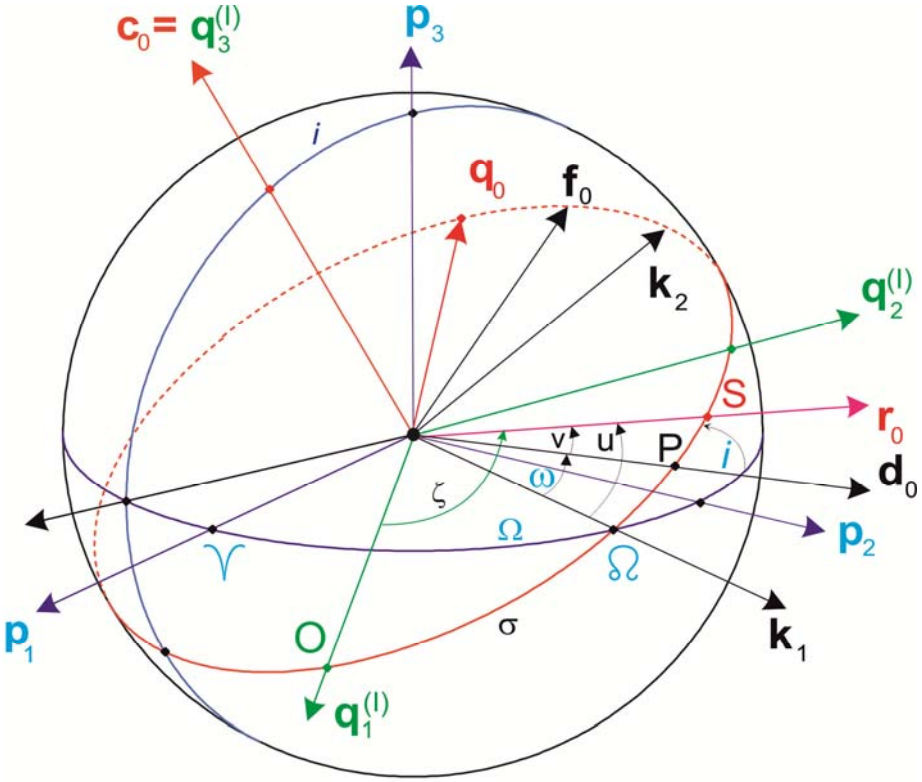


Bild 4-5: Zur Definition des „idealen Koordinatensystems“: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ - bewegungs-unabhängiges Inertialsystem (*Newton*-System, blau), $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ – mitbewegtes System (*Leibniz*-System, rot), $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)}$ – bewegungsbezogenes Koordinatensystem („ideales“ *Hansen*-System, grün), $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_0$ – Knoten-bezogenes Koordinatensystem, $\mathbf{d}_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{c}_0$ – Apsiden-bezogenes Koordinatensystem, ♈ - Frühlingspunkt, *O* Bezugspunkt des bewegungsbezogenen Systems („departure point“ des *Hansen*-Systems), S Ort des bewegten Objektes, ☊ - aufsteigender Knoten, P- Perizentrum (Perihel, Perigäum), Ω Rektaszension (Länge) des aufsteigenden Knotens, *i* - Inklination, σ -Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens, ζ - Bahnwinkel (erster *Hansen* Winkel), ω - Argument des Perizentrums, υ - wahre Anomalie

$\mathbf{c}_0 = \mathbf{d}_0 \times \mathbf{f}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$ mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ ist der Normalenvektor der Bahnebene. In Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystem haben diese Vektoren nach Bild 4-5 die Darstellungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}_0 &= \mathbf{p}_1\left(-\cos i \sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega\right) + \\
&+ \mathbf{p}_2\left(\cos i \sin\omega \cos\Omega + \cos\omega \sin\Omega\right) + \\
&+ \mathbf{p}_3 \sin i \sin\omega \\
\mathbf{f}_0 &= \mathbf{p}_1\left(-\cos i \cos\omega \sin\Omega - \sin\omega \cos\Omega\right) + \\
&+ \mathbf{p}_2\left(\cos i \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega\right) + \\
&+ \mathbf{p}_3 \sin i \cos\omega \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \\
&- \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \\
&+ \mathbf{p}_3 \cos i \qquad .
\end{aligned}
\tag{4.249}
$$

Die Variationen sind

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{d}}_0 &= \left[(i)^{\cdot}\sin\omega - \dot{\Omega}\cos\omega \sin i\right]\mathbf{c}_0 + \left[\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right]\mathbf{f}_0 \\
\dot{\mathbf{f}}_0 &= \left[(i)^{\cdot}\cos\omega + \dot{\Omega}\sin\omega \sin i\right]\mathbf{c}_0 - \left[\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right]\mathbf{d}_0 \qquad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{4.250}
$$

Die Variation des radialen Richtungsvektors (4.247) lautet dann

$$
\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\upsilon}\mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{d}}_0 \cos\upsilon + \dot{\mathbf{f}}_0 \sin\upsilon \qquad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{4.251}
$$

mit den Variationen (4.250) schließlich

$$
\dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right)\mathbf{q}_0 + \left[(i)^{\cdot}\sin u - \dot{\Omega}\cos u \sin i\right]\mathbf{c}_0 \qquad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{4.252}
$$

$u = \upsilon + \omega$ ist das Argument der Breite, das vom aufsteigenden Knoten der Bahn aus gezählt wird. Wird die Polardarstellung

$$
\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0 \tag{4.253}
$$

verwendet, gilt für den Flächensatz

$$
\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\mathbf{c}_0 = r^2\left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right)\mathbf{c}_0 + r^2\left[(i)^{\cdot}\sin u - \dot{\Omega}\cos u \sin i\right]\mathbf{r}_0\times\mathbf{c}_0 \ , \tag{4.254}
$$

es ist somit notwendig (der zweite Faktor steht senkrecht auf dem Normalenvektor, muss also verschwinden)

$$
(i)^{\cdot}\sin u = \dot{\Omega}\cos u \sin i \qquad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{4.255}
$$

und es bleibt

$$
G = r^2\left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right) \qquad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{4.256}
$$

Die Winkel-Variation mit der Definition

$$
\dot{\zeta} := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i \qquad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{4.257}
$$

in Gleichung (4.252) erfüllt somit die Bedingung $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\mathbf{q}_0$ in der Beziehung (4.238) als Voraussetzung für die Gültigkeit von *Satz H10*. Die allgemeine himmelsmechanische Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper, wie sie etwa aus der Variation der Parameter heraus folgt, führt daher notwendig in jedem Fall auf ein „ideales Koordinatensystem“ im Sinne von *P. A. Hansen*. ◄

Durch Integration der Differentialgleichung (4.257) ergibt sich bis auf eine (willkürliche) Integrationskonstante ζ_0 der Bahnwinkel

$$\zeta \;=\; \int\left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\,\cos i\right)dt \;+ \zeta_0 \qquad , \tag{4.258}$$

der auch als *Länge in der Bahn* bezeichnet wird[1]. Da dieser Winkel in der skalaren Form des Flächensatzes $r^2\,\dot{\zeta} = G$ vorkommt, wie die wahre Anomalie im „ungestörten" Fall, bezeichnet *P. A. Hansen* diesen Winkel zusammen mit dem Radius als „ideal". Diese Aussage hat mathematisch keine Bedeutung, es sei denn, es soll damit die Aussage getroffen werden, dass der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable (alternativ zur Zeit als unabhängige Laufvariable) gewählt werden darf.

Für den Winkel zwischen dem Bahnknoten und dem Ursprung *O* des „idealen" bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j$ – Systems kann die Bezeichnung

$$\dot{\sigma} \;:=\; \dot{\Omega}\,\cos i \tag{4.259}$$

eingeführt werden. Mit σ_0 als Integrationskonstante ergibt sich der entsprechende Winkel vom Anfangspunkt *O* zum aufsteigenden Knoten ☊ aus dem Integral

$$\sigma \;:=\; \int\dot{\Omega}\cos i\;dt \;+\sigma_0 \tag{4.260}$$

(siehe Bild 4-5). Dieser Winkel, der sich quasi als Projektion der Rektaszension des aufsteigenden Knotens in die Bahnebene darstellen lässt, kann auch als „Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens" bezeichnet werden. Damit hat der (allgemeine!) Bahnwinkel (bis auf die Integrationskonstante, die aber im vorliegenden Zusammenhang keine Rolle spielt) die Darstellung[2]

$$\zeta \;=\; \upsilon + \omega + \sigma \quad . \tag{4.261}$$

Es können an *Satz H13* unmittelbar zwei Spezialisierungen angeschlossen werden:

(2a) Wenn Argument des Perizentrums ω und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω keine Variationen aufweisen, reduziert sich der Bahnwinkel auf die wahre Anomalie und das hierdurch bestimmte bewegungsbezogene Bahnsystem ist das $\mathbf{d}_0,\mathbf{f}_0\left(,\mathbf{c}_0\right)-$**Apsidensystem**. In diesem (und nur in diesem) Zusammenhang hat das Apsidensystem die Eigenschaft „ideal" zu sein, d.h. dann ist die in Abschnitt 2.5.2 (Band I) von *J. Hermann* gewählte Darstellung im Rahmen des Zweikörperproblems als Untermenge der hier vorgestellten allgemeinen Herleitung vollständig richtig. Die allgemeingültige von *P. A. Hansen* entdeckte „ideale" Eigenschaft des bewegungsbezogenen Koordinatensystems enthält (wie es auch sein muss) die „ideale" Eigenschaft des Apsidensystems im Fall, dass Apsiden und Knoten „ungestört" sind.

(2b) In gleicher Weise trifft diese Eigenschaft für das **Knotensystem** zu, wenn zwar die Apside gestört, aber nicht der Knoten gestört sind. Dann ist $\dot{\zeta} \;=\; \dot{\upsilon}+\dot{\omega}$, $\left(\dot{\Omega} \equiv 0\right)$ und das Knotensystem ist in diesem (und nur in diesem) Fall ein „ideales" System.

---

[1] in der Originalarbeit von HANSEN [1857] ist diesem Winkel der Buchstabe υ zugewiesen.

[2] In der Literatur wird diese Größe σ bisweilen ohne den Bezug auf ein *Hansen*-System herzustellen in leicht modifizierter Form verwendet, z. B. bei SITTER, W. DE [1903] durch die Beziehung $\dot{\sigma} = -2\,\dot{\Omega}\,\sin^2\left(i/2\right)$

(3) Als nächster Schritt zur Untersuchung der notwendigen Eigenschaften eines *Hansen*-Systems soll jetzt auch die Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems einbezogen werden. Nach Bild 4-5 haben die Vektoren des mitgeführten Bahnsystems im $\mathbf{p}_i$ – Basissystem die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 = \; & \mathbf{p}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_3 \sin i \sin u\end{aligned} \tag{4.262}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 = \; & \mathbf{p}_1\left(-\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_2\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_3 \sin i \cos u\end{aligned} \tag{4.263}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_0 = \; & \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \\ & - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \\ & + \mathbf{p}_3 \cos i \quad .\end{aligned} \tag{4.264}$$

somit der radiale Ortsvektor die Variation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 = \; & \dot{\mathbf{p}}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \\ & + \dot{\mathbf{p}}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \\ & + \dot{\mathbf{p}}_3 \sin i \sin u + \\ & + \mathbf{p}_1\Big[\left(i\right)^{\cdot} \sin i \sin u \sin\Omega + \\ & \qquad + \dot{u}\left(-\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega\right) + \\ & \qquad + \dot{\Omega}\left(-\cos i \sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega\right)\Big] + \\ & + \mathbf{p}_2\Big[-\left(i\right)^{\cdot} \sin i \sin u \cos\Omega + \\ & \qquad + \dot{u}\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \\ & \qquad + \dot{\Omega}\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right)\Big] + \\ & + \mathbf{p}_3\Big[\left(i\right)^{\cdot} \cos i \sin u + \dot{u} \sin i \cos u\Big] \quad .\end{aligned} \tag{4.265}$$

Werden jetzt die Variationsgleichungen (4.205) mit den Zuordnungen (4.204) eingeführt und die Basisdarstellungen (4.263) und (4.264) verwendet, ergibt sich, wenn

$$\dot{\zeta}_B := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i \tag{4.266}$$

gesetzt wird, wobei jetzt aber der Index *B* den Bezug auf das (nicht fundamentale) $\mathbf{p}_i$ – Basissystem andeuten soll,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 = \; & \dot{\zeta}_B \mathbf{q}_0 + \mathbf{c}_0\Big[\left(i\right)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega}\cos u \sin\Omega\Big] + \\ & + \mathbf{q}_0\left(p_{12}\cos i + p_{23}\sin i \sin\Omega + p_{13}\sin i \cos\Omega\right) + \\ & + \mathbf{c}_0\Big[-p_{12}\sin i \cos u + p_{13}\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \\ & \qquad + p_{23}\left(\cos i \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega\right)\Big] \quad .\end{aligned} \tag{4.267}$$

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems hat mit den Zuordnungen (4.204) in diesem Basissystem die Komponentendarstellung (es ist nach Formel (4.203) $p_{ij} = -p_{ji}$)

$$\mathbf{D}_p = D_p^i \, \mathbf{p}_i = p_{23}\,\mathbf{p}_1 + p_{31}\,\mathbf{p}_2 + p_{12}\,\mathbf{p}_3 \quad . \tag{4.268}$$

Die Variation des radialen Einheitsvektors lautet daher

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{q}_0\left(\dot{\zeta}_B + \mathbf{d}_p \cdot \mathbf{c}_0\right) + \mathbf{c}_0\left\{\left[(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega}\cos u \sin i\right] - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0\right\} \quad . \tag{4.269}$$

Da $\dot{\mathbf{r}}_0$ nach Formel (4.253) in der momentanen Bahnebene liegt, ist sicher $\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{c}_0 = 0$ und es bleibt die notwendige Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{q}_0\left(\dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0\right) = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \tag{4.270}$$

mit der Nebenbedingung

$$(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega}\cos u \sin i = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0 \quad . \tag{4.271}$$

Auch hier erscheint die Variation des Bahnwinkels

$$\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| = \dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 =: \dot{\zeta}_B + \dot{\zeta}_P \tag{4.272}$$

in Bezug auf ein *Hansen*-ideales Koordinatensystem, wobei allerdings jetzt die Eigenbewegung des Basissystems berücksichtigt werden muss. Dies ergibt

Satz H14: *Wird die Bewegung eines Himmelskörpers auf ein Basissystem bezogen, das kein Fundamentalsystem ist, das also eine nicht zu vernachlässigende Eigenbewegung aufweist, so spiegelt sich diese Eigenbewegung des Basissystems in der Variation des auf das* Hansen-*System bezogenen Bahnwinkels wieder*[1].

Die Folgerung aus diesem Satz ist überraschend: Wenn es gelingen sollte, die Variation des auf das *Hansen*-ideale System bezogenen Bahnwinkels (aus $\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|$), sowie die Variation des auf das Basissystem bezogenen Winkels (aus $\dot{\zeta}_B := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i$) zu messen, könnte auf die Eigenbewegung (mit dem Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p = D_p^{\,i}\,\mathbf{p}_i$) des Basissystems geschlossen werden. Damit wäre es möglich, auf relativ einfache Weise ein Fundamentalsystem zu überprüfen bzw. nachzuweisen.

In dieser mathematisch orientierten Überlegung kann über die physikalisch-technische Realisierung einer solchen Messung keine Aussage gemacht werden. Die Problematik kann etwa dadurch angedeutet werden, dass der Ortsvektor des betrachteten bewegten Objektes einen Ursprung hat, der selber bewegt sein kann. Um aber die Bewegung dieses Objektes mit Hilfe der Bewegung des Ortsvektors absolut messen zu können, wäre der Bezug auf einen absolut fixen Bezugspunkt notwendig. Es muss daher die Bewegung in der Bahnkurve unabhängig vom Ortsvektor gemessen werden können.

[1] 16. Mai 2005

4.4 Mitbewegte Systeme im dreidimensionalen Raum

Um vertieft zu untersuchen, wie zu jeder Bewegung ein *Hansen-ideales* System konstruiert werden kann, werden im nächsten Abschnitt zunächst einige bekannte mitbewegte Systeme behandelt. Die Untersuchungen konzentrieren sich auf den dreidimensionalen Raum, in dem auch Satellitenbewegungen erfasst werden können.

4.4.1 Das begleitende Dreibein

Die Bewegung eines physikalischen Körpers an einem Ort, der durch seinen Ortsvektor $\mathbf{r}$ eindeutig bezeichnet ist, geschieht zu jedem Zeitpunkt in eine bestimmte Richtung. Diese Richtung wird in dem betreffenden Ort durch die Tangente an die Raumkurve beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ ist der Vektor in Tangentialrichtung. Sein Betrag ist, wie Formel (4.133) auf Seite 31 gezeigt hat, die Geschwindigkeit $V = |\dot{\mathbf{r}}|$, mit der sich der Körper an diesem Ort gerade bewegt. Eine Bewegung lässt sich auch als eine zeitliche Ortsveränderung verstehen. Die Zeit *t* ist somit der fundamentale Parameter zur Beschreibung einer Bewegung. $\dot{\mathbf{r}}$ bezeichnet diese Ortsveränderung in der Zeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad .$$

Der $\dot{\mathbf{r}}$ zugeordnete Richtungsvektor wird als *Tangentialvektor* bezeichnet:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{V} \quad . \tag{4.273}$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektor spannen zu jedem Zeitpunkt, wenn nur $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \neq 0$, eine Ebene auf, die als die momentane *Bahnebene* der Bewegung bezeichnet wird.

In einem gewissen Zeitintervall wird längs der Raumkurve mit der Geschwindigkeit *V* die Strecke

$$s = \int_{t_0}^{t} V dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\, dt \tag{4.274}$$

durchlaufen, die als *Bogenlänge* bezeichnet wird. Wie in der Differentialgeometrie üblich werde die Zeit *t* als laufender Parameter mit der Beziehung

$$ds = V dt \tag{4.275}$$

durch die Bogenlänge *s* ersetzt. Der Tangentialvektor lautet dann

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad . \tag{4.276}$$

Seine Änderung in der Bogenlänge

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{ds} = \kappa \mathbf{v}_2 \tag{4.277}$$

hat den Betrag κ, wenn $\mathbf{v}_2$ der entsprechende Richtungsvektor ist. Verschwindet κ identisch, ist

$$\mathbf{v}_1 = \text{const.} \quad (\kappa \equiv 0)$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{10} + s\,\mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_{10} = \text{const.} \quad ,$$

die Raumkurve ist also eine Gerade. $\kappa \neq 0$ gibt somit die Abweichung der Kurve von einer Geraden an, die in diesem Fall die *Tangente* ***t*** an die Raumkurve im Punkt **r** ist:

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + x\,\mathbf{v}_1 \quad . \tag{4.278}$$

Hier ist x ein beliebiger laufender Parameter. κ wird als *Krümmung* der Raumkurve, $\mathbf{v_2}$ gelegentlich als ihre *Hauptnormale* bezeichnet. $\mathbf{v_2}$ ist zur *konkaven* Seite der Raumkurve gerichtet (siehe Bild 4-6). Mit Formel (4.273) kann die Krümmung auch ohne Kenntnis der Bogenlänge berechnet werden, sofern nur die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers bekannt ist:

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{v}}_1|}{V} \quad . \tag{4.279}$$

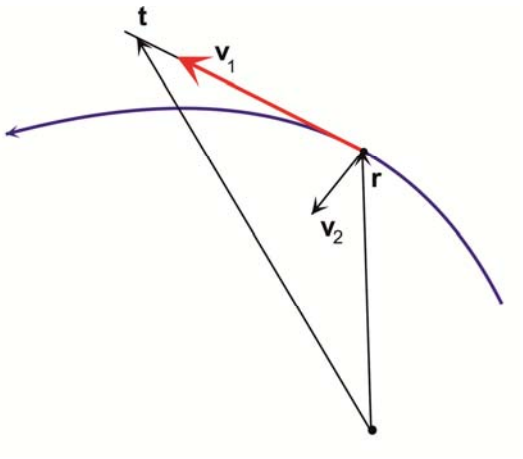


Bild 4-6: Tangente und konkave Seite einer Raumkurve

$\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ lassen sich mit dem dritten Einheitsvektor $\mathbf{v_3}$ zu einem (orthonormierten) Dreibein ergänzen

$$\mathbf{v}_3 := \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \quad . \tag{4.280}$$

Wie im System der $\mathbf{p}_i$ nach dem Formelsystem (4.80) auf Seite 22 haben die $\mathbf{v}_i$ als ein System orthonormierter Basisvektoren die Eigenschaften

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad , \quad i,\, j = 1, 2, 3 \tag{4.281}$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{ds} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_3}{ds} &= \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} \\ \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} &= \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \times \frac{d\mathbf{v}_3}{ds} \\ \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} &= \frac{d\mathbf{v}_3}{ds} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \times \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} \quad . \end{aligned}$$

Im Folgenden sei angenommen, dass die Ableitungen von $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ nach s existieren. Seien die a_i $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten von $\frac{d\mathbf{v}_3}{ds}$ im $\mathbf{v}_i$ - Raum, so ist

$$\frac{d\mathbf{v}_3}{ds} = a^i \mathbf{v}_i \quad \text{mit} \quad a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = \mathbf{v}_2 \frac{d\mathbf{v}_3}{ds} \quad ,$$

wobei üblicherweise $\tau := a_2$ gesetzt wird, es bleibt also

$$\frac{d\mathbf{v}_3}{ds} = -\tau \mathbf{v}_2 \quad . \tag{4.282}$$

Wenn $\tau = 0$, wird $\mathbf{v_3}$ = const. und mit $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ nach Formel (4.273) auch $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ sowie nach Integration

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}_3 = \text{const.} \quad .$$

Das bedeutet, dass die Raumkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ dann in einer Ebene mit dem Flächennormalenvektor $\mathbf{v_3}$ verläuft.

Ist dagegen $\tau \neq 0$, verläuft die Kurve nicht in dieser Ebene, die gelegentlich als *Schmiegebene* bezeichnet wird. τ ist ein Maß für die Abweichung der Raumkurve von einer ebenen Bewegung und wird als *Torsion* bezeichnet, $\mathbf{v_3}$ auch als *Binormalenvektor*. Auch die Torsion kann bei bekannter Geschwindigkeit des bewegten Körpers ohne Kenntnis der Bogenlänge berechnet werden:

$$\tau = \frac{|\dot{\mathbf{v}}_3|}{V} \quad . \tag{4.283}$$

Aus Formel (4.281) mit (4.277) und (4.282) folgt noch

$$\frac{d\mathbf{v}_2}{ds} = \tau \mathbf{v}_3 - \kappa \mathbf{v}_1 \quad .$$

Die drei letztgenannten Formeln werden in den *Frenetschen Formeln* zusammengefasst[1], die in der Theorie der Raumkurven einen zentralen Platz einnehmen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} &= \kappa \mathbf{v}_2 \\ \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} &= -\kappa \mathbf{v}_1 + \tau \mathbf{v}_3 \\ \frac{d\mathbf{v}_3}{ds} &= -\tau \mathbf{v}_2 \quad . \end{aligned} \tag{4.284}$$

Die Einheitsvektoren $\mathbf{v}_i$ werden als das *begleitende Dreibein* einer Raumkurve bezeichnet. Das begleitende Dreibein ist unabhängig von einer bestimmten Koordinatendarstellung der Raumkurve.

Der zugehörige *Darboux*sche Vektor[1] liegt stets in der $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$−Ebene und lautet mit den Formeln (4.208) und (4.209)

[1] *Frenet, F. J.* (1816-1900), Paris

$$\mathbf{D}_s = \tau \mathbf{v}_1 + \kappa \mathbf{v}_3 \tag{4.285}$$

und es wird damit

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{ds} = \mathbf{D}_s \times \mathbf{v}_i \quad . \tag{4.286}$$

Der Beschleunigungsvektor lautet mit den Beziehungen (4.273) und (4.277)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{V} \mathbf{v}_1 + \kappa V^2 \mathbf{v}_2 \quad . \tag{4.287}$$

Er liegt stets in der momentan von den Einheitsvektoren $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ aufgespannten Ebene. Diese ist nur bei verschwindender Torsion τ raumfest.

4.4.2 Das mitbewegte *Leibniz*-System[2]

Der Zustand einer Bewegung werde durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0 \qquad , \qquad \mathbf{r}_0^{\,2} = 1 \, , \, r^2 = \mathbf{r}^2$$

und den Geschwindigkeitsvektor (nach Formel (4.101) auf Seite 26)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{r}_0 + r \dot{\mathbf{r}}_0$$

beschrieben. Hier ist $\mathbf{r_0}$ der stets vom Ursprung des gewählten Koordinatensystems zum bewegten Körper gerichtete *radiale Richtungsvektor* der Bewegung. Seine Ableitung $\dot{\mathbf{r}}_0$ steht wegen $\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 = 0$ stets auf ihm senkrecht und spannt mit $\mathbf{r_0}$ die momentane Bewegungsebene auf. Werde für den Betrag der Ableitung

$$\dot{\zeta} := \left| \dot{\mathbf{r}}_0 \right| \quad \left[\frac{1}{\mathrm{s}} \right] \tag{4.288}$$

gesetzt, kann der *transversale Richtungsvektor* der Bewegung $\mathbf{q}_0$ durch

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta} \mathbf{q}_0 \tag{4.289}$$

eingeführt werden. Damit lautet der Geschwindigkeitsvektor allgemein auch

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{r}_0 + r \dot{\zeta} \mathbf{q}_0 \quad . \tag{4.290}$$

Die Geschwindigkeit hat alternativ zu Formel (4.133) auf Seite 31 die allgemeingültige Darstellung

$$V = \left| \dot{\mathbf{r}} \right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\zeta}^2} \quad . \tag{4.291}$$

Der *normale Richtungsvektor* $\mathbf{c_0}$ aus

---

[1] *J. Gaston Darboux* (1842–1917) führte das begleitende Dreibein in die Differentialgeometrie ein (VOLK, [1979]).

[2] In der englischen Literatur wird dieses System bisweilen als „orbit system“ bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_0 \times \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0 \end{aligned} \tag{4.292}$$

ergänzt $\mathbf{r_0}$ und $\mathbf{q_0}$ zum orthonormierten Dreibein, für das somit die Gleichungen (4.80) auf Seite 22 gelten. Es stellt wie das Dreibein $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ des vorherigen Abschnitts ein mit der Bewegung mitgeführtes Dreibein dar, das in der Satellitenbahnmechanik von großer Bedeutung ist[1]. Die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors nach Bild 4-7 in den radialen und transversalen Anteil liefert die *radiale Geschwindigkeit* der Bewegung

$$V_R = \dot{r} \tag{4.293}$$

und die *transversale Geschwindigkeit*

$$V_T = r\dot{\zeta} \quad . \tag{4.294}$$

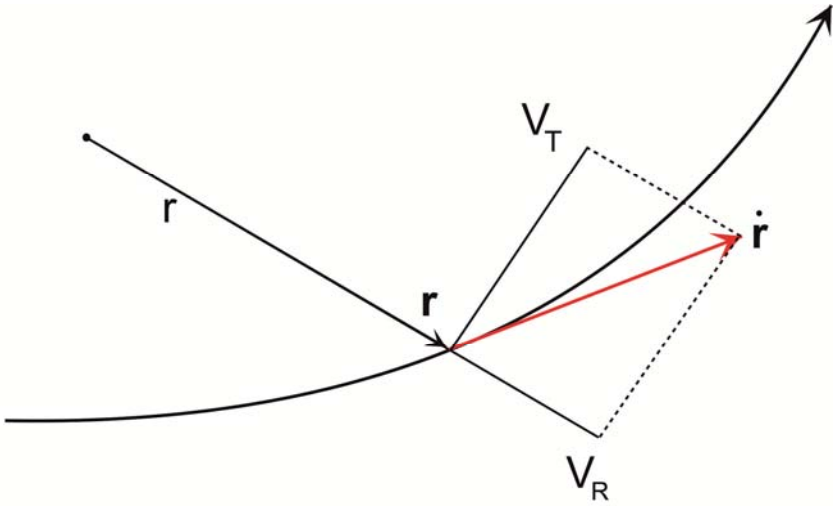


Bild 4-7: Radialer und transversaler Geschwindigkeitsanteil

Dies bedeutet eine Rotation um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\zeta}$. Somit kann ζ als ein Winkel gedeutet werden, der den Ort des bewegten Körpers charakterisiert, der *Bahnwinkel*. r, ζ können daher als die Polarkoordinaten des bewegten Punktes in seiner Bahnebene gedeutet werden. Sei **c** der momentane *Normalenvektor* der Bewegung

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad , \tag{4.295}$$

wird mit Formel (4.290)

$$\mathbf{c} = r^2 \dot{\zeta} \mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.296}$$

Wird wie in Formel (4.96) auf Seite 26 *G* für den Betrag des Normalenvektors gesetzt, folgt die allgemeingültige Beziehung

[1] Dieses System wird in der Bahnmechanik bisweilen als *Euler-Hill-Raum* bezeichnet (siehe etwa KAMEL [1983]).

$$G = r^2 \dot{\zeta} \quad . \tag{4.297}$$

Diese Beziehung ist als die skalare Form des Flächensatzes bekannt. In ihm sind alle Größen im Fall einer allgemeinen Bewegung als Variable anzusetzen.

▶ *Falls G eine konstante Größe ist, wird der Flächensatz als **zweites** **Kepler'sches Gesetz** bezeichnet. Es ist jedoch aus der hier gegebenen Herleitung ersichtlich, dass der Flächensatz für **jede** beliebige Bewegung formuliert werden kann, also nicht notwendig auf die (sogenannte) Keplerbewegung einzuschränken ist, sofern nur der Parameter G als nicht konstant zugelassen wird[1]. Eine Einschränkung auf Zentralbewegungen (das sind Bewegungen, die durch Beschleunigungen verursacht werden, die stets auf ein einziges Zentrum gerichtet sind), ist im Allgemeinen nicht nötig.*

Der Geschwindigkeitsvektor mit dem Bahnwinkel ζ als unabhängiger Variable lautet

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,\mathbf{q}_0 \tag{4.298}$$

oder

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,\frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} \quad . \tag{4.299}$$

Somit kann in der radialen Bewegungskomponente der Bahnwinkel ζ auch als der „natürliche" Parameter der Bewegung angesehen werden.

Für den Beschleunigungsvektor gilt mit den Formeln (4.101) von Seite 26 und (4.289)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\,\mathbf{r}_0 + 2\dot{r}\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 + r\,\ddot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\mathbf{q}}_0 \quad . \tag{4.300}$$

Da $\dot{\mathbf{q}}_0$ in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{q_0}$ liegt, die also von $\mathbf{r_0}$ und $\mathbf{c_0}$ aufgespannt wird, kann der allgemeine Ansatz

$$\dot{\mathbf{q}}_0 =: \dot{\xi}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \tag{4.301}$$

mit gewissen Größen $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ gemacht werden. Damit gilt

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\xi}\right)\mathbf{r}_0 + \left(2\dot{r}\,\dot{\zeta} + r\,\ddot{\zeta}\right)\mathbf{q}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.302}$$

Die Beschleunigung einer jeden Bewegung erlaubt somit eine Zerlegung in einen radialen, transversalen und normalen Anteil

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.303}$$

Die *radiale Beschleunigungskomponente* lautet

$$b_R = \ddot{r} + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\xi} = \dot{V}_R + V_T\,\dot{\xi} \quad , \tag{4.304}$$

die *transversale Beschleunigungskomponente*

[1] Der Begriff der *Kepler*bewegung wird in Kapitel 10 (Band III) präzisiert

$$b_T = 2\dot{r}\dot{\zeta} + r\ddot{\zeta} \quad , \tag{4.305}$$

mit Formel (4.297) auch

$$b_T = \frac{\dot{G}}{r} \quad . \tag{4.306}$$

Die *normale Beschleunigungskomponente* lautet

$$b_N = r\dot{\zeta}\dot{\eta} = V_T\dot{\eta} = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{4.307}$$

$\dot{\zeta}$ kann als eine geometrische Größe gedeutet werden. Es ist zu vermuten, dass auch $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ als geometrische Größen gedeutet werden können. Diese Frage wird in den nächsten Abschnitten untersucht und geklärt.

Da im Allgemeinen in Gleichung (4.290) $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \neq 0$ angenommen werden kann (es gilt aber nach wie vor $\mathbf{r} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0$), gilt folgende Aussage:

Satz H15: *Das mitbewegte* $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ *- System („Leibniz-System") bildet kein* Hansen-*ideales System.*

Diese Aussage steht in scheinbarem Widerspruch zu der auf *Hansen* zurückgeführten Darstellung bei *K. Stumpff*[1], wonach die Polarkoordinaten *r* und ζ „*Hansen* Koordinaten" seien. Hierzu kann folgendes angemerkt werden: Nach *Hansen* sind – ganz im Denken der klassischen Himmelsmechanik – alle die Größen „ideal", die „die Eigenschaft haben, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten"[2]. Hier wollen wir ganz allgemein als „Störungen" die Beschleunigungen auffassen, welche eine Bewegung so beeinflussen, dass die Bewegung nicht mehr auf der vorgegebenen Bahnkurve verläuft. Was den Bahnwinkel ζ betrifft, so ist seine Variationsgleichung in Bezug auf die (absolute) Zeit $r^2\dot{\zeta} = G$ tatsächlich von allen solchen Beschleunigungen unabhängig, was damit zusammenhängt, dass ζ auf das ein *Hansen*-ideales System bildende $\mathbf{q}_j$- System bezogen ist. ζ als eine unabhängige Laufvariable kann auch als eine absolute Größe aufgefasst werden und steht damit außerhalb der Diskussion ob *Hansen*-ideal oder nicht. Was nun aber den Radius *r* angeht, so musste bis jetzt noch gar keine Aussage über *r* gemacht werden, da in der Bedingungsgleichung (4.232) auf Seite 54 $\mathbf{D}\times\mathbf{r} = 0$ der Radius *r* ohne Änderung der „idealen" Eigenschaften des im nächsten Abschnitt behandelten $\mathbf{q}_j$- Systems weggekürzt werden kann. Hierfür bedarf es also einer **zusätzlichen** Bedingung für die Variation des Radius $\dot{r}$, die sich als vorteilhaft aber keineswegs als zwingend erweisen wird. Diese Bedingung wird im Fall einer vorgegebenen Kurve $r = r(\zeta)$ unter dem Begriff *Anpassungsgleichung* in Kapitel 5 ausführlich behandelt.

[1] STUMPFF [1974] p. 178

[2] HANSEN [1857] p. 66

4.4.3 Das bewegungsbezogene Hansen-ideale System

Der Bewegungsparameter ζ kann nach Bild 4-8 als ein Winkel in einer mitgeführten Bezugsebene gedeutet werden. Seien nämlich in der durch den Normalenvektor **c** definierten Ebene zwei orthogonale Richtungsvektoren $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ gegeben, so kann $\mathbf{r_0}$ durch

$$\mathbf{r}_0 \;=\; \mathbf{q}_1 \cos\zeta + \mathbf{q}_2 \sin\zeta \tag{4.308}$$

dargestellt werden. $\mathbf{q_1}$ und $\mathbf{q_2}$ sind zwei in dieser Ebene feste Richtungsvektoren, die für $\zeta = 0°$ bzw. $\zeta = 90°$ durchlaufen werden. Diese Vektoren sind freilich nicht notwendig raumfest. Sie werden mit $\mathbf{c_0}$ zum orthogonalen Dreibein ergänzt, so dass auch

$$\mathbf{q}_3 \;:=\; \mathbf{c}_0 \;=\; \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \tag{4.309}$$

gesetzt werden kann. Differentiation des radialen Richtungsvektors liefert

$$\dot{\mathbf{r}}_0 \;=\; \dot{\zeta}\left(-\mathbf{q}_1 \sin\zeta + \mathbf{q}_2 \cos\zeta\right) + \dot{\mathbf{q}}_1 \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2 \sin\zeta \quad . \tag{4.310}$$

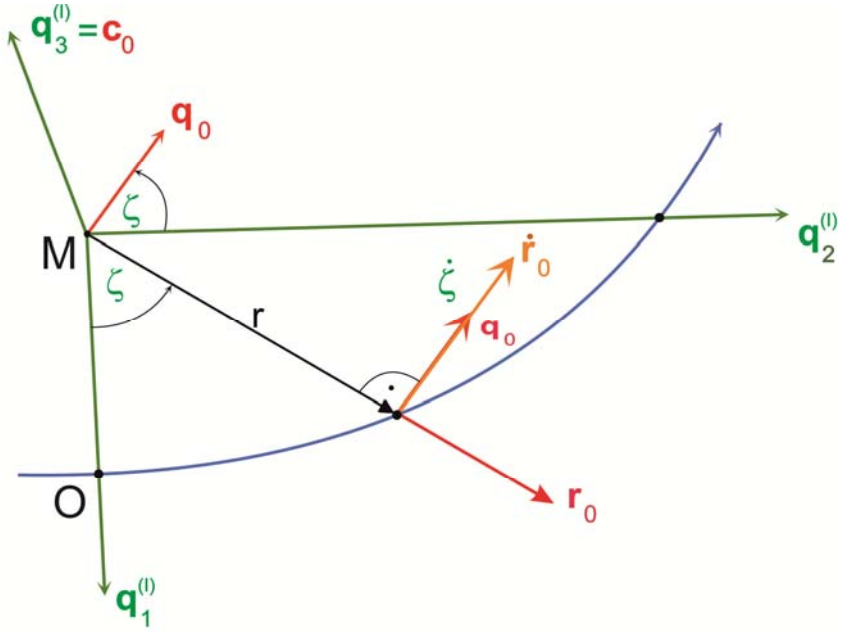


Bild 4-8: Das mitgeführte $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{c}_0$ - Bahnsystem und der Bahnwinkel ζ sowie das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)}$ – System

Nach Bild 4-8 kann $\mathbf{q}_0$ durch die Beziehung

$$\mathbf{q}_0 \;=\; -\mathbf{q}_1 \sin\zeta + \mathbf{q}_2 \cos\zeta \tag{4.311}$$

dargestellt werden. Formale Übereinstimmung mit Formel (4.289) kann erreicht werden, wenn die zunächst noch willkürlichen $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ so gewählt werden, dass

$$\dot{\mathbf{q}}_1 \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2 \sin\zeta \;=\; 0 \tag{4.312}$$

gilt. Dies könnte zum Beispiel erreicht werden, wenn die $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ unveränderbar sind (wenn also $\dot{\mathbf{q}}_j \equiv 0$ gesetzt werden darf), die Basisebene somit fest oder gleichförmig bewegt ist, was aber im allgemeinen Fall nicht erwartet werden darf. Sonst bilden die Koordinaten

$(\cos\zeta, \sin\zeta, 0)$, wenn Formel (4.312) erfüllt ist, zusammen mit der Basis $\mathbf{q}_j$ ein *Hansen*-ideales System im Sinn von Definition (4.196) auf Seite 46. In diesem Fall kann $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^{(I)}$ und $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^{(I)}$ geschrieben werden und die $\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}$ und $\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}$ sind nach Beziehung (4.312) kollinear. Sie stehen daher auf $\mathbf{q}_1^{(I)}$ und $\mathbf{q}_2^{(I)}$ senkrecht und sind somit parallel zur Richtung des Normalenvektors. In diesem Fall hat der transversale Richtungsvektor (4.311) die Variation

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) - \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\zeta \quad , \tag{4.313}$$

mit Beziehung (4.308) also

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 - \left(\left|\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\right|\sin\zeta - \left|\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\right|\cos\zeta\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.314}$$

Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck (4.301) gibt notwendig

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\dot{\zeta} \\ \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{4.315}$$

Da das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j$ – Bahnsystems nach *Satz H9* in Abschnitt 4.3.16 *Hansen*-ideal ist, lautet die allgemeine Bewegungsgleichung mit Beziehung (4.302)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\zeta}^2\right)\mathbf{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\zeta} + r\ddot{\zeta}\right)\mathbf{q}_0 + r\dot{\zeta}\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.316}$$

Der Bezug auf ein *Hansen*-System zeigt sich in dieser Bewegungsgleichung in der Verwendung des Bahnwinkels ζ, der auf $\mathbf{q}_1^{(I)}$ als Anfangsrichtung bezogen ist, wobei die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ ein *Hansen*-System bilden, sowie in der notwendigen Beziehung der Variation der Variablen ξ auf die Variation von ζ in der ersten der Gleichungen (4.315).

Wegen der Bedingung (4.312) für *Hansen*-Systeme wird also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\mathbf{c}_0\,\dot{\eta}\,\sin\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \mathbf{c}_0\,\dot{\eta}\,\cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{4.317}$$

Werden hier die für jedes orthogonale System gültigen Formeln (4.205) auf Seite 48 berücksichtigt, werden die Vektoren $\dot{\mathbf{r}}_0$ in Formel (4.289) und in Formel (4.301) auf Seite 69 ergänzt durch den entsprechenden Ausdruck für $\dot{\mathbf{c}}_0$. Dies führt notwendig auf die *Variationsformeln des mitgeführten Bahnsystems.* Diese Formeln könnten in Analogie zu der aus der Differentialgeometrie[1] bekannten Sprechweise als die „*Frenetschen Formeln des mitgeführten Bahnsystems*“ bezeichnet werden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{4.318}$$

Diese Formeln können auch als die *Frenetschen Formeln der Astrodynamik* bezeichnet werden.

[1] siehe Abschnitt 4.4.1, Das begleitende Dreibein, ab Seite 64

Wie das begleitende Dreibein einer Raumkurve sind auch die Vektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ des mitgeführten Bahnsystems, die wir auch als *begleitendes Dreibein der Astrodynamik* bezeichnen können, von einer speziellen Koordinatendarstellung der Bewegung unabhängig. Der zugehörige Eigenbewegungsvektor („System-Variations-Vektor", „*Darboux*"-Vektor, „Dreh"-Vektor) ist

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} \coloneqq \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad , \tag{4.319}$$

so dass die Beziehungen bestehen

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{q}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.320}$$

Wird ζ als unabhängige Variable an Stelle der Zeit eingeführt, wird

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} &= \mathbf{q}_0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} &= -\mathbf{r}_0 + \frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{c}_0 \\ \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} &= -\frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{4.321}$$

mit dem Eigenbewegungsvektor (*Darboux*schen Vektor)

$$\mathbf{D}_\zeta \coloneqq \frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + \mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\zeta}\,\mathbf{D}_\zeta \tag{4.322}$$

so dass gilt:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{r}_0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{q}_0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.323}$$

Ferner kann festgehalten werden, dass die absoluten Variationen der Basisvektoren des *Leibniz*-Systems den partiellen (also relativen) Variationen identisch gleich sind:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \zeta} \quad , \quad \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \zeta} \quad , \quad \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \zeta} \quad . \tag{4.324}$$

Für das $\mathbf{q}_j^{(I)}-$ System lauten die Variationsformeln des bewegungsbezogenen (*Hansen*-idealen) Bahnsystems mit den Formeln (4.317) und, da wegen Formel (4.309) $\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$ gilt,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)} \sin\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)} \cos\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\,(\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{4.325}$$

Die zugehörige Variationsmatrix hat die Komponenten

$$\begin{aligned} q_{11} &= q_{12} = q_{21} = q_{22} = q_{33} = 0 \\ q_{13} &= -\,q_{31} = -\,\dot{\eta}\sin\zeta \\ q_{23} &= -\,q_{32} = \;\dot{\eta}\cos\zeta \end{aligned} \tag{4.326}$$

und es gilt für den Radiusvektor $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ die *Hansen*-ideale Eigenschaft (mit $y_3 = 0$)

$$y^k \, q_k{}^{(j)} = 0 \qquad (j = 1,2,3) \quad . \tag{4.327}$$

Der zugehörige absolute Eigenbewegungsvektor (allgemeiner *Darboux*scher Vektor) ist mit Beziehung (4.308)

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} := \dot{\eta}\;(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta) \;\; = \;\; \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \tag{4.328}$$

und es wird

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = \mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{q}_j^{(I)} \tag{4.329}$$

Damit ist auch Formel (4.232) auf Seite 54 für den Fall des bewegungsbezogenen Bahnsystems (*Hansen*-System) bestätigt:

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad . \tag{4.330}$$

Diese Aussage kann formuliert werden in dem

Satz H16: *Der absolute Eigenbewegungsvektor des bewegungsbezogenen* Hansen-*Systems zeigt stets in Richtung des Radiusvektors des bewegten Körpers. Er ist somit an die Bewegung gekoppelt.*

Beziehung (4.328) kann ausgedrückt werden in

Satz H17: *$\dot{\eta}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das bewegungsbezogene* Hansen-*System um seinen Eigenbewegungsvektor also den Ortsvektor des bewegten Objektes dreht. η ist ein Winkel, der diese Drehung beschreibt*[1]*. Seine Variation ist gleich dem Betrag des absoluten Eigenbewegungsvektors des Hansen-Systems.*

Die Formeln (4.325) werden zusammengefasst in

Satz H18: *Die Variationsgleichungen des bewegungsbezogenen* Hansen-*Systems enthalten als einzige wesentliche Variation die Variation des Drehwinkels η.*

Mit den Ausdrücken (4.319) und (4.328) ergibt sich

Satz H19: *Zwischen den Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ des bewegungsbezogenen* Hansen-*Systems und $\mathbf{D}_{q^{(L)}}$ des mitbewegten* Leibniz-*Systems besteht die Beziehung*:

[1] siehe hierzu auch Abschnitt 4.4.5 auf Seite 76

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \mathbf{D}_{q^{(I)}} + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.331}$$

Der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(L)}}$ und somit das ein *Hansen*-ideales System bildende $\mathbf{q}_j^{(I)}$-System verändert seine Orientierung im Raum nur dann, wenn es eine („Stör“-) Beschleunigung gibt, die eine Komponente senkrecht zur $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$- Basisebene des $\mathbf{q}_j^{(I)}$- Systems hat. Beschleunigungen, die in der $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$- Ebene wirken, üben keinen Einfluss auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$-*Hansen*-System aus. Diese nur in der oskulierenden Bahnebene wirkenden Beschleunigungen auf eine Bewegung werden im Kapitel 5 näher untersucht.

4.4.4 Beziehungen zwischen den mitbewegten Systemen

Ein Zusammenhang zwischen dem mitgeführten Bahnsystem (*Leibniz*-System) $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ und dem begleitenden Dreibein $\mathbf{v}_i$ ist prinzipiell sehr einfach herzustellen. Nach Formel (4.273) auf Seite 64 ist

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; V\,\mathbf{v}_1 \quad ,$$

daher mit Formel (4.290)

$$\mathbf{v}_1 \;=\; \frac{1}{V}\left(\dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0\right) \quad . \tag{4.332}$$

Nach Formel (4.287) liegt der Beschleunigungsvektor einer Bewegung stets in der durch Bahntangente und Bahnnormale aufgespannten $\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right)-$Ebene, während im *Leibniz*-System nach Formel (4.316) die Bewegung im $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)-$Raum erfolgt, sofern nur eine zur momentanen Bahnebene senkrechte Beschleunigungskomponente (mit $\dot{\eta} \neq 0$) aktiv ist. Die Beziehungen zwischen den beiden Systemen sind also recht verwickelt. Werden die Bewegungsgleichungen (4.287) und (4.316) gleichgesetzt und $\mathbf{v}_1$ aus der Beziehung (4.332) eingesetzt, folgt für die Bahnnormale

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\kappa V^2}\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\zeta}^2 - \frac{\dot{V}}{V}\dot{r}\right)\mathbf{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\zeta} + r\ddot{\zeta} - \frac{\dot{V}}{V}r\dot{\zeta}\right)\mathbf{q}_0 + r\dot{\zeta}\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0\right] . \tag{4.333}$$

Mit $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ folgt für die Binormale der Zusammenhang

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\kappa V^3}\left\{-r^2\dot{\zeta}^2\dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{r}\dot{\zeta}\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 + \left[\left(\ddot{r} - r\dot{\zeta}^2\right)r\dot{\zeta} - \left(2\dot{r}\dot{\zeta} + r\ddot{\zeta}\right)\dot{r}\right]\mathbf{c}_0\right\} . \tag{4.334}$$

Werden die letzten drei Gleichungen als ein lineares Gleichungssystem aufgefasst, können sie nach den Basisvektoren des begleitenden *Leibniz*-Systems $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ aufgelöst werden. Damit ist es dann auch möglich, Krümmung und mit der dritten der *Frenet*schen Gleichungen (4.284) die Torsion in Zusammenhang zu den $\dot{\zeta}, \dot{\eta}$ zu setzen.

Es sind noch viele weitere mitgeführte Systeme denkbar. Das in der Satellitenbahnmechanik zum Beispiel bisweilen wichtige, im Allgemeinen nicht orthogonale Tangenten-bezogene Bahn - System wird in Abschnitt 8.15 beschrieben.

4.4.5 Zur geometrischen Deutung des räumlichen Bahnwinkels

Die Variationsformeln (4.318) des mitbewegten Bahnsystems haben Anlass gegeben neben der Größe ζ auch η geometrisch als einen Winkel zu deuten. ζ erwies sich als ein Winkel in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Bahnebene, er kann daher als der ebene Bahnwinkel gedeutet werden, $\dot{\zeta}$ als die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich diese Ebene, somit also auch die mit der Bewegung mitbewegten Richtungsvektoren in der Bahnebene $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$, um die Bahnnormale $\mathbf{c}_0$ dreht. Da $\mathbf{r}_0$ der radiale Einheitsvektor des bewegten Körpers ist, ist $\dot{\zeta}$ die Bahngeschwindigkeit, mit der sich dieser Körper (im Gegenuhrzeigersinn) in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene bewegt. η lässt sich, wie schon angedeutet, als ein Winkel in der $\mathbf{c}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene deuten, der also von $\mathbf{c}_0$ zu $\mathbf{q}_0$ gerichtet ist. $\dot{\eta}$ ist somit die Winkelgeschwindigkeit, mit der $\mathbf{c}_0$ und damit auch $\mathbf{q}_0$ um $\mathbf{r}_0$ rotiert.

Das Minuszeichen in den *Frenet*schen Formeln (4.318) vor $\dot{\eta}$ besagt, dass die Rotation in entgegengesetzter Richtung, also von $\mathbf{q}_0$ zu $\mathbf{c}_0$ hin verläuft.

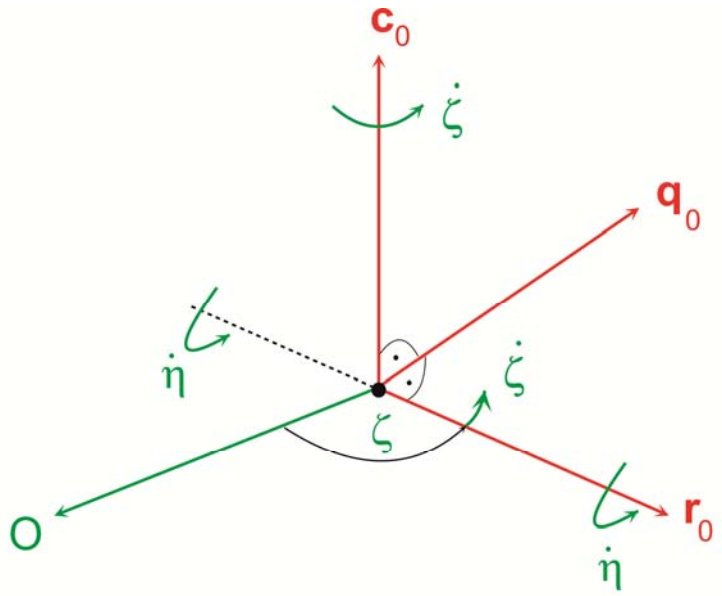


Bild 4-9 : Zur geometrischen Deutung der zweiten Winkelkoordinate η im mitbewegten Bahnsystem

Aus den Variationsformeln (4.318) des mitgeführten Bahnsystems kann formal nicht beurteilt werden, welche der beiden Winkelkoordinaten ζ und η die primäre ist. Dazu muss auf die Definition des mitgeführten Bahnsystems zurückgegriffen werden. Da die Bewegung definitionsgemäß in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene erfolgt, muss auch der in dieser Ebene liegende Bahnwinkel ζ die primäre Größe sein, η als der räumliche Bahnwinkel ist somit die sekundäre. Dies bestätigen die zugehörigen Variationsgleichungen (nach Formel (4.297) auf Seite 69)

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad ,$$

in der die zusätzlichen Bewegungseinflüsse b_R, b_T, b_N nicht in Erscheinung treten, was in der Variationsgleichung für den Winkel η jedoch explizit der Fall ist (nach Formel (4.307) auf Seite 70):

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad .$$

Wenn die Beschleunigung in Normalenrichtung wegfällt, findet auch keine Rotation des Systems aus der momentanen Bahnebene heraus statt.

Die Variationsformeln beschreiben in einem gewissen Sinn die absolute Bewegung eines Körpers, indem in Bezug auf die momentane Bewegungsorientierung eine Bewegung formal **vollständig** beschrieben wird. Dieser Gedanke wird uns in den folgenden Kapiteln wiederholt beschäftigen. Allerdings tauchen in der Berechnung des Radius *r* die radiale, in der Berechnung des Flächenparameters *G* die transversale Beschleunigungskomponente auf. In einem konkreten Bewegungsfall werden diese Beschleunigungskomponenten nur auf gewisse von einem Bahnsystem unabhängige Basissysteme modellmäßig dargestellt werden können, so dass dann auch die Bewegung nur relativ zu diesen Systemen erfasst werden kann.

Die absolute Beschreibung einer Bewegung, wie sie durch die *Frenet*schen Formeln des mitgeführten Bahnsystems erfolgen kann, wird im Rahmen der allgemeinen mathematischen Anpassung einer Bewegung im nächsten Kapitel näher untersucht.

Anmerkung: Die Variationsgleichung für $\dot{\eta}$ die eine räumliche Rotation um den Radiusvektor beschreibt ist in der Himmelsmechanik und im Rahmen der Bahnbestimmung der Himmelskörper wohl bekannt[1]. ◀

4.4.6 Ergänzende Betrachtungen zur Einordnung der *Hansen*-Systeme

In den bisherigen Abschnitten konnte als ein wesentliches Ergebnis die notwendige Zuordnung von *Hansen*-Systemen zu jedem Bewegungsvorgang herausgearbeitet werden. Dieser Zusammenhang ist so selbstverständlich, dass sich die Frage aufdrängt, ob dies wirklich eine besonders auszeichnende Eigenschaft ist. Um diese Frage zu untersuchen, werde wieder von einem mitbewegten *Leibniz*-System $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ ausgegangen. Dieses werde auf ein beliebiges bewegungsorientiertes System $\mathbf{q}_j^{(B)}$ bezogen, dessen zwei Basisvektoren in der (oskulierenden, d.h. durch den momentanen Zustandsvektor aufgespannten) Bahnebene liegen. Der Ursprung dieses Systems habe vom Radiusvektor den Winkelabstand ψ, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(B)} \cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\psi \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(B)} \sin\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \cos\psi \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)} \quad . \end{aligned} \tag{4.335}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(B)} &= \mathbf{r}_0 \cos\psi - \mathbf{q}_0 \sin\psi \\ \mathbf{q}_2^{(B)} &= \mathbf{r}_0 \sin\psi + \mathbf{q}_0 \cos\psi \\ \mathbf{q}_3^{(B)} &= \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{4.336}$$

Wichtige Beispiele für derartige Systeme in der Bahnmechanik sind das Apsidensystem und das Knotensystem. Mit den *Frenet*schen Formeln (4.318) des *Leibniz*-Systems lauten die Variationen dieses bewegungsbezogenen Systems

[1] siehe zum Beispiel J. BAUSCHINGER [1928], p.502, Formel 24

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(B)} &= \left(\dot{\zeta}-\dot{\psi}\right)\mathbf{q}_2^{(B)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(B)} \sin\psi \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(B)} &= -\left(\dot{\zeta}-\dot{\psi}\right)\mathbf{q}_1^{(B)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(B)} \cos\psi \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(B)} &= \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(B)} \sin\psi - \mathbf{q}_2^{(B)} \cos\psi\right) \quad .
\end{aligned} \tag{4.337}$$

Im Fall, dass das bewegungsbezogene System ein *Hansen*-System ist, wird $\psi=\zeta$. Somit gilt

Satz H20: *Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist dann und nur dann ein* Hansen-*System, wenn die Variationen der beiden in der Bewegungsebene liegenden Basisvektoren senkrecht zu dieser Ebene orientiert sind.*

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(B)}$-Systems hat mit dem Ansatz

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} =: D^j_{q^{(B)}}\, \mathbf{q}_j^{(B)} \tag{4.338}$$

die Komponenten

$$D_{q^{(B)}1} = \dot{\eta}\cos\psi \ , \ D_{q^{(B)}2} = \dot{\eta}\sin\psi \quad , \ D_{q^{(B)}3} = \dot{\zeta}-\dot{\psi} \quad . \tag{4.339}$$

Der Eigenbewegungsvektor dieses allgemeinen bewegungsorientierten Bahnsystems lautet daher

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} = \dot{\eta}\ \left(\mathbf{q}_1^{(B)} \cos\psi\ + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\psi\right) + \left(\dot{\zeta}-\dot{\psi}\right)\mathbf{q}_3^{(B)} \quad . \tag{4.340}$$

Mit den Basisvektoren des *Leibniz*-Systems gilt auch (vgl. die Beziehungen (4.335))

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} = \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 + \left(\dot{\zeta}-\dot{\psi}\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.341}$$

Damit äquivalent ist wegen $\zeta=\psi$ im Fall von *Hansen*-Systemen

Satz H21: *Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist dann und nur dann ein* Hansen-*System, wenn sein Eigenbewegungsvektor stets in Richtung des Ortsvektors der Bewegung weist.*

Dieser Satz bestätigt auch die im vorhergehenden Abschnitt gegebene Bemerkung, dass der versteckte Winkel η als zweiter *Hansen*-Winkel bezeichnet werden könnte. Er ist eng an das *Hansen*-System gekoppelt und nur im Zusammenhang mit einem solchen erklärbar. Ferner zeigt sich in diesem Zusammenhang deutlich die besondere Bedeutung des ersten *Hansen*-Winkels ζ als (in natürlicher Weise) eigentlich unabhängigem Bahnparameter.

Als Korollar zu Satz H21 kann aus den Variationsgleichungen (4.337) eine weitere interessante Aussage geschlossen werden. Vergleich dieser Gleichungen mit der allgemeingültigen Darstellung (4.205) zeigt, dass hier die Komponente des absoluten Eigenbewegungsvektors des betrachteten Systems in Richtung der Bahnnormalen den Wert $D_{q^{(B)}3} = \dot{\zeta}-\dot{\psi}$ hat. Falls es sich um ein *Hansen* System handelt, ist somit[1]

[1] In A. DEPRIT [1976], p.257 wird die notwendige aber nicht hinreichende Aussage dieses Satzes gegeben

$$D_{q^{(B)}3} = D_{q^{(I)}3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Hansen} - \text{System} \left(\mathbf{q}_j^{(B)} = \mathbf{q}_j^{(I)} \right). \tag{4.342}$$

Satz H22: *Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem (d.h. ein System, dessen Basisebene in der oskulierenden Bahnebene liegt) ist dann und nur dann ein* Hansen-*System, wenn die räumliche Komponente seines relativen Eigenbewegungsvektors identisch verschwindet.*

Die vorstehenden Überlegungen erlauben eine weitere fundamentale Aussage über *Hansen* Systeme zu formulieren:

Satz H23: *Ein* Hansen-*System ist das einzige in einer oskulierenden Bahnebene liegende System, das fest mit der Bahnebene verknüpft ist und sich nicht in der Bahnebene bewegt.*

Der BEWEIS kann mit den Variationsgleichungen (4.337) geführt werden: Wenn das System eine Hansen System ist, ist $\dot{\zeta} = \dot{\psi}$ und die in der Bahnebene liegenden Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ werden nur durch räumliche Einflüsse (b_N), nicht aber durch Einflüsse in der Bahnebene verändert. Die Umkehrung kann indirekt erfolgen: Wenn ein System kein *Hansen* System ist, muss der Bahnwinkel ψ dieses Systems die Bedingung $\dot{\zeta} \neq \dot{\psi}$ erfüllen. Dann haben aber nach den Variationsgleichungen (4.337) die beiden Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(B)}, \mathbf{q}_2^{(B)}$ einen Bewegungsanteil in der Basisebene, diese Basisebene („Bahnebene“) dieses Systems somit eine Eigenbewegung. ◄

Auch wenn es im Prinzip nach Satz H7 unendlich viele *Hansen* Systeme gibt[1], kann man wegen des festen Bezugs zur oskulierenden Bahnebene im Wesentlichen bis auf eine willkürliche Integrationskonstante ζ_0 mit genau einem *Hansen* System rechnen, das einer Bewegung zugeordnet ist (dieser Sachverhalt wurde bereits in Satz 7a als „im Wesentlichen“ genau ein *Hansen*- System formuliert).

Die Überlegungen in diesem Abschnitt werden an zwei bekannten Beispielen aus der Bahnmechanik erläutert:

BEISPIEL 1: Das **Apsidensystem** hat als Bahnwinkel die wahre Anomalie υ. Seine *Frenet*schen Formeln sind

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(P)} \sin\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(P)} \cos\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon\right)
\end{aligned} \tag{4.343}$$

und der zugehörige Eigenbewegungsvektor lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(P)} \cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)} \sin\upsilon\right) + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} \tag{4.344}$$

und bei Bezug au6f das *Leibniz*-System

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.345}$$

[1] Siehe in Abschnitt 4.3.15 ab Seite 53

In bahnmechanischem Zusammenhang ist (vgl. die Formeln (4.266) und (4.259)) bei Bezug auf ein inertiales Basissystem

$$\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} = \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = \dot{\omega} + \dot{\sigma} \quad . \tag{4.346}$$

Die Größen ω, i, Ω bzw. σ sind „langsame" Parameter, d.h. sie sind konstant im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung (also ohne Berücksichtigung von „Störungen"). Das Apsidensystem ist daher stets von einem „Störmodell" abhängig, das eine bestimmte Bewegung charakterisiert. Die wahre Anomalie wird also im Gegensatz zum *Hansen*schen Bahnwinkel ζ von den „Störungen" beeinflusst. ◀

BEISPIEL 2: Das **Knotensystem** hat als Bahnwinkel das Argument der Breite *u*. Seine *Frenet*schen Formeln sind

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_2^{(D)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(D)} \sin u \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + \dot{\eta}\ \mathbf{q}_3^{(D)} \cos u \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u - \mathbf{q}_2^{(D)} \cos u\right) \end{aligned} \tag{4.347}$$

und der zugehörige Eigenbewegungsvektor lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \dot{\eta}\ \left(\mathbf{q}_1^{(D)} \cos u\ + \mathbf{q}_2^{(D)} \sin u\right) + \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_3^{(D)} \tag{4.348}$$

und bei Bezug auf das *Leibniz*-System

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 + \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.349}$$

Ähnlich wie im Fall des vorstehenden Apsidensystems ist in bahnmechanischem Zusammenhang (vgl. die Formel (4.346)) bei Bezug auf ein inertiales Basissystem

$$\dot{\zeta} - \dot{u} = \dot{\Omega}\cos i = \dot{\sigma} \quad . \tag{4.350}$$

Die Größen i, Ω bzw. σ sind „langsame" Parameter, d.h. sie sind konstant im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung (also ohne Berücksichtigung von „Störungen"). Auch das Knotensystem ist daher stets von einem „Störmodell" abhängig. Dies zeigt sich im Argument der Breite $u = \zeta - \sigma = \omega + \upsilon$, welches wie die wahre Anomalie υ von einem Bewegungsmodell („Störmodell") abhängt. ◀

4.4.7 Der Zusammenhang von *Hansen*-Systemen und der Methode der Variation der Parameter

Es wurde in *Satz H23* angesprochen, dass die Methode der Variation der Parameter in engem Zusammenhang mit *Hansen*-Systemen gesehen werden kann. Dieser Zusammenhang soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden.

Es werde wie in Abschnitt 4.4.6 auf Seite 77 ein beliebiges bewegungsbezogenes $\mathbf{q}_j^{(B)}$ − Bahnsystem mit Bahnwinkel ψ eingeführt. Das *Leibniz*-System hat in Bezug auf dieses System die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(B)}\cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\sin\psi \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(B)}\sin\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\cos\psi \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)} \quad .\end{aligned} \tag{4.351}$$

Der Ortsvektor eines bewegten Objektes lautet

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = y^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} = r\left(\mathbf{q}_1^{(B)}\cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\sin\psi\right) \quad . \tag{4.352}$$

Seine absolute Variation nach dem Bahnwinkel wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) + r\,\mathbf{q}_0 \quad , \tag{4.353}$$

seine relative Variation nach dem Bahnwinkel mit partieller Differentiation

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = \frac{\partial r}{\partial\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{\partial\mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial\psi}\cos\psi + \frac{\partial\mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial\psi}\sin\psi\right) + r\,\mathbf{q}_0 \quad . \tag{4.354}$$

Da der Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}-$System bezogen ist, muss sein

$$\frac{\partial\mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial\psi} = 0 \quad . \tag{4.355}$$

Somit bleibt für die Differenz zwischen absoluter und partieller Variation des Ortsvektors

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = \left(\frac{dr}{d\psi} - \frac{\partial r}{\partial\psi}\right)\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) \quad . \tag{4.356}$$

Die Bahnkurve, auf der das Objekt sich bewegen soll, sei mit Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}-$System bezogen. Der Bahnradius hat dann die Darstellung

$$r = r\left(A_\nu;\psi\right) \tag{4.357}$$

und für die Variation des Radius nach diesem Bahnwinkel wird

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{\partial r}{\partial\psi} + \sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\psi} \quad . \tag{4.358}$$

Somit bleibt im Ausdruck (4.356)

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = \left(\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\psi}.\right)\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) \quad . \tag{4.359}$$

Es sei nun das Bahnsystem ein *Hansen*-System mit dem Bahnwinkel

$$\psi \triangleq \zeta = \int\left(G/r^2\right)dt = \int\left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|dt \quad . \tag{4.360}$$

In diesem und nur in diesem Fall verschwindet wegen der *Hansen* Bedingung (4.243) auf Seite 57 der Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{d\zeta}\cos\zeta + \frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{d\zeta}\sin\zeta = \left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{dt}\cos\zeta + \frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{dt}\sin\zeta\right)\frac{d\zeta}{dt} = 0 \quad . \tag{4.361}$$

Es bleibt dann

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = \left(\sum_{\nu} \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} \right) \mathbf{r}_0 \quad . \tag{4.362}$$

Dies vertieft die Aussage von Satz H20:

Satz H24: *Die Oskulationsbedingung*

$$\sum_{\nu} \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} = 0 \tag{4.363}$$

welche als Ausgangspunkt für die Variation der Parameter dient, ist notwendig auf ein Hansen-*System mit Bahnwinkel ζ bezogen.*

Die Variation der Parameter kann also ohne den Bezug auf ein *Hansen*-System nicht sinnvoll begründet werden. In diesem und nur in diesem Fall wird daher

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad . \tag{4.364}$$

4.4.8 Die Bewegungsgleichungen in *Hansen* Koordinaten

Als *Hansen* Koordinaten werden die kartesischen Koordinaten $y^{(I)j}\,(j=1,2,3)$ bezeichnet, welche einen Ortsvektor in Bezug auf ein *Hansen* System $\mathbf{q}_j^{(I)}$ darstellen lassen. Für sie gilt

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = y^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{4.365}$$

Im Einzelnen (vgl. etwa die Beziehungen (4.244) auf Seite 57 ist

$$y_1^{(I)} = r\cos\zeta \quad , \quad y_2^{(I)} = r\sin\zeta \quad , \quad y_3^{(I)} = 0 \quad , \tag{4.366}$$

wenn ζ der *Hansen*sche Bahnwinkel ist. Die wesentliche *Hansen* Eigenschaft zeigt sich im Geschwindigkeitsvektor nach Beziehung (4.198) auf Seite 47

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{4.367}$$

Der (absolute) Beschleunigungsvektor lautet dann

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} + \dot{y}^{(I)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)}$$

und die Bewegungsgleichungen in den Hansen Koordinaten (also **relativ** zu dem Hansen System) können aus

$$\ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} = \ddot{\mathbf{r}} - \dot{y}^{(I)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \tag{4.368}$$

berechnet werden. Hier kommen die Variationsgleichungen (4.325) zum Tragen: bei skalarer Multiplikation der letzten Gleichung mit $\mathbf{q}_k^{(I)}, (k=1,2,3)$, verschwinden alle Anteile des zweiten Terms auf der rechten Seite dieses Ausdrucks. Wird für $\ddot{\mathbf{r}}$ die Zerlegung (4.303) auf Seite 69 in Anteile des *Leibniz*-Systems verwendet, bleibt

$$\ddot{y}_1^{(I)} = b_R\,\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} + b_t\,\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} + b_N\,\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} \quad ,$$

mit den Beziehungen (4.244) schließlich

$$\ddot{y}_1^{(I)} = b_R \cos\zeta - b_T \sin\zeta = \frac{1}{r}\left(b_R\, y_1^{(I)} - b_T\, y_2^{(I)}\right) \tag{4.369}$$

und analog

$$\ddot{y}_2^{(I)} = b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta = \frac{1}{r}\left(b_R\, y_2^{(I)} + b_T\, y_1^{(I)}\right) \quad , \tag{4.370}$$

sowie

$$\ddot{y}_3^{(I)} = 0 \quad . \tag{4.371}$$

Diese Ausdrücke sind (zumindest) von theoretischem Interesse: bei Bezug auf ein *Hansen* System sind die Bewegungsgleichungen von (maximal) der vierten Ordnung. Der normale Beschleunigungsanteil bleibt außen vor, was eine der wesentlichen Eigenschaften der *Hansen* Systeme seit ihrer Entdeckung ist. Dagegen sind die Bewegungsgleichungen bei Bezug auf das (inertiale) *Newton*-System stets von der sechsten Ordnung. Allerdings muss der Bezug einer Bewegung auf das *Newton*-System, der in jedem Fall prinzipiell erforderlich ist um eine Bewegung im Raum endgültig beschreiben zu können, durch die zusätzliche Integration um den räumlichen Rotationswinkel mit $\dot{\eta} = r\,b_N / G$ hergestellt werden.

BEISPIEL: Wird die gestörte 2-Körperbewegung einem Bewegungsvorgang zugrunde gelegt, lauten die Beschleunigungskomponenten[1] mit der keplerschen Beschleunigung $b_K=-\mu/r^2$

$$b_R = -\frac{\mu}{r^2} + b_{R2} \;\; , \;\; b_T \;\; , \;\; b_N$$

und die Beschleunigungsgleichungen in den *Hansen* Koordinaten

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1^{(I)} + \frac{\mu}{r^3} y_1^{(I)} &= b_{R2} \cos\zeta - b_T \sin\zeta \\ \ddot{y}_2^{(I)} + \frac{\mu}{r^3} y_2^{(I)} &= b_{R2} \sin\zeta + b_T \cos\zeta \end{aligned} \tag{4.372}$$

sind den Bewegungsgleichungen im *Newton*schen Fall (zumindest im ungestörten Fall: $b_{R2} = b_T = b_N = 0$) äquivalent[2]:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = b_{R2}\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.373}$$

➔ *Eine Zweikörperbewegung verläuft völlig unabhängig von einem inertialen Bezugssystem*.

Anmerkung: Die Bewegungsgleichungen (4.369), (4.370), welche die Bewegung in *Hansen* Koordinaten beschreiben, müssen über der Zeit integriert werden. Dies hat sich in der Praxis als nachteilig erwiesen[3]. Bei einer Verwendung von *Hansen*-Systemen ist es empfehlenswert, den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable zu verwenden. Dadurch wird zunächst nur die Bahn erhalten,

[1] Siehe hierzu die ausführlichen Betrachtungen in Abschnitt 5.4 ab Seite 113

[2] Vgl. V. A. BRUMBERG [1995] p.72

[3] Näheres hierzu Kapitel 18 in Band III

nicht die Bewegung in der Bahn. Dies wird in einem neuartigen Ansatz ausgehend von der allgemeingültigen Darstellung einer geradlinigen Bewegung in Abschnitt 5.2 detailliert ausgeführt. Damit kann das in einem Schritt als System zu lösende Bewegungsproblem auf ein System der maximalen Ordnung 3 zurückgeführt werden. Der Bezug zur Zeit wird dann in einer unabhängigen Integration nach Lösung aller sonstigen Bewegungsprobleme hergestellt, wenn also die Bahn als solche bekannt ist. Der Bezug zum inertialen (*Newton*schen) Basissystem wird (weitgehend) unabhängig durch ein System der dritten Ordnung mit den drei *Euler*winkeln oder der vierten Ordnung mit *Euler-Rodrigues* Parametern erfolgen. Die Variationsgleichungen dieser Systeme sind jedoch untereinander redundant[1].
◀

4.4.9 Die Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung

Um eine Bewegung vollständig im Raum beschreiben zu können, muss sie auf ein von dieser Bewegung unabhängiges Basissystem bezogen werden. Es ist üblich, dann die Bewegung auf dieses System bezogen zu schreiben und eine (mögliche) Eigenbewegung dieses Systems außer Acht zu lassen. Allerdings muss dabei ein Fehler in Kauf genommen werden, da der Bewegungsvorgang selbst als eine absolute Bewegung betrachtet werden muss. Dies zeigt die folgende, vollständig allgemeingültige, Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung, die von einem speziellen Bewegungsvorgang und dessen Dynamik auch vollständig unabhängig ist. Um dies zu verdeutlichen, wird zunächst die allgemeingültige Formulierung, wie sie in Abschnitt 4.2.2 auf Seite 21 eingeführt wurde, übernommen.

In Formel (4.94) auf Seite 25 wurde der Normalenvektor einer Ebene mit Knotenlänge A_0 und Neigung B_0 berechnet. Sei der Normalenvektor mit $\mathbf{c}_i = c^i\,\mathbf{p}_i$ auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem bezogen, lauten seine Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_1 &= \sin B_0 \sin A_0 \\ c_2 &= -\sin B_0 \cos A_0 \\ c_3 &= \cos B_0 \quad . \end{aligned} \tag{4.374}$$

Die Variation des Normalenvektors lautet

$$\dot{\mathbf{c}}_0 = \dot{c}^i\,\mathbf{p}_i + c^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \tag{4.375}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \dot{B}_0 \cos B_0 \sin A_0 + \dot{A}_0 \sin B_0 \cos A_0 \\ \dot{c}_2 &= -\dot{B}_0 \cos B_0 \cos A_0 + \dot{A}_0 \sin B_0 \sin A_0 \\ \dot{c}_3 &= -\dot{B}_0 \sin B_0 \quad . \end{aligned} \tag{4.376}$$

Das $\mathbf{q}_j$ – System ist im (Allgemeinen) kein *Hansen*-ideales System. Es muss daher $c^j\dot{\mathbf{q}}_j \neq 0$ angenommen werden. Sei $\left(q_i{}^j\right)$ die Variationsmatrix dieses Systems, ist

$$c^i q_i{}^j\,\mathbf{q}_j \neq 0 \quad .$$

Im Fall dass das $\mathbf{q}_j$ – System als ein Fundamentalsystem angenommen wird (dann wird formal $\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i$ geschrieben), werden die $q_i{}^j$ vernachlässigt. Dass diese Koeffizienten vernach-

[1] Siehe hierzu die ausführlichen Untersuchungen von A. DEPRIT [1975] und V.A. BRUMBERG [1995], pp. 69-74 im Zusammenhang mit *Hansen*-Koordinaten, sowie die Zusammenstellung der entsprechenden Formeln in Abschnitt 6.3.9 auf Seite 219

lässigt werden, darf allerdings nicht vergessen werden. Es werden daher hier zunächst die vollständig allgemeinen Variationsgleichungen für die Bewegung der Bahnebene hergeleitet. Die Variation $\dot{\mathbf{c}}_0$ des Bahnnormalenvektors kann nach den Beziehungen (4.376) vektoriell zerlegt werden

$$\dot{\mathbf{c}}_0 = \dot{B}_0\,\mathbf{h}_0 + \dot{A}_0 \sin B_0\,\mathbf{k}_1 + c^j \dot{\mathbf{q}}_j \quad , \tag{4.377}$$

wenn mit

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_0 &:= \mathbf{q_1}\cos B_0 \sin A_0 - \mathbf{q}_2 \cos B_0 \cos A_0 - \mathbf{q}_3 \sin B_0 = \\ &= \mathbf{q_1}\cos(-B_0)\cos(270° - A_0) + \mathbf{q}_2 \cos(-B_0)\sin(270° - A_0) + \mathbf{q}_3 \sin(-B_0)\end{aligned} \tag{4.378}$$

$$\mathbf{k}_1 \;:=\; \mathbf{p_1}\cos \mathrm{A}_0 + \mathbf{p}_2 \sin \mathrm{A}_0 \;=\; \mathbf{q}_1 \cos\sigma \;+ \mathbf{q}_2 \sin\sigma \tag{4.379}$$

der Knotenvektor (gerichtet zum aufsteigenden Knoten der Bahnebene bezüglich eines $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystems und hier auch bezogen auf das bewegungsorientierte $\mathbf{q}_j$ – System) eingeführt wurden. Nach den Variationsformeln des mitgeführten Bahnsystems (4.318) auf Seite 72 ist

$$\dot{\mathbf{c}}_0 = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \quad ,$$

wobei

$$\mathbf{q}_0 \;=\; -\mathbf{k}_1 \sin u - \mathbf{h}_0 \cos u \tag{4.380}$$

gesetzt werden kann. Somit bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{c}}_0 \cdot \mathbf{h}_0 &= \dot{\mathrm{B}}_0 + \mathrm{c}^{\mathrm{i}}\mathrm{q}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}}\mathbf{q}_{\mathrm{j}} \cdot \mathbf{h}_0 \qquad = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{h}_0 = \dot{\eta}\cos(\zeta - \sigma) = \dot{\eta}\cos \mathrm{u} \\ \dot{\mathbf{c}}_0 \cdot \mathbf{k}_1 &= \dot{\mathrm{A}}_0 \sin \mathrm{B}_0 + \mathrm{c}^{\mathrm{i}}\mathrm{q}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}}\mathbf{q}_{\mathrm{j}} \cdot \mathbf{k}_1 = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k}_1 \;= \dot{\eta}\sin(\zeta - \sigma) = \dot{\eta}\sin \mathrm{u} \quad .\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\mathbf{p_1} \cdot \mathbf{h}_0 &= \;\; \cos B_0 \sin A_0 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{h}_0 &= -\cos B_0 \cos A_0 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{h}_0 &= -\sin B_0\end{aligned} \tag{4.381}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{q_1} \cdot \mathbf{k}_1 &= \sin A_0 \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{k}_1 &= \cos A_0 \\ \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{k}_1 &= 0 \qquad ,\end{aligned} \tag{4.382}$$

lauten die **vollständigen** Variationsgleichungen für die räumlichen Bahnorientierungswinkel

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{B}}_0 - \mathrm{q}_{13} \sin \mathrm{A}_0 + \mathrm{q}_{23} \cos \mathrm{A}_0 &= \dot{\eta}\cos \mathrm{u} \\ (\dot{\mathrm{A}}_0 + \mathrm{q}_{12})\,\sin \mathrm{B}_0 - \left(\mathrm{q}_{13} \cos \mathrm{A}_0 + \mathrm{q}_{23} \sin \mathrm{A}_0\right)\cos \mathrm{B}_0 &= \dot{\eta}\,\sin \mathrm{u} \\ (\dot{\mathrm{A}}_0 + \mathrm{q}_{12})\,\cos \mathrm{B}_0 - \left(\mathrm{q}_{13} \cos \mathrm{A}_0 - \mathrm{q}_{23} \sin \mathrm{A}_0\right)\sin \mathrm{B}_0 &= \dot{\sigma}\end{aligned} \tag{4.383}$$

Eine alternative Schreibweise dieser Beziehungen kann mit dem (allgemeinen) Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems

$$\mathbf{D}_q = D_q{}^j\,\mathbf{q}_j$$

mit

$$D_{q1} = q_{23} \quad , \quad D_{q2} = q_{31} \quad , \quad D_{q3} = q_{12}$$

erhalten werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{B}}_0 + \mathbf{D}_\mathrm{q} \cdot \mathbf{k}_1 &= \dot{\eta} \cos \mathrm{u} \\ \dot{\mathrm{A}}_0 \sin \mathrm{B}_0 - \mathbf{D}_\mathrm{q} \cdot \mathbf{h}_0 &= \dot{\eta} \sin \mathrm{u} \\ \dot{\mathrm{A}}_0 \cos \mathrm{B}_0 + \mathbf{D}_\mathrm{q} \cdot \mathbf{c}_0 &= \dot{\sigma} \quad . \end{aligned} \tag{4.384}$$

Wird im Sinne eines rechtläufigen Knotensystems der Vektor

$$\mathbf{k}_2 = -\mathbf{h}_0 \tag{4.385}$$

eingeführt, lautet die zweite der Variationsgleichungen

$$\dot{A}_0 \sin B_0 + \mathbf{D}_q \cdot \mathbf{k}_2 = \dot{\eta} \sin u \quad . \tag{4.386}$$

Der transversale Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ des mitgeführten Bahnsystems aus Formel (4.311) kann im Knotensystem auch in der Form

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{k}_1 \sin u + \mathbf{k}_2 \cos u \tag{4.387}$$

dargestellt werden. Werden in den Variationsgleichungen für $\dot{B}_0$ und $\dot{A}_0$ in den Gleichungen (4.384) und (4.386) $\dot{\eta}$ eliminiert, wird

$$\dot{B}_0 \sin u - \dot{A}_0 \cos u \sin B_0 + \mathbf{D}_p \cdot \left(\mathbf{k}_1 \sin u - \mathbf{k}_2 \cos u \right) = 0$$

bzw. die allgemeingültige Beziehung

$$\dot{B}_0 \sin u - \dot{A}_0 \cos u \sin B_0 = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0 \quad . \tag{4.388}$$

4.4.10 Die Bewegung einer Satellitenbahnebene

Für die Untersuchung einer Satellitenbewegung wird üblicherweise das Äquatorsystem mit Äquatorebene definiert als Ebene durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Rotationsachse der Erde als Fundamentalebene gewählt. Eine Satellitenbahnebene hat dann die Neigung $i = B_0$, sowie die Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\Omega = A_0$, und daher die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{i}\right)^{\cdot} &= \dot{\eta} \cos \mathrm{u} - \mathbf{D}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega} \sin \mathrm{i} &= \dot{\eta} \sin \mathrm{u} - \mathbf{D}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\Omega} \cos \mathrm{i} &= \dot{\sigma} \quad - \mathbf{D}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{c}_0 \quad , \end{aligned} \tag{4.389}$$

und entsprechend

$$\left(i\right)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin i = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0 \quad . \tag{4.390}$$

Kann das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem als ein Inertialsystem betrachtet werden, dessen Variationsmatrix $\left(p_i^{\,j} \right)$ unbekannt ist oder vernachlässigt werden kann oder wenn man ganz einfach die Bewegung nur auf das $\mathbf{p}_i$ – System bezogen beschreiben will, folgt die bekannte Darstellung

$$\begin{aligned} (\mathrm{i})^{\cdot} &= \dot{\eta}\cos u \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin u \qquad (\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0) \\ \dot{\Omega}\cos i &= \dot{\sigma} \quad . \end{aligned} \tag{4.391}$$

u wird in bahnmechanischem Zusammenhang als Argument der Breite bezeichnet, σ als Länge des Knotens in der Bahn bei Bezug auf den Ursprung eines *Hansen*-Systems. Die Herleitung dieser Variationsgleichungen zeigt die von einer speziellen Bahndynamik völlig unabhängige Formulierung, jedoch auch die (prinzipielle) Abhängigkeit von einer (eventuellen) Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems, wenn die $p_i^{\,j} \neq 0$ berücksichtigt werden müssen. Die Variationsgleichungen zeigen auch die bekannte Singularität in der Knotenlänge, wenn die Bahn gegenüber der Fundamentalebene nicht geneigt ist. Bedeutsam ist jedoch, dass der Rotationswinkel η der Drehung der Bahnebene um den Ortsvektor des bewegten Objektes keine Singularität aufweist. Nach Formel (4.307) auf Seite 70 ist

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad .$$

Es genügt also zur Untersuchung der räumlichen Bewegung unter Berücksichtigung der senkrecht zur Bahnebene wirkenden Beschleunigungskomponente b_N den Rotationswinkel η zu bestimmen. Wenn dieser bekannt ist und der Radius *r* sowie der „Flächenparameter" *G* mit Hilfe etwa der Variationsgleichungen (4.304) und (4.306) auf Seite 70 gelöst sind, können Neigung und Knotenlänge dann durch zusätzliche Integrationen aber unabhängig vom gesamten Bewegungssystem berechnet werden.

Zu den ungewohnten Differentialgleichungen für Neigung und Knoten (4.389) muss angemerkt werden, dass hier der Bezug auf ein anderes Koordinatensystem erfolgt, also eine **relative** Bewegung beschrieben wird. Die Größen $\dot{\eta}$ (und $\dot{\zeta}$) beschreiben dagegen die **absolute** Bewegung. Um die Bewegung relativ zum $\mathbf{p}_i$ – System beschreiben zu können, muss also der Anteil der Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Systems abgezogen werden, der durch die $\mathbf{D}_P \cdot \mathbf{k}_1$, $\mathbf{D}_P \cdot \mathbf{k}_2$ und $\mathbf{D}_P \cdot \mathbf{k}_3 = \mathbf{D}_P \cdot \mathbf{c}_0$ dargestellt wird.

Die relative Bewegung bezüglich des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems wird durch die Ausdrücke y_i beschrieben. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 6.3.3 und den folgenden Abschnitten im Zusammenhang mit geradlinigen Systemen im dreidimensionalen Raum näher untersucht.

Die Behandlung eventueller Querkopplungen – in der normalen Beschleunigung b_N können Neigung und Knotenlänge in beliebig komplizierter Weise vorkommen - werden in einem späteren Kapitel untersucht.

Der Bewegungsvorgang innerhalb der Bahnebene wird in Kapitel 5 behandelt.

5 Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen

Die allgemeine Bewegungsgleichung (4.304)

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \tag{5.1}$$

kann numerisch in voller Allgemeinheit integriert werden und somit das Bewegungsproblem vollständig gelöst werden, sofern nur die Teilbeschleunigungen b_R, b_T, b_N bekannt sind. Die numerische Integration hat die bekannten Nachteile, etwa keine überblickmäßige Bahninformation möglich, Gültigkeitsdauer des Ergebnisses nur für recht beschränkten Zeitraum. So ist es für bahnanalytische Zwecke, für Untersuchungen des langfristigen Bahnverhaltens, aber auch für manchen operationellen Einsatz, der nicht die letztmögliche Genauigkeit erfordert, sinnvoll, analytische Lösungen anzustreben. Um diese zu erhalten ist die von *L. Euler* geschaffene Methode der Variation der Parameter nach wie vor das wirkungsvollste Instrumentarium, wenn von einer beliebigen analytischen Darstellung ausgegangen werden und wenn die Rechnung in einem geeigneten bewegungsbezogenen Koordinatensystem erfolgen kann. Die Aufstellung der dazu benötigten Variationsgleichungen wird im folgenden Abschnitt in vollständiger Allgemeinheit und insbesondere gegenüber der bekannten *Kepler*lösung der Himmelsmechanik verallgemeinert näher untersucht.

5.1 Die Variationsgleichungen der allgemeinen Bewegung

Der Beschleunigungsvektor (5.1) lässt sich entsprechend Formel (4.316) in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\zeta}^2)\,\mathbf{r}_0 + (2\,\dot{r}\,\dot{\zeta} + r\,\ddot{\zeta})\,\mathbf{q}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \tag{5.2}$$

darstellen. Mit der Variation des Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ nach Formel (4.297) kann in vollständiger Allgemeinheit auch geschrieben werden

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \left(\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3}\right)\mathbf{r}_0 + \frac{\dot{G}}{r}\,\mathbf{q}_0 + \frac{G}{r}\,\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{5.3}$$

Vergleich mit den Beschleunigungskomponenten in der allgemeinen Bewegungsgleichung (5.1) führt als erste Variationsgleichung auf die (allgemeine) *Leibnizgleichung*[1]

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \tag{5.4}$$

sowie die weiteren Variationsgleichungen

$$\dot{G} \;=\; r\,b_T \tag{5.5}$$

$$\dot{\eta} \;=\; \frac{r}{G}\,b_N \quad . \tag{5.6}$$

[1] Wir wollen hier die von A. J. AITON [1960], p.67 vorgeschlagene Bezeichnung („*Leibniz's equation*“) auch für den allgemeinen in der vorliegenden Arbeit benötigten Fall der radialen Beschleunigung verwenden und zwar auch ohne den Zusatz „allgemeine“

Wird die letzte dieser Variationsgleichungen in die dritte der Variations- Formeln des mitgeführten Bahnsystems („*Frenet*'sche Formeln des mitgeführten Bahnsystems") (4.319) eingesetzt, folgt die Variationsgleichung für die Orientierung der $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ – Basisebene im Raum

$$\dot{\mathbf{c}}_0 \;=\; -\frac{r}{G} b_N \, \mathbf{q}_0 \quad . \tag{5.7}$$

Da $\mathbf{c}_0$ ein Einheitsvektor ist, können mit diesen Gleichungen nur zwei Parameter bestimmt werden. Dazu können die beiden Winkel *Inklination i* und *Länge des Knotens* Ω gewählt werden, wie in Abschnitt 4.4.10 gezeigt wurde.

Die allgemeinen Variationsgleichungen werden ergänzt durch die Variationsgleichung für den Bahnwinkel ζ aus Formel (4.297)

$$\dot{\varsigma} \;=\; \frac{G}{r^2} \quad . \tag{5.8}$$

Die Variationsgleichungen für $\ddot{r}$, $\dot{G}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ werden durch fünf Integrationen und nach Lösung der zwei zusätzlichen Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung in Inklination *i* und Länge des Knotens Ω das allgemeine Bewegungsproblem vollständig gelöst. Wird der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable gewählt, brauchen zunächst interessanterweise nur vier Variationsgleichungen gelöst zu werden, anschließend die Variationsgleichungen für *i* und Ω, und zum Abschluss das Zeitintegral $\dot{\zeta}$. Bemerkenswert an diesen allgemeinen Variationsgleichungen ist, dass die transversale Beschleunigungskomponente ausschließlich auf den Flächenparameter *G*, dass die normale Beschleunigungskomponente ausschließlich auf die Orientierungswinkel der Bahn im Raum wirken und dass die sechste der Variationsgleichungen für den Bahnwinkel als (schneller bzw. eigentlich unabhängiger) Variable die „Stör" - Beschleunigungen b_R, b_T, b_N nicht explizit enthält. *P. A. Hansen* nutzte diese Eigenschaft in seiner Störungstheorie[1] zu einer weitgehend unabhängigen Behandlung des in der momentanen Bahnebene liegenden Beschleunigungsanteils (= „Störanteils") und des die Bahnebene beeinflussenden außerhalb der Bahnebene befindlichen Beschleunigungsanteils (= „Störanteils"). Wir wollen in der vorliegenden Untersuchung auch untersuchen, inwieweit diese Eigenschaft vorteilhaft zur Lösung verschiedener weitergehender Aufgabenstellungen der Himmelsmechanik und Bahnanalyse verwendet werden kann.

5.2 Allgemeine mathematische Beschreibung von Bewegungen

5.2.1 Die geradlinige Bewegung

Die Beschreibung einer beliebigen Bewegung wird im Grunde genommen seit den Überlegungen *Keplers*, nämlich durch die Verwendung des zweiten keplerschen Gesetzes in seiner Deutung als Vektorprodukt aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor, so durchgeführt, dass der Ausgangspunkt aller Berechnungen stets eine geradlinige Bewegung ist (Vergleiche Bild 5-1). Der Geschwindigkeitsvektor definiert ja eine Gerade durch einen Punkt, der durch den Ortsvektor festgelegt wird. Diese Betrachtungsweise wird in der vertrauten Praxis dadurch verschüttet, dass erfahrungsgemäß der Zustandsvektor den momentanen Zustand eines Bewegungsvorganges vollständig beschreibt, indem er sich in die Parameter der oskulierenden

[1] vgl. HANSEN [1857], STUMPFF [1974] pp.163–229

Bahnkurve, welche auch immer diese seien, transformieren lässt. Diesen Zusammenhang wollen wir in diesem Abschnitt vertieft hinterfragen.

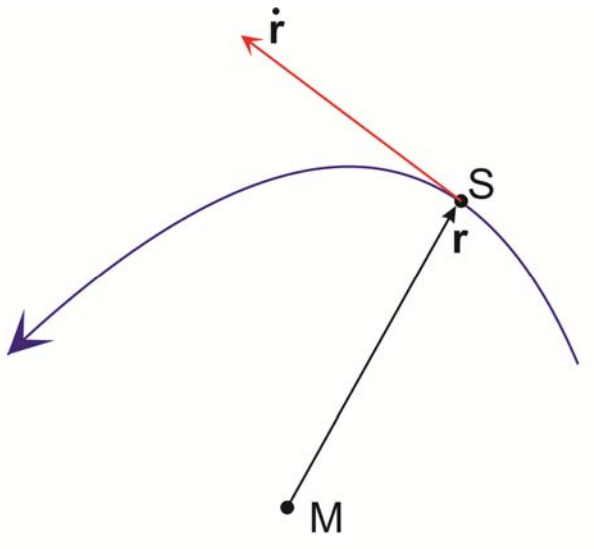


Bild 5-1: Beschreibung einer beliebigen Bewegung durch Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung

Wir wollen als Grundbewegung von der durch den Trägheitssatz beschriebenen geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ausgehen. Diese wird verändert, sofern eine von außen einwirkende Kraft eine Veränderung erzwingt. Dies ist die Aussage des *zweiten Newtonschen Axioms*[1]:

▶ *Die Kraft, die auf einen Körper von außen einwirkt, verändert seine Bewegungsgröße.*

Wir können auch formulieren: die einwirkende Kraft „stört“ die vorgegebene = „natürliche“ Bewegung, welche im Rahmen der klassischen Bewegungslehre durch die Bewegungsgröße (manchmal auch als „Impuls“ bezeichnet) beschrieben werden kann. Um eine derart „gestörte“ Bewegung beschreiben zu können, müssen wir zunächst die „ungestörte“, also die gleichförmig geradlinige Bewegung darstellen. Wir wollen dies in dem $\mathbf{q}_j$ – *Hansen*-idealen System, also einem bewegungsbezogenen System durchführen. Dies kann zugleich als ein Beispiel, allerdings auch höchst bedeutsames Beispiel, der in den vorstehenden Abschnitten dargestellten allgemeinen Bewegungslehre verstanden werden.

Im „störfreien“ Fall, wenn also keine Beschleunigungen auf das bewegte Objekt einwirken, gilt in der allgemeinen Bewegungsgleichung (5.1) auf Seite 88

$$b_R = b_T = b_N = 0 \quad . \tag{5.9}$$

Zweimalige Integration ergibt den Trägheitssatz

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \tag{5.10}$$

mit den Integrationskonstanten $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$. Damit ist zu jedem Zeitpunkt *t* der Ort **r** bekannt. Der Geschwindigkeitsvektor ist

[1] Siehe hierzu auch Abschnitt 2.3 in Band I

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{c}_1 \;=\; const. \quad .$$

Die durch diese Gleichungen beschriebene Bewegung ist also *gleichförmig.*

Die Bewegung kann im Sinne des bahnbezogenen $\mathbf{q}_j$- *Hansen*-idealen Systems beschrieben werden, wenn die Variationsgleichungen (5.4)–(5.8) herangezogen werden. Mit $b_N = 0$ liefert Gleichung (5.7) für den Normalenvektor $\mathbf{c}_0 = const.$. Die „Bahnebene", das ist hier die Ebene, welche durch die (geradlinige) Bahn und den Ursprung aufgespannt wird, ist somit raumfest. Wegen b_T=0 folgt aus Gleichung (5.7) auch $\dot{G} = 0$ und daher G = *const*., d.h. der „Flächenparameter" ist in diesem Fall konstant. Die Variationsgleichung (5.4) für den Radius *r* lautet im Fall der unbeeinflussten (= „ungestörten") Bewegung

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} \quad , \quad (b_R = 0) \quad . \tag{5.11}$$

Ein erstes Integral (nach Multiplikation mit $\dot{r}$ auf beiden Seiten) ist

$$\dot{r} \;=\; \pm\sqrt{C_1^2 - \frac{G^2}{r^2}} \quad . \tag{5.12}$$

Hier ist C_1^2 die Integrationskonstante, welche offenbar die Bedingung

$$r \;\geq\; \frac{G}{C_1} \;\geq\; 0 \tag{5.13}$$

erfüllen muss. Da *G* nicht negativ ist, muss also C_1 eine positive Größe sein:

$$C_1 \;>\; 0 \quad . \tag{5.14}$$

Zur nächsten Integration führen wir die Hilfsgröße

$$g \;:=\; \sqrt{r^2 C_1^2 - G^2} \tag{5.15}$$

ein, die nach Bild 5-2 geometrisch gedeutet werden kann: $s = g / C_1$ ist die Bogenlänge auf der (geraden) Bahn zwischen dem zum Ursprung nächsten Bahnpunkt (dem Perizentrum P) und dem Bahnpunkt *r*. Die Hilfsgröße *s* erfüllt die Bedingung

$$g\,\dot{g} \;=\; C_1^2\, r\,\dot{r} \quad , \tag{5.16}$$

und mit der Differentialgleichung (5.12) auch

$$r\,\dot{r} \;=\; \sqrt{r^2\, C_1^2 - G^2} \;=\; g \quad , \tag{5.17}$$

somit

$$\dot{g} \;=\; C_1^2 \quad . \tag{5.18}$$

Das gesuchte Integral ist

$$g \;=\; C_1^2\, t + C_2 \tag{5.19}$$

mit der neuen Integrationskonstanten C_2. Der Radius kann mit Gleichung (5.15) berechnet werden:

$$r \;=\; \sqrt{C_1^2\,t^2 + 2\,C_2\,t + \frac{C_2^2 + G^2}{C_1^2}} \qquad . \tag{5.20}$$

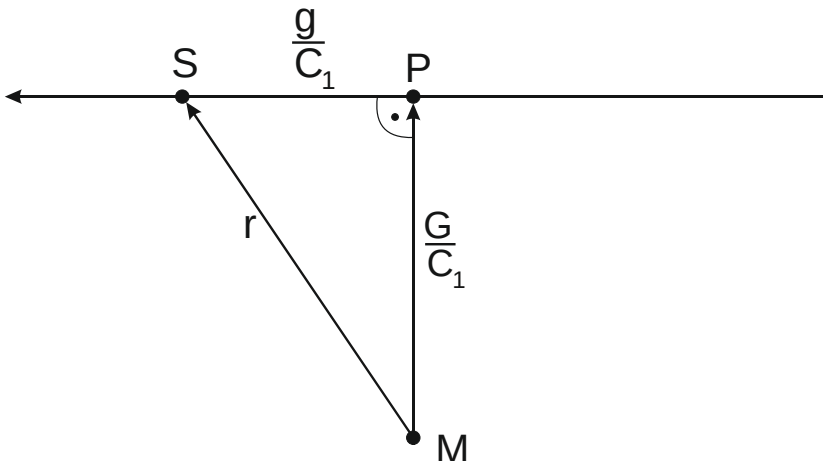


Bild 5-2: Zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung. Die „Bahnebene“ wird durch die Gerade und den (willkürlichen!) Bezugspunkt M aufgespannt

An Stelle der Zeit *t* kann auch hier wie in der Bahnmechanik üblich mit der allgemeingültigen Variationsgleichung (5.8) auf Seite 89 der (*Hansen*sche) Bahnwinkel ζ eingeführt werden. Es wird dann

$$d\zeta \;=\; \frac{G}{r^2}\,dt \;=\; \frac{G\,dt}{C_1^2\,t^2 + 2\,C_2\,t + \dfrac{C_2^2 + G^2}{C_1^2}} \tag{5.21}$$

mit dem Integral

$$\zeta - \zeta_P \;=\; \arctan\left[\frac{1}{G}\left(C_1^2\,t + C_2\right)\right]$$

bzw.

$$\tan\left(\zeta - \zeta_P\right) \;=\; \frac{1}{G}\left(C_1^2\,t + C_2\right) \;=\; \frac{g}{G} \;=\; \frac{\dfrac{g}{C_1}}{\dfrac{G}{C_1}} \qquad . \tag{5.22}$$

Mit der Definition der Variablen *s* aus Gleichung (5.15) gilt auch

$$\tan\left(\zeta - \zeta_P\right) \;=\; \frac{1}{G}\sqrt{C_1^2\,r^2 - G^2} \qquad . \tag{5.23}$$

Die neue Integrationskonstante ζ_P hat mit der Integrationskonstanten C_2 den Zusammenhang

$$\tan\left[\zeta(t=0) - \zeta_P\right] \;=\; \frac{C_2}{G} \quad , \quad \zeta_P \;:=\; \zeta(t=t_P) \qquad . \tag{5.24}$$

Bild 5-3 zeigt diesen Zusammenhang geometrisch.

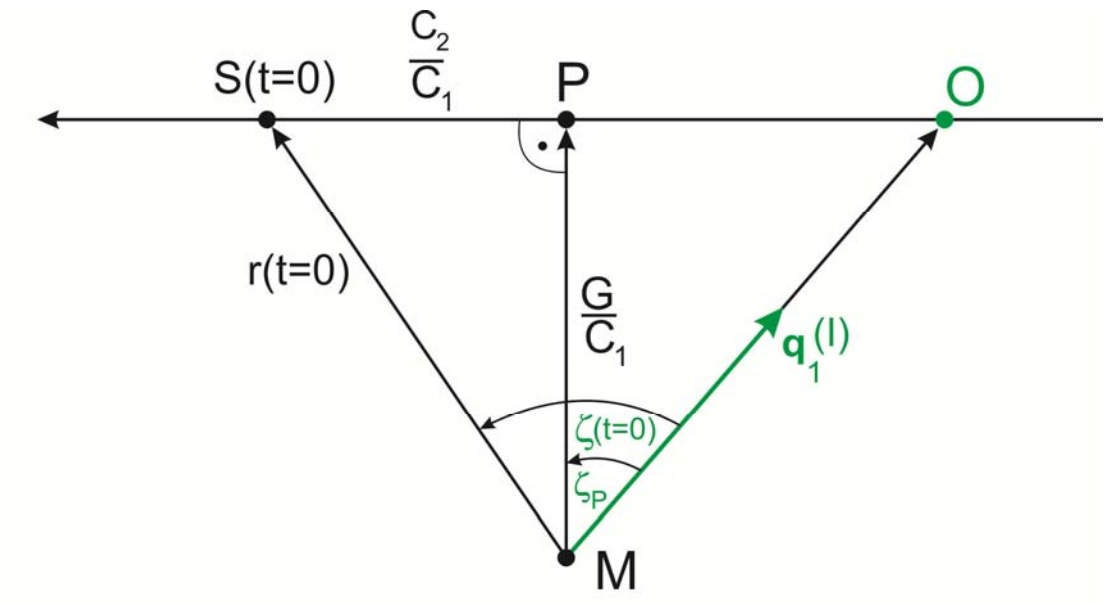


Bild 5-3: Zur Verknüpfung der Parameter ζ_P und C_2 *der* geradlinigen Bewegung. O – Anfangspunkt eines *Hansen* Systems mit Anfangsvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$

Gleichung (5.22) gibt den Zusammenhang zwischen Zeit *t* und Bahnwinkel ζ. Wird ζ vorgegeben, kann die Zeit *t* aus

$$t = \frac{1}{C_1^2}\left[G\tan\left(\zeta-\zeta_P\right)-C_2\right] \tag{5.25}$$

berechnet werden. Diese Beziehung ist immer erklärt, da nach der Beziehung (5.14) auf Seite 91 stets $C_1 > 0$ angenommen werden muss. Die Konstante C_2 tritt bei Darstellung der Bewegung bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit auf, hat also etwas mit einer Anfangszeit t_P zu tun.

Nehmen wir

$$r_P := r(t_P) = \frac{G}{C_1} \tag{5.26}$$

an, liefert Gleichung (5.20) unmittelbar diesen Zusammenhang:

$$C_2 = -C_1^2\, t_P \quad . \tag{5.27}$$

Auflösung von Gleichung (5.23) ergibt die Darstellung des Radius in Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ

$$r = \frac{G}{C_1\cos\left(\zeta-\zeta_P\right)} \quad . \tag{5.28}$$

Da $G \geq 0$ und $C_1 > 0$ muss auch $\cos(\zeta-\zeta_A) > 0$ sein, der Zwischenwinkel $\zeta-\zeta_A$ kommt also nur im Bereich

$$-90° < \zeta-\zeta_P < 90° \tag{5.29}$$

vor, die Singularität $|\zeta - \zeta_P| = 90°$ kann, wie auch geometrisch einsichtig ist, nie erreicht werden. Die Variation des Radius (also die radiale Geschwindigkeit) folgt dann aus Gleichung (5.12)

$$\dot{r} \;=\; C_1 \sin(\zeta - \zeta_P) \quad . \tag{5.30}$$

Die geometrischen Verhältnisse dieser Darstellung der geradlinigen Bewegung zeigt Bild 5-4. Der kürzeste Abstand des bewegten Körpers zum Ursprung *O* wird in der hier gewählten Darstellung durch den Ausdruck (5.26)

$$r_A \;=\; r(\zeta = \zeta_P) \;=\; \frac{G}{C_1}$$

gegeben.

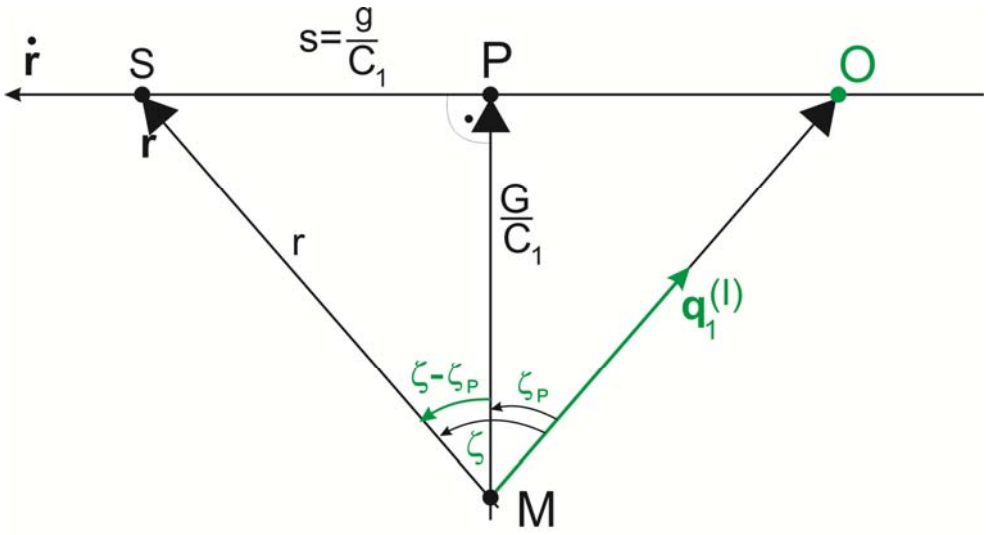


Bild 5-4: Zur geometrischen Veranschaulichung der mathematischen Beschreibung einer geradlinigen Bewegung: S – Ort des längs der Geraden bewegten Objektes mit Ortsvektor r und Radius r in Bezug auf einen (willkürlichen) Bezugspunkt M, mit Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$, P – Perizentrum, O – Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems mit Anfangsrichtung $\mathbf{q}_1^{(I)}$, ζ *Hansen*scher Bahnwinkel, ζ_P - *Hansen*scher Perizentrumswinkel, s=g/C1 Bogenlänge als Abstand des Ortes S vom Perizentrum P

Von gelegentlichem Interesse ist die aus den Gleichungen (5.17) und (5.19) folgende Beziehung

$$r\,\dot{r} \;=\; G \tan(\zeta - \zeta_P) \quad . \tag{5.31}$$

Bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit lautet sie wegen Gleichung (5.20) auch

$$r\,\dot{r} \;=\; C_1^2\, t + C_2 \tag{5.32}$$

und daher wegen der Beziehung (5.27) auch

$$r\,\dot{r} \;=\; C_1^2 \,(t - t_P) \quad . \tag{5.33}$$

Für manche Überprüfungen ist es nützlich, die Dimensionen der beiden Konstanten *C_1 und C_2* zu notieren:

$$C_1\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \quad , \quad C_2\left[\frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{5.34}$$

5.2.2 Der Zustandsvektor der geradlinigen Bewegung, die erste Konstante

Der momentane Bewegungszustand wird auch in der geradlinigen Bewegung wie üblich durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$$

und den Geschwindigkeitsvektor (4.236)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

beschrieben. Aus der Variationsgleichung $r^2\,\dot{\zeta} = G$ folgt mit der Beziehung (5.28) für die transversale Geschwindigkeit in der geradlinigen Bewegung

$$r\,\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = C_1 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad . \tag{5.35}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich also, wenn noch die Gleichung (5.30) für die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ herangezogen wird,

$$\dot{\mathbf{r}} = C_1\left[\mathbf{r}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) + \mathbf{q}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right)\right] \quad .$$

Da $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0$ folgt daraus insbesondere, wenn $V = \left|\dot{\mathbf{r}}\right|$ die absolute Geschwindigkeit der Bewegung ist,

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = V^2 = C_1^2 \quad , \tag{5.36}$$

oder da nach der Beziehung (5.14) auf Seite 91 C_1>0 schließlich

$$C_1 = V \quad . \tag{5.37}$$

- Die erste Integrationskonstante C_1 der geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit *V* des bewegten Objektes.

Wir erhalten für den Zustandsvektor (im Rahmen der geradlinigen Bewegung) somit die allgemeingültige Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{G}{V\cos\left(\zeta - \zeta_P\right)}\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= V\left[\mathbf{r}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) + \mathbf{q}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right)\right] \end{aligned} \tag{5.38}$$

sowie für Radius, radiale und transversale Geschwindigkeitskomponente

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} \\ \dot{r} &= V\sin(\zeta-\zeta_P) \\ r\dot{\zeta} &= V\cos(\zeta-\zeta_P) \end{aligned} \tag{5.39}$$

und außerdem

$$r\dot{r} = V^2(t-t_P) = G\tan(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{5.40}$$

5.2.3 Der Flächensatz

Der von *J. Kepler* gefundene Flächensatz, den er in seinem zweiten Gesetz der Planetenbewegung formulierte, ist nichts als eine Folge einer Bewegung in einer Ebene mit konstantem Normalenvektor zu verlaufen. Dieser Sachverhalt kann durch die Beziehung

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c} = \text{const.}$$

ausgedrückt werden. Der Flächensatz ist also keine spezielle charakterisierende Eigenschaft der so genannten *Kepler*bewegung, sondern ihm genügt die *Kepler*bewegung wie jede andere ebene Bewegung auch, wenn nur $\mathbf{c} = const.$ ist.

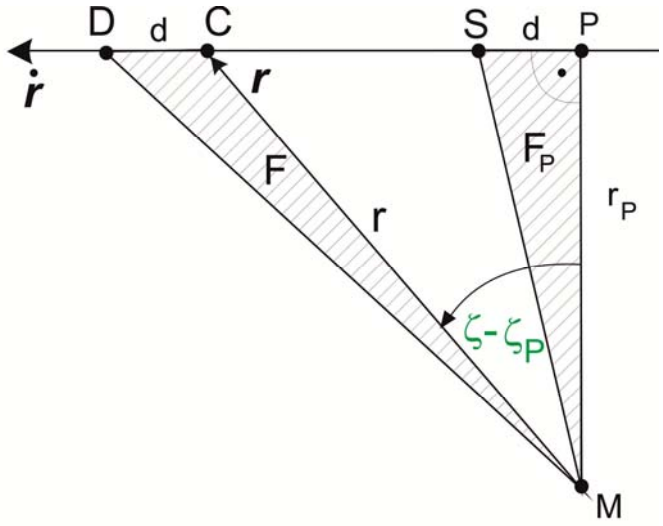


Bild 5-5: Der Flächensatz im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung

Wir wollen den Flächensatz als Beispiel zu dieser Aussage im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung untersuchen. Da in diesem Fall die Geschwindigkeit konstant ist, $V = const.$, wird in gleichen Zeitintervallen Δt auch stets dieselbe Distanz

$$d = V\,\Delta t \tag{5.41}$$

durchlaufen. In Bild 5-5 soll die Fläche F_P, die aus dem Dreieck *MPS* gebildet wird, wobei P das Perizentrum und *M* ein (willkürlicher) Ursprung ist, mit der Fläche *F* eines Dreiecks *MCD* zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* verglichen werden. Wenn $r_P = \overline{MP}$ die Perizentrumsdistanz ist, hat das Dreieck *MPS* in Bezug auf die in der Zeiteinheit durchlaufene Distanz *d* die Fläche

$$F_P = \frac{1}{2} r_P \, d \quad .$$

Hier kann r_P als Höhe des Dreiecks aufgefasst werden, die konstante Distanz d als dessen Basis. Somit hat das zu irgendeinem beliebigen Zeitpunkt gebildete Dreieck *MCD* dieselbe Basis und wegen der geradlinigen Bewegung dieselbe Höhe r_P, also auch dieselbe Fläche

$$F = F_P \, .$$

Dies bestätigt für den Fall der geradlinigen Bewegung den allgemeinen (Flächen-)

Satz: *Der Radiusvektor einer ebenen Bewegung mit konstantem Flächenparameter überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Dem Flächensatz in dieser allgemeinen Form entspricht das ebenfalls von *J. Kepler* gefundene allerdings wesentlich allgemeiner gültige Abstandsgesetz. Da die transversale Geschwindigkeit durch $V_T = r\dot{\zeta}$ bekannt ist und der „Flächensatz" in der Form $r^2\dot{\zeta} = G$ allgemeingültig formuliert werden kann, ist $r\dot{\zeta} = \frac{G}{r}$, also

$$V_T = \frac{G}{r} \quad . \tag{5.42}$$

Während der Flächensatz in der oben formulierten Form für alle Bewegungen mit konstantem Normalenvektor gilt, ist das Abstandsgesetz für jede beliebige Bewegung gültig, also eine rein kinematische Aussage[1]:

Satz: *Der Abstand eines bewegten Körpers von einem Ursprung ist umgekehrt proportional zur transversalen auf diesen Ursprung bezogenen Geschwindigkeit.*

5.2.4 Die Basisvektoren der geradlinigen Bewegung

In Abschnitt 4.4.3 untersuchten wir das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ -- *Hansen*-System, das aus dem mitgeführten $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ - System durch Drehung um den Bahnwinkel ζ erhalten wird. Für den radialen Richtungsvektor gilt nach Formel (4.308)

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \quad , \tag{5.43}$$

den transversalen Richtungsvektor nach Formel (4.311)

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \tag{5.44}$$

und den normalen Richtungsvektor

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{5.45}$$

Die Richtungen $\mathbf{r_0}$ und $\mathbf{q_0}$ sind im Verlauf auch der (ungestörten) geradlinigen Bewegung sicherlich nicht konstant.

$\mathbf{q}_1$ hat als Richtung die Anfangsrichtung für $\zeta = 0°$, vgl. Bild 5-6. Für Orts- und Geschwindigkeitsvektor vergleichen wir die allgemeingültigen Darstellungen

[1] Eine vollständig allgemeingültige Formulierung des Abstandsgesetzes für beiliebige (nicht nur transversale) Geschwindigkeiten wird in Abschnitt 5.2.6 auf Seite 108 gefunden.

$$\mathbf{r} \;=\; r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

mit der Lösung (5.10) auf Seite 90 im Falle der geradlinigen Bewegung

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{c}_1\,t + \mathbf{c}_2 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{c}_1 \quad .$$

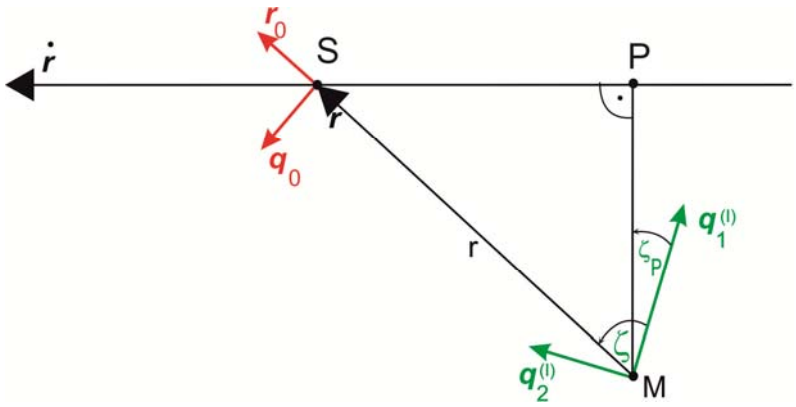


Bild 5-6: Die Basisvektoren des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen* Systems (grün) bei geradliniger Bewegung, die durch den Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ definiert ist, und durch das mitgeführte $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – *Leibniz*system (rot) charakterisiert wird

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich die Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ und den Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ des bewegungsbezogenen *Hansen* Systems. Zunächst ist

$$\mathbf{c}_1 \;=\; V\left(-\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta_P + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta_P\right) \quad . \tag{5.46}$$

Für $\mathbf{c_2}$ folgt

$$\mathbf{c}_2 \;=\; \mathbf{q}_1^{(I)}\left(r\cos\zeta + tV\sin\zeta_P\right) + \mathbf{q}_2^{(I)}\left(r\sin\zeta - tV\cos\zeta_P\right) \quad .$$

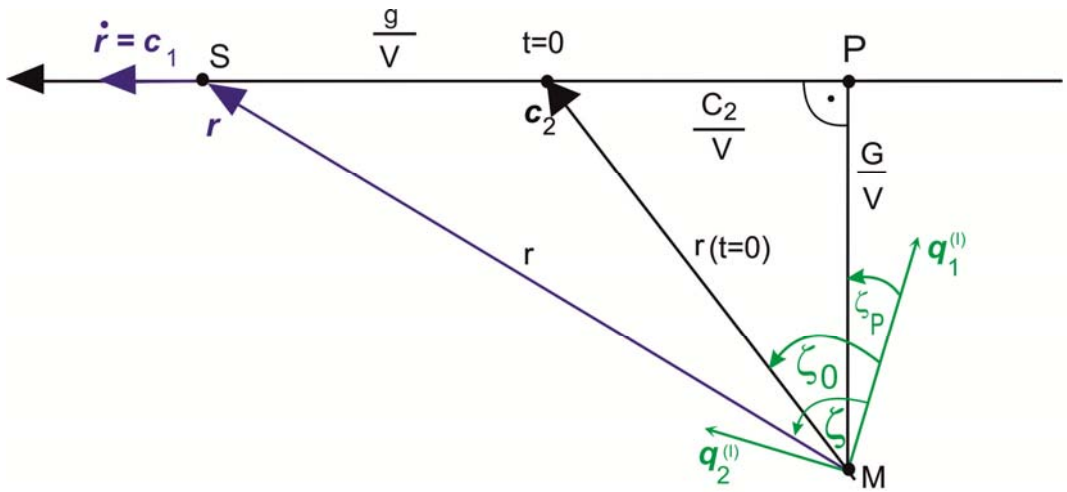


Bild 5-7: Geometrische Deutung der Integrationskonstanten der geradlinigen Bewegung. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ sind konstante Hilfsvektoren

Da $\mathbf{c_2} = const.$ kann etwa $t = t_P = const.$ gesetzt werden. Dann ist nach der ersten der Gleichungen (5.39) auf Seite 96 mit $\zeta_P = \zeta(t_P)$

$$r_P \;=\; r(t = t_P) \;=\; \frac{G}{V} \tag{5.47}$$

und es wird mit

$$C_2 \;=\; -t_P V^2$$

aus der Beziehung (5.27) auf Seite 93

$$\mathbf{c}_2 \;=\; \mathbf{q}_1^{(I)} \left(\frac{G}{V} \cos\zeta_P - \frac{C_2}{V} \sin\zeta_P \right) + \mathbf{q}_2^{(I)} \left(\frac{G}{V} \sin\zeta_P + \frac{C_2}{V} \cos\zeta_P \right) \quad . \tag{5.48}$$

Die Konstanten können daher entsprechend Bild 5-7 geometrisch gedeutet werden. Die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ des bewegungsbezogenen Bahnsystems lassen sich auf die Integrationskonstanten $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ der geradlinigen Bewegung zurückführen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= -\mathbf{c}_1 \left(\frac{1}{V} \sin\zeta_P + \frac{C_2}{V\,G} \cos\zeta_P \right) + \mathbf{c}_2 \frac{V}{G} \cos\zeta_P \\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{c}_1 \left(\frac{1}{V} \cos\zeta_P - \frac{C_2}{V\,G} \sin\zeta_P \right) + \mathbf{c}_2 \frac{V}{G} \sin\zeta_P \\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \frac{1}{G} \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_1 \quad .
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Im Fall der („ungestörten“) gleichförmig geradlinigen Bewegung mit den Parametern $G = const.$, $\mathbf{c_1} = const.$, $\mathbf{c_2} = const.$ bzw. $V = const.$, $\zeta_A = const.$, sind die $\mathbf{q}_j$ konstant und daher

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \;=\; 0 \quad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \quad . \tag{5.50}$$

Der zugehörige *Darboux*sche Vektor lautet daher mit Formel (4.328)

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \;=\; 0 \quad .$$

Dies bedeutet:

▶ *In der gleichförmig geradlinigen Bewegung ist der Darbouxsche Vektor der Nullvektor, es findet keine Bewegung des Basis-Hansen-Systems statt.*

Die *Frenet*schen Formeln des mitgeführten Bahnsystems lauten in diesem Fall mit den Gleichungen (4.319)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \frac{G}{r^2} \mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\frac{G}{r^2} \mathbf{r}_0 \qquad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Diese Gleichungen lassen sich noch beträchtlich vereinfachen, wenn der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable verwendet wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} &= \mathbf{q}_0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} &= -\mathbf{r}_0 \qquad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \\ \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} &= 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Die Variationsmatrix $f_i^{\,j}$ der Variation des mitgeführten Bahnsystems lautet in diesem Fall, wenn $\mathbf{g}_1 := \mathbf{r}_0$, $\mathbf{g}_2 := \mathbf{q}_0$, $\mathbf{g}_3 := \mathbf{c}_0$ gesetzt wird,

$$\mathbf{g}_i' := \frac{d\mathbf{g}_i}{d\zeta} = f_i^{\,j}\ \mathbf{g}_j \quad , \quad \text{mit} \quad \left(f_i^{\,j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.53}$$

5.2.5 Anpassung einer Bewegung durch Kurven erster Ordnung

Die Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung ist ein besonders interessantes Beispiel über die Arbeitsweise des Verfahrens der Variation der Parameter. Die Bewegung werde durch Beschleunigungen beeinflusst. Wir können also annehmen, dass nicht alle der Beschleunigungskomponenten b_R, b_T, b_N in Richtung der drei Achsen des mitgeführten Bahnsystems $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ verschwinden. Kurven erster Ordnung sind Gerade, die ohne Einschränkung in der Form (5.20) auf Seite 92 bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit oder (5.39) auf Seite 96 bei expliziter Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ dargestellt werden können. Die hier vorkommen den Parameter V und C_2 bzw. t_P bzw. ζ_P müssen jetzt ebenso wie der Flächenparameter G als variabel zugelassen werden. Gesucht sind dann die Variationsgleichungen für diese Parameter.

Wer mit der in der Himmelsmechanik seit *J. Kepler* üblichen Anpassung der Planetenbahnen mit einer Kurve 2. Ordnung vertraut ist, wird über die im Zusammenhang mit der Anpassung durch eine Kurve 1. Ordnung nötige Verwendung der Geschwindigkeit als einem Bahnparameter, der den Anpassungsvorgang wesentlich beschreibt, verwundert sein. Doch gerade darin zeigt sich das Wesen des Anpassungsvorganges einer Bewegung mit einer bestimmten mathematischen Kurve (und der bekannten Bewegung auf dieser Kurve) und der daraus sich ergebenden Herleitung der Variationsgleichungen für diese Parameter: Wir gehen aus von einer bekannten Kurve und der bekannten Bewegung auf dieser Kurve, auch wenn diese Kurve und die Bewegung auf dieser Kurve mit der zu beschreibenden Bewegung wenig oder vielleicht gar nichts zu tun hat. Die Parameter, welche diese bekannte Bewegung wesentlich charakterisieren, werden zur Beschreibung der interessierenden Bewegung so variiert, bis diese Bewegung möglichst gut, d. h. im Rahmen einer gefundenen Genauigkeit, angepasst wird. Ob dies, was bis jetzt nur als Idee formuliert wurde, überhaupt möglich ist, muss im Beispiel gezeigt werden. Im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung jedenfalls ist der erste Bahnparameter C_1 der Geschwindigkeit V identisch gleich. Also ist die Geschwindigkeit notwendig einer der Parameter, die im Fall einer Anpassung variiert werden müssen.

5.2.5.1 Die Zeit als unabhängige Variable

Betrachten wir zunächst die Herleitung der Variationsgleichungen bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit *t*. Differentiation von Gleichung (5.20) auf S. 92 gibt

$$r\dot{r} = \dot{V}\left(Vt^2 - \frac{C_2^2+G^2}{V^3}\right) + \dot{C}_2\left(t + \frac{C_2}{V^2}\right) + \dot{G}\frac{G}{V^2} + V^2 t + C_2 \quad . \tag{5.54}$$

Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung soll nun bedeuten, dass zu jedem Zeitpunkt die Bewegung durch eine geradlinige Bewegung angepasst wird, dass also die Geradendarstellung (5.20) und die zugehörige Variation des Radius also die Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ in Gleichung (5.39) auf S. 96 zu jedem Zeitpunkt gelten sollen:

$$r\dot{r} = V^2 t + C_2 \quad .$$

Vergleich mit dem obigen Ausdruck (5.54) führt **notwendig** auf die Bedingungsgleichung für die Variation der Parameter $\dot{V}, \dot{C}_2, \dot{G}$:

$$\dot{V}\left(Vt^2 - \frac{C_2^2+G^2}{V^3}\right) + \dot{C}_2\left(t + \frac{C_2}{V^2}\right) + \dot{G}\frac{G}{V^2} = 0 \quad . \tag{5.55}$$

Die Aufstellung genau dieser Bedingungsgleichung ist der Kernpunkt des ganzen Verfahrens, denn an dieser und nur an dieser Stelle kommt die Bedingung der Anpassung der Bewegung durch eine bestimmte Kurve zum Tragen. Wir können daher diese Bedingungsgleichung auch als *Anpassungsbedingung* oder als *Anpassungsgleichung* bezeichnen. Mit dieser Anpassungsgleichung wird die Willkürlichkeit des Anpassungsvorganges greifbar. Wir wissen nicht, wie die wahre Bewegung aussieht. Wir haben keine Möglichkeit, sie mathematisch greifbar zu machen. Also gehen wir von irgendeiner bekannten Bewegung aus, im vorliegenden Fall von der gleichförmig geradlinigen Bewegung, und variieren die Parameter der bekannten Bewegung so, dass die wahre Bewegung bestmöglich angepasst wird. Es wird dadurch verständlich, dass der eigentliche Aufwand zu einer Beschreibung eines Bewegungsvorganges in der richtigen d. h. physikalisch adäquaten Modellierung der Störbeschleunigungen b_R, b_T, b_N liegen wird, die übrigens vollständig unabhängig von der angepassten Bahnkurve erfolgen muss[1]. Der Vorteil einer geeigneten Anpassung mag in einer geeigneten Integration der Variationsgleichungen liegen.

In der hier abgeleiteten Anpassungsgleichung (5.55) ist von den Parametern *V*, C_2, *G* die Variation des „Flächenparameters“ *G* durch die Variationsgleichung (5.5) auf S. 88 ($\dot{G} = r\,b_T$) bekannt. Es gilt also, wie übrigens bei der Anpassung mit jeder beliebigen Kurve, die Variationsgleichungen für nur zwei Parameter zu finden. Im Fall der Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung sind dies die Parameter *V* und C_2 (bzw. t_P) zu finden. Dazu setzen wir zunächst $\dot{G}$ aus Gleichung (5.5) in die Anpassungsgleichung ein

$$\dot{C}_2\,(V^2 t + C_2) = -\dot{V}\left(V^3 t^2 - \frac{C_2^2+G^2}{V}\right) - r\,G\,b_T \quad . \tag{5.56}$$

Wegen der Anpassungsgleichung (5.55) bleibt für die Variation des Radius die „ungestörte“ Darstellung erhalten

[1] Dies wird ab Kapitel 17 (Band III) in Angriff genommen.

$$\dot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(V^2 t + C_2) \quad ,$$

woraus durch Differentiation

$$\ddot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(2V\dot{V}t + \dot{C}_2) + \frac{V^2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r} \tag{5.57}$$

erhalten wird. Aus Gleichung (5.12) auf S. 91 ist wegen $V = C_1$

$$\frac{\dot{r}^2}{r} \;=\; \frac{V^2}{r} - \frac{G^2}{r^3} \tag{5.58}$$

bekannt, es bleibt also

$$\ddot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(2V\dot{V}t + C_2) + \frac{G^2}{r^3} \quad . \tag{5.59}$$

Vergleich mit der allgemeingültigen Variationsgleichung (5.4) auf S. 88 für die Beschleunigung des Radius

$$\ddot{r} \;=\; b_R + \frac{G^2}{r^3}$$

ergibt somit im Fall einer Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung die zweite Beziehung zwischen $\dot{V}$ und $\dot{C}_2$

$$2V\dot{V}t + \dot{C}_2 \;=\; r\,b_R \quad . \tag{5.60}$$

Vergleich mit der Anpassungsgleichung (5.56) führt auf die gesuchten Variationsgleichungen für die Parameter V und C_2

$$\dot{V} \;=\; \frac{(V^2 t + C_2)\,b_R + G\,b_T}{\sqrt{(V^2 t + C_2)^2 + G^2}} \tag{5.61}$$

$$V\,\dot{C}_2 \;=\; \frac{(C_2^2 + G^2 - V^4 t^2)\,b_R - 2V^2 G\,b_T}{\sqrt{(V^2 t + C_2)^2 + G^2}} \quad . \tag{5.62}$$

Der Zusammenhang mit einer Anfangszeit t_P kann aus Gleichung (5.27) auf S. 93

$$\frac{dt_P}{dt} \;=\; \frac{1}{V^3}\,\left(2C_2\dot{V} - V\,\dot{C}_2\right)$$

berechnet werden:

$$V^3\,\frac{dt_P}{dt} \;=\; \frac{\left[(V^2 t + C_2)^2 - G^2\right]\,b_R + 2G\,(V^2 t + C_2)\,b_T}{\sqrt{(V^2 t + C_2)^2 + G^2}} \quad . \tag{5.63}$$

Als Lösungen ergeben sich die Parameter als explizite Funktionen der Zeit: $V(t)$, $C_2(t)$, $t_P(t)$. Der Bahnwinkel ζ ist schließlich aus der Variationsgleichung (5.8) auf S. 89

$$\zeta \;=\; \zeta_P + \int_{t_P}^{t} \frac{V^2 G}{(V^2 t + C_2)^2 + G^2}\,dt \tag{5.64}$$

als Funktion der Zeit berechenbar.

5.2.5.2 Der Bahnwinkel als unabhängige Variable

In himmelsmechanischen Aufgabenstellungen ist eine Lösung häufig eleganter zu erhalten, wenn an Stelle der Zeit t der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable verwendet wird. Wir können diesen auch im vorliegenden Fall einführen und erhalten eine alternative Herleitung der Variationsgleichungen bei Anpassung der Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung.

Gleichung (5.28) auf S. 93 erlaubt, den Radius in expliziter Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ zu berechnen. Differentiation nach ζ ergibt

$$\dot{r} = \frac{r}{G}\left[\dot{G} - \frac{G}{V}\dot{V} - rV\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)\dot{\zeta}_P\right] + \frac{G\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)}{V\cos^2\left(\zeta-\zeta_P\right)}\dot{\zeta} \quad .$$

Eine Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung verlangt für die Variation des Radius den Ausdruck (5.39) auf S. 96

$$\dot{r} = V\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) \quad . \tag{5.65}$$

Dies führt notwendig auf die *Anpassungsgleichung*

$$\dot{G} - \frac{G}{V}\dot{V} - rV\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)\dot{\zeta}_P = 0 \quad . \tag{5.66}$$

$\dot{G}$ ist wieder aus der Variationsgleichung (5.5) auf S. 88 bekannt. Wird Gleichung (5.65) nach der Zeit differenziert, folgt

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + \frac{V\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)}{G}\dot{G} - \frac{rV^2}{G}\dot{\zeta}_P \tag{5.67}$$

und Vergleich mit der Variationsgleichung (5.4) auf S. 88 liefert als zweite Bedingungsgleichung

$$V\dot{G}\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) - rV^2\dot{\zeta}_P - Gb_R = 0 \quad . \tag{5.68}$$

Damit ergibt sich unmittelbar die gesuchte Variationsgleichung für den Parameter ζ_P

$$V\dot{\zeta}_P = -b_R\cos\left(\zeta-\zeta_P\right) + b_T\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) \quad . \tag{5.69}$$

Wird dieser Ausdruck in die Anpassungsgleichung (5.66) eingesetzt, erhalten wir die gesuchte Variationsgleichung für den „Parameter“ V

$$\dot{V} = b_R\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) + b_T\cos\left(\zeta-\zeta_P\right) \quad . \tag{5.70}$$

Diese beiden Variationsgleichungen ersetzen zusammen mit den Gleichungen (5.39) auf S. 96 für r und $\dot{r}$ in spezieller, da nur durch Anpassung mit einer vorgegebenen Kurve zustande gekommenen, für die Rechnung aber häufig vorteilhaften Weise die allgemeingültige Variationsgleichung $\ddot{r}$ in (5.4) auf S. 88 vollständig. Sie können nach Bild 5-8 geometrisch gedeutet werden: $\dot{V}$ wirkt in Richtung der momentanen Bewegung, $V\,\dot{\zeta}_P$ quer zur Bewegungsrichtung. $\dot{V}$ ist also verantwortlich für eine Variation der Bewegung in Bewegungsrichtung, während $V\,\dot{\zeta}_P$ eine Rotation der Bewegung um den (willkürlichen!) Ursprung O charakterisiert.

Mit ζ als unabhängiger Variable lauten die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} V\frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R\cos\left(\zeta-\zeta_P\right)+b_T\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)\right] \\ \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[\ b_R\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)+b_T\cos\left(\zeta-\zeta_P\right)\right] \end{aligned} \tag{5.71}$$

Nach Berechnung von $V = V(\zeta)$ und $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ wird der Bezug zur Zeit mit der Variationsgleichung (5.8) auf S. 89 aus

$$dt = \frac{r^2}{G}d\zeta$$

bzw.

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{G}{V^2\cos^2(\zeta-\zeta_P)}d\zeta \tag{5.72}$$

mit den konstanten Anfangswerten ζ_0 und t_0 hergestellt. Insbesondere ist

$$t_P = t(\zeta=\zeta_P) \quad , \tag{5.73}$$

und der Parameter C_2 ergibt sich wegen der auch im Fall der Anpassung gültigen Formel (5.27) auf S. 93 aus

$$C_2 = -V^2 t_P \quad . \tag{5.74}$$

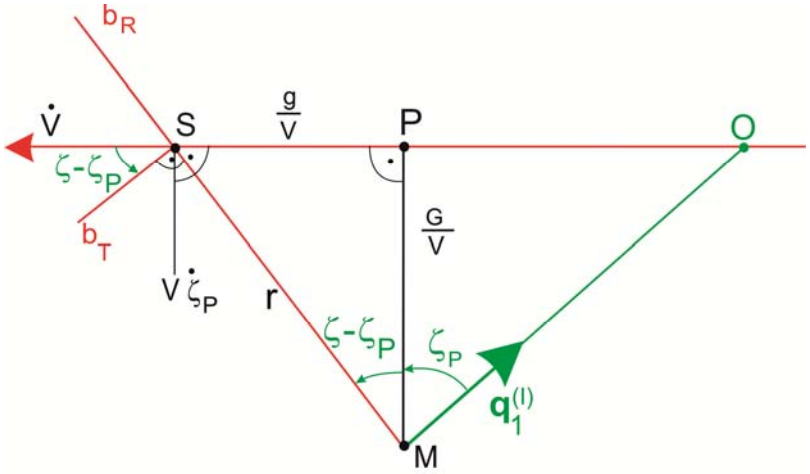


Bild 5-8: Zur geometrischen Deutung der Beschleunigungen bei Anpassung der Bewegung mit einer Kurve erster Ordnung: auf das bewegte Objekt wirken in der oskulierenden durch den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannten Bahnebene Beschleunigungen in radialer (b_R) und transversaler (b_T) Richtung

Das Integral (5.72) ist das Analogon zur *Kepler*gleichung in der klassischen Himmelsmechanik. Für eine vollständige Lösung des Bewegungsproblems wird der Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ benötigt. In Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ und bei Bezug auf das *Hansen* (- ideale) $\mathbf{q}_j$ – Bahnsystem ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1\cos\zeta+\mathbf{q}_2\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1\sin\zeta+\mathbf{q}_2\cos\zeta \quad , \end{aligned} \tag{5.75}$$

außerdem

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta}\frac{G}{r^2} \quad . \tag{5.76}$$

Mit dem System

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,G\,\mathbf{q}_0 \tag{5.77}$$

wird der Bewegungsvorgang somit vollständig beschrieben.

5.2.5.3 Zusammenfassung der Methode

Wird eine beliebige Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung also eine Gerade angepasst, so gelten für die Polarkoordinaten Radius r und Bahnwinkel ζ die Beziehungen (5.28) und (5.30) auf S. 94 sowie für die Parameter dieser Beziehungen die Variationsgleichungen (5.71) auf S. 104. Wir können ganz allgemein folgern: Wird eine Bewegung mit einer bestimmten vorgegebenen Kurve angepasst, so ist dieses Anpassungssystem nur dann vollständig beschrieben, wenn neben den beiden hierfür zuständigen Variationsgleichungen auch die Ausdrücke für den Radius und die Variation des Radius (d. h. die Radialgeschwindigkeit) mit angegeben werden. Im Fall der Anpassung durch eine Kurve erster Ordnung lautet dieses System also:

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} \\ \frac{dr}{d\zeta} &= r\tan(\zeta-\zeta_P) \\ V_R &= \dot{r} = V\sin(\zeta-\zeta_P) \\ V_T &= r\dot{\zeta} = V\cos(\zeta-\zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{5.78}$$

Die Parameter V und ζ_P werden berechnet aus dem System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} V\frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R\cos(\zeta-\zeta_P) + b_T\sin(\zeta-\zeta_P)\right] \\ \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[\; b_R\sin(\zeta-\zeta_P) + b_T\cos(\zeta-\zeta_P)\right] \quad . \end{aligned} \tag{5.79}$$

Das System der Variationsgleichungen zur Lösung eines Bewegungsproblems ist allerdings nur dann vollständig, wenn auch die von einer Anpassung unabhängigen Variationsgleichungen $\dot{G}$, $\dot{\mathbf{c}}_0, \dot{\zeta}$ aus den Gleichungen (5.5)–(5.8) auf Seite 88 mit einbezogen werden.

Einen Überblick über das grundsätzliche Verfahren zur Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung ist in Bild 5-9 dargestellt.

Ein einfaches aber vollständiges und in himmelsmechanischem Zusammenhang aber sehr wichtiges Beispiel zur Anpassung einer bestimmten Bewegung mit einer Kurve erster Ordnung wird in Abschnitt 5.4.3 auf Seite 118 durchgerechnet.

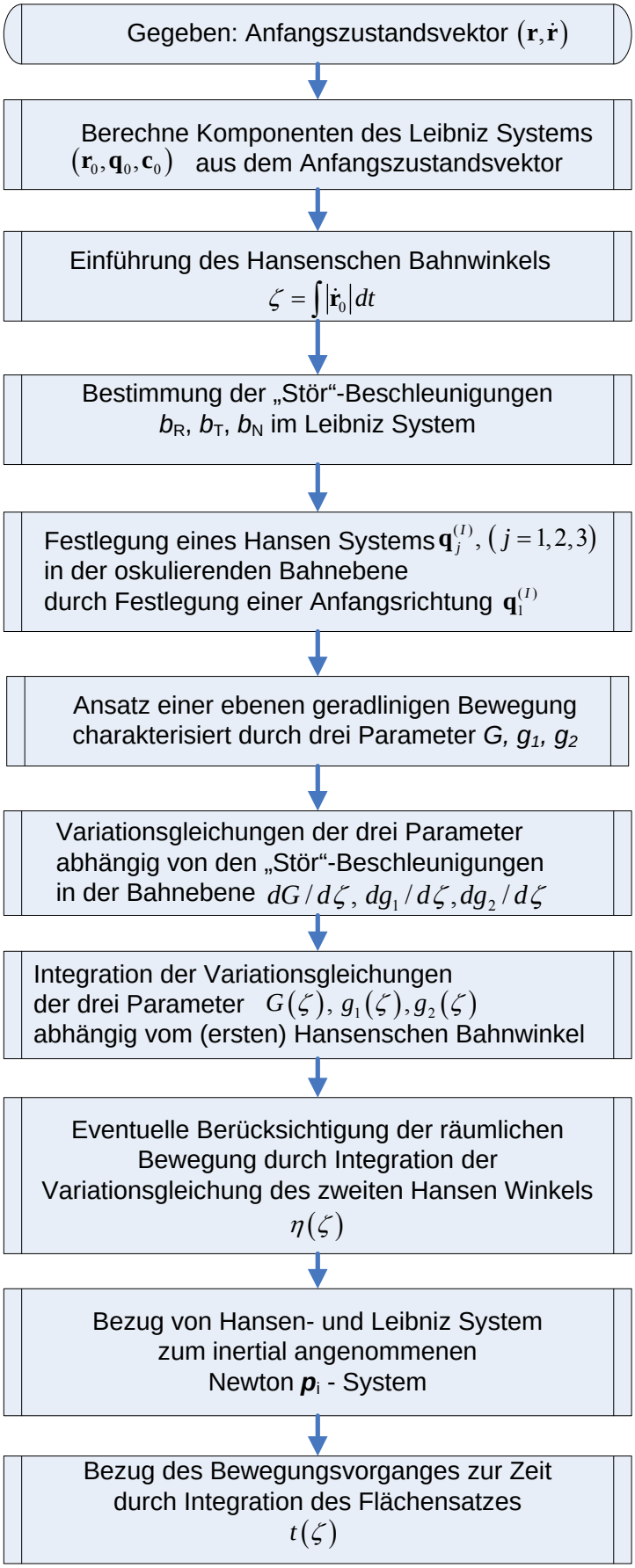


Bild 5-9: Schema zur Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung

5.2.5.4 Die Variationsgleichungen in tangentialen Koordinaten

Die Beschleunigungskomponenten $\dot{V}$ in Gleichung (5.70) bzw. $V\dot{\zeta}_P$ in (5.69) geben die Beschleunigungsanteile in tangentialer Richtung bzw. in Richtung der Hauptnormale an. Der Beschleunigungsanteil in tangentialer Richtung sei mit b_V, in Hauptnormalenrichtung mit b_H bezeichnet:

$$\begin{aligned} b_V &= \dot{V} \\ b_H &= V\dot{\zeta}_P \quad . \end{aligned} \tag{5.80}$$

Damit ergeben sich die Umrechnungen für die Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{aligned} b_V &= b_R \sin(\zeta-\zeta_P) + b_T \cos(\zeta-\zeta_P) \\ b_H &= -b_R \cos(\zeta-\zeta_P) + b_T \sin(\zeta-\zeta_P) \end{aligned} \tag{5.81}$$

bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} b_R &= b_V \sin(\zeta-\zeta_P) - b_H \cos(\zeta-\zeta_P) \\ b_T &= b_V \cos(\zeta-\zeta_P) + b_H \sin(\zeta-\zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{5.82}$$

Das Gleichungssystem (5.79) wird in diesem Fall ersetzt durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{dV}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_V \\ &V\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_H \\ &\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left[b_V \cos(\zeta-\zeta_P) + b_H \sin(\zeta-\zeta_P)\right] \\ &\frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} = -\frac{r^3}{G^2} b_N \mathbf{q}_0 = -\frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{q}_0 \;, \quad \text{bzw.} \; \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N \\ &\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{G}{r^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.83}$$

Sei

$$\mathbf{v}_0 := \frac{\dot{\mathbf{r}}}{V} \tag{5.84}$$

der Einheitsvektor in tangentialer Richtung,

$$\mathbf{h}_0 := \mathbf{c}_0 \times \mathbf{v}_0 \tag{5.85}$$

in Richtung der Hauptnormale, kann die allgemeine Bewegungsgleichung (5.1) von Seite 88 auch in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_V \mathbf{v}_0 + b_H \mathbf{h}_0 + b_N \mathbf{c}_0 \tag{5.86}$$

geschrieben werden. Zwischen den Einheitsvektoren bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{r}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) + \mathbf{q}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) \\ \mathbf{h}_0 &= -\mathbf{r}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) + \mathbf{q}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) \end{aligned} \tag{5.87}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{v}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) - \mathbf{h}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{v}_0 \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) + \mathbf{h}_0 \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.88}$$

5.2.5.5 Die Perizentrumsdistanz

Die Perizentrumsdistanz r_P ist eine unmittelbar und stets erklärte geometrische Größe, die sich vorzugsweise in den Anwendungen als ein Bewegungsparameter anbietet. Etwa nach Bild 5-7 auf Seite 98 ist sie durch die Beziehung (5.47)

$$r_P := \frac{G}{V} \tag{5.89}$$

auf die bisher eingeführten Bahnparameter zurückzuführen. Ein Zusammenhang mit dem Radius in Formelsystem (5.39) ist durch

$$r_P = r \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) \tag{5.90}$$

hergestellt. Die Variation dieses Parameters ist ausschließlich durch eine Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen gegeben, bei Zeitabhängigkeit durch

$$\dot{r}_P = \frac{r_P}{V} \tan\left(\zeta - \zeta_P\right) b_H \quad , \tag{5.91}$$

in Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ

$$\frac{dr_P}{d\zeta} = \frac{{r_P}^2}{V^2} \frac{\sin\left(\zeta - \zeta_P\right)}{\cos^3\left(\zeta - \zeta_P\right)} b_H \quad . \tag{5.92}$$

5.2.6 Das Abstandsgesetz

Eine überraschende Querverbindung erlaubt die Polargleichung (5.78)

$$r = \frac{G}{V \cos\left(\zeta - \zeta_P\right)} \tag{5.93}$$

durch Auflösung nach der (absoluten) Geschwindigkeit

$$V = \frac{G}{r} \frac{1}{\cos\left(\zeta - \zeta_P\right)} \quad . \tag{5.94}$$

Diese Beziehung erinnert an das *Kepler*sche Abstandsgesetz[1] $V \sim 1/r$. Vor dem Hintergrund der Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung und des Bezugs auf ein *Hansen* System mit der Abhängigkeit des Perizentrumswinkels $\zeta_P = \zeta_P\left(\zeta\right)$ von dem

[1] Siehe in Abschnitt 2.2.2 (Band I), Phase 3, vor Formel (2.2)

*Hansen*schen Bahnwinkel ζ lässt sich erkennen, dass die Beziehung (5.94) vollständig allgemeingültig ist. Der ursprüngliche *kepler*sche Ansatz eines Abstandsgesetzes kann also mit der Abrundung durch den exakten Ausdruck (5.94) als geniale Idee in der richtigen Richtung bezeichnet werden.

BEISPIEL: Im Fall einer Kreisbewegung ist $\zeta_P=\zeta$, mit Hilfe des dritten *kepler*schen Gesetzes in der Form[1] $G=\sqrt{\mu p}$ ergibt Formel (5.94) die Beziehung

$$V\left(\zeta\equiv\zeta_P\right)=\frac{G}{r}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r}=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=:V_K \tag{5.95}$$

da für Kreisbewegungen $p=r$=const.. ◀

5.2.7 Anpassung mit Kurve 1. Ordnung im bewegungsbezogenen Bahnsystem (*Hansen* System)

In der Darstellung des Orts- und Geschwindigkeitsvektors

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0\\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot r\,\mathbf{r}_0+r\dot\zeta\,\mathbf{q}_0\end{aligned} \tag{5.96}$$

sind r und ζ die auf eine momentane Bahnebene bezogenen Polarkoordinaten des bewegten Objektes. Hier sind $r\cos\zeta$ und $r\sin\zeta$ die zugehörigen kartesischen Koordinaten im bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j^{(I)}-$*Hansen*-idealen System:

$$\mathbf{r} = r\,(\mathbf{q}_1\cos\zeta+\mathbf{q}_2\sin\zeta)\quad . \tag{5.97}$$

In den Variationsgleichungen (5.69) und (5.70) auf S. 103 für $\dot V$ und $V\dot\zeta_P$ können V und ζ_P in analoger Weise als Polarkoordinaten gedeutet werden. Um den zugehörigen Vektor und seine kartesischen Koordinaten, die wir mit

$$\begin{aligned}g_1 &:= V\cos\zeta_P\\ g_2 &:= V\sin\zeta_P\end{aligned} \tag{5.98}$$

ansetzen wollen, zu finden, können aus $r,\dot r$ *und* $r^2\dot\zeta=G$ im System (5.78) die auch im allgemeinen Fall gültigen Formeln erhalten werden

$$\begin{aligned}r\dot\zeta &= \frac{G}{r} = V\cos\left(\zeta-\zeta_P\right) = g_1\cos\zeta+g_2\sin\zeta\\ \dot r &= V\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) = g_1\sin\zeta-g_2\cos\zeta\quad .\end{aligned} \tag{5.99}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet dann wegen der zweiten der Gleichungen (5.96) und, da $\mathbf{q_0}$ in Gleichung (4.311) in vollständiger Allgemeinheit dargestellt wird,

$$\dot{\mathbf{r}} = -g_2\,\mathbf{q}_1^{(I)}+g_1\,\mathbf{q}_2^{(I)}\quad . \tag{5.100}$$

[1] Abschnitt 2.5.2 (Band I)

Der gesuchte Vektor ist hier also nichts anderes als der Geschwindigkeitsvektor im bahnbezogenen System und seine Komponenten im Wesentlichen die in Formel (5.98) vermuteten Größen. Differentiation dieses Vektors gibt

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{g}_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{g}_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} - g_2\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} + g_1\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \quad . \tag{5.101}$$

Hier kommen die Eigenschaften des $\mathbf{q}_j^{(I)}-$Systems als einem *Hansen*-idealen System zum Tragen, wenn die *Frenet*schen Formeln (4.325) des $\mathbf{q}_j^{(I)}-$ Systems eingesetzt werden:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{g}_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{g}_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} + V\,\dot{\eta}\cos(\zeta-\zeta_P)\,\mathbf{q}_3^{(I)} \quad . \tag{5.102}$$

Somit folgt der Zusammenhang mit der normalen Beschleunigungskomponente b_N

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G}\,b_N$$

bzw.

$$b_N = \dot{\eta}\,(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta) \quad . \tag{5.103}$$

Die Variationsgleichungen für g_1, g_2 folgen direkt aus dem System (5.98) mit $\dot{V}$ und $V\,\dot{\zeta}_P$ aus den Gleichungen (5.69) und (5.70)

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta \\ \dot{g}_2 &= -b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta \quad , \end{aligned} \tag{5.104}$$

bzw. bei Variation nach dem Bahnwinkel ζ

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}(\,b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}(-b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{5.105}$$

Diese bemerkenswert einfachen Variationsgleichungen gelten in vollständiger Allgemeinheit, sofern eine Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung erfolgt, was prinzipiell jederzeit möglich ist.

Dieses System verbindet den Vorteil der Parameterdarstellung einer Bewegung, welche einen allgemeineren Überblick über den Bewegungsvorgang erlaubt als die direkte (numerische) Integration der allgemeinen Bewegungsgleichung, mit der einschränkungsfreien kartesischen Darstellung einer Bewegung. Auf diese Weise lässt sich die – häufig naiv oder durch Suchen – vorgenommene Einführung von Parametern der Art g_1, g_2, wie sie in der Himmelsmechanik bevorzugt verwendet werden, als notwendig begründen. Vergleichbare Parameter hat wohl als erster *J. L. Lagrange*[1] eingeführt mit dem Zweck, die bekannten Singularitäten im Fall der Darstellung einer kreisnahen Bewegung bei Anpassung der Bewegung durch eine Kurve zweiter Ordnung zu vermeiden (siehe hierzu den nächsten Abschnitt). Im vorliegenden Fall einer Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung aber zeigt sich, dass die Einführung derartiger Parameter nicht notwendig mit der Vermeidung von Singularitäten begründet werden

[1] siehe in Abschnitt 2.7.2 (Band I)

muss (wir können annehmen, dass die Geschwindigkeit nie verschwindet: $V > 0$), sondern zu einer besonders eleganten und symmetrischen Darstellung der Variationsgleichungen für die Bahnform führen kann.

Wir wollen schließlich noch den Ortsvektor **r** in Abhängigkeit der Parameter g_1, g_2 also in Bezug auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ − System explizit anschreiben. Dazu ergibt der Radius aus Formel (5.39) auf S. 96

$$r = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \tag{5.106}$$

und mit $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$ erhält der Ortsvektor nach Formel (5.97) die merkwürdige aber allgemeingültige Darstellung

$$\mathbf{r} = G\frac{\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \quad . \tag{5.107}$$

Es fällt auf, dass im Rahmen einer Anpassung der Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung im Geschwindigkeitsvektor (5.100) der Bahnwinkel ζ nicht explizit auftaucht, sondern durch den Anfangswinkel $\zeta_A = \zeta_A(\zeta)$ ersetzt wird. Dies ist aber nichts als eine Folge der Anpassung mit einer Kurve, die im „ungestörten“ Fall einen konstanten Geschwindigkeitsvektor hat. Der Bahnwinkel ζ **darf** daher gar nicht explizit in dieser Darstellung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}$ auftauchen.

5.3 Die Beschleunigungen um einen bestimmten Bewegungsvorgang zu erzwingen

Der Rückgriff auf die formale Darstellung einer geradlinigen Bewegung erlaubt in sehr einfacher Weise die Beschleunigungen zu berechnen, die ursächlich für einen Bewegungsvorgang auf einer bestimmten Kurve sind. Es sei also möglich, die Bewegung auf der gewünschten Kurve durch Beobachtung (oder eine vorgegebene Forderung) in der Form der Polardarstellung einer geradlinigen Bewegung darzustellen

$$r = \frac{G(\zeta)}{g_1(\zeta)\cos\zeta + g_2(\zeta)\sin\zeta} \quad . \tag{5.108}$$

Aus den Variationsgleichungen der geradlinigen Bewegung in der Form (5.105) können dann unmittelbar die Beschleunigungen in radialer und transversaler Richtung berechnet werden:

$$\begin{aligned} b_R &= \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\sin\zeta - \frac{dg_2}{d\zeta}\cos\zeta\right) \\ b_T &= \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\cos\zeta + \frac{dg_2}{d\zeta}\sin\zeta\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.109}$$

Um die normale Beschleunigung b_N zu berechnen, die noch fehlt um die gesamte Beschleunigung auf den betrachteten Bewegungsvorgang zu erfassen, muss die Rotation $\dot{\eta}$ um den Ortsvektor beobachtet werden. Gelingt dies, so ist mit dem Formalismus der geradlinigen Bewegung die normale Beschleunigung unmittelbar aus Gleichung (5.103) erhältlich:

$$b_N = \dot{\eta}\,(g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta) \quad . \tag{5.110}$$

BEISPIEL: Das Verfahren soll an einem bekannten und sehr einfachen aber instruktiven Beispiel erläutert werden. Zu berechnen seien die Beschleunigungen, die erforderlich sind, um eine Bewegung auf einem Kegelschnitt zu erzwingen. Die Kegelschnittbewegung erfolgt mit der üblichen Polardarstellung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon} \quad . \tag{5.111}$$

Um diese formal auf die Darstellung einer geradlinigen Bewegung in der Form (5.108) zurückführen zu können, muss erfüllt sein

$$\frac{1}{p}\left(1 + e\cos\upsilon\right) = \frac{1}{G}\left(g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta\right) \quad . \tag{5.112}$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks wird auf den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ durch Einführung des konstanten Perizentrumswinkels $\zeta_B = \zeta - \upsilon$ bezogen. Damit erlaubt die linke Seite die Umformung

$$\frac{1}{p}\left[1 + e\cos\left(\zeta - \zeta_B\right)\right] = \frac{1}{p}\left[\cos\zeta\left(\cos\zeta + e\cos\zeta_B\right) + \sin\zeta\left(\sin\zeta + e\sin\zeta_B\right)\right] .$$

Vergleich mit der rechten Seite in Gleichung (5.112) ergibt die gesuchten Beziehungen

$$g_1 = g_1(\zeta) = \frac{G}{p}\left[\cos\zeta + e\cos\zeta_B\right] \quad , \quad g_2 = g_2(\zeta) = \frac{G}{p}\left[\sin\zeta + e\sin\zeta_B\right] \quad . \tag{5.113}$$

Mit den entsprechenden Variationen

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{G}{p}\cos\zeta \tag{5.114}$$

können die gesuchten Beschleunigungen aus den beiden Gleichungen (5.109) berechnet werden:

$$b_R = -\frac{G^2}{p}\frac{1}{r^2} \quad , \quad b_T = 0 \quad . \tag{5.115}$$

Dieser Lösungsweg könnte mit der Aussage gekoppelt werden: wie muss eine geradlinige Bewegung „gestört“ werden, damit die Bewegung auf einem Kegelschnitt verläuft? Ähnlich wie die Lösung des Zweikörperproblems durch *J. Hermann*[1] ist diese Lösung auf rein kinematischem Weg gefunden worden ohne jeden physikalischen Bezug. Die *Hermann*sche Lösung impliziert das Fehlen einer transversalen Beschleunigung bei einer Bewegung auf einem Kegelschnitt dadurch, dass in der *Kepler*schen Beschleunigungsgleichung $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\,\mathbf{r}_0 / r^2$ nur die radiale Beschleunigung vorkommt. Dagegen begründet der hier hergeleitete Lösungsweg explizit das Verschwinden der transversalen Beschleunigung. Vor diesem Hintergrund kann der hier vorgestellte Lösungsweg als allgemeingültiger angesehen werden. Erst mit der bekannten dynamischen Beziehung $G^2 = \mu\, p$ (drittes *Kepler*sches Gesetz) folgt daraus die keplersche

[1] Siehe in Abschnitt 2.5.2 (Band I)

Beschleunigung in der Form $b_R = -\mu / r^2$. Eine zusammenfassende Darstellung der Bewegung auf einer Kurve der zweiten Ordnung wird im nächsten Abschnitt gegeben. ◀

Anmerkungen:

1. Der Zusammenhang zwischen Bahnform und Beschleunigung, die eine Bewegung auf dieser Bahn erlaubt, ist von rein kinematischer Natur. Sie erlaubt keinerlei Aussage über eine physikalische (oder technische, d.h. gesteuerte) Ursache der Beschleunigung.
2. Die *Hermann*sche Lösung des Zweikörperproblems ging vom ersten keplerschen Gesetz (der Bahnform) und dem zweiten keplerschen Gesetz (dem Flächensatz) aus. Die Frage ist, wird in der hier gefundenen Lösung, die von der Bahnform ausgeht, überhaupt das zweite keplersche Gesetz benötigt und wenn ja, wo ist es versteckt. Die Antwort ist, dass der Flächensatz (als allgemeine Form des zweiten keplerschen Gesetzes) ganz wesentlich für diesen Lösungsweg ist, weil durch den Flächensatz $\dot{\zeta} = G / r^2$ der auf das *Hansen*-System bezogene Bahnwinkel ζ eingeführt wird. Erst dadurch wird die Transformation von der Zeit auf den Bahnwinkel möglich, mit dem als unabhängiger Variable die Lösung der Gleichungen (5.109) und (5.110) gelingen kann.
3. Eine mögliche Bewegungsabhängigkeit des Flächenparameters G ist in der formalen Darstellung (5.108) der geradlinigen Bewegung enthalten. Sie muss daher vor der Berechnung der Beschleunigungskomponenten bekannt sein genau so wie die Abhängigkeit der Parameter g_i in Bezug auf die Zeit bzw. auf den *Hansen*winkel ζ über den Flächensatz $r^2 \dot{\zeta} = G$. Wenn aber die transversale Beschleunigung b_T nicht verschwindet, zeigt sich eine Variabilität von G implizit in der Variationsgleichung (5.5) $\dot{G} = r\, b_T$. Nach Berechnung der transversalen Beschleunigung b_T aus der zweiten der Gleichungen (5.109) kann also $G = G(\zeta)$ durch Integration dieser Variationsgleichung erhalten werden. Dies kann als Verifikation des Rechenprozesses dienen.

5.4 Anpassung einer Bewegung durch Kurven zweiter Ordnung

5.4.1 Bewegung auf einem Kegelschnitt

Eine Kurve zweiter Ordnung, die mathematisch allgemein in der Form

$$a_{20}\, x_1^2 + a_{11}\, x_1\, x_2 + a_{12}\, x_2^2 + a_{10}\, x_1 + a_{01}\, x_1 + a_{00} \;=\; \sum_{i,j=0,0}^{2,2} a_{i,j}\, x_1^i\, x_2^j \;=\; 0 \qquad (5.116)$$

gegeben werden kann, stellt bekanntlich einen Kegelschnitt oder ein Geradenpaar dar. Da die Anpassung mit einer Geraden, also einer Kurve erster Ordnung, bereits in den vorstehenden Abschnitten untersucht wurde, können wir uns hier auf Kegelschnitte einschränken. Da zur Beschreibung einer Bewegung vorzugsweise Polarkoordinaten verwendet werden, wird wie üblich in der Himmelsmechanik von der Kegelschnittgleichung

$$r \;=\; \frac{p}{1 + e\cos(\zeta - \zeta_B)} \qquad (5.117)$$

ausgegangen. Die Parameter sind in der vertrauten Sprechweise der Himmelsmechanik

$$\begin{aligned} p &= \text{Parameter des Kegelschnitts } [km] \\ e &= \text{Exzentrizität} \\ (\zeta - \zeta_B) &= \text{wahre Anomalie } [Grad] \quad , \end{aligned}$$

während ζ der (allgemeine) Bahnwinkel und ζ_B ein (beliebiger) Anfangswinkel sind. Die Anpassung der (beliebigen) Bewegung mit einem Kegelschnitt wird erreicht, wenn die Variation des Radius (die Radialgeschwindigkeit) in der Form beibehalten wird, die von der Variation der Parameter unabhängig ist. Diese ist

$$\dot{r} = \frac{p\, e \sin(\zeta - \zeta_B)\, \dot{\zeta}}{\left[1 + e\cos(\zeta - \zeta_B)\right]^2} \quad ,$$

mit dem „2. keplerschen Gesetz“ (5.8) auf S. 89 auch

$$\dot{r} = \frac{G}{p} e \sin(\zeta - \zeta_B) \quad . \tag{5.118}$$

Im Fall einer allgemeinen Bewegung sind alle Parameter variabel, aus der Kegelschnittgleichung (5.117) folgt also durch Differentiation nach allen Parametern

$$\dot{r} = \frac{r}{p}\,\dot{p} - \frac{p\left[\dot{e}\cos(\zeta - \zeta_B) - e\sin(\zeta - \zeta_B)\,(\dot{\zeta} - \dot{\zeta}_B)\right]}{\left[1 + e\cos(\zeta - \zeta_B)\right]^2} \quad .$$

Die Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve 2. Ordnung hat somit notwendig die *Anpassungsgleichung*

$$\dot{e}\cos(\zeta - \zeta_B) + e\dot{\zeta}_B \sin(\zeta - \zeta_B) = \frac{\dot{p}}{r} \quad . \tag{5.119}$$

Differentiation der Variation des Radius (5.118) ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{r} = {} & \dot{G}\frac{1}{p} e\sin(\zeta - \zeta_B) - \dot{p}\frac{G}{p^2} e\sin(\zeta - \zeta_B) + \dot{e}\frac{G}{p}\sin(\zeta - \zeta_B) - \\ & - \dot{\zeta}_B \frac{G}{p} e\cos(\zeta - \zeta_B) + \dot{\zeta}\frac{G}{p} e\cos(\zeta - \zeta_B) \quad . \end{aligned} \tag{5.120}$$

Für einen Vergleich mit der Variationsgleichung für $\ddot{r}$ in Gleichung (5.4) auf S. 88 werde das letzte Glied in der vorstehenden Gleichung betrachtet, welches die Variation der Polarkoordinate ζ, aber nicht die eines der Parameter der Kurven zweiter Ordnung enthält (, deren Variation ohnehin auf einer exakten Kegelschnittkurve verschwindet). Es ist mit r aus Gleichung (5.117) und $\dot{\zeta}$ aus Gleichung (5.8)

$$\dot{\zeta}\frac{G}{p} e\cos(\zeta - \zeta_B) = \frac{G^2}{r^2 p}\left[1 + e\cos(\zeta - \zeta_B) - 1\right] = \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\, r^2} \quad . \tag{5.121}$$

Es ist daher sinnvoll in Gleichung (5.4) von der radialen Beschleunigung b_R den Faktor $-G^2/(p\,r^2)$ abzuspalten

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{G^2}{r^3} + b_R \\ b_R &=: b_{RK} + b_{R2} \\ b_{R2} &= b_R + \frac{G^2}{p\,r^2} \\ b_{RK} &= -\frac{G^2}{p\,r^2} \end{aligned} \tag{5.122}$$

und es bleibt

$$\begin{aligned} b_{R2} &= \dot{G}\,\frac{1}{p}\,e\sin(\zeta-\zeta_B) - \dot{p}\,\frac{G}{p^2}\,e\sin(\zeta-\zeta_B) + \dot{e}\,\frac{G}{p}\sin(\zeta-\zeta_B) - \\ &\quad -\dot{\zeta}_B\,\frac{G}{p}\,e\cos(\zeta-\zeta_B) \quad . \end{aligned} \tag{5.123}$$

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis (LEIBNIZ [1689]):

- Die Beschleunigung, welche einen Körper zwingt, sich auf einem Kegelschnitt zu bewegen, ist $-G^2/(p\,r^2)$. Sie wirkt ausschließlich in radialer Richtung.

Dieses Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil es auf rein mathematischem Weg erhalten wurde. Damit ist nicht ausgesagt, ob es in der physikalischen Realität eine Kegelschnittbewegung gibt. Wir wissen nur: wenn eine Kegelschnittbewegung beobachtet wird, dann wird sie notwendig durch diese Beschleunigung verursacht, wenn keine weiteren Beschleunigungen wirken. Wodurch dann eine solche Beschleunigung verursacht wird, wenn sie denn beobachtet wird, ist schließlich eine Fragestellung von dritter Ordnung.

Diese Bedingung ist aber nicht zugleich hinreichend. Denn wenn sich ein Körper auf einem Kegelschnitt bewegt, bedeutet dies noch lange nicht, dass auf ihn die Beschleunigung $-G^2/(p\,r^2)$ wirkt, was nämlich $b_{R2}=0$ folgern müsste. Vielmehr können die „Störkomponenten“ $b_{R2}\neq 0$ und $b_T\neq 0$ sein, sofern nur die Anpassungsgleichung (5.119) erfüllt ist, was auch für sehr komplizierte „Störbeschleunigungen“ der Fall sein kann.

Wir erhalten schließlich aus Gleichung (5.120) die zweite Bedingungsgleichung zur Berechnung der Variation der Kegelschnittparameter:

$$\frac{p}{G}\,b_{R2} - e\sin(\zeta-\zeta_B)\left(\frac{\dot{G}}{G}-\frac{\dot{p}}{p}\right) = \dot{e}\sin(\zeta-\zeta_B) - e\,\dot{\zeta}_B\cos(\zeta-\zeta_B) \quad . \tag{5.124}$$

Aus dieser und der Anpassungsgleichung (5.119) können zwei Variationsgleichungen berechnet werden, wenn noch mit Gleichung (5.5) $\dot{G} = r\,b_T$ eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{p}{G}\left\{ b_{R2}\sin(\zeta-\zeta_B) - b_T\,\frac{r}{p}\sin^2(\zeta-\zeta_B) - \dot{p}\,\frac{G}{p^2}\left[e+\cos(\zeta-\zeta_B)\right]\right\} \\ e\,\dot{\zeta}_B &= \frac{p}{G}\left\{ -b_{R2}\cos(\zeta-\zeta_B) + \frac{1}{p}\sin(\zeta-\zeta_B)\left[\,\dot{p}\,\frac{G}{p} + e\,r\,b_T\cos(\zeta-\zeta_B)\right]\right\} \quad . \end{aligned} \tag{5.125}$$

Wird der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable aufgefasst, lauten die beiden Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\zeta} &= \frac{p\,r^2}{G^2}\left\{ b_{R2}\sin(\zeta-\zeta_B) - b_T\frac{r\,e}{p}\sin^2(\zeta-\zeta_B) - \dot{p}\,\frac{G}{p^2}\left[e+\cos(\zeta-\zeta_B)\right]\right\} \\ e\frac{d\zeta_B}{d\zeta} &= \frac{p}{G}\left\{ -b_{R2}\cos(\zeta-\zeta_B) + \frac{1}{p}\sin(\zeta-\zeta_B)\left[\dot{p}\,\frac{G}{p} + e\,r\,b_T\cos(\zeta-\zeta_B)\right]\right\} \end{aligned} \quad . \tag{5.126}$$

Diese Darstellung vermittelt zwei wesentliche Einsichten:

1. Sie enthält explizit die Variation des Kegelschnittparameters $\dot{p}$, was noch völlig unbefriedigend ist. Denn dies zeigt, dass im Fall einer Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung Anpassungsgleichung (5.119) und zweite Bedingungsgleichung (5.124) **nicht** ausreichen, um die Variation der Bahnform vollständig zu beschreiben. Die Beziehung (5.121) zeigt, dass im Term mit der Variation des Bahnwinkels ζ neben dem „ungestörten" Term G^2/r^3 noch der aus der Radialbeschleunigung b_R abgespaltene also „dynamische" Term $-G^2/(p\,r^2)$ benötigt wird. Dieser dynamische Term taucht nicht mehr in den Variationsgleichungen für *e* und ζ_B auf, ist also bereits durch die Anpassung mit der Kurve zweiter Ordnung erledigt. Dies gibt einen bemerkenswerten Einblick in den Mechanismus des Anpassungsvorganges: Eine Anpassung mit einer Kurve zweiter Ordnung, zu erwarten ist allgemeiner mit jeder von einer Geraden abweichenden Kurve, ist kein mathematischer Vorgang zur kinematisch-deskriptiven Darstellung einer Bewegung, sondern jetzt wird eine physikalische Gesetzmäßigkeit zusätzlich zu der in der Anpassungsgleichung gegebenen Bedingung benötigt. Wir werden im Rahmen der Dynamisierung der Bewegung in Kapitel 10 (Band III) kennen lernen, dass eine solche physikalische Bedingung für die Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung das 3. keplersche Gesetz ist. Weiter können wir folgern: Eine Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve höherer Ordnung ist nur dann sinnvoll, wenn eine physikalische Bedingung existiert, welche genau eine Bewegung auf dieser vorgegebenen Kurve erlaubt, so dass zur Betrachtung einer allgemeinen Bewegung auch wirklich von dieser Kurve ausgegangen werden kann.

2. Die Variationsgleichung zur Berechnung des Anfangswinkels ζ_B ist für verschwindende Exzentrizitäten *e* nicht erklärt. Es erscheint bemerkenswert, dass die vergleichbare Variationsgleichung für den Anfangsbahnwinkel ζ_A im Fall der Anpassung durch eine Kurve erster Ordnung (vgl. die Gleichungen (5.78) auf Seite 105) keine solche Singularität aufweist. In dieser Gleichung steht der Parameter *V* zwar im Nenner, ist aber nach Gleichung (5.12) auf S. 91 nicht negativ angenommen: $V > 0$. In beiden Fällen einer Anpassung mit einer Kurve erster oder zweiter Ordnung muss allerdings $G = |\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}| > 0$ angenommen werden, d.h. eine Bewegung durch den Ursprung, der hier allerdings willkürlich angenommen wurde, muss ausgeschlossen bleiben.

5.4.2 Anpassung mit Kurve 2. Ordnung im bewegungsbezogenen Bahnsystem

Ähnlich wie im Abschnitt über die Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung bietet es sich an, *e* und ζ_B als Polarkoordinaten mit zugehörigen kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} k_1 &:= e\cos\zeta_B \\ k_2 &:= e\sin\zeta_B \end{aligned} \tag{5.127}$$

aufzufassen. Dies führt auf die – im Rahmen einer Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung – allgemein gültigen und keineswegs eingeschränkt gültigen Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \dot{e}\cos\zeta_B - e\dot{\zeta}_B\sin\zeta_B \\ \dot{k}_2 &= \dot{e}\sin\zeta_B + e\dot{\zeta}_B\cos\zeta_B \end{aligned} \tag{5.128}$$

und der zugehörigen Anpassungsgleichung

$$\dot{k}_1\cos\zeta + \dot{k}_2\sin\zeta = \frac{\dot{p}}{r} \quad . \tag{5.129}$$

Unter direkter Herleitung aus den beiden Bedingungsgleichungen (5.119) und (5.124) wird

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \frac{p}{G}b_{R2}\sin\zeta - \frac{r\,b_T\sin\zeta}{G}(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta) + \frac{\dot{p}}{p}(k_1+\cos\zeta) \\ \dot{k}_2 &= \frac{p}{G}b_{R2}\cos\zeta + \frac{r\,b_T\cos\zeta}{G}(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta) + \frac{\dot{p}}{p}(k_2+\sin\zeta) \quad , \end{aligned} \tag{5.130}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{dk_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2}\left[\; p\,b_{R2}\sin\zeta - r\,b_T\sin\zeta\,(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta)\right] + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\zeta}(k_1+\cos\zeta) \\ \frac{dk_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2}\left[-p\,b_{R2}\cos\zeta + r\,b_T\cos\zeta\,(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta)\right] + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\zeta}(k_2+\sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{5.131}$$

Auch diese Variationsgleichungen weisen bemerkenswerte Symmetrien auf.

Um den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ im bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j$- *Hansen*-System darzustellen, werden zunächst Radius, radiale und transversale Geschwindigkeit mit den Parametern k_i dargestellt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta} \\ V_R &= \dot{r} = \frac{G}{p}(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta) \\ V_T &= r\dot{\zeta} = \frac{G}{p}(1+k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{5.132}$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektor folgen mit den bekannten Beziehungen

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

und

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1\cos\zeta + \mathbf{q}_2\sin\zeta \quad , \quad \mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1\sin\zeta + \mathbf{q}_2\cos\zeta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= p\,\frac{\mathbf{q}_1\cos\zeta+\mathbf{q}_2\sin\zeta}{1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{G}{p}\left[-(k_2+\sin\zeta)\,\mathbf{q}_1+(k_1+\cos\zeta)\,\mathbf{q}_2\right] \quad . \end{aligned} \tag{5.133}$$

Im Gegensatz zur Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung taucht hier der Bahnwinkel ζ explizit im Geschwindigkeitsvektor auf, da hier auch im „ungestörten“ Fall der Geschwindigkeitsvektor nicht konstant sein kann.

5.4.3 Anpassung einer Kegelschnittbewegung durch eine Kurve 1. Ordnung

Der Anpassungsprozess wird mit den bisherigen Ergebnissen an zwei einfachen aber sehr instruktiven Beispielen in diesem und dem nächsten Unterabschnitt demonstriert.

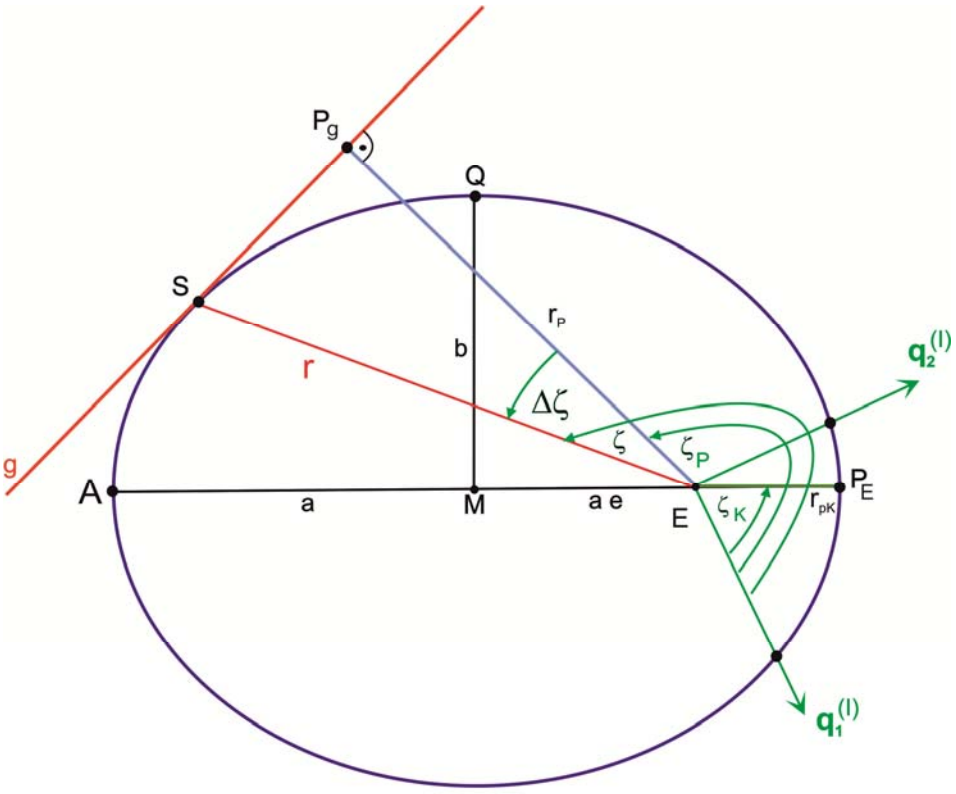


Bild 5-10: Anpassung einer Ellipse durch eine Geraden g fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E in einem Brennpunkt der Ellipse und die Perizentrumsdistanz r_P der Ellipse, P_E das Perizentrum der Ellipse, P_g das Perizentrum der (Anpassungs)-Geraden, S ist die Position des bewegten Objektes

Wir haben in den Gleichungen (5.122) auf S. 115 gesehen, dass die radiale Beschleunigung

$$b_{RK} = -\frac{G^2}{p\,r^2}$$

notwendig für eine Kegelschnittbewegung ist. Den mathematischen Zusammenhang der Kegelschnittbewegung mit der geradlinigen Bewegung, d. h. wie die Kegelschnittbewegung auf die geradlinige Bewegung zurückgeführt werden kann, wollen wir in diesem Abschnitt diskutieren.

Ausgehend von der geradlinigen Bewegung fassen wir b_{RK} als „Störbeschleunigung“ auf und nehmen

$$b_{R2} \;=\; b_T \;=\; b_N \;=\; 0$$

an. Nach $\dot{G} = r\, b_T$ ist $G = const.$ Auch der Parameter p, über den wir an dieser Stelle nichts Näheres aussagen können, sei als konstant angenommen. Die Parameter V und ζ_P können mit den Definitionen (5.98) auf S. 109 durch die Parameter

$$g_1 \;=\; V\cos\zeta_P \quad , \quad g_2 \;=\; V\sin\zeta_P$$

ersetzt werden, welche den Variationsgleichungen (5.105) auf S. 110

$$\frac{dg_1}{d\zeta} \;=\; \frac{r^2}{G}\left(\, b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta\right) \;, \quad \frac{dg_2}{d\zeta} \;=\; \frac{r^2}{G}\left(-b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta\right)$$

genügen. Mit den „Störbeschleunigungen“

$$b_R \;=\; b_{RK} + b_{R2} \;=\; -\frac{G^2}{p\,r^2} \;\;,\;\; b_{R2} \;=\; b_T \;=\; b_N \;=\; 0 \;\;,\;\; G \;=\; const. \;\;,\;\; p \;=\; const.$$

lauten sie im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} \;&=\; -\frac{G}{p}\sin\zeta \\ \frac{dg_2}{d\zeta} \;&=\; \frac{G}{p}\cos\zeta \end{aligned} \tag{5.134}$$

mit den Integralen

$$\begin{aligned} g_1 \;&=\; \frac{G}{p}\cos\zeta + g_{11} \\ g_2 \;&=\; \frac{G}{p}\sin\zeta + g_{21} \quad . \end{aligned} \tag{5.135}$$

g_{11}, g_{21} sind Integrationskonstanten. Für diese werde

$$\begin{aligned} g_{11} \;&\coloneqq\; g_{100}\cos\zeta_K \\ g_{21} \;&\coloneqq\; g_{100}\sin\zeta_K \end{aligned} \tag{5.136}$$

mit neuen Konstanten $g_{100} = \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}$ und ζ_K gesetzt. Der Ausdruck (5.106) auf S. 111 für den Radius in der geradlinigen Bewegung liefert damit

$$r \;=\; \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} \;=\; \frac{p}{1 + e\cos\left(\zeta - \zeta_K\right)} \tag{5.137}$$

in der Form der Kegelschnittgleichung, wofür

$$e \;\coloneqq\; \frac{p}{G}\, g_{100} \tag{5.138}$$

gesetzt wurde. Der Fall von Kreisbahnen ($e = 0$) ist, da stets $p \neq 0, G \neq 0$, nur für $g_{100} = 0$ möglich, so dass in diesem Fall ζ_K nicht erklärt sein kann.

Aus der Definition der g_i erhalten wir den Zusammenhang der Parameter V, ζ_P der geradlinigen Bewegung mit den Parametern p, e , ζ_K der Kegelschnittbewegung

$$\begin{aligned} g_1 &= V\cos\zeta_P = \frac{G}{p}(\cos\zeta + e\cos\zeta_K) \\ g_2 &= V\sin\zeta_P = \frac{G}{p}(\sin\zeta + e\sin\zeta_K) \quad , \end{aligned} \tag{5.139}$$

somit

$$V = \frac{G}{p}\sqrt{1+e^2+2e\cos(\zeta-\zeta_K)} = \sqrt{g_1^2+g_2^2} \tag{5.140}$$

und $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ aus

$$\begin{aligned} \cos\zeta_P &= \frac{\cos\zeta + e\cos\zeta_K}{\sqrt{1+e^2+2e\cos(\zeta-\zeta_K)}} \\ \sin\zeta_P &= \frac{\sin\zeta + e\sin\zeta_K}{\sqrt{1+e^2+2e\cos(\zeta-\zeta_K)}} \quad . \end{aligned} \tag{5.141}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen Kegelschnitt - und geradliniger Bewegung vollständig beschrieben. Im Fall von Kreisbewegung ($e = 0$) liefern diese Gleichungen

$$V = \frac{G}{p} = const. \quad , \quad \zeta_P = \zeta \quad , \quad (e=0.0) \quad .$$

Der im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung konstante Parameter ζ_P ist im Fall einer Anpassung einer Kreisbewegung nicht mehr konstant, sondern dem Bahnwinkel ζ identisch gleich, also in der Sprechweise der modernen Störungstheorie ein „schneller“ Parameter.

Numerisches BEISPIEL: Eine elliptische Bewegung werde durch eine geradlinige Bewegung angepasst (siehe die Veranschaulichung in Bild 5-10). Gegeben sei eine Ellipse mit der großen Halbachse a=10000km, der Exzentrizität e=0.2. Bezogen auf die (willkürlich gesetzte) $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Bezugs-Systems habe das Perizentrum P_E der Ellipse die Winkeldistanz ζ_B=30°. Es werde angenommen, dass sich ein Erdsatellit auf einer solchen Ellipse um die Erde bewege. Die geozentrische Gravitationskonstante beträgt $\mu_{\oplus} = 398600.440\,\mathrm{km^3\,s^{-2}}$. Die Perigäumsdistanz zum Mittelpunkt der Erde beträgt $r_{PK} = a(1-e) = 8000\,\mathrm{km}$, der Parameter der Ellipse $p = a(1-e^2) = 9600\,\mathrm{km}$. Schließlich wird noch der Flächenparameter benötigt. Er beträgt $G = \sqrt{\mu_{\oplus}\, p} = 61859.223\,\mathrm{km^2\,s^{-1}}$. Alle diese Parameter müssen als Konstante verwendet werden, um die Parameter für eine Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung mit den Formeln dieses Abschnittes herleiten zu können. Dazu liefern die Formeln (5.138) und (5.135)

$$g_{100} = e\frac{G}{p} = 1.2887\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \;,\; g_{11} = \frac{g_{100}}{\cos\zeta_K} = 1.1161\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \;,\; g_{21} = \frac{g_{100}}{\sin\zeta_K} = 0.6444\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad .$$

Die Parameter g_1, g_2 der geradlinigen Bewegung als Funktionen des Bahnwinkels ζ sind

$$g_1 = g_1(\zeta) = 1.1161 + 6.4437\cos\zeta \quad , \quad g_2 = g_2(\zeta) = 0.6444 + 6.4437\sin\zeta \ .$$

Damit können dann die Geschwindigkeit längs der Geraden, der Radius r sowie der Perigäumswinkel ζ_P bei Bezug auf das *Hansen*-System mit den Formeln (5.140), (5.141) sowie (5.137) berechnet werden. Die Ergebnisse für die Geschwindigkeit V(ζ) sowie Radius r(ζ) und Perigäumsdistanz $r_P(\zeta) = G/V(\zeta)$ sind in Bild 5-11 graphisch dargestellt.

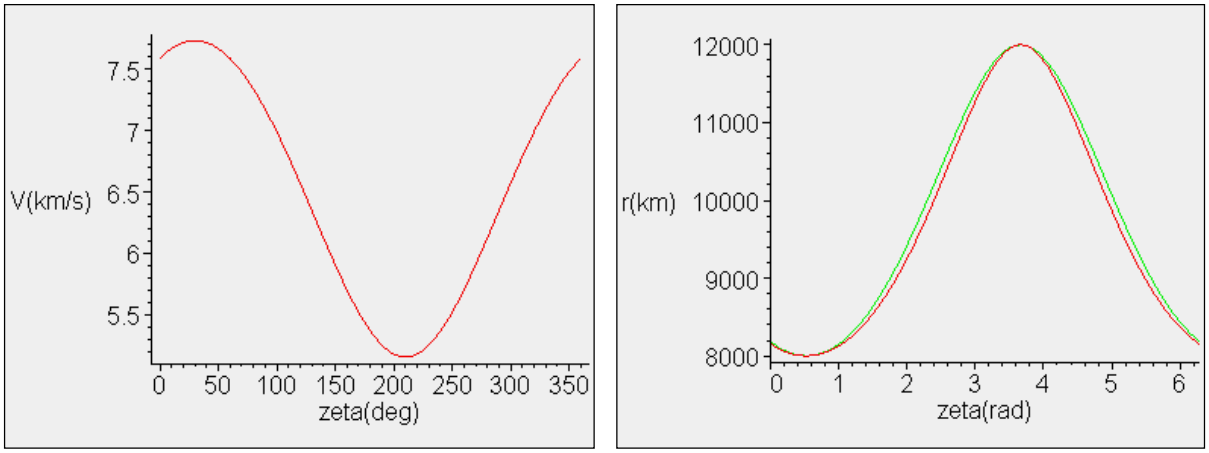


Bild 5-11: Verlauf von Geschwindigkeit V(ζ) (linke Kurve) und von Radius r(ζ) (rechts, obere Kurve, grün) und Perigäumsdistanz $r_P(\zeta)$ (rechts untere Kurve, rot) über einen Umlauf längs der Ellipse, gerechnet mit den Formeln der geradlinigen Bewegung

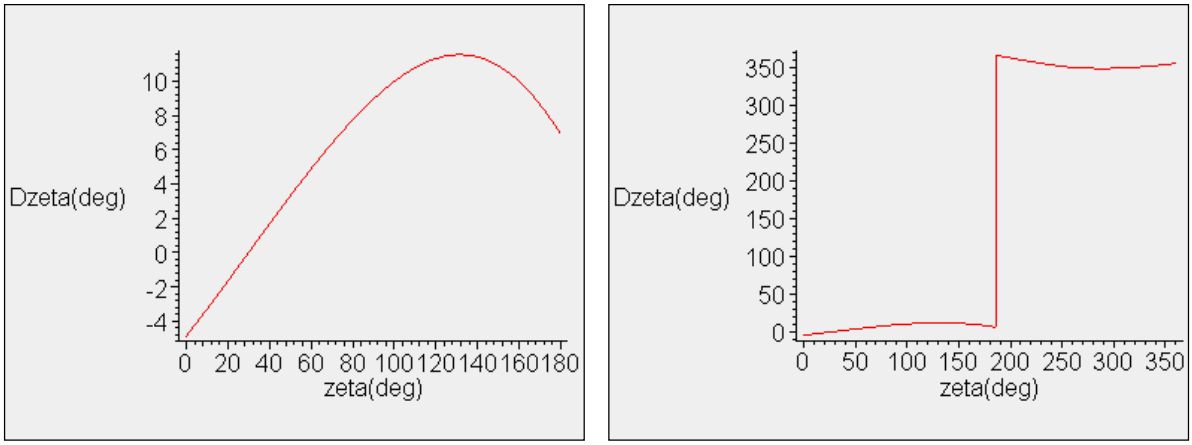


Bild 5-12: Verlauf des Differenzwinkels $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_P$ detailliert über einen halben Umlauf (linke Kurve) und den ganzen Umlauf (rechte Kurve)

Der Kurvenverlauf für Radius r und Perigäumsdistanz r_P ist nahezu identisch, ein Sachverhalt, der aus der klassischen Bahnmechanik nicht vertraut ist. Allerdings handelt es sich hier um die Perigäumsdistanz der Anpassungsgeraden und nicht der Ellipse (die in diesem Beispiel mit r_{pK} bezeichnet wird). Diese Näherungsgerade ist also nichts anderes als die Tangente an die Ellipse. Bild 5-10 zeigt die Verhältnisse sehr deutlich: In einem Punkt P nähert die Gerade g die Bahnkurve (die Ellipse) an. P hat vom Brennpunkt E der Ellipse den Abstand r. r_P ist der Abstand des Ortes auf der Geraden, der zum Bezugspunkt E am nächsten gelegen ist,

also dem Perigäum der Geraden. Diese Größe ist in diesem Fall auch eine Funktion des Bahnwinkels ζ. Die Verhältnisse werden durch den Verlauf des Winkels ζ_P, des Winkelabstandes des Perigäums der Näherungsgeraden von der $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Bezugs-Systems, noch näher beleuchtet. In Bild 5-12 kann im linken Bild größenordnungsmäßig die Differenz des Bahnwinkels ζ zum Winkelabstand ζ_P des Perigäums $\Delta\zeta=\zeta-\zeta_P$ abgelesen werden: Das Perigäum kann sich nicht weit vom Punkt P (dem „Oskulationspunkt“) entfernen. Das rechte Bild zeigt den Verlauf des Differenzwinkels über einen ganzen Umlauf und zeigt ein Pendeln des Oskulationspunktes um das Perigäum der Anpassungsgeraden während eines Umlaufs.◀

5.4.4 Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt

Vorgegeben sei die Kegelschnittbewegung mit der Polardarstellung (5.117), (5.118) auf S. 114,

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)} \quad , \quad p=const. \quad , \quad e=const. \\ \dot{r} &= \frac{G}{p}e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right) \\ \ddot{r} &= \frac{G^2}{r^3}-\frac{G^2}{p\,r^2}+b_{R2} \quad , \quad b_T=b_N=0 \quad . \end{aligned}$$

Um hieraus eine gleichförmig geradlinige Bewegung anzupassen, muss die „Störbeschleunigung“

$$b_{R2} = b_{R20}+b_{R3} \quad , \quad b_{R20} := \frac{G^2}{p\,r^2} \quad , \quad b_{R3} = 0$$

verwendet werden, denn dann kann aus der Variationsgleichung $\ddot{r}$ die Bedingungsgleichung der geradlinig gleichförmigen Bewegung (5.11) auf S. 91 erhalten werden. Wegen *p = const.* ist $\dot{p}=0$. Die Variationsgleichungen (5.131) auf S. 117 bei Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt lauten dann

$$\frac{dk_1}{d\zeta} = \sin\zeta \quad , \quad \frac{dk_2}{d\zeta} = -\cos\zeta$$

mit den Integralen

$$k_1 = e\cos\zeta_K = -\cos\zeta+k_{10} \; , \; k_2 = e\sin\zeta_K = -\sin\zeta+k_{20} \quad , \qquad (5.142)$$

wobei k_{10}, k_{20} die Integrationskonstanten sind. Der Radius lautet in diesem Fall

$$r = \frac{p}{1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)} = \frac{p}{k_{10}\cos\zeta+k_{20}\sin\zeta} \quad .$$

Da G und p als bekannt angenommen werden, können durch Definition Konstante g_1, g_2 eingeführt werden

$$g_1 := \frac{G}{p}k_{10} \quad , \quad g_2 := \frac{G}{p}k_{20} \quad , \qquad (5.143)$$

wodurch formal die aus der geradlinigen Bewegung bekannte Beziehung (vgl. Gleichung (5.106) auf S. 111)

$$r = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta}$$

folgt. Die radiale Geschwindigkeit führt auf

$$V_R = \frac{G}{p}(k_{10}\sin\zeta - k_{20}\cos\zeta)$$

und die transversale Geschwindigkeit

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = \frac{G}{p}(k_{10}\cos\zeta + k_{20}\sin\zeta) \quad .$$

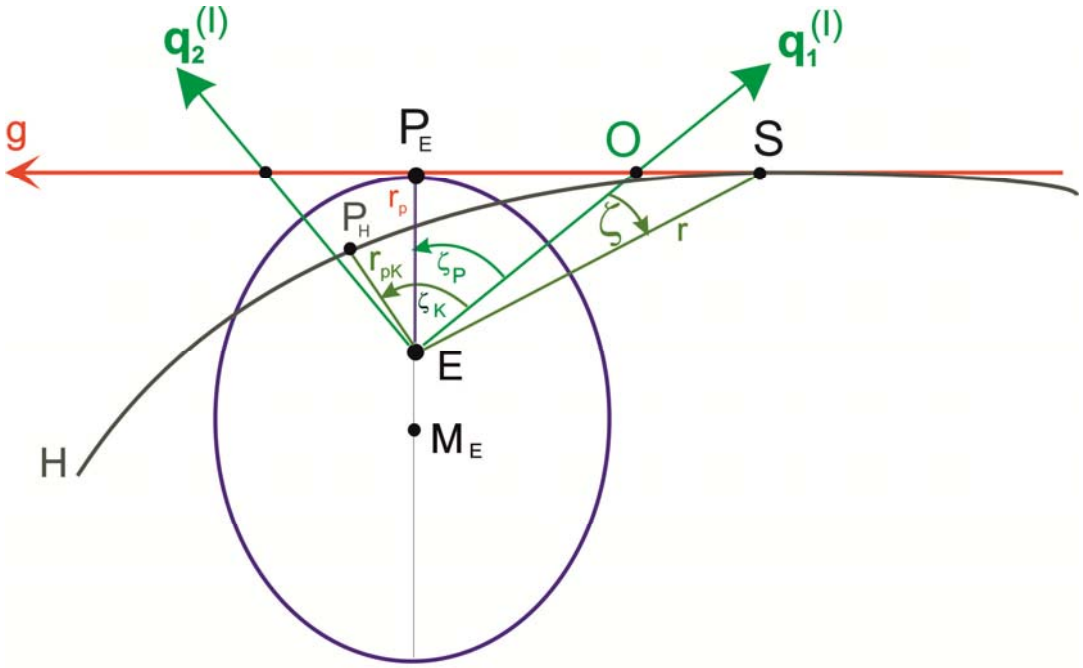


Bild 5-13: Anpassung einer Geraden g durch Kegelschnitte: fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E in einem Brennpunkt der Ellipse, die Perizentrumsdistanz r_P und der Perigäumswinkel ζ_P. Anpassung im Perigäum der Geraden durch Ellipse (blau), für Bahnwinkel ζ=20° durch Hyperbel H (grau), Bezug auf *Hansen* System (grün)

Somit beträgt die (absolute) Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_T^2} = \sqrt{k_{10}^2 + k_{20}^2} = const. \quad .$$

Diese ist bekanntlich der erste charakteristische Parameter der gleichförmig geradlinigen Bewegung. Der zweite charakteristische Parameter ζ_P kann über die Definitionsgleichungen (5.98) auf S. 109 erhalten werden zu

$$\cos\zeta_P = \frac{G k_{10}}{pV} \quad , \quad \sin\zeta_P = \frac{G k_{20}}{pV} \quad , \quad \zeta_P = const. \quad .$$

Die beiden letzten Unterabschnitte zeigen die vollständige Äquivalenz einer Anpassung mit einer Geraden oder einem Kegelschnitt.

Numerisches BEISPIEL: Es werde die geradlinige Bewegung $V = 8$ km/s, $r_p = 9000$ km, $\zeta_A = 40°$ durch einen Kegelschnitt in einer Erdumlaufbahn angepasst. Die charakteristischen Parameter der geradlinigen Bewegung sind (nach der Definition (5.98))

$$g_1 = V\cos\zeta_P = 6.128355545 \quad , \quad g_2 = V\sin\zeta_P = 5.142300878 \quad .$$

Der Flächenparameter G (aus Formel (5.47)) und der Parameter p des Kegelschnitts (mit der Beziehung $G^2 = \mu p$) ergeben sich zu

$$G = r_p V = 72000\frac{km^2}{s} \quad , \quad p = \frac{G^2}{\mu_{\odot}} = 13005.50496\,\text{km}.$$

Mit den Definitionen (5.143) folgen die Integrationskonstanten für die Kegelschnittbewegung

$$k_{10} = 1.106977201 \quad , \quad k_{20} = .9288641611 \quad .$$

Die Parameter (5.142) der Kegelschnittbewegung lauten

$$k_1 = k_1(\zeta) = e\cos\zeta_K = 1.106977201 - \cos\zeta \quad , \quad k_2 = k_2(\zeta) = e\sin\zeta_K = 0.9288641611 - \sin\zeta \quad ,$$

woraus sich unmittelbar die Exzentrizität des Anpassungs-Kegelschnitts ergibt:

$$e = e(\zeta) = \sqrt{(k_1(\zeta))^2 + (k_2(\zeta))^2} \quad .$$

Interessanterweise bleibt der Parameter p der Kegelschnitte über den gesamten Anpassungsvorgang konstant. Dagegen ändert sich die Perigäumsdistanz r_{pK} des Kegelschnitts erheblich. Die Apsidenlinie (Richtung zum Perigäum) hat bezogen auf die $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Systems den Winkel

$$\zeta_K = \zeta_K(\zeta) = \arctan\left(\frac{k_2(\zeta)}{k_1(\zeta)}\right) \quad .$$

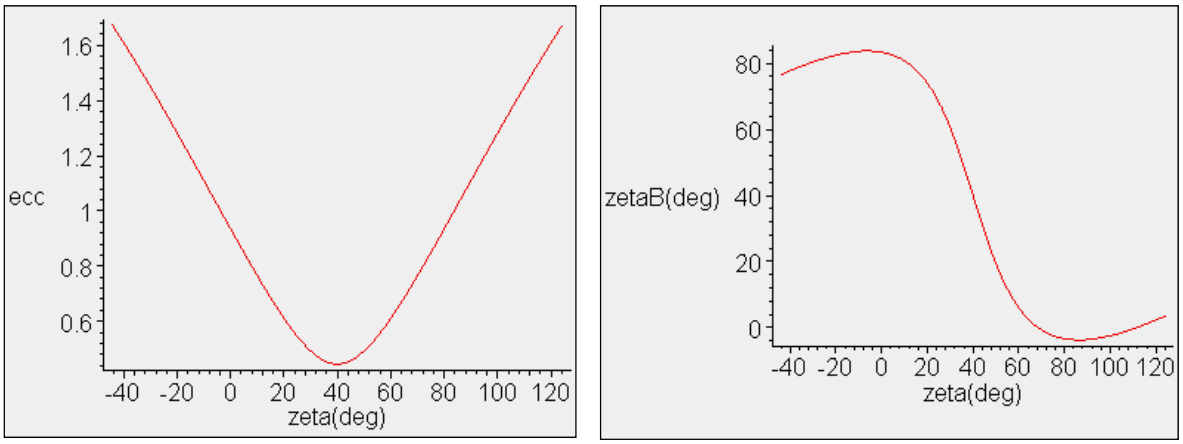


Bild 5-14: Verlauf der Exzentrizität $e(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $\zeta_K(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_A=40°)

In Bild 5-14 ist links der Verlauf der Exzentrizität aufgetragen, wie er im Verlauf des Anpassungsvorganges längs der Geraden auftritt: Im Bereich relativ zum Perigäum der Geraden von etwa ±40° ist die Anpassungskurve eine Ellipse, außerhalb eine Hyperbel. Würde an Stelle der konstanten Geschwindigkeit 8 km/s eine höhere gewählt (zum Beispiel 10 km/s), wäre die Anpassungskurve stets eine Hyperbel. Bemerkenswert ist der Verlauf des Perigäumswinkels

$\zeta_K(\zeta)$, der sich etwa im Bereich der elliptischen Anpassung maximal verändert, im Bereich der hyperbolischen Anpassung jedoch umschlägt.

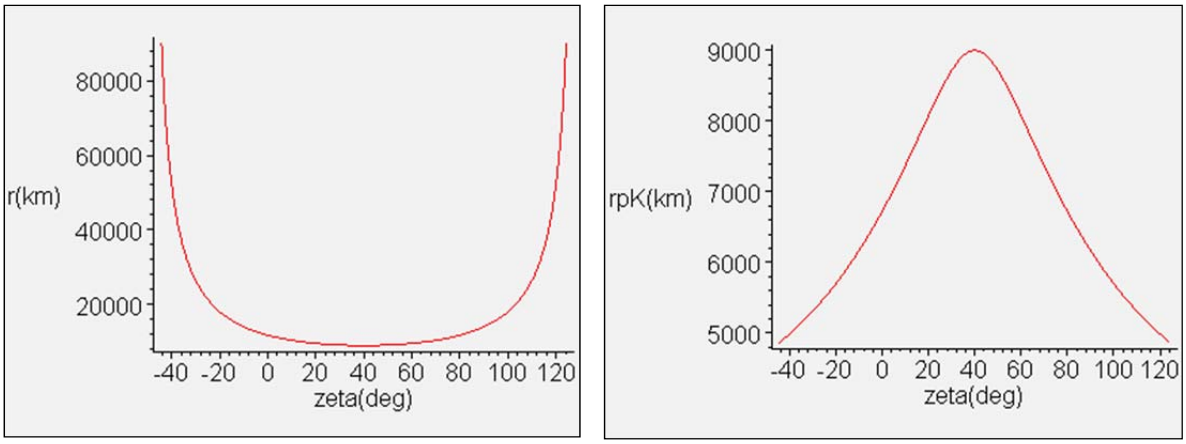


Bild 5-15: Verlauf des Radius $r(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $r_{PK}(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40°)

ζ	e	r[km]	r_{pK}[km]	ζ_K
-50°	1.757	$\rightarrow\infty$	4717.267	74°.68380
-40°	1.608	51828.934	4986.773	77°.76066
-30°	1.449	26314.330	5310.537	80°.42817
-20°	1.282	18000.000	5699.170	82°.50135
-10°	1.109	14001.514	6166.669	83°.67685
0°	0.935	11748.666	6721.191	83°.43019
10°	0.765	10392.305	7368.558	80°.81100
20°	0.610	9577.600	8076.950	74°.08937
30°	0.492	9138.840	8717.411	60°.67111
40°	0.445	9000.000	9000.000	40°.00000
50°	0.492	9138.840	8717.411	19°.32889
60°	0.610	9577.600	8076.950	5°.91062
70°	0.765	10392.305	7368.558	-0°.81100
80°	0.935	11748.666	6721.191	-3°.43019
130°	1.757	$\rightarrow\infty$	4717.267	5°.31620

Tabelle 5-1: Anpassung der geradlinigen Bewegung mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40° durch Kegelschnitte

Der Verlauf des Radius r wird wie zu erwarten im rechten Bild von Bild 5-15 wiedergegeben. Die Perigäumsdistanz r_{pK} des Anpassungskegelschnitts hat ihr Maximum im Moment des Durchganges durch das Perigäum der Geraden, entsprechend zunehmender Bahnexzentrizität nimmt sie stetig ab. Die entsprechenden detaillierten Zahlenwerte sind in Tabelle 5-1 zusammengestellt.

Der Anpassungsprozess ist in Bild 5-13 skizziert: dargestellt sind zwei Anpassungskurven: Im Perigäum der geradlinigen Bahn wird die Anpassung durch eine Ellipse (blaue Bahn), weit außerhalb durch eine Hyperbel erreicht. Zu erkennen ist das Perigäum des jeweiligen Kegelschnitts, seine Ablage gegenüber dem *Hansen*-System, sowie die Berührung an die Gerade.

5.5 Anpassung einer Bewegung durch spiralartige Kurven

Wir schließen in den weiteren Überlegungen unmittelbar an die Anpassung mit einer Kurve zweiter Ordnung an. Die zugehörige radiale Beschleunigung (5.122) auf S. 115 ist

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\,r^2} + b_{R2} \quad .$$

Im „ungestörten“ Fall, $b_{R2} \equiv 0$, erhalten wir als einfachste Kurve den Kreis mit $p \equiv r$, also verschwindender radialer Beschleunigung

$$\ddot{r} \;=\; 0 \quad (b_{R2} = 0 \;\;,\;\; p \equiv r) \quad . \tag{5.144}$$

Die zugehörige radiale Geschwindigkeit ergibt nach Integration

$$\dot{r} \;=\; C \quad (= const.) \quad . \tag{5.145}$$

Für einen Kreis muss sie verschwinden: $\dot{r}=C=0$. Wenn aber $C \neq 0$, kommen wir zu einer völlig anderen Kurvenfamilie, die in diesem Abschnitt etwas näher untersucht werden soll[1].

5.5.1 Bewegung auf hyperbolischer Spirale

Zunächst ergibt Integration der letzten Gleichung

$$r \;=\; C\,t + C_{H2} \quad (C_{H2} = const.) \quad . \tag{5.146}$$

Der Radius ändert sich linear in der Zeit. Dies bzw. die Konstanz der Radialgeschwindigkeit $\dot{r}=const.$ ist die definierende Eigenschaft der *hyperbolischen Spirale*. Wie sie geformt ist, sehen wir nach Einführung des Bahnwinkels ζ. Da in allen diesen Fällen formal die Beziehung (allgemein bekannt als „das zweite keplersche Gesetz“) $r^2\dot{\zeta} = G$ $(=const.)$ gilt, ergibt die radiale Geschwindigkeit in (5.145)

$$\frac{dr}{d\zeta} \;=\; \frac{C}{G}\,r^2 \tag{5.147}$$

bzw. die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r^2} \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \tag{5.148}$$

mit dem Integral

$$-\frac{1}{r} \;=\; \frac{C}{G}\,\zeta + C_{S2} \quad , \quad C_{S2} \;=\; const.$$

oder

[1] vgl. W. SCHAUB [1952], pp. 34–37

$$r = -\frac{G}{C\zeta + G C_{S2}} \quad . \tag{5.149}$$

Dies ist die Polardarstellung einer hyperbolischen Spirale. Wenn $C \neq 0$, wenn also Kreisbewegung ausgeschlossen werden kann, kann ein Anfangswinkel ζ_H definiert werden durch

$$\zeta_H := -\frac{G}{C} C_{S2} \quad , \tag{5.150}$$

bzw.

$$r = -\frac{\frac{G}{C}}{\zeta - \zeta_H} \quad . \tag{5.151}$$

Siehe als Beispiel Bild 5-16 auf Seite 127.

Um den Kreisfall, von dem ja ausgegangen wurde, nicht auszuschließen, soll C beliebig gesetzt werden können. Im Kreisfall muss $C_{S2} \neq 0$ gesetzt werden, da der Radius dann den Wert $r = -1/C_{S2} = const.$ annimmt. Der Ursprung des Systems, auf den bezogen die Polardarstellung der hyperbolischen Spirale erfolgt ist, ist ein asymptotischer Punkt. Die Gerade, welche die x-Achse des Systems unter dem Winkel ζ_H schneidet und vom Ursprung den kürzesten Abstand $|G/C|$ hat, ist die Asymptote an die Spirale für $\zeta \to \zeta_H$.

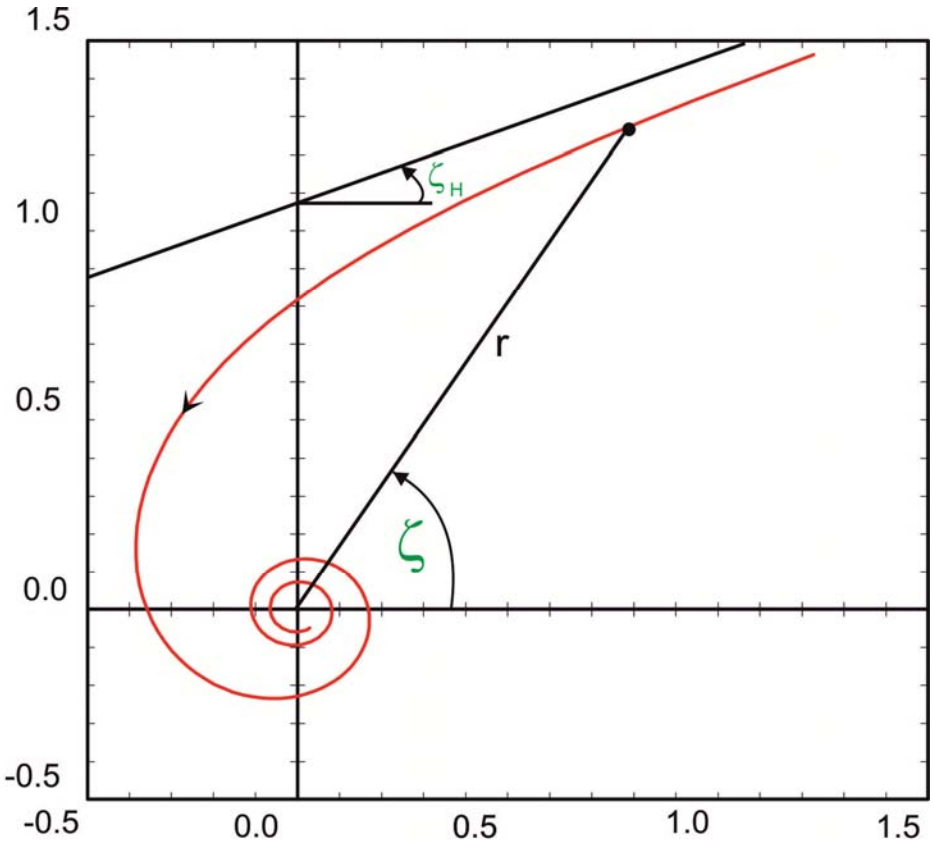


Bild 5-16: Hyperbolische Spirale (n = 2) mit G = 1.0, C = -1.0, ζ_H = 20°

5.5.2 Verallgemeinerung der Anpassung mit spiralartigen Kurven

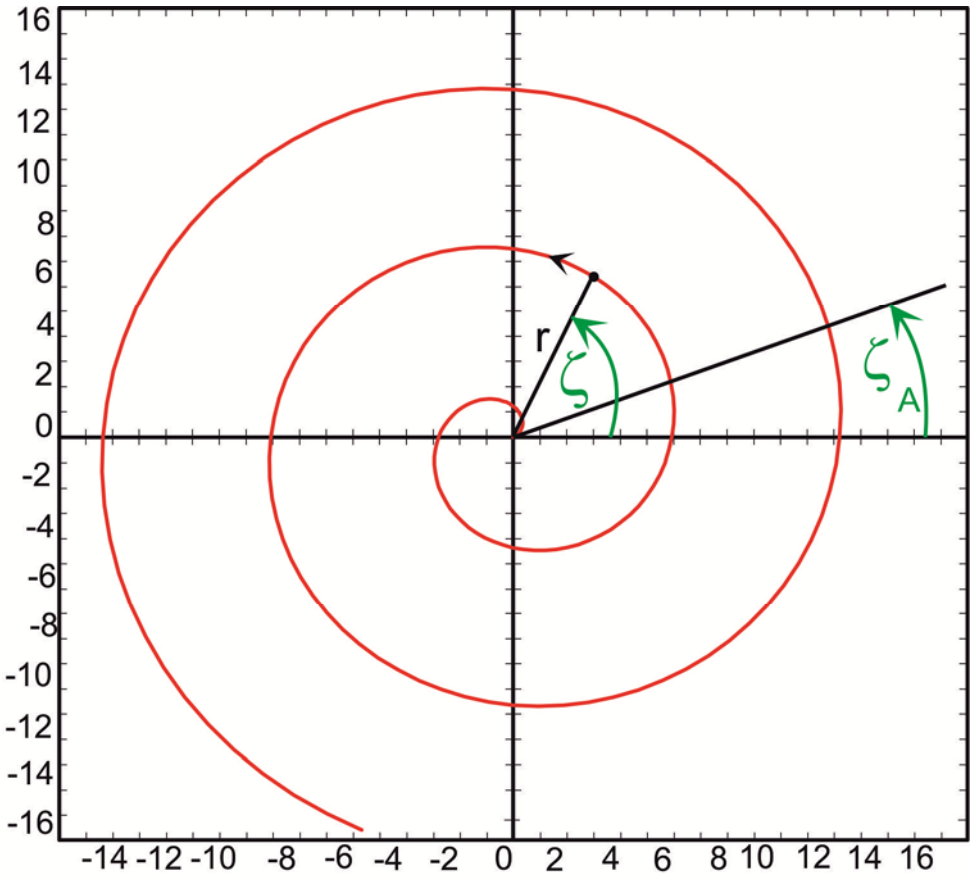


Bild 5-17:: Archimedische Spirale (n = 0) mit $G = 1.0$, $C = 1.0$, $\zeta_A = 20°$

Aus der Polardarstellung (5.147) erhalten wir als eine Verallgemeinerung für beliebige ganzzahlige n die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{C}{G} r^n \quad . \tag{5.152}$$

Diese enthält für $n = 2$ die hyperbolische Spirale. Für $n = 0$ folgt

$$dr = \frac{C}{G} d\zeta \quad , \quad n = 0 \tag{5.153}$$

mit dem Integral

$$r = \frac{C}{G} \zeta + C_{S0} \quad . \tag{5.154}$$

Dies ist die Polardarstellung einer *archimedischen Spirale*. Als definierende Eigenschaft kann nach Gleichung (5.153) der Ausdruck

$$\frac{\dot{r}}{C} = \frac{\dot{\zeta}}{G} \tag{5.155}$$

angesehen werden: Radialgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des bewegten Objektes sind zueinander direkt proportional. Aus der allgemeingültigen Beziehung $r^2\,\dot{\zeta} = G$ folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant sein kann, sondern vom Quadrat der Entfernung vom Ursprung abhängt.

Für C=0 enthält die archimedische Spirale als Spezialfall einen Kreis $r \equiv C_{S0} = const.$ Für $C \neq 0$ beginnt bzw. endet die archimedische Spirale im Ursprung, siehe als Beispiel Bild 5-17.

Hier ist

$$\zeta_P \;:=\; -\frac{G}{C} C_{S0} \quad , \quad C \;\neq\; 0 \tag{5.156}$$

als Anfangswinkel gesetzt worden. Mit $r^2\,\dot{\zeta} = G$ liefert die Differentialgleichung (5.152) für $n = 0$

$$r^2\,\dot{r} \;=\; C \quad , \tag{5.157}$$

somit den Zusammenhang mit der Zeit

$$r^3 \;=\; 3\,C\,t + 3\,C_A \quad , \quad C_A \;=\; const. \quad . \tag{5.158}$$

Für n = 1 erhalten wir aus Gleichung (5.152)

$$\frac{dr}{r} \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \quad , \quad (n=1) \tag{5.159}$$

mit dem Integral

$$\ln r \;=\; \frac{C}{G}\,\zeta + C_{S1} \quad , \quad C_{S1} \;=\; const.$$

bzw.

$$r \;=\; e^{C_{S1}}\, e^{\frac{C}{G}\zeta} \quad , \quad (n=1) \quad , \tag{5.160}$$

die Polardarstellung einer *logarithmischen Spirale*. Für $C = 0$ erhalten wir wieder die Kreisbahn, für $C \neq 0$ mit dem Anfangswinkel

$$\zeta_L \;:=\; -\frac{G}{C} C_{S1}$$

eine logarithmische Spirale, die im Ursprung einen asymptotischen Punkt hat. Siehe als Beispiel Bild 5-18.

Die radiale Geschwindigkeit der logarithmischen Spirale beträgt

$$\dot{r} \;=\; \frac{C}{r} \quad (n=1) \quad . \tag{5.161}$$

Der Zusammenhang mit der Zeit lautet also

$$r^2 \;=\; 2\,C\,t + C_L \quad , \quad C_L \;=\; const. \quad (n=1) \quad . \tag{5.162}$$

Für beliebiges n lautet der Radius nach Gleichung (5.152)

$$\begin{aligned} r^{1-n} &= (1-n)\left(\frac{C}{G}\zeta + C_{Sn}\right) \quad , \quad n \neq 1 \\ r &= e^{C_{S1}}\, e^{\frac{C}{G}\zeta} \quad , \quad n = 1 \quad . \end{aligned} \tag{5.163}$$

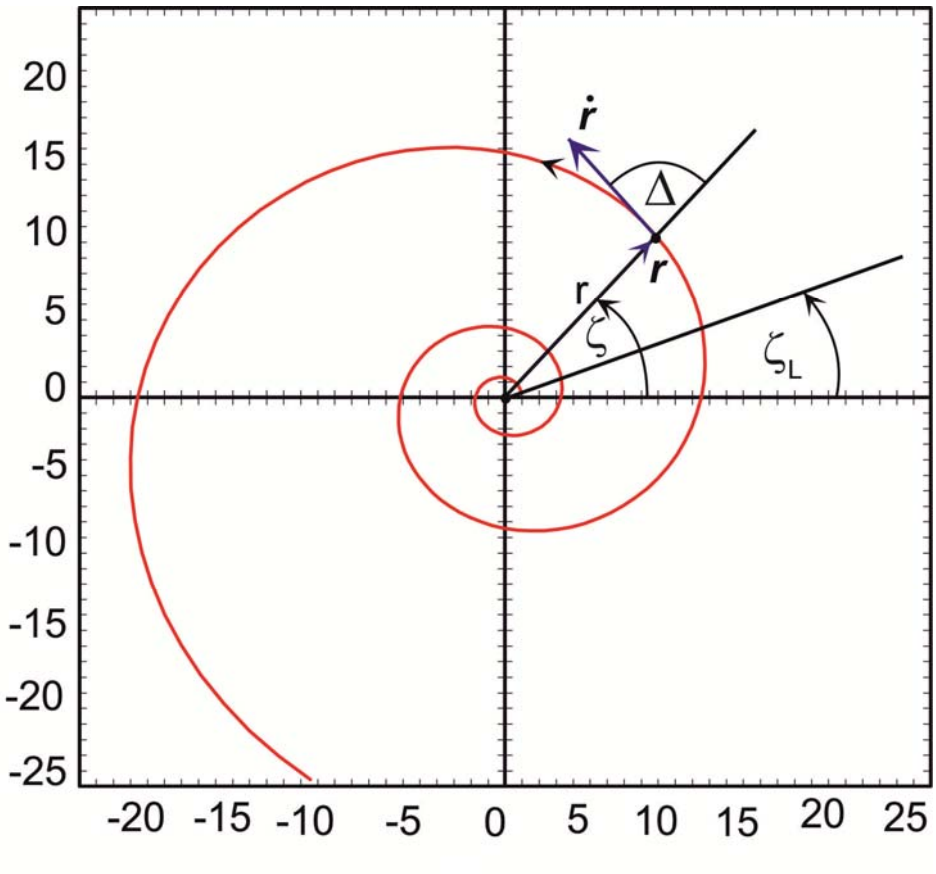


Bild 5-18: Logarithmische Spirale (n=1) mit $G = 5.0, C = 1.0, \zeta_L = 20°$

Für die radiale Geschwindigkeit gilt in allen Fällen einheitlich wegen $r^2\,\dot{\zeta} = G$

$$V_R = \dot{r} = \frac{C}{r^{2-n}} \quad . \tag{5.164}$$

Daraus folgt die Bewegung in der Zeit

$$\begin{aligned} r^{3-n} &= (3-n)\,(C\,t + C_{Sn}) \quad , \quad n \neq 3 \\ r &= e^{C_3}\, e^{Ct} \quad , \quad n = 3 \quad . \end{aligned} \tag{5.165}$$

Der Zustandsvektor hat für Kurven der Familie (5.152) mit Radius r aus den Gleichungen (5.163) und abhängig vom Bahnwinkel ζ die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,(\mathbf{q}_1 \cos\zeta + \mathbf{q}_2 \sin\zeta) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \left(C\,r^{n-2}\cos\zeta - \frac{G}{r}\sin\zeta\right)\mathbf{q}_1 + \left(C\,r^{n-2}\sin\zeta + \frac{G}{r}\cos\zeta\right)\mathbf{q}_2 \quad , \end{aligned} \tag{5.166}$$

alternativ für den Geschwindigkeitsvektor

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \left(\frac{C}{G} r^n \cos\zeta - r\sin\zeta\right)\mathbf{q}_1 + \left(\frac{C}{G} r^n \sin\zeta + r\cos\zeta\right)\mathbf{q}_2 \quad . \tag{5.167}$$

Als BEISPIEL berechnen wir im Fall der *logarithmischen Spirale* mit der zweiten der Gleichungen (5.166) die (absolute) Geschwindigkeit

$$V = |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\sqrt{C^2+G^2}}{r} \quad , \quad n=1 \quad . \tag{5.168}$$

Aus

$$\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} = C := r|\dot{\mathbf{r}}|\cos\Delta$$

folgt daraus die Konstanz des Zwischenwinkels Δ zwischen Radius und Tangente

$$\operatorname{ctg}\Delta = \frac{C}{G} \quad (=const. \ , \ n=1) \quad . \tag{5.169}$$

Dies ist die charakterisierende Eigenschaft der logarithmischen Spirale. ◀

5.5.3 Der Anpassungsvorgang mit spiralartigen Kurven

Wir wollen verlangen, dass eine Bewegung durch eine allgemeine Kurve der Form (5.163) auf S. 130 angepasst werde. Dazu müssen die Parameter C, G und C_{Sn} so variiert werden, dass die radiale Geschwindigkeit stets diese Darstellung hat. Die erste dieser Gleichungen liefert durch Differentiation

$$(1-n)r^{-n}\dot{r} = (1-n)\left[\frac{\dot{C}}{G}\zeta + \frac{C}{G}\dot{\zeta} - \frac{C\dot{G}}{G^2}\zeta + \dot{C}_{Sn}\right] \quad , \quad n\neq 1 \quad ,$$

die zweite

$$\dot{r} = r\left[\frac{\dot{C}}{G}\zeta + \frac{C}{G}\dot{\zeta} - \frac{C\dot{G}}{G^2}\zeta + \dot{C}_{S1}\right] \quad , \quad n=1 \quad .$$

Vergleich mit der radialen Geschwindigkeit in Gleichung (5.164) auf S. 130 ergibt die **für alle** *n* gültige *Anpassungsgleichung*

$$G^2\dot{C}_{Sn} + \zeta G\dot{C} - \zeta C\dot{G} = 0 \quad . \tag{5.170}$$

Für die radiale Beschleunigung kann $\dot{r}$ in Gleichung (5.164) differenziert und mit der allgemeingültigen Gleichung (5.4) auf S. 88 verglichen werden. Dazu wird noch der Faktor b_R in einen „ungestörten“, d. h. auf eine der anzupassenden Kurven der Familie (5.163) bezogenen Anteil b_{RS} und einen „gestörten“ Anteil b_{Rn} zerlegt. Wir erhalten die *Leibniz*'sche Gleichung in der Form

$$\ddot{r} =: \frac{G^2}{r^3} + b_{RS} + b_{Rn} = \dot{C}r^{n-2} + (n-2)C^2 r^{2n-5} \quad . \tag{5.171}$$

Da hier eine „Störung“ der vorgegebenen Kurve nur durch $\dot{C}$ gegeben wird, erhalten wir unmittelbar

$$\dot{C} \;=\; r^{2-n}\, b_{Rn} \tag{5.172}$$

als erste der gesuchten Variationsgleichungen im vorliegenden Anpassungsvorgang. Es bleibt die Beschleunigung[1]

$$b_{Rs} \;=\; -\frac{G^2}{r^3}\left[1-(n-2)\left(\frac{C}{G}\right)^2 r^{2n-2}\right] \quad , \tag{5.173}$$

welche dafür notwendig ist, dass sich ein Körper auf einer spiralartigen Kurve der Form (5.163) bewegt. Mit der Variationsgleichung (5.5) auf S. 88 für $\dot{G}$ und (5.172) für $\dot{C}$ erhalten wir schließlich aus der Anpassungsgleichung (5.170) die noch fehlende Variationsgleichung

$$\dot{C}_{Sn} \;=\; \frac{\zeta}{G}\left[-r^{2-n}\, b_{Rn} + r\,\frac{C}{G}\, b_T\right] \quad . \tag{5.174}$$

Bei Bezug auf den Bahnwinkel ζ lauten die Variationsgleichungen unter Einbeziehung der Variationsgleichung für den Flächenparameter G wegen der Zeitgleichung $r^2\dot{\zeta} = G$

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= r^{4-n}\, b_{Rn} \\
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T \\
\frac{dC_{Sn}}{d\zeta} &= -\frac{r^{4-n}}{G^3} b_{Rn} + \frac{r^3\, C}{G^4} b_T \quad .
\end{aligned} \tag{5.175}$$

Für den Radius r müssen die Ausdrücke aus den Gleichungen (5.163) eingesetzt werden, die Beschleunigungen b_{Rn} und b_T bewirken, dass mit der gewählten Spirale die anzupassende Kurve beschrieben werden kann. Falls es sich um eine Raumkurve mit der normalen Beschleunigung $b_N \neq 0$ handelt, wird mit den Beschleunigungen b_{Rn} und b_T die Projektion der wahren Kurve in die oskulierende Bahnebene beschrieben.

5.5.4 Konstruktion weiterer Spiralen

Mit den Formeln dieses Abschnittes ist es nun ein leichtes, weitere Spiralen zu konstruieren. Wir wollen als Beispiel den Fall n=3 wählen (die entsprechende Spirale soll hier als Dreier-Spirale [3-Spirale] bezeichnet werden). Die erste der Formeln (5.163) liefert für den Radius in Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ

$$r = r_{(3)} = \sqrt{-\frac{G}{2\left(C\zeta + G C_{S3}\right)}} \;= \sqrt{-\frac{G}{2C\left(\zeta - \zeta_3\right)}} \quad , \tag{5.176}$$

wobei C, G und der Anfangswinkel ζ_3 charakterisierende konstante Ausgangsgrößen sind und mit

$$\zeta_3 := -\frac{G}{C} C_{S3} \qquad . \tag{5.177}$$

[1] *Johann I. Bernoulli* hatte bereits darauf hingewiesen, dass eine Beschleunigung die dem Faktor $1/r^3$ proportional ist, notwendig auf eine hyperbolische Spirale führt (siehe in O. VOLK [1976], p.368)

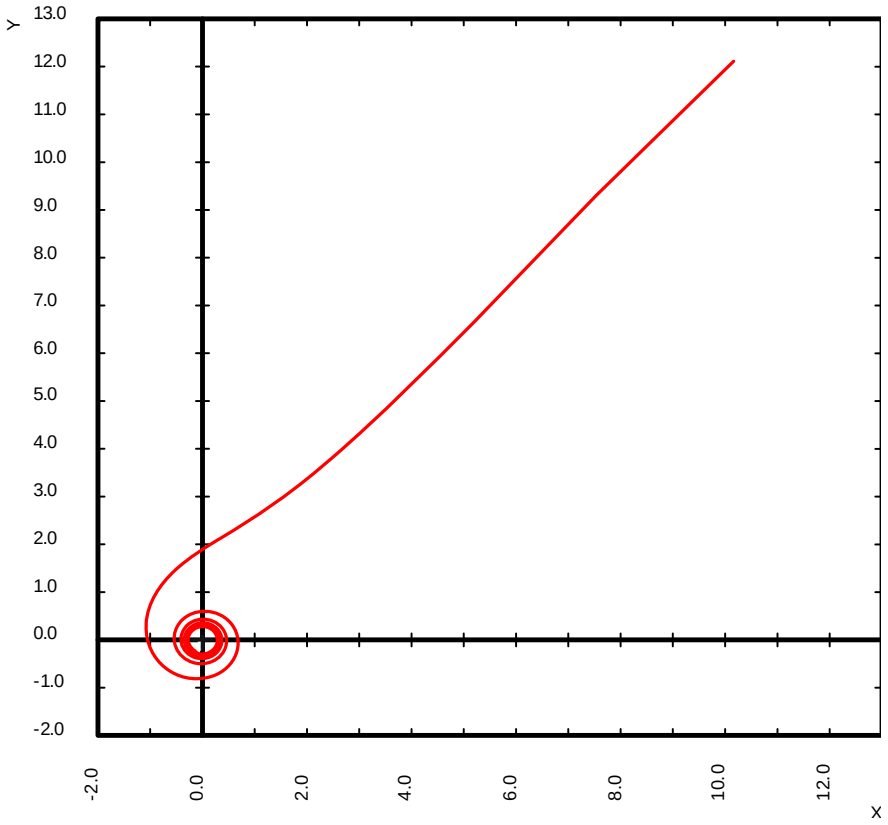


Bild 5-19: Dreier-Spirale (n = 3) mit $G = 5.0, C = -1.0, \zeta_3 = 50°$

Die Radialbeschleunigung der 3-Spirale beträgt nach Formel (5.171) wegen C = const.

$$\ddot{r} = r\,C^2 \tag{5.178}$$

Transversal- und Normalbeschleunigung wirken auf diese Bewegung nicht: $b_T = b_N = 0$. Die radiale Beschleunigung, die einen Körper zwingt sich auf einer derartigen Kurve zu bewegen, beträgt nach Formel (5.173)

$$b_{Rs} = b_{Rs(3)} = -\frac{G^2}{r^3} + r\,C^2 \quad . \tag{5.179}$$

Bild 5-19 zeigt eine solche Kurve mit den Parametern G=5, C=-1, ζ_3=50°. Es fällt auf, dass die Kurve bis zu einem Wendepunkt bei etwa (x,y)=(1.2,2.4) konkav zum Ursprung hin verläuft, danach vom Ursprung weg gekrümmt.

Wird die 3-Spirale zur Anpassung einer beliebigen Bewegung ausgewählt, lauten die Variationsgleichungen mit den Formeln (5.172) und (5.174) sowie (5.5)

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{b_{R3}}{r} \\ \dot{C}_{S3} &= \frac{\zeta}{G}\left[-\frac{b_{R3}}{r} + r\frac{C}{G}b_T\right] \\ \dot{G} &= r\,b_T \\ \dot{\eta} &= \frac{r}{G}\,b_N \end{aligned} \tag{5.180}$$

bzw. bei Bezug auf den Bahnwinkel ζ als unabhängiger Variable

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= \frac{r}{G} b_{R3} \\
\frac{dC_{S3}}{d\zeta} &= -\frac{r\,\zeta}{G^2} b_{R3} + \frac{r^3\,\zeta\,C}{G^3} b_T = -\frac{r\,\zeta}{G^2}\left[b_{R3} - \frac{r^2\,C}{G} b_T \right] \\
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T \\
\frac{d\eta}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2} b_N \quad .
\end{aligned} \tag{5.181}$$

BEISPIEL: Anpassung einer Geraden durch eine 3-Spirale:

Da eine gleichförmig geradlinige Bewegung durch die Radialbeschleunigung $\ddot{r} = G^2 / r^3$ erzeugt wird, muss auf einen Körper, der sich auf einer 3-Spirale bewegt, die „Störbeschleunigung“ nach Beziehung (5.171) und wegen (5.179)

$$b_{R3} = -b_{RS(3)} = \frac{G^2}{r^3} - r\,C^2$$

einwirken, um diesen Körper auf eine gleichförmig geradlinige Bewegung zu zwingen. Wird hier die eine 3-Spirale beschreibende Polargleichung (5.176) eingesetzt, ergeben sich die beiden Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= -2\left(\zeta C + G C_{S3}\right) + \frac{C^2}{2\left(\zeta C + G C_{S3}\right)} \\
\frac{dC_{S3}}{d\zeta} &= \frac{\zeta}{G}\left[2\left(\zeta C + G C_{S3}\right) - \frac{C^2}{2\left(\zeta C + G C_{S3}\right)} \right] = -\frac{\zeta}{G}\,\frac{dC}{d\zeta} \quad .
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind Funktionen $C = C(\zeta)$, $C_{S3} = C_{S3}(\zeta)$, sowie $G = const., \eta = 0$. ◀

5.5.5 Systematischer Überblick über einige wichtige Spiralen

Die in den vorhergehenden Abschnitten zusammengestellten Formeln können auch verwendet werden, um die ungestörte Radialbeschleunigung nach Gleichung (5.171) und die charakterisierende ungestörte Beschleunigung nach Gleichung (5.173) für die einzelnen Spiralen berechnen zu können:

Fall n=-1:

$$\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(-1)} &= -\frac{G^2}{r^3} - 3\frac{C^2}{r^7} \qquad , \quad (n = -1) \\
\ddot{r} &= -3\frac{C^2}{r^7} \\
r &= \sqrt{2\frac{C}{G}\left(\zeta - \zeta_{S(-1)}\right)}
\end{aligned} \tag{5.182}$$

Fall n=0 (Archimedische Spirale):

$$\begin{aligned} b_{RS} &= b_{RS(0)} = -\frac{G^2}{r^3} - 2\frac{C^2}{r^5} \qquad , \quad (n=0) \\ \ddot{r} &= -2\frac{C^2}{r^5} \\ r &= \frac{C}{G}\left(\zeta - \zeta_{S0}\right) \end{aligned} \tag{5.183}$$

Fall n=1 (Logarithmische Spirale):

$$\begin{aligned} b_{RS} &= b_{RS(1)} = -\frac{G^2}{r^3} - \frac{C^2}{r^3} \qquad , \quad (n=1) \\ \ddot{r} &= -\frac{C^2}{r^3} \\ r &= e^{C_{S1}} e^{\frac{G}{C}\zeta} \quad , \quad \left(C_{S1} = -\frac{C}{G}\zeta_L\right) \end{aligned} \tag{5.184}$$

Fall n=2 (Hyperbolische Spirale):

$$\begin{aligned} b_{RS} &= b_{RS(1)} = -\frac{G^2}{r^3} \qquad , \quad (n=2) \\ \ddot{r} &= 0 \\ r &= -\frac{G}{C\left(\zeta - \zeta_H\right)} \end{aligned} \tag{5.185}$$

Fall n=3 (3-Spirale):

$$\begin{aligned} b_{RS} &= b_{RS(3)} = -\frac{G^2}{r^3} + r\,C^2 \qquad , \quad (n=3) \\ \ddot{r} &= r\,C^2 \\ r &= \sqrt{-\frac{G}{C\left(\zeta - \zeta_3\right)}} \end{aligned} \tag{5.186}$$

5.6 Allgemeine Eigenschaften der Anpassung beliebiger Bewegungen

5.6.1 Problematik einer Anpassung mit einer Kreisbewegung

Es ist ersichtlich, dass nach der bisher entwickelten Vorgehensweise relativ willkürlich Bahnkurven postuliert werden können, die durch Variation ihrer Parameter die Anpassung an eine beliebige Bewegung erlauben. Wie weit dies aber sinnvoll ist und welche solcher primärer Kurven besonders zur Lösung himmelsmechanischer Problemstellungen geeignet sind, bedarf weiterer vertiefter Untersuchungen. Es ist anzunehmen, dass spezielle Probleme durch die Vorgabe spezieller primärer Kurven vorteilhaft gelöst werden können. Wir wollen im Rahmen der Dynamisierung der Bewegung ab Kapitel 10 (Band III) weiter darauf eingehen.

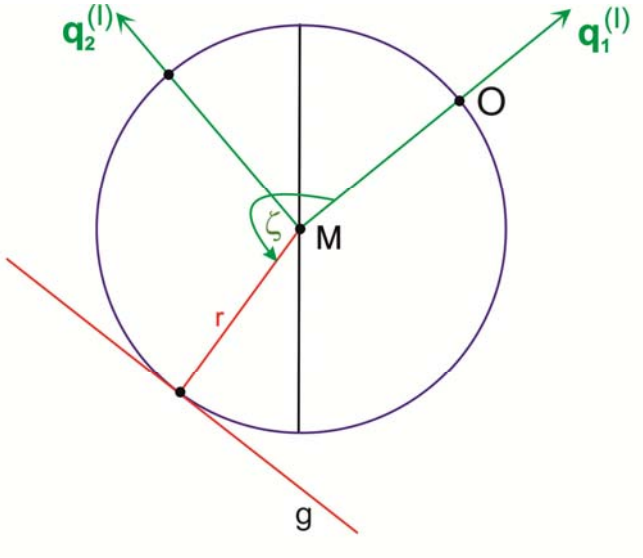


Bild 5-20: Anpassung von Gerade an Kreis

Auf die Frage, ob jede beliebige Kurve für eine Anpassung geeignet ist, können wir jetzt schon eingehen. In der antiken Himmelsmechanik, die in den Vorstellungen *Platons* ihren geistigen Höhepunkt gefunden hat, spielt die gleichförmige Kreisbewegung die zentrale Rolle. Die gleichförmige Kreisbewegung ist danach die Bewegung im Sinne eines *Hansen* Systems, eines Systems also, dessen Eigenbewegung die Darstellung der Bewegung nicht beeinflusst, auch wenn „entgegengesetzte Kräfte" diese Bewegung (scheinbar) stören können[1]. Man könnte nach der im vorliegenden Kapitel untersuchten Methode der Anpassung beliebiger Bewegungen versucht sein, den Schluss abzuleiten, dass es im Sinne *Platons* wäre, die gleichförmige Kreisbewegung als Ausgangsbewegung zur Anpassung beliebiger Bewegungen zu wählen.

Ein Körper befindet sich auf einer Kreisbahn um einen gegebenen Punkt, wenn er von diesem Punkt stets dieselbe Entfernung hat, der Radius von diesem Punkt aus identisch konstant ist. Eine Variation des Radius findet nicht statt, d. h. es gibt keine Radialgeschwindigkeit und eine radiale Beschleunigung ist nicht erkennbar:

$$r \equiv const. \quad , \quad \dot{r} \equiv 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0 \quad .$$

Aus der zweiten dieser Beziehungen folgt unmittelbar:

▶ *Wird eine Kreisbewegung für eine Anpassung zugrunde gelegt, gibt es keine erste Anpassungsgleichung.*

Aus der allgemeingültigen Variationsgleichung (5.4) auf S. 88

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R =: \frac{G^2}{r^3} + b_{RC} + b_{R0} \tag{5.187}$$

folgt, dass für eine Kreisbewegung notwendig die radiale „Störbeschleunigung"

[1] vgl. das *Platon*kapitel in Abschnitt 1.2 (Band I)

$$b_{RC} = -\frac{G^2}{r^3} \quad , \quad b_{R0} = 0 \tag{5.188}$$

wirken muss. Wie diese physikalisch zustande kommt, ist in diesem Zusammenhang nicht von Interesse.

Eine Aussage, wie diese Bewegung auf einem Kreis erfolgt, benötigt die Kenntnis der transversalen Geschwindigkeit

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r}$$

Wenn $\dot{G} = r\,b_T$ und $b_T = 0$, ist $G = const.$ und wegen $r = const.$ ist die Bewegung gleichmäßig, erfolgt also mit konstanter Geschwindigkeit

$$V = V_T = \frac{G}{r} = const.$$

Ist aber $b_T \neq 0$, d. h. gibt es eine transversale Beschleunigung, ist auch die transversale Geschwindigkeit nicht konstant, die Bewegung ist dann also nicht gleichmäßig. Dies ist wohl der von *Platon* angenommene Fall der Planetenbewegung, die auf Kreisbahnen erfolgend durch „entgegen gerichtete Kräfte“ nicht die Kreisförmigkeit wohl aber (scheinbar nur wie *Platon* meint) die Gleichförmigkeit dieser Bewegung beeinflusst.

Ein Kreis kann als Spezialfall einer Kurve zweiter Ordnung, also eines Kegelschnitts mit der numerischen Exzentrizität e=0 aufgefasst werden. Die spiralartigen Kurven, welche durch die Differentialgleichung (5.152) auf S. 128

$$\frac{dr}{r^n} = \frac{C}{G}\,d\zeta \qquad (n \text{ ganzzahlig})$$

beschrieben werden, haben ebenfalls als Grenzkurve (C=0) einen Kreis. Und diese Eigenschaft trifft noch für viele andere bekannte Kurven zu. Die Anpassung mit einer beliebigen Bewegung durch einen Kreis könnte damit für erledigt gehalten werden, wenn die Anpassung mit einem Kegelschnitt oder einer spiralartigen oder einer anderen geeigneten Kurve erfolgt, welche den Kreis als Spezialfall enthält. Es ist aber nicht einzusehen, warum nicht auch eine spezielle Kurve wie ein Kreis an Stelle eines Kurventyps wie Kurve erster oder zweiter Ordnung oder spiralartige Kurve usw. für eine Anpassung herangezogen werden sollte.

Im allgemeinen Anpassungsvorgang werden zwei Parameter, die bei exakter Bewegung auf dieser Kurve konstant sind, im „Störfall“ also in einem Anpassungsvorgang als variabel betrachtet. Im Fall des Kreises kann es sich bei einem solchen Parameter um den Radius r handeln, der ja im Fall exakter Kreisbewegung konstant ist. Seine Variation ist

$$\dot{r} = V_R = V_R(t)$$

als Funktion der Zeit. Das Problem liegt bei der Suche nach dem zweiten Parameter. Dieser könnte ein Anfangswinkel sein, der sich auf einem Kreis aber nicht auszeichnen lässt. Die radiale Geschwindigkeit scheidet als Parameter aus, da sie auf einem Kreis stets verschwindet, $\dot{r} \equiv 0$, also nicht als charakterisierender Parameter in Frage kommt. Bei „gestörter“ Kreisbahn ist $b_{R0} \neq 0$, also

$$r = \int\int b_{R0}\,dt\,dt$$

mit zwei Integrationskonstanten. Wir wollen die Situation zunächst an zwei Beispielen betrachten:

1. Anpassung einer (beliebigen) Kegelschnittbewegung durch einen Kreis

Wir haben in Gleichung (5.122) auf S. 115 gesehen, dass die Störbeschleunigung, die einen Körper auf eine Kegelschnittbewegung notwendig zwingt,

$$b_R = -\frac{G^2}{p\,r^2}$$

ist, wobei über die Verknüpfung der Parameter G und p in diesem Stadium keine Aussage gemacht werden kann, aber auch gar nicht benötigt wird. Die radiale „Störbeschleunigung“ b_R wird im Fall einer Anpassung mit einem Kreis nach Gleichung (5.187) auf S. 136 in die Anteile b_{RC}, der die Kreisbewegung notwendig erzwingt, und b_{R0} als „Störung“ der Kreisbewegung zerlegt. Im vorliegenden Fall ist also

$$b_{R0} = b_R - b_{RC} = -\frac{G^2}{p\,r^2} + \frac{G^2}{r^3}$$

und die radiale Beschleunigung ist

$$\ddot{r} = b_{R0} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\,r^2}$$

mit dem ersten Integral

$$\dot{r}^2 = -\frac{G^2}{r^2} + \frac{2G^2}{p\,r} + 2C_{C1} \quad , \quad C_{C1} = const.$$

Für eine zweite Integration wird der Bahnwinkel ζ mit der allgemeingültigen Beziehung $r^2\,\dot{\zeta} = G$ eingeführt und die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r\sqrt{\frac{2C_{C1}}{G^2}\,r^2 + \frac{2}{p}\,r - 1}} = d\zeta$$

integriert zu

$$\zeta - \zeta_0 = \arcsin\frac{\frac{r}{p} - 1}{r\sqrt{\frac{2C_{C1}}{G^2} + \frac{1}{p^2}}} \quad .$$

Hier ist ζ_0 die neue Integrationskonstante. Wird sie umdefiniert

$$\zeta - \zeta_0 =: \zeta - \zeta_B + 270° \quad ,$$

hat das Integral die erwartete Polardarstellung eines Kegelschnitts

$$r = \frac{p}{1 + \sqrt{\frac{2C_{C1}\,p^2}{G^2} - 1}\,\cos(\zeta - \zeta_B)} \quad ,$$

worin die (numerische) Exzentrizität aus der ersten Konstante über

$$\frac{G^2\,(e^2+1)}{2\,p^2} \;=\; C_{C1}$$

berechnet werden kann. ◀

2. Anpassung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung durch einen Kreis

Eine gleichförmig geradlinige Bewegung entsteht, wenn auf das bewegte Objekt keine „Störbeschleunigung“ wirkt, wenn in Gleichung (5.187) auf S. 136 $b_R = 0$ ist. Dann ist

$$b_{R0} \;=\; b_R - b_{RC} \;=\; \frac{G^2}{r^3}$$

und es bleibt die Variation für den „Parameter“ r:

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} \quad ,$$

die wir schon aus Gleichung (5.11) auf S. 91 kennen gelernt haben und welche die in Abschnitt 5.2.1 auf Seite 89 hergeleiteten Ergebnisse der geradlinigen Bewegung hat. ◀

Wir stellen mit Verwunderung fest, dass in den Beispielen der Anpassung mit einem Kreis die Gleichung für die radiale Beschleunigung identisch ist mit der Darstellung ohne Anpassung mit irgendeiner Kurve. Diese Aussage ist allgemein richtig, denn wenn in Gleichung (5.187) der Faktor b_{R0} berechnet wird mit der für eine Kreisbewegung (bzw. aus Gleichung (5.173) auf S. 132 für $n = 2$ ersichtlichen allgemeinen Bewegung auf einer hyperbolischen Spirale) notwendigen Beschleunigung $b_{RC} = -G^2 / r^3$ ist allgemein

$$b_{R0} \;=\; b_R - b_{RC} \;=\; b_R + \frac{G^2}{r^3} \quad .$$

Wird dies in die allgemeine Gleichung für $\ddot{r}$ eingesetzt (allgemeine *Leibniz* Gleichung), bleibt in vollständiger Allgemeinheit

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \;=\; b_{R0} \quad . \tag{5.189}$$

Dieser Sachverhalt ist ganz elementar eine Folge der Äquivalenz von Kreisbahnbeschleunigung $b_{RC} = -G^2 / r^3$ und der Bedingung für gleichförmig geradlinige Bewegung G^2 / r^3.

Wir schließen das merkwürdige Ergebnis der vorstehenden Überlegungen:

Wird eine beliebige Bewegung mit einem Kreis bzw. allgemeiner einer hyperbolischen Spirale angepasst, so wirkt sich dies nicht auf den Anpassungsvorgang aus: die radiale Beschleunigung bei Anpassung mit einem Kreis ist identisch der radialen Beschleunigung ohne Anpassung mit irgendeiner Kurve. Im Fall einer allgemeinen hyperbolischen Spirale $C \neq 0$ lässt sich als Anpassungsgleichung Gleichung (5.172) auf S. 132 deuten. Im Fall einer Kreisbahn gibt es – wie wir schon bemerkt haben – keine erste Anpassungsgleichung.

- Die gleichförmige Kreisbewegung und allgemeiner die Bewegung auf einer hyperbolischen Spirale sind die einzigen Bewegungen, bei denen „Störbeschleunigung“ und Beschleunigung der „ungestörten“ Bewegung im Gleichgewicht stehen.

Im Fall eines Kreises $\dot{r} \equiv 0$ $(e = 0)$ lässt sich nicht einmal eine Anpassungsgleichung aufstellen, denn in $\dot{r}$ gibt es ja keinen Parameter, der für einen Anpassungsvorgang variiert werden könnte. Dies bedeutet, dass der Kreis die einzige Kurve ist, die sich dem Anpassungsvorgang vollständig entzieht. Wir werden auf die allgemeinen Variationsgleichungen (5.3) auf S. 88 zurückgeworfen. Wird umgekehrt mit bekannter radialer Beschleunigung b_R , eventuell auch bekannten transversaler und normaler Beschleunigung b_T , b_N, eine Funktion für den Radius aus Gleichung (5.3) berechnet, ist das so als ob mit einer Kurve *r = const.,* $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ also einem Kreis die wahre Bewegung, für die b_R, b_T und b_N gegeben sind, angepasst würde.

- Anpassung mit einem Kreis hilft nicht und schadet nicht. Anpassung mit einem Kreis ist so als gäbe es keine Anpassung. Erfolgt keine Anpassung ist es so als ob mit einem Kreis angepasst würde. Der Kreis ist für die Anpassung an eine beliebige Bewegung weder von Nutzen noch von Schaden, er erscheint in diesem Zusammenhang indifferent, „unantastbar".

5.6.2 Elemente einer Kreisbewegung

Als „Elemente" einer Bewegung werden Parameter bezeichnet, die in einer als Grundbewegung bezeichenbaren Ausgangsdarstellung einer Bewegung konstant sind, bei Einwirkung von irgendwelchen „Stör-" Beschleunigungen variabel werden und dann mit Zeit- oder Bahnwinkel-abhängigen Variationsgleichungen beschrieben werden können. Im Fall der „Anpassung" einer beliebigen Bewegung ohne Grundbewegung, was nach dem vorstehenden einer Anpassung mit einer Kreisbewegung gleichwertig ist, liegt es nahe, im Zustandsvektor

$$\mathbf{r} \;=\; r\,\mathbf{r}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

die Parameter

$$C_1 \;:=\; r \quad ; \quad C_2 \;:=\; \dot{r} \quad , \quad C_3 \;:=\; \frac{G}{r} \tag{5.190}$$

als derartige „Elemente" aufzufassen: es ist ja im Fall einer gleichförmigen Kreisbewegung $r \equiv const.$, $\dot{r}$ *= const.*, *G = const.*, wobei die Gleichförmigkeit der Bewegung durch die konstante transversale Geschwindigkeit $V_T = G / r = const.$ beschrieben wird. Im Allgemeinen werden 6 solcher „Elemente" wegen der Sechsdimensionalität des Zustandsvektors benötigt. Das vierte und das fünfte Element stammen aus der räumlichen Bahnorientierung, sind also in einem der Einheitsvektoren des mitgeführten Bahnsystems $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{q_0}$ oder $\mathbf{c_0}$ enthalten, etwa mit der Variationsgleichung (5.7) auf Seite 89 beschrieben. Diese Elemente werden im Zusammenhang mit dem bewegungsbezogenen Bahnsystem in Abschnitt 4.4.3 und mit der Untersuchung verschiedener Arten von Bewegungsparametern in Kapitel 11 (Band III) behandelt. Als sechstes Element wird eine Größe gewählt, welche die Position des bewegten Objektes in seiner Bahn zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* charakterisiert. Hierfür kann am geschicktesten der Bahnwinkel

$$C_6 \;:=\; \zeta \tag{5.191}$$

gewählt werden. Die Variationsgleichungen in diesem allgemeinsten Fall einer Anpassung lauten in den vier Bahnebene-bezogenen Parametern

$$
\begin{aligned}
\dot{C}_1 &:= \dot{r} = C_2 \\
\dot{C}_2 &:= \ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R = \frac{C_3^2}{C_1} + b_R \\
\dot{C}_3 &:= \left(\frac{G}{r}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{G}}{r} - \frac{\dot{r}\,G}{r^2} = -\frac{C_2 C_3}{C_1} + b_T \\
\dot{C}_6 &:= \dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} = \frac{C_3}{C_1} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.192}
$$

Diese Variationsgleichungen sind bemerkenswert, weil nur zwei von ihnen „Stör-“ Beschleunigungen enthalten und das auch noch völlig getrennt nach radialem und transversalem Beschleunigungsanteil, während die Variation der Bahnebene und damit der die räumliche Orientierung der Bahnebene beschreibenden Parameter wie Gleichung (5.7) auf S. 89 zeigt ausschließlich und allein durch die normale Beschleunigungskomponente b_N geprägt wird. Die hier behandelten Variationsgleichungen sind somit der völlig allgemeine Urtyp aller Arten von Variationsgleichungen. Unter diesem Gesichtspunkt kann die Kreisbewegung mathematisch nüchtern als die „Mutterbewegung“ aller Bewegungsarten charakterisiert werden, weil sie eine Anpassung beliebiger Bewegungen ohne eine spezielle Grundkurve erlaubt. Allerdings muss die radiale Beschleunigungskomponente $b_{RC} = -G^2 / r^3$ vorausgesetzt werden können. Speziell eine geradlinige Bewegung wird mit $b_R = 0$, eine Kegelschnittbewegung mit $b_R = -G^2 / p\, r^2 = -C_3^2 / p$ (mit p = *const.*) erhalten, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde.

5.6.3 Abgrenzung des Begriffes der Anpassung

1. Die Anpassungsgleichung (5.119) auf S. 114 zeigt nun, dass auch im Fall $r \equiv const.$, $\dot{r} \equiv const.$ die Variationen in den Parametern e, ζ_B und p keineswegs verschwinden müssen. Das bedeutet, dass auch vermutlich sehr komplizierte „Störungen“ eine Kreisbewegung verursachen können, die wenn die Geschwindigkeit $V \equiv const.$ sogar gleichförmig sein kann. Aus

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

folgt im Falle einer Kreisbewegung $V = G/r$. Wenn $b_T = 0$ ist, wird G = *const.* sein, was notwendig und hinreichend für V = *const.*, also wieder gleichförmige Bewegung ist. Wird $b_{R2} \neq 0$ sein, liefern die Variationsgleichungen (5.125) auf S. 115 Variationen in e und ζ_B, wobei die Variationen in p noch offen sind.

2. Abgrenzung des Begriffs der intermediären Bahn zur Anpassungskurve:

Unter *intermediärer Bahn* wird in der Himmelsmechanik eine Bahnkurve verstanden, die einer wahren Bahn mit einer gewissen Genauigkeit angepasst ist. Sie kann daher im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit die wahre Bahn darstellen. (Der wahre Grund für die Auswahl einer intermediären Bahn ist in der Regel ihre leichtere eventuell sogar rein analytische Integrierbarkeit als die gegebene wahre Bahn erlaubt.) Zum Erreichen einer noch höheren Anpassungsgenauigkeit an die wahre Bahn werden die Gleichungen der intermediären Bahn mit den Methoden der Störungsrechnung „verbessert“. Der dazu benötigte Integrationsvorgang geht von der intermediären Bahn aus. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Anpassungskurve kann dagegen eine willkürlich erscheinende Kurve sein, die mit der wahren Bahn über-

haupt keine Ähnlichkeit aufweisen muss. Durch Variation ihrer Parameter wird sie so „verbogen“, dass eine im Rahmen einer gegebenen Genauigkeit gültige Anpassung der wahren Bahn erfolgen kann. Das Ergebnis einer solchen Anpassung *kann* eine intermediäre Bahn sein. Allerdings findet bei diesem Anpassungsvorgang, der mit der Methode der Variation der Parameter erfolgt, stets eine Anpassung an die wahre Bahn in der Sprechweise der klassischen Himmelsmechanik eine „Oskulation“ statt. Die intermediäre Bahn muss dagegen zu keinem Zeitpunkt mit der wahren anschmiegend übereinstimmen. Die intermediäre Bahn ist eine gute Annäherung an die wahre Bahn, im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit und in einem vorgegebenen Zeitrahmen. Sie ist eine „physikalische Anpassung“ der wahren Bahn. Die Anpassungskurve ist eine günstige Ausgangskurve zur Durchführung der Bahnintegration: sie ist eine „mathematische Anpassung“. Im Einzelfall ist also zu untersuchen, ob ein spezielles Bewegungsproblem mit einer speziellen Anpassungskurve leichter bearbeitet werden kann.

3. Die Anpassungskurve in ihrer einfachsten Form ist dreiparametrig, somit eine ebene Kurve. Die wahre Bahnkurve ist jedoch im allgemeinen Fall räumlich. Auch eine Variation der Parameter einer dreiparametrigen Anpassungskurve führt nicht aus der Ebene dieser Kurve heraus. Der Grund dafür besteht darin, dass die dreiparametrige Anpassungskurve stets in der Basisebene des ein *Hansen* System bildenden Koordinatensystems liegt, die mit dem wahren Bewegungsvorgang mitbewegt wird, was durch die Variation des Normalenvektors $\mathbf{c}_0$ beschrieben wird. Die wahre (räumliche) Bewegung wird also beschrieben durch die Anpassungskurve in der Basisebene des *Hansen* Systems und durch die Eigenbewegung dieses Systems.

5.6.4 Die Anpassungsgleichungen

Als Zusammenfassung dieses Abschnittes wollen wir die allgemeingültige mathematische Formulierung des Anpassungsvorganges darstellen:

Gegeben sei ein Bewegungsproblem durch die allgemeinen Variationsgleichungen (5.4)–(5.8) auf Seite 89

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{G^2}{r^3} + b_R \\ \dot{G} &= r\, b_T \\ \dot{\eta} &= \frac{r}{G} b_N \qquad \left(\text{bzw. } \dot{\mathbf{c}}_0 = -\dot{\eta}\, \mathbf{q}_0\right) \\ \dot{\zeta} &= \frac{G}{r^2} \quad , \end{aligned} \tag{5.193}$$

wobei $r = r(t)$ die unbekannte Raumkurve ist, auf welcher der Bewegungsvorgang erfolgt. Diese Raumkurve gilt es zu bestimmen. Wir gehen dazu von (irgend -) einer bekannten Kurve mit der Polardarstellung

$$r = r(A_i; \zeta) \tag{5.194}$$

aus, welche durch die Parameter A_i charakterisiert sei. Diese bekannte Kurve hat die Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\zeta}\dot{\zeta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta} + \sum_i \frac{\partial r}{\partial A_i}\frac{dA_i}{d\zeta}\right)\dot{\zeta} \quad . \tag{5.195}$$

Als *Anpassungskurve* bezeichnen wir die Kurve $r(A_i;\zeta)$ dann, wenn sie zu jedem Bewegungsmoment an die Kurve der wahren Bewegung angepasst werden kann, was durch Variation der Parameter A_i geschehen wird. Hierfür ist notwendig die Bedingungsgleichung der Anpassung

$$\sum_i \frac{\partial r}{\partial A_i}\frac{dA_i}{d\zeta} = 0 \quad , \tag{5.196}$$

die wir als *erste Anpassungsgleichung* bezeichnen wollen.

Diese Beziehung kann im Rahmen der *Hansen*-idealen Systeme gedeutet werden, wenn wie *P. A. Hansen* gefordert hat, als „ideal" ein System bezeichnet werden soll, das im „ungestörten" wie im „gestörten" Fall eine formal identische mathematische Beschreibung erfährt: Die Parameter der Bewegungskurve (=Anpassungskurve) sollen so bestimmt werden, dass die „ideale" Beziehung

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} \tag{5.197}$$

notwendig erfüllt ist. Somit gilt

Satz H25*: Die Forderung nach* Hansen-*Systemen führt notwendig auf die Methode der Variation der Parameter.*

Die radiale Geschwindigkeit $\dot r$ ist wegen der ersten Anpassungsgleichung eine Funktion der Parameter A_i und des Bahnwinkels ζ, also nicht der Variationen der A_i:

$$\dot r = \dot r\left(A_i;\zeta\right) \quad . \tag{5.198}$$

Die Variation der radialen Geschwindigkeit, also die radiale Beschleunigung $\ddot r$, lautet daher

$$\begin{aligned}\ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d\dot r}{d\zeta}\dot\zeta = \frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\dot\zeta + \sum_i \frac{\partial \dot r}{\partial A_i}\dot A_i = \\ = \dot\zeta\left[\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_i \frac{\partial \dot r}{\partial A_i}\frac{dA_i}{d\zeta}\right] = \frac{G}{r^2}\left[\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_i \frac{\partial \dot r}{\partial A_i}\frac{dA_i}{d\zeta}\right] \quad .\end{aligned} \tag{5.199}$$

Die radiale Beschleunigung ist dann aus der ersten der Variationsgleichungen (5.193) bekannt. Dies führt auf die zwei*te Anpassungsgleichung*

$$\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_i \frac{\partial \dot r}{\partial A_i}\frac{dA_i}{d\zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G}b_R \quad , \tag{5.200}$$

in der jetzt die radiale („Stör" -) Beschleunigungskomponente b_R explizit in Erscheinung tritt.

Eine zentrale Folgerung aus dem Anpassungsprozess mit der Oskulationsbedingung (5.197) zeigt sich in dieser Gleichung. Durch die Radius - Funktion $r = r\left(\zeta\right)$ werde eine Bahnkurve beschrieben, die der *Leibniz* Gleichung (die erste der Gleichungen (5.193)) mit einer bestimmten radialen Beschleunigung b_{RA} genügt

$$\ddot r = \frac{G^2}{r^3} + b_{RA} \quad . \tag{5.201}$$

Die Kurve $r = r(\zeta)$ ist ausschließlich vom Bahnwinkel ζ abhängig. Nach Übertragung auf den Bahnwinkel mit Hilfe des Flächensatzes (der vierten Gleichung in (5.193)) ist somit notwendig gleichbedeutend der Ausdruck

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_{RA} \quad . \tag{5.202}$$

Die zweite Anpassungsgleichung wird damit wesentlich vereinfacht: als radiale Beschleunigung tritt nur die im zuvor durchgeführten Anpassungsprozess bisher nicht verwendete radiale Beschleunigung $b_{RZ} = b_R - b_{RA}$ auf. Alle anderen bereits verarbeiteten Anteile der radialen Beschleunigung b_R sind in der vorhergehenden Lösung $r = r(\zeta)$ enthalten. Sie dürfen also in einem neuen Anpassungsprozess nicht mehr verwendet werden. Im ν_R-ten Anpassungsschritt kann daher

$$b_R = \sum_{\nu=1}^{n_R} b_R^{(\nu)} \quad , \quad b_{RA} := \sum_{\nu=1}^{\nu_R - 1} b_R^{(\nu)} \quad , \quad b_{RZ} := \sum_{\nu=\nu_R}^{n_R} b_R^{(\nu)} \tag{5.203}$$

gesetzt werden. Die zweite Anpassungsgleichung (5.200) wird daher reduziert auf

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_{RZ} \quad . \tag{5.204}$$

Die Restbeschleunigung b_{RZ} kann aus etlichen Teilbeschleunigungen bestehen. Aus ihnen wird für eine weitere (j+1 te) Anpassung des gegebenen Bewegungsproblems eine geeignet Teilbeschleunigung ausgewählt und mit den Anpassungsgleichungen bearbeitet.

Die beiden hier als „Anpassungsgleichungen“ bezeichneten Variationsgleichungen sind aus der allgemeinen Methodik der „Variation der Konstanten“ bekannt. Im Gegensatz zu dieser allgemeinen Methode mit 6 Variationsgleichungen, je eine für eine der sechs Parameter oder des Zustandsvektors einer räumlichen Bewegung, werden hier nur Radius und radiale Geschwindigkeit variiert, also nur 2 Variationsgleichungen erhalten. Die restlichen benötigten Variationsgleichungen sind entsprechend dem System (5.193) in den Variationen des Flächenparameters *G* und des Winkels η der Bahndrehung im Raum enthalten, wenn der Bahnwinkel ζ (bei *Hansen* als „Länge in der Bahn“ bezeichnet) als unabhängige Variable verwendet wird.

Wie wirkt sich in der wiederholten Anwendung des Anpassungsverfahrens ein Lösungsansatz für den Flächenparameter aus? Die in der Formel $\dot{G} = r\, b_T$ enthaltene Beziehung mit der transversalen Beschleunigung ist allgemeingültig. Das Verfahren der schrittweisen Anpassung zerlegt die **transversale Beschleunigung** in Einzeleffekte, von denen n_T bekannt sein mögen:

$$b_T = \sum_{\nu=1}^{n_T} b_T^{(\nu)} \quad . \tag{5.205}$$

Für eine erste Lösung werde die Teilbeschleunigung $b_T^{(1)} = b_T - \sum_{\nu=2}^{n_T} b_T^{(\nu)}$ ausgewählt. Daraus wird eine Lösung für den Flächenparameter aus der Differentialgleichung

$$G(\zeta) \frac{dG}{d\zeta} = r^3\, b_T^{(1)} \tag{5.206}$$

berechnet. Dazu muss eine erste Lösung für den Radius r als Funktion des Bahnwinkels ζ bekannt sein. Eine solche Lösung kann immer als bekannt angenommen werden, etwa in

Form einer geradlinigen Bewegung, die stets als Ausgangsbahn einer beliebigen Bewegung am Beginn eines Anpassungsprozesses gewählt werden kann.

Die gefundene Lösung G(ζ) ist eine Funktion, die ausschließlich vom Bahnwinkel ζ abhängt. Sie genügt daher dem Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(1)} \quad . \tag{5.207}$$

Diese Gleichung kann wie die vergleichbare Gleichung (5.202) als Kontrolle des zuvor erfolgten Anpassungsprozesses verwendet werden. Für den Radius r werden die in diesem Rechenschritt erhaltenen Parameter $A_k^{(\nu)}(\zeta), G(\zeta)$ in der Gleichung der gegebenen Bahnkurve verwendet. Wenn nun eine zweite transversale Beschleunigung $b_T^{(2)}$ berücksichtigt werden soll, muss die Variationsgleichung $\dot{G} = r\, b_T$ für den Flächenparameter entsprechend nach den neuen Parametern entwickelt werden:

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left(b_T^{(1)} + b_T^{(2)}\right) \quad , \tag{5.208}$$

Die weiteren Beschleunigungen aus b_T sollen in diesem Rechenschritt nicht berücksichtigt werden. Wegen Beziehung (5.207) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(2)} \quad . \tag{5.209}$$

Dies ist somit eine lineare Beziehung für die differentiellen Ausdrücke der neuen Parameter $A_k^{(2)}$. Üblicherweise gibt es K=3 solcher Parameter in Bezug auf eine in der oskulierenden Bahnebene verlaufende Bahnkurve. Die weiteren zu ihrer Lösung benötigten Beziehungen folgen aus den beiden Anpassungsgleichungen im ν-ten Anpassungsschritt (ν > 1)

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{d\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = 0 \\ &\frac{d\dot{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{G}{r} + b_R \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = b_R^{(j)} \quad . \end{aligned} \tag{5.210}$$

In der letzteren Gleichung wurde wieder die Bedingung (5.202) verwendet, wonach ν_R radiale Teilbeschleunigungen bereits in einem früheren Anpassungsschritt berücksichtigt wurden:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \sum_{\nu=1}^{\nu_R} b_R^{(\nu)} \tag{5.211}$$

Damit ist ein lineares Gleichungssystem erhalten, aus dem die Variationsausdrücke für die neuen Parameter berechnet werden können. Entsprechend kann das System bis zur Abarbeitung aller bekannten Teilbeschleunigungen $b_T^{(\nu)}\ (\nu = 1, \cdots, n_T)$ fortgeführt werden.

Analog kann auch der **Bewegungseinfluss in normaler Richtung** in den Anpassungsprozess mit einbezogen werden. Dieser ist allein für eine Variation des räumlichen Bahnwinkels η verantwortlich. Diese genügt den Variationsgleichungen aus dem System (5.193)

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad , \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N \quad . \tag{5.212}$$

Auch hier möge der normale Einfluss in etwa n_N Teileinflüsse zerlegt werden

$$b_N = \sum_{\nu=1}^{n_N} b_N^{(\nu)} \quad . \tag{5.213}$$

Wird ein erster Teileinfluss ausgewählt, kann mit einer bekannten Ausgangsnäherung für die Bahnkurve, die es stets gibt, etwa in Form einer Gerade, eine erste Lösung erhalten werden:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \quad . \tag{5.214}$$

Die erhaltene Lösung $\eta=\eta(\zeta)$ ist nur von dem Bahnwinkel ζ abhängig und genügt daher der Bedingung

$$\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \quad . \tag{5.215}$$

Diese Gleichung kann wieder als Kontrolle des zuvor erfolgten Anpassungsprozesses verwendet werden. Soll für eine weitere Anpassung eine weitere normale Beschleunigung $b_N^{(2)} = b_N - b_N^{(1)}$ berücksichtigt werden, folgt aus der Variationsgleichung (5.212)

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial\eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2}\left(b_N^{(1)} + b_N^{(2)}\right) \quad . \tag{5.216}$$

Hier werden die aktuellen Werte für die bislang berechnete Bahnkurve $r(\zeta)$ und Flächenparameter $G(\zeta)$ berücksichtigt. Weitere normale Beschleunigungen werden für die neue Lösung außer Acht gelassen. Wegen (5.215) bleibt

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial\eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(2)} \quad . \tag{5.217}$$

Die weiteren für das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Variationsgleichungen benötigten Gleichungen werden wie zuvor durch ein System der Art (5.210) gebildet. Das so gebildete Variationsgleichungssystem kann maximal die Ordnung K=5 haben. Eine 6-te Ordnung wird erst bei Einschluss der Zeit mit Hilfe des Flächensatzes $r^2\,\dot{\zeta} = G$ erforderlich. Die Bedingungsgleichung (5.217) kann wieder auf alle n_N bekannten Teilbeschleunigungen erweitert werden.

Die Variationsgleichung für η führt auf zwei unabhängige Variationsgleichungen für die beiden Raumwinkel (etwa Inklination und Länge des aufsteigenden Knotens oder Länge des Knotens in der Bahn).

Die Parameter A_i werden als Funktionen des *Bahnwinkels* dargestellt, der über die Variationsgleichung $\dot{\zeta} = G / r^2$ mit der Zeit verknüpft werden kann. Die Variationsgleichungen der Parameter

$$\frac{dA_i}{d\zeta} \quad \text{oder} \quad \dot{A}_i = \frac{dA_i}{d\zeta}\,\dot{\zeta}$$

ersetzen in den Variationsgleichungen (5.193) der allgemeinen Bewegung nur die Gleichung für die radiale Beschleunigung, die zwei Integrationen erfordert. Es sind daher mindestens zwei Parameter A_i erforderlich. Es wird also im Allgemeinen genügen, als Anpassungskurve zur Anpassung beliebiger räumlicher Bewegungen eine ebene Kurve zu wählen. Mit den beiden Anpassungsgleichungen können die beiden Parameter dieser Kurve vollständig bestimmt werden. Hat die Anpassungskurve mehr als zwei Parameter, müssen die Variationsgleichungen dieser weiteren Parameter außerhalb des Anpassungsvorganges gesucht werden. Hat die Anpassungskurve nur einen Parameter, ist sie für den Anpassungsvorgang nicht geeignet. Die einzige ebene Kurve mit nur einem Parameter ist der Kreis (r = *const.*). Der Kreis ist also die einzige Kurve, die für eine Anpassung räumlicher Bewegungen nicht geeignet ist. Abgesehen von der Gleichung der radialen Beschleunigung werden die weiteren vier Variationsgleichungen (5.189) auf Seite 139 der allgemeinen Bewegung durch die Wahl einer speziellen Kurve als Anpassungskurve formal nicht beeinflusst. Sie macht sich erst in der Lösung des Differentialgleichungssystems (5.193) bemerkbar.

5.7 Weiterführende Aussagen über die Methode der Variation der Parameter

5.7.1 Der Zusammenhang von *Hansen*-Systemen und der Methode der Variation der Parameter

Es wurde in Satz H25[1] angesprochen, dass die Methode der Variation der Parameter in engem Zusammenhang mit *Hansen*-Systemen gesehen werden kann. Dieser Zusammenhang soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden.

Es werde wie in Abschnitt 4.4.6 ein beliebiges bewegungsbezogenes $\mathbf{q}_j^{(B)}-$Bahnsystem mit Bahnwinkel ψ eingeführt. Das *Leibniz*-System hat in Bezug auf dieses System die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(B)}\cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\sin\psi \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(B)}\sin\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\cos\psi \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)}\times\mathbf{q}_2^{(B)} \quad .\end{aligned} \tag{5.218}$$

Der Ortsvektor eines bewegten Objektes lautet

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = y^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} = r\left(\mathbf{q}_1^{(B)}\cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\sin\psi\right) \quad . \tag{5.219}$$

Seine absolute Variation nach dem Bahnwinkel wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) - r\,\mathbf{q}_0 \quad , \tag{5.220}$$

seine relative Variation nach dem Bahnwinkel mit partieller Differentiation

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = \frac{\partial r}{\partial\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{\partial\mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial\psi}\cos\psi + \frac{\partial\mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial\psi}\sin\psi\right) - r\,\mathbf{q}_0 \quad . \tag{5.221}$$

[1] Abschnitt 5.6.4 auf Seite 142

Da der Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}-$System bezogen ist, muss sein

$$\frac{\partial \mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial \psi}=\frac{\partial \mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial \psi}=0 \quad . \tag{5.222}$$

Somit bleibt für die Differenz zwischen absoluter und partieller Variation des Ortsvektors

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi}-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}=\left(\frac{dr}{d\psi}-\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)\mathbf{r}_0+r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi+\frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) \quad . \tag{5.223}$$

Die Bahnkurve, auf der das Objekt sich bewegen soll, sei mit Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}-$System bezogen. Der Bahnradius hat dann die Darstellung

$$r=r\left(A_\nu;\psi\right) \tag{5.224}$$

und für die Variation des Radius nach diesem Bahnwinkel wird

$$\frac{dr}{d\psi}=\frac{\partial r}{\partial \psi}+\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\psi} \quad . \tag{5.225}$$

Somit bleibt im Ausdruck (4,356)

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi}-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}=\left(\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\psi}.\right)\mathbf{r}_0+r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi+\frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) \quad . \tag{5.226}$$

Es sei nun das Bahnsystem ein *Hansen*-System mit dem Bahnwinkel

$$\psi \mathrel{\hat{=}} \zeta=\int\left(G/r^2\right)dt=\int\left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|dt \quad . \tag{5.227}$$

In diesem und nur in diesem Fall verschwindet wegen der *Hansen* Bedingung (4.312) der Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{d\zeta}\cos\zeta+\frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{d\zeta}\sin\zeta=\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{dt}\cos\zeta+\frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{dt}\sin\zeta\right)\frac{d\zeta}{dt}=0 \quad . \tag{5.228}$$

Es bleibt dann

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta}-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}=\left(\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta}\right)\mathbf{r}_0 \quad . \tag{5.229}$$

Dies vertieft die Aussage von Satz H25:

Satz H26: *Die Oskulationsbedingung*

$$\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta}=0 \tag{5.230}$$

welche als Ausgangspunkt für die Variation der Parameter dient, ist notwendig auf ein Hansen-*System mit Bahnwinkel ζ bezogen.*

Die Variation der Parameter kann also ohne den Bezug auf ein *Hansen*-System nicht sinnvoll begründet werden. In diesem und nur in diesem Fall wird daher

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad . \tag{5.231}$$

5.7.2 Überblick über die klassische Methode der Variation der Parameter

Die klassische Methode der Variation der Parameter in ihrer originalen Form lässt sich am übersichtlichsten in vektorieller Schreibweise formulieren[1]. Dazu wird (wie bei *I. Newton*) von einem (inertialen) Zustandsvektor ausgegangen. Sei **x** der Ortsvektor, der von Parametern A_ν und der Zeit t (oder einem Bahnwinkel) abhängig sei, so hat der Geschwindigkeitsvektor die Darstellung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \sum_{\nu}^{N} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} \quad . \tag{5.232}$$

Die Oskulationsbedingung (analog zu Satz H21 nach *Hansen*, vgl. auch Formel (5.197))

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \tag{5.233}$$

ergibt die erste Anpassungsgleichung

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} \quad = \quad 0 \quad . \tag{5.234}$$

In der klassischen Lehre wird die Anpassung stets auf eine *Kepler*bewegung bezogen. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mathbf{b}_K = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} + \sum_{\nu} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} \quad , \tag{5.235}$$

wobei $\mathbf{b}_K$ als „Störbeschleunigung“ bezeichnet wird. Als „ungestörte“ Bezugsbewegung wird (in der klassischen Störungstheorie wie übrigens auch in der *Hansen*schen Störungstheorie) die *Kepler*bewegung aufgefasst, so dass als zweite Anpassungsgleichung der Ausdruck

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_K \tag{5.236}$$

gewählt werden muss. Wenn von irgendeiner anderen Bewegung als Anpassungsbewegung ausgegangen werden soll, welche durch die Beschleunigung $\mathbf{b}_0$ geprägt sein soll, kann allgemein für die Bewegungsgleichung die Form

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} + \sum_{\nu} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_S \tag{5.237}$$

[1] Wie es zum Beispiel bei R. H. BATTIN [1987] pp.471-514 zu finden ist, in sehr übersichtlicher Form allerdings ohne Verwendung des Formalismus der Vektorrechnung etwa bei BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961], p. 273 ff. Die originale Herleitung mit kanonischen Elementen bzw. dann original nach *J. L. Lagrange* etwa bei F. TISSERAND [1889], tome I, pp. 159-188

angesetzt werden, wobei die „Störbeschleunigung“ die Bezeichnung $\mathbf{b}_S$ habe. Die zweite Anpassungsgleichung hat dann die Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_S \tag{5.238}$$

und es muss für die „ungestörte“ Bewegung sein

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} = \mathbf{b}_0 \quad . \tag{5.239}$$

In der klassischen Methode der Variation der Parameter werden die Anpassungsgleichungen auf „Bahnelemente“ transformiert. Diese sind konstant für eine ausgewählte Bahnkurve, die als Ausgangskurve verwendet wird. In der klassischen Himmelsmechanik ist diese Kurve üblicherweise eine Ellipse, welche durch die *Kepler*bewegung bestimmt ist. Mit Hilfe der *Lagrange* Klammern, die zeitunabhängig sind, können die beiden Anpassungsgleichungen in die *Lagrange*schen und allgemeiner die *Gauß*’schen Variationsgleichungen für die keplerschen Bahnparameter (oder einem vergleichbaren Satz von Bahnparametern, die mit diesen verwandt sind, etwa die kanonischen *Delaunay* Elemente, oder einen Satz von singularitätenfreien Elementen, o.ä.) übertragen werden. Deren Integration dient zur Berechnung der Bewegung der Himmelskörper (Planeten, Satelliten). Wesentlich für die Anwendung dieser Methode ist die Existenz einer „Störungsfunktion“, die vom Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes unabhängig ist und die sich als Gradient eines Potentials schreiben lässt. Diese Störungsfunktion, die in der klassischen Himmelsmechanik erstmals für das Mehrkörperproblem Sonnensystem erstellt wurde, ist somit auf konservative Kräfte beschränkt.

Die Integration der Planetengleichungen erfolgt (eventuell unter Verwendung von geeigneten kanonischen Transformationen) durch **sukzessive Approximationen**[1]: Ausgehend von einer als konstant angenommenen Anfangslösung („Anfangselemente“, im Fall einer *Kepler*bewegung sind die *Kepler*elemente oder ein verwandter Parametersatz) werden säkulare und periodische Bewegungsanteile 1. Ordnung durch Integration der Planetengleichungen erhalten. Diese Ergebnisse werden verwendet um mit den Planetengleichungen Lösungen zweiter Ordnung durch Integration zu erhalten. Dieses Verfahren könnte für Lösungen höherer Ordnung weitergeführt werden, indem der „Störanteil“ in den Planetengleichungen entsprechend durch die bisherigen Lösungen erweitert wird. Eine wesentliche Eigenschaft eines solchen Verfahrens ist die Tatsache, dass die Planetengleichungen nur einmal aufgestellt werden müssen und für jede Approximationslösung der „Störanteil“ entsprechend erweitert wird.

Ein prinzipieller schematischer Überblick über die klassischen Verfahren zur Bearbeitung von Bewegungsproblemen ist in Bild 5-21 gezeigt. Stellvertretend für alle möglichen Parametersätze sind hier die *Kepler*elemente große Halbachse a und numerische Exzentrizität e angeführt. Nach Berechnung derartiger Parameter, die ein bestimmtes Bewegungsmodell (“Störmodell“) bis zu einer gewissen Genauigkeitsordnung berücksichtigen, kann der Zustandsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ auf dem üblichen Weg berechnet werden. Die Lösung ist im Prinzip in Form einer Reihenentwicklung gegeben, die etwa auf eine Taylorentwicklung der Störungsfunktion zurückgeführt werden kann. Als unabhängige Variable wird üblicherweise ein Bahnwinkel verwendet, die wahre oder exzentrische Anomalie, das Argument der Breite, gelegentlich auch der *Hansen*sche Bahnwinkel. Zu den Planetengleichung gehört üblicherweise auch ein Ausdruck für die mittlere Anomalie $M=M_0+n(t-t_0)$ bzw. die mittlere Länge

[1] anschaulich beschrieben etwa bei BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961], pp. 291-296; siehe auch BUCERIUS, H. [1966] pp.187, ff.

$L=M+\omega+\Omega$, so dass über eine Lösung der *Kepler* Gleichung dann auch der Bezug zur Zeit hergestellt werden kann.

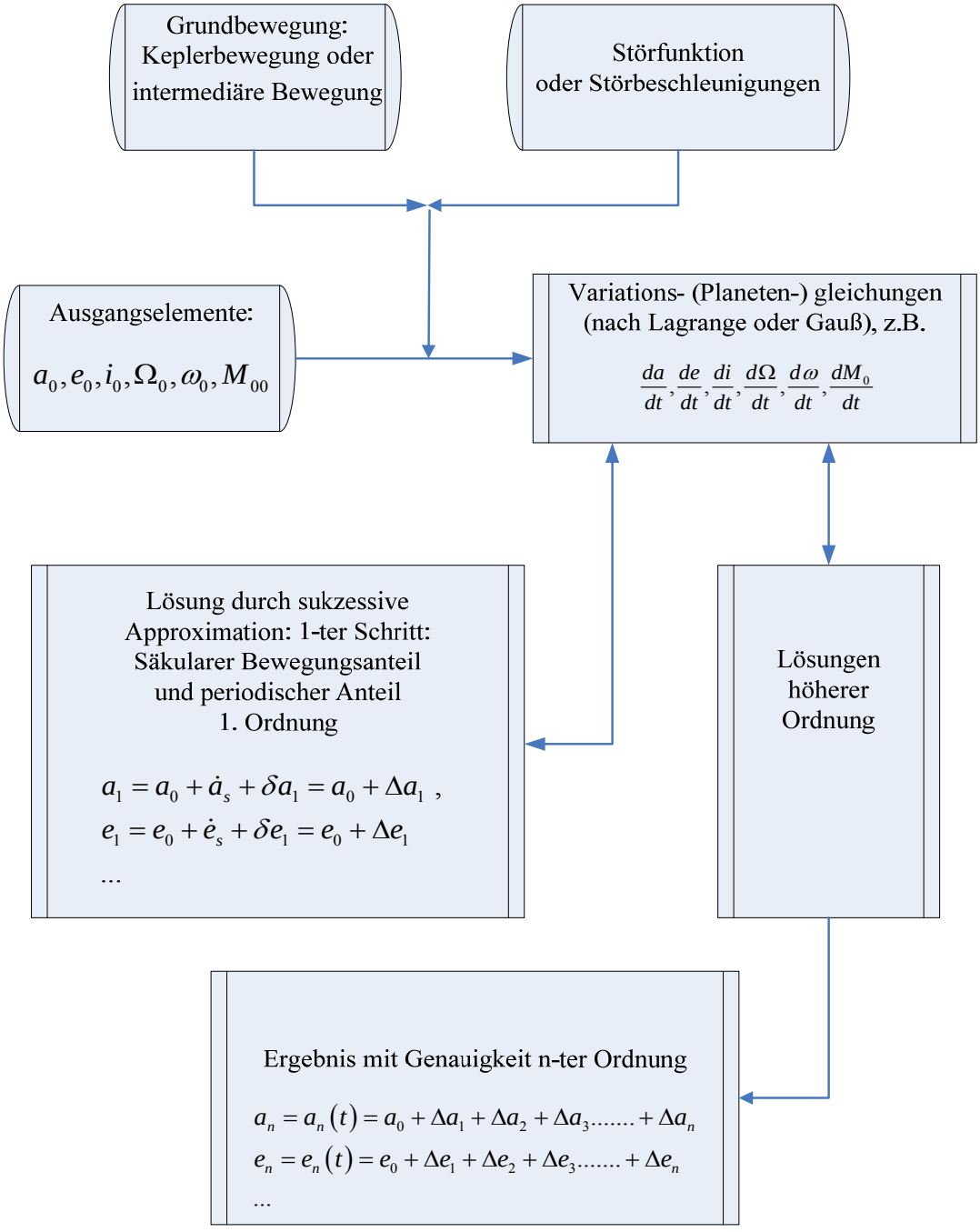


Bild 5-21 : Schematischer Überblick über die Methode der sukzessiven Approximation zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen in der Astrodynamik

Beispiele für Anwendungen dieses Verfahrens sind neben den klassischen Arbeiten für die Bewegung der Planeten (*Euler, Lagrange, Hansen, Delaunay, Hill, Brouwer* u.a.) und die Bewegung des Mondes (*Hansen, Hill, Brown*) die Lösungen des Hauptproblems der Satellitentheorie durch *Brouwer* [1959], *Kozai* [1959], *Garfinkel* [1959], *Vinti* [1959] u.a.. Die letzteren Lösungen sind von erster Störordnung. Erweiterungen auf Lösungen der zweiten Ordnung etwa durch *Kozai* [1962], *Struble* [1961] zeigen bereits den enormen Aufwand für eine

analytische Lösung, die sich kaum noch von Hand mit erträglichem und sicherem Aufwand bearbeiten lässt.

C. F. Gauß verwendete erstmals bei seinen Untersuchungen der Störungen der Bahn des Kleinen Planeten 2/Pallas durch Jupiter[1] Planetengleichungen, bei denen die „Störbeschleunigung" in die Richtungen der drei Achsen des *Leibniz*-Systems zerlegt sind. Auch wenn ursprünglich von *Gauß* die aus der Planetentheorie bekannte Störungsfunktion auf das *Leibniz*-System abgebildet worden war, stellt dieser Ansatz einen wesentlichen Fortschritt gegenüber dem *Lagrange*schen Ansatz dar. Mit dem *Gauß*schen Ansatz können nämlich auch beliebige nicht konservative „Störbeschleunigungen" berücksichtigt werden.

Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes wird in der vorliegenden Arbeit herausgearbeitet, da es damit möglich ist, sich vollständig von der allgemeinen *Kepler*bewegung[2] freizumachen. In der klassischen Anwendung der Methode der Variation der Parameter ist wesentlich, dass es sich bei den Abweichungen von der vorgegebenen Bewegung um kleine Größen handelt. Dies spiegelt sich schon im Begriff „Störungen" wieder, der impliziert, dass diese „Störungen" die vorgegebene Bewegung „etwas" ändern. Diese Einschränkung ist in der Vergangenheit aus rechentechnischen Gründen sinnvoll. Arbeiten wie etwa die von *D. Brouwer* [1959] zeigen, dass auch unter diesen Einschränkungen die Bearbeitung eines Störproblems sehr aufwendig ist und an die Grenze des mit der Hand ohne weitreichende Hilfen durch automatisches Rechnen zu erreichenden Ergebnisses geht. Diese Einschränkung bei der Anwendung der Methode der Variation der Parameter ist allerdings wie die vorliegenden Arbeit zeigt prinzipiell nicht notwendig. Vielmehr ist sie in umfassendem Maße geeignet, beliebige Bewegungsprobleme basierend auf einer beliebigen Ausgangsbewegung zu bearbeiten. Die Methode der Variation der Parameter kann daher für beliebige Bewegungen und in übersichtlicher Weise verwendet werden.

5.7.3 Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung

Das in dem vorliegenden Bericht vorgestellte Verfahren, das auf der Verwendung von *Hansen* Koordinaten beruht, schränkt sich auf die Variation nicht einer allgemeinen Bewegung sondern nur einer ebenen Kurve in der oskulierenden Bahnebene ein. Damit wird an Stelle der beiden allgemeinen vektoriellen Anpassungsgleichungen (5.234) und (5.236) bzw. (5.238) nur die eindimensionale Variation des Radius und der radialen Geschwindigkeit benötigt. Die Oskulationsbedingung (5.233) wird durch die eindimensionale Oskulationsbedingung (5.233) ersetzt, wobei die sich daraus notwendig ergebenden ersten Anpassungsgleichungen in beiden Fällen nach *Lagrange* bzw. nach *Hansen* formal gleich aussehen. Ein Unterschied zeigt sich jedoch in der zweiten Anpassungsgleichung, die im hier untersuchten *Hansen*-Fall auf der *Leibniz*gleichung beruht und daher auf ein mitgeführtes Koordinatensystem bezogen ist. Um diese Bedingungsgleichung herzuleiten muss keine weitere Oskulationsbedingung eingeführt werden, sondern die zweite Anpassungsgleichung ergibt sich notwendig in der Form (5.200). Allerdings verschwindet in diesem Fall die Bedingung der „ungestörten" Bewegung

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} - \frac{G}{r} \tag{5.240}$$

[1] GAUSS, C. F. [1810] ; BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961], p. 302

[2] Als „allgemeine *Kepler*bewegung" werde eine Bewegung bezeichnet, die den drei *Kepler*gesetzen folgt, bei der aber alle Parameter („*Kepler*elemente", manchmal auch als „klassische Elemente" bezeichnet) als variabel angenommen werden. In diesem Fall muss allerdings das 3. *Kepler*sche Gesetz in einer allgemeineren (nicht auf die elliptische Bewegung zu reduzierende) Formulierung verwendet werden.

im Fall beliebiger Kurven nicht notwendig. Dies ist im Fall einer geradlinigen Anpassungskurve der Fall. Bei Kegelschnitten und noch komplizierteren Bahnkurven bleibt ein konstanter Faktor stehen, der bei der Aufstellung der Variationsgleichungen berücksichtigt werden muss. Da eine ebene Kurve in der Regel nur durch zwei Parameter charakterisiert wird, können in der hier vorgestellten Methode die Variationsgleichungen für die zu bestimmenden Parameter durch Lösen eines Systems von zwei linearen Gleichungen aufgestellt werden, sofern nur die zugehörige Koeffizientendeterminante von null verschieden ist. Diese Bedingung muss aber bei linearer Unabhängigkeit der Parameter erfüllt sein. Auch wenn in diesem Verfahren nur zwei Gleichungen als notwendige Folge der Oskulationsbedingung auftreten, ist das Verfahren trotzdem allgemeingültig, da die weiteren Variationsgleichungen durch Variation des Flächenparameters *G*, des räumlichen Rotationswinkels η und damit des räumlichen Bezugs, sowie der Zeitbezug durch $r^2\dot{\zeta} = G$ in jedem Fall gegeben sind. Die hier aufgestellten Variationsgleichungen sind formal von der gewählten Bahnkurve völlig unabhängig, so dass sie zur Lösung (wenn möglich analytisch oder semianalytisch oder sonst numerisch) wiederholt in ein und demselben Bewegungsproblem verwendet werden können. Die für die Berechnung der ebenen Kurve $r = r(\zeta)$ verwendete Bahnebene ist die oskulierende Bahnebene, die bei räumlicher Bewegung mit der Bewegung mit „gebogen“ wird.

Die in diesem Bericht vorgestellte Methode zur Lösung eines Bewegungsproblems besteht aus einer Folge von Variationsgleichungssystemen, deren jeweils neue Parameter Ergebnisse der Lösung der vorhergehenden sind, und die jeweils eine (oder mehrere) weitere Bewegungseinflüsse einschließen. Die Aufgabe besteht darin, die Variationsgleichungen der neuen Parameter aufzustellen und zu integrieren, bis das gesamte vorgegebene Bahnmodell d. h. mit allen bekannten bzw. für eine spezielle Aufgabe benötigten oder gewünschten Bewegungseinflüssen abgearbeitet ist. In jedem Schritt wird ein neues Differentialgleichungssystem aufgestellt. Da die Struktur dieser Differentialgleichungssysteme identisch ist, bereitet die Aufstellung eines solchen neuen Systems keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Daher sollte die Anwendung eines automatisierten Rechnerverfahrens möglich sein. Ein formaler Überblick ist in Bild 5-22 zusammengestellt.

Bemerkenswert erscheint auch, dass die Parameter *G* (Flächenparameter) und η (räumliche Rotation) wie der Bahnradius *r* in jedem Schritt neu errechnet werden, jedoch keine neuen Parameter darstellen. Dies trifft nur auf die Parameter in der Polargleichung des Bahnradius zu.

Der Vorteil dieser Methodik dürfte in einer vereinfachten, eventuell automatisch durchführbaren Integration liegen. Die Methode bietet einen sehr klaren und durchsichtigen Einblick in das Bahnmodell und die Separation der einzelnen Einflüsse, so dass nicht wie üblich das gesamte meist hochkomplizierte Bewegungsmodell in einem einzigen Differentialgleichungssystem gelöst werden muss, was erfahrungsgemäß beliebig kompliziert und undurchschaubar werden kann. Die Folge der Rechenschritte gibt nicht notwendig eine sukzessive Verbesserung der Lösung, da die einzelnen Schritte von der möglicherweise willkürlichen Wahl des jeweils verwendeten Bahnmodells abhängen. Die bestmögliche Lösung in einem gewissen Genauigkeitsrahmen kann erst dann erreicht werden, wenn alle gleichgewichtigen Bewegungseinflüsse abgearbeitet sind.

Mit dieser Methodik sollte auch die Möglichkeit gegeben sein, die Wirkung einzelner Teilkomponenten der Bewegungseinflüsse **unabhängig** von anderen Komponenten zu untersuchen. Dies könnte etwa bei der Beurteilung einzelner Bewegungseinflüsse, der unterschiedlichen Auswirkung auf Bahnform und Bahnebenenorientierung, oder der Untersuchung von Resonanzen von Bedeutung sein.

Um die wechselseitige Auswirkung verschiedener Bewegungseinflüsse zu untersuchen, müssen diese aber insgesamt in die Untersuchung mit einbezogen werden. Sind einmal eine gewisse Anzahl von Bewegungseinflüssen in eine Anpassungskurve eingeflossen, können weitere durch Aufstellen der Anpassungsgleichung und damit ein neues System von Variationsgleichungen zur Berechnung der Parameter einer neuen Anpassungskurve berücksichtigt werden.

Das hier vorgestellte Verfahren kann jeweils in den einzelnen Anpassungs-Schritten ein iteratives Approximationsverfahren erfordern, wie es auch in den klassischen Verfahren üblich ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die einzelnen Variationsgleichungen gekoppelt sind, was über die Beschleunigungskomponenten auch in den meisten Anwendungen der Fall ist. Mit zunehmender Anpassungsdichte, wenn also schon eine größere Anzahl von Teilbeschleunigungen in den Anpassungsvorgang bereits eingebunden sind, wird der Integrationsprozess immer aufwendiger und kann Approximationsmethoden erfordern. Es wird also dem Geschick des Anwenders überlassen bleiben, in welcher Folge der Anpassungsprozess durchgeführt wird. Es wird aber andererseits bei unterschiedlicher Anpassungsfolge auch ein unterschiedlicher Erkenntnisgewinn über die Wirkungen der einzelnen Bewegungseinflüsse direkt zu erkennen sein Dies kann als ein besonderes Charakteristikum dieser Methode angesehen werden.

Um das im vorliegenden Bericht vorgestellte Verfahren mit den klassischen vergleichen zu können, muss bedacht werden, dass es das klassische Verfahren nicht gibt. In der Himmelsmechanik wurden im Verlauf ihrer Geschichte sehr verfeinerte Methoden entwickelt, um einzelne Probleme, historische gesehen allen voran das Drei- und das Mehrkörperproblem in den Griff zu bekommen. Das waren insbesondere die Arbeiten im Anschluss an *L. Euler* von *Lagrange*, *Hamilton* und *Jacobi*, *Delaunay*, *Poisson*, *Poincaré*, in teilweiser Konkurrenz dazu durch *Hansen* und seine Nachfolger. Diese Verfahren bestanden in einer geschickten Auswahl einer Näherungsdarstellung des aktuellen Problems sowie in einer Folge von Koordinatentransformationen. Weiterentwicklungen dieser Verfahren wurden in jüngerer Zeit zur analytischen Lösung des Satellitenproblems eingesetzt (*Brouwer*, *Kozai*, *Vinti*, *Musen* und viele andere). Dabei ist bemerkenswert, dass es „in der praktischen Astronomie selten vorteilhaft ist, absolute Koordinaten zu verwenden“[1]. Im Mehrkörperproblem, für welches das Sonnensystem modellhaft steht, werden relative Koordinaten in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt an Stelle des Baryzentrums des Sonnensystems vorgezogen. Eine Besonderheit sind die *Jacobi*schen Koordinaten im Rahmen des Dreikörperproblems. Sie liefern unterschiedliche intermediäre Bahnen bei Bezug des zweiten Körpers auf den Zentralkörper einerseits und bei Bezug des dritten Körpers auf den Schwerpunkt des ersten und des zweiten Körpers[2].

[1] K. STUMPFF [1965], p.217

[2] Siehe etwa in K. STUMPFF [1965], pp.170-295, auch BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968], p. 62ff, sowie etwa DZIOBEK, O. [1888]; p. 213 ff , BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961], p. 273 ff; CHEBOTAREV, G. S. [1967]: insbesondere pp. 143-231

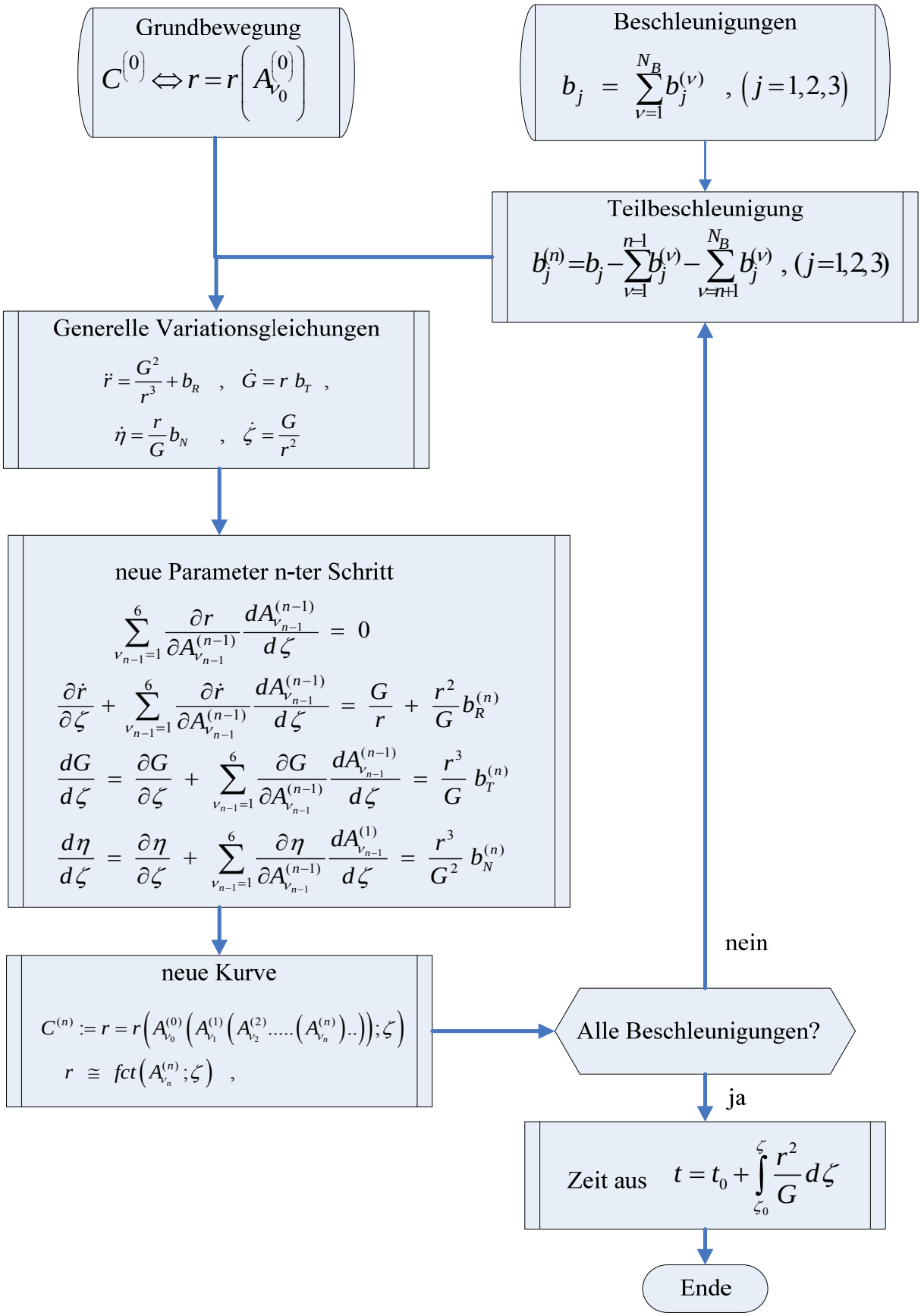


Bild 5-22: Formaler Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung zur Beschreibung eines beliebigen Bewegungsproblems

	Klassische Methoden der Himmelsmechanik	Das Verfahren der schrittweisen Anpassung
Basissystem	Inertiales System	*Hansen*-System
Basisgleichungen	Bewegungsgleichung im inertialen Basissystem	Bewegungsgleichung in Bezug auf das *Leibniz*-System
Bezugsbewegung	*Kepler*bewegung oder andere bekannte Bewegung (z.B. eine intermediäre Bahn)	Geradlinige Bewegung
Anpassungsgleichungen	1. für inertialen Geschwindigkeitsvektor (5.234) 2. für inertialen Beschleunigungsvektor (5.236) bzw. (5.238)	1. für radiale Geschwindigkeit (5.196) 2. für die radiale Beschleunigung (5.200) 3. ergänzende Formeln (5.193): Variation des Flächenparameters und des (versteckten) räumlichen Rotationswinkels, Flächensatz zum Bezug zur Zeit
Näherungsprinzip	Für das Aufstellen der Variationsgleichungen werden analytische Näherungsausdrücke zugrunde gelegt	Vor Beginn der Integration keine Näherung, stattdessen Separation einer geeigneten Beschleunigung, die möglichst ohne Näherungsverfahren bearbeitet werden kann. Näherungsverfahren erst während der Integration, wenn nicht anders bearbeitbar
Variationsgleichungen und ihre Bearbeitung	Einmaliger Ansatz der Variationsgleichungen in den Elementen, rechte Seiten vergleichsweise kleine Größen: „Störungen“; *Lagrange*sche Planetengleichungen (Störfunktion, konservative Kräfte); *Gauß*’sche Planetengleichungen (Beschleunigungskomponenten im *Leibniz*-System) Lösung durch sukzessive Approximation der einmal aufgestellten Planetengleichungen	In allen Schritten neue Aufstellung der Variationsgleichungen ausgehend von der *Leibniz*gleichung sowie den Variationen des Flächenparameters und des zweiten *Hansen* Winkels, alle Bewegungseinflüsse werden in der Folge der Einzelintegrationen nach und nach gleichberechtigt berücksichtigt
Separation der Bewegungseinflüsse	Nach Möglichkeit werden säkulare Bewegungseinflüsse als erstes berücksichtigt und die säkular „gestörten Elemente“ als Variable bei der Berücksichtigung periodischer „Störungen“	Die einzelnen Bewegungseinflüsse (Teilbeschleunigungen) werden in grundsätzlich willkürlicher Weise separiert und in Einzelschritten integriert. Die jeweils neu aufzustellenden Va-

	verwendet	riationsgleichungen sind formal identisch.
Integrationsvariable	Zeit, gewöhnlich ersetzt durch eine Anomalie (wahre oder exzentrische oder mittlere Anomalie), bisweilen auch *Hansen*scher Bahnwinkel	In allen Fällen *Hansens*cher Bahnwinkel
Bewegung im Raum	Inklination und Knoten (Rektaszension bzw. eklipt. Länge) sind untrennbarer Bestandteil der Bahnelemente und definieren die Zuordnung der Bewegung zu einem inertialen Raum. [Allerdings ist der Knoten weder Bestandteil einer Störfunktion noch der Ergebnisdarstellungen]	Die Bewegung im Raum wird ausschließlich über die Bewegung des zweiten *Hansen*-Winkels (der Rotation um den momentanen Ortsvektor) bestimmt. Durch zusätzliche Integration können Knoten und Inklination erhalten werden.
Darstellung der Ergebnisse	Reihendarstellung in den Bahnelementen (*Kepler*elemente, nichtsinguläre Elemente, kanonische Elemente, Positionselemente), die Bestandteile eines Zustandsvektors in einem inertialen Raum sind	In jedem Einzelschritt rein geometrisch eine Bahnkurve, die das bisher berücksichtigte Bahnmodell (=Summe der erfassten Beschleunigungen) einschließt: Darstellung im *Leibniz*-System, erst nach Abschluss des gesamten Integrationsprozesses Bezug auf ein inertiales System
Zeitzuordnung	Je nach Verfahren wird der Zeitbezug durch einmalige oder wiederholte Anwendung der *Kepler* Gleichung aus der mittleren Anomalie berechnet	Nach Abschluss des gesamten Integrationsprozesses wird der Zeitbezug durch einmalige Integration des Flächensatzes hergestellt

Tabelle 5-2: Einige wesentliche Unterschiede zwischen den klassischen Verfahren und dem in dem vorliegenden Bericht erarbeiteten neuen Integrationsverfahren

Allen diesen Verfahren gemeinsam ist die Grundlage einer schon recht guten Ausgangsnäherung in Form einer *Kepler*bahn (Kegelschnitt) oder einer geeigneten intermediären Bahn.

Dies ist auch im originalen von *Hansen* geschaffenen Verfahren der Fall, zu dem er seine idealen Koordinaten eingeführt hatte. Das im vorliegenden Bericht vorgeschlagene Verfahren ist wesentlich elementarer und allgemeiner, ersetzt aber nicht notwendig die mathematisch anspruchsvollen Verfahren in den himmelsmechanischen Spezialfällen. Die Verfahren überlappen sich also, sie lassen sich nicht gegeneinander ausspielen. Gleichwohl soll versucht werden in der folgenden Tabelle 5-2 einige charakteristische Eigenschaften zusammenzustellen, welche die beiden Verfahren grundsätzlich unterscheiden.

5.8 Schrittweise Integration mit Hilfe beliebiger Anpassungen

In diesem Abschnitt wird das Verfahren der schrittweisen (nicht iterativen!) Integration der Bewegungsgleichungen eines allgemeinen Bewegungsvorganges detailliert beschrieben und anschließend durch zwei Beispiele erläutert. Weitere Beispiele werden in Kapitel 18 (Band III) vorgestellt.

Als Ergebnis eines Anpassungsvorganges wird eine Bahnkurve

$$C \equiv r = r(A_i;\zeta)$$

erhalten, deren Parameter von einem Bewegungsmodell beeinflusst werden und in Abhängigkeit von der Position des bewegten Körpers in der Bahn variiert werden, für die daher die Variationsgleichungen

$$\dot{A}_i = \dot{A}_i(A_i,b_j;t) \quad bzw. \quad \frac{dA_i}{d\zeta} = fct\left(A_i,b_j;\zeta\right)$$

gelten. Diese Variationsgleichungen können in der klassischen Weise simultan integriert werden und geben Lösungen für die Parameter A_i, so dass die Kurve C in Abhängigkeit von den variierten A_i die Bewegung im Rahmen des berücksichtigten Bewegungsmodells perfekt angepasst beschreibt.

Die bisher in diesem Abschnitt vorgestellte Theorie der (allgemeinen) Anpassung beliebiger Bewegungen durch beliebige Bahnkurven legt aber auch eine modifizierte Methodik der Integration der Bewegungsgleichungen nahe, die im Folgenden allgemein andiskutiert und im anschließenden Abschnitt 5.9 durch Beispiele veranschaulicht werden soll.

Grundbewegung

Der gesamte Bestimmungsprozess der betrachteten Bewegung basiert auf einer Grundbewegung, auf die jeder der einzelnen folgenden Integrationsschritte im Rahmen der Bewegungsannäherungen bezogen werden muss.

Die Grundbewegung verlaufe längs der vorgegebenen Raumkurve

$$C^{(0)} \equiv r = r(A_i^{(0)};\zeta) \tag{5.241}$$

mit den charakterisierenden in der Grundbewegung als konstant angenommenen Parametern $A_i^{(0)}$, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und als unabhängiger Variablen dem Bahnwinkel ζ. Die Bewegung längs der Kurve $C^{(0)}$ werde in einem mitgeführten Bahnsystem beschrieben. Sie hat nach Formel (5.198) die radiale Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_i^{(0)};\zeta\right) \quad mit \quad \frac{dr}{d\zeta} = fct\left(A_i^{(0)};\zeta\right) \quad . \tag{5.242}$$

Der Bahnwinkel ζ sei in einem *Hansen*-idealen Raum gegeben. Der Bezug zur Zeit wird über den Flächenparameter G und dem Zeitintegral

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad , \quad \zeta = \zeta_0 + \int \frac{G}{r^2}\,dt \tag{5.243}$$

hergestellt. Hier ist der „Flächenparameter“ G einer der Parameter der Bewegung, der in der Grundbewegung als konstant angesetzt werden muss. Damit ist in Ergänzung dazu auch die transversale Geschwindigkeit

$$r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} \tag{5.244}$$

bekannt. Die Bewegung hat im mitgeführten Bahnsystem den Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \end{aligned} \tag{5.245}$$

wobei das mitgeführte $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Bahnsystem wie üblich auf das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \end{aligned} \tag{5.246}$$

zurückgeführt werden kann. Dieses kann wiederum auf ein inertiales Basissystem, etwa ein Äquator- oder Ekliptiksystem bezogen werden. Der Flächenparameter *G* zählt ebenso zu den charakteristischen Parametern („Elementen“) einer Bewegung wie der Anfangswert ζ_0 und die Rotationswinkel *i, Ω, ,* welche die Drehung in das inertiale Basissystem beschreiben. Wie in jedem Bewegungsvorgang, der in einem euklidischen Raum dargestellt werden kann, sind genau 6 unabhängige Parameter $A_i^{(0)}$ zur Beschreibung der Bewegung erforderlich.

Anmerkungen: 1. Anstatt eine geradlinige Bewegung als Grundbewegung zu wählen könnte jede beliebige andere Bewegung mit Ausnahme der Kreisbewegung gewählt werden. Für den allgemeinsten Fall ist jedoch von jeder Beschleunigung abzusehen, es wird also mit der geradlinigen Bewegung begonnen. Damit sollte es dann auch möglich sein, den Einfluss irgendeiner Beschleunigung (und damit irgendeiner Kraft) auf eine Bewegung speziell zu untersuchen. ◀

2. Der (Flächen-) Parameter *G*, der in der allgemeingültigen Variationsgleichung $\dot{G} = r\,b_T$ und im Zeitintegral $\mathrm{r}^2\dot{\zeta} = \mathrm{G}$ erscheint, charakterisiert einen bestimmten Bewegungsvorgang wie auch der Radius *r*, die radiale Variation $\dot{r}$, die transversale Variation $\mathrm{r}\dot{\zeta}$, usw.. Er muss somit für jeden Bewegungsvorgang wie die Parameter $\mathrm{r}, \dot{\mathrm{r}}, \mathrm{r}\dot{\zeta}, \ldots$ und im Fall einer räumlichen Bewegung mit $\dot{\eta}$ neu bestimmt werden, wird somit eine Funktion der Integrationskonstanten $A_i^{(0)}$ werden. Er muss in jeder neuen Bewegungsannäherung neu aus $\dot{G} = r\,b_T$ bestimmt werden. ◀

1. Bewegungsannäherung

Es werde angenommen, dass die Komponenten b_j der Bewegungseinflüsse als Kombination aus einzelnen Teileinflüssen dargestellt werden können (was in der Praxis gewöhnlich auch der Fall ist]:

$$b_j = \sum_{\nu=1}^{N} b_j^{(\nu)} \quad . \tag{5.247}$$

Aus dem allgemeinen Bewegungsmodell b_j werde eine geeignete oder besonders einflussreiche oder besonders wichtige oder vielleicht auch mathematisch besonders einfach zu handhabende Beschleunigung

$$b_j^{(1)} \;:=\; b_j - \sum_{\nu=2}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.248}$$

ausgewählt. N ist die Maximalanzahl aller den betrachteten Bewegungsvorgang beeinflussenden Beschleunigungen.

Werden auf die Grundbewegung die Beschleunigungen $b_j^{(1)}$, die etwa die bekannte Zerlegung im mitgeführten Bahnsystem haben können

$$b_1^{(1)} := b_R^{(1)} \;,\; b_2^{(1)} := b_T^{(1)} \;,\; b_3^{(1)} := b_N^{(1)} \;, \tag{5.249}$$

ausgeübt, können die Parameter $A_i^{(0)}$ nach der Methode der Variation der Parameter jetzt als variabel aufgefasst werden. Es gibt dann die Variationsgleichungen zur Bestimmung der Parameter $A_i^{(0)}$

$$\dot{A}_i^{(0)} \;=\; fct\left(A_k^{(0)}; b_j^{(1)}; t\right) \;,\; i,k \le 6 \;,\; j = 1,2,3 \tag{5.250}$$

bzw.

$$\frac{dA_i^{(0)}}{d\zeta} \;=\; fct\left(A_k^{(0)}; b_j^{(1)}; \zeta\right) \quad , \; i,k \le 6 \;,\; j = 1,2,3 \quad . \tag{5.251}$$

Diese Variationsgleichungen werden aus den beiden Anpassungsgleichungen (5.196) und (5.200) mit $r^2\,\dot{\zeta} = G$

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial r}{\partial A_i^{(0)}} \frac{dA_i^{(0)}}{d\zeta} &= 0 \\ \sum_i \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_i^{(0)}} \frac{dA_i^{(0)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_R^{(1)} \quad . \end{aligned} \tag{5.252}$$

hergeleitet, sowie den generellen Variationsgleichungen (vgl. das System (5.193) auf Seite 142)

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G}\, b_T^{(1)} \\ \frac{d\eta}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2}\, b_N^{(1)} \\ \dot{\zeta} &= \frac{G}{r^2} \quad , \end{aligned} \tag{5.253}$$

wobei G jetzt als Funktion von ζ angenommen werden muss. Die Orientierung im Raum ist durch die Raumwinkel bezogen auf das inertiale Basissystem[1] aus den Gleichungen

[1] vgl. etwa das Formelsystem (4.391)

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= \dot{\eta}\cos u \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin u \end{aligned} \tag{5.254}$$

(u = Argument der Breite) bekannt. Die Integration des Systems (5.251) ergibt die sechs jetzt als variabel angenommenen Parameter $A_i^{(0)}$ der Grundbewegung als Funktionen der verwendeten Beschleunigungen $b_j^{(1)}$, des Bahnwinkels ζ sowie von neuen Konstanten, die mit $A_i^{(1)}$ bezeichnet werden sollen

$$A_{i_0}^{(0)} = fct\left(A_{i_1}^{(1)}; b_j^{(1)}; \zeta\right) \quad , \quad i_0, i_1 = 1,2,3,..,6,\ j = 1,2,3 \quad . \tag{5.255}$$

Hier soll der Index i_1 andeuten, dass die „alten" Parameter $A_{i_0}^{(0)}$ jetzt Funktionen **aller** „neuen" Parameter $A_{i_1}^{(1)}$ sind. Werden diese Parameter in die Grundbewegung eingesetzt, ergibt sich die Bewegung längs der **neuen** Kurve

$$C^{(1)} \equiv r = r\left(A_{i_1}^{(1)}; \zeta\right) \tag{5.256}$$

mit der radialen Geschwindigkeitskomponente

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\right); \zeta\right)\frac{G}{r^2} \quad , \quad G = G\left(A_{i_1}^{(1)}; \zeta\right) \tag{5.257}$$

und der transversalen Geschwindigkeitskomponente

$$r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = fct\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\right); \zeta\right) \quad , \quad G = G\left(A_{i_1}^{(1)}; \zeta\right) \quad . \tag{5.258}$$

Die Zustandsvektoren dieser Bewegung sind mit diesen $r, \dot{r}, r\dot{\zeta}$ wie im System (5.245) bekannt, wenn das mitgeführte System über die Gleichungen (5.246) und die $\mathbf{q}_j$ mit den Raumwinkeln i, Ω bekannt sind. Diese Größen werden je nach Bahnmodell (d.h. den für die Anpassung herangezogenen Beschleunigungen $b_j^{(\nu)}$) in jedem Bewegungsannäherungsschritt neu berechnet. Den Bezug zur Zeit liefert das Zeitintegral

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{G}{r^2}\,dt \quad . \tag{5.259}$$

Diese Bewegung erfüllt exakt das hier verwendete Bewegungsmodell

$$b_j^{(1)} = b_j - \sum_{\nu=2}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3)$$

Es muss wieder darauf hingewiesen werden, dass mit der hier gefundenen Bewegung nur ein – recht willkürlich ausgewählter – Teil des gegebenen Bewegungsproblems erfasst ist. Der ganze Prozess muss also in vielen Schritten bearbeitet werden.

2. Bewegungsannäherung

Bisher wurden die Beschleunigungen

$$b_j - b_j^{(1)} = \sum_{\nu=2}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3)$$

im Anpassungsprozess nicht berücksichtigt. Bei einem nächsten Schritt mögen (willkürlich) die Beschleunigungen

$$b_j^{(2)} \;=\; b_j - b_j^{(1)} \;-\; \sum_{\nu=3}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.260}$$

ausgewählt werden. Sie haben etwa im mitgeführten Bahnsystem die Darstellungen

$$b_R^{(2)} \;,\; b_T^{(2)} \;,\; b_N^{(2)} \quad . \tag{5.261}$$

Jetzt wird auf die im ersten Schritt konstant gehaltenen Parameter $A_i^{(1)}$ die Variation der Parameter angewendet. Dies führt auf die beiden Anpassungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i_1} \frac{\partial r}{\partial A_{i_1}^{(1)}} \frac{dA_{i_1}^{(1)}}{d\zeta} \;&=\; 0 \\ \sum_{i_1} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_1}^{(1)}} \frac{dA_{i_1}^{(1)}}{d\zeta} \;&=\; \frac{r^2}{G} b_R^{(2)} \quad . \end{aligned} \tag{5.262}$$

Der Flächenparameter G ist bei Kenntnis der Kurve $C^{(1)}$ aus Beziehung (5.256) mit Beziehung (5.258) aus dem Ausdruck

$$G \;=\; G\left(A_{i_1}^{(1)}; \zeta\right) \tag{5.263}$$

gegeben. In dem Gleichungssystem (5.262) zeigt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft bei der Durchführung dieses Verfahrens: es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial A_{i_1}^{(1)}} \;&=\; \sum_{i_0} \frac{\partial r}{\partial A_{i_0}^{(0)}} \frac{\partial A_{i_0}^{(0)}}{\partial A_i^{(1)}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_1}^{(1)}} \;&=\; \sum_{i_0} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_0}^{(0)}} \frac{\partial A_{i_0}^{(0)}}{\partial A_i^{(1)}} \quad . \end{aligned} \tag{5.264}$$

Da der Grundbezug stets auf die in der Grundbewegung gewählte Bewegung längs der Kurve $C^{(0)}$ aufrechterhalten wird und eine neue Kurve durch Variation von ineinander geschachtelten Parametern sukzessive erhalten wird, sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial A_{i_0}^{(0)}} \;,\; \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_0}^{(0)}}$$

auch im zweiten Schritt identisch mit den im ersten Schritt errechneten. Es muss also im zweiten Schritt nur noch die Variation

$$\frac{\partial A_{i_0}^{(0)}}{\partial A_{i_1}^{(1)}}$$

neu gerechnet werden. Dadurch wird der formale Rechenprozess wesentlich vereinfacht.

Aus den beiden Anpassungsgleichungen (5.262) werden die Variationsgleichungen

$$\frac{dA_{i_1}^{(1)}}{d\zeta} \;=\; fct\left(A_{i_1}^{(1)}; \zeta\right) \tag{5.265}$$

erhalten. Die weiteren Variationsgleichungen sind wie im System (5.253) des ersten Schrittes

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(1)}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left(b_T^{(1)} + b_T^{(2)}\right) \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(1)}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(2)} \\
\frac{d\eta}{d\zeta} &= \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \eta}{\partial A_k^{(1)}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2}\left(b_N^{(1)} + b_N^{(2)}\right) \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \eta}{\partial A_k^{(1)}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(2)} \\
\dot{\zeta} &= \frac{G}{r^2} \quad ,
\end{aligned} \tag{5.266}$$

die ebenfalls zur Liste der jetzt als variabel angenommenen Parameter $A_{i_1}^{(1)}$ beitragen. Damit erhält man die Lösung in Abhängigkeit von neuen konstanten Parametern $A_{i_2}^{(2)}$ und dem Bahnwinkel ζ

$$A_{i_1}^{(1)} \;=\; fct\left(A_{i_2}^{(2)}; b_j^{(2)}; \zeta\right) \quad , \quad i_1, i_2 = 1, 2, ..., 6,\; j = 1, 2, 3 \;. \tag{5.267}$$

Dies eingesetzt in die Kurve $C^{(1)}$ führt auf die neue Kurve

$$C^{(2)} \;:=\; r = r\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \;\cong\; r(A_{i_2}^{(2)}; \zeta) \quad , \tag{5.268}$$

welche das Bewegungsmodell

$$b_j^{(1)} + b_j^{(2)} \;=\; b_j - \sum_{\nu=3}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.269}$$

exakt erfüllt. Die radiale Geschwindigkeitskomponente lautet

$$\dot{r} \;=\; \dot{r}\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \;\cong\; fct\left(A_{i_2}^{(2)}; \zeta\right) \quad . \tag{5.270}$$

Die transversale Geschwindigkeitskomponente folgt mit bekannten *r* und variablen *G* aus

$$r\dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r} \;=\; fct\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \quad , \quad G = G\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}\right); \zeta\right) \tag{5.271}$$

die Kenntnis des mitgeführten Bahnsystems $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ bzw. des *Hansen*-idealen bewegungsbezogenen Bahnsystems mit den mit Hilfe von η berechneten Raumwinkeln i, Ω . Den Bezug zur Zeit liefert das Zeitintegral

$$\zeta \;=\; \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{G}{r^2}\, dt \quad . \tag{5.272}$$

k. Bewegungsannäherung

Das bisher speziell besprochene Schema kann nun verallgemeinert angewandt werden, bis alle Komponenten der Bewegungseinflüsse b_j abgearbeitet sind. Zunächst werden die Beschleunigungsanteile

$$b_j^{(k)} \;=\; b_j - \sum_{\nu=1}^{k-1} b_j^{(\nu)} - \sum_{\nu=k+1}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.273}$$

gewählt. Sie haben im mitgeführten Bahnsystem die Beschleunigungen

$$b_R^{(k)} \;,\; b_T^{(k)} \;,\; b_N^{(k)} \quad . \tag{5.274}$$

Wenn in der (k-1) ten Bewegungsannäherung die Parameter $A_{i_{k-1}}^{(k-1)}$ als Konstante erhalten wurden, können die beiden Anpassungsgleichungen für den k-ten Schritt durch Anwendung der Methode der Variation der Parameter auf diese Parameter erhalten werden:

$$\begin{aligned} \sum_{i_{k-1}} \frac{\partial r}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \frac{dA_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{d\zeta} &= 0 \\ \sum_{i_{k-1}} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \frac{dA_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_R^{(k)} \quad . \end{aligned} \tag{5.275}$$

Sind die Parameter $A_{i_{k-2}}^{(k-2)}$ die im (k-1) ten Schritt neu berechneten variablen Parameter, sind in

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} &= \sum_{i_{k-2}} \frac{\partial r}{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}} \frac{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} &= \sum_{i_{k-2}} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}} \frac{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \end{aligned} \tag{5.276}$$

die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}}, \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}}$$

aus dem (k-2) ten Schritt bekannt. Es muss also im (k-1) ten Schritt nur noch die Variation

$$\frac{\partial A_{i_{k-2}}^{(k-2)}}{\partial A_{i_{k-1}}^{(k-1)}}$$

neu gerechnet werden.

Aus den beiden Anpassungsgleichungen können die beiden Variationsgleichungen

$$\frac{dA_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{d\zeta} = fct\left(A_{i_{k-1}}^{(k-1)}; \zeta\right) \tag{5.277}$$

aufgestellt werden neben den weiteren Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1} \frac{\partial G}{\partial A_j^{(k-1)}} \frac{dA_j^{(k-1)}}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T^{(k)} \quad . \\ \sum_{j=1} \frac{\partial \eta}{\partial A_j^{(k-1)}} \frac{dA_j^{(k-1)}}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2} b_N^{(k)} \quad . \\ \dot{\zeta} &= \frac{G}{r^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.278}$$

Die Lösungen sind die

$$A_{i_{k-1}}^{(k-1)} = fct\left(A_{i_k}^{(k)}; b_j^{(k)}; \zeta\right) \quad , \quad i = 1,2,...,6,\; j = 1,2,3 \tag{5.279}$$

mit den neuen Konstanten $A_{i_k}^{(k)}$ und der neuen Kurve

$$C^{(k)} := r = r\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}.....\left(A_{i_k}^{(k)}\right)..\right)\right);\zeta\right) \cong fct\left(A_{i_k}^{(k)};\zeta\right) \quad , \tag{5.280}$$

welche das Bewegungsmodell

$$\sum_{\nu=1}^{k} b_j^{(\nu)} = b_j - \sum_{\nu=k+1}^{N} b_j^{(\nu)} \quad , \quad \left(j=1,2,3\right) \tag{5.281}$$

exakt erfüllt. Die radiale Geschwindigkeitskomponente lautet

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}.....\left(A_{i_k}^{(k)}\right)..\right)\right);\zeta\right) \cong fct\left(A_{i_k}^{(k)};\zeta\right) \quad . \tag{5.282}$$

Die transversale Geschwindigkeitskomponente folgt mit bekannten r und $G^{(k)}$ (welcher einer der neuen Parameter ist) aus

$$r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = fct\left(A_{i_0}^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_{i_2}^{(2)}.....\left(A_{i_k}^{(k)}\right)..\right)\right);\zeta\right) \cong fct\left(A_{i_k}^{(k)};\zeta\right) \quad . \tag{5.283}$$

Die Raumwinkel i,Ω lassen sich wieder mit Kenntnis der Rotation $\dot{\eta}$ berechnen, so dass die Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{5.284}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \end{aligned} \tag{5.285}$$

bekannt sind. Die Berechnung der $\mathbf{q}_j^{(I)}$ etwa aus den als inertial angenommenem Äquatorsystem wird in Kapitel 6 gezeigt. Den Bezug zur Zeit liefert das Zeitintegral

$$\zeta = \zeta_0 + \int_t^t \frac{G}{r^2}\,dt \quad . \tag{5.286}$$

Nach k Schritten können die Parameter $A_i^{(0)}$ der Ausgangslösung durch eine Funktionenfolge der Parameter der einzelnen Rechenschritte dargestellt werden:

$$A_{i_0}^{(0)} = A_i^{(0)}\left(A_{i_1}^{(1)}\left(A_i^{(2)}\left(.....A_{i_{k-1}}^{(k-1)}\left(A_{i_k}^{(k)}\right)\right)\right)\right) \quad . \tag{5.287}$$

Jeder Parameter

$$A_{i_j}^{(j)} \ (i=1,2,..,6;\ j=0,1,2,...)$$

darf im gesamten Integrationsprozess nur genau einmal für die Anwendung der Methode der Variation der Parameter einbezogen werden. Allerdings werden in einem Einzelschritt gewöhnlich nicht alle 6 Parameter als zu variierende Parameter verwendet. Ein solcher Parameter kann in den folgenden Schritten unverändert übernommen werden, bis er in einem Anpassungsvorgang zum Einsatz kommt. Dann allerdings wird er als eine Variable verwendet, die sich als eine Funktion von Parametern darstellen lassen muss, die in späteren Schritten wiederum selbst zu Variablen werden können.

In ähnlicher Weise darf selbstverständlich auch jeder Beschleunigungsanteil $b_j^{(k)}$ nur einmal zum Einsatz gebracht werden.

Die innersten Parameter $A_{i_k}^{(k)}$, welche am Ende des Anpassungsprozesses als Konstante stehen bleiben, können als die „Anfangselemente“ der Bewegung bezeichnet werden.

BEISPIEL: In der von *Brouwer*[1] entwickelten analytischen Theorie der Satellitenbewegung unter Berücksichtigung der zonalen Koeffizienten (J_2, - J_5) eines Zentralkörpers (z.B. das Erdfeld) sind die mittleren *Kepler*elemente $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}$ zu einer Epoche t_0 derartige innerste Parameter im Sinne der in diesem Bericht vorgestellten Theorie der wiederholten Anpassung einer beliebigen Bewegung in der Astrodynamik. ◀

Zusammenfassung

Die hier vorgestellte Methode zur Lösung eines Bewegungsproblems besteht aus einer Folge von Variationsgleichungssystemen, deren jeweils neue Parameter Ergebnisse der Lösung der vorhergehenden sind, und die jeweils eine (oder mehrere) weitere Bewegungseinflüsse einschließen. Die Aufgabe besteht darin, die Variationsgleichungen der neuen Parameter aufzustellen und zu integrieren, bis das gesamte vorgegebene Bahnmodell (d. h. alle bekannten Bewegungseinflüsse) abgearbeitet ist.

Der Vorteil dieser Methodik dürfte in einer vereinfachten, eventuell automatisch durchführbaren Integration liegen. Die Methode bietet einen sehr klaren und durchsichtigen Einblick in das Bahnmodell und die Separation der einzelnen Einflüsse, so dass nicht wie üblich das gesamte meist hochkomplizierte Bewegungsmodell in einem Differentialgleichungssystem gelöst werden muss, was erfahrungsgemäß beliebig kompliziert und undurchschaubar werden kann. Die Folge der Rechenschritte gibt nicht notwendig eine sukzessive Verbesserung der Lösung, da die einzelnen Schritte von der möglicherweise willkürlichen Wahl des jeweils verwendeten Bahnmodells abhängt. Die bestmögliche Lösung in einem gewissen Genauigkeitsrahmen kann erst dann erreicht werden, wenn alle gleichgewichtigen Bewegungseinflüsse abgearbeitet sind.

Mit dieser Methodik sollte auch die Möglichkeit gegeben sein, die Wirkung einzelner Teilkomponenten der Bewegungseinflüsse **unabhängig** von anderen Komponenten zu untersuchen. Dies könnte etwa bei der Beurteilung einzelner Bewegungseinflüsse, der unterschiedlichen Auswirkung auf Bahnform und Bahnebenenorientierung, oder der Untersuchung von Resonanzen von Bedeutung sein. Um die wechselseitige Auswirkung verschiedener Bewegungseinflüsse zu untersuchen, müssen diese aber insgesamt in die Untersuchung mit einbezogen werden. Sind einmal eine gewisse Anzahl von Bewegungseinflüssen in eine Anpassungskurve eingeflossen, können weitere durch Aufstellen der Anpassungsgleichung und damit ein neues System von Variationsgleichungen zur Berechnung der Parameter einer neuen Anpassungskurve berücksichtigt werden.

Das hier vorgestellte Verfahren muss aber dann iterativ angewendet werden, wenn die einzelnen Variationsgleichungen gekoppelt sind, was über die Beschleunigungskomponenten auch üblicherweise der Fall ist.

[1] BROUWER, D. [1959] und [1961]

5.9 Beispiele zur Demonstration des Integrationsverfahrens

Das im vorherigen Abschnitt andiskutierte allgemeine Verfahren zur Integration von Bewegungsproblemen mit schrittweiser Anpassung soll in diesem Abschnitt mit einigen charakteristischen Beispielen etwas eingeübt werden. Weitere Beispiele sind in der Herleitung des Verfahrens[1] enthalten, andere folgen in späteren Abschnitten[2].

5.9.1 Schub in radialer Richtung

Zur Einübung des in diesem Kapitel entwickelten Verfahrens zur Lösung von Bewegungsproblemen wird ein Beispiel aus den Grundlagen der Himmelsmechanik vollständig durchgeführt. Zur Vorbereitung werden die grundlegenden Formeln des Verfahrens im Hinblick auf dieses Beispiel und zur eventuellen Durchführung möglicher alternativer Untersuchungen (in Bezug auf transversale und/oder normale Beschleunigungen) zusammengestellt.

5.9.1.1 Die Grundgleichungen

Die Anpassung einer beliebigen Bewegung im Rahmen von *Hansen* Systemen kann durch das folgende Gleichungssystem für Bahnradius, radiale und transversale Geschwindigkeit beschrieben werden (mit den Formeln (5.105) und (5.106)]:

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \\ V_R &= \dot{r} = g_1 \sin\zeta - g_2 \cos\zeta \\ V_T &= r\,\dot{\zeta} = g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{5.288}$$

Hier sind G der Flächenparameter, g_1, g_2 im Fall geradliniger Bewegung konstante Parameter, ζ ist der *Hansen*sche Bahnwinkel. Der Flächenparameter genügt dem Flächensatz

$$r^2\,\dot{\zeta} = G \quad . \tag{5.289}$$

Er stellt den Bezug des Bahnwinkels zur Zeit her. In der Basisebene eines *Hansen* Systems, in dem die Bewegung beschrieben wird, wirken nur radiale b_R und transversale Beschleunigungen b_T auf das bewegte Objekt. Um ihre Wirkungen auf die Bahnkurve zu beschreiben, müssen im Rahmen einer Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung die Parameter g_1, g_2, G als Variable angenommen werden , die von den Beschleunigungen b_R, b_T geprägt werden. Aus der Oskulationsbedingung (*Lagrange* Bedingung[3])

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} \quad , \tag{5.290}$$

die sich als Folge des Bezugs auf ein *Hansen* System darstellen lässt[4], folgt die erste Anpassungsgleichung

$$\frac{\partial r}{\partial g_1}\frac{dg_1}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial g_2}\frac{dg_2}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = 0. \tag{5.291}$$

---

[1] Abschnitt 5.2.5, 5.2.7, 5.4, 5.5

[2] siehe etwa in Kapitel 17 (Band III)

[3] Siehe hierzu auch EFROIMSKY, M. [2005]

[4] Satz H25 in Abschnitt 5.6.4 ab Seite 142

Die zweite Anpassungsgleichung folgt aus der *Leibniz* Gleichung, wenn diese auf den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable bezogen wird, was mit Hilfe des Flächensatzes (5.289) durchgeführt werden kann. Man erhält:

$$\frac{d\dot{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_1}\frac{dg_1}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_2}\frac{dg_2}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_R \quad . \tag{5.292}$$

Eine zentrale Folgerung aus dem Anpassungsprozess zeigt sich in dieser Gleichung. Die **radiale Beschleunigung** möge in eine Folge von n_R Teilbeschleunigungen zerlegt werden:

$$b_R = \sum_{\nu=1}^{n_R} b_R^{(\nu)} \quad . \tag{5.293}$$

Die *Leibniz* Gleichung in der Form (5.292) werde mit einer Teilfolge der radialen Beschleunigungen bearbeitet:

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + \sum_{\nu=1}^{\nu_R} b_R^{(\nu)} \quad . \tag{5.294}$$

Die Lösung $r = r(\zeta)$ ist eine (Bahn-) Kurve, die den Anpassungsgleichungen (5.291) und (5.292) genügt und somit notwendig gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} \sum_{\nu=1}^{\nu_R} b_R^{(\nu)} \quad . \tag{5.295}$$

Die zweite Anpassungsgleichung wird dadurch wesentlich vereinfacht: als radiale Beschleunigung tritt nur die im zuvor durchgeführten Anpassungsprozess bisher nicht verwendete radiale Beschleunigung $b_R^{(\nu_R+1)}$ auf. Die Gleichung (5.292) wird reduziert auf

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial g_1}\frac{dg_1}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_2}\frac{dg_2}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_R^{(\nu_R+1)} \quad . \tag{5.296}$$

Weitere Beschleunigungen $b_R^{(\nu)}$ mit $\nu > \nu_R + 1$ werden in dem neuen Schritt nicht berücksichtigt um eine neue Anpassungskurve $r = r(\zeta)$ zu erhalten. Auf diese Weise wird ersichtlich, dass jede Teilbeschleunigung $b_R^{(\nu)}$ nur einmal verwendet werden darf, da sie einer bestimmten Bahnkurve zugeordnet ist.

Im allgemeinen Fall kann nach Lösung eines Bewegungsproblems Gleichung (5.202) in jedem Teilschritt als Kontrollausdruck zur Beurteilung der Richtigkeit der Lösung verwendet werden. Im vorliegenden Fall einer geradlinigen Bewegung als Ausgangskurve ist die Bedingung (5.202) sicherlich erfüllt:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} \quad . \tag{5.297}$$

Der Flächenparameter ist ausschließlich von einer transversalen Beschleunigung beeinflusst:

$$\dot{G} = r\, b_T \quad , \quad \frac{dG}{d\zeta} = \frac{\dot{G}}{\dot{\zeta}} = \frac{r^3}{G} b_T \quad . \tag{5.298}$$

Mit diesem Ausdruck für $dG/d\zeta$ und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial g_1} = -\frac{r^2}{G}\cos\zeta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial g_2} = -\frac{r^2}{G}\sin\zeta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial G} = \frac{r}{G} \quad ,$$
$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial g_1} = \sin\zeta \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_2} = -\cos\zeta \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial G} = 0 \tag{5.299}$$

führen die beiden Anpassungsgleichungen (5.291) und (5.292) auf ein lineares Gleichungssystem in den beiden Variationen $dg_1 / d\zeta , dg_2 / d\zeta$ mit den Lösungen

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = \frac{r^2}{G}\left(b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta \right)$$
$$\frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{r^2}{G}\left(-b_R \cos\zeta + b_T \sin\zeta \right) \quad . \tag{5.300}$$

Wie wirkt sich in der wiederholten Anwendung des Anpassungsverfahrens ein Lösungsansatz für den Flächenparameter aus? Die in den Formeln (5.298) enthaltene Beziehung mit der transversalen Beschleunigung ist allgemeingültig. Das Verfahren der schrittweisen Anpassung zerlegt die **transversale Beschleunigung** in Einzeleffekte, von denen n_T bekannt sein mögen:

$$b_T = \sum_{\nu=1}^{n_T} b_T^{(\nu)} \quad . \tag{5.301}$$

Für eine erste Lösung werde die Teilbeschleunigung $b_T^{(1)} = b_T - \sum_{\nu=2}^{n_T} b_T^{(\nu)}$ ausgewählt. Daraus wird eine Lösung für den Flächenparameter aus der Differentialgleichung

$$G(\zeta)\frac{dG}{d\zeta} = r^3 b_T^{(1)} \tag{5.302}$$

bzw. im Rahmen einer Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung aus

$$\frac{1}{G^2}\frac{dG}{d\zeta} = \frac{b_T^{(1)}}{\left(g_1(\zeta)\cos\zeta + g_2(\zeta)\sin\zeta \right)^3} \tag{5.303}$$

zusammen mit den Differentialgleichungen (5.300) berechnet. Die gefundene Lösung G(ζ) ist eine Funktion, die ausschließlich vom Bahnwinkel ζ abhängt. Sie genügt daher dem Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(1)} \quad . \tag{5.304}$$

Für den Radius r werden die in diesem Rechenschritt erhaltenen Parameter $g_1(\zeta), g_2(\zeta), G(\zeta)$ in der ersten der Gleichungen (5.288) verwendet. Wenn nun eine zweite transversale Beschleunigung $b_T^{(2)}$ berücksichtigt werden soll, muss die Variationsgleichung (5.298) für den Flächenparameter entsprechend nach den neuen Parametern entwickelt werden:

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left(b_T^{(1)} + b_T^{(2)} \right) \quad , \tag{5.305}$$

Die weiteren Beschleunigungen aus b_T sollen in diesem Rechenschritt nicht berücksichtigt werden. Wegen Beziehung (5.207) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(2)} \quad . \tag{5.306}$$

Dies ist somit eine lineare Beziehung für die differentiellen Ausdrücke der neuen Parameter $A_k^{(\nu)}$. Üblicherweise gibt es K=3 solcher Parameter in Bezug auf eine in der oskulierenden Bahnebene verlaufende Bahnkurve. Die weiteren zu ihrer Lösung benötigten Beziehungen folgen aus den beiden Anpassungsgleichungen im ν-ten Anpassungsschritt (ν > 1)

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{d\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = 0 \\ &\frac{d\dot{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{G}{r} + b_R \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = b_R^{(\nu)} \quad . \end{aligned} \tag{5.307}$$

In der letzteren Gleichung wurde wieder die Bedingung (5.202) verwendet:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \sum_{\nu=1}^{\nu_R} b_R^{(\nu)} \tag{5.308}$$

Damit ist ein lineares Gleichungssystem erhalten, aus dem die Variationsausdrücke für die neuen Parameter berechnet werden können.

Analog kann auch der **Bewegungseinfluss in normaler Richtung** in den Anpassungsprozess mit einbezogen werden. Dieser ist allein für eine Variation des räumlichen Bahnwinkels η verantwortlich. Diese genügt den Variationsgleichungen (5.6)

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad , \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N \quad . \tag{5.309}$$

Auch hier möge der normale Einfluss in etwa n_N Teileinflüsse zerlegt werden

$$b_N = \sum_{\nu=1}^{n} b_N^{(\nu)} \quad . \tag{5.310}$$

Wird ein erster Teileinfluss ausgewählt, kann mit einer bekannten Ausgangsnäherung für die Bahnkurve, die es stets gibt, etwa in Form einer Gerade, eine erste Lösung erhalten werden:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \quad . \tag{5.311}$$

Die erhaltene Lösung η=η(ζ) ist nur von dem Bahnwinkel ζ abhängig und genügt daher der Bedingung

$$\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \quad . \tag{5.312}$$

Soll für eine weitere Anpassung eine weitere normale Beschleunigung $b_N^{(2)} = b_N - b_N^{(1)}$ berücksichtigt werden, folgt aus der Variationsgleichung (5.212)

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} \left(b_N^{(1)} + b_N^{(2)} \right) \quad . \tag{5.313}$$

Hier werden die aktuellen Werte für die bislang berechnete Bahnkurve r(ζ) und Flächenparameter G(ζ) berücksichtigt. Weitere normale Beschleunigungen werden für die neue Lösung außer Acht gelassen. Wegen (5.215) bleibt

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(2)} \quad . \tag{5.314}$$

Die weiteren für das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Variationsgleichungen benötigten Gleichungen werden wie zuvor durch ein System der Art (5.210) gebildet. Das so gebildete Variationsgleichungssystem kann maximal die Ordnung K=5 haben. Eine 6-te Ordnung wird erst bei Einschluss der Zeit mit Hilfe des Flächensatzes (5.289) erforderlich. Wenn es mehr Ordnungen geben sollte, müssen Zusammenhänge außerhalb der bahnmechanischen Umgebung gefunden werden.

5.9.1.2 Keplerbewegung aus geradliniger Annäherung bei Bezug auf ein Hansen System

Die „ungestörte“ *Kepler*bewegung wird geprägt durch die Beschleunigungen[1]

$$b_R = b_{RK} + b_{R2} = -\frac{\mu}{r^2} + b_{R2} = -\frac{G^2}{p\,r^2} + b_{R2} \;,\; b_{R2} = b_T = b_N = 0 \quad . \tag{5.315}$$

Das Differentialgleichungssystem (5.300) zur Berechnung der Bahnkurve reduziert sich auf

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{G}{p}\cos\zeta \quad , \quad \text{mit} \quad \frac{dG}{d\zeta} = 0 \quad . \tag{5.316}$$

Die analytische Integration ergibt

$$g_1(\zeta) = g_{11} + \frac{G}{p}\cos\zeta \quad , \quad g_2(\zeta) = g_{21} + \frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad G = const. \quad . \tag{5.317}$$

Die neuen Integrationskonstanten sind g_{11}, g_{21}. Werden die Funktionen $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ in den Ausdruck für den Bahnradius in den Gleichungen (5.288) eingesetzt, ergibt sich die bekannte Polargleichung eines Kegelschnitts

$$r = \frac{G\,p}{G + p\left(g_{11}\cos\zeta + g_{21}\sin\zeta\right)} = \frac{p}{1 + e\cos\left(\zeta - \zeta_B\right)} \quad . \tag{5.318}$$

Hier wird die Verknüpfung der Formulierung einer geradlinigen Bahn mit einer Kegelschnittbahn durch folgende Beziehungen hergestellt[2]: Wenn

$$g_{100} := \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}$$

und ζ_B der auf den Anfangspunkt eines *Hansen* Systems bezogene konstante Perizentrumswinkel sei, gelten die Beziehungen

$$g_{11} := g_{100}\cos\zeta_B \quad , \quad g_{21} := g_{100}\sin\zeta_B \quad . \tag{5.319}$$

Für die Exzentrizität *e* des Kegelschnitts gilt mit dem Kegelschnittparameter *p* die Relation

$$e = \frac{p}{G}\,g_{100} \quad . \tag{5.320}$$

Die radiale Geschwindigkeit der ungestörten *Kepler*bewegung beträgt dann mit (5.288) und der Lösung (5.317)

$$\dot{r} = g_1\sin\zeta - g_2\cos\zeta = g_{11}\sin\zeta - g_{21}\cos\zeta \quad . \tag{5.321}$$

Zur Überprüfung dieses Ergebnisses kann die Bedingungsgleichung (5.202) herangezogen werden. Linke Seite:

---

[1] Siehe hierzu Abschnitt 5.4.3 ab Seite 118

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = g_{11}\cos\zeta + g_{21}\sin\zeta \quad ,$$

Rechte Seite:

$$\frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_{RK} = \frac{G}{r} - \frac{r^2}{G}\frac{\mu}{r^2} = \frac{G}{r} - \frac{G}{p} = g_{11}\cos\zeta + g_{21}\sin\zeta \quad .$$

Wird die *Kepler*bewegung durch zusätzliche Beschleunigungen beeinflusst, basiert die Behandlung des neuen Bewegungsvorganges auf den Gleichungen (5.318) und (5.321), wobei jetzt die Parameter g_{11} und g_{21} als Variable aufgefasst werden müssen. Mit den Parameterfunktionen $g_1(\zeta) = g_1\left(g_{11}(\zeta), g_{21}(\zeta); \zeta\right)$ und $g_2(\zeta) = g_2\left(g_{11}(\zeta), g_{21}(\zeta); \zeta\right)$ lauten die neuen Anpassungsgleichungen mit der radialen Beschleunigung nach (5.315)

$$b_{R2} = b_R - b_{RK} \tag{5.322}$$

analog den beiden Anpassungsgleichungen (5.291) und (5.204)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial g_{11}}\frac{dg_{11}}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial g_{21}}\frac{dg_{21}}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = 0 \\ &\frac{\partial \dot{r}}{\partial g_{11}}\frac{dg_{11}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_{21}}\frac{dg_{21}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_{R2} \quad . \end{aligned} \tag{5.323}$$

Die hier benötigten partiellen Ableitungen werden aus Radius (5.318) und radialer Geschwindigkeit (5.321) berechnet:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial g_{11}} = -\frac{r^2}{G}\cos\zeta = -\frac{G\,p^2\cos\zeta}{\left[G + p\left(g_{11}\cos\zeta + g_{21}\sin\zeta\right)\right]^2} \\ &\frac{\partial r}{\partial g_{21}} = -\frac{r^2}{G}\sin\zeta = -\frac{G\,p^2\sin\zeta}{\left[G + p\left(g_{11}\cos\zeta + g_{21}\sin\zeta\right)\right]^2} \quad , \\ &\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{r}{G}\left(1 - \frac{r}{p}\right), \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_{11}} = \sin\zeta \quad , \frac{\partial \dot{r}}{\partial g_{21}} = -\cos\zeta \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial G} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{5.324}$$

Für den Flächenparameter G gilt unverändert die Beziehung (5.298). Das Gleichungssystem (5.323) ist wieder ein lineares Gleichungssystem für die Variablen $dg_{11}/d\zeta, dg_{21}/d\zeta$ mit der Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{dg_{11}}{d\zeta} &= \quad b_{R2}\,\frac{r^2}{G}\sin\zeta + b_T\,\frac{r^3}{G\,p^2}\left(1 - \frac{r}{p}\right)\cos\zeta \\ \frac{dg_{21}}{d\zeta} &= -b_{R2}\,\frac{r^2}{G}\cos\zeta + b_T\,\frac{r^3}{G\,p^2}\left(1 - \frac{r}{p}\right)\sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{5.325}$$

5.9.1.3 Durch J_2 gestörte Keplerbewegung aus geradliniger Annäherung bei Bezug auf ein Hansen System

Das für die gestörte *Kepler*bewegung allgemeingültige Variationsgleichungssystem (5.325) sollen im Beispiel auf die Bewegung eines Erdsatelliten angewendet werden, der sich in der Äquatorebene auf einer hochexzentrischen Bahn befindet. Es findet keine transversale Beschleunigung statt. Für die radiale Beschleunigung wird der entsprechende Anteil des Einflus-

ses von J_2 bei Bewegung in der Äquatorebene aus der Beschleunigung b_{R2} herausgelöst, der Rest weggelassen. Somit gilt mit der Abkürzung[1]

$$B_2 := \frac{3}{2}\mu J_2 R_E^2 \tag{5.326}$$

(μ - geozentrische Gravitationskonstante, R_E – mittlerer Äquatorradius der Erde) für die Beschleunigungen

$$b_{R2} = b_{RG0/2-0} + b_{R2r} = -\frac{B_2}{r^4} + b_{R2r} \quad , \; b_{R2r} = b_T = 0 \quad . \tag{5.327}$$

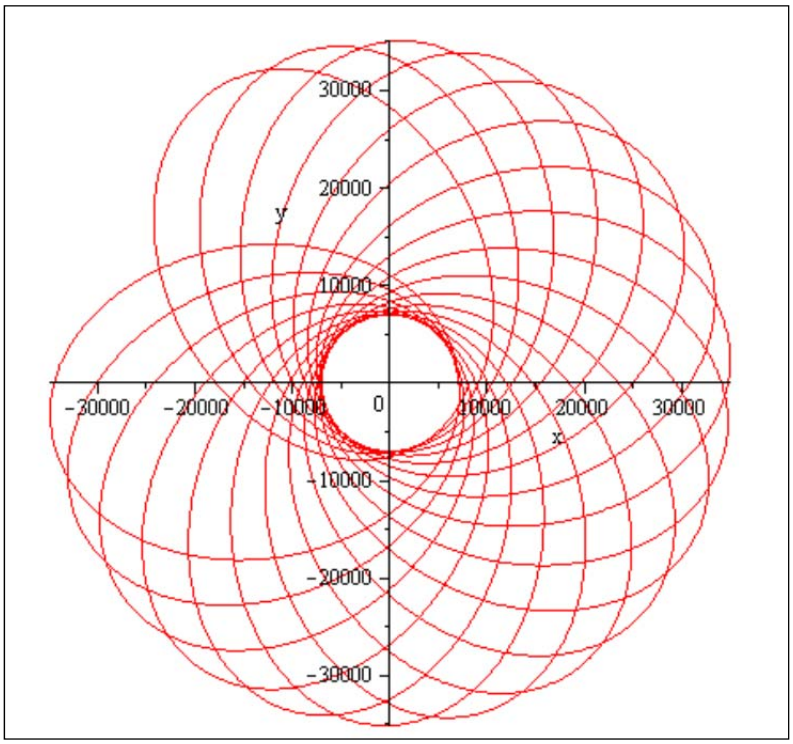


Bild 5-23: Hochexzentrische Satellitenbahn (e=0.75) mit Drift der Apsidenlinie infolge radialer Beschleunigung durch die Abplattung des Zentralkörpers. Der geodynamische Term J_2 ist um den Faktor 100 überhöht. Die dargestellte Bahn verläuft in der Äquatorebene des Zentralkörpers. Numerische Integration der Variationsgleichungen mit geradliniger Anpassung in Bezug auf ein *Hansen* System

In diesem Spezialfall lautet das System (5.325) mit dem Bahnradius aus dem Ausdruck (5.318)

$$\begin{aligned} \frac{dg_{11}}{d\zeta} &= \frac{B_2}{G^3 p^2}\left(G + p\, g_{11}(\zeta)\cos\zeta + p\, g_{21}(\zeta)\sin\zeta\right)^2 \sin\zeta \\ \frac{dg_{21}}{d\zeta} &= -\frac{B_2}{G^3 p^2}\left(G + p\, g_{11}(\zeta)\cos\zeta + p\, g_{21}(\zeta)\sin\zeta\right)^2 \cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{5.328}$$

Als numerisches BEISPIEL wird eine Bahn mit den Zahlenwerten G = 70000 km^2/s, p=12250 km gerechnet. Mit der Exzentrizität e=0.75 und dem Anfangswinkel $\zeta_B := 0°$ wird

$$g_{100} = 4.3 \quad , \quad g_{11}(0) = 4.3 \; , \; g_{21}(0) = 0.0 \quad .$$

[1] Siehe hierzu die Herleitungen in Abschnitt 17.1, Band III

Mit diesen Anfangswerten wird das Differentialgleichungssystem (5.328) numerisch integriert und gibt den in Bild 5-23 dargestellten Kurvenverlauf.

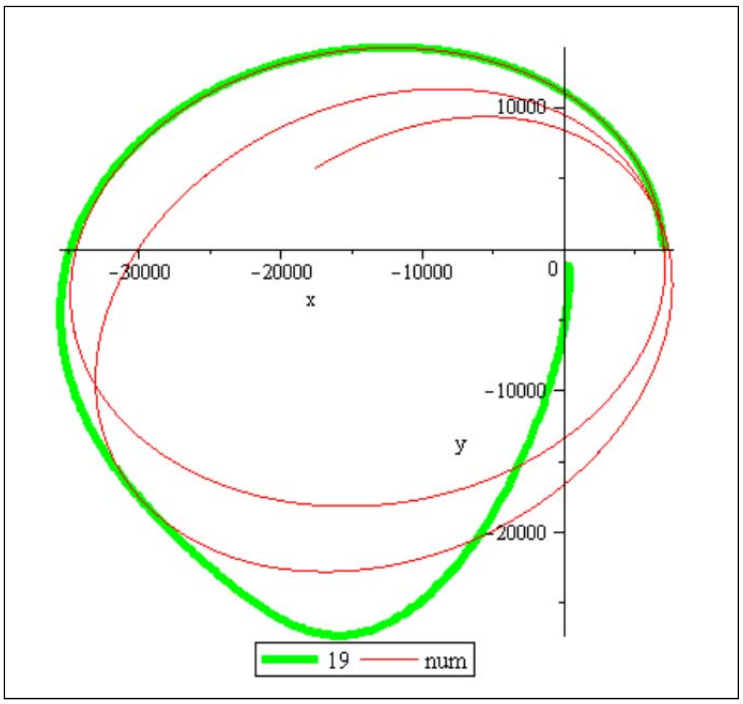


Bild 5-24: Hochexzentrische Satellitenbahn (e=0.75) mit Drift der Apsidenlinie infolge radialer Beschleunigung durch die Abplattung des Zentralkörpers. Vergleich der mit einer numerischen Integration der Variationsgleichungen mit geradliniger Anpassung in Bezug auf ein *Hansen* System erzeugten Bahn mit einer Näherung durch eine Reihenentwicklung der Ordnung 19 (grüner Kurvenverlauf). Der geodynamische Term J_2 ist um den Faktor 100 überhöht. Die dargestellte Bahn verläuft in der Äquatorebene des Zentralkörpers.

Da das Formelmanipulatorprogramm MAPLE keine allgemeingültige analytische Lösung für das Gleichungssystem (5.328) findet, wird eine Näherungslösung mit Reihenentwicklungen versucht. Bild 5-24 zeigt die numerisch (wie in Bild 5-23) erzeugte Bahn nur über etwas mehr als zwei Umläufe (rote Kurve) und überlagert die Näherungs - Bahnkurve (grüne Kurve), die mit einer Reihenentwicklung der Ordnung 19 erhalten wurde. Übereinstimmung lässt sich nur für etwa einen halben Umlauf nach Start im Perigäum erreichen. Vergleich mit anderen numerisch erzeugten Integrationen zeigt, dass das Verfahren der geradlinigen Anpassung offensichtlich ein etwas besseres Ergebnis ergibt[1]. ◀

5.9.1.4 Durch konstante radiale Beschleunigung gestörte geradlinige Bewegung aus geradliniger Annäherung bei Bezug auf ein Hansen System

Gegeben sei eine gleichförmige geradlinige Bewegung, auf die eine konstante radiale Beschleunigung $b_R = b_{RC}$ in Bezug auf eine festliegenden Ursprung wirken soll. Alle anderen Einwirkungen sollen vernachlässigt werden. Dann reduzieren sich die Variationsgleichungen (5.300) auf

[1] Siehe hierzu die in DLR-HR-IB-551-1/2011 durchgeführte detaillierte Studie

$$\begin{aligned}
\frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_{RC} \sin\zeta = \frac{G\, b_{RC} \sin\zeta}{\left(g_1(\zeta)\cos\zeta + g_2(\zeta)\sin\zeta\right)} \quad , \\
\frac{dg_2}{d\zeta} &= -\frac{r^2}{G} b_{RC} \cos\zeta = -\frac{G\, b_{RC} \cos\zeta}{\left(g_1(\zeta)\cos\zeta + g_2(\zeta)\sin\zeta\right)} , \\
b_T &= b_N = 0 \quad , \quad \dot{G} = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.329}$$

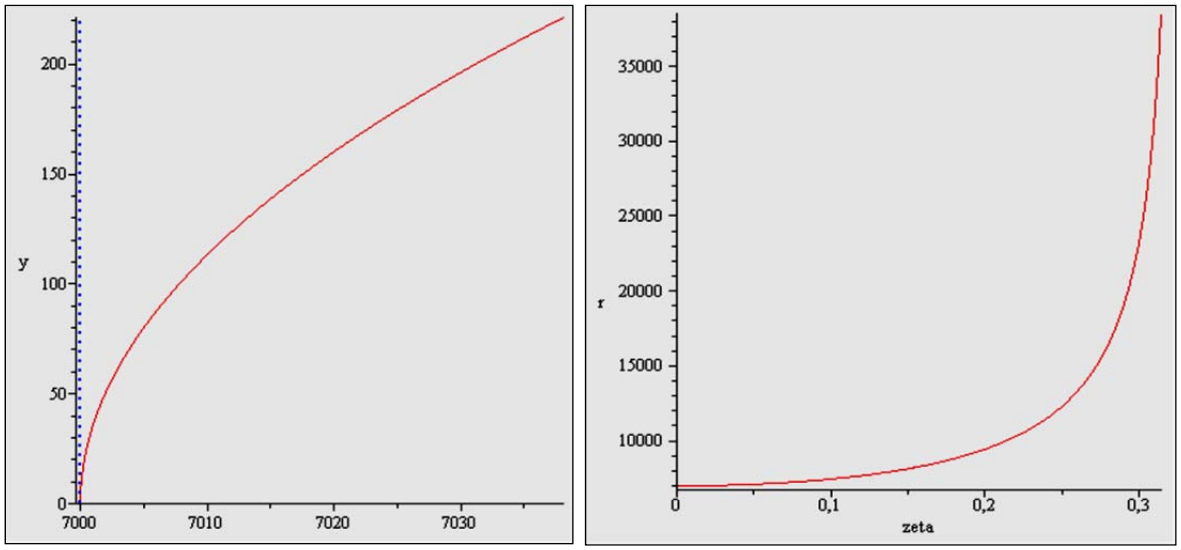


Bild 5-25: Verlauf einer Bahnkurve, die ausschließlich durch eine konstante radiale Beschleunigung geprägt ist. Linkes Bild: Verlauf der Bahnkurve im ebenen Bahnsystem, bezogen auf den Ursprung, der links im Bild zu denken ist. Rechtes Bild: Verlauf des Bahnradius über dem Bahnwinkel.

Zur Durchführung einer numerischen Integration werden die Zahlenwerte verwendet:

$$g_1(\zeta = 0°) = 8\,\text{km/s}\ ,\ g_2(\zeta = 0°) = 0\,\text{km/s}\ ,\ G = 56000\,\text{km}^2/\text{s}\ ,\ b_{RC} = 0.1\ \text{km/s}^2 \quad .$$

Das Ergebnis der Integration zeigt Bild 5-25: im linken Bild ist der Verlauf der Bahnkurve in einem ebenen x-y Koordinatensystem dargestellt. Der Bahnradius ist auf den Koordinatenursprung $(x, y) = (0, 0)$ bezogen. Die x-Achse ist vom Ursprung zum Perizentrum gerichtet, Dort beginnt die dargestellte Bahn. Die y-Achse ist parallel zur ursprünglichen „ungestörten" Bahngerade gerichtet. Diese ursprüngliche Bahn ist blau punktiert eingezeichnet. Das rechte Bild zeigt den Verlauf des Bahnradius in Abhängigkeit vom *Hansen*schen Bahnwinkel ζ. Bemerkenswert ist, wie „schnell" der Radius für sehr kleine Bahnwinkel emporschnellt: einem Winkel 3/10 entspricht eine Anwachsen des Bahnradius um das 5-fache. Dies ist ein Verhalten, das aus der vertrauten *Kepler*bewegung und ähnlichen periodischen Bewegungsvorgängen völlig ungewohnt ist.

5.9.1.5 Abschätzung für Fluchtbahn bei konstantem radialem Schub

Die vorstehenden Beispiele zeigen, dass eine minimale Veränderung des Schubes das Bahnverhalten empfindlich beeinflusst. Eine Abschätzungsformel hierzu wird in diesem Abschnitt hergeleitet[1].

[1] nach R.H. BATTIN [1987], pp. 408-410, basierend auf Arbeiten von *H-S. Tsien* und *D. J. Benney*

Die Überlegungen gehen von einer kreisförmigen Ausgangsbahn r_K aus. Gesucht ist der Bahnradius r_E, ab welchem der Raumflugkörper sich auf der Fluchtbahn befindet. Da nur radialer Schub zugelassen ist, verschwinden transversale und normale Beschleunigung. Mit $b_T = 0$ ist wegen der Differentialbeziehung $\dot{G} = r\, b_T$ der Flächenparameter in diesem Fall eine Konstante. Er ist daher aus der Beziehung

$$G = \sqrt{\mu\, p} = \sqrt{\mu\, r_K} \tag{5.330}$$

mit gegebenem Ausgangsradius r_K bekannt. Mit dem radialen und dem transversalen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ kann der Geschwindigkeitsvektor berechnet werden aus

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \quad , \tag{5.331}$$

wobei der Flächensatz $r^2\,\dot{\zeta} = G$ verwendet wird. Die Geschwindigkeit beträgt dann

$$V^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \quad . \tag{5.332}$$

Als Fluchtgeschwindigkeit wird die parabolische Geschwindigkeit $V_E = \sqrt{2\mu / r_E}$ gewählt, die für den Radius r_E angenommen wird. Die radiale Geschwindigkeit genügt daher bei Flucht der Beziehung

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r_E} - \frac{G^2}{r_E^2} \quad . \tag{5.333}$$

Hier bestehen die Beziehungen

$$\frac{d\dot{r}^2}{dt} = \frac{d\dot{r}^2}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}^2}{dr}\dot{r} \quad ,$$

sowie

$$\frac{d\dot{r}^2}{dt} = 2\,\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt} = 2\,\dot{r}\,\ddot{r} \quad .$$

Wird hier die *Leibniz*sche Gleichung in der in diesem Anwendungsbeispiel gültigen Form

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{G^2}{r^3} + \frac{G^2}{p\,r^2} - b_{RS} = 0 \tag{5.334}$$

eingesetzt, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dr} = \ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + b_{RC} \tag{5.335}$$

mit dem bestimmten Integral, das ab Einschussradius r_K durchgeführt wird:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + r\,b_{RC}\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{G^2}{r_K^2} + \frac{\mu}{r_K} + r_K\,b_{RC}\right) =$$

$$= \frac{G^2}{2}\frac{r^2 - r_K^2}{r^2\,r_K^2} - \mu\frac{r - r_K}{r\,r_K} + b_{RC}\left(r - r_K\right) \quad .$$

Es bleibt

$$\dot{r}^2 = \left(r - r_K\right)\left[2\,b_{RC} - \mu\frac{r - r_K}{r^2\,r_K}\right] \quad . \tag{5.336}$$

Im Fall von Flucht, $r = r_E$, kann aus den beiden Ausdrücken (5.333) und (5.336) der Fluchtradius berechnet werden:

$$r_E = r_K + \frac{\mu}{2\,r_K\,b_{RC}} \quad . \tag{5.337}$$

Mit Hilfe dieser Relation kann eine Bedingung gefunden werden, wie groß die radiale Beschleunigung mindestens sein muss, dass ab Start aus der Einschussbahn r_K eine Fluchtbahn erreicht werden kann. Dazu wird die radiale Geschwindigkeit (5.336) im Fall des Fluchtradius r_E untersucht: wenn der Raumflugkörper sich dort auf einer Fluchtbahn befindet, muss die radiale Geschwindigkeit größer als Null sein. Mit Beziehung (5.337) ergibt sich zunächst

$$\dot{r}^2 = \frac{2\,b_{RC}}{r^2}\left(r - r_K\right)\left[r^2 - \left(r_E - r_K\right)\left(r - r_K\right)\right] \quad . \tag{5.338}$$

Die radiale Geschwindigkeit verschwindet, wenn der Wert in der eckigen Klammer verschwindet. Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$r_{1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(r_E - r_k\right) \pm \sqrt{\left(r_E - r_K\right)\left(r_E - 5\,r_K\right)}\right] \tag{5.339}$$

Wenn r_E<5 r_K, wird der Wert unter der Wurzel negativ, die quadratische Gleichung hat also keine Lösung und $\dot{r}$ muss größer als Null sein. Nur in diesem Fall kann also der Raumflugkörper auf dieser Bahn Fluchtgeschwindigkeit erreichen. Wird hier r_E aus Beziehung (5.337) eingesetzt, folgt

$$1 + \frac{\mu}{2\,r_K^2\,b_{RC}} < 5 \quad .$$

Die konstante radiale Beschleunigung muss also die Bedingung

$$\frac{\mu}{8\,r_K^2} < b_{RC} \tag{5.340}$$

erfüllen, damit die auf diese Weise berechnete Bahn auf eine Fluchtbahn führt.

Mit den Zahlenwerten des obigen Beispiels muss $b_{RC} > 0.001016838\,km/s^2$ sein.

5.9.1.6 Durch konstante radiale Beschleunigung gestörte Keplerbewegung aus geradliniger Annäherung bei Bezug auf ein Hansen System

Wird die *Kepler*bewegung durch eine konstante radiale Beschleunigung beeinflusst (etwa durch den konstanten Schub eines Ionentriebwerks wobei der Massenverlust vernachlässigt werden soll), hat in den Variationsgleichungen (5.325) die Beschleunigung den Betrag $b_{R2} = b_{RC} = const.$. Man erhält mit dem Radius der *Kepler*bewegung (5.318)

$$\begin{aligned}
\frac{dg_{11}}{d\zeta} &= \quad b_{RC}\,\frac{r^2}{G}\sin\zeta = \frac{G\,b_{RC}\,\sin\zeta}{\left(G + p\,g_{11}(\zeta)\cos\zeta + p\,g_{21}(\zeta)\sin\zeta\right)^2} \\
\frac{dg_{21}}{d\zeta} &= -b_{RC}\,\frac{r^2}{G}\,\cos\zeta = -\frac{G\,b_{RC}\,\cos\zeta}{\left(G + p\,g_{11}(\zeta)\cos\zeta + p\,g_{21}(\zeta)\sin\zeta\right)^2} \quad .
\end{aligned} \tag{5.341}$$

für die Ausgangsbahn werden die Zahlenwerte Radius r_K=7000 km sowie der Flächenparameter $G = 52822.3729\,km^2/s$ gewählt.

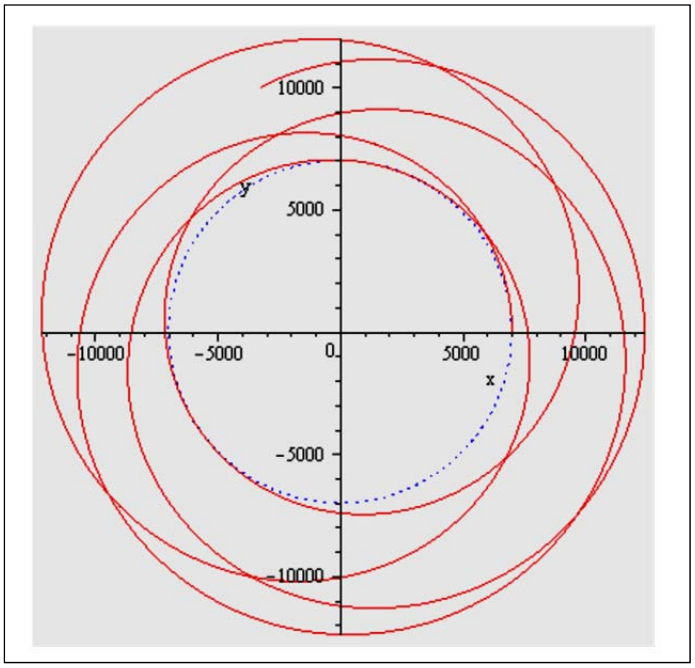


Bild 5-26: Konstanter radialer Schub auf Raumflugkörper aus kreisförmiger Erdumlaufbahn mit Radius r_A=7000 km, Schub b_{RC} = 0.001 km/s^2. Kein Entkommen aus Erdumlauf. Das Bild zeigt den Verlauf der Bahn um die Erde über 4.3 Umläufe, die Ausgangsbahn ist punktiert eingetragen. Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System

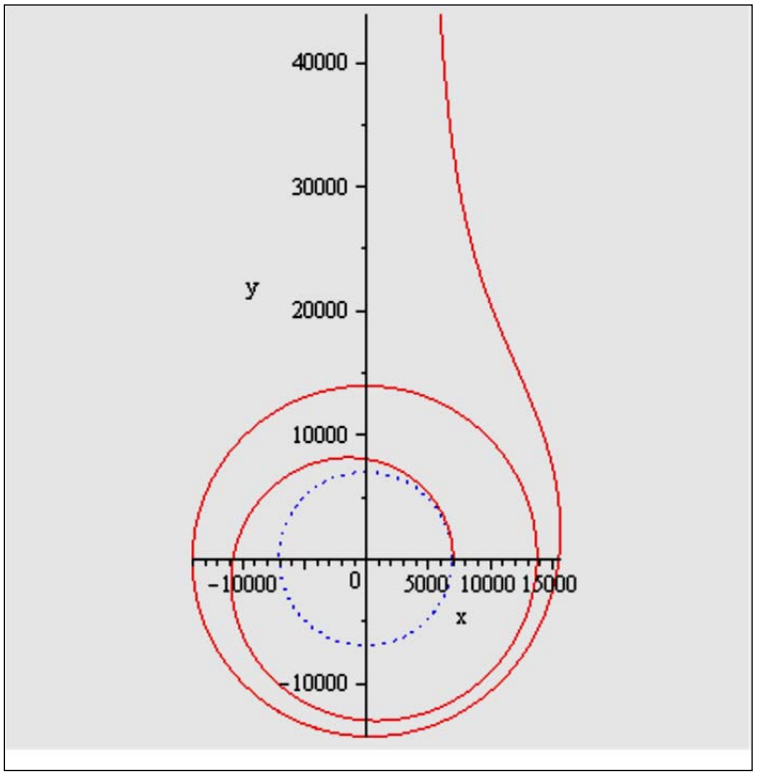


Bild 5-27: Konstanter radialer Schub auf Raumflugkörper aus kreisförmiger Erdumlaufbahn mit Radius r_A=7000 km, Schub b_{RC} = 0.00101685 km/s^2. Fluchtbahn. Verlauf der Bahn um die Erde über den Bahnwinkel 4.457, Fluchtbahn. Die kreisförmige Ausgangsbahn ist punktiert eingezeichnet. Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System

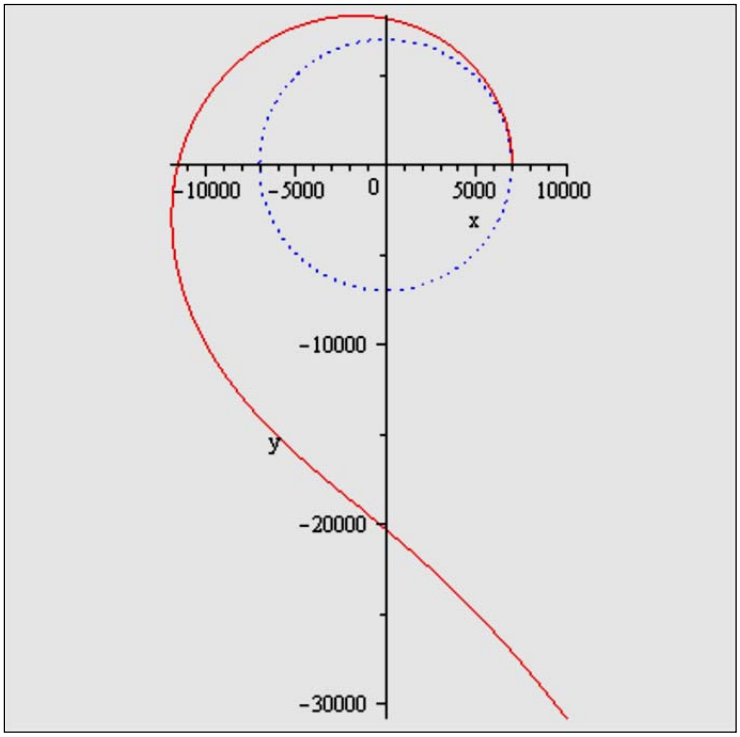


Bild 5-28: Konstanter radialer Schub auf Raumflugkörper aus kreisförmiger Erdumlaufbahn mit Radius r_A=7000 km, Schub b_{RC} = 0.0011 km/s^2. Fluchtbahn. Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System

Bild 5-26 zeigt eine Bahn über 2.5 Umläufe, die durch den konstanten radialen Schub b_{RC}=0.001 km/s^2 gebildet wird. Entsprechend Bedingung (5.340) führt die Bahn nicht auf eine Fluchtbahn.

Bild 5-27 zeigt die Bahn, die mit dem konstanten radialen Schub b_{RC}=0.00101685 km/s^2 erzeugt wird. Nach etwa 2.4 Umläufen verlässt der Raumflugkörper den Anziehungsbereich der Erde.

Bild 5-28 zeigt eine Bahn mit dem radialem Schub b_{RC}=0.0011 km/s^2. Der Schub reicht aus, dass der Raumflugkörper bereits nach einem halben Erdumlauf die Fluchtbahn erreicht[1]. ◀

5.9.2 Beschleunigung in tangentialen Koordinaten

Grundbewegung: Die Ausgangsbahn werde als „ungestörte“ geradlinige gleichförmige Bewegung angesetzt. Diese Bahn wird somit durch das System

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta}\dot{\zeta}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,G\,\mathbf{q}_0$$

[1] Anregungen zu diesen Beispielen auch durch: FISCHER, N. [2009]: ‘Bestimmung einer Satellitenbahn unter Einwirkung eines kleinen Schubes‘, Studienarbeit, UniBW München, 2. Jan. 2009

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_A)} = \frac{r_p}{\cos(\zeta-\zeta_A)} \\
\dot r &= V\sin(\zeta-\zeta_A) \\
\frac{dr}{d\zeta} &= r\,\tan(\zeta-\zeta_A) \\
r\dot\zeta &= V\cos(\zeta-\zeta_A) \\
\dot\eta &= 0 \\
\dot\zeta &= \frac{G}{r^2}
\end{aligned}
$$

beschrieben. Die Parameter („Elemente“) dieser Bewegung sind V, G bzw. r_p, ζ_A sowie die Anfangszeit t_0, bei räumlicher Bewegung außerdem erweitert durch die „Anfangsraumwinkel“ $i^{(0)}, \Omega^{(0)}$.

1. Bewegungsannäherung: Wir wollen nun folgende „Störung“ in tangentialen Koordinaten[1] annehmen:

$$b_V^{(1)} := -\rho B(V)^2 \quad , \quad b_H^{(1)} := 0 \quad , \quad b_N^{(1)} := 0 \quad .$$

Hier werden die Parameter ρ und B als konstant angenommen[2].

1. Lösungsansatz: Nach den Gleichungen (5.83) auf Seite 107 und (5.6) sowie (5.7) auf Seite 88 ist dann

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{d\zeta} &= -\frac{r^2}{G}\rho B V^2 \\
\frac{d\zeta_A}{d\zeta} &= \frac{r^2}{V\,G} b_H^{(1)} = 0 \quad , \quad \zeta_A = const. \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot\eta\,\mathbf{q}_0 = -\frac{r}{G}\,b_N^{(1)}\mathbf{q}_0 = 0 \quad , \quad \mathbf{c}_0 = const. \quad \left(i^{(1)} \cong const.,\ \Omega^{(1)} \cong const.\right) .
\end{aligned}
$$

Da nach Definition (5.89) (auf Seite 108) mit der Perizentrumsdistanz r_P im Fall der „ungestörten“ geradlinigen Bewegung

$$G = r_P V$$

und nach Variationsgleichung (5.91)

$$\dot r_P = \frac{r_P}{V}\tan(\zeta-\zeta_A)\,b_H = 0 \quad , \quad r_P = const. \quad ,$$

[1] vgl. Abschnitt 5.2.5.4 auf Seite 107

[2] in einem späteren Kapitel (17, Band III) werden die Parameter ρ und B nicht als konstant angenommen, auch die Geschwindigkeit V wird dann modifiziert angesetzt werden. Im vorliegenden Kapitel geht es nicht um die physikalische Interpretation eines Bewegungsvorganges, sondern lediglich um die Demonstration eines mathematischen Verfahrens.

sind „Flächenparameter“ G und Geschwindigkeit V in diesem Fall direkt zueinander proportional. Die zweite der Variationsgleichungen (5.71) auf Seite 104 lautet mit $\mathrm{r\,r_P} = \cos(\zeta - \zeta_A)$ und $G = r_P V$

$$\frac{dV}{d\zeta} = -r_P \rho B \frac{V}{\cos^2(\zeta - \zeta_A)}$$

bzw.

$$\frac{dV}{V} = -r_P \rho B \frac{d\zeta}{\cos^2(\zeta - \zeta_A)}$$

mit der Lösung

$$\ln V = \ln V^{(1)} - r_P \rho B \tan(\zeta - \zeta_A) \quad , \left(V^{(1)} = const.\right)$$

oder

$$V = \frac{V^{(1)}}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta - \zeta_A)}} = fct\left(V^{(1)}, r_P, \zeta_A, (\rho, B); \zeta\right) \quad .$$

Somit folgt für den Flächenparameter

$$G = \frac{G^{(1)}}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta - \zeta_A)}} = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_A, (\rho, B); \zeta\right) \quad , \quad G^{(1)} := r_P V^{(1)} = const. \quad .$$

Die „Störung“ $b_V^{(1)}$, $b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$ beeinflusst nicht die Kurve $r = r(\zeta)$, also die Gerade, somit auch nicht die Variation in Bezug auf den Bahnwinkel

$$\frac{dr}{d\zeta} = r \tan(\zeta - \zeta_A) \quad ,$$

wohl aber die Bewegung längs dieser Kurve mit

$$\dot{r} = V \sin(\zeta - \zeta_A) = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_A; \zeta\right) \quad ,$$

$$r\dot{\zeta} = V \cos(\zeta - \zeta_A) = \frac{G}{r} = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_A; \zeta\right) \quad .$$

Um die Bewegung in der Zeit beschreiben zu können, muss das Zeitintegral

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2}$$

gelöst werden. Die Differentialgleichung lautet

$$dt = \frac{r^2}{G} d\zeta = r_P \frac{d\zeta}{\cos^2(\zeta - \zeta_A)}$$

mit dem Integral

$$t = t_0 + r_P \tan(\zeta - \zeta_A) \quad .$$

Vorgabe der Zeit ($t^{(1)}$ ist eine Anfangszeit) erlaubt die Berechnung des Bahnwinkels aus

$$\zeta = \zeta_A + \arctan \frac{t - t^{(1)}}{r_P} \quad .$$

Die neue Bewegung hat die (jetzt konstanten) Parameter $t^{(1)}, \zeta_A, r_P, V^{(1)}, (i^{(1)}, \Omega^{(1)})$. Die Kurvengleichung lautet (wieder wie im ungestörten Fall)

$$r = \frac{r_P}{\cos(\zeta - \zeta_A)} = r(r_P, \zeta_A; \zeta) \quad .$$

Die Variation des Radius

$$\dot{r} = \frac{V^{(1)} \sin(\zeta - \zeta_A)}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta - \zeta_A)}} = \dot{r}(V^{(1)}, r_P, \zeta_A; \zeta)$$

charakterisiert die Abnahme der Variation des Radius als Folge der Abbremsung b_V in tangentialer Richtung. Ferner ist

$$r\dot{\zeta} = \frac{V^{(1)} \cos(\zeta - \zeta_A)}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta - \zeta_A)}} = r\dot{\zeta}(V^{(1)}, r_P, \zeta_A; \zeta) \quad ,$$

somit der Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ auf das $\mathbf{q}_j$ – *Hansen* (-ideale) System bezogen sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1 \cos\zeta + \mathbf{q}_2 \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1 \sin\zeta + \mathbf{q}_2 \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \quad . \end{aligned}$$

Damit ist das aktuelle Bewegungsproblem vollständig gelöst.

2. Lösungsansatz:

Die bisherige Lösung des „Störproblems“ $b_V = -\rho B V^2$ orientierte sich an den in den Abschnitten 5.2.5.4 (ab Seite 107) und 5.2.5.5 hergeleiteten Beziehungen und den Variationsgleichungen in tangentialer Richtung und Hauptnormalenrichtung. Im Folgenden soll der Anpassungsvorgang in elementarer Weise ausschließlich mit den Formeln hergeleitet werden, wie sie Abschnitt 5.8 allgemeingültig aufgestellt wurden und wie sie (eventuell) zum automatischen Rechnen verwendet werden könnten.

Die Grundbewegung sei die geradlinige Bewegung auf der Kurve

$$C^{(0)} \equiv r = \frac{G}{V \cos(\zeta - \zeta_A)} = \frac{r_P}{\cos(\zeta - \zeta_A)} \tag{5.342}$$

mit der radialen und der transversalen Geschwindigkeit wegen $G = r_P V$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \sin(\zeta - \zeta_A) = \frac{G \sin(\zeta - \zeta_A)}{r_P} \\ r\dot{\zeta} &= V \cos(\zeta - \zeta_A) \quad . \end{aligned} \tag{5.343}$$

Die „Störbeschleunigung“ in tangentialer Richtung

$$b_V^{(1)} = -\rho B V^2 \;,\; b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0 \tag{5.344}$$

hat mit den Beziehungen (5.82) auf Seite 107 die Zerlegung in den radialen und den transversalen Anteil

$$\begin{aligned} b_R^{(1)} &= -\rho B V^2 \sin(\zeta - \zeta_A) \\ b_T^{(1)} &= -\rho B V^2 \cos(\zeta - \zeta_A) \quad . \end{aligned} \tag{5.345}$$

Die erste der Anpassungsgleichungen (5.193) auf Seite 142 lautet dann

$$\frac{\partial r}{\partial r_P}\frac{dr_P}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial \zeta_A}\frac{d\zeta_A}{d\zeta} = 0 \quad .$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial r_P} &= \frac{1}{\cos(\zeta - \zeta_A)} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_A} &= -\frac{r_P \sin(\zeta - \zeta_A)}{\cos^2(\zeta - \zeta_A)} \end{aligned} \tag{5.346}$$

folgt aus der ersten Anpassungsgleichung

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = \frac{\partial \zeta_A}{\partial \zeta} r_P \tan(\zeta - \zeta_A) \quad . \tag{5.347}$$

Die zweite der Anpassungsgleichungen (5.193) liefert

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P}\frac{dr_P}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_A}\frac{d\zeta_A}{d\zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_R \quad . \tag{5.348}$$

Die erste der Variationsgleichungen (5.253) ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(1)} = -\rho B r^2 \frac{G}{r_P} \quad , \tag{5.349}$$

ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} &= \frac{G}{r_P}\cos(\zeta - \zeta_P) = \frac{G}{r} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P} &= -\frac{G}{r_P^2}\sin(\zeta - \zeta_P) \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial G} &= \frac{\sin(\zeta - \zeta_P)}{r_P} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_P} &= -\frac{G}{r_P}\cos(\zeta - \zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{5.350}$$

Mit den Beziehungen (5.349) und (5.350) sowie mit der Störbeschleunigung $b_R^{(0)}$ aus (5.345) wird

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = -\rho B r^2 \frac{G}{r_P^2}\sin(\zeta - \zeta_P) = \frac{r^2}{G} b_R^{(1)} \quad .$$

Von der zweiten Anpassungsgleichung bleibt somit wegen Beziehung (5.347) nur

$$\left[\frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P} r_P \tan(\zeta - \zeta_P) + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_P}\right]\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0$$

bzw. mit den Ausdrücken (5.350)

$$\frac{G}{r_P \cos(\zeta - \zeta_P)}\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0 \quad .$$

Diese Bedingungsgleichung kann nur für

$$\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0$$

erfüllt werden, somit wegen Gleichung (5.347) auch

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = 0$$

und es bleiben die Lösungen

$$\zeta_P = const.$$
$$r_P = const. \quad .$$

Die Differentialgleichung (5.349) führt auf

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = -\rho B \frac{r_P G}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)}$$

bzw.

$$\frac{dG}{G} = -\rho B r_P \frac{d\zeta}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)}$$

mit dem Integral

$$\ln G = const. - \rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P) \quad .$$

Wird für die Integrationskonstante $\ln A_1^{(1)} := const.$ gewählt, folgt

$$G = \frac{A_1^{(1)}}{e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} \quad ,$$

wegen $G = r_P V$ auch

$$V = \frac{A_1^{(1)}}{r_P e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} = \frac{A_2^{(1)}}{e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} \quad ,$$

wobei als neue Konstante

$$A_2^{(1)} := \frac{A_1^{(1)}}{r_P}$$

angenommen wurde. Die Lösung des Zeitintegrals $\dot{\zeta} = G / r^2$ und die weitere Lösung des Problems wird wie im zuvor geschilderten ersten Lösungsansatz behandelt.

3. Lösungsversuch:

Um das in diesem Kapitel entwickelte Lösungsverfahren noch besser kennen zu lernen, werde noch ein weiterer Lösungsweg des „Störproblems“ $b_V^{(1)} = -\rho B V^2$, $b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$ versucht. Wie in der vorhergehenden Herleitung können die Formeln (5.342) bis (5.348) übernommen werden. Nach der Zerlegung in einen radialen und einen transversalen („Stör“) Beschleunigungsanteil (nach den Gleichungen (5.345))

$$b_R^{(1)} = -\rho B V^2 \sin(\zeta - \zeta_P)$$
$$b_T^{(1)} = -\rho B V^2 \cos(\zeta - \zeta_P)$$

werde das „Störproblem“ aufgesplittet: Zunächst werde $b_R^{(1)}$ ausgewählt aber nicht $b_T^{(1)}$. Es werde also das „Störproblem“

$$b_R^{(1)},\ b_T^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$$

zu lösen versucht. Die erste Anpassungsgleichung liefert wieder die Beziehung (5.347)

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = \frac{\partial \zeta_P}{\partial \zeta}\, r_P\, \tan\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad .$$

Die Variationsgleichung des Flächenparameters (5.349) gibt jetzt aber

$$\frac{dG}{d\zeta} = 0 \quad ,$$

mit der Lösung $G = const.$. Auch hier ist wie in der ersten der Gleichungen (5.350)

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} \quad .$$

Es bleibt somit von der zweiten Anpassungsgleichung (5.348) in diesem Fall das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = \rho\, B\, r_P^2\, \tan\left(\zeta - \zeta_P\right)$$

$$\frac{dr_P}{d\zeta} = \rho\, B\, r_P^3\, \tan^2\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad ,$$

das analytisch nur sehr unangenehm zu behandeln ist. Aus diesem (und weiteren späteren) Beispielen ist zu ersehen, dass das besprochene Verfahren zur Anpassung beliebiger Bewegungen durchaus flexibel gehandhabt werden muss um einen Anpassungsvorgang durchsichtig bearbeiten zu können. Wir wollen den dritten Lösungsversuch daher an dieser Stelle nicht weiter behandeln[1].◀

[1] Diese und alle anderen Differentialgleichungen können auf die übliche Weise numerisch bearbeitet werden. Das ist aber nicht das Thema dieses Kapitels.

6 Bewegung in geradlinigen Koordinaten

6.1 Die grundlegenden Transformationsregeln

Als momentaner Zustandsvektor eines beliebigen Bewegungsvorganges wird die Kombination aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ bezeichnet. Diese seien in einem Basissystem $\mathbf{p}_i$ gegeben. Die Transformation in ein anderes $\mathbf{q}_j$- System ist zu berechnen. Dazu werden die Basisvektoren des einen Systems durch die Basisvektoren des anderen Systems, d. h. wenn beide Systeme geradlinig sind, notwendig als Linearkombinationen der Basisvektoren dargestellt. Für die neuen Basisvektoren wird zunächst nur gefordert, dass sie linear unabhängig sind. Die Zusammenfassung der Koeffizienten der einen Basis ausgedrückt als Linearkombinationen der anderen Basis in einer Matrix, die Transformationsmatrix genannt wird, ist zwar sinnfällig und praktisch wenn auch nicht zwingend. Die Transformationen von geradlinigen Koordinatensystemen lassen sich also auf elementare geradlinige Koordinatendarstellungen von Vektoren zurückführen.

6.1.1 Transformation der Basissysteme

Die Basisvektoren des $\mathbf{p}_i$- und des $\mathbf{q}_j$- Systems seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Einheitsvektoren angenommen:

$$\mathbf{p}_i^2 \;=\; \mathbf{q}_j^2 \;=\; 1 \quad . \tag{6.1}$$

Die Basisvektoren seien durch die Linearkombination

$$\mathbf{q}_j \;=\; a_j{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{6.2}$$

und umgekehrt durch

$$\mathbf{p}_i \;=\; b_i{}^j\,\mathbf{q}_j \tag{6.3}$$

miteinander verkoppelt. Aus

$$\mathbf{q}_j \;=\; a_j{}^i\,b_i{}^k\,\mathbf{q}_k$$

folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{q}_j$ (man spricht in diesem Fall auch von „Koeffizientenvergleich“)

$$a_j{}^i\,b_i{}^k \;=\; \delta_j{}^k \tag{6.4}$$

und analog aus

$$\mathbf{p}_i \;=\; b_i{}^j\,a_j{}^k\,\mathbf{p}_k$$

auch

$$b_i{}^j\,a_j{}^k \;=\; \delta_i^k \quad . \tag{6.5}$$

Die explizite Berechnung der $b_i{}^k$ aus den $a_j{}^i$ und umgekehrt als Auflösung dieser linearen Gleichungssysteme wird erleichtert durch die Beziehung der zugehörigen Determinanten

$$\det\left(b_i^{\ j}\right)\det\left(a_j^{\ k}\right) \;=\; 1 \quad . \tag{6.6}$$

Die Matrix $\left(b_i^{\ j}\right)$ ist wegen der Beziehungen (6.4) und (6.5) die zu $\left(a_i^{\ j}\right)$ inverse Matrix:

$$\left(b_i^{\ j}\right) = \left(a_j^{\ i}\right)^{-1} \quad . \tag{6.7}$$

Ihre Elemente werden nach der *Cramer*schen Regel aus

$$b_i^{\ j} = \frac{A_{ij}}{\det\left(a_j^{\ i}\right)} \tag{6.8}$$

berechnet, wenn A_{ij} das algebraische Komplement (gelegentlich auch als *Adjunkte* bezeichnet) des Elementes $a_j^{\ i}$ ist, d.h. diejenige Unterdeterminante, die sich aus der Determinante $\det\left(a_j^{\ i}\right)$ durch Streichen der *i*-ten Zeile und der *j*-ten Spalte ergibt (siehe dazu als Beispiel im dreidimensionalen Fall in Beziehung (6.16)).

Die Transformationsparameter bei Variationen:

Aus der Beziehung (6.4) folgt insbesondere die wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{p}_i$ bzw. der $\mathbf{q}_j$ vollständig allgemeingültige Beziehung für die Variationen der $b_i^{\ k}$ und $a_j^{\ i}$

$$\dot{a}_j^{\ i}\, b_i^{\ k} \;=\; -a_j^{\ i}\, \dot{b}_i^{\ k} \tag{6.9}$$

sowie mit Formel (6.5)

$$\dot{b}_i^{\ j}\, a_j^{\ k} \;=\; -b_i^{\ j}\, \dot{a}_j^{\ k} \quad . \tag{6.10}$$

Werden diese Ausdrücke mit $a_k^{\ l}$ bzw. $b_k^{\ l}$ multipliziert können die $\dot{b}_i^{\ l}$ bzw. $\dot{a}_i^{\ l}$ direkt berechnet werden aus

$$\dot{b}_i^{\ l} \;=\; -b_i^{\ j}\, \dot{a}_j^{\ k}\, b_k^{\ l} \tag{6.11}$$

$$\dot{a}_j^{\ l} \;=\; -a_j^{\ i}\, \dot{b}_i^{\ k}\, a_k^{\ l} \quad . \tag{6.12}$$

Damit sind die Variationen der einen Basis bezogen auf die andere umkehrbar eindeutig darstellbar

$$\dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{a}_j^{\ i}\, \mathbf{p}_i + a_j^{\ i}\, \dot{\mathbf{p}}_i \tag{6.13}$$

sowie

$$\dot{\mathbf{p}}_i \;=\; \dot{b}_i^{\ j}\, \mathbf{q}_j + b_i^{\ j}\, \dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{6.14}$$

6.1.2 Transformation geradliniger dreidimensionaler Systeme

Die Koeffizienten $b_k^{\ l}$ der *Transformationsmatrix* $\left(b_k^{\ l}\right)$ lassen sich im dreidimensionalen Raum aus den Koeffizienten $a_j^{\ i}$ der Transformationsmatrix $\left(a_j^{\ i}\right)$ mit der Determinante

$$\begin{aligned}\det\left(a_j^{\,i}\right) &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + \\ &\quad + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}\end{aligned} \tag{6.15}$$

mit den Beziehungen, die formal der Cramerschen Regel entsprechen,

$$\begin{aligned}\det\left(a_j^{\,i}\right) b_{11} &= a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{12} &= a_{32}\,a_{13} - a_{12}\,a_{33} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{13} &= a_{12}\,a_{23} - a_{22}\,a_{13} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{21} &= a_{23}\,a_{31} - a_{33}\,a_{21} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{22} &= a_{33}\,a_{11} - a_{13}\,a_{31} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{23} &= a_{13}\,a_{21} - a_{23}\,a_{11} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{31} &= a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{32} &= a_{31}\,a_{12} - a_{11}\,a_{32} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right) b_{33} &= a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}\end{aligned} \tag{6.16}$$

berechnen. Die einzelnen Größen dieses Systems können offensichtlich durch zyklische Vertauschung der Indizes auseinander erhalten werden.

Dieses System kann so interpretiert werden, dass ein Zeilenvektor b_{ij} (i fest; j = 1,2,3) der Transformationsmatrix $\left(b_i^{\,j}\right)$ durch das Vektorprodukt zweier Spaltenvektoren $a_j^{\,i}$ (j = 1,2,3; i fest) der Matrix $\left(a_j^{\,i}\right)$ berechnet wird:

$$\begin{aligned}\det\left(a_j^{\,i}\right)\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33}\end{pmatrix} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right)\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31}\end{pmatrix} \\ \det\left(a_j^{\,i}\right)\begin{pmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32}\end{pmatrix}\end{aligned} \quad . \tag{6.17}$$

Mit der Variation der Determinante $\left[\det\left(a_j^{\,i}\right)\right]^{\cdot}$ aus

$$\begin{aligned}\left[\det\left(a_j^{\,i}\right)\right]^{\cdot} &= \dot{a}_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) + \dot{a}_{21}\,(a_{32}\,a_{13} - a_{12}\,a_{33}) + \dot{a}_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{22}\,a_{13}) + \\ &\quad + \dot{a}_{12}\,(a_{23}\,a_{31} - a_{33}\,a_{21}) + \dot{a}_{22}\,(a_{33}\,a_{11} - a_{13}\,a_{31}) + \dot{a}_{32}\,(a_{13}\,a_{21} - a_{23}\,a_{11}) + \\ &\quad + \dot{a}_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}) + \dot{a}_{23}\,(a_{31}\,a_{12} - a_{11}\,a_{32}) + \dot{a}_{33}\,(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})\end{aligned} \tag{6.18}$$

bzw.

$$\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot} \;=\; \det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{a}_i^{\ j}\,b_j^{\ i} \tag{6.19}$$

lauten die Variationen der $b_i^{\ j}$

$$\begin{aligned}
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{11} &= \dot{a}_{22}\,a_{33}+\dot{a}_{33}\,a_{22}-\dot{a}_{32}\,a_{23}-\dot{a}_{23}\,a_{32}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{11}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{12} &= \dot{a}_{32}\,a_{13}+\dot{a}_{13}\,a_{32}-\dot{a}_{12}\,a_{33}-\dot{a}_{33}\,a_{12}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{12}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{13} &= \dot{a}_{12}\,a_{23}+\dot{a}_{23}\,a_{12}-\dot{a}_{22}\,a_{13}-\dot{a}_{13}\,a_{22}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{13}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{21} &= \dot{a}_{23}\,a_{31}+\dot{a}_{31}\,a_{23}-\dot{a}_{33}\,a_{21}-\dot{a}_{21}\,a_{33}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{21}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{22} &= \dot{a}_{33}\,a_{11}+\dot{a}_{11}\,a_{33}-\dot{a}_{13}\,a_{31}-\dot{a}_{31}\,a_{13}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{22}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{23} &= \dot{a}_{13}\,a_{21}+\dot{a}_{21}\,a_{13}-\dot{a}_{23}\,a_{11}-\dot{a}_{11}\,a_{23}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{23}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{31} &= \dot{a}_{21}\,a_{32}+\dot{a}_{32}\,a_{21}-\dot{a}_{31}\,a_{22}-\dot{a}_{22}\,a_{31}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{31}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{32} &= \dot{a}_{31}\,a_{12}+\dot{a}_{12}\,a_{31}-\dot{a}_{11}\,a_{32}-\dot{a}_{32}\,a_{11}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{32}\\
\det\left(a_j^{\ i}\right)\dot{b}_{33} &= \dot{a}_{11}\,a_{22}+\dot{a}_{22}\,a_{11}-\dot{a}_{21}\,a_{12}-\dot{a}_{12}\,a_{21}-\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot}b_{33}\quad .
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Umgekehrt werden die $a_k^{\ l}$ aus den $b_i^{\ j}$ mit der Determinante

$$\begin{aligned}
\det\left(b_i^{\ j}\right) \;=\;& b_{11}\,b_{22}\,b_{33}-b_{11}\,b_{23}\,b_{32}-b_{21}\,b_{12}\,b_{33}+\\
&+b_{21}\,b_{13}\,b_{32}+b_{31}\,b_{12}\,b_{23}-b_{31}\,b_{13}\,b_{22}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

berechnet aus

$$\begin{aligned}
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{11} &= b_{22}\,b_{33}-b_{32}\,b_{23}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{12} &= b_{32}\,b_{13}-b_{12}\,b_{33}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{13} &= b_{12}\,b_{23}-b_{22}\,b_{13}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{21} &= b_{23}\,b_{31}-b_{33}\,b_{21}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{22} &= b_{33}\,b_{11}-b_{13}\,b_{31}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{23} &= b_{13}\,b_{21}-b_{23}\,b_{11}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{31} &= b_{21}\,b_{32}-b_{31}\,b_{22}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)a_{32} &= b_{31}\,b_{12}-b_{11}\,b_{32}\\
\det\left(a_i^{\ j}\right)a_{33} &= b_{11}\,b_{22}-b_{21}\,b_{12}\quad .
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Mit der Variation der Determinante $\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}$

$$\begin{aligned}
\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot} \;=\;& \dot{b}_{11}\,(b_{22}\,b_{33}-b_{32}\,b_{23})+\dot{b}_{21}\,(b_{32}\,b_{13}-b_{12}\,b_{33})+\dot{b}_{31}\,(b_{12}\,b_{23}-b_{22}\,b_{13})+\\
&+\dot{b}_{12}\,(b_{23}\,b_{31}-b_{33}\,b_{21})+\dot{b}_{22}\,(b_{33}\,b_{11}-b_{13}\,b_{31})+\dot{b}_{32}\,(b_{13}\,b_{21}-b_{23}\,b_{11})+\\
&+\dot{b}_{13}\,(b_{21}\,b_{32}-b_{31}\,b_{22})+\dot{b}_{23}\,(b_{31}\,b_{12}-b_{11}\,b_{32})+\dot{b}_{33}\,(b_{11}\,b_{22}-b_{21}\,b_{12})
\end{aligned} \tag{6.23}$$

bzw.

$$\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot} \;=\; \det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{b}_i^{\ j}\,a_j^{\ i} \tag{6.24}$$

lauten die Variationen der $a_j^{\ i}$

$$\begin{aligned}
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{11} &= \dot{b}_{22}\,b_{33}+\dot{b}_{33}\,b_{22}-\dot{b}_{32}\,b_{23}-\dot{b}_{23}\,b_{32}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{11}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{12} &= \dot{b}_{32}\,b_{13}+\dot{b}_{13}\,b_{32}-\dot{b}_{12}\,b_{33}-\dot{b}_{33}\,b_{12}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{12}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{13} &= \dot{b}_{12}\,b_{23}+\dot{b}_{23}\,b_{12}-\dot{b}_{22}\,b_{13}-\dot{b}_{13}\,b_{22}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{13}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{21} &= \dot{b}_{23}\,b_{31}+\dot{b}_{31}\,b_{23}-\dot{b}_{33}\,b_{21}-\dot{b}_{21}\,b_{33}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{21}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{22} &= \dot{b}_{33}\,b_{11}+\dot{b}_{11}\,b_{33}-\dot{b}_{13}\,b_{31}-\dot{b}_{31}\,b_{13}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{22}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{23} &= \dot{b}_{13}\,b_{21}+\dot{b}_{21}\,b_{13}-\dot{b}_{23}\,b_{11}-\dot{b}_{11}\,b_{23}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{23}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{31} &= \dot{b}_{21}\,b_{32}+\dot{b}_{32}\,b_{21}-\dot{b}_{31}\,b_{22}-\dot{b}_{22}\,b_{31}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{31}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{32} &= \dot{b}_{31}\,b_{12}+\dot{b}_{12}\,b_{31}-\dot{b}_{11}\,b_{32}-\dot{b}_{32}\,b_{11}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{32}\\
\det\left(b_i^{\ j}\right)\dot{a}_{33} &= \dot{b}_{11}\,b_{22}+\dot{b}_{22}\,b_{11}-\dot{b}_{21}\,b_{12}-\dot{b}_{12}\,b_{21}-\left[\det\left(b_i^{\ j}\right)\right]^{\cdot}a_{33}\quad .
\end{aligned} \tag{6.25}$$

6.1.3 Die Transformation orthonormierter Systeme

Orthonormierte Systeme (sie werden üblicherweise als *kartesische Systeme* bezeichnet) haben orthonormierte Basen. Seien die $\mathbf{p}_i$ oder $\mathbf{q}_j$ eine orthonormierte Basis, ist notwendig die Bedingung

$$\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j=\delta_{ij}\quad;\qquad \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j=\delta_{ij} \tag{6.26}$$

erfüllt. Die Basisvektoren jeder beliebigen Basis können ohne Einschränkung normiert werden. Mit Hilfe etwa des *Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens*[1] kann jede Basis orthogonalisiert werden. Für die lineare Transformation (6.2) auf Seite 186

$$\mathbf{q}_j=a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i$$

wird somit

$$\delta_{ij}=\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j=a_i^{\ k}\,a_j^{\ l}\;\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{p}_l=a_i^{\ k}\,a_j^{\ l}\;\delta_{kl}=a_i^{\ k}\,a_{jk} \tag{6.27}$$

und ebenso mit der Umkehrabbildung

$$\delta_{ik}=\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_k=\;b_i^{\ j}\,b_k^{\ l}\,\mathbf{q}_j\cdot\mathbf{q}_l=b_i^{\ j}\,b_k^{\ l}\,\delta_{jl}=b_i^{\ j}\,b_{kj}\quad. \tag{6.28}$$

► *Die Zeilenvektoren der Transformationsmatrizen zwischen orthonormierten Systemen bilden orthogonale Matrizen. Entsprechend sind diese Transformationen orthogonal.*

Ferner folgt sofort:

► *Die Determinante orthogonaler Matrizen hat den Wert 1. Somit verschwindet in diesem Fall die Variation der Determinante:*

---

[1] Siehe etwa in LICHNEROWICZ, A. [1966], p. 22

$$\begin{aligned} &\det\left(a_j^{\ i}\right) = \pm 1 \qquad (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \ , \ \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}) \\ &\left[\det\left(a_j^{\ i}\right)\right]^{\cdot} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.29}$$

Für orthogonale Matrizen folgt wegen der Beziehungen (6.4) bzw. (6.5) und mit (6.27) zwischen den Matrizen und ihren Inversen die Beziehungen

$$b_l^{\ i}\, a_i^{\ k}\, a_{jk} = \delta_l^{\ k}\, a_{jk} = a_{jl} = b_l^{\ i}\, \delta_{ij} = b_{lj}$$

somit

$$b_{ij} = a_{ji} \quad , \quad (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \ , \ \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}) \quad . \tag{6.30}$$

► *Die Transformationsmatrizen orthonormierter Systeme haben als inverse ihre transponierte.*

Somit folgt aus Beziehung (6.28) wegen (6.30) unmittelbar die Aussage

$$a^j_{\ i}\, a_{jk} = \delta_{ik} \quad . \tag{6.31}$$

► *Auch die Spaltenvektoren der Transformationsmatrizen zwischen orthonormierten Systemen bilden orthogonale Matrizen und erfüllen die Orthogonalitätsbedingung.*

Anmerkung: Die Bedingung (6.27) bzw. (6.28), wobei (6.30) erfüllt ist, wird als „*Orthogonalitätsbedingung*“ bezeichnet, eine Transformation (6.2) bzw. (6.3), welche die Orthogonalitätsbedingung erfüllt, als *orthogonale Transformation*. ◄

Bei Orthonormie gelten im dreidimensionalen Raum wegen der Beziehungen (6.16) bzw. (6.22) die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{33} &= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \\ a_{31} &= a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22} \\ a_{32} &= a_{13}\, a_{21} - a_{11}\, a_{23} \\ a_{13} &= a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31} \\ a_{11} &= a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32} \\ a_{12} &= a_{23}\, a_{31} - a_{21}\, a_{33} \\ a_{23} &= a_{31}\, a_{12} - a_{32}\, a_{11} \\ a_{21} &= a_{32}\, a_{13} - a_{33}\, a_{12} \\ a_{22} &= a_{33}\, a_{11} - a_{31}\, a_{13} \quad . \end{aligned} \tag{6.32}$$

Im Fall dreidimensionaler orthonormierter Systeme reduziert sich die Transformation (6.16) wegen (6.17) auf das Vektorprodukt der drei Spaltenvektoren $\left(a_{ji}\right)$ (j=1,2,3; i fest).

Als eine einfache ANWENDUNG soll die **Variation der Basisvektoren orthonormierter Systeme** berechnet werden.

Im Fall orthonormierter Basen $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{q}_j$ können die Variationen der Basisvektoren im Rahmen einer Transformation auch im jeweils anderen System mit Hilfe der jeweiligen Variationsparameter sehr einfach dargestellt werden:

Aus der Darstellung (4.202) auf Seite 48

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i^{\ j}\, \mathbf{p}_j$$

folgt aus der Transformation (6.3) im Fall orthonormierter Systeme wegen der Beziehung (6.30) mit

$$\mathbf{p}_j = a^k_{\ j}\ \mathbf{q}_k$$

der Variationsausdruck

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i^{\ j}\, a^k_{\ j}\, \mathbf{q}_k \quad , \tag{6.33}$$

sowie aus

$$\dot{\mathbf{q}}_j = q_j^{\ k}\, \mathbf{q}_k$$

und wegen der Transformation (6.2) mit

$$\mathbf{q}_k = a_k^{\ i}\ \mathbf{p}_i$$

entsprechend der Variationsausdruck

$$\dot{\mathbf{q}}_j = q_j^{\ k}\, a_k^{\ i}\, \mathbf{p}_i \quad . \tag{6.34}$$

Die Variationsmatrizen $\left(p_i^{\ j}\right)$ bzw. $\left(q_j^{\ k}\right)$ eines jeden Systems sind also von zentraler Bedeutung um eine Variation von einem System in eine anderes zu untersuchen. Es wird also das erste Bestreben sein müssen, die Variationsmatrix eines jeden Basissystems so gut wie irgend möglich kennen zu lernen. Erst dann kann sinnvollerweise die Transformation eines Bewegungszustandes untersucht werden.

6.1.4 Transformation des Ortsvektors

Der Vektor **r** habe im $\mathbf{p}_i$- System die Komponenten x^i, im $\mathbf{q}_j$- System die Komponenten y^j:

$$\mathbf{r} \ = \ x^i\, \mathbf{p}_i \ = \ y^j\, \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.35}$$

Mit den Transformationen (6.2) und (6.3) der Basisvektoren ergibt sich

$$x^i\, \mathbf{p}_i \ = \ y^j\, a_j^{\ i}\, \mathbf{p}_i \quad ,$$

somit

$$x^i \ = \ y^j\, a_j^{\ i} \tag{6.36}$$

bzw. umgekehrt aus

$$x^i\, b_i^{\ j}\, \mathbf{q}_j \ = \ y^j\, \mathbf{q}_j$$

auch

$$y^j \ = \ x^i\, b_i^{\ j} \tag{6.37}$$

6.1.5 Transformation des Geschwindigkeitsvektors

Für den Geschwindigkeitsvektor gilt nach Formel (6.35)

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \;=\; \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j + y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{6.38}$$

Aus den Formeln (6.36) und (6.37) folgt für die Geschwindigkeitskomponenten bezüglich des $\mathbf{p}_i$ – Systems

$$\dot{x}^i \;=\; \dot{y}^j\,a_j{}^i + y^j\,\dot{a}_j{}^i \tag{6.39}$$

sowie bezüglich des $\mathbf{q}_j$ – Systems

$$\dot{y}^j \;=\; \dot{x}^i\,b_i{}^j + x^i\,\dot{b}_i{}^j \quad . \tag{6.40}$$

Hier zeigt sich wieder der *relative* Charakter in der mathematischen Beschreibung von Geschwindigkeiten. Durch Differentiation eines Ortsvektors können nur Geschwindigkeiten *relativ* zu einem gegebenen System gefunden werden, hier der Geschwindigkeitsvektor bezüglich des $\mathbf{p}_i$- Systems

$$\dot{\mathbf{r}}_p \;\coloneqq\; \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \tag{6.41}$$

der bezüglich des $\mathbf{q}_j$- Systems die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_p \;=\; \left(\dot{y}^j + y^k\,\dot{a}_k{}^i\,b_i{}^j\right)\mathbf{q}_j \tag{6.42}$$

hat. Umgekehrt ist der auf das $\mathbf{q}_j$- System bezogene Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{q} \;\coloneqq\; \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j \quad . \tag{6.43}$$

Er hat im $\mathbf{p}_i$- System die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;=\; \left(\dot{x}^i + x^k\,\dot{b}_k{}^j\,a_j{}^i\right)\mathbf{p}_i \quad . \tag{6.44}$$

Darstellung des absoluten Geschwindigkeitsvektors

Unabhängig von der Frage, ob es physikalisch sinnvoll ist nach einem absoluten Geschwindigkeitsvektor zu suchen, kann rein mathematisch der absolute Geschwindigkeitsvektor mit Hilfe der Variationsparameter des Basissystems gefasst werden. Mit den Variationsparametern $p_i{}^j$ des $\mathbf{p}_i$ – Systems, der also die gesamte (= absolute) Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Systems enthalten soll, entsprechend den Variationsparametern $q_i{}^j$ des $\mathbf{q}_j$ – Systems, gelten die Darstellungen für den „absoluten“ Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\left(\dot{x}^i + x^j\;p_j{}^i\right)\mathbf{p}_i \tag{6.45}$$

sowie

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\dot{y}^j + y^i\;q_i{}^j\right)\mathbf{q}_j \quad . \tag{6.46}$$

Speziell **im dreidimensionalen Raum** ergibt sich damit und wegen $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i$ sowie $\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$ für den absoluten Geschwindigkeitsvektor die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_p + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.47}$$

Eine Bestimmung des *absoluten Geschwindigkeitsvektors* $\dot{\mathbf{r}}$, der also in Bezug auf das inertiale Basissystem des Weltalls gemessen werden muss, ist aber wegen der eingeschränkten Messmöglichkeiten (bis jetzt) nicht möglich. Man wird daher auf die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right) \times \mathbf{r} =: \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r} \tag{6.48}$$

reduzieren müssen. Der *relative Eigenbewegungsvektor*

$$\mathbf{D}_{qp} := \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p \tag{6.49}$$

beschreibt also die Rotation des $\mathbf{p}_i$- Systems und des $\mathbf{q}_j$ – Systems relativ zueinander und kann in der Praxis hinreichend genau bestimmt werden. Der relative Eigenbewegungsvektor wird also in allen Vorgängen, die eine Rotation eines Systems zu einem anderen beschreiben, in dieser Form eine wichtige Rolle spielen.

Wird für die zugehörigen allgemeinen Eigenbewegungsvektoren („*Darboux*sche Vektoren“)

$$\mathbf{D}_p =: D_p^i \mathbf{p}_i \;, \mathbf{D}_q =: D_q^j \mathbf{q}_j \tag{6.50}$$

gesetzt und angenommen, dass die Basissysteme $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{q}_j$ orthonormiert sind, lauten entsprechend dem System (4.205) auf Seite 48 die Variationsformeln („allgemeine *Frenet*schen Formeln") für das alte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1 &= D_{p3}\mathbf{p}_2 - D_{p2}\mathbf{p}_3 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= -D_{p3}\mathbf{p}_1 + D_{p1}\mathbf{p}_3 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 &= D_{p2}\mathbf{p}_1 - D_{p1}\mathbf{p}_2 \quad . \end{aligned} \tag{6.51}$$

und für das neue System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= D_{q3}\mathbf{q}_2 - D_{q2}\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{q3}\mathbf{q}_1 + D_{q1}\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= D_{q2}\mathbf{q}_1 - D_{q1}\mathbf{q}_2 \quad . \end{aligned} \tag{6.52}$$

Die Zerlegung der Drehung in drei räumliche Einzeldrehungen wird für den Fall orthonormaler Bezugssysteme in Abschnitt 6.3.2 auf Seite 204 durchgeführt.

6.1.6 *Hansen*-ideale Transformationen

Da jede Bewegung nur relativ zu beschreiben geht, muss zur Beschreibung einer Bewegung stets die Eigenbewegung des Basissystems mitgeschleppt werden, oder die Bewegung muss ausdrücklich als relativ zu diesem Basissystem bezeichnet werden (d. h. durch $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}_p$ dargestellt werden). Wir wollen uns nun die Frage stellen, ob ein neues $\mathbf{q}_j$- Basissystem so konstruiert werden kann, dass die Beschreibung der Bewegung im neuen System ohne explizites Mitschleppen der Eigenbewegung des alten Systems erfolgen kann. Wir führen dazu die Transformation vom alten $\mathbf{p}_i$- System ins neue $\mathbf{q}_j$- System

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\,i}\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = b_i^{\,j}\mathbf{q}_j \tag{6.53}$$

durch mit der Variation

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j^{\,i}\mathbf{p}_i + a_j^{\,i}\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{6.54}$$

Hier sollen die $\dot{\mathbf{p}}_i$ nicht alle verschwinden, d. h. es gibt einen Eigenbewegungsvektor („*Darboux*schen Vektor“) $\mathbf{D}_p$ mit

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i$$

und es wird

$$a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i = a_j{}^i \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.55}$$

Da die $\mathbf{q}_j$ ein Basissystem sind, also notwendig

$$\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j \neq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \tag{6.56}$$

gelten muss, es andererseits für das $\mathbf{p}_i$- System nur genau einen *Darboux*schen Vektor geben kann, kann

$$\mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_j = 0 \tag{6.57}$$

nur für genau ein *j* erfüllt werden. Für dieses und nur für dieses *j* ist dann

$$a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad .$$

Die Transformation $\mathbf{q}_j = a_j{}^i \mathbf{p}_i$ kann dann und auch nur dann als *Hansen*-ideal bezeichnet werden. Die Bedeutung der „*Hansen*-idealen“ Transformation wird durch die Eigenschaft, dass die „ideale“ Eigenschaft nur für eine Komponente des Ortsvektors gelten kann, erheblich eingeschränkt. Die „*Hansen*-ideale“ Transformation lässt sich somit auf *Hansen*-ideale Systeme zurückführen: Die Transformationskoeffizienten $a_j{}^i$ sind für genau ein bestimmtes *j* die Koeffizienten des genau einen Vektors $\mathbf{q}_j$, der mit der Basis $\mathbf{p}_i$ ein *Hansen*-ideales System bildet.

6.1.7 Transformation des Beschleunigungsvektors

Wir beziehen den (absoluten) Beschleunigungsvektor auf verschiedene Basissysteme $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{q}_j$. Die Koordinatendarstellung nach Formel (4.137) lautet dann

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}^i \mathbf{p}_i + 2\dot{x}^i \dot{\mathbf{p}}_i + x^i \ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{y}^j \mathbf{q}_j + 2\dot{y}^j \dot{\mathbf{q}}_j + y^j \ddot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{6.58}$$

Mit der Bezeichnung

$$\dot{\mathbf{v}}_q := \ddot{y}^j \mathbf{q}_j \tag{6.59}$$

folgt für den $\mathbf{q}_j$ bezogenen relativen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j \mathbf{q}_j$ aus Formel (6.46) im dreidimensionalen Raum mit $\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$

$$\ddot{\mathbf{r}}_q = \ddot{y}^j \mathbf{q}_j + \dot{y}^j \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{\mathbf{v}}_q + \dot{y}^j \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$$

und schließlich wegen $\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j \mathbf{q}_j$

$$\ddot{\mathbf{r}}_q = \dot{\mathbf{v}}_q + \mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{r}}_q \quad . \tag{6.60}$$

Diese Beziehung ist höchst bemerkenswert. Es zeigt sich nämlich, dass der relative Beschleunigungsvektor, also die Beschleunigung relativ zu einem $(\mathbf{q}_j -)$ Basissystem, noch den Ei-

genanteil $\left(\mathbf{D}_q\right)$ der Rotation dieses Basissystems gegenüber dem inertialen (Haupt-) Basissystem enthält. Dieser Anteil ist, wie in Gleichung (6.61) zu sehen sein wird, der halbe Wert der Koriolisbeschleunigung. Ihr gesamter Wert zeigt sich erst im absoluten Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}$.

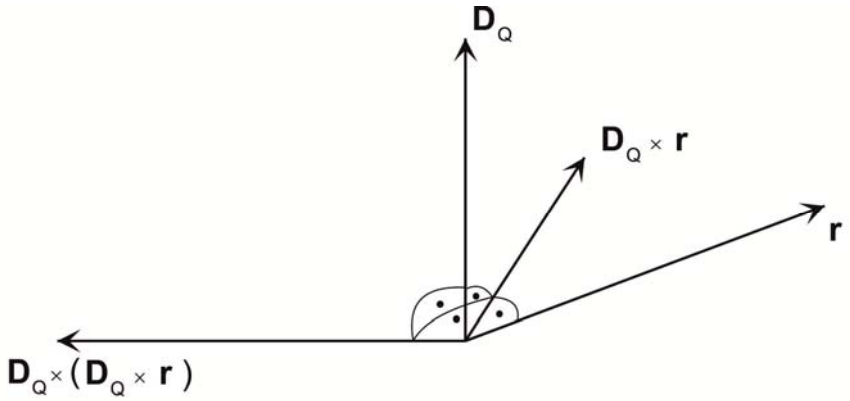


Bild 6-1: Der Vektor der Zentrifugalbeschleunigung

Mit Gleichung (6.60) ist es nun möglich, bei einem rotierendem orthonormierten System aus dem Geschwindigkeitsvektor in der Form (6.47) den absoluten Beschleunigungsvektor, also den Beschleunigungsvektor bezüglich des inertialen Basissystems, herzuleiten. Es wird in

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_q + \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{r} + \mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{r}}$$

mit $\dot{\mathbf{r}}$ aus Formel (6.47) und $\ddot{\mathbf{r}}_q$ unmittelbar

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}_q + 2\mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times (\mathbf{D}_q \times \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.61}$$

Hier bedeuten

1. $\dot{\mathbf{v}}_q$ der auf das rotierende System bezogene Beschleunigungsvektor,
2. $2(\mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{r}}_p)$ eine Beschleunigung, die nur dann auftritt, wenn das bewegte Objekt bezogen auf das rotierende System eine nicht verschwindende Geschwindigkeit hat, die zudem nicht parallel zum Eigenbewegungsvektor (*Darboux*schen Vektor) $\mathbf{D}_q$ verlaufen soll. Diese Beschleunigung wird als *Coriolisbeschleunigung* bezeichnet.
3. $\mathbf{D}_q \times (\mathbf{D}_q \times \mathbf{r})$ eine Beschleunigung, die stets (gemäß Bild 6-1) von der Drehachse radial weggerichtet ist. Sie wird als *Zentrifugalbeschleunigung* bezeichnet.
4. $\dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{r}$ eine Beschleunigung, die eine Folge einer Eigenvariation des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_q$ ist.

Coriolis -, Zentrifugal - und die der Eigenvariation des Eigenbewegungsvektors folgende Beschleunigung treten nur bei Eigenrotation des Bezugssystems auf. Sie werden aber nicht im fundamentalen Basissystem beobachtet. Aus diesem Grund ist es in der vorrelativistischen klassischen Mechanik üblich, diese Beschleunigungen als „Scheinbeschleunigungen“ und die ihnen zugeordneten Kräfte als „Scheinkräfte“ zu bezeichnen.

Ergänzend zu der vorstehenden Herleitung soll noch der Zusammenhang mit der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{p}}_i$ des Basissystems dargestellt werden. Mit der Beziehung $\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$ wird

$$\dot{y}^j \dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \mathbf{D}_q \times \dot{y}^j \mathbf{q}_j \;=\; \mathbf{D}_q \times \mathbf{r}_q \tag{6.62}$$

erhalten. Dann ist für die Beschleunigung des Basissystems

$$\ddot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{q}_j + \mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{q}_j \;+\; \mathbf{D}_q \times \left(\mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j \right) \tag{6.63}$$

und daher

$$y^j \ddot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{r} + \mathbf{D}_q \times \left(\mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \right) \quad . \tag{6.64}$$

Die Beziehungen (6.62) in (6.64) und (6.58) eingesetzt, führt wieder auf die allgemeingültige Beziehung (6.61).

Für die Transformation zwischen dem $\mathbf{p}_i$- und dem $\mathbf{q}_j$- System nach den Formeln (6.13) auf Seite 187 erhält man

$$\ddot{\mathbf{p}}_i \;=\; \ddot{a}_i^j \mathbf{q}_j + 2\dot{a}_i^j \dot{\mathbf{q}}_j + a^j{}_i \ddot{\mathbf{q}}_j \quad , \tag{6.65}$$

wobei die noch unbekannten $\ddot{a}_i^j$ bei Bedarf unmittelbar durch Differentiation aus den $\dot{a}_i^j$ berechnet werden müssen. Siehe als Beispiel im Fall von Drehungen im dreidimensionalen Raum die Formeln (6.99) auf Seite 206 . Die $\ddot{\mathbf{q}}_j$ können direkt als Linearkombinationen der $\mathbf{q}_j$ geschrieben werden. Formel (6.13) auf Seite 187 liefert im dreidimensionalen Raum

$$\ddot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{q}_j + \mathbf{D}_q \times \dot{\mathbf{q}}_j$$

und wieder

$$\ddot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{\mathbf{D}}_q \times \mathbf{q}_i + \mathbf{D}_q \times (\mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j) \quad . \tag{6.66}$$

Für die Variation des System - Variationsvektors ist analog Formel (4.226) auf Seite 52 (der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q$ bildet mit dem zugehörigen $\mathbf{q}_j$ - Basissystem eine *Hansen*-ideales System, so dass $D_q^j \dot{\mathbf{q}}_j = 0$ gilt)

$$\mathbf{D}_q \;=\; D_q^j \mathbf{q}_j \quad ; \quad \dot{\mathbf{D}}_q \;=\; \dot{D}_q^j \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.67}$$

Die $\ddot{\mathbf{q}}_j$ können auch direkt aus den allgemeinen System - Variationsformeln (6.52) auf Seite 194 berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{q}}_1 \;&=\; -\left(D_{q2}^2 + D_{q3}^2\right)\mathbf{q}_1 + \left(\dot{D}_{q3} + D_{q2}\,D_{q1}\right)\mathbf{q}_2 - \left(\dot{D}_{q2} - D_{q1}\,D_{q3}\right)\mathbf{q}_3 \\
\ddot{\mathbf{q}}_2 \;&=\; \left(-\dot{D}_{q3} + D_{q1}\,D_{q2}\right)\mathbf{q}_1 - \left(D_{q1}^2 + D_{q3}^2\right)\mathbf{q}_2 - \left(\dot{D}_{q1} + D_{q2}\,D_{q3}\right)\mathbf{q}_3 \\
\ddot{\mathbf{q}}_3 \;&=\; -\left(\dot{D}_{q2} - D_{q1}\,D_{q3}\right)\mathbf{q}_1 + \left(-\dot{D}_{q1} + D_{q2}\,D_{q3}\right)\mathbf{q}_2 - \left(D_{q1}^2 + D_{q2}^2\right)\mathbf{q}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Die Berechnung der $\dot{D}_{qj}$ im Fall der Drehungen von Orthonormalsystemen im dreidimensionalen Raum wird in Abschnitt 6.3.12 auf Seite 225 durchgeführt.

6.2 Geradlinige Bewegungen

Jede Bewegung, wie etwa die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors in Gleichung (6.47) auf Seite 193 zeigt, kann als Kombination aus Translation und Rotation verstanden werden. Wir wollen das Transformationsverhalten bei Translation in diesem Abschnitt und bei Rotation im nächsten Abschnitt näher untersuchen.

Jeder bewegte Körper kann als Ursprung eines Koordinatensystems ein solches System mitschleppen. Eine geradlinige Bewegung kann somit stets auf die geradlinige Bewegung eines Systems bezüglich eines anderen Systems zurückgeführt werden.

6.2.1 Geradlinig bewegte Systeme

Nach Formel (4.192) auf Seite 44 ist ein Basissystem $\mathbf{p}_i$ genau dann geradlinig bewegt, wenn

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{6.69}$$

Eine zweite Basis $\mathbf{q}_j$, die sich ebenfalls geradlinig bewege

$$\dot{\mathbf{q}}_j \equiv 0 \quad , \tag{6.70}$$

sei auf die erste durch die Transformation

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i \tag{6.71}$$

bezogen. Hier ist offenbar

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i + a_j^{\ i}\,\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i = 0 \quad , \quad (\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0) \quad . \tag{6.72}$$

Da die $\mathbf{p}_i$ als Basis linear unabhängig sind, ist notwendig für die geradlinige Bewegung des Systems $\mathbf{q}_j$ bezüglich des Systems $\mathbf{p}_i$ (und umgekehrt)

$$\dot{a}_j^{\ i} = 0 \quad . \tag{6.73}$$

Die $a_j^{\ i}$ geben dann eine feste Drehung des $\mathbf{q}_j$- Systems bezüglich des $\mathbf{p}_i$- Systems wieder, die im Fall $a_j^{\ i} = \delta_j^{\ i}$ zu einer Nulldrehung ausartet: die beiden Systeme sind dann parallel zueinander. Jedenfalls kann aus der Beziehung der Basen keine Aussage über die wechselseitige Bewegung der Systeme gemacht werden.

Sei nun $\mathbf{a}_1$ der Ortsvektor des Mittelpunktes des $\mathbf{q}_j$- Systems im $\mathbf{p}_i$- System zum Zeitpunkt t_1 und sei zu einem beliebigen Zeitpunkt t

$$\mathbf{a} \coloneqq \mathbf{a}_1 + \mathbf{b} \quad . \tag{6.74}$$

Der Vektor $\mathbf{b}$ gibt die Richtung an, in der sich das $\mathbf{q}_j$- System bewegt. Sei b der Betrag dieses Vektors

$$\mathbf{b} = b\,\mathbf{b}_0 \quad , \quad \mathbf{b}_0^2 = 1 \quad , \tag{6.75}$$

ist

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{b}\,\mathbf{b}_0 \quad , \tag{6.76}$$

wobei wegen der Geradlinigkeit der Bewegung $\dot{\mathbf{b}}_0 \equiv 0$ sein muss. $\dot{b}$ beinhaltet die nicht notwendig konstante Geschwindigkeit, mit der sich das $\mathbf{q}_j$- System gegenüber dem $\mathbf{p}_i$- System bewegt.

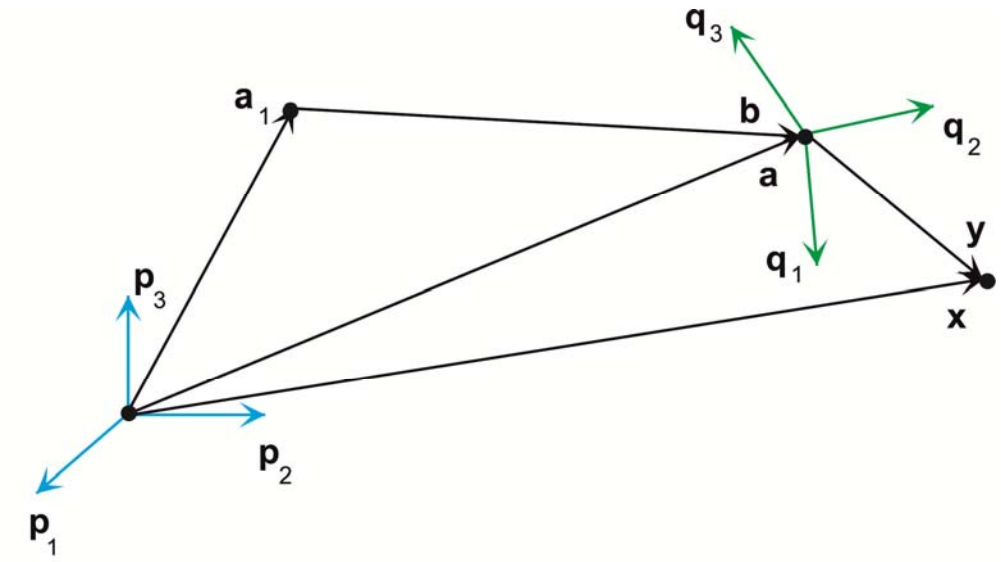


Bild 6-2: Punktdarstellung in geradlinig bewegten Systemen

Ein Punkt *P* mit Ortsvektor **x** im $\mathbf{p}_i$- System habe im $\mathbf{q}_j$- System den Ortsvektor **y**. Es gilt dann die Beziehung

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a}_1 + b\,\mathbf{b}_0 \quad . \tag{6.77}$$

Seien die Koordinatendarstellungen

$$\mathbf{x} =: x^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{y} =: y^j\,\mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{a}_1 =: A_1^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{b}_0 =: B_0^i\,\mathbf{p}_i \tag{6.78}$$

gegeben, gelten die Koordinatenbeziehungen

$$x^i = y^j\,a_j{}^i + A_1^i + b\,B_0^i \tag{6.79}$$

umgekehrt

$$y^j = x^i\left(a_j{}^i\right)^{-1} - A_1^i\left(a_j{}^i\right)^{-1} - b\,B_0^i\left(a_i{}^j\right)^{-1} \tag{6.80}$$

für die wechselseitigen Darstellungen eines Punktes in geradlinig zueinander bewegten Systemen.

Findet keine Bewegung statt ($b \equiv 0$) und sind die $\mathbf{q}_j$ parallel zu den $\mathbf{p}_i$ ($a_j{}^i \equiv \delta_j{}^i$), ist das $\mathbf{q}_j$- System parallel zum $\mathbf{p}_i$- System verschoben. Man spricht in diesem Fall von *Verschiebung* als einfachstem (ausgeartetem) Fall geradliniger Bewegung.

6.2.2 Gleichförmig geradlinig bewegte Systeme

Das $\mathbf{q}_j$- System bewegt sich gegenüber dem $\mathbf{p}_i$- System mit konstanter Geschwindigkeit, wenn $\dot{b} = const.$ und

$$b = b_1 + \dot{b}(t - t_2) \quad , \quad \dot{b} = const. \tag{6.81}$$

Wenn der Punkt *P* für $t = t_1$ den Ort $\mathbf{a}_1$ durchläuft, wird außerdem $b_1 = 0$. In diesem Fall ist

$$V = \dot{b} \tag{6.82}$$

die *Relativgeschwindigkeit* der beiden (geradlinig bewegten) Systeme. Wenn die beiden Systeme nicht gegeneinander gedreht sind, wenn also $a_j^{\ i} = \delta_j^{\ i}$ ist, was bei derartigen Untersuchungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf, gilt dann für die Koordinatentransformation

$$x^i = y^i + A_1^i + V\, B_0^i\, (t - t_0) \quad . \tag{6.83}$$

Die Bewegung des $\mathbf{q}_j$- Systems kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit so dargestellt werden, dass sie durch den Ursprung des $\mathbf{p}_i$- Systems geht, dass also

$$A_1^i = 0 \quad . \tag{6.84}$$

Durch geeignete Drehung des $\mathbf{p}_i$- Systems kann es so eingerichtet werden, dass diese Bewegung in Richtung der $\mathbf{p}_1$- Achse verläuft, so dass also noch

$$B_0^1 = 1 \quad , \quad B_0^2 = B_0^3 = 0 \tag{6.85}$$

ist. Dann wird die gleichförmige (=konstante) geradlinige Bewegung durch die sogenannte *Galilei-Transformation*

$$x_1 = y_1 + V\,(t - t_1) \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad x_3 = y_3 \quad , \quad t_p = t_q = t \tag{6.86}$$

beschrieben.

Gleichförmig geradlinig bewegte Systeme sind Systeme, auf die keine Beschleunigungen einwirken, die somit wie durch den Trägheitssatz beschrieben nur ihrer Trägheit folgen und daher üblicherweise als *inertiale Systeme* bezeichnet werden. *Galilei* Transformationen gelten nur zwischen inertialen Systemen und auch nur dann, wenn die Zeit als absolut angesehen wird.

Da wir in diesem Kapitel angenommen haben, dass die Bewegung in absoluter Zeit erfolgen soll, wird ein Ereignis im $\mathbf{p}_i$- System gleichzeitig im $\mathbf{q}_j$- System beobachtet. Wenn t_p die Zeit im $\mathbf{p}_i$- System ist und t_q die Zeit im $\mathbf{q}_j$- System, muss also $t_p = t_q$ sein, beide also gleich der absoluten Zeit *t* sein. Diese Denkweise erscheint vor dem Hintergrund räumlicher Bewegungen überflüssig. Sie ist aber physikalisch nicht haltbar, denn seit den Messungen von *A. A. Michelson* (1881) (Versuch von *Michelson* und *Morley*) ist bekannt[1], dass die Geschwindigkeit, mit der sich ein Signal von einem Ereignis *P* ausbreitet von endlicher, und zwar (vermutlich) konstanter Geschwindigkeit ist. Man bezeichnet diese Geschwindigkeit als *Signalgeschwindigkeit* oder *Wirkungsgeschwindigkeit*. Die Folge ist, dass ein Ereignis *P* im $\mathbf{p}_i$- System zu einem anderen Zeitpunkt als im $\mathbf{q}_j$- System gemessen werden kann, d. h. die Zeit läuft im $\mathbf{p}_i$- System anders als im $\mathbf{q}_j$- System ab. Die Signalgeschwindigkeit ist der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum gleich. Die Lichtgeschwindigkeit ist so groß, dass sie erst relativ spät in der Menschheitsgeschichte, nämlich erst 1676 durch *Olaf Römer*[2], gemessen werden konnte. dass die Lichtgeschwindigkeit in unterschiedlichen

[1] *Michelson, A. A.* (1852-1931) aus Strelno (Posen), in Pasadena - Los Angeles, Morley, E. W. (1838-1923) in Los Angeles

[2] *Rømer, Olaus (Olé)* (1644–1710), aus Aarhus in Dänemark, ab 1672 am Pariser Observatorium, ab 1691 Direktor der Sternwarte in Kopenhagen

Systemen und unterschiedlichen Richtungen gleich und überall konstant ist, konnte erst viel später entdeckt werden, denn die Geschwindigkeiten, mit denen die Menschen es im Alltag zu tun haben, sind zu ihr relativ klein. Diese – relativistischen – Einflüsse auf die Beschreibung von Bewegungen werden Abschnitt 8.17 auf Seite 434 in die Überlegungen einbezogen.

6.3 Drehbewegungen im dreidimensionalen Raum

Zur Darstellung einer Drehbewegung werden einige aus der sphärischen Trigonometrie wohlbekannte Formeln benötigt, die in Anhang A kurz einheitlich hergeleitet werden[1]. Im folgenden Abschnitt werden nach einigen für die Satellitenbahnmechanik bedeutsamen Beispielen darauf aufbauend einige Formeln der allgemeinen Drehbewegung zur Vorbereitung der Darstellung von beliebigen Bewegungen und speziell der Bewegung von Raumflug - und Himmelskörpern behandelt. Es zeigt sich, dass in der Satellitendynamik der Kosinussatz der Winkel von besonderer Bedeutung ist, der häufig gerne unterschätzt wird.

6.3.1 Einige Anwendungen der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

BEISPIEL 1: **Berechnung von Knoten und Neigung eines durch zwei sphärische Punkte gegebenen Großkreises**

Nach Bild 6-3 seien die Punkte $A(\alpha_A, \delta_A)$ und $B(\alpha_B, \delta_B)$ gegeben. Der Großkreis durch diese Punkte schneidet den Äquator der (Einheits-) Kugel im Knoten Ω unter dem Winkel i. Die Winkel Ω bezogen auf einen Anfangspunkt auf dem Äquator und Neigung i sind zu berechnen.

N sei ein Pol der Kugel. Die sphärische Distanz γ der Punkte A und B kann mit dem Kosinussatz der Seiten berechnet werden:

$$\cos\gamma = \cos(\alpha_B - \alpha_A)\cos\delta_A\cos\delta_B + \sin\delta_A\sin\delta_B \quad .$$

Der Innenwinkel β bei B in dem sphärischen Poldreieck ABN wird mit dem Sinussatz berechnet:

$$\sin\beta = \frac{\cos\delta_A \sin(\alpha_B - \alpha_A)}{\sin\gamma} \quad , \quad (\sin\gamma \neq 0) \quad .$$

Der Kosinussatz der Winkel ergibt die Neigung aus

$$\cos i = -\cos\delta_B \sin\beta$$

und Ω wird schließlich mit dem Sinussatz und dem Kosinussatz der Winkel berechnet:

$$\sin(\Omega - \alpha_B) = \frac{\sin\beta\sin\delta_B}{\sin i} \quad , \quad (\sin i \neq 0)$$

$$\cos(\Omega - \alpha_B) = \frac{\cos\beta}{\sin i} \quad .$$

Die ausgearteten Fälle $\sin\gamma = 0$ und $\sin i = 0$ können hier übergangen werden.

[1] Band V

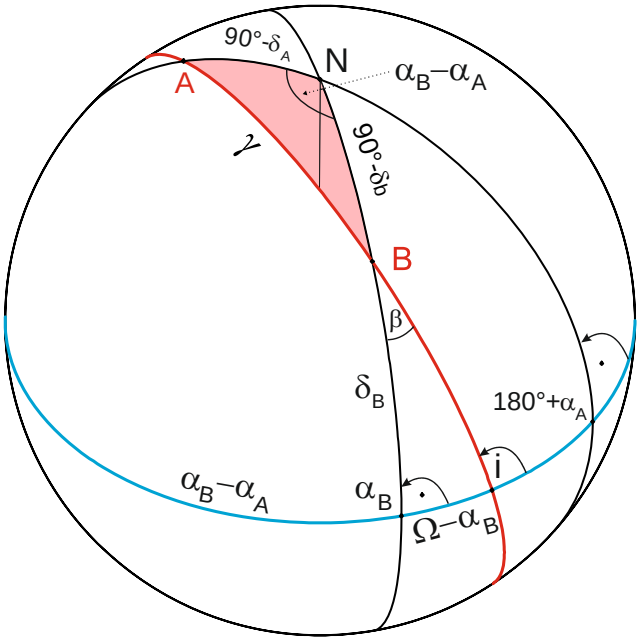


Bild 6-3: Berechnung von Knoten und Inklination eines durch zwei sphärische Punkte gegebenen Großkreises

Numerisches BEISPIEL: Gegeben seien die Punkte $A(0°, 70°)$, $B(60°, 40°)$. Mit den vorstehenden Formeln werden die folgenden Werte berechnet: $\gamma = 42°.69$, $\beta = 25°.90$, $i = 109°.55$, $\Omega = 77°.34$. ◀

BEISPIEL 2: **Heuristische Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung**

Als eine einfache Anwendung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sollen die Variationsgleichungen, die in Abschnitt 4.4.8 auf Seite 82 vollständig allgemein analytisch hergeleitet wurden, in heuristisch anschaulicher Weise aufgestellt werden. Auf diese Weise wird dann auch die geometrische Deutung des „versteckten“ zweiten Bahnwinkels η elementar bestätigt. In Bild 6-4 seien P der Ort des Satelliten mit Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$, K_1 der Knoten der Bahnebene ohne Variation der Bahnebene, K_2 mit Berücksichtigung einer Variation der Knotenlänge Ω um den Winkel ΔΩ, i die Neigung ohne, $i+\Delta i$ mit Variation, u das Argument der Breite ohne und $u+\Delta u$ mit Variation und Δη der Winkel, um den die Bahnebene um den Radiusvektor auf Grund der Variation gedreht wird. Dann gelten im Dreieck K_1, K_2, P die folgenden Beziehungen:

1. Der Sinussatz gibt

$$\frac{\sin u}{\sin(i+\Delta i)} = \frac{\sin \Delta\Omega}{\sin \Delta\eta} \quad ,$$

also wegen der (angenommenen!) Kleinheit der Winkel Δi, Δη, ΔΩ in erster Näherung

$$\Delta\Omega \approx \Delta\eta \frac{\sin u}{\sin i}$$

und im Grenzübergang

$$\dot{\Omega} = \dot{\eta}\frac{\sin u}{\sin i} \quad ,$$

d.h. die zweite der Variationsgleichungen (4.391) auf Seite 87.

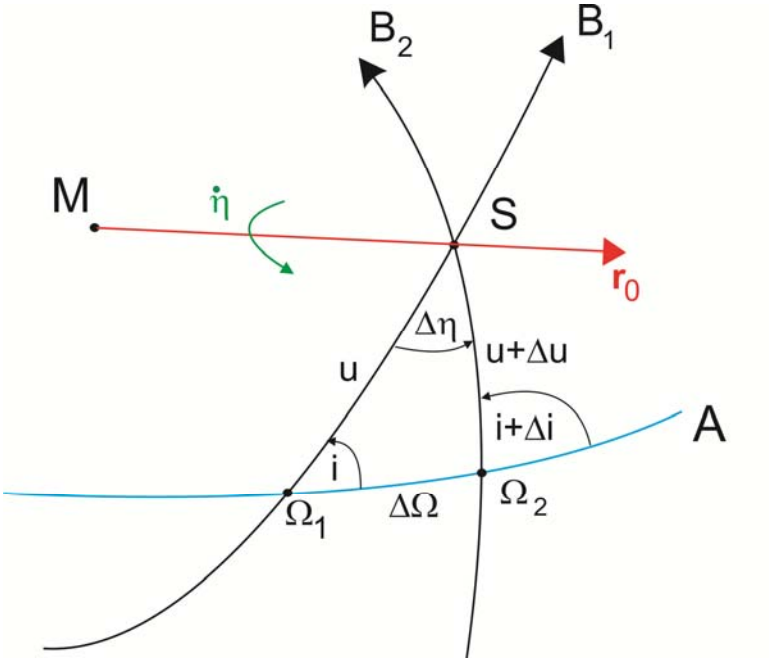


Bild 6-4: Zur heuristischen Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung. A - Basisebene, B1 - Bahnebene ohne Variation, B2 - Bahnebene mit Variation

2. Der Kosinussatz der Winkel gibt

$$\cos\left[180° - (i + \Delta i)\right] = \cos u \, \sin\Delta\eta \, \sin i - \cos\Delta\eta \, \cos i \quad ,$$

somit in erster Näherung

$$\Delta i \approx \Delta\eta \cos u$$

und im Grenzübergang

$$(i)^{\cdot} = \dot{\eta}\cos u \quad ,$$

also die erste Variationsgleichung der räumlichen Bewegung.

Die in Abschnitt 4.4.5 auf Seite 76 besprochene geometrische Deutung von η als einem Winkel, der die Drehung der Bahnebene um den Radiusvektor beschreibt, wird durch die heuristische Herleitung dieser Formeln bestätigt. Die hier durchgeführte Herleitung der Variationsgleichungen gilt nur bei (undefinierter!) Kleinheit der beteiligten Änderungsgrößen Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\eta$, Δu und lässt auch nicht die notwendige Einbeziehung einer Eigenbewegung des Basissystems erkennen, die in den allgemeingültigen Formeln (4.389) auf Seite 86 enthalten ist. ◀

BEISPIEL 3: Zur numerischen Auswertung eines Ausdrucks der Form $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, wie er bei der Berechnung von Winkeln, die nur in zwei Quadranten definiert sind, vor-

kommt, sei folgendes Beispiel betrachtet: Es sei $\alpha = 90°$, also sinα = 1.0. Die numerische Berechnung mit doppelter Genauigkeit (DOUBLE PRECISION), d.h. bei nur etwa 16 geltenden Ziffern, ergibt auf einer Workstation den (zufälligen) Wert $\cos^2\alpha = 4.440892098500626E-016$ an Stelle des exakten 0.0, was beim Wurzelziehen den nur noch einfach genauen Wert $\cos\alpha =$ 0.210734242554450D-07 ergibt. Auf einem Labtop Rechner ergibt sich immer noch der Wert cos 90° = 0.1615542552166D-14. Dies ist ein primitives Beispiel dafür, wie schnell sich Fehler fortpflanzen können und zu verheerenden oder schnell unbrauchbaren Ergebnissen führen können. Wenn auch theoretisch richtig, sollten derartige Wurzelrechnungen also bei trigonometrischen Rechenvorgängen möglichst vermieden und durch geschickte andere trigonometrische Ausdrücke ersetzt werden. Moderne Rechner liefern aus den obigen Werten den richtigen Wert $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0.0$. ◀

6.3.2 Drehungen von Orthonormalsystemen

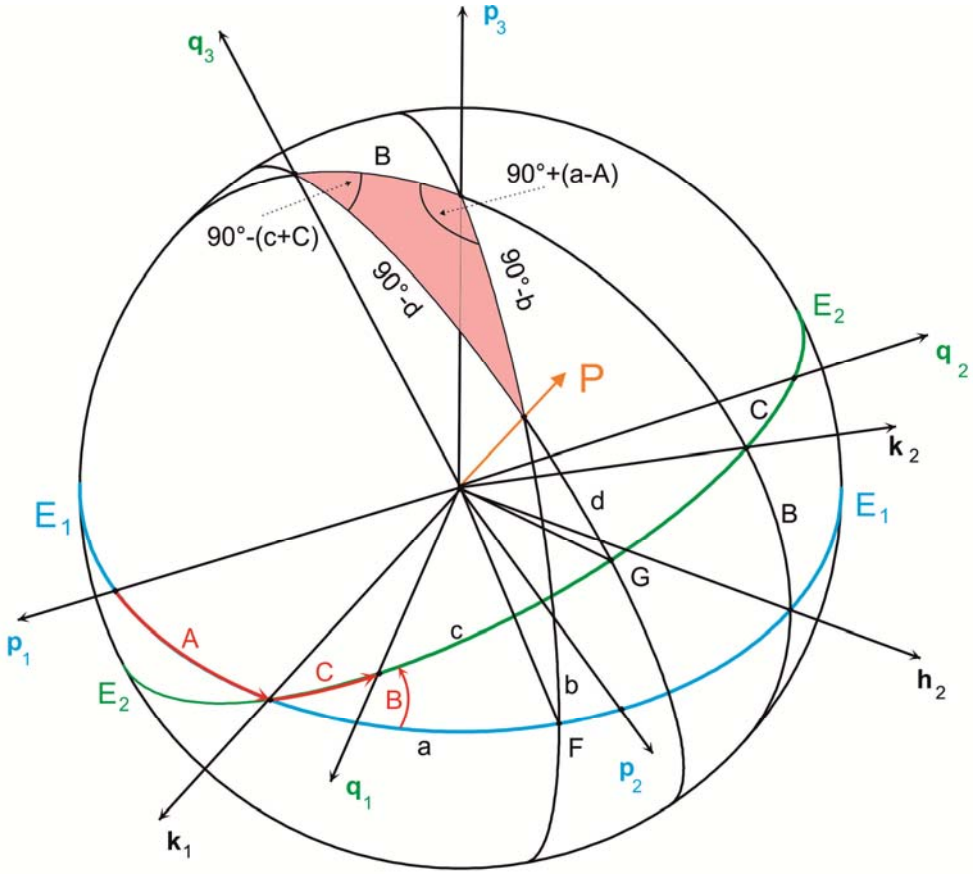


Bild 6-5: Drehung des $\mathbf{p}_i$ – Systems (blaue Basisebene E_1, „Äquator“) in das $\mathbf{q}_j$ – System (grüne Basisebene E_2, „Bahnebene“) um die *Euler*winkel A („Knotenlänge“), B („Inklination“), C („Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der E_2-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der E_1-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene E_2 nach $\mathbf{k}_2$. Eine Sichtrichtung P (Stern, Satellit) hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel a, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und b (Breite), im $\mathbf{q}_j$ – System die Richtungswinkel c, bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und d (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$.

Gegeben sei ein Koordinatensystem im euklidischen Raum mit orthonormierter Basis $\mathbf{p}_i$. Eine Drehung um die $\mathbf{p}_3$- Achse mit dem Winkel A führt entsprechend Bild 6-5 in den Richtungsvektor $\mathbf{k}_1$ (Knotenvektor) über, Drehung um $\mathbf{k}_1$ um den Winkel B ergibt eine neue Basisebene („Äquator“) mit Normalenvektor $\mathbf{q}_3$, Drehung um $\mathbf{q}_3$ mit Winkel C führt $\mathbf{k}_1$ in den neuen Richtungsvektor $\mathbf{q}_1$ über.

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1$$

ergänzt $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_3$ zur neuen orthonormierten $\mathbf{q}_j$- Basis. Die drei Drehwinkel A, B, C werden in diesem Zusammenhang völlig allgemeingültig verstanden.

Das $\mathbf{q}_j$- System hat in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$- System nach Bild 6-5 die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{p}_1(-\cos B\sin C\sin A+\cos C\cos A)+\\ &+\mathbf{p}_2(\ \cos B\sin C\cos A+\cos C\sin A)+\\ &+\mathbf{p}_3\ \ \sin B\sin C\end{aligned} \tag{6.87}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_2 &= \mathbf{p}_1(-\cos B\cos C\sin A-\sin C\cos A)+\\ &+\mathbf{p}_2(\ \cos B\cos C\cos A-\sin C\sin A)+\\ &+\mathbf{p}_3\ \ \sin B\cos C\end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3 &= \mathbf{p}_1\sin B\sin A-\\ &-\mathbf{p}_2\sin B\cos A+\\ &+\mathbf{p}_3\cos B\quad .\end{aligned} \tag{6.89}$$

In der Transformation

$$\mathbf{q}_j = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i \tag{6.90}$$

lauten somit die Koeffizienten der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\cos B\sin C\sin A+\cos C\cos A\\ a_{12} &= \ \ \cos B\sin C\cos A+\cos C\sin A\\ a_{13} &= \ \ \sin B\sin C\\ a_{21} &= -\cos B\cos C\sin A-\sin C\cos A\\ a_{22} &= \ \ \cos B\cos C\cos A-\sin C\sin A\\ a_{23} &= \ \ \sin B\cos C\\ a_{31} &= \ \ \sin B\sin A\\ a_{32} &= -\sin B\cos A\\ a_{33} &= \ \ \cos B\quad .\end{aligned} \tag{6.91}$$

Die Matrix $(b_k^{\ j})$ der Umkehrabbildung ist nach Formel (6.30) von Seite 191 im Falle orthonormalisierter Systeme die zu $(a_j^{\ k})$ transponierte Matrix

$$b_k^{\ j} = a^k_{\ j} \quad , (\text{wenn } \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j = \delta_{ij}) \quad . \tag{6.92}$$

Daher lautet in diesem Fall die Umkehrabbildung

$$\mathbf{p}_i = a^j_{\ i}\,\mathbf{q}_j \quad , \quad (\text{wenn } \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = \delta_{ij}) \quad , \tag{6.93}$$

ausführlich

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1\,(-\cos B\sin A\sin C+\cos A\cos C)+\\
&+\mathbf{q}_2\,(-\cos B\sin A\cos C-\cos A\sin C)+\\
&+\mathbf{q}_3\quad \sin B\sin A
\end{aligned}\tag{6.94}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1\,(\ \cos B\cos A\sin C+\sin A\cos C)+\\
&+\mathbf{q}_2\,(\ \cos B\cos A\cos C-\sin A\sin C)-\\
&-\mathbf{q}_3\quad \sin B\cos A
\end{aligned}\tag{6.95}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_1\sin B\,\sin C\,+\\
&+\mathbf{q}_2\sin B\,\cos C\,+\\
&+\mathbf{q}_3\cos B\quad .
\end{aligned}\tag{6.96}$$

Für einen beliebigen Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;=\; x^i\,\mathbf{p}_i \;=\; y^j\,\mathbf{q}_j \tag{6.97}$$

transformieren sich die Koordinaten bei einer Transformation zwischen orthonormierten Systemen entsprechend den Formeln (6.36) auf Seite 192 und (6.37) nach

$$\begin{aligned}
x^i &= a_j{}^i\,y^j \quad ,\\
y^j &= a^j{}_i\,x^i \quad ,\quad (\text{wenn}\quad \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j \;=\; \delta_{ij}) \quad .
\end{aligned}\tag{6.98}$$

Die Variationen der Koeffizienten der Transformationsmatrix können aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}
\dot a_{11} &= \dot B\,a_{31}\sin C+\dot C\,a_{21}-\dot A\,a_{12}\\
\dot a_{12} &= \dot B\,a_{32}\sin C+\dot C\,a_{22}+\dot A\,a_{11}\\
\dot a_{13} &= \dot B\,a_{33}\sin C+\dot C\,a_{23}\\
\dot a_{21} &= \dot B\,a_{31}\cos C-\dot C\,a_{11}-\dot A\,a_{22}\\
\dot a_{22} &= \dot B\,a_{32}\cos C-\dot C\,a_{12}+\dot A\,a_{21}\\
\dot a_{23} &= \dot B\,a_{33}\cos C-\dot C\,a_{13}\\
\dot a_{31} &= \dot B\,a_{33}\sin A-\dot A\,a_{32}\\
\dot a_{32} &= -\dot B\,a_{33}\cos A+\dot A\,a_{31}\\
\dot a_{33} &= -\dot B\sin B
\end{aligned}\tag{6.99}$$

berechnet werden. Ausführlich lauten diese Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{B}\sin A\sin B\sin C - \\
&\quad -\dot{C}\left(\cos B\cos C\sin A+\sin C\cos A\right)- \\
&\quad -\dot{A}\left(\cos B\sin C\cos A+\cos C\sin A\right) \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{B}\cos A\,\sin B\,\sin C+ \\
&\quad +\dot{C}\left(\cos B\cos C\cos A-\sin C\sin A\right)+ \\
&\quad +\dot{A}\left(-\cos B\sin C\sin A+\cos C\cos A\right) \\
\dot{a}_{13} &= \dot{B}\cos B\sin C+\dot{C}\sin B\,\cos C \\
\dot{a}_{21} &= \dot{B}\sin A\sin B\cos C - \\
&\quad -\dot{C}\left(-\cos B\sin C\sin A+\cos C\cos A\right)- \\
&\quad -\dot{A}\left(\cos B\cos C\cos A-\sin C\sin A\right) \\
\dot{a}_{22} &= -\dot{B}\cos A\,\sin B\,\cos C - \\
&\quad -\dot{C}\left(\cos B\sin C\cos A+\cos C\sin A\right)- \\
&\quad -\dot{A}\left(\cos B\cos C\sin A+\sin C\cos A\right) \\
\dot{a}_{23} &= \dot{B}\cos B\,\cos C-\dot{C}\sin B\sin C \\
\dot{a}_{31} &= \dot{B}\sin A\,\cos B+\dot{A}\cos A\sin B \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{B}\cos A\,\cos B+\dot{A}\sin A\sin B \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{B}\sin B
\end{aligned}
\qquad (6.100)
$$

Sofern diese Variationen bekannt sind, können die Transformationen der Variationen der Basen im Fall von Orthonormie aus

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j{}^i\,\mathbf{p}_i + a_j{}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad , \tag{6.101}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i\,\mathbf{q}_j + a^j{}_i\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad , \quad (\textit{wenn} \quad \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j = \delta_{ij}) \tag{6.102}$$

erhalten werden. Die Geschwindigkeitskomponenten eines relativen Geschwindigkeitsvektors unterliegen nach den Formeln (6.101), sowie (6.39) und (6.40) von Seite 193 den Transformationen

$$\dot{x}^i = \dot{a}_j{}^i\,y^j + a_j{}^i\,\dot{y}^j \quad , \tag{6.103}$$

$$\dot{y}^j = \dot{a}^j{}_i\,x^i + a^j{}_i\,\dot{x}^i \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j = \delta_{ij}) \quad . \tag{6.104}$$

Wenn die System - Variationsparameter $\left(p_i{}^j\right)$ des $\mathbf{p}_i$ – Systems bzw. $\left(q_i{}^j\right)$ des $\mathbf{q}_i$ – Systems bekannt sind, können die Variationen der Transformationsmatrix $\left(a_i{}^j\right)$ entsprechend Formel (4.211) auf Seite 49 aus der Tensorgleichung

$$\dot{a}_j{}^k = q_j{}^i\,a_i^k - a_j{}^i\,p_i^k$$

berechnet werden. Über die Variationsgleichungen (6.99) können dann auch die Variationen der Rotationswinkel *A, B, C* auf die Variationsparameter zurückgeführt werden. Im Fall von Orthonormalsystemen $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_j$ lauten die Variationsausdrücke

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= -q_{31}\sin C + q_{23}\cos C - p_{31}\sin A - p_{23}\cos A \\
\dot{A}\sin B &= q_{31}\cos C + q_{23}\sin C - p_{12}\sin B - (p_{31}\cos A - p_{23}\sin A)\cos B \\
\dot{C}\sin B &= p_{31}\cos A - p_{23}\sin A + q_{12}\sin B - (q_{31}\cos C + q_{23}\sin C)\cos B \ .
\end{aligned} \tag{6.105}$$

Da die Variationsparameter $\left(p_i{}^j\right)$ und $\left(q_i{}^j\right)$ nach Formel (4.230) auf Seite 53 zugleich die Komponenten des jeweiligen absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_p = D_p^i \mathbf{p}_i$, $\mathbf{D}_q = D_q^j \mathbf{q}_j$ sind

$$\begin{aligned}
p_{23} &= D_{p1}\ ,\ p_{31} = D_{p2}\ ,\ p_{12} = D_{p3}\ , \\
q_{23} &= D_{q1}\ ,\ q_{31} = D_{q2}\ ,\ q_{12} = D_{q3}\ ,
\end{aligned} \tag{6.106}$$

können die Variationen der Drehwinkel *A*, *B*, *C* bei einer Rotation orthonormierter Systeme auch in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= D_{q1}\cos C - D_{q2}\sin C - D_{p1}\cos A - D_{p2}\sin A \\
\dot{A}\sin B &= D_{q1}\sin C + D_{q2}\cos C + D_{p1}\cos B\sin A - D_{p2}\cos B\cos A - D_{p3}\sin B \\
\dot{C}\sin B &= -D_{p1}\sin A + D_{p2}\cos A - D_{q1}\cos B\sin C - D_{q2}\cos B\cos C + D_{q3}\sin B \ .
\end{aligned} \tag{6.107}$$

Nach Bild 6-5 auf Seite 204 können die beiden in der $\mathbf{q}_i -$ (Bahn-) Ebene gelegenen Vektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ des Knotensystems in den beiden $\mathbf{p}_i -$ und $\mathbf{q}_i -$ Basissystemen dargestellt werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{p}_1\cos A + \mathbf{p}_2\sin A &&= \mathbf{q}_1\cos C - \mathbf{q}_2\sin C \\
\mathbf{k}_2 &= -\mathbf{p}_1\cos B\sin A + \mathbf{p}_2\cos B\cos A + \mathbf{p}_3\sin B &&= \mathbf{q}_1\sin C + \mathbf{q}_2\cos C \ ,
\end{aligned} \tag{6.108}$$

ferner der in der ursprünglichen Äquatorebene zu $\mathbf{k}_1$ rechtwinklig entfernte Vektor $\mathbf{h}_2$ durch (vgl. Bild 6-5)

$$\mathbf{h}_2 = -\mathbf{p}_1\sin A + \mathbf{p}_2\cos A = \mathbf{q}_1\cos B\sin C + \mathbf{q}_2\cos B\cos C - \mathbf{q}_3\sin B \ . \tag{6.109}$$

Damit können die Variationsgleichungen (6.107) auch in der überraschend einfachen Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{k}_1 = \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_1 = D_{qp1}\cos C - D_{qp2}\sin C \\
\dot{A}\sin B &= \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{k}_2 = \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_2 = D_{qp1}\sin C + D_{qp2}\cos C \\
\dot{C}\sin B &= -\left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{h}_2 = -\mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{h}_2 = -D_{qp1}\cos B\sin C - D_{qp2}\cos B\cos C + D_{qp3}\sin B \ .
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Die beiden letzten Formeln ergeben auch

$$\dot{C} = D_{qp3} - \dot{A}\cos B \ . \tag{6.111}$$

Für die Variationen der Rotationswinkel ist somit das Skalarprodukt aus der Differenz der Drehwinkel der beiden Systeme, d.h. dem relativen Eigenbewegungsvektor, mit einem Vektor des Knotensystems des alten bzw. des neuen Basissystems verantwortlich.

Mit diesen Variationsgleichungen wird die relative Bewegung zweier orthogonaler geradliniger Koordinatensystemen im dreidimensionalen Raum relativ zueinander beschrieben.

Von Interesse sind auch die Abhängigkeiten eines Ortsvektors von den Winkeln der räumlichen Orientierung. Man erhält[1] aus den Beziehungen (6.97) und (6.98) mit den Parametern (6.91)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial A} &= \mathbf{p}_3 \times \mathbf{r} = x_1\,\mathbf{p}_2 - x_2\,\mathbf{p}_1 \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial B} &= \left(\mathbf{q}_2 \sin C - \mathbf{q}_1 \cos C\right) \times \mathbf{r} = y_3\left[\sin C\,\mathbf{q}_1 + \cos C\,\mathbf{q}_2\right] - \left[y_1 \sin C + y_2 \cos C\right]\mathbf{q}_3 \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial C} &= -\mathbf{q}_3 \times \mathbf{r} = y_2\,\mathbf{q}_1 - y_1\,\mathbf{q}_2 \ .
\end{aligned} \tag{6.112}$$

6.3.3 Drehungen in Polarkoordinaten

Da jeder Ortsvektor **r** nicht nur in kartesischen Koordinaten (x^i), (y^j) dargestellt werden kann, sondern auch durch Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[a,b\right] \;\Leftrightarrow\; r\left[c,d\right] \quad , \tag{6.113}$$

kann eine Drehung in den Polarkoordinaten analog zu den Drehungen in den kartesischen Koordinaten hergeleitet werden. Es seien nach Bild 6-5 auf Seite 204

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos b\cos a \\
x_2 &= r\cos b\sin a \\
x_3 &= r\sin b
\end{aligned} \tag{6.114}$$

und

$$\begin{aligned}
y_1 &= r\cos d\cos c \\
y_2 &= r\cos d\sin c \\
y_3 &= r\sin d \quad .
\end{aligned} \tag{6.115}$$

Anwendung der Transformationsformeln in diesem Abschnitt für die kartesischen Koordinaten oder direkte Anwendung des *Gauß*schen Formelsatzes in dem Poldreieck, das durch die Richtungsvektoren $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{p}_3$ aufgespannt wird (siehe Bild 6-5), ergibt die Darstellung der Polarkoordinaten im $\mathbf{p}_i$- System bei Bezug auf das $\mathbf{q}_j$- System

$$\begin{aligned}
\sin(a-A)\cos b &= \sin(c+C)\cos d\cos B - \sin d\sin B \\
\cos(a-A)\cos b &= \cos(c+C)\cos d \\
\sin b &= \sin(c+C)\cos d\sin B + \sin d\cos B
\end{aligned} \tag{6.116}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned}
\dot a\cos b \;=\;& \dot A\cos b + \\
& (\dot c + \dot C)\cos d\left[\cos B\cos(c+C)\cos(a-A) + \sin(c+C)\sin(a-A)\right] - \\
& -\dot d\left\{\left[\sin(c+C)\sin d\cos B + \cos d\sin B\right]\cos(a-A) - \right. \\
& \qquad \left. -\cos(c+C)\sin d\sin(a-A)\right\} - \\
& -\dot B\sin b\cos(a-A) \quad ,
\end{aligned} \tag{6.117}$$

[1] Vgl. z.B. A. DEPRIT [1976], p.256, dort allerdings mit zum Teil anderen Vorzeichen

$$
\begin{aligned}
\dot{b} \;=\; & (\dot{c}+\dot{C})\cos d\,\{\cos(c+C)\sin B\cos b + \\
& +\big[-\cos B\cos(c+C)\sin(a-A) + \\
& +\sin(c+C)\cos(a-A)\big]\sin b\big\} + \\
& +\dot{d}\,\{\big[-\sin(c+C)\sin d\sin B+\cos d\cos B\big]\cos b + \\
& +\big[\big(\sin(c+C)\sin d\cos B+\cos d\sin B\big)\sin(a-A) + \\
& +\cos(c+C)\sin d\cos(a-A)\big]\sin b\big\} + \\
& +\dot{B}\sin(a-A) \quad .
\end{aligned}
\tag{6.118}
$$

Die Umkehrabbildung ergibt den Bezug auf das $\mathbf{q}_j$- System in Abhängigkeit vom $\mathbf{p}_i$- System

$$
\begin{aligned}
\sin(c+C)\cos d &= \sin(a-A)\cos b\cos B+\sin b\sin B \\
\cos(c+C)\cos d &= \cos(a-A)\cos b \\
\sin d &= -\sin(a-A)\cos b\sin B+\sin b\cos B
\end{aligned}
\tag{6.119}
$$

mit den Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{c}\cos d \;=\; & -\dot{C}\cos d + \\
& +(\dot{a}-\dot{A})\cos b\big[\cos B\cos(a-A)\cos(c+C)+\sin(a-A)\sin(c+C)\big] + \\
& +\dot{b}\,\{\big[-\sin(a-A)\sin b\cos B+\cos b\sin B\big]\cos(c+C) + \\
& +\cos(a-A)\sin b\sin(c+C)\big\} + \\
& +\dot{B}\sin d\cos(c+C) \quad ,
\end{aligned}
\tag{6.120}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{d} \;=\; & (\dot{a}-\dot{A})\cos b\,\{-\cos(a-A)\sin B\cos d + \\
& +\big[-\cos B\cos(a-A)\sin(c+C) + \\
& +\sin(a-A)\cos(c+C)\big]\sin d\big\} + \\
& +\dot{b}\,\{\big[\sin(a-A)\sin b\sin B+\cos b\cos B\big]\cos d - \\
& -\big[\big(-\sin(a-A)\sin b\cos B+\cos b\sin B\big)\sin(c+C) - \\
& -\cos(a-A)\sin b\cos(c+C)\big]\sin d\big\} - \\
& -\dot{B}\sin(c+C) \quad .
\end{aligned}
\tag{6.121}
$$

6.3.4 Zur Transformation der Systemeigenbewegungsvektoren

Eine Bewegung relativ zu einem selbst bewegten System kann, wie wir in den Tensorgleichungen (4.210) und (4.211) auf Seite 49 erkannt haben, mit Hilfe der Variations- Parameter der beiden Systeme durchgeführt werden, von denen jeder die absolute Eigenbewegung des betreffenden Systems sich selbst gegenüber beschreibt. Durch den relativen Bezug wird der absolute Charakter dieser Tensorgleichungen aufgehoben. Nur so allerdings wird es erst möglich, die Variationen der Rotationswinkel zwischen den Systemen kennen zu lernen.

Jedem Koordinatensystem kann ein Eigenbewegungsvektor zugeordnet werden:

$$
\mathbf{D}_p = D_p{}^i\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{D}_q = D_q{}^j\mathbf{q}_j \tag{6.122}
$$

mit der Eigenschaft

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.123}$$

Diese Eigenbewegungsvektoren sind ausschließlich „ihrem“ System zugeordnet, haben also nichts mit einer „Rotation“ zu einem anderen System etwas zu tun. Wenn eine Bewegung in dem einen System dargestellt ist und auf das andere System bezogen werden soll, muss auch der Eigenbewegungsvektor des einen Systems in dem anderen System dargestellt werden können. Für eine solche Transformation werden Drehformeln verwendet, wie sie aus der Theorie der Rotation fester Körper mit drei *Euler*winkeln (bzw. *Rodrigues* Parametern) bekannt sind. Im Gegensatz zur Rotation eines festen Körpers müssen hier bei der Untersuchung allgemeiner Bewegungsvorgänge die voneinander üblicherweise völlig unabhängigen Eigenbewegungen der beiden Bezugssysteme berücksichtigt werden um auch den Geschwindigkeitsvektor richtig darstellen zu können. Diese Zusammenhänge werden in diesem Abschnitt untersucht.

Ein Ortsvektor hat in kartesischen Koordinaten in Bezug auf ein orthonormiertes $\mathbf{p}_i$ – bzw. $\mathbf{q}_j$ – System die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = y^j \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.124}$$

Der zugehörige Geschwindigkeitsvektor kann in der Form dargestellt werden (vgl. Formel (6.47))

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_p + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \, \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + y^j \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + y^j \, \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j \quad . \end{aligned} \tag{6.125}$$

Die Transformationen zwischen den beiden Systemen werden mit der Transformationsmatrix (6.91) durchgeführt. Wegen Orthonormie gelten die Beziehungen

$$x^i = a_j{}^i \, y^j \quad , \quad y^j = a^j{}_i \, x^i \quad , \quad \mathbf{q}_j = a_j{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \, \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.126}$$

Bei Vorgabe der Koordinaten y_j im $\mathbf{q}_j$ – System können damit die x_i im Rahmen des $\mathbf{p}_i$ – Systems berechnet werden. Um die rechtwinkligen Koordinaten des relativen Geschwindigkeitsvektors zu berechnen, wird aus Vergleich der beiden Ausdrücke in den Formeln (6.125) unter Verwendung der Transformationsmatrix a_ij gebildet

$$\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j \mathbf{q}_j = \dot{y}^j \, a_j{}^i \, \mathbf{p}_i = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i + D_p{}^i \, x^k \, \mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_k - D_q{}^j \, a_j{}^i \, x^k \, \mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_k \quad .$$

Damit folgen im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y}^j \, a_{j1} - D_{p2} \, x_3 + D_{p3} \, x_2 + D_q{}^j \, a_{j2} \, x_3 - D_q{}^j \, a_{j3} \, x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{y}^j \, a_{j2} - D_{p3} \, x_1 + D_{p1} \, x_3 + D_q{}^j \, a_{j3} \, x_1 - D_q{}^j \, a_{j1} \, x_3 \\ \dot{x}_3 &= \dot{y}^j \, a_{j3} - D_{p1} \, x_2 + D_{p2} \, x_1 + D_q{}^j \, a_{j1} \, x_2 - D_q{}^j \, a_{j2} \, x_1 \quad . \end{aligned} \tag{6.127}$$

Umgekehrt ergibt der relative Geschwindigkeitsvektors in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i = \dot{x}^i \, a^j{}_i \, \mathbf{q}_j = \dot{y}^j \, \mathbf{q}_j + D_q{}^j \, y^k \, \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k - D_p{}^i \, a^j{}_i \, y^k \, \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k \tag{6.128}$$

somit

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}^i \, a_{1i} - D_{q2} \, y_3 + D_{q3} \, y_2 + D_p{}^i \, a_{2i} \, y_3 - D_p{}^i \, a_{3i} \, y_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}^i \, a_{2i} - D_{q3} \, y_1 + D_{q1} \, y_3 + D_p{}^i \, a_{3i} \, y_1 - D_p{}^i \, a_{1i} \, y_3 \\ \dot{y}_3 &= \dot{x}^i \, a_{3i} - D_{q1} \, y_2 + D_{q2} \, y_1 + D_p{}^i \, a_{1i} \, y_2 - D_p{}^i \, a_{2i} \, y_1 \quad . \end{aligned} \tag{6.129}$$

Diese Darstellungen der kartesischen Koordinaten der relativen Geschwindigkeitsvektoren zeigt die Bedeutung der Kenntnis der Eigenbewegungsvektoren der beiden Systeme.

Werde zunächst angenommen, dass der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems bekannt sei, muss der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems auf das $\mathbf{p}_i$ – System bezogen werden. Mit den Beziehungen (6.126) wird

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j = \dot{a}_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \dot{a}_j{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k + \mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_j \quad ,$$

somit

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k + D_p{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k \times \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.130}$$

Daraus folgt

$$\dot{a}_j{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k = \left(D_q{}^k - D_p{}^i a^k{}_i \right) \mathbf{q}_k \times \mathbf{q}_j \quad ,$$

bzw. im Einzelnen

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k &= -\left(D_{q2} - D_p{}^i a_{2i} \right) \mathbf{q}_3 + \left(D_{q3} - D_p{}^i a_{3i} \right) \mathbf{q}_2 \\
\dot{a}_2{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k &= -\left(D_{q3} - D_p{}^i a_{3i} \right) \mathbf{q}_1 + \left(D_{q1} - D_p{}^i a_{1i} \right) \mathbf{q}_3 \\
\dot{a}_3{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k &= -\left(D_{q1} - D_p{}^i a_{1i} \right) \mathbf{q}_2 + \left(D_{q2} - D_p{}^i a_{2i} \right) \mathbf{q}_1 \quad .
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_1{}^i a_{1i} = 0 \\
&\dot{a}_1{}^i a_{2i} = D_{q3} - D_p{}^i a_{3i} \\
&\dot{a}_1{}^i a_{3i} = -\left(D_{q2} - D_p{}^i a_{2i} \right) \\
&\dot{a}_2{}^i a_{1i} = -\left(D_{q3} - D_p{}^i a_{3i} \right) \\
&\dot{a}_2{}^i a_{2i} = 0 \\
&\dot{a}_2{}^i a_{3i} = D_{q1} - D_p{}^i a_{1i} \\
&\dot{a}_3{}^i a_{1i} = D_{q2} - D_p{}^i a_{2i} \\
&\dot{a}_3{}^i a_{2i} = -\left(D_{q1} - D_p{}^i a_{1i} \right) \\
&\dot{a}_3{}^i a_{3i} = 0
\end{aligned} \tag{6.131}$$

und es ist offenbar

$$\dot{a}_2{}^i a_{1i} = -\dot{a}_1{}^i a_{2i} \quad , \quad \dot{a}_3{}^i a_{2i} = -\dot{a}_2{}^i a_{3i} \quad , \quad \dot{a}_1{}^i a_{3i} = -\dot{a}_3{}^i a_{1i} \quad .$$

Diese Werte erfüllen die *Frenet*schen Formeln des $\mathbf{q}_j$ – Systems

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1 &= \quad\quad\quad D_{q3} \mathbf{q}_2 - D_{q2} \mathbf{q}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{q3} \mathbf{q}_1 \quad\quad + D_{q1} \mathbf{q}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_3 &= \quad D_{q2} \mathbf{q}_1 - D_{q1} \mathbf{q}_2 \quad\quad .
\end{aligned} \tag{6.132}$$

Somit hat der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System die Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_{q1} &= \dot{a}_2{}^i\, a_{3i} + D_p{}^i\, a_{1i} \\ D_{q2} &= \dot{a}_3{}^i\, a_{1i} + D_p{}^i\, a_{2i} \\ D_{q3} &= \dot{a}_1{}^i\, a_{2i} + D_p{}^i\, a_{3i} \quad . \end{aligned} \tag{6.133}$$

Werden hier die Ausdrücke mit den *Euler*winkeln A, B, C aus den Formelsätzen (6.91) und (6.100) eingesetzt, folgen die Formeln

$$\begin{aligned} D_{q1} &= \dot{A}\sin B\sin C + \dot{B}\cos C + D_p{}^i\, a_{1i} \\ D_{q2} &= \dot{A}\sin B\cos C - \dot{B}\sin C + D_p{}^i\, a_{2i} \\ D_{q3} &= \dot{A}\cos B + \dot{C} + D_p{}^i\, a_{3i} \quad . \end{aligned} \tag{6.134}$$

Wird der relative Eigenbewegungsvektor (6.49)

$$\mathbf{D}_{qp} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p =: D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j \tag{6.135}$$

verwendet, wird

$$\begin{aligned} D_{qp1} &= \dot{A}\sin B\sin C + \dot{B}\cos C \\ D_{qp2} &= \dot{A}\sin B\cos C - \dot{B}\sin C \\ D_{qp3} &= \dot{A}\cos B + \dot{C} \quad . \end{aligned} \tag{6.136}$$

Diese aus der Theorie der Rotation fester Körper bekannten Formeln werden gelegentlich als „*Euler*sche kinematische Gleichungen“ bezeichnet. Die Formeln (6.134) im Zusammenhang mit der Darstellung des Geschwindigkeitsvektors in einer der Darstellungen (6.125) zeigen jedoch, dass im Fall der Untersuchung bewegter Körper die explizite Kenntnis der Eigenbewegung des Bezugssystems essentiell ist. Deshalb sollte in diesem Fall stets von der Darstellung (6.134) ausgegangen werden[1]. Dies ist auch im umgekehrten Fall nötig, dem Bezug der Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Systems auf das $\mathbf{q}_j$ – System.

Das $\mathbf{p}_i$ – System hat die Variationen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \dot{a}^j{}_i\, \mathbf{q}_j + a^j{}_i\, \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}^j{}_i\, \mathbf{q}_j + a^j{}_i\, \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j = \dot{a}^j{}_i\, a_i{}^k \mathbf{p}_k + D_q{}^j\, a_j{}^k\, \mathbf{p}_k \times \mathbf{p}_i \quad , \tag{6.137}$$

somit

$$\dot{a}^j{}_i\, a_j{}^k \mathbf{p}_k = \left(D_p{}^k - D_q{}^j\, a_j{}^k\right)\mathbf{p}_k \times \mathbf{p}_i \quad , \tag{6.138}$$

sowie im Einzelnen

$$\begin{aligned} \dot{a}^j{}_1\, a_j{}^k \mathbf{p}_k &= -\left(D_{p2} - D_q{}^j\, a_{j2}\right)\mathbf{p}_3 + \left(D_{p3} - D_q{}^j\, a_{j3}\right)\mathbf{p}_2 \\ \dot{a}^j{}_2\, a_j{}^k \mathbf{p}_k &= -\left(D_{p3} - D_q{}^j\, a_{j3}\right)\mathbf{p}_1 + \left(D_{p1} - D_q{}^j\, a_{j1}\right)\mathbf{p}_3 \\ \dot{a}^j{}_3\, a_j{}^k \mathbf{p}_k &= -\left(D_{p1} - D_q{}^j\, a_{j1}\right)\mathbf{p}_2 + \left(D_{p2} - D_q{}^j\, a_{j2}\right)\mathbf{p}_1 \quad . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

[1] Im Zusammenhang mit der Untersuchung der Bewegung von Himmelskörpern bei Bezug auf ein zugeordnetes Basissystem erscheint der Begriff „Eigenbewegung des Bezugssystems“ und damit zusammenhängend erklärend „Eigenbewegungsvektor“ richtungsführender.

$$
\begin{aligned}
&\dot{a}^{j}{}_{1}\, a_{j1} = 0 \\
&\dot{a}^{j}{}_{1}\, a_{j2} = D_{p3} - D_{q}{}^{j}\, a_{j3} \\
&\dot{a}^{j}{}_{1}\, a_{j3} = -\left(D_{p2} - D_{q}{}^{j}\, a_{j2}\right) \\
&\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j1} = -\left(D_{p3} - D_{q}{}^{j}\, a_{j3}\right) \\
&\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j2} = 0 \\
&\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j3} = D_{p1} - D_{q}{}^{j}\, a_{j1} \\
&\dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j1} = D_{p2} - D_{q}{}^{j}\, a_{j2} \\
&\dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j2} = -\left(D_{p1} - D_{q}{}^{j}\, a_{j1}\right) \\
&\dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j3} = 0 \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei offensichtlich

$$
\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j1} = -\dot{a}^{j}{}_{1}\, a_{j2} \quad , \quad \dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j2} = -\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j3} \quad , \quad \dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j2} = -\dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j3} \quad .
$$

Die Komponenten des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_p$ können somit berechnet werden aus

$$
\begin{aligned}
&D_{p1} = \dot{a}^{j}{}_{2}\, a_{j3} + D_{q}{}^{j}\, a_{j1} \\
&D_{p2} = \dot{a}^{j}{}_{3}\, a_{j1} + D_{q}{}^{j}\, a_{j2} \\
&D_{p3} = \dot{a}^{j}{}_{1}\, a_{j2} + D_{q}{}^{j}\, a_{j3} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.139}
$$

Die *Frenet*schen Formeln des $\mathbf{p}_i$-Systems sind erfüllt:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1 &= \quad\quad\quad D_{p3}\,\mathbf{p}_2 - D_{p2}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= -D_{p3}\,\mathbf{p}_1 \quad\quad\quad + D_{p1}\,\mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \quad D_{p2}\,\mathbf{p}_1 - D_{p1}\,\mathbf{p}_2 \quad\quad\quad .
\end{aligned}
\tag{6.140}
$$

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$-Systems hat bei Bezug auf das $\mathbf{q}_j$ – System die Komponenten

$$
\begin{aligned}
D_{p1} &= -\dot{C}\,\sin B\,\sin A - \dot{B}\cos A + D_{q}{}^{j}\, a_{j1} \\
D_{p2} &= \quad \dot{C}\,\sin B\,\cos A - \dot{B}\sin A + D_{q}{}^{j}\, a_{j2} \\
D_{p3} &= -\dot{C}\,\cos B - \dot{A} \quad\quad\quad + D_{q}{}^{j}\, a_{j3} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.141}
$$

Er setzt sich somit aus dem relativen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{pq} = \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q = D_{pq}{}^{i}\,\mathbf{p}_i$ mit den Komponenten

$$
\begin{aligned}
D_{pq1} &= -\dot{C}\,\sin B\,\sin A - \dot{B}\cos A \\
D_{pq2} &= \quad \dot{C}\,\sin B\,\cos A - \dot{B}\sin A \\
D_{pq3} &= -\dot{C}\,\cos B - \dot{A}
\end{aligned}
\tag{6.142}
$$

und einem Anteil zusammen, der von der Eigenbewegung des $\mathbf{q}_j$ – Systems stammt.

6.3.5 Die Problematik des Zusammenfallens zweier Systeme

Ausgehend von den Formeln (6.134) des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_q$ des $\mathbf{q}_j$-Systems bei Bezug auf ein $\mathbf{p}_i$-System kann es erforderlich werden zu untersuchen, wie der Beginn einer Transformation aussieht. In diesem Fall sind die beiden Systeme in ihrer Orientierung identisch, es können also in der Transformationsmatrix (6.91) die *Euler*schen Rotationswinkel als verschwindend angenommen werden. Mit A=A(anfang)=B=C=0 wird in diesem Fall aus Beziehung (6.90) $\mathbf{q}_j(\text{anfang})=\mathbf{p}_j$ (j=1,2,3) erhalten. Wie steht es jedoch um die Eigenbewegungsvektoren der beiden Systeme? Mit A=B=C=0 folgt zum Beispiel aus der Komponentendarstellung in der Form (6.134)

$$\begin{aligned} D_{q1}(anfang) &= \dot{B} + D_{p1} \\ D_{q2}(anfang) &= D_{p2} \\ D_{q3}(anfang) &= \dot{A} + \dot{C} + D_{p3} \quad . \end{aligned}$$

Hier könnte zum Beispiel eine Zeitabhängigkeit in der Variation der *Euler*schen Winkel derart vorkommen, dass zum Anfangspunkt die Variationen verschwinden und erst im Lauf der Transformation (etwa in Abhängigkeit von der Zeit) nicht verschwindende Werte annehmen. In einem solchen Fall stimmen die beiden Systemeigenbewegungsvektoren im Anfangspunkt überein. Dies ist aber nicht notwendig der Fall, zum Beispiel bei Berücksichtigung der Präzession, bei der die Variationen der *Euler*schen Winkel konstante nicht verschwindende Werte auch im Anfangspunkt haben (siehe in Abschnitt 9.3.3 auf Seite 462). In einem solchen Fall muss davon ausgegangen werden, dass das $\mathbf{p}_i$-System als fester Bezug dient, dem gegenüber sich das $\mathbf{q}_j$-System mit den Variationen $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ bereits im Ausgangspunkt bewegt. Daher ist der relative Geschwindigkeitsvektor, der durch die $\dot{y}_j$ repräsentiert wird nach den Formeln (6.129) ungleich dem $\dot{x}_i$ Geschwindigkeitsvektor.

6.3.6 Die Addition von Eigenbewegungsvektoren

Werden *n* Drehungen mit dem jeweiligen relativen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q(i)q(i-1)}$ (i = 1,2, ... ,*n*) nacheinander durchgeführt, lautet nach *n* Transformationen der (Gesamt-) Eigenbewegungsvektor, wenn

$$\mathbf{D}_p := \mathbf{D}_{q(0)} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{D}_q := \mathbf{D}_{q(n)} \tag{6.143}$$

gesetzt werden,

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_{q(1)p} + \mathbf{D}_{q(2)q(1)} \ldots + \mathbf{D}_{q(n)q(n-1)} = \mathbf{D}_{q(n)} \quad . \tag{6.144}$$

Werden mehrere Transformationen nacheinander durchgeführt, kann der jeweils neue vollständige Eigenbewegungsvektor ***D*** somit nur bei Kenntnis aller „alten“ Eigenbewegungsvektoren berechnet werden. Wenn es daher nicht auf irgendeine physikalische Weise gelingt, die Variationsvektoren $\dot{\mathbf{q}}_j$ eines Koordinatensystems (und damit den zugehörigen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q$) unabhängig von Transformationen auf andere Bezugssysteme zu bestimmen, muss die Folge von Rücktransformationen so lange durchgeführt werden, bis jenes System gefunden ist, dessen Variationsvektoren $\dot{\mathbf{p}}_i$ bekannt sind. Bei einem inertialen System verschwinden diese ($\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \Leftrightarrow$ inertiales System). Ein solches „inertiales“ System zu finden, ist bekanntlich eine der Fundamentalaufgaben der sphärischen Astronomie.

6.3.7 Die Variation des Knotens bei *Hansen*-idealen Systemen

Mit bekannter Transformation von einem Fundamentalsystem auf das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale Bahnsystem kann neben den allgemeingültigen Variationsgleichungen (4.389) auf Seite 86 für die Bahnparameter i und Ω zur Bahnorientierung im Raum noch die Variationsgleichung für die Länge σ des aufsteigenden Knotens in der Bahn untersucht werden. Diese wird durch die Bedingung (4.312) auf Seite 71 für ein *Hansen*-ideales System

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin\zeta = 0 \tag{6.145}$$

festgelegt. Werden die Parameter $A \to \Omega$, $B \to i$, $C \to -\sigma$ in den Parametern a_{ij} im System (6.91) auf Seite 205, den Komponentengleichungen (6.134) bzw. (6.136) und den Ausdrücken $D_p{}^i\, a^j{}_i$ eingesetzt, folgen in diesem Fall die Variationsausdrücke

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \left(-\dot\sigma + \dot\Omega\cos i\right)\mathbf{q}_2^{(I)} - \left[\left(i\right)^{\cdot}\sin\sigma + \dot\Omega\sin i\cos\sigma\right]\mathbf{q}_3^{(I)} + \\
&\quad + \mathbf{q}_2^{(I)}\left[p_{12}\cos i + p_{23}\sin i\sin\Omega - p_{31}\sin i\cos\Omega\right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_3^{(I)}\left[p_{12}\sin i\,\cos\sigma + p_{23}\left(-\cos i\cos\sigma\sin\Omega + \sin\sigma\cos\Omega\right) + \right. \\
&\qquad \left. + p_{31}\left(\cos i\cos\sigma\cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega\right)\right] \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \left(\dot\sigma - \dot\Omega\cos i\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left[\left(i\right)^{\cdot}\cos\sigma - \dot\Omega\sin i\sin\sigma\right]\mathbf{q}_{13}^{(I)} - \\
&\quad - \mathbf{q}_1^{(I)}\left[p_{12}\cos i + p_{23}\sin i\sin\Omega - p_{31}\sin i\cos\Omega\right] + \\
&\quad + \mathbf{q}_3^{(I)}\left[-p_{12}\sin i\,\sin\sigma + p_{23}\left(\cos i\sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega\right) + \right. \\
&\qquad \left. + p_{31}\left(-\cos i\sin\sigma\cos\Omega + \cos\sigma\sin\Omega\right)\right] \qquad .
\end{aligned}$$

Werden diese Variationen in die obige Bedingungsgleichung (6.145) eingesetzt, folgt mit den Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{p}_i$ – Basis-Systems $\mathbf{D}_p{}^i = D_p{}^i\,\mathbf{p}_i$

$$D_{p1} = p_{23} \;,\; D_{p2} = p_{31} \;,\; D_{p3} = p_{12} \quad ,$$

und dem Normalenvektor

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\cos i \tag{6.146}$$

unmittelbar die allgemeingültige Variationsgleichung

$$\dot\sigma - \dot\Omega\cos i = \mathbf{D}_p\cdot\mathbf{c}_0 \qquad . \tag{6.147}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung einer Bahnebene neben den Variationsgleichungen (siehe in Kapitel 4.4.9 auf Seite 84)

$$\begin{aligned}
\left(i\right)^{\cdot} - \dot\eta\cos u &= -\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{k}_1 \\
\dot\Omega\sin i - \dot\eta\sin u &= -\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{k}_2 \\
\left(i\right)^{\cdot}\sin u - \dot\Omega\cos u\sin i &= \mathbf{D}_p\cdot\mathbf{q}_0 \qquad .
\end{aligned} \tag{6.148}$$

$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ sind die Basisvektoren in der Hauptebene des Knotensystems, η ist der Rotationswinkel um den Radiusvektor des bewegten Objektes.

Diese Variationsgleichungen des mitgeführten Bahnsystems können in übersichtlicher Weise auch aus den in System (6.110) hergeleiteten allgemeinen Formeln erhalten werden. Nach

Formel (4.328) auf Seite 74 hat das *Hansen*-ideale bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Bahnsystem den absoluten Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \quad , \tag{6.149}$$

wobei η den Drehwinkel um den radialen Einheitsvektor $\mathbf{r}_0$ bedeutet. Mit den Zuweisungen $A \to \Omega$, $B \to i$, $C \to -\sigma$ wird aus dem System (6.110) auf Seite 208, wenn $\mathbf{h}_2$ durch Beziehung (6.109) gegeben ist

$$\mathbf{h}_2 = -\mathbf{p}_1 \sin\Omega + \mathbf{p}_2 \cos\Omega = -\mathbf{q}_1^{(I)} \cos i \sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos i \cos\sigma - \mathbf{q}_3^{(I)} \sin i \quad ,$$

für die räumlichen Orientierungswinkel

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_1 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega} \sin i &= \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_2 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\sigma} \sin i &= \dot{\eta}\ \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{h}_2 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{h}_2 \quad . \end{aligned} \tag{6.150}$$

Da $\mathbf{r}_0$ im bewegungsbezogenen (*Hansen*-) Bahnsystem mit (*Hansen*schem) Bahnwinkel ζ die Darstellung

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta$$

hat und das Argument der Breite aus $u = \zeta - \sigma$ bekannt ist, folgt mit den Darstellungen (6.108) und (6.109), und da offenbar $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{h}_2 = \cos i \sin u$, schließlich

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \dot{\eta} \cos u \qquad - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega} \sin i &= \dot{\eta} \sin u \qquad - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\sigma} \sin i &= \dot{\eta} \cos i \sin u - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{h}_2 \\ \dot{\sigma} = \dot{\Omega} \cos i \qquad &+ \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 = \dot{\Omega} \cos i + D_{P3} \quad . \end{aligned} \tag{6.151}$$

Die Vektoren des Knotensystems aus den Formeln (6.108) und (6.109) lauten hier

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{p}_1 \cos\Omega + \mathbf{p}_2 \sin\Omega &&= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\sigma \\ \mathbf{k}_2 &= -\mathbf{p}_1 \cos i \sin\Omega + \mathbf{p}_2 \cos i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \sin i &&= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\sigma \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{p}_1 \sin\Omega + \mathbf{p}_2 \cos\Omega &&= -\mathbf{q}_1^{(I)} \cos i \sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos i \cos\sigma - \mathbf{q}_3^{(I)} \sin i \ . \end{aligned} \tag{6.152}$$

Wird hier der absolute Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems eingesetzt, ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \dot{\eta} \cos u - D_{p1} \cos\Omega - D_{p2} \sin\Omega \\ \dot{\Omega} \sin i &= \dot{\eta} \sin u + \left(D_{p1} \sin\Omega - D_{p2} \cos\Omega \right) \cos i + D_{p3} \sin i \\ \dot{\sigma} &= \dot{\Omega} \cos i + \left(D_{p1} \sin\Omega - D_{p2} \cos\Omega \right) \sin i - D_{p3} \cos i \quad . \end{aligned} \tag{6.153}$$

Um den Bezug auf ein *Hansen* System herauszustellen, wird der *Hansen*sche Bahnwinkel in das vorstehende Gleichungssystem eingeführt, in dem die Größen Inklination i, Länge des aufsteigenden Knotens Ω und Länge in der Bahn σ des Knotens als Bahnparameter angesehen werden müssen. Die Reduktion der Zeit auf den Bahnwinkel erfolgt mit dem Flächensatz $r^2 \dot{\zeta} = G$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{di}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\cos(\zeta-\sigma) - \frac{r^2}{G}\left(D_{p1}\cos\Omega + D_{p2}\sin\Omega\right) \\
\sin i\,\frac{d\Omega}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma) + \frac{r^2}{G}\left[\left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\cos i + D_{p3}\,\sin i\,\right] \\
\frac{d\sigma}{d\zeta} &= \frac{d\Omega}{d\zeta}\cos i + \frac{r^2}{G}\left[\left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\sin i - D_{p3}\,\cos i\,\right] .
\end{aligned} \tag{6.154}$$

Die Singularität bei Äquatorbahnen kann durch Verwendung von *Rodrigues* Parametern umgangen werden (siehe in Abschnitt 6.3.9 auf Seite 219).

6.3.8 Die Variationsparameter des Polarkoordinatensystems

Als Anwendung der im vorstehenden Abschnitt berechneten Herleitung der Variations – Parameter eines Koordinatensystems sollen die Variations- Parameter des Polarkoordinatensystems berechnet werden, obgleich dieses ein krummliniges System ist. Allerdings ist das entsprechende Basissystem orthonormiert. Das Polarkoordinatensystem mit der orthonormierten Basis $\mathbf{q}_{i0}$ kann aus einem (geradlinigen) orthonormierten $\mathbf{g}_i$ – Basissystem nach Abschnitt 4.3.5 auf Seite 41 durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{10} &= \mathbf{g}_1\cos D\,\cos A + \mathbf{g}_2\cos D\,\sin A + \mathbf{g}_3\sin D \\
\mathbf{q}_{20} &= -\mathbf{g}_1\sin A + \mathbf{g}_2\cos A \\
\mathbf{q}_{30} &= -\mathbf{g}_1\sin D\,\cos A - \mathbf{g}_2\sin D\,\sin A + \mathbf{g}_3\cos D
\end{aligned} \tag{6.155}$$

erhalten werden, wenn A und D die Winkelkoordinaten des Polarkoordinatensystems sind. Die Transformationsmatrix

$$\left(a_i{}^j\right) = \begin{pmatrix} \cos D\cos A & \cos D\sin A & \sin D \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ -\sin D\cos A & -\sin D\sin A & \cos D \end{pmatrix} \tag{6.156}$$

hat die Transformierte

$$\left(a_i{}^j\right)^T = \left(b_i{}^j\right) = \left(a^j{}_i\right) = \begin{pmatrix} \cos D\cos A & -\sin A & -\sin D\cos A \\ \cos D\sin A & \cos A & -\sin D\sin A \\ \sin D & 0 & \cos D \end{pmatrix} \tag{6.157}$$

und die Variationen

$$\begin{aligned}
\left(\dot{a}_i{}^j\right) = \dot{D}&\begin{pmatrix} -\sin D\cos A & -\sin D\sin A & \cos D \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos D\cos A & -\cos D\sin A & -\sin D \end{pmatrix} + \\
+\dot{A}&\begin{pmatrix} -\cos D\sin A & \cos D\cos A & 0 \\ -\cos A & -\sin A & 0 \\ \sin D\sin A & -\sin D\cos A & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{6.158}$$

Mit Formel lauten daher die Variations - Parameter des Polarkoordinatensystems

$$\begin{aligned} q_{12} &= \dot{A}\cos D + p_{12}\cos D + p_{13}\sin D\sin A - p_{23}\sin D\cos A \\ q_{13} &= \dot{D} \qquad\quad + p_{13}\cos A + p_{23}\sin A \\ q_{23} &= \dot{A}\sin D + p_{12}\sin D - p_{13}\cos D\sin A + p_{23}\cos D\cos A \quad . \end{aligned} \tag{6.159}$$

Hier sind Variations - Parameter $\left(q_i{}^j\right)$ absolute Größen, wie auch die Variations - Parameter $\left(p_i{}^j\right)$ des $\mathbf{g}_i$ – Basissystems. Die $\dot{A}$, $\dot{D}$ sind relative Größen, wie sie wieder in den Ausdrücken

$$\begin{aligned} \dot{A}\sin D &= \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_2 \\ \dot{D} &= \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_1 \end{aligned} \tag{6.160}$$

dargestellt werden müssen.

6.3.9 Transformationen mit *Rodrigues* Parametern und räumliche Variationsgleichungen

Alternativ zu den *Euler*schen Rotationswinkeln *A, B, C* werden auch in der Astrodynamik gelegentlich die von *O. Rodrigues* [1840] eingeführten Parameter verwendet, die bisweilen auch mit dem Namen *Eulers* verknüpft werden[1]. Diese Parameter können formal auf Quaternionen zurückgeführt werden, was in astrodynamischen Anwendungen jedoch nicht nötig ist. Hier werden sie (etwa nach einem Vorschlag von *V. Brumberg* [1995, p. 70]) als Vierer-Vektor zum Beispiel in der folgenden Definition verwendet:

$$\begin{aligned} u_1 &:= \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} \\ u_2 &:= \sin\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2} \\ u_3 &:= \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+C}{2} \\ u_4 &:= \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A+C}{2} \quad . \end{aligned} \tag{6.161}$$

Die Komponenten der Transformationsmatrix (6.91) nehmen mit diesen Parametern die Gestalt an:

[1] Siehe in Abschnitt 2.7.9 (Band I)

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= -\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A \\
a_{12} &= 2\left(u_1 u_2 + u_3 u_4\right) &&= \cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A \\
a_{13} &= 2\left(u_1 u_3 - u_2 u_4\right) &&= \sin B \sin C \\
a_{21} &= 2\left(u_1 u_2 - u_3 u_4\right) &&= -\cos B \cos C \sin A - \sin C \cos A \\
a_{22} &= -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= \cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A \\
a_{23} &= 2\left(u_2 u_3 + u_1 u_4\right) &&= \sin B \cos C \\
a_{31} &= 2\left(u_1 u_3 + u_2 u_4\right) &&= \sin B \sin A \\
a_{32} &= 2\left(u_2 u_3 - u_1 u_4\right) &&= -\sin B \cos A \\
a_{33} &= -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 &&= \cos B \quad .
\end{aligned}
\tag{6.162}
$$

Umgekehrt werden die *Euler*winkel aus den *Rodrigues* Parametern erhalten aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\sin\frac{B}{2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad , \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{u_3^2 + u_4^2} \qquad \text{für} \quad 0° \le B \le 180° \\
&\sin B = 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{u_3^2 + u_4^2} \\
&\sin A = \frac{u_1 u_3 + u_2 u_4}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{u_3^2 + u_4^2}} \quad , \quad \cos A = \frac{u_1 u_4 - u_2 u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{u_3^2 + u_4^2}} \\
&\sin C = \frac{u_1 u_3 - u_2 u_4}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{u_3^2 + u_4^2}} \quad , \quad \cos C = \frac{u_2 u_3 + u_1 u_4}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{u_3^2 + u_4^2}} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.163}
$$

Die zu erwartenden Singularitäten für sin$B$=0 treten in den Gleichungen für die Winkel A und C auf.

Die Parameter a_{ij} bzw. die u_j beziehen ein $\mathbf{q}_j$ Koordinaten-System mit absolutem Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q$ auf ein anderes $\mathbf{p}_i$ System mit absolutem Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p$. Der zugehörige relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}^j \mathbf{q}_j = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p$ hat nach dem Formelsystem (6.136) die Komponenten in Bezug auf die *Euler*winkel und ihre Variationen[1]

$$
\begin{aligned}
D_{qp1} &= \dot{A} \sin B \sin C + \dot{B} \cos C \\
D_{qp2} &= \dot{A} \sin B \cos C - \dot{B} \sin C \\
D_{qp3} &= \dot{A} \cos B + \dot{C} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.164}
$$

Die Variationen der Transformationsparameter (6.162) lauten

[1] Im Zusammenhang mit der Drehung eines festen Körpers werden diese Gleichungen gelegentlich als „kinematische *Euler*sche Gleichungen“ bezeichnet. Dieser Begriff ist allerdings irreführend im Zusammenhang mit der Darstellung eines Bewegungsvorganges in Bezug auf verschiedene Systeme und wird daher in der vorliegenden Arbeit vermieden.

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= 2\left(u_1\dot{u}_1 - u_2\dot{u}_2 - u_3\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{12} &= 2\left(u_1\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_1 + u_4\dot{u}_3 + u_3\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{13} &= 2\left(u_3\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_3 - u_4\dot{u}_2 - u_2\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{21} &= 2\left(u_2\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_2 - u_4\dot{u}_3 - u_3\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{22} &= 2\left(-u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 - u_3\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{23} &= 2\left(u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{31} &= 2\left(u_3\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{32} &= 2\left(u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_4\dot{u}_1 - u_1\dot{u}_4\right)\\
\dot{a}_{33} &= 2\left(-u_1\dot{u}_1 - u_2\dot{u}_2 + u_3\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_4\right)\ .
\end{aligned}
\tag{6.165}
$$

Mit den Formeln (6.133) lauten die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{q}_j$-System in diesem System

$$
\begin{aligned}
D_{qp1} &= D_{q1} - D_p^i\, a_{1i} = \dot{a}_2{}^i\, a_{3i} = 2\left(\dot{u}_1\, u_4 + \dot{u}_2\, u_3 - \dot{u}_3\, u_2 - \dot{u}_4\, u_1\right)\\
D_{qp2} &= D_{q2} - D_p^i\, a_{2i} = \dot{a}_3{}^i\, a_{1i} = 2\left(-\dot{u}_1\, u_3 + \dot{u}_2\, u_4 + \dot{u}_3\, u_1 - \dot{u}_4\, u_2\right)\\
D_{qp3} &= D_{q3} - D_p^i\, a_{3i} = \dot{a}_1{}^i\, a_{2i} = 2\left(\dot{u}_1\, u_2 - \dot{u}_2\, u_1 + \dot{u}_3\, u_4 - \dot{u}_4\, u_3\right)\ .
\end{aligned}
\tag{6.166}
$$

Angewendet auf den Vierer-Vektor der *Rodrigues* Parameter erhält man dessen Variationen in der Form[1]

$$
\begin{aligned}
2\,\dot{u}_1 &= D_{qp3}\, u_2 - D_{qp2}\, u_3 + D_{qp1}\, u_4\\
2\,\dot{u}_2 &= -D_{qp3}\, u_1 + D_{qp1}\, u_3 + D_{qp2}\, u_4\\
2\,\dot{u}_3 &= D_{qp2}\, u_1 - D_{qp1}\, u_2 + D_{qp3}\, u_4\\
2\,\dot{u}_4 &= -D_{qp1}\, u_1 - D_{qp2}\, u_2 - D_{qp3}\, u_3\ .
\end{aligned}
\tag{6.167}
$$

Um umgekehrt aus diesen Variationsgleichungen die Komponenten D_{qpj} berechnen zu können, müssen die Bedingungen[2]

$$
u^i\, u_i = 1 \quad , \quad u^i\, \dot{u}_i = 0 \tag{6.168}
$$

beachtet werden. Sind etwa die Variationen der *Euler*winkel im System (6.164) bekannt oder die Komponenten D_{qpj}, können die Gleichungen (6.167) als Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung verwendet werden.

Die Variationen der *Euler*winkel können mit den Gleichungen (6.164) und (6.166) auf die *Rodrigues* Parameter und ihre Variationen zurückgeführt werden. Mit den Winkeln A, B, C aus den Gleichungen (6.163) wird

$$
\begin{aligned}
\dot{A}\sin B &= D_{qp1}\sin C + D_{qp2}\cos C\\
\dot{B} \qquad &= D_{qp1}\cos C - D_{qp2}\sin C\\
\dot{C} \qquad &= D_{qp3} - \dot{A}\cos B\ .
\end{aligned}
\tag{6.169}
$$

Im Einzelnen ist für die Parameter $\dot{A}$ und $\dot{B}$, womit auch $\dot{C}$ berechnet werden kann:

---

[1] V. BRUMBERG [1995], p. 73 Formel (3.3.29). Die in diesem Buch verwendete Schreibweise mit Spaltenvektor und schiefsymmetrischer Transformationsmatrix wird in die vorliegende Arbeit allerdings nicht übernommen

[2] Die u_i können als die Komponenten eines Einerquaternions gedeutet werden

$$\dot{A} = \frac{D_{qp1}\left(u_1 u_3 - u_2 u_4\right) + D_{qp2}\left(u_2 u_3 + u_1 u_4\right)}{2\left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(u_3^2 + u_4^2\right)} = \frac{u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1}{u_1^2 + u_2^2} + \frac{u_3 \dot{u}_4 - u_4 \dot{u}_3}{u_3^2 + u_4^2}$$

$$\dot{B} = 2\left[\left(\dot{u}_1 u_1 + \dot{u}_2 u_2\right)\frac{\sqrt{u_3^2 + u_4^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \left(\dot{u}_3 u_3 + \dot{u}_4 u_4\right)\frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{\sqrt{u_3^2 + u_4^2}}\right] \quad . \tag{6.170}$$

Beim Bezug des $\mathbf{p}_i$-Systems auf das $\mathbf{q}_j$-System werden die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{p}_i$-Systems in Koordinaten dieses Systems mit den Gleichungen (6.139) berechnet:

$$\begin{aligned} D_{pq1} &= D_{p1} - D_q{}^j a_{j1} = \dot{a}^j{}_2 a_{j3} = 2\left(-\dot{u}_1 u_4 + \dot{u}_2 u_3 - \dot{u}_3 u_2 + \dot{u}_4 u_1\right) \\ D_{pq2} &= D_{p2} - D_q{}^j a_{j2} = \dot{a}^j{}_3 a_{j1} = 2\left(-\dot{u}_1 u_3 - \dot{u}_2 u_4 + \dot{u}_3 u_1 + \dot{u}_4 u_2\right) \\ D_{pq3} &= D_{p3} - D_q{}^j a_{j3} = \dot{a}^j{}_1 a_{j2} = 2\left(\ \dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1 - \dot{u}_3 u_4 + \dot{u}_4 u_3\right) \ . \end{aligned} \tag{6.171}$$

6.3.10 Die *Rodrigues* Parameter in *Hansen* Systemen

Für ein *Hansen* System lauten die räumlichen Variationsgleichungen in Bezug auf ein (äquatoriales oder ekliptikales) $\mathbf{p}_i$-Basissystem mit den Zuordnungen $A \to \Omega, B \to i, C \to -\sigma$ entsprechend den Formeln (6.153)

$$\begin{aligned} \left(i\right)^{\cdot} &= \dot{\eta}\sin\left(\zeta - \sigma\right) - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega}\,\sin i &= \dot{\eta}\cos\left(\zeta - \sigma\right) - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\Omega}\,\cos i &= \dot{\sigma} \qquad\qquad - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 \quad . \end{aligned} \tag{6.172}$$

Die Basisvektoren $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ des Knotensystems sind aus den Formeln (6.108) und der Normalenvektor ist bekannt aus $\mathbf{c}_0 = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$.

Der relative Eigenbewegungsvektor des *Hansen* Systems bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$-System in Koordinaten des *Hansen* Systems ist

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}p} = D_{q^{(I)}p}{}^j \mathbf{q}_j = \mathbf{D}_{q^{(I)}} - \mathbf{D}_p = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 - \mathbf{D}_p = D_{q^{(I)}}{}^j \mathbf{q}_j - D_p{}^i \mathbf{p}_i = \left(D_{q^{(I)}}{}^j - D_p{}^i\, a^j{}_i\right)\mathbf{q}_j \ . \tag{6.173}$$

Die Komponenten können aus dem System (6.136) berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_{q^{(I)}p1} &= -\dot{\Omega}\,\sin i\,\sin\sigma + \left(i\right)^{\cdot}\cos\sigma \\ D_{q^{(I)}p2} &= \ \dot{\Omega}\,\sin i\,\cos\sigma + \left(i\right)^{\cdot}\sin\sigma \\ D_{q^{(I)}p3} &= \ \dot{\Omega}\,\cos - \dot{\sigma} \qquad\qquad . \end{aligned} \tag{6.174}$$

Werden hier die Beziehungen (6.172) eingesetzt, folgen für die ersten beiden Komponenten

$$\begin{aligned} D_{q^{(I)}p1} &= \dot{\eta}\cos\zeta \ - a_1{}^i D_{pi} \\ D_{q^{(I)}p2} &= \dot{\eta}\sin\zeta \ - a_2{}^i D_{pi} \quad . \end{aligned} \tag{6.175}$$

Hier sind die Werte $\left(\dot{\eta}\cos\zeta, \dot{\eta}\sin\zeta\right)$ die ersten beiden Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors des *Hansen* Systems, wie aus den *Frenet* Gleichungen (4.325) auf Seite 73

eines *Hansen* Systems abzulesen ist. Die dritte Komponente verschwindet danach identisch[1] und es bleibt

$$D_{q^{(I)}p3} = -a_3{}^i D_{pi} \quad . \tag{6.176}$$

Werden diese Beziehungen in die Variationsgleichungen (6.167) der *Rodrigues* Parameter eingesetzt, ergeben sich die Variationsgleichungen im Fall von *Hansen* Systemen:

$$\begin{aligned}
2\dot{u}_1 &= \dot{\eta}\left(-u_3 \sin\zeta + u_4 \cos\zeta\right) + \left(\ u_3\, a_2{}^i - u_4\, a_1{}^i - u_2\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_2 &= \dot{\eta}\left(\ u_3 \cos\zeta + u_4 \sin\zeta\right) + \left(-u_3\, a_1{}^i - u_4\, a_2{}^i + u_1\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_3 &= \dot{\eta}\left(\ u_1 \sin\zeta - u_2 \cos\zeta\right) + \left(-u_1\, a_2{}^i + u_2\, a_1{}^i - u_4\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_4 &= \dot{\eta}\left(-u_1 \cos\zeta - u_2 \sin\zeta\right) + \left(\ u_1\, a_1{}^i + u_2\, a_2{}^i + u_3\, a_3{}^i\right) D_{pi} \quad .
\end{aligned} \tag{6.177}$$

Wird der *Hansen*sche Bahnwinkel als unabhängige Variable verwendet, lauten die Variationsgleichungen, unter Berücksichtigung des Flächensatzes,

$$\begin{aligned}
2\frac{du_1}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(-u_3 \sin\zeta + u_4 \cos\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(\ u_3\, a_2{}^i - u_4\, a_1{}^i - u_2\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\frac{du_2}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(\ u_3 \cos\zeta + u_4 \sin\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(-u_3\, a_1{}^i - u_4\, a_2{}^i + u_1\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\frac{du_3}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(\ u_1 \sin\zeta - u_2 \cos\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(-u_1\, a_2{}^i + u_2\, a_1{}^i - u_4\, a_3{}^i\right) D_{pi} \\
2\frac{du_4}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(-u_1 \cos\zeta - u_2 \sin\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(\ u_1\, a_1{}^i + u_2\, a_2{}^i + u_3\, a_3{}^i\right) D_{pi} \quad .
\end{aligned} \tag{6.178}$$

Anmerkungen:

1. In der bekannten Literatur finden sich diese Formeln ausschließlich ohne die Berücksichtigung der Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$-Systems, d.h. mit der impliziten Annahme, dass dieses System ein inertiales sei. Dies kann aber nicht grundsätzlich gefordert oder gar definiert werden. Im Gegenteil: Wenn es (technisch) gelingt, die Bewegung in Bezug auf ein *Hansen* System unabhängig von einem anderen Bezug zu messen, kann mit diesen Formeln auf die Eigenbewegung dieses Systems, also den Einfluss des Weltalls geschlossen werden[2]. Ursächlich ist die Eigenschaft der Variationen $\dot{\zeta}, \dot{\eta}$ der beiden *Hansen* Winkel, die entsprechend den *Frenet* Formeln der Astrodynamik[3] absolute Größen sind, also nicht relativ zu einem bekannten Koordinatensystem bestimmt werden können. Dieser Sachverhalt trifft dann auch auf die Variation $d\eta / d\zeta$ zu.

[1] Vgl. auch Satz H17 und den indirekten Beweis mit Formel (4.337) auf Seite 78

[2] vgl. Satz H14 auf in Abschnitt 4.3.16. Dies ist eine grundsätzliche (qualitative) Aussage ohne irgendeine Aussage über eine mögliche Quantifizierbarkeit

[3] siehe in Abschnitt 4.4.3

2. Die hier entwickelten Variationsgleichungen enthalten als Beschleunigungsterm die normale Beschleunigung $b_N = \dot{\eta} r / G$. Eine Aufschlüsselung dieses Terms nach konservativer Beschleunigung, die ein Potential *R* hat, und nicht konservativer Beschleunigung findet sich in der Literatur[1]. ◀

6.3.11 Die Drehachsen

Jede beliebige Drehung kann nach *Euler* in Drehungen um drei Drehachsen zerlegt werden. Diese Zerlegung wird in diesem Abschnitt hergeleitet, wobei der absolute Charakter der Drehungen solange wie möglich bewahrt wird. Das bedeutet, dass möglichst allgemeingültig unter Berücksichtigung der Eigenbewegungen des Bezugssystems die allgemeinen Formeln abgeleitet werden und erst im konkreten Fall der dann freilich unvermeidliche relative Bezug der Drehungen berechnet wird.

Für den *relativen Geschwindigkeitsvektor* gilt wie in den Formeln (6.47) auf Seite 194 mit der Abkürzung

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;:=\; \dot{y}^j \, \mathbf{q}_j$$

auch (die allgemeingültige Formel)

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.179}$$

$\dot{\mathbf{r}}_q$ ist also der Geschwindigkeitsvektor, den der bewegte Körper bezüglich des selbst bewegten $\mathbf{q}_j$- Systems hat, während $\mathbf{D}_q \times \mathbf{r}$ den Anteil des („absoluten“) Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}$ ausdrückt, der eine Folge der Eigenrotation des $\mathbf{q}_j$- Systems ist. Dieser Anteil soll genauer untersucht werden. Dazu werden die im Fall orthonormaler Basissysteme geltenden Definitionsgleichungen der D_{qj} aus den Formeln (6.134) verwendet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \;&=\; D_q^j \, \mathbf{q}_j \times \mathbf{r} \\
&=\; \dot{B}\cos C \, \mathbf{q}_1 \times \mathbf{r} + \dot{A}\sin C \sin B \, \mathbf{q}_1 \times \mathbf{r} - \\
&\quad - \dot{B}\sin C \, \mathbf{q}_2 \times \mathbf{r} + \dot{A}\cos C \sin B \, \mathbf{q}_2 \times \mathbf{r} + \\
&\quad + \dot{A}\cos B \, \mathbf{q}_3 \times \mathbf{r} + \dot{C} \, \mathbf{q}_3 \times \mathbf{r} + \\
&\quad + D_{q(0)}{}^j \, \mathbf{q}_j \times \mathbf{r} \qquad .
\end{aligned} \tag{6.180}$$

Hier wurde die gelegentlich verwendete Beziehung gesetzt

$$\mathbf{D}_p \;=:\; D_{q(0)}{}^j \, \mathbf{q}_j \quad . \tag{6.181}$$

Der Knotenvektor hat im $\mathbf{q}_j$- System nach Bild 6-5 auf Seite 204 die Darstellung

$$\mathbf{k}_1 \;=\; \mathbf{q}_1 \cos C - \mathbf{q}_2 \sin C \tag{6.182}$$

und $\mathbf{p}_2$ kann nach Formel (6.95) auf Seite 206 im $\mathbf{q}_j$- System ausgedrückt werden. Der *Darboux*sche Vektor hat im $\mathbf{q}_j$- System dann die Darstellung

$$\mathbf{D}_q \;=\; \dot{A}\,\mathbf{p}_3 + \dot{B}\,\mathbf{k}_1 + \dot{C}\,\mathbf{q}_3 + \mathbf{D}_p \tag{6.183}$$

[1] siehe etwa in A. DEPRIT [1976], p. 262 und V. BRUMBERG [1995], p.72

und die $\mathbf{p}_i$ können mit den Formeln (6.94) – (6.96) im $\mathbf{q}_j$- System ausgedrückt werden. Der Geschwindigkeitsvektor lautet dann

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \dot{A}\,\mathbf{p}_3 \times \mathbf{r} + \dot{B}\,\mathbf{k}_1 \times \mathbf{r} + \dot{C}\,\mathbf{q}_3 \times \mathbf{r} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.184}$$

Damit ist die Zerlegung des absoluten Geschwindigkeitsvektors in den relativen Geschwindigkeitsvektor und in die Anteile um die drei Drehachsen mit den drei *Eulerwinkeln A*, *B*, *C* gelungen:

1. Relativer Geschwindigkeitsvektor bezüglich des gedrehten Systems, $\dot{\mathbf{r}}_q$
2. Rotation um die $\mathbf{p}_3$ - Achse (Polachse des ursprünglichen Systems) um den Winkel *A* mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{A}$,
3. Rotation um den Knotenvektor $\mathbf{k}_1$ der beiden Systeme um den Winkel („Inklination“) *B* mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{B}$,
4. Rotation um die $\mathbf{q}_3$- Achse (Polachse des zweiten Systems) um den Winkel *C* mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{C}$,
5. Restterm, der von der Eigenbewegung des rotierenden Basissystems herkommt.

Wird mir $\dot{\mathbf{r}}_p$ der relative Geschwindigkeitsvektor bezüglich des $\mathbf{p}_i$ – Systems bezeichnet, ist

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.185}$$

Dieser Vektor kann in der Praxis gewöhnlich ausschließlich beobachtet werden und es ergibt sich statt Beziehung (6.184) die übliche relative Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \dot{A}\,\mathbf{p}_3 \times \mathbf{r} + \dot{B}\,\mathbf{k}_1 \times \mathbf{r} + \dot{C}\,\mathbf{q}_3 \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.186}$$

6.3.12 Die Drehbeschleunigungen bei Rotation orthonormaler Systeme

Die Drehbeschleunigungen im Fall allgemeiner Rotationen im dreidimensionalen Raum wurden in Abschnitt 6.1.7 auf Seite 195 behandelt. Bei Rotation orthonormaler Systeme müssen zur Berechnung der Variationen $\dot{D}_q^j$ des Variationsvektors des $\mathbf{q}_j$ – Systems (des allgemeinen *Darboux*schen Vektors) die Beschleunigungen in den Drehwinkeln bekannt sein. Aus den Formeln (6.134) folgt

$$\begin{aligned}
\dot{D}_{q1} &= \dot{q}_{23} = \ddot{B}\cos C + \dot{C}\,D_{q2} + \ddot{A}\sin C \sin B + \dot{A}\,\dot{B}\sin C\cos B + \dot{D}_{q(0)1} \\
\dot{D}_{q2} &= \dot{q}_{31} = -\ddot{B}\sin C - \dot{C}\,D_{q1} + \ddot{A}\cos C \sin B + \dot{A}\,\dot{B}\cos C\cos B + \dot{D}_{q(0)2} \\
\dot{D}_{q3} &= \dot{q}_{12} = \ddot{A}\cos B - \dot{A}\,\dot{B}\sin B + \ddot{C} + \dot{D}_{q(0)3} \quad .
\end{aligned} \tag{6.187}$$

Der Beschleunigungsvektor kann durch Differentiation von Gleichung (6.184) auch direkt auf die Beschleunigungen der Drehwinkel bezogen werden. Dazu wird die Variation des Knotenvektors (6.182) benötigt, die mit Hilfe der ersten beiden der Variationsgleichungen (6.133) auf Seite 213 erhalten werden kann,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{k}}_1 = {} & \dot{A}\left(\mathbf{q}_1 \cos B \sin C + \mathbf{q}_2 \cos B \cos C - \mathbf{q}_3 \sin B\right) + \\
& + D_{q(0)3}\left(\sin C\,\mathbf{q}_1 + \cos C\,\mathbf{q}_2\right) - \left(D_{q(0)1}\sin C + D_{q(0)2}\cos C\right)\mathbf{q}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{6.188}$$

Da Formel (6.184) auf jeden Vektor angewendet werden kann wird hier $\mathbf{r}$ durch $\dot{\mathbf{r}}_q$ ersetzt, wenn noch mit Gleichung (6.59) $\dot{\mathbf{v}}_q \;:=\; \ddot{y}^j\,\mathbf{q}_j$ gesetzt wird:

$$\ddot{\mathbf{r}}_q \;=\; \dot{\mathbf{v}}_q + \dot{A}\,\mathbf{p}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + \dot{B}\,\mathbf{k}_1\times\dot{\mathbf{r}}_q + \dot{C}\,\mathbf{q}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_p\times\dot{\mathbf{r}}_q \tag{6.189}$$

mit der dritten der Gleichungen (6.132) mit (6.133) und $\mathbf{k}_1$ aus Gleichung (6.182)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_3\times\mathbf{r} \;=\; & -\dot{B}\,(\mathbf{q}_1\sin C + \mathbf{q}_2\cos C)\times\mathbf{r} + \dot{A}\,\mathbf{k}_1\times\mathbf{r}\sin B + \\ & + D_{q(0)2}\,\mathbf{q}_1\times\mathbf{r} - D_{q(0)1}\,\mathbf{q}_2\times\mathbf{r}\end{aligned} \tag{6.190}$$

und der Variation des *Darboux*schen Vektors aus Gleichung (6.183)

$$\dot{\mathbf{D}}_q \;=\; \ddot{A}\,\mathbf{p}_3 + \ddot{B}\,\mathbf{k}_1 + \ddot{C}\,\mathbf{q}_3 + \dot{A}\,\dot{\mathbf{p}}_3 + \dot{B}\,\dot{\mathbf{k}}_1 + \dot{C}\,\dot{\mathbf{q}}_3 + \dot{\mathbf{D}}_q \quad . \tag{6.191}$$

Dies ergibt schließlich zusammenfassend nach Gleichung (6.184) für den absoluten Beschleunigungsvektor die Darstellung

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} \;=\; & \dot{\mathbf{v}}_q + \ddot{A}\,\mathbf{p}_3\times\mathbf{r} + \ddot{B}\,\mathbf{k}_1\times\mathbf{r} + \ddot{C}\,\mathbf{q}_3\times\mathbf{r} + \\ & + 2\,\dot{A}\,\mathbf{p}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + 2\,\dot{B}\,\mathbf{k}_1\times\dot{\mathbf{r}}_q + 2\,\dot{C}\,\mathbf{q}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + \\ & + \dot{A}\,\mathbf{p}_3\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \dot{B}\,\mathbf{k}_1\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \dot{C}\,\mathbf{q}_3\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \\ & + \dot{B}\,\dot{\mathbf{k}}_1\times\mathbf{r} + \dot{C}\,\dot{\mathbf{q}}_3\times\mathbf{r} + \\ & + \dot{\mathbf{D}}_p\times\mathbf{r} + 2\,\mathbf{D}_p\times\dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_p\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) \quad .\end{aligned} \tag{6.192}$$

Wird aus $\dot{\mathbf{r}}_p \;=\; \dot{\mathbf{r}}_q \;+\; \mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{r}$ der relative Beschleunigungsvektor bezüglich des $\mathbf{p}_i-$Systems

$$\ddot{\mathbf{r}}_p \;=\; \ddot{\mathbf{r}}_q \;+\; \dot{\mathbf{D}}_{qp}\times\mathbf{r} + \mathbf{D}_{qp}\times\dot{\mathbf{r}} \tag{6.193}$$

berechnet und in Gleichung (6.192) eingesetzt, bleibt

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} \;=\; & \dot{\mathbf{v}}_q + \ddot{A}\,\mathbf{p}_3\times\mathbf{r} + \ddot{B}\,\mathbf{k}_1\times\mathbf{r} + \ddot{C}\,\mathbf{q}_3\times\mathbf{r} + \\ & + 2\,\dot{A}\,\mathbf{p}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + 2\,\dot{B}\,\mathbf{k}_1\times\dot{\mathbf{r}}_q + 2\,\dot{C}\,\mathbf{q}_3\times\dot{\mathbf{r}}_q + \\ & + \dot{A}\,\mathbf{p}_3\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \dot{B}\,\mathbf{k}_1\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \dot{C}\,\mathbf{q}_3\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) + \\ & + \dot{B}\,\dot{\mathbf{k}}_1\times\mathbf{r} + \dot{C}\,\dot{\mathbf{q}}_3\times\mathbf{r} + \\ & + \dot{\mathbf{D}}_p\times\mathbf{r} + 2\,\mathbf{D}_p\times\dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_p\times(\mathbf{D}_q\times\mathbf{r}) \quad .\end{aligned} \tag{6.194}$$

Auch im relativen Beschleunigungsvektor bleiben also Anteile der absoluten Bewegung des $\mathbf{p}_i-$Basissystems erhalten, wie schon die Variation $\dot{\mathbf{k}}_1$ des Knotenvektors in Gleichung (6.188) und der Ausdruck für $\dot{\mathbf{q}}_3\times\mathbf{r}$ in Gleichung (6.190) gezeigt haben.

Während also die Geschwindigkeitsvektoren als absolute und relative Größen beschrieben werden können, die im Fall relativer Darstellung völlig von der Eigenbewegung des Basissystems unabhängig sind, ist diese Trennung im Fall des Beschleunigungsvektors nicht mehr möglich.

BEISPIEL: Die bekannte ***Rotation um eine feste Achse*** (Beispiel: Erdrotation) ergibt mit $B \equiv C \equiv 0$ für die Koeffizienten des *Darboux*schen Vektors $D_{q1} = D_{q2} = 0$, $D_{qp3} = \dot{A}$, $D_{q3}^{(2)} = 0$, somit

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx \ddot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{v}}_q + 2\,\dot{A}\,\mathbf{p}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_q + \dot{A}^2 \mathbf{p}_3 \times (\mathbf{p}_3 \times \mathbf{r}) + \ddot{A}\,\mathbf{p}_3 \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.195}$$

In diesem Fall beträgt die Coriolisbeschleunigung

$$b_C := 2\,\dot{A}\sqrt{\dot{y}^j\,\dot{y}_j}\,\sin(\mathbf{p}_3, \dot{\mathbf{r}}_{q0}) \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_{q0}^2 = 1 \tag{6.196}$$

und die Zentrifugalbeschleunigung

$$b_Z := \dot{A}^2 r \quad . \tag{6.197}$$

Hier ist $\sqrt{\dot{y}^j\,\dot{y}_j} = \left|\dot{\mathbf{r}}_q\right|$ die Geschwindigkeit bezüglich des rotierenden Systems. Für diese wird gelegentlich der Begriff *Translationsgeschwindigkeit* verwendet.

6.3.13 Additionstheorem fortgesetzter Transformationen des Geschwindigkeitsvektors

Werden im dreidimensionalen Raum mehrere Transformationen zwischen Systemen durchgeführt, deren (absolute oder relative) Eigenbewegungsvektoren bekannt sind, ergeben sich für die relativen Geschwindigkeitsvektoren bei zwei Transformationen (mit Beziehung (6.48) auf Seite 194)

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}$$
$$\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{\mathbf{r}}_z + \left(\mathbf{D}_z - \mathbf{D}_q\right) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_z + \mathbf{D}_{zq} \times \mathbf{r}$$

zusammen also

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_z + \left[\left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right) + \left(\mathbf{D}_z - \mathbf{D}_q\right)\right] \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_z + \left(\mathbf{D}_z - \mathbf{D}_p\right) \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.198}$$

Wenn nur die relativen Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{qp}$, $\mathbf{D}_{zq}$ sowie

$$\mathbf{D}_{zp} := \mathbf{D}_z - \mathbf{D}_p \tag{6.199}$$

bekannt sind, folgt

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_z + \left(\mathbf{D}_{qp} + \mathbf{D}_{zq}\right) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_z + \mathbf{D}_{zp} \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.200}$$

Diese Beziehung lässt sich sofort auf n Transformationen mit (n-1) Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{q(i)}^{(1)}$ $(i = 1,2,...,n)$ zu folgendem Additionstheorem erweitern

$$\dot{\mathbf{r}}_{q(n)} = \dot{\mathbf{r}}_{q(1)} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)}\right) \times \mathbf{r} \quad , \tag{6.201}$$

wobei

$$\mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} := \mathbf{D}_{q(\nu)} - \mathbf{D}_{q(\nu-1)} \quad , \quad \left(\nu = 2,3,...,n\right) \tag{6.202}$$

gesetzt wurde und

$$\dot{\mathbf{r}}_{q(\nu)} = \dot{\mathbf{r}}_{q(\nu-1)} + \mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} \times \mathbf{r} \quad . \tag{6.203}$$

6.3.14 Schrittweise Integration mit Hilfe von Transformationen des bewegungsbezogenen *Hansen*-idealen Bahnsystems

Der Eigenbewegungsvektor (4.328) auf Seite 74 des bewegungsbezogenen Bahnsystems (*Hansen* System)

$$\mathbf{D}_q \;=\; \dot{\eta}\;\mathbf{r}_0$$

ist eine absolute Größe, die mit der Variation $\dot{\eta}$ des Drehwinkels η auf das inertiale System des Weltalls bezogen ist. In $\dot{\eta}$ spiegeln sich also alle Einflüsse, die nur möglich sind, auf die beobachtete Bewegung wieder. $\dot{\eta}$ wird in der Praxis aus mehreren Teilvariationen $\dot{\eta}^{(\nu)}$ zusammengesetzt

$$\dot{\eta} \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\eta}^{(\nu)} \qquad . \tag{6.204}$$

Hier bewirkt $\dot{\eta}^{(\nu)}$ eine Transformation von einem (ν-1)-ten System in ein (ν)-tes System, ist somit als eine relative Größe aufzufassen. Dies kann durch willkürliche Zuweisung eines Eigenbewegungsvektors

$$\mathbf{D}_{q(0)} \;=:\; \mathbf{D}_0 \;=\; 0 \tag{6.205}$$

zum inertialen (Basis-) System geschehen. Dann ist für das erste System, das aus dem inertialen System durch Transformation hervorgeht

$$\mathbf{D}_{q(1)} \;:=\; \mathbf{D}_{q(1)q(0)} + \mathbf{D}_0 \;=\; \mathbf{D}_{q(1)q(0)} \;=:\; \dot{\eta}^{(1)}\,\mathbf{r}_0 \qquad . \tag{6.206}$$

Für das 2-te System besteht mit der Bezeichnung $\mathbf{D}_{q(1)} \;=:\; \mathbf{D}_p$ die Beziehung

$$\mathbf{D}_{q(2)} \;=\; \mathbf{D}_{q(2)q(1)} + \mathbf{D}_{q(1)} \;=\; \left[\dot{\eta}^{(2)} + \dot{\eta}^{(1)}\right]\mathbf{r}_0 \qquad , \tag{6.207}$$

wenn mit

$$\mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} \;=:\; \dot{\eta}^{(\nu)}\,\mathbf{r}_0 \qquad . \tag{6.208}$$

die Drehung des ν-ten System bezüglich des (ν-1)-ten Systems bezeichnet wird. Bei *n* Transformationen gilt somit das Additionstheorem

$$\mathbf{D}_q \;:=\; \mathbf{D}_{q(n)} \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} \;=\; \mathbf{r}_0 \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\eta}^{(\nu)} \;=:\; \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \qquad . \tag{6.209}$$

Wenn mit Formel (4.307) auf Seite 70 die normale Beschleunigungskomponente eingeführt wird, ist bei einer Zerlegung in Teilkomponenten

$$\frac{\mathrm{d}\eta^{(\nu)}}{\mathrm{d}\zeta} \;=\; \mathrm{fct}\left(\mathrm{A}_1^{(\nu-1)}, \mathrm{A}_2^{(\nu-1)}, \mathrm{G}^{(\nu-1)}, \mathrm{i}^{(\nu-1)}, \sigma^{(\nu-1)}, \zeta_0\,; \zeta\right) = \frac{\mathrm{r}^3}{\mathrm{G}^2}\,\mathrm{b}_\mathrm{N}^{(\nu)} \qquad , \quad \nu = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n} \tag{6.210}$$

so wird die ν-te Teilintegration einen Wert für den Drehwinkel η liefern, der als Anfangswert für die (ν+1)-te Integration dienen wird. Dieser Integrationsprozess ist daher wesentlich einfacher als der im vorhergehenden Kapitel hergeleitete Prozess zur Bestimmung der anderen vier Bahnparameter.

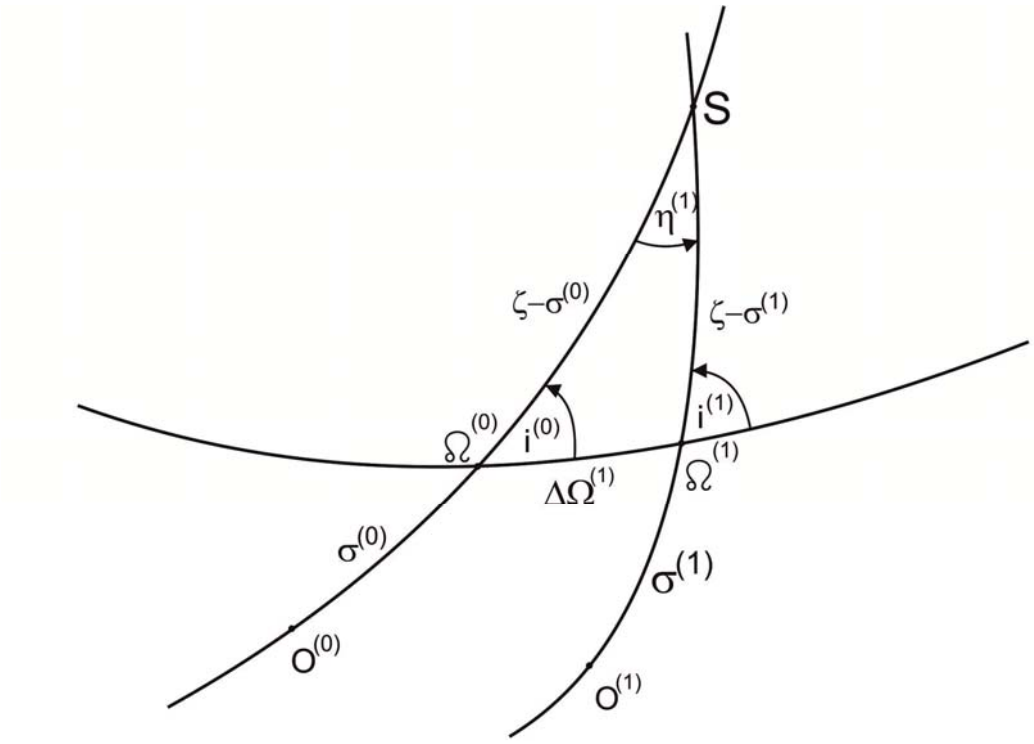


Bild 6-6: Rotation der Bahnebene um die Satellitenposition S mit dem Winkel η(1) als Folge einer normalen Beschleunigung auf die Bewegung von S. O(0) Anfangspunkt des Hansen Systems im Fall ohne Einwirkung von Beschleunigungen („ungestörter" Fall) mit Knoten Ω(0), O(1) Anfangspunkt des Hansen Systems nach der Einwirkung von (normalen) Beschleunigungen („gestörter" Fall) mit Knoten Ω(1).

Mit Hilfe des (jetzt „sichtbar" werdenden) Rotationswinkels η können die räumlichen Orientierungswinkel Inklination i und Knotenlänge σ entsprechend Bild 6-6 im sphärischen Dreieck $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$,S berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right)\sin i^{(1)} &= -\cos\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin i^{(0)}\cos\eta^{(1)}-\cos i^{(0)}\sin\eta^{(1)} \\
\sin\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right)\sin i^{(1)} &= \sin\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin i^{(0)} \\
\cos i^{(1)} &= -\cos\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin i^{(0)}\sin\eta^{(1)}+\cos i^{(0)}\cos\eta^{(1)} \quad .
\end{aligned} \tag{6.211}$$

Außerdem folgt die Verschiebung des Knotens längs des Äquators eindeutig aus

$$\begin{aligned}
\cos\Delta\Omega^{(1)} &= \cos\eta^{(1)}\sin\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right)+\cos\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\cos\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right) \\
\sin\Delta\Omega^{(1)} &= -\sin\eta^{(1)}\sin\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin i^{(1)}+ \\
&\quad +\left[\cos\eta^{(1)}\sin\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\cos\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right)-\cos\left(\zeta-\sigma^{(0)}\right)\sin\left(\zeta-\sigma^{(1)}\right)\right]\cos i^{(1)} \quad .
\end{aligned} \tag{6.212}$$

Müssen weitere Beschleunigungen und mit ihnen Rotationen des Bahnsystems um die momentane Position des bewegten Himmelkörpers in der Position S berücksichtigt werden, kommt nun das Additionstheorem des η-Winkels in Formel (6.204) zum Tragen. Durch Integration des Variationsausdrucks in dieser Beziehung folgt für die Drehwinkel nach N Schritten die Summe

$$\eta = \sum_{\nu=1}^{n}\eta^{(\nu)} \; . \tag{6.213}$$

Die Bahnebene wird also durch jeden Integrationsschritt um den Winkel $\eta^{(\nu)}$ weitergedreht, die gesamte Drehung ergibt sich als Summe der Einzelschritte. Entsprechend ergibt sich die räumliche Orientierung der endgültigen Bahnebene entweder aus den Winkeln $i^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$ des letzten Integrationsschrittes oder durch Anwendung des Formelsystems (6.211) auf die Gesamtdrehung η. In beiden Fällen müssen sich dieselben räumlichen Orientierungswinkel ergeben.

7 Bewegung in krummlinigen Koordinaten

In der Satellitenbahnmechanik werden in erster Linie geradlinige und speziell orthonormierte Basissysteme verwendet. Gleichwohl kann auch hier die gelegentliche Verwendung nichtorthonormierter und allgemeiner krummliniger Systeme notwendig werden, etwa bei der Behandlung relativistischer Effekte. Das Rechnen mit solchen Systemen wird in allgemeinem Zusammenhang in der Tensorrechnung abgehandelt. Es sollen daher einige Grundkenntnisse der Tensorrechnung eingefügt werden[1]. Hier interessieren die wesentlichen Eigenschaften von Tensoren, dass tensoriell formulierte Gleichungen in jedem Koordinatensystem richtig sind und sie zugleich das Transformationsverhalten der einzelnen Größen beinhalten. Der Tensorbegriff führt zu einer Verallgemeinerung des Vektorbegriffes und damit der Transformationen zwischen verschiedenen Systemen. Insbesondere können krummlinige Koordinaten und ihre Analysis in übersichtlicher Weise tensoriell bearbeitet werden. Somit kann im Rahmen der Tensorrechnung auch das allgemeine Transformationsverhalten der Parameter der Satellitenbahnmechanik studiert werden.

Die Entwicklung der Tensorrechnung geht im Wesentlichen auf Arbeiten von *E. B. Christoffel* 1869 und *G. Ricci-Curbastro* 1887 zurück[2]. Ihre erste erfolgreiche zusammenfassende Darstellung hat sie 1900 in einer Arbeit von *Ricci* und *T. Levi-Civita* gefunden[1]. Die Tensorrechnung ist eine Erweiterung der 1844 von *H. Grassmann* unter dem Titel *Ausdehnungslehre* begründeten Vektorrechnung, welche ihrerseits vollständig in der Tensorrechnung enthalten ist. Die Tensorrechnung kann mit Vorteil in vielen Anwendungsgebieten auch der Himmelsmechanik eingesetzt werden. Für die Entwicklung der Relativitätstheorie, die selbst zu einem integralen Bestandteil der Himmelsmechanik geworden ist, ist sie unentbehrlich.

Die Tensorrechnung verwendet wie die Vektorrechnung eine Symbolsprache, wodurch von einem speziellen Koordinatensystem unabhängige Darstellungen zustande kommen können. Gleichwohl hat es sich in der Tensorrechnung herausgestellt, dass eine basisabhängige Schreibweise mit Indizes weitreichendere Aussagen erlaubt als die basisunabhängige[3]. In der Literatur findet sich trotz der zunehmenden Bedeutung der Tensorrechnung leider immer noch keine einheitliche Bezeichnungsweise. Manche Arbeiten erschweren die Anwendung durch eine Fülle eigenwilliger Begriffe und Bezeichnungen, ohne dass neue Inhalte zu beobachten wären. Es ist daher wegen der einheitlichen Verwendung nötig, Begriffe und Bezeichnungen vor den Anwendungen ausführlich und einheitlich zu entwickeln.

Zum Rechnen in krummlinigen Koordinaten werden Tensoren benötigt. Damit werden neue Einsichten möglich, welche beim Rechnen in geradlinigen Koordinaten nicht erkannt werden können.

---

[1] vgl. etwa A. LICHNEROWICZ [1966], E. KLINGBEIL [1966], Tensorrechnung für Ingenieure, BI 197/197a, MADELUNG [1964], LANDAU UND LIFSCHITZ [1992], BUCERIUS UND SCHNEIDER [1967], p. 200 ff., WEINBERG [1972], p. 91–120, H. TEICHMANN [1963], Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung, BI 39/39a, GREEN [1985], p. 491 ff., u. a.

[2] in: W. BLASCHKE [1957], 'C. F. Gauss und die Differentialgeometrie', in H. REICHARDT her. [1957], *C. F. Gauss, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages*

[3] D. LAUGWITZ [1960], Differentialgeometrie, Teubner Verlag, Stuttgart, p.76

7.1 Grundzüge der Tensoralgebra

5.9.3 Kovariante und kontravariante Basen

Ein Basissystem mit tiefgestellten Indizes wird im Rahmen der Tensorrechnung als *kovariante Basis* bezeichnet. Seien die $\mathbf{p}_i$ eine allgemeine Basis, also linear unabhängig, ist in

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \tag{7.1}$$

$$\mathbf{p}_i \Leftrightarrow \text{kovariante Basis} \quad , \tag{7.2}$$

die x^i sind die *affinen* Koordinaten eines Vektors.

Es lässt sich eine zweite Basis $\mathbf{p}^j$ mit hochgestelltem Index über die Beziehung

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}^j := \delta_i{}^j \tag{7.3}$$

konstruieren[1]. Man nennt sie

$$\mathbf{p}^j \Leftrightarrow \text{kontravariante Basis} \quad . \tag{7.4}$$

Ist die kovariante Basis $\mathbf{p}_i$ bekannt, kann die kontravariante Basis $\mathbf{p}^j$ aus der Definitionsgleichung (7.3) berechnet werden und umgekehrt. Für den Betrag, geometrisch im Dreidimensionalen also die Länge, eines Vektors ist allgemein

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^i x^j \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} \quad . \tag{7.5}$$

Die Größen

$$g_{ij} := \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$$

sind ein Maß für den Betrag des Vektors und werden daher als *Metrikkoeffizienten* bezeichnet, genauer

$$g_{ij} := \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \Leftrightarrow \text{kovariante Metrikkoeffizienten} \quad . \tag{7.6}$$

Im *N*-dimensionalen Raum gibt es N^2 kovariante Metrikkoeffizienten. Analog sind die

$$g^{ij} := \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j \Leftrightarrow \text{kontravariante Metrikkoeffizienten} \tag{7.7}$$

und es gibt im *N*-dimensionalen Raum auch N^2 kontravariante Metrikkoeffizienten. Aus den Definitionsgleichungen (7.6) und (7.7) folgt sofort:

Die Metrikkoeffizienten sind symmetrisch.

$$g_{ij} = g_{ji} \quad ; \quad g^{ij} = g^{ji} \quad . \tag{7.8}$$

Ein Zusammenhang zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren folgt aus dem Ansatz $\mathbf{p}_i =: a_{ij} \mathbf{p}^j$, d.h. die $\mathbf{p}^j$ werden wie die $\mathbf{p}_i$ als eine linear unabhängige Basis des linearen Vektorraumes aufgefasst. Dann ist

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k = g_{ik} = a_{ij} \mathbf{p}^j \cdot \mathbf{p}_k = a_{ij} \delta^j{}_k = a_{ik} \quad .$$

Es bleibt somit

$$\mathbf{p}_i = g_{ij} \mathbf{p}^j \tag{7.9}$$

---

[1] δ_i^j Kronecker Symbolik; $\delta_i{}^j = 0$ für $i \neq j$, $\delta_i{}^j = 1$ für $i = j$

und analog

$$\mathbf{p}^i = g^{ij}\,\mathbf{p}_j \quad . \tag{7.10}$$

Diese Formeln werden in den (etwas saloppen) Rechenregeln wiedergegeben:

1. Multiplikation mit den kontravarianten Metrikkoeffizienten zieht den Index herauf,

2. Multiplikation mit den kovarianten Metrikkoeffizienten zieht den Index herunter.

Die beiden letzten Gleichungen führen auf den Zusammenhang zwischen den kovarianten und kontravarianten Metrikkoeffizienten

$$g^{ij}\,g_{jl} = \delta^i{}_l \quad , \quad g_{kl}\,g^{li} = \delta_k{}^i \quad . \tag{7.11}$$

BEISPIEL 1: Im dreidimensionalen Raum sind die $\mathbf{p}_i$ genau dann linear unabhängig, wenn

$$\left|\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3\right| \neq 0 \quad . \tag{7.12}$$

Bei gegebener kovarianter Basis kann die kontravariante Basis berechnet werden aus

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^1 &= \frac{\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3}{\left|\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3\right|} \\ \mathbf{p}^2 &= \frac{\mathbf{p}_3\times\mathbf{p}_1}{\left|\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3\right|} \\ \mathbf{p}^3 &= \frac{\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2}{\left|\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3\right|} \quad . \end{aligned} \tag{7.13}$$

Umgekehrt können die kontravarianten Basisvektoren aus der vorgegebenen kovarianten Basis berechnet werden aus

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \frac{\mathbf{p}^2\times\mathbf{p}^3}{\left|\mathbf{p}^1\,\mathbf{p}^2\,\mathbf{p}^3\right|} \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{\mathbf{p}^3\times\mathbf{p}^1}{\left|\mathbf{p}^1\,\mathbf{p}^2\,\mathbf{p}^3\right|} \\ \mathbf{p}_3 &= \frac{\mathbf{p}^1\times\mathbf{p}^2}{\left|\mathbf{p}^1\,\mathbf{p}^2\,\mathbf{p}^3\right|} \quad . \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{7.14}$$

BEISPIEL 2: Im dreidimensionalen Raum können die kontravarianten Metrikkoeffizienten direkt mit Hilfe des Formelsystems (7.13) oder aus den kovarianten Metrikkoeffizienten zusammen mit der Determinante

$$g := \det(g_{ij}) = g_{11}\,g_{22}\,g_{33} - g_{11}\,g_{23}^2 + 2\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23} - g_{12}^2\,g_{33} - g_{13}^2\,g_{22} \tag{7.15}$$

aus dem folgenden Formelsystem berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{1}{g}\left(g_{33}\,g_{22}-g_{23}^2\right)\\
g^{12} &= \frac{1}{g}\left(g_{23}\,g_{13}-g_{33}\,g_{12}\right)\\
g^{13} &= \frac{1}{g}\left(g_{12}\,g_{23}-g_{13}\,g_{22}\right)\\
g^{21} &= g^{12}\\
g^{22} &= \frac{1}{g}\left(g_{11}\,g_{33}-g_{13}^2\right)\\
g^{23} &= \frac{1}{g}\left(g_{12}\,g_{13}-g_{11}\,g_{23}\right)\\
g^{31} &= g^{13}\\
g^{32} &= g^{23}\\
g^{33} &= \frac{1}{g}\left(g_{11}\,g_{22}-g_{12}^2\right) \quad .
\end{aligned}
\qquad \blacktriangleleft \qquad (7.16)
$$

Sind die $\mathbf{p}_i$ orthonormiert, wird in Formel (7.6) $g_{ij} = \delta_{ij}$ und nach Formel (7.11) auch

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}^i \Leftrightarrow g_{ij} = \delta_{ij} \quad . \qquad (7.17)$$

- *Kovariante und kontravariante Basis sind genau dann identisch, wenn das Basissystem orthonormiert ist.*

5.9.4 Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors

In Formel (7.1) werden die x^i als *kontravariante* Komponenten des Vektors **r** bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man in

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{p}^i \qquad (7.18)$$

die x_i als *kovariante* Komponenten des Vektors **r**. Vergleich der Formeln (7.1) und (7.18) mit (7.3) und (7.5) zeigt die zu den Formeln (7.10) und (7.9) analogen Regeln über das Herauf- und Herunterziehen der Indizes beim Rechnen mit kovarianten und kontravarianten Komponenten eines Vektors

$$x_i = x^j\,g_{ij} \quad , \qquad (7.19)$$

$$x^i = x_j\,g^{ji} \quad . \qquad (7.20)$$

Werden die x_i aus Formel (7.19) in den Ortsvektor **r** in Formel (7.18) eingesetzt, folgt die Darstellung dieses Vektors in Bezug auf die kovariante und kontravariante Basis

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{p}^i = x^j\,\mathbf{p}_j \quad . \qquad (7.21)$$

Daraus ergibt sich insbesondere eine Möglichkeit zur Berechnung der Komponenten eines Vektors **r**

$$x_i = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_i \quad , \quad x^j = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}^j \quad . \qquad (7.22)$$

- *Die kovarianten Komponenten eines Vektors bezogen auf eine beliebige nicht notwendig orthonormierte Basis ergeben sich durch skalare Multiplikation des Vektors mit der zugehörigen kovarianten Basis.*
- *Die kontravarianten Komponenten eines Vektors bezogen auf eine beliebige nicht notwendig orthonormierte Basis ergeben sich durch skalare Multiplikation des Vektors mit der zugehörigen kontravarianten Basis.*

Für zwei Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^i \mathbf{p}_i = x_i \mathbf{p}^i \quad , \\ \mathbf{y} &= y^j \mathbf{p}_j = x_j \mathbf{p}^j \end{aligned}$$

lautet das Skalarprodukt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j \quad . \tag{7.23}$$

Insbesondere gilt für den Betrag eines Vektors (seine Norm)

$$|\mathbf{x}|^2 = g_{ij} x^i x^j = g^{ij} x_i x_j \quad . \tag{7.24}$$

7.1.3 Tensoren erster Stufe

7.1.3.1 Transformationsverhalten der Basisvektoren

Es wird zunächst das Transformationsverhalten beliebiger Basisvektoren untersucht. Seien $\mathbf{p}_i$ eine kovariante Basis, $\mathbf{q}_j$ eine andere kovariante Basis, besteht zwischen ihnen eine lineare Transformation mit der Transformationsmatrix $(b_i{}^j)$ mit

$$\mathbf{p}_i = b_i{}^j \mathbf{q}_j \quad . \tag{7.25}$$

Die Umkehrabbildung hat die Transformationsmatrix $(a_j{}^k)$ mit

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^k \mathbf{p}_k \quad . \tag{7.26}$$

Einsetzen dieser Beziehungen ineinander und skalare Multiplikation mit dem kontravarianten Vektor $\mathbf{q}^l$ führt auf

$$\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}^l = a_j{}^k b_k{}^i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}^l \quad ,$$

also

$$a_j{}^k b_k{}^i = \delta_j{}^i \quad , \tag{7.27}$$

die Matrizen sind also invers zueinander

$$\left(b_j{}^i\right) = \left(a_j{}^i\right)^{-1} \quad . \tag{7.28}$$

Dieselbe Aussage folgt aus dem umgekehrten Einsetzen

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}^l = b_i^k a_k{}^j \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}^l$$

zu

$$b_i^k a_k{}^j = \delta_i{}^j \quad . \tag{7.29}$$

Kontravariante Basen $\mathbf{p}^i$ und $\mathbf{q}^j$ werden durch die Matrizen $(d^j{}_k)$ bzw. $(c^k{}_j)$ ineinander transformiert:

$$\mathbf{p}^j = d^j{}_k \, \mathbf{q}^k \tag{7.30}$$

$$\mathbf{q}^k = c^k{}_j \, \mathbf{p}^j \quad . \tag{7.31}$$

Multiplikation der ersteren Gleichung mit der kovarianten Basis $\mathbf{p}_i$ führt auf

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}^j = \delta_i{}^j = b_i{}^k \, d^j{}_l \, \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}^l = b_i{}^k \, d^j{}_l \, \delta_k{}^l = b_i{}^k \, d^j{}_k \quad ,$$

durch Vergleich mit Formel (7.29) somit

$$d^k{}_j = a_k{}^j \quad .$$

Ebenso führt Formel (7.31) auf

$$\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}^i = \delta_j{}^i = a_j{}^k \, c^i{}_l \, \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}^l = a_j{}^k \, c^i{}_l \, \delta_k{}^l = a_j{}^k \, c^i{}_k \quad ,$$

im Vergleich mit Formel (7.27) somit

$$c^i{}_k = b_k{}^i \quad .$$

Dies ergibt das allgemeine Transformationsverhalten kovarianter und kontravarianter Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= b_i{}^k \, \mathbf{q}_k \quad , \quad \mathbf{q}_k = a_k{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \\ \mathbf{p}^i &= a_k{}^i \, \mathbf{q}^k \quad , \quad \mathbf{q}^k = b_i{}^k \, \mathbf{p}^i \quad , \end{aligned} \qquad \left(b_i{}^k\right) = \left(a_i{}^k\right)^{-1} \quad . \tag{7.32}$$

7.1.3.2 Transformationsverhalten der Komponenten eines Vektors

Um das entsprechende Transformationsverhalten der Komponenten eines Vektors herzuleiten, wird in den Ausdrücken (7.1) und

$$\mathbf{r} = y^j \, \mathbf{q}_j \tag{7.33}$$

die Transformationsgleichung der Basisvektoren (7.25) und (7.26) eingesetzt, was auf

$$x^i \, \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}^l = x^i \, \delta_i{}^l = x^l = y^j \, a_j{}^k \, \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}^l = y^j \, a_j{}^k \, \delta_k{}^l = y^j \, a_j{}^l$$

$$y^j \, \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}^k = y^j \, \delta_j{}^k = y^k = x^i \, b_i{}^l \, \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{q}^k = x^i \, b_i{}^l \, \delta_l{}^k = x^i \, b_i{}^k$$

führt. Vergleicht man entsprechend die kovarianten Komponenten x_i, y_j in

$$\mathbf{r} = x_i \, \mathbf{p}^i = y_j \, \mathbf{q}^j \quad , \tag{7.34}$$

ergibt sich mit Formel (7.32)

$$x_i \, \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}_k = x_i \, \delta^i{}_k = x_k = y_j \, b_l{}^j \, \mathbf{p}^l \cdot \mathbf{p}_k = y_j \, b_l{}^j \, \delta^l{}_k = y_j \, b_k{}^j$$

$$y_j \, \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{q}_k = y_j \, \delta^j{}_k = y_k = x_i \, a_l{}^i \, \mathbf{q}^l \cdot \mathbf{q}_k = x_i \, a_l{}^i \, \delta^l{}_k = x_i \, a_k{}^i \quad .$$

Das Transformationsverhalten der kovarianten und kontravarianten Komponenten ist also gleich dem der kovarianten bzw. kontravarianten Basisvektoren:

$$\begin{aligned} x^i &= a_j{}^i\, y^j \quad , \quad y^j = b_i{}^j\, x^i \quad , \\ x_i &= b_i{}^j\, y_j \quad , \quad y_j = a_j{}^i\, x_i \quad , \end{aligned} \qquad \left(b_i{}^j\right) = \left(a_i{}^j\right)^{-1} \quad , \quad b_i{}^j\, a_j{}^k = \delta_i{}^k \qquad (7.35)$$

Auf diese Gleichungen unmittelbar zurückführbar ist folgende äquivalente Schreibweise der Transformationsgleichungen, die eine Folge der Tensoreigenschaft sind. Da Tensoren von einem Koordinatensystem unabhängige Größen sind, muss auch eine Transformation von den Koordinaten des Tensors unabhängig sein, es müssen also die Beziehungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_i{}^j}{\partial y^k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial b_i{}^j}{\partial y_k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial a_i{}^j}{\partial x_k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial b_i{}^j}{\partial x^k} \equiv 0 \quad , \\ &\frac{\partial a_i{}^j}{\partial y_k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial b_i{}^j}{\partial x_k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial a_i{}^j}{\partial x^k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial b_i{}^j}{\partial y^k} \equiv 0 \end{aligned} \qquad (7.36)$$

erfüllt sein. Somit lautet die Transformation eines Tensors der ersten Stufe

$$\begin{aligned} x^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\, y^j \quad , \quad y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, x^i \quad , \\ x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\, y_j \quad , \quad y_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\, x_i \quad , \quad \text{mit} \quad \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^j} = \delta_i{}^k \quad . \end{aligned} \qquad (7.37)$$

Aus der ersten der Beziehungen (7.35) folgt mit der Identität (7.36) im Fall eines Tensors

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{\partial a_j{}^i}{\partial y^k}\, y^j + a_j{}^i\, \frac{\partial y^j}{\partial y^k} = a_j{}^i\, \delta^{jk} = a_k{}^i \quad .$$

Somit gelten entsprechend für Tensoren die Beziehungen

$$a_k{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \quad , \quad b_i{}^k = \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \quad , \quad b_k{}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \quad , \quad a_j{}^k = \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \quad . \qquad (7.38)$$

Mit diesen Beziehungen ist in vielen Anwendungen eine einfache Möglichkeit gegeben, die Koeffizienten der Transformationsmatrix zu berechnen.

Komponenten und zugehörige Basisvektoren eines Vektors transformieren sich *kontragredient*. Gleiches Transformationsverhalten wird als *kogredient* bezeichnet.

Eine mögliche Definition eines Tensors erster Stufe lautet:

- *Einfach indizierte Größen x^i bzw. x_i werden als Komponenten eines Tensors erster Stufe bezeichnet, wenn sie den Transformationsformeln* (7.35) *(bzw.*(7.37)*) genügen. Die x^i sind die kontravarianten Komponenten des Tensors erster Stufe, die x_i seine kovarianten Komponenten.*

Jedem *n*-tupel von Zahlen lässt sich eine Basis in einem *n*-dimensionalen linearen Vektorraum zuordnen. Transformationen auf eine andere Basis sind Linearkombinationen der neuen Basis in der alten Basis, womit auch notwendig das Transformationsverhalten der Komponenten des Vektors und somit allgemein eines jeden Tensors erster Stufe erklärt werden kann. Es ist also nicht nötig, einen Tensor durch sein Transformationsverhalten zu definieren, sondern seine Eigenschaften können durch Zurückführung auf die Eigenschaften der Elemente eines linearen Vektorraumes erklärt werden.

BEISPIEL 1: Kontravariante Vektoren $\mathbf{p}^i$ bilden einen kontravarianten Tensor erster Stufe, kovariante Vektoren $\mathbf{p}_i$ bilden einen kovarianten Tensor erster Stufe. ◀

BEISPIEL 2: *n* Differentiale dx^i bilden einen kontravarianten Tensor erster Stufe. Sind nämlich die $x^i(y^j)$ Funktionen der y^j, ist

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\, dy^j \quad . \tag{7.39}$$

Die dx^i erfüllen also die Bedingung (7.37). ◀

BEISPIEL 3: *Die Variationen der kontravarianten Komponenten eines Vektors (= Tensors der ersten Stufe)* $x^i = x^i\left(y^j\right)$ *nach einem Parameter t bilden einen (kontravarianten) Tensor der ersten Stufe:*

$$\dot{x}^i := \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\dot{y}^j \quad . \quad ◀$$

7.1.3.3 Orthogonale Transformation

Sind die Basen des alten und des neuen Systems bei einer Transformation orthonormiert, wird die Transformation *orthogonal* genannt. In diesem Fall gilt mit

$$\mathbf{q}_i = a_i^{\ j}\mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{p}_k = b_k^{\ i}\mathbf{q}_i$$

wegen der Orthonormie

$$\delta_{kl} = \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_l = b_k^{\ i} b_l^{\ j}\, \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = b_k^{\ i} b_l^{\ j}\, \delta_{ij} = b_k^{\ i} b_{li} \quad .$$

Das *Kronecker* Symbol ist der einfachste Fall von Metrikkoeffizienten, daher lässt sich hier die Regel über das Herauf- und Herunterziehen der Indizes uneingeschränkt verwenden, siehe hierzu die Formeln (7.9) und (7.10).. Umgekehrt gilt dann also auch

$$\delta_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = a_i^{\ k} a_j^{\ l}\, \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_l = a_i^{\ k} a_j^{\ l}\, \delta_{kl} = a_i^{\ k} a_{jk} \quad .$$

Vergleich mit den Formeln (7.27) und (7.29) und da $\delta_i^{\ j} = \delta_{ij}$ ist

$$a_i^{\ k} a_{jk} = a_i^{\ k} b_{kj} \quad \text{und} \quad b_k^{\ i} b_{li} = b_k^{\ i} a_{il} \quad ,$$

also

$$a_{jk} = b_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_l = \delta_{kl} \quad , \quad \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij} \quad . \tag{7.40}$$

Bei orthogonalen Transformationen ist die Inverse der Transformationsmatrix gleich der transponierten Matrix. In diesem Fall wird die Transformationsmatrix als **orthogonale Matrix** bezeichnet.

Aus

$$a_i^{\ k} a_{jk} = \delta_{ij}$$

folgt

$$\det\left(a_i^{\ k}\right)^2 \;=\; \left[\det\left(a_i^{\ k}\right)\right]^2 \;=\; 1$$

und

$$\det\left(a_i^{\ k}\right) \;=\; \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Matrix ist orthogonal} \quad \Leftrightarrow \quad a_i^{\ k}\, a_{jk} \;=\; \delta_{ij} \quad . \tag{7.41}$$

Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1. Während lineare Transformationen affinen (= ähnlichen) Abbildungen entsprechen, entsprechen orthogonale Transformationen kongruenten Abbildungen (Drehungen für det($a_i^{\ k}$) = 1; Drehung + Spiegelung für det($a_i^{\ k}$) = –1).

5.9.5 Tensoren zweiter Stufe

Tensoren zweiter Stufe[1] können durch Einführung des *tensoriellen Produktes* zweier Vektoren auf Tensoren erster Stufe (Vektoren) zurückgeführt werden. Seien die Vektoren **x** und **y** bezogen auf dieselbe Basis gegeben

$$\mathbf{x} \;=\; x^i\,\mathbf{p}_i \quad ; \quad \mathbf{y} \;=\; y^j\,\mathbf{p}_j \quad , \tag{7.42}$$

wird als *tensorielles Produkt* dieser beiden Vektoren der Ausdruck

$$\mathbf{x}\otimes\mathbf{y} \;\coloneqq\; x^i\,y^j\,\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}_j \tag{7.43}$$

bezeichnet. Das tensorielle Produkt ist distributiv

$$\mathbf{x}\otimes(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \;=\; \mathbf{x}\otimes\mathbf{z}-\mathbf{y}\otimes\mathbf{z} \tag{7.44}$$

und assoziativ (für einen Skalar A)

$$A\,(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}) \;=\; (A\mathbf{x})\otimes\mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}\otimes(A\mathbf{y}) \;=\; A\mathbf{x}\otimes\mathbf{y} \quad , \tag{7.45}$$

aber nicht kommutativ. Die $\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}_j$, die selbst ein tensorielles Produkt aus den Basisvektoren $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{p}_j$ bilden, werden als Basis des *Tensorraumes der 2. Stufe* bezeichnet. Wenn die $\mathbf{p}_i$ einen 3-dimensionalen (linearen) Vektorraum aufspannen, spannen die *Basistensoren* $\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}_j$ einen 9-dimensionalen Tensorraum 2. Stufe auf, dessen Elemente Linearkombinationen der Basistensoren sind. Ein beliebiger *Tensor 2. Stufe* hat die allgemeine Darstellung

$$\mathbf{T} \;=\; t^{ij}\,\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}_j \quad . \tag{7.46}$$

Die Komponenten eines Tensors 2. Stufe sind doppeltindizierte Größen, die nicht notwendig als Produkt wie in Formel (7.43) entstanden sein müssen.

Bilde die $\mathbf{p}^i$ die zu $\mathbf{p}_i$ kontravariante Basis, so hat der Tensorraum 2. Stufe die

$$\begin{aligned} &\text{kovariante Basis} && \mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}_j \\ &\text{kontravariante Basis} && \mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^j \\ &\text{gemischte Basen} && \mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{p}_i\otimes\mathbf{p}^j \quad , \end{aligned} \tag{7.47}$$

entsprechend die

[1] Tensoren zweiter Stufe werden in der älteren Literatur als *Dyaden* bezeichnet.

$$\begin{aligned} &\text{kontravarianten Komponenten} && t^{ij} \\ &\text{kovarianten Komponenten} && t_{ij} \\ &\text{gemischten Komponenten} && t^{i}{}_{j} \quad , \quad t_{j}{}^{i} \end{aligned} \tag{7.48}$$

und es gibt die Schreibweisen

$$\mathbf{T} = t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = t_{ij}\,\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = t_i{}^j\,\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_j = t^i{}_j\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}^j \quad . \tag{7.49}$$

Wie die Basis eines Vektorraumes muss auch die Basis eines Tensorraumes (höherer Stufe) linear unabhängig sein. Insbesondere sind die Basistensoren $\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$ und $\mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i$ für $i \neq j$ stets voneinander verschieden. Dies wird dadurch garantiert, dass das tensorielle Produkt nicht kommutativ ist. Entsprechend dürfen auch die t^{ij} und t^{ji} (außer bei Symmetrie) nicht gleichgesetzt werden.

7.1.4.1 Transformationen der Tensoren zweiter Stufe

Wird eine neue Basis $\mathbf{q}_k$ des ursprünglichen Vektorraumes durch

$$\mathbf{q}_k = a_k{}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = \left(a_i{}^k\right)^{-1}\mathbf{q}_k \tag{7.50}$$

eingeführt, gilt für die Transformation der Basistensoren des zugehörigen Tensorraumes 2. Stufe

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l &= a_k{}^i\,a_l{}^j\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \\ \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j &= \left(a_i{}^k\right)^{-1}\left(a_j{}^l\right)^{-1}\mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l \quad . \end{aligned} \tag{7.51}$$

Wird der Tensor $\mathbf{T}$ von der alten in die neue Basis transformiert

$$\mathbf{T} = t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = s^{kl}\,\mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l \quad , \tag{7.52}$$

ergibt sich

$$\mathbf{T} = t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = s^{kl}\,a_k{}^i\,a_l{}^j\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \quad ,$$

also das zu erwartende Transformationsverhalten der in diesem Fall kontravarianten Koeffizienten eines Tensors 2. Stufe

$$\begin{aligned} t^{ij} &= s^{kl}\,a_k{}^i\,a_l{}^j \\ s^{kl} &= t^{ij}\left(a_i{}^k\right)^{-1}\left(a_j{}^l\right)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{7.53}$$

Wegen der Tensoreigenschaft gelten auch hier notwendig die Bedingungen (7.36), also die Unabhängigkeit des Tensors von der Transformation

$$\frac{\partial a_i{}^j}{\partial y^k} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial a_i{}^j}{\partial x^k} \equiv 0 \quad , \quad usw. \quad .$$

Entsprechendes gilt auch für die kovarianten und gemischten Tensorkomponenten

$$\begin{aligned} t_{ij} &= s_{kl}\,a^k{}_i\,a^l{}_j \\ s_{kl} &= t_{ij}\left(a^i{}_k\right)^{-1}\left(a_j{}^l\right)^{-1} \end{aligned} \tag{7.54}$$

$$\begin{aligned} t^{i}{}_{j} &= s^{k}{}_{l}\, a_{k}{}^{i}\, a^{l}{}_{j} \\ s^{k}{}_{l} &= t^{i}{}_{j} \left(a_{i}{}^{k}\right)^{-1} \left(a^{j}{}_{l}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned} t_{i}{}^{j} &= s_{k}{}^{l}\, a^{k}{}_{i}\, a_{l}{}^{j} \\ s_{k}{}^{l} &= t_{i}{}^{j} \left(a^{i}{}_{k}\right)^{-1} \left(a_{j}{}^{l}\right)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{7.56}$$

Das Transformationsverhalten der Tensoren der 2. Stufe ist also wie erwartet von dem der Tensoren 1. Stufe übertragen:

- *Obere Indizes der Tensorkomponenten transformieren sich wie kontravariante Vektoren, untere Indizes wie kovariante Vektoren.*

Auch hier kann ohne auf das Transformationsverhalten der Basisvektoren zurückzuführen das Transformationsverhalten der Tensorkomponenten als definierende Kennzeichnung von Tensoren 2. Stufe verwendet werden. Das ist dann üblich, wenn ein Tensor in salopper Weise durch seine Komponenten ohne ausdrücklichen Bezug auf seine Basis, die implizit allerdings immer vorhanden sein muss, definiert wird. Wie schon bei den Vektoren ist ein klarer Bezug zur Basis immer dann nützlich, wenn in Komponentendarstellung gearbeitet wird, also auch wirklich numerisch mit dem Tensor gerechnet werden soll. Andernfalls besteht die Gefahr unnötiger Undurchsichtigkeit und Fehleranfälligkeit. In jedem Fall ist fundamental, dass Tensordarstellungen von einer Basis unabhängige Darstellungen sind, wie dies speziell bei Vektoren der Fall ist.

Da in den obigen Gleichungen nur quadratische Matrizen auftreten, gilt für die zugehörigen Determinanten die Aussage

$$\det\left(t^{ij}\right) = \left[\det\left(a_{k}{}^{j}\right)\right]^{2} \det\left(s^{kl}\right) \tag{7.57}$$

bzw.

$$\sqrt{\det\left(t^{ij}\right)} = \det\left(a_{k}{}^{j}\right) \sqrt{\det\left(s^{kl}\right)} \tag{7.58}$$

und entsprechendes für die übrigen Gleichungen.

BEISPIEL: *Die Variationsparameter eines Koordinatensystems bilden keinen Tensor*:

Nach den Formeln (6.134) und (6.139) unterliegen die System Variationsparameter $p_{i}{}^{j}$ bzw. $q_{j}{}^{k}$, mit den Relationen

$$q_{12} = D_{q3}, q_{23} = D_{q1}, q_{31} = D_{q2}; p_{12} = D_{p3}, p_{23} = D_{p1}, p_{31} = D_{p2}$$

aus

$$\dot{\mathbf{p}}_{i} = p_{i}{}^{j}\, \mathbf{p}_{i} \qquad \textit{bzw.} \quad \dot{\mathbf{q}}_{j} = q_{j}{}^{k}\, \mathbf{q}_{k}$$

mit den wechselseitigen Transformationen

$$\mathbf{q}_{j} = a_{j}{}^{i}\, \mathbf{p}_{i} \quad , \; \mathbf{p}_{i} = b_{i}{}^{j}\, \mathbf{q}_{j} \quad , \qquad \text{mit} \quad b_{i}{}^{j}\, a_{j}{}^{k} = \delta_{i}{}^{k}$$

den Transformationsformeln

$$q_j{}^k = \dot{a}_j{}^i\, b_i{}^k + a_j{}^i\, b_l{}^k\, p_i{}^l$$
$$p_i{}^j = \dot{b}_i{}^k\, a_k{}^j + b_i{}^l\, a_k{}^j\, q_l{}^k \quad .$$

Die $p_i{}^j$ bzw. $q_j{}^k$ bilden nur dann einen Tensor der zweiten Stufe, wenn alle $\dot{a}_j{}^i$ bzw. $\dot{b}_i{}^k$ verschwinden. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, weshalb die System-Variationsparameter gewöhnlich keinen Tensor bilden, also keine von einem Koordinatensystem unabhängige Größe vorliegt (was auch unmittelbar einleuchtet). ◀

7.1.4.2 Verjüngendes Produkt

Von besonderem Interesse ist die Verknüpfung von Tensoren verschiedener Stufen miteinander. Das tensorielle Produkt führte vom Tensor 1. Stufe zum Tensor 2. Stufe. Der umgekehrte Prozess wird *verjüngendes Produkt* genannt. Seien die Tensoren 1. und 2. Stufe

$$\mathbf{T} = t^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{x} = x^k\, \mathbf{p}_k$$

gegeben, so ist das *verjüngende Produkt von rechts* der Ausdruck

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = t^{ij}\, x^k\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k = t^{ij}\, x^k\, g_{jk}\, \mathbf{p}_i \quad , \tag{7.59}$$

also ein Tensor der ersten Stufe: der rechts stehende Basisvektor $\mathbf{p}_j$ im Tensor 2. Stufe wird mit dem Basisvektor $\mathbf{p}_k$ des Tensors erster Stufe skalar multipliziert. Entsprechend ist das *verjüngende Produkt von links* gegeben durch

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} = t^{ij}\, x^k\, \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = t^{ij}\, x^k\, g_{ki}\, \mathbf{p}_j \quad . \tag{7.60}$$

Da das tensorielle Produkt nicht kommutativ ist, können auch bei dem verjüngenden Produkt die beiden Produkte von rechts bzw. von links nicht vertauscht werden.

Da ferner mit Hilfe des verjüngenden Produktes eines Tensors **T** zweiter Stufe einem Vektor **x** ein anderer Vektor **y** zugeordnet wird

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad , \tag{7.61}$$

wird gelegentlich auch von der Operatoreigenschaft des Tensors gesprochen: der Tensor **T** ist ein *linearer Operator*, der einem Vektor **x** einen Vektor **y** zuordnet.

Herauf -, Herunterziehen der Indizes

Als eine Anwendung des verjüngenden Produktes wird ein Tensor, der in den Basisdarstellungen

$$\mathbf{T} = t^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = t_{ij}\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = t^i{}_j\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}^j = t_i{}^j\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_j$$

gegeben ist, von rechts mit dem Basisvektor $\mathbf{p}_m$ verjüngend multipliziert

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_m = t^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_m = t^{ij}\, g_{jm}\, \mathbf{p}_i =$$
$$= t^i{}_j\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}^j \cdot \mathbf{p}_m = t^i{}_j\, \mathbf{p}_i\, g^j{}_m = t^i{}_j\, \mathbf{p}_i\, \delta^j{}_m = t^i{}_m\, \mathbf{p}_i \quad .$$

Diese und entsprechende Herleitungen ergeben

$$\begin{aligned} t^{i}{}_{j} &= t^{ik}\, g_{kj} \\ t_{i}{}^{j} &= t^{kj}\, g_{ik} \\ t_{ij} &= t_{i}{}^{k}\, g_{kj} \\ t_{ij} &= t^{k}{}_{j}\, g_{ik} \\ t_{km} &= t^{ij}\, g_{ik}\, g_{mj} \quad . \end{aligned} \tag{7.62}$$

- *Die Indizes eines Tensors lassen sich durch Multiplikation mit den kovarianten Metrikkoeffizienten herunterziehen.*

Umgekehrt folgt durch entsprechende Herleitung

$$\begin{aligned} t^{ij} &= t_{k}{}^{j}\, g^{ki} \\ t^{ij} &= t^{i}{}_{k}\, g^{kj} \\ t_{i}{}^{j} &= t_{ik}\, g^{kj} \\ t^{i}{}_{j} &= t_{kj}\, g^{ik} \\ t^{ij} &= t_{km}\, g^{ik}\, g^{mj} \quad . \end{aligned} \tag{7.63}$$

- *Die Indizes eines Tensors lassen sich durch Multiplikation mit den kontravarianten Metrikkoeffizienten heraufziehen.*

7.1.4.3 Komponenten eines Tensors zweiter Stufe

Verjüngende Multiplikation des Tensors zweiter Stufe

$$\mathbf{T} = t^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

mit einem Basistensor erster Stufe von rechts und links ergibt

$$\mathbf{p}^k \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}^l = t^{ij}\, \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}^l = t^{ij}\, \delta^k{}_i\, \delta_j{}^l = t_{kl} \quad .$$

Entsprechend können die kovarianten, kontravarianten und gemischten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe bezüglich einer gegebenen Basis berechnet werden:

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}^j \\ t_{i}{}^{j} &= \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}^j \\ t^{i}{}_{j} &= \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_j \\ t_{ij} &= \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_j \quad . \end{aligned} \tag{7.64}$$

7.1.4.4 Der Metriktensor

Formel (7.9) auf Seite 232 beschreibt den Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Basen. Tensorielles Produkt von links mit $\mathbf{p}^i$ ergibt

$$g_{ij}\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_i = \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_k\, \delta_i{}^k = g_i{}^k\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_k = \mathbf{E} \quad ,$$

also die Darstellung eines Tensors, der **E** genannt wird, in zwei verschiedenen Basen. Die noch fehlenden zwei Basen werden mit den zugehörigen Koeffizienten mit Hilfe der Beziehungen (7.64) und (7.11) berechnet:

$$\mathbf{p}^k \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}^l = g_{ij}\, \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \cdot \mathbf{p}^l = g_{ij}\, g^{ki}\, g^{jl} = \delta_j{}^k\, g^{jl} = g^{kl}$$

und mit Formel (7.10) folgt daraus durch tensorielle Multiplikation von links mit $\mathbf{p}_i$

$$g^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}^i = \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}^i\, \delta^j{}_i = g^j{}_i\, \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}^i \quad ,$$

also die weiteren Metrikkoeffizienten als Komponenten des Tensors **E**. Dieser Tensor wird deshalb als *Metriktensor* bezeichnet

$$\mathbf{E} = g_{ij}\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = g_i{}^j\, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_j = g^i{}_j\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}^j = g^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \quad . \tag{7.65}$$

Der Metriktensor hat folgende wichtige Eigenschaft: Wird ein beliebiger Vektor $\mathbf{x} = x^k\, \mathbf{p}_k$ mit verjüngendem Produkt mit dem Metriktensor multipliziert, wird

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = x^k\, g^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k = x^k\, g^{ij}\, g_{jk}\, \mathbf{p}_i = x^k \left(\delta^i{}_j\, \delta^j{}_k\right) \mathbf{p}_i = x^k\, \mathbf{p}_k = \mathbf{x}$$

und

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = x^k\, g^{ij}\, \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = x^k\, g^{ij}\, g_{ki}\, \mathbf{p}_j = x^k \left(\delta^i{}_k\, \delta^j{}_i\right) \mathbf{p}_j = x^k\, \mathbf{p}_k = \mathbf{x} \quad .$$

Der Metriktensor ist also ein *Einheitstensor* mit

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x} \quad . \tag{7.66}$$

Der Metriktensor ist auch der einzige mögliche Einheitstensor. Dies lässt sich durch allgemeinen Ansatz sofort bestätigen. Der Metriktensor wird deshalb gelegentlich auch als der *Fundamentaltensor* (des betreffenden euklidischen Vektorraumes) bezeichnet.

7.1.4.5 Transformationen des Metriktensors

Der Metriktensor wird wie jeder Tensor der zweiten Stufe transformiert, im Fall des kovarianten Metriktensors etwa durch

$$g_{ij} = g^*_{kl}\, a^k{}_i\, a^l{}_j \tag{7.67}$$

und entsprechend in den anderen Fällen. Sei

$$g := \det\left(g_{ij}\right) \tag{7.68}$$

und für den transformierten kovarianten Metriktensor

$$g^* := \det\left(g^*_{kl}\right) \quad . \tag{7.69}$$

Somit gilt die bisweilen verwendete Beziehung mit

$$\left|a^k{}_i\right| := \det\left(a^k{}_i\right)$$

$$\sqrt{g} = \left|a^k{}_i\right| \sqrt{g^*} \quad . \tag{7.70}$$

Insbesondere ergibt sich aus

$$g_{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = g_{ik}\, g_{jl}\, \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{p}^l = g_{ik}\, g_{jl}\, g^{kl} \quad ,$$

$$\det\left(g_{ij}\right) \;=\; g \;=\; \det\left(g_{ik}\right)\det\left(g_{jl}\right)\det\left(g^{kl}\right) \;=\; g^2\det\left(g^{kl}\right)$$

$$\det\left(g^{kl}\right) \;=\; \frac{1}{g} \quad . \tag{7.71}$$

- *Ist g die Determinante des kovarianten Metriktensors, so hat der kontravariante Metriktensor die Determinante 1/g.*

7.1.4.6 Die skalaren Invarianten des symmetrischen Tensors der 2. Stufe

Gleichung (7.40) auf Seite 238 zeigt die enge Verwandtschaft der Tensoren 2. Stufe mit Matrizen. Diese Gleichung stellt ein lineares Gleichungssystem dar mit dem Tensor **T** als Koeffizientenmatrix. Diese enge Verwandtschaft lässt sich zum Nachweis einer bekannten Eigenschaft symmetrischer Matrizen, in diesem Fall des symmetrischen Tensors

$$\mathbf{T} \;=\; s^{lk}\,\mathbf{p}_l \otimes \mathbf{p}_k \quad , \quad s^{lk} \;=\; s^{kl}$$

nutzen. Als *Hauptachsentransformation* wird die Transformation eines beliebigen Tensors auf einen Tensor verstanden, dessen Diagonalelemente allein von Null verschieden sind, also den Tensor

$$\mathbf{T} \;=\; t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \quad , \quad t^{ii} \;\neq\; 0 \quad , \quad t^{ij} \;=\; 0 \;\text{ für }\; i \;\neq\; j \quad .$$

Die Hauptachsentransformation ist für den symmetrischen Tensor 2. Stufe in kartesischen Koordinaten, d. h. bei Bezug auf ein Orthonormalsystem, stets ausführbar. Dies kann mit den Methoden der Tensoralgebra in einfacher Weise geschehen.

Die $\mathbf{q}_l$ seien ein Orthonormalsystem mit $\mathbf{q}_l \cdot \mathbf{q}_k \;=\; \delta_{lk}$, die Transformation auf das $\mathbf{p}_i$- System ist gegeben durch

$$\mathbf{q}_l \;=\; a_l{}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{q}_k \;=\; a_k{}^j\,\mathbf{p}_j \quad .$$

Die Koeffizienten des Tensors nach der Transformation ergeben sich also aus

$$t^{ij} \;=\; s^{lk}\,a_l{}^i\,a_k{}^j \quad . \tag{7.72}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{p}_i \;=\; b_i{}^l\,\mathbf{q}_l \quad , \quad \mathbf{p}_j \;=\; b_j{}^k\,\mathbf{q}_k$$

gilt nach Gleichung (7.8) auf Seite 232

$$a_l{}^i\,b_i{}^k \;=\; \delta_l{}^k \quad \text{mit} \quad \left(b_i{}^k\right) \;=\; \left(a_i{}^k\right)^{-1} \tag{7.73}$$

und wegen der Orthogonalität auch

$$b_i{}^m \;=\; a_m{}^i \quad . \tag{7.74}$$

Wird in Gleichung (7.72) mit $b_i{}^m$ durchmultipliziert, wird mit der Beziehung (7.73)

$$b_i{}^m\,t^{ij} \;=\; s^{lk}\,\delta_l{}^m\,a_k{}^j \quad .$$

Hier wird wegen $t^{ii} \neq 0, t^{ij} = 0$ für $i \neq j$ und wegen der Beziehung (7.74) ein lineares Gleichungssystem erhalten

$$a_m{}^i\, t^{ii} \;=\; s^{lk}\, a_k{}^i$$

oder auch

$$s^{mk}\, a_k{}^i - a_m{}^i\, t^{ii} \;=\; 0 \quad ,$$

wegen $a_k{}^i\, \delta_m{}^k = a_m{}^i$ auch das homogene Gleichungssystem

$$a_k{}^i \left(s^{mk} - \delta_m{}^k\, t^{ii} \right) \;=\; 0 \quad . \tag{7.75}$$

Die $a_k{}^i$ sind die gesuchten Koeffizienten der Hauptachsentransformation. Dieses System hat eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, wobei $s_{ij} = s_{ji}$ für den symmetrischen Tensor verwendet wird:

$$\begin{vmatrix} s^{11} - t^{ii} & s^{12} & s^{13} \\ s^{12} & s^{22} - t^{ii} & s^{23} \\ s^{13} & s^{23} & s^{33} - t^{ii} \end{vmatrix} \;=\; 0 \quad . \tag{7.76}$$

Dies ist die charakteristische Gleichung, welche wegen der Symmetrie reelle Eigenwerte t^{ii} hat. Im Fall eines dreidimensionalen Raumes lautet die Gleichung speziell

$$\left(t^{ii} \right)^3 - I_1 \left(t^{ii} \right)^2 + I_2 \left(t^{ii} \right) - I_3 \;=\; 0 \tag{7.77}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} I_1 &= s^{11} + s^{22} + s^{33} \\ I_2 &= s^{11} s^{22} + s^{22} s^{33} + s^{33} s^{11} - \left(s^{12} \right)^2 - \left(s^{23} \right)^2 - \left(s^{13} \right)^2 \\ I_3 &= \det \left(s^{lk} \right) \quad . \end{aligned} \tag{7.78}$$

Diese Koeffizienten sind die *skalaren Invarianten* des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe. I_1 ist die *Spur* des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe.

5.9.6 Tensoren höherer Stufe

Ein (linearer) Tensorraum der *K*-ten Stufe entsteht durch tensorielle Multiplikation von *K* linearen Vektorräumen. Es gibt jeweils 2^K Arten von Basistensoren, die rein kovariant und die rein kontravariant sein können, oder (2^K–2) Arten von gemischtvarianten Basen. Jede Basis hat bezogen auf einen *N*-dimensionalen Vektorraum N^K Basistensoren. Ein Tensor der *K*-ten Stufe ist eine Element eines Tensorraumes der *K*-ten Stufe, etwa

$$\mathbf{T}^{(K)} \;=\; t^{ijk\ldots l}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \otimes \ldots \otimes \mathbf{p}_l \quad . \tag{7.79}$$

Er hat N^K Komponenten, die je nach Wahl der Basis kontravariant, kovariant oder gemischtvariant sein können.

Die Tensoren der nullten Stufe sind Skalare:

$$\mathbf{T}^{(0)} \;=\; t \quad .$$

Die Tensoren sind invariant gegenüber Koordinatentransformationen.

7.1.5.1 Transformationsregeln

Durch Rückführung eines Tensors auf ein tensorielles Produkt aus Basisvektoren wird auch das Transformationsverhalten eines Tensors auf das Transformationsverhalten der Basisvektoren zurückgeführt:

- *In den Komponenten eines Tensors transformiert sich jeder untere Index wie ein kovarianter Vektor, jeder obere Index wie ein kontravarianter Vektor.*

Diese Eigenschaft ist notwendig und hinreichend zur Beschreibung eines Tensors und wird häufig zur Definition oder zum Nachweis eines Tensors herangezogen: Wenn in einer *K*-fach indizierten Größe die unteren Indizes wie eine kovarianter Vektor, die oberen Indizes wie ein kontravarianter Vektor transformiert werden, handelt es sich um einen Tensor der *K*-ten Stufe.

BEISPIEL: Ein Tensor der dritten Stufe:

$$\mathbf{T} = t^{ijk}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k = s^{lmn}\mathbf{q}_l \otimes \mathbf{q}_m \otimes \mathbf{q}_n$$

$$\mathbf{q}_l = a_l{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{q}_m = a_m{}^j \mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{q}_n = a_n{}^k \mathbf{p}_k \quad ,$$

$$\mathbf{p}_i = b_i{}^l \mathbf{q}_l \quad , \quad \mathbf{p}_j = b_j{}^m \mathbf{q}_m \quad , \quad \mathbf{p}_k = b_k{}^n \mathbf{q}_n \quad ,$$

$$t^{ijk} = s^{lmn} a_l{}^i a_m{}^j a_n{}^k \quad ,$$

$$s^{lmn} = t^{ijk} b_i{}^l b_j{}^m b_k{}^n \quad .$$

Entsprechend, da mit den Transformationsregeln (7.11) auf Seite 233,

$$\mathbf{p}^i = a_l{}^i \mathbf{q}^l \quad , \quad \mathbf{p}^j = a_m{}^j \mathbf{q}^m \quad , \quad \mathbf{p}^k = a_n{}^k \mathbf{q}^n$$

$$\mathbf{q}^l = b_i{}^l \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{q}^m = b_j{}^m \mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{q}^n = b_k{}^n \mathbf{p}_k \quad ,$$

$$t^i{}_j{}^k = s^l{}_m{}^n a_l{}^i b_j{}^m a_n{}^k \quad ,$$

$$s^l{}_m{}^n = t^i{}_j{}^k b_i{}^l a_m{}^j b_k{}^n \quad . \quad \blacktriangleleft$$

7.1.6 Regeln der Tensoralgebra

7.1.6.1 Addition

Tensoren gleicher Stufe und derselben Basis können addiert werden durch komponentenweise Addition. Die Addition ist kommutativ.

BEISPIEL:

$$\mathbf{T} = t^{ijk}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \quad , \quad \mathbf{S} = s^{ijk}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{T}+\mathbf{S} = \left(t^{ijk}+s^{ijk}\right)\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k =: w^{ijk}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \quad .$$

Schreibweise in Komponentendarstellung:

$$w^{ijk} = t^{ijk} + s^{ijk} = s^{ijk} + t^{ijk} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

7.1.6.2 Tensorielles Produkt

Das tensorielle Produkt eines Tensors *K*-ter Stufe und eines Tensors *M*-ter Stufe gibt einen Tensor der (*K*+*M*)- ten Stufe.

BEISPIEL:

$$\mathbf{T} = t^{ijk}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \quad , \quad \mathbf{S} = s^{lp}\,\mathbf{p}_l \otimes \mathbf{p}_p \quad ,$$

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = t^{ijk}\,s^{lp}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_l \otimes \mathbf{p}_p = w^{ijklp}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_l \otimes \mathbf{p}_p \quad .$$

Schreibweise in Komponentendarstellung:

$$w^{ijklp} = t^{ijk}\,s^{lp} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

Das tensorielle Produkt genügt dem Assoziativgesetz:

$$\mathbf{T} \otimes (\mathbf{S} \otimes \mathbf{W}) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) \otimes \mathbf{W} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{W} \tag{7.80}$$

und bei Verknüpfung mit der Addition dem Distributivgesetz

$$\mathbf{T} \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{W}) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{W} \quad . \tag{7.81}$$

7.1.6.3 Verjüngendes Produkt, Überschiebung

Das *verjüngende Produkt* zweier Tensoren entsteht durch skalare Multiplikation der Basisvektoren von rechts oder von links. Das verjüngende Produkt in Basisdarstellung ist nicht kommutativ.

Als *Überschiebung* wird das verjüngende Produkt in Komponentendarstellung bezeichnet. Die Überschiebung ist kommutativ.

Das verjüngende Produkt eines Tensors *K*-ter Stufe mit einem Tensor *M*-ter Stufe ergibt einen Tensor (*K*+*M*–2)- ter Stufe.

BEISPIEL 1:

$$\mathbf{T} = t^{ijk}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k \quad , \quad \mathbf{S} = s^{lp}\,\mathbf{p}_l \otimes \mathbf{p}_p$$

Verjüngendes Produkt:

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = t^{ijk}\,s^{lp}\,g_{kl}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k = t^{ijk}\,s_k{}^{p}\,g_{kl}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k = w^{ijp}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_p$$

Überschiebung:

$$w^{ijp} = t^{ijk}\,s_k{}^{p} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 2:

$$\mathbf{a} = a^i\,\mathbf{p}_i \quad ; \quad \mathbf{b} = b^j\,\mathbf{p}_j \quad ,$$

Verjüngendes Produkt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i\,b^j\,g_{ij} = a^i\,b_i \quad .$$

Die Überschiebung zweier Vektoren ist das Skalarprodukt dieser Vektoren. ◀

BEISPIEL 3:

Das Herauf- bzw. Herunterziehen des Indizes geschieht durch Überschiebung mit dem Metriktensor (Fundamentaltensor]:

$$t^{ijk}\, g_{kl} \;=\; t^{ij}{}_{l}$$

$$t^{i}{}_{j}{}^{k}\, g^{jl} \;=\; t^{ilk} \quad . \;\blacktriangleleft$$

7.1.6.4 Verjüngung

Ein gemischtvarianter Tensor wird verjüngt durch Gleichsetzen eines oberen und eines unteren Index und Summation darüber. Aus einem Tensor *K*-ter Stufe wird durch Verjüngung ein Tensor (*K*–2)- ter Stufe.

Eine Verjüngung kann auch verstanden werden als Multiplikation eines gemischtvarianten Tensors mit dem gemischtvarianten zweistufigen Kronecker Tensor, der die Indizes enthält, über die verjüngt werden soll, zum Beispiel

$$t^{ij}{}_{m}{}^{k} \cdot \delta_{j}{}^{m} \;=\; t^{ij}{}_{j}{}^{k} \;=\; s^{ik} \quad .$$

BEISPIEL 1: $t^{ij}{}_{j}{}^{k} \;=\; s^{ik}$. ◀

BEISPIEL 2: Verjüngung des Kronecker Tensors zweiter Stufe im N-dimensionalen Raum:

$$\delta_{i}{}^{i} \;=\; N \quad . \;\blacktriangleleft$$

BEISPIEL 3: Die Überschiebung ist ein Spezialfall der Verjüngung. ◀

7.1.6.5 Quotientenregel

Die Quotientenregel ist eine Umkehrung des verjüngenden Produkts (der Überschiebung).

Wenn etwa in der Beziehung

$$t^{ij}\, s_{j}{}^{l} \;=\; w^{il}$$

die Größen $s_{j}{}^{l}$ und w^{il} Komponenten eines Tensors sind, sind nach der Quotientenregel auch die t^{ij} Komponenten eines Tensors.

Der Beweis kann in der Tensorrechnung auf verschiedene Weise geführt werden, was wir hier als ein symptomatisches Beispiel durchführen wollen:

1. Beweis durch Rückführung auf die Tensorbasis: Da die $s_{j}{}^{l}$ die Komponenten eines Tensors sind, kann durch Multiplikation mit den zugehörigen Metrikkoeffizienten der Index *j* heraufgezogen werden:

   $$t^{ij}\, s_{j}{}^{l} \;=\; t^{ij}\, s^{kl}\, g_{jk} \;=\; t^{ij}\, s^{kl}\, \mathbf{p}_{j} \cdot \mathbf{p}_{k} \;=\; w^{jl} \quad .$$

   Tensorielle Multiplikation von links mit $\mathbf{p}_{i}$ und von rechts mit $\mathbf{p}_{l}$ gibt

$$t^{ij}\, s^{kl}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_l \;=\; w^{jl}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_l \quad .$$

Hier sind

$$\mathbf{S} \;=\; s^{kl}\, \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_l \quad , \quad \mathbf{W} \;=\; w^{il}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_l$$

Tensoren. Offenbar ist dann auch

$$\mathbf{T} \;=\; t^{ij}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

die Darstellung eines Tensors.

2. Beweis durch Nachweis der Transformationseigenschaft von Tensoren:

Die transformierten Komponenten seien

$$\overline{t}^{\,pq}\, \overline{s}_q^{\,r} \;=\; \overline{w}^{pr} \quad .$$

Da die $\overline{s}_q^{\,r}$ und $\overline{w}^{pr}$ Komponenten eines Tensors sind, lassen sie sich nach den Transformationseigenschaften von Tensoren transformieren. Danach ist

$$\overline{s}_q^{\,r} \;=\; s_j^{\,l}\, b_q^{\,j}\, a_l^{\,r} \quad , \quad s_j^{\,l} \;=\; \overline{s}_q^{\,k}\, b_k^{\,l}\, a_j^{\,q} \quad ,$$

$$\overline{w}^{pr} \;=\; w^{il}\, a_i^{\,p}\, a_l^{\,r} \quad .$$

Hier ist $(a_j^{\,q})$die Transformationsmatrix und $(b_k^{\,l})$ die der Umkehrabbildung, nach Formel (7.35) auf S. 237 also

$$a_l^{\,r}\, b_k^{\,l} \;=\; \delta^r{}_k \quad .$$

Somit wird

$$\overline{t}^{\,pq}\, \overline{s}_q^{\,r} \;=\; \overline{t}^{\,pq}\, s_j^{\,l}\, b_q^{\,j}\, a_l^{\,r} \;=\; w^{il}\, a_i^{\,p}\, a_l^{\,r} \;=\; t^{ij}\, s_j^{\,l}\, a_i^{\,p}\, a_l^{\,r} \;=\; t^{ij}\, \overline{s}_q^{\,k}\, a_i^{\,p}\, a_l^{\,r}\, b_k^{\,l}\, a_j^{\,q} \;=$$
$$=\; t^{ij}\, \overline{s}_q^{\,k}\, a_i^{\,p}\, \delta^r{}_k\, a_j^{\,q} \;=\; r^{ij}\, \overline{s}_q^{\,r}\, a_i^{\,p}\, a_j^{\,q} \quad .$$

Hier wird $\overline{s}_q^{\,r}$ ausgeklammert, da sicher nicht alle $\overline{s}_q^{\,r}$ verschwinden, und es bleibt

$$\overline{t}^{\,pq} \;=\; t^{ij}\, a_i^{\,p}\, a_j^{\,q} \quad .$$

Die t^{ij} erfüllen also die Transformationseigenschaften eines Tensors und sind daher selbst die Komponenten eines Tensors. ◀

Anwendung der Quotientenregel:

Die Quotientenregel gestattet vielfache Anwendungen in der Tensorrechnung. In der invarianten Multilinearform

$$L \;:=\; t^{i_1, i_2, \ldots, i_K}\, x_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_K} \quad , \tag{7.82}$$

in der die x_{i_k} Komponenten eines Vektors sind, sind die $t^{i_1, i_2, \ldots, i_K}$ Komponenten eines Tensors, da *L* als skalare Größe ein Tensor 0-ter Stufe ist. In salopper Weise wird *L* auch als Tensor bezeichnet und der Ausdruck (7.82) manchmal sogar als Definition eines Tensors verwendet.◀

7.1.6.6 Skalares Produkt zweier Tensoren

Zwei Tensoren der *K*-ten Stufe seien in einem euklidischen Tensorraum der *K*-ten Stufe über einem euklidischen Vektorraum gegeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= t^{i_1 i_2 \ldots i_K}\mathbf{p}_{i_1}\otimes\mathbf{p}_{i_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{p}_{i_K}\\ \mathbf{S} &= s^{j_1 j_2 \ldots j_K}\mathbf{p}_{j_1}\otimes\mathbf{p}_{j_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{p}_{j_K}\quad .\end{aligned}$$

Als *Skalarprodukt* dieser beiden Tensoren derselben Stufe wird der Ausdruck definiert

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = t^{i_1,i_2,\ldots,i_K}\, s^{j_1,j_2,\ldots,j_K}\,\mathbf{p}_{i_1}\cdot\mathbf{p}_{j_1}\otimes\mathbf{p}_{i_2}\cdot\mathbf{p}_{j_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{p}_{i_K}\cdot\mathbf{p}_{j_K}\quad . \tag{7.83}$$

Mit den Metrikkoeffizienten $g_{i_1 j_1},\ldots$ ist zu diesem Ausdruck folgender äquivalent:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = t^{i_1,i_2,\ldots,i_K}\, s^{j_1,j_2,\ldots,j_K}\, g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2}\ldots g_{i_K j_K} \tag{7.84}$$

bzw. nach Überschiebung mit dem Metriktensor

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = t^{i_1,i_2,\ldots,i_K}\, s_{j_1,j_2,\ldots,j_K}\quad . \tag{7.85}$$

Alle diese drei Ausdrücke werden gleichwertig zur Definition des skalaren Produktes verwendet. Der euklidische Tensorraum der *K*-ten Stufe hat somit die quadratische Fundamentalform

$$g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2}\ldots g_{i_K j_K}\quad . \tag{7.86}$$

Als Spezialfall ergibt sich für die Vektoren

$$\mathbf{x} = x^i\,\mathbf{p}_i\quad ,\quad \mathbf{y} = y^j\,\mathbf{p}_j$$

für das Skalarprodukt die übliche Beziehung

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x^i\, y^j\, g_{ij} = x^i\, y_i\quad . \tag{7.87}$$

7.1.7 Spezielle Tensoren

7.1.7.1 Symmetrische Tensoren

Ein Tensor der Stufe *K* heißt symmetrisch bezüglich der Indizes *p*, *q*, wenn sich seine Komponenten bei Vertauschung dieser beiden Indizes nicht ändern:

$$t^{ij\ldots p\ldots q\ldots K} = t^{ij\ldots q\ldots p\ldots K}\quad . \tag{7.88}$$

BEISPIEL: Tensoren nullter und erster Stufe können nicht symmetrisch sein. ◀

7.1.7.2 Symmetrisierung höherstufiger Tensoren

Ein Tensor heißt *symmetrisch in gleichartigen (unteren oder oberen) Indizes*, wenn sich seine Komponenten bei einer Permutation dieser Indizes nicht ändern.

Die Symmetrisierung wird durch runde Klammern gekennzeichnet.

BEISPIEL 1: Einem beliebigen Tensor der dritten Stufe wird durch Symmetrisieren über zwei Indizes (im Beispiel die Indizes j, k) der symmetrische Tensor zugeordnet:

$$t^{i(jk)} = \frac{1}{2}\left(t^{ijk}+t^{ikj}\right) \quad . \quad \blacktriangleleft \tag{7.89}$$

BEISPIEL 2: Einem Tensor der dritten Stufe wird durch Symmetrisieren über zwei Indizes (im Beispiel die Indizes *j*, *k*) der symmetrische Tensor zugeordnet:

$$t^{(ijk)} = \frac{1}{6}\left(t^{ijk}+t^{ikj}+t^{jki}+t^{jik}+t^{kij}+t^{kji}\right) \quad . \quad \blacktriangleleft \tag{7.90}$$

7.1.7.3 Vollständige Symmetrie

Ein Tensor heißt *vollständig symmetrisch*, wenn seine Komponenten bei beliebiger Vertauschung der Indizes symmetrisch sind.

BEISPIEL: Jeder Tensor der zweiten Stufe mit symmetrischer Koeffizientenmatrix ist vollständig symmetrisch. Im dreidimensionalen Raum gilt:

$$\overset{(s)}{\mathbf{T}}: \left(t^{ij}\right) = \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{12} & t^{22} & t^{23} \\ t^{13} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

7.1.7.4 Schiefsymmetrische Tensoren

Ein Tensor der Stufe *K* heißt *schiefsymmetrisch*[1] bezüglich der Indizes *p*, *q*, wenn sich seine Komponenten bei Vertauschung dieser beiden Indizes nur dem Vorzeichen nicht dem Wert nach ändern:

$$t^{ij\ldots p\ldots q\ldots K} = -t^{ij\ldots q\ldots p\ldots K} \quad . \tag{7.91}$$

BEISPIEL 1: Tensoren nullter und erster Stufe können nicht schiefsymmetrisch sein. ◀

BEISPIEL 2: Bei einem schiefsymmetrischen Tensor der zweiten Stufe verschwinden alle Diagonalelemente der Koeffizientenmatrix. Im dreidimensionalen Raum gilt:

$$\overset{(a)}{\mathbf{T}}: \left(t^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft \tag{7.92}$$

7.1.7.5 Schiefsymmetrische Tensoren der zweiten Stufe

T sei ein schiefsymmetrischer Tensor der zweiten Stufe mit

$$t^{ij} = -t^{ji} \quad , \quad t^{ii} = 0 \quad . \tag{7.93}$$

Dann lässt sich schreiben

[1] Schiefsymmetrische Tensoren werden in der Literatur gelegentlich auch als *antisymmetrische* Tensoren bezeichnet.

$$\mathbf{T} \;=\; t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \;=\; \sum_{i<j} t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j + \sum_{i\geq j} t^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

und nach Vertauschung der Indizes im zweiten Term

$$\mathbf{T} \;=\; \sum_{i<j} t^{ij}\,(\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i) \quad . \tag{7.94}$$

Die Basis eines schiefsymmetrischen Tensors der zweiten Stufe hat somit die

$$\frac{n\,(n-1)}{2} \;=\; \binom{n}{2}$$

linear unabhängigen Basistensoren

$$\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i \qquad (i<j) \quad .$$

Die Annahme $i<j$ erfolgt ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Die $\binom{n}{2}$ Komponenten t^{ij} in der Tensordarstellung (7.93) werden als *„wesentliche“* Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors bezeichnet und mit

$$t^{(ij)} \qquad (i<j)$$

symbolisiert. Wegen $t^{ij} = -t^{ji}$ werden die wesentlichen Komponenten eines schiefsymmetrischen Tensors 2. Stufe transformiert mit der allgemeinen Beziehung

$$t^{ij} \;=\; a^i{}_k\, a^j{}_l\, s^{kl}$$

nach

$$\begin{aligned} t^{(ij)} \;&=\; \sum_{k<l} a^i{}_k\, a^j{}_l\, s^{kl} + \sum_{l<k} a^i{}_k\, a^j{}_l\, s^{kl} \;=\; \sum_{k<l} a^i{}_k\, a^j{}_l\, s^{kl} + \sum_{k<l} a^i{}_l\, a^j{}_k\, s^{lk} \;= \\ &=\; \sum_{k<l} \left(a^i{}_k\, a^j{}_l - a^i{}_l\, a^j{}_k \right) s^{(kl)} \end{aligned}$$

bzw. in Determinantenschreibweise

$$t^{(ij)} \;=\; \sum_{l<k} \begin{vmatrix} a^i{}_k & a^j{}_k \\ a^i{}_l & a^j{}_l \end{vmatrix} s^{(kl)} \quad . \tag{7.95}$$

Die Ausdrücke (7.94) und (7.95) zeigen, dass die Eigenschaft der Schiefsymmetrie von einer linearen Transformation unabhängig, also eine Tensoreigenschaft ist.

BEISPIEL 1: Das Vektorprodukt zweier Vektoren im dreidimensionalen euklidischen Raum kann auf die Multiplikation eines schiefsymmetrischen Tensors gebildet aus den Komponenten des eines Vektors mit dem anderen Vektor zurückgeführt werden. Seien

$$\mathbf{x} = x^i\;\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{y} = y^j\,\mathbf{p}_j$$

zwei Vektoren bezogen auf dieselbe Basis $\mathbf{p}_i$, wird das Vektorprodukt durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times\mathbf{y} \;=\; z^i\,\mathbf{p}_i \;=\; &\left(x_2\,y_3 - x_3\,y_2\right)\mathbf{p}_1 \;+\\ &+\;\left(x_3\,y_1 - x_1\,y_3\right)\mathbf{p}_2 \;+\\ &+\left(x_1\,y_2 - x_2\,y_1\right)\mathbf{p}_3\end{aligned} \tag{7.96}$$

dargestellt. Der Produktvektor $z^i\,\mathbf{p}_i$ kann dem schiefsymmetrischen Tensor $t^i{}_j$ auch in der Form

$$\left(z^i\right) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left(t^i{}_j\;y^j\right) \quad ,$$

also auch mit der Darstellung

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} \;=\; z^i\;\mathbf{p}_i \;=\; t^i{}_j\;y^j\,\mathbf{p}_i \tag{7.97}$$

berechnet werden. Offenbar gibt es auch die Alternativdarstellung mit dem Tensor $s^j{}_i$

$$\left(z^i\right) = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(s^i{}_j\;x^j\right) \quad ,$$

und es wird

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} \;=\; z^i\;\mathbf{p}_i \;=\; s^i{}_j\;x^j\,\mathbf{p}_i \tag{7.98}$$

mit

$$s^i{}_j \;=\; -t^i{}_j \qquad . \tag{7.99}$$

Wenn andererseits im dreidimensionalen Raum ein schiefsymmetrischer Tensor (d.h. eine schiefsymmetrische dreireihige, dreidimensionale Matrix) gegeben ist, so kann eine lineare Transformation (d.h. eine Drehung des Koordinatensystems) mit diesem Tensor als ein Vektorprodukt gedeutet werden. Es sei

$$\left(t_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -t_{21} & t_{13} \\ t_{21} & 0 & -t_{32} \\ -t_{13} & t_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

der vorgegebene schiefsymmetrische Tensor, dann ist

$$\mathbf{z} \;=\; z^i\;\mathbf{p}_i \;=\; t^i{}_j\;y^j\;\mathbf{p}_i \;=\; \mathbf{x}\times\mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} t_{32} \\ t_{13} \\ t_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{x} \;=\; t_{32}\,\mathbf{p}_1 \;+\; t_{13}\,\mathbf{p}_2 + t_{21}\;\mathbf{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{y} \;=\; y^j\;\mathbf{p}_j \quad .$$

$\mathbf{x}$ ist der („allgemeine“) *Darboux*sche Vektor dieser Transformation, einer Drehung. Die Drehung erfolgt um $\mathbf{x}$ als „Drehvektor“. ◀

BEISPIEL 2: Die *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie (siehe in Abschnitt 4.4.1) können in tensorieller Schreibweise mit Hilfe der schiefsymmetrischen Matrix (diese bildet selbst aber keinen Tensor, da sie an das Koordinatensystem gekoppelt sind!)

$$f_{12} = \kappa = -f_{21} \quad , \quad f_{23} = \tau = -f_{32} \quad , \quad f_{ij} = 0 \text{ sonst} \tag{7.100}$$

geschrieben werden. Wenn s die Bogenlänge bedeutet, sei

$$\mathbf{v}_i' := \frac{d\mathbf{v}_i}{ds} = f_i^{\ j}\, \mathbf{v}_j \quad . \tag{7.101}$$

Der *Darboux*sche Vektor der Kurventheorie

$$\mathbf{D}_s = \tau\, \mathbf{v}_1 + \kappa\, \mathbf{v}_3 \tag{7.102}$$

führt auf die Darstellung (4.286) der *Frenet*schen Formeln

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{D}_s \times \mathbf{v}_i \quad . \tag{7.103}$$

Um das Vektorprodukt mit Hilfe eines schiefsymmetrischen Tensors t_{ij} in der Form (7.97) anwenden zu können, müssen der *Darboux*sche Vektor $\mathbf{D}_s$ und die $\mathbf{v}_i$ auf dieselbe Basis bezogen werden können:

$$\mathbf{v}_i = \upsilon_i^{\ j}\, \mathbf{p}_j$$

und

$$\mathbf{D}_s = D^i\, \mathbf{p}_i = \left(\tau\, \upsilon_3^{\ j} + \kappa\, \upsilon_1^{\ j}\right) \mathbf{p}_j \quad ,$$

somit nach Formel (7.97) bei Bezug auf die Basis $\mathbf{p}_i$, und da $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$,

$$\mathbf{v}_i' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \upsilon_{i1}' \\ \upsilon_{i2}' \\ \upsilon_{i3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau\upsilon_{13} - \kappa\upsilon_{33} & \tau\upsilon_{12} + \kappa\upsilon_{32} \\ \tau\upsilon_{13} + \kappa\upsilon_{33} & 0 & -\tau\upsilon_{11} - \kappa\upsilon_{31} \\ -\tau\upsilon_{12} - \kappa\upsilon_{32} & \tau\upsilon_{11} + \kappa\upsilon_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_{i1} \\ \upsilon_{i2} \\ \upsilon_{i3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau\left(\upsilon_{12}\,\upsilon_{i3} - \upsilon_{13}\,\upsilon_{i2}\right) + \kappa\left(\upsilon_{32}\,\upsilon_{i3} - \upsilon_{33}\,\upsilon_{i2}\right) \\ \tau\left(\upsilon_{13}\,\upsilon_{i1} - \upsilon_{11}\,\upsilon_{i3}\right) + \kappa\left(\upsilon_{33}\,\upsilon_{i1} - \upsilon_{31}\,\upsilon_{i3}\right) \\ \tau\left(\upsilon_{11}\,\upsilon_{i2} - \upsilon_{12}\,\upsilon_{i1}\right) + \kappa\left(\upsilon_{31}\,\upsilon_{i2} - \upsilon_{32}\,\upsilon_{i1}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tau\, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_i + \kappa\, \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_i \quad ,$$

was mit den Beziehungen $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$ wieder auf die *Frenet*schen Formeln (7.101) führt. ◀

BEISPIEL 3: Das (in Abschnitt 4.3.10 eingeführte) mitbewegte Bahnsystem (*Hansen* System) hat die schiefsymmetrische Variationsmatrix (die Punkte kennzeichnen die Ableitung nach der Zeit)

$$\left(f_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\zeta} & 0 \\ -\dot{\zeta} & 0 & \dot{\eta} \\ 0 & -\dot{\eta} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.104}$$

und die zugehörigen *Frenet*formeln lauten mit den Bezeichnungen $\mathbf{g}_1 := \mathbf{r}_0$, $\mathbf{g}_2 := \mathbf{q}_0$, $\mathbf{g}_3 := \mathbf{c}_0$

$$\dot{\mathbf{g}}_i = f_i^{\ j}\, \mathbf{g}_i \quad . \blacktriangleleft \tag{7.105}$$

BEISPIEL 4: Das bewegungsbezogene Bahnsystem (aus Abschnitt 2.2.3) hat als Variationsmatrix die schiefsymmetrische Matrix

$$\left(f_{ij}\right) = \dot{\eta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\zeta \\ 0 & 0 & \cos\zeta \\ \sin\zeta & -\cos\zeta & 0 \end{pmatrix} \tag{7.106}$$

und die zugehörigen *Frenet* Formeln

$$\dot{\mathbf{q}}_i = f_i^{\ j}\,\mathbf{q}_j \quad .\blacktriangleleft \tag{7.107}$$

7.1.7.6 Zerlegung eines beliebigen Tensors zweiter Stufe

Jeder Tensor der zweiten Stufe kann in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Tensor zerlegt werden.

Herleitung**:** Für den beliebigen Tensor zweiter Stufe mit den Komponenten t^{ij} sind

$$\overset{(s)}{t}{}^{ij} = \frac{1}{2}\left(t^{ij} + t^{ji}\right) \tag{7.108}$$

die Komponenten eines symmetrischen und

$$\overset{(a)}{t}{}^{ij} = \frac{1}{2}\left(t^{ij} - t^{ji}\right) \tag{7.109}$$

die Komponenten eines schiefsymmetrischen Tensors. Damit ergibt sich die Zerlegung des gegebenen Tensors in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

$$t^{ij} = \overset{(s)}{t}{}^{ij} + \overset{(a)}{t}{}^{ij} \quad . \tag{7.110}$$

7.1.7.7 Schiefsymmetrisierung höherstufiger Tensoren

Allgemeine Definition: Ein Tensor heißt schiefsymmetrisch in gleichartigen (unteren bzw. oberen) Indizes, wenn sich seine Komponenten bei gerader Permutation nicht ändern, bei ungerader Permutation nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Schiefsymmetrisierung wird durch eckige Klammern gekennzeichnet. Beispiele für die Zuordnung schiefsymmetrischer Tensoren zu gegebenen beliebigen Tensoren:

BEISPIEL 1: $t^{i[jk]} = \frac{1}{2}\left(t^{ijk} - t^{ikj}\right)$ ◀

BEISPIEL 2: $t^{[ijk]} = \frac{1}{6}\left(t^{ijk} - t^{ikj} + t^{jki} - t^{jik} + t^{kij} - t^{kji}\right)$ ◀

7.1.7.8 Vollständige Schiefsymmetrie von Tensoren

Ein Tensor heißt *vollständig schiefsymmetrisch*, wenn seine Komponenten bei beliebiger Vertauschung der Indizes schiefsymmetrisch sind.

Eine beliebige Vertauschung der Indizes kann durch eine systematische Abfolge paarweiser Vertauschungen erreicht werden. Auf diese Weise lässt sich in einfacher Weise zeigen:

1. *Jeder vollständig schiefsymmetrische Tensor der N-ten Stufe bezogen auf einen N-dimensionalen Basisraum hat genau eine wesentliche Komponente und alle anderen nicht verschwindenden Komponenten unterscheiden sich von dieser höchstens durch das Vorzeichen.*
2. *Jeder vollständig schiefsymmetrische Tensor der K-ten Stufe bezogen auf einen N-dimensionalen Basisraum mit $K < N$ hat genau*

$$\binom{N}{K} = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-K+1)}{K!} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$$

wesentliche Komponenten.

BEISPIEL 1:

$$t^{i_1\ldots i_p\ldots i_q\ldots i_r\ldots i_K} = -t^{i_1\ldots i_q\ldots i_p\ldots i_r\ldots i_K} = t^{i_1\ldots i_q\ldots i_r\ldots i_r\ldots i_K} = \ldots \quad . \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 2: Der vollständig schiefsymmetrische Tensor 2. Stufe im dreidimensionalen Raum hat die drei wesentlichen Komponenten

$$t^{12} = -t^{21} \quad , \quad t^{13} = -t^{31} \quad , \quad t^{23} = -t^{23} \quad .$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. In Basisdarstellung hat dieser Tensor daher folgende Gestalt:

$$\mathbf{T} = t^{12}(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1) + t^{13}(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1) + t^{23}(\mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2) \quad . \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 3: Der vollständig schiefsymmetrische Tensor 2. Stufe im zweidimensionalen Raum hat die eine wesentliche Komponente

$$t^{(12)} = t^{12} = -t^{21} \quad .$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. In Basisdarstellung hat dieser Tensor daher folgende Gestalt

$$\mathbf{T} = t^{(12)}(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1) \quad .$$

Aus

$$t_{(ij)} = \sum_{k<l} \left(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk} \right) t^{(kl)} = \sum \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{jk} \\ g_{il} & g_{jl} \end{vmatrix} t^{(kl)}$$

wird der Zusammenhang zwischen der wesentlichen kovarianten und der wesentlichen kontravarianten Komponente des vollständig schiefsymmetrischen Tensors der 2-ten Stufe über dem 2-dimensionalen Basisraum mit der Beziehung $g := \det\left(g_{ij}\right)$ erhalten:

$$t_{(12)} = g\, t^{(12)} \quad . \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 4: Der vollständig schiefsymmetrische Tensor 3. Stufe im dreidimensionalen Raum hat nur die eine wesentliche Komponente

$$t^{(123)} = t^{123} = -t^{132} = t^{231} = -t^{213} = t^{312} = -t^{321} \quad .$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. In Basisdarstellung hat dieser Tensor daher folgende Gestalt:

$$\mathbf{T} = t^{(123)} \left(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1\right) \quad .$$

Durch verjüngende Multiplikation von rechts nacheinander mit $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 &= t^{(123)} \left(g_{13}\, g_{22}\, g_{31} - g_{13}\, g_{32}\, g_{21} + g_{23}\, g_{32}\, g_{11} - g_{23}\, g_{12}\, g_{31} + g_{33}\, g_{12}\, g_{21} - g_{33}\, g_{22}\, g_{11}\right) \\ &= t^{(123)}\, g \quad , \end{aligned}$$

wobei $g := \det\left(g_{ij}\right)$ die Determinante des kovarianten Metriktensors ist. Zur Untersuchung des Transformationsverhaltens

$$s^{lmn} = t^{ijk}\, b^{l}{}_{i}\, b^{m}{}_{j}\, b^{n}{}_{k}$$

wird (ohne Einschränkung) der Term $l = 1, m = 2, n = 3$ betrachtet:

$$\begin{aligned} s^{(123)} &= \left(b^1{}_1 b^2{}_2 b^3{}_3 - b^1{}_1 b^2{}_3 b^3{}_2 + b^1{}_2 b^2{}_3 b^3{}_1 - b^1{}_2 b^2{}_1 b^3{}_3 + b^1{}_3 b^2{}_1 b^3{}_2 - b^1{}_3 b^2{}_2 b^3{}_1\right) = \\ &= \det\left(b^i{}_j\right) t^{(123)} \quad . \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Beziehung

$$t_{ijk} = g_{il}\, g_{jm}\, g_{kn}\, t^{lmn}$$

wird im Fall vollständiger Schiefsymmetrie

$$t_{(ijk)} = \left(g_{il}\, g_{jm}\, g_{kn} - g_{il}\, g_{jn}\, g_{km} + g_{im}\, g_{jl}\, g_{kn} - g_{im}\, g_{jn}\, g_{kl} + g_{in}\, g_{jl}\, g_{km} - g_{in}\, g_{jm}\, g_{kl}\right) t^{(lmn)}$$

und damit der Zusammenhang zwischen wesentlicher kovarianter und wesentlicher kontravarianter Komponente des vollständig schiefsymmetrischen Tensors 3. Stufe über einem dreidimensionalen Basisraum

$$t_{(123)} = g\, t^{(123)} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 5: Durch vollständige Induktion kann allgemein für den vollständig schiefsymmetrischen Tensor der *N*-ten Stufe über einem *N*-dimensionalen Basisraum der Zusammenhang zwischen der wesentlichen kovarianten und der wesentlichen kontravarianten Komponente gezeigt werden:

$$t_{(12\ldots N)} = g\, t^{(12\ldots N)} \quad , \tag{7.111}$$

wenn *g* wieder die Determinante des entsprechenden Fundamentaltensors ist. $\blacktriangleleft$

7.1.7.9 Der allgemeine Kronecker Tensor

In Verallgemeinerung des *Kronecker* Symbols $\delta_i^j = \pm 1$, das als Komponenten eines zweistufigen Tensors aufgefasst werden kann, wird der allgemeine *Kronecker* Tensor (auch δ - Tensor genannt), der *m*-fach kovariant und *m*-fach kontravariant ist, definiert durch die Determinante

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} := \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \cdots & \delta_{i_1}^{j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_n}^{j_1} & \cdots & \delta_{i_n}^{j_m} \end{vmatrix} \quad . \tag{7.112}$$

Dieser Tensor ist vollständig schiefsymmetrisch. Sind etwa die unteren Indizes alle verschieden und die oberen Indizes eine gerade Permutation der unteren, ist

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = 1 \quad ,$$

bei ein ungeraden Permutation ist

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = -1 \quad ,$$

sonst

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = 0 \quad .$$

Damit ist der *Kronecker* Tensor in allen oberen Indizes vollständig schiefsymmetrisch. Entsprechendes kann über die unteren Indizes ausgesagt werden.

BEISPIELE:

$$\delta_{12}^{12} = 1 \quad , \quad \delta_{12}^{21} = -1 \quad , \quad \delta_{12}^{11} = \delta_{12}^{22} = 0 \quad ,$$

$$\delta_{123}^{123} = \delta_{123}^{312} = \delta_{123}^{231} = 1 \quad , \quad \delta_{123}^{132} = \delta_{123}^{321} = \delta_{123}^{213} = 0 \quad . \blacktriangleleft$$

Allgemein gilt

$$\delta_k^{\ j_1} \delta_{i_1}^{\ k} = \delta_{i_1}^{\ j_1} \quad . \tag{7.113}$$

Verjüngung des 6-stufigen *Kronecker* Tensors:

$$\delta_{ijk}^{\ lmk} = \begin{vmatrix} \delta_i^{\ l} & \delta_i^{\ m} & \delta_i^{\ n} \\ \delta_j^{\ l} & \delta_j^{\ m} & \delta_j^{\ n} \\ \delta_k^{\ l} & \delta_k^{\ m} & \delta_k^{\ n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_i^{\ l} & \delta_i^{\ m} \\ \delta_j^{\ l} & \delta_i^{\ m} \end{vmatrix} = \delta_{ij}^{\ lm} \tag{7.114}$$

$$\delta_{imk}^{\ lmk} = 2\delta_i^{\ l} \tag{7.115}$$

$$\delta_{lmk}^{\ lmk} = 6 \quad . \tag{7.116}$$

7.1.7.10 Der Epsilon-Tensor

Als eine spezielle Anwendung des allgemeinen *Kronecker*tensors wird der Tensor definiert, dessen untere Indizes alle verschieden sind und keine Permutationen aufweisen. Dieser Tensor wird als ε - Tensor bezeichnet:

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_K} := \delta_{1,2,\ldots,K}^{\,i_1,i_2,\ldots,i_K} \quad . \tag{7.117}$$

Eine Erweiterung (die hier nicht weiter benutzt wird) unterscheidet ein Rechtssystem und Linkssystem durch das Vorzeichen des ε - Tensors (positiv für Rechtssystem = Funktionaldeterminante positiv, negativ für Linkssystem).

Ferner ist

$$\varepsilon^{i_1,i_2,\ldots,i_K} := \delta_{i_1,i_2,\ldots,i_K}^{\,1,2,\ldots,K} \quad . \tag{7.118}$$

Der ε - Tensor ist wie der *Kronecker*tensor vollständig schiefsymmetrisch.

BEISPIEL 1: Mit dem ε - Tensor können alle Komponenten eines vollständig antisymmetrischen Tensors auf seine wesentliche Komponente $t^{(12\ldots K)}$ zurückgeführt werden:

$$t^{i_1,i_2,\ldots,i_K} = \varepsilon^{i_1,i_2,\ldots,i_K}\, t^{(12\ldots K)} \quad . \quad \blacktriangleleft \tag{7.119}$$

BEISPIEL 2: Da nach Formel (7.113) $\delta_k^{\,j_1}\,\delta_{i_1}^{\,k} = \delta_{i_1}^{\,j_1}$ ist

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_K}\,\varepsilon^{\,j_1,j_2,\ldots,j_K} = \delta_{i_1,i_2,\ldots,i_K}^{\,j_1,j_2,\ldots,j_K} \quad . \tag{7.120}$$

Das tensorielle Produkt der Komponenten eines kovarianten ε - Tensors der K-ten Stufe mit den kontravarianten Komponenten eines ε - Tensors derselben Stufe ergibt den Kroneckertensor der $(2\,K)$- ten Stufe. $\blacktriangleleft$

7.1.7.11 Die Levi-Cività-Tensoren

Die *Levi-Cività*-Tensoren werden aus den ε-Tensoren erhalten. Ihre kovarianten Komponenten werden definiert durch

$$E_{i_1,i_2,\ldots,i_K} := \sqrt{|g|}\;\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_K} \quad , \tag{7.121}$$

ihre kontravarianten Komponenten

$$E^{i_1,i_2,\ldots,i_K} := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_K} \quad . \tag{7.122}$$

Die *Levi-Civita*-Tensoren sind wie die ε - Tensoren vollständig schiefsymmetrisch, ihre wesentliche kovariante Komponente ist $\sqrt{|g|}$, ihre wesentliche kontravariante Komponente ist $1/\sqrt{|g|}$.

7.1.7.12 Adjungierte Tensoren

Zu einem schiefsymmetrischen Tensor der Stufe $K < N$ über dem N-dimensionalen Basisraum wird als adjungierter Tensor der Tensor der Stufe $(N–K)$ verstanden, der durch verjüngende Multiplikation (Überschiebung der Komponenten) mit dem *Levi-Civita*-Tensor entsteht:

$$\begin{aligned} t^{*}_{i_{K+1},\ldots,i_N} &:= \frac{1}{K!} E_{i_1 \ldots i_K \, i_{K+1} \ldots i_N} \, t^{i_1 \ldots i_N} \\ t^{* \, i_{K+1},\ldots,i_N} &:= \frac{1}{K!} E^{i_1 \ldots i_K \, i_{K+1} \ldots i_N} \, t_{i_1 \ldots i_N} \quad . \end{aligned} \tag{7.123}$$

BEISPIEL 1: Der adjungierte Tensor eines über einem N-dimensionalen Vektorraum gegebenen schiefsymmetrischen Tensors der Stufe N ist ein Skalar. ◀

BEISPIEL 2: Der adjungierte Tensor eines über einem N-dimensionalen Vektorraums gegebenen schiefsymmetrischen Tensors der Stufe $(N–1)$ ist ein Vektor. ◀

Anmerkung: Der adjungierte Tensor eines schiefsymmetrischen Tensors wird gelegentlich als seine *„duale Ergänzung“* bezeichnet. ◀

7.1.7.13 Das äußere Produkt

Als äußeres Produkt zweier Vektoren $\mathbf{x} = x^i \, \mathbf{p}_j, \mathbf{y} = y^j \, \mathbf{p}_j$ wird der antisymmetrische Tensor

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} := \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} \tag{7.124}$$

definiert. Seine kontravarianten Komponenten errechnen sich wegen

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = p^{ij} \, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = x^i \, y^j \, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j - x^i \, y^j \, \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i = \left(x^i \, y^j - x^j \, y^i \right) \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

aus

$$p^{ij} = x^i \, y^j - x^j \, y^i \quad . \tag{7.125}$$

Entsprechend gelten für das äußere Produkt die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} &= \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} \\ a \, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (a \, \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge (a \, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \quad . \end{aligned} \tag{7.126}$$

7.1.7.14 Zusammenhang des äußeren und des vektoriellen Produktes

Im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum wird der zum antisymmetrischen Tensor $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = p^{ij} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_j$ adjungierte Tensor nach Formel (7.123) gebildet. Da im dreidimensionalen Raum $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ von der Stufe $N–1 = 2$ ist, ist der zugehörige adjungierte Tensor ein Vektor (dies gilt also nur im dreidimensionalen Raum]:

$$S = \frac{1}{2!} E_{ijk} \, p^{ij} \, \mathbf{p}^k = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \varepsilon_{ijk} \, p^{ij} \, \mathbf{p}^k = \sqrt{|g|} \left(x^i \, y^j - x^j \, y^i \right) \mathbf{p}^k \quad .$$

Wir können daher

$$z_k^* \mathbf{p}^k = \sqrt{|g|}\left(x^i y^j - x^j y^i\right)\mathbf{p}^k$$

schreiben. Wird

$$z_k^* =: \sqrt{|g|}\, z_k$$

gesetzt, bleibt

$$\mathbf{z} := z_k \mathbf{p}^k = \left(x^i y^j - x^j y^i\right)\mathbf{p}^k \quad . \tag{7.127}$$

Vergleich mit den Ausdrücken (7.124) und (7.125) zeigt, dass es sich hierbei um das äußere Produkt handelt

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$$

mit

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

sowie in diesem Fall dem vektoriellen Produkt identisch ist

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (N = 3) \quad . \tag{7.128}$$

In diesem Fall gilt für die Darstellung des äußeren Produktes mit Hilfe des ε- Tensors die Darstellung

$$\mathbf{z} = \varepsilon_{ijk}\, x^i y^j \mathbf{p}^k \quad . \tag{7.129}$$

7.2 Grundzüge der Tensoranalysis

7.2.1 Krummlinige Koordinaten

In den bisherigen Abschnitten wurde als Koordinatensystem stets ein geradliniges System angenommen. In ihm bewegt sich jede Koordinate genau auf einer Geraden, wenn alle anderen Koordinaten festgehalten werden. Dann gilt für einen Ortsvektor die Darstellung $\mathbf{r} = x^i \mathbf{g}_i$. Die Basisvektoren sind nicht notwendig orthonormiert, wie es bei kartesischen Koordinaten angenommen wird, wohl aber gilt $d\mathbf{g}_i \equiv 0$ für alle i bei einer Variation des Ortsvektors innerhalb des vorgegebenen Vektorraumes. Das bedeutet aber nicht, dass bei einer Transformation des $\mathbf{g}_i$- Systems in ein anderes (auch als geradlinig zugelassenes) $\mathbf{q}_j$- System nicht eine Variation der $\mathbf{g}_i$ bezüglich dieses neuen Systems vorkommen könnte. Ein geradliniges System, das für einen Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{g}_i \tag{7.130}$$

erlaubt, ist also durch die Bedingung

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System geradlinig} \tag{7.131}$$

gekennzeichnet. Somit gilt für die Variation des Ortsvektors bei Variation des Ortes

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \mathbf{g}_j + x^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \mathbf{g}_j \tag{7.132}$$

und das Differential des Ortsvektors

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{g}_i + x^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} dx^j = dx^i \mathbf{g}_i \quad . \tag{7.133}$$

Da der Ortsvektor eine Funktion der Koordinaten x^i ist, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i)$, gilt sicher auch

$$d\mathbf{r} = dx^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad . \tag{7.134}$$

Wir wollen nun den Ortsvektor auf ein anderes Koordinatensystem beziehen, dessen Basis vom Ort abhängig ist, so dass bei einer Variation einer der Koordinaten bei festgehaltenen anderen Koordinaten diese Koordinate nicht auf einer Geraden liegt. Ein solches System wird dann als krummlinig bezeichnet, die entsprechenden Koordinaten ebenfalls als krummlinig. Die obige Bedingung (7.131) ist dann nicht erfüllt und die Koordinatenschreibweise (7.130) ist zunächst nicht möglich. Der Ortsvektor ist nach wie vor eine Funktion des Ortes, jetzt also der neuen Ortskoordinaten y^j

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(y^j\right) \quad ,$$

und er hat das Differential

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} dy^j \quad . \tag{7.135}$$

Dies führt zur Grundlegung der Tensoranalysis. Dafür sollen zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
u &= u\left(x^i\right) \quad , \qquad u_{,i} := \frac{\partial u}{\partial x^i} \\
\mathbf{r} &= \mathbf{r}\left(x^i\right) \quad , \qquad \mathbf{r}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \\
u^i &= u^i\left(x^k\right) \quad , \qquad u^i{}_{,k} := \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \\
t^{ij} &= t^{ij}\left(x^k\right) \quad , \qquad t^{ij}{}_{,k} := \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} \\
&\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots
\end{aligned} \tag{7.136}$$

und bei kovarianten Komponenten

$$
\begin{aligned}
u &= u(x_i) \quad , \qquad u^{,i} := \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
\mathbf{r} &= \mathbf{r}(x_i) \quad , \qquad \mathbf{r}^{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \\
u^i &= u^i(x_k) \quad , \quad u^{i,k} := \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \\
t^{ij} &= t^{ij}(x_k) \quad , \quad t^{ij,k} := \frac{\partial t^{ij}}{\partial x_k} \\
&\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
\tag{7.137}
$$

Hier gelten die folgenden Sätze, was auch zur Einführung neuer Tensoren verwendet werden kann:

Satz 1: Wenn im Skalarfeld $u(x^i)$ die x^i die linear unabhängigen Komponenten eines Vektors sind, sind die $u_{,i}$ die Komponenten eines Tensors der ersten Stufe.

BEWEIS:

Der Beweis wird wie in der Tensorrechnung üblich, durch Untersuchung des Transformationsverhaltens der $u_{,i}$ durchgeführt. Die x^i haben nach Formel (7.35) die Transformation

$$y^k = x^j b_j{}^k \quad ,$$

wobei die Transformationsmatrix $b_j{}^k$ von den x^i als Komponenten eines Tensors unabhängig sind:

$$\frac{\partial b_i{}^k}{\partial y^k} = \frac{\partial b_i{}^k}{\partial x^k} \equiv 0 \quad .$$

Somit ergibt die Differentiation der $u(x^i)$

$$
\begin{aligned}
u_{,i} &= \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial y^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} b_j{}^k + x^j \frac{\partial b_j{}^k}{\partial x^i}\right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial y^k}\,\delta^{ij}\, b_j{}^k = \frac{\partial u}{\partial y^k}\, b_i{}^k = u_{,k}\, b_i{}^k \quad .
\end{aligned}
$$

Die $u_{,i}$ erfüllen also die Transformationsbedingung (7.35) für die Transformation eines Tensors der ersten Stufe:

$$u_{,i} = b_i^k\, u_{,k} \quad . \tag{7.138}$$

Entsprechendes gilt für die folgenden Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
&u = u(x^i) \;, \quad y_k = a_k{}^j x_j \;, \; u^{,i} = u^{,k} a_k{}^i \\
&\upsilon = \upsilon(y^j) \;, \quad x^i = a_k{}^i y^k \;, \; \upsilon_{,j} = \upsilon_{,i} a_j{}^i \\
&\upsilon = \upsilon(y_j) \;, \quad x_i = b_i{}^j y_j \;, \; \upsilon^{,j} = \upsilon^{,i} b_i{}^j \quad .
\end{aligned}
\tag{7.139}
$$

q.e.d. ◀

Satz 2: Wenn die u^i Komponenten eines Vektors sind, sind die $u^i{}_{,k}$ Komponenten eines Tensors der zweiten Stufe.

BEWEIS:

Man zeigt diesen Satz durch Nachweis der Gültigkeit der Transformationsregel für die Komponenten eines Tensors der zweiten Stufe. Wenn die u^i die Komponenten eines Vektors sind, gilt für eine Transformation $u^i = u^i\left(\upsilon^j\right)$

$$u^i \;=\; a^i{}_j\,\upsilon^j \;=\; \frac{\partial u^i}{\partial \upsilon^j}\,\upsilon^j \quad , \qquad mit \quad \frac{\partial a^i{}_j}{\partial \upsilon^l} \;\equiv\; 0$$

und für die unabhängigen Variablen

$$y^l \;=\; b^l_k\,x^k \;=\; \frac{\partial y^l}{\partial x^k}\,x^k \quad , \; mit \quad \frac{\partial b^l_k}{\partial x^j} \;\equiv\; 0 \quad .$$

Dies führt also auf

$$u^i{}_{,k} \;=\; \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \;=\; \frac{\partial u^i}{\partial \upsilon^j}\,\frac{\partial \upsilon^j}{\partial y^l}\,\frac{\partial y^l}{\partial x^k} \;=\; a^i{}_j\,b^l_k\,\upsilon^j{}_{,l} \quad . \tag{7.140}$$

Die Transformationsregel für Tensoren zweiter Stufe ist also erfüllt, die $u^i{}_{,k}$ sind also die Komponenten eines Tensors der zweiten Stufe. q.e.d. ◀

Satz 3: Wenn die $t^{ij} = t^{ij}\left(x^k\right)$ die Komponenten eines Tensors der zweiten Stufe mit den unabhängigen Variablen x^k sind, die sich als die Komponenten eines Vektors darstellen lassen, bilden die $t^{ij}{}_{,k}$ die Komponenten eines Tensors der dritten Stufe.

BEWEIS:

Wenn $t^{ij} = t^{ij}\left(x^k\right)$ die Komponenten eines Tensors der zweiten Stufe sind, ist die Transformationsbedingung (7.53) auf Seite 240 erfüllt:

$$t^{ij} \;=\; s^{kl}\,a_k{}^i\,a_l{}^j \quad .$$

Für die unabhängigen Variablen gelten die Transformationen

$$y^h \;=\; b_k{}^h\,x^k \quad , \; mit \quad \frac{\partial b_k{}^l}{\partial y^j} \;=\; \frac{\partial b_k{}^l}{\partial x^j} \;\equiv\; 0$$

und es ist ferner

$$\frac{\partial a_k{}^i}{\partial y^l} \;=\; \frac{\partial a_k{}^i}{\partial x^l} \;\equiv\; 0$$

erfüllt. Dies führt auf

$$t^{ij}{}_{,k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial\left(s^{ml}\, a_m{}^i\, a_l{}^j\right)}{\partial y^h}\frac{\partial y^h}{\partial x^k} = \\ = \frac{\partial s^{ml}}{\partial y^k}\, a_m{}^i\, a_l{}^j\, b_k{}^h = s^{ml}{}_{,h}\, a_m{}^i\, a_l{}^j\, b_k{}^h \quad . \tag{7.141}$$

Die Transformationsregel für Tensoren dritter Stufe ist erfüllt. ◀

In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die $u_{,i}$ Komponenten eines Tensors erster Stufe, also eines Vektors sind sowie die $t^{ij}{}_{,k}$ die Komponenten eines Tensors der dritten Stufe.

Für die Darstellung der Variation des Ortsvektors $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(x^i\right) = \mathbf{r}\left(y^j\right)$ gilt nach den Gleichungen (7.133) und (7.134) im Fall der geradlinigen Koordinaten die Beziehung zwischen der Variation des Ortsvektors und der Basis dieses Systems

$$\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{g}_i \quad . \tag{7.142}$$

Gehen wir zu den neuen krummlinig angenommenen Koordinaten y^j über mit der Transformation

$$x^i = x^i\left(y^j\right) \quad , \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\, dy^j \\ y^j = y^j\left(x^i\right) \quad , \quad dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, dx^i \qquad \text{mit} \quad \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \neq 0 \quad , \quad \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \neq 0 \quad . \tag{7.143}$$

Bei Abhängigkeit von der Zeit *t* ergeben diese Beziehungen

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\dot{y}^j = x^i{}_{,j}\,\dot{y}^j \\ \dot{y}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\dot{x}^i = y^j{}_{,i}\,\dot{x}^i \quad . \tag{7.144}$$

Daraus folgt

$$y^k{}_{,i}\,\dot{x}^i = y^k{}_{,i}\, x^i{}_{,j}\,\dot{y}^j = \dot{y}^k \quad ,$$

somit die wichtige Beziehung

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = y^k{}_{,i}\, x^i{}_{,j} = \delta^k{}_j \quad . \tag{7.145}$$

- *Die Jacobi Matrizen ($y^k{}_{,i}$) und($x^i{}_{,j}$) sind invers zueinander.*

Der Ortsvektor **r** hat bezogen auf diese Koordinaten die Variation

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j}\, dy^j = \mathbf{r}_{,j}\, dy^j \quad . \tag{7.146}$$

Da die Funktionaldeterminante $\det\left(x^i{}_{,j}\right) \neq 0$ angenommen wurde, bilden die $\mathbf{r}_{,j}$ ein System linear unabhängiger Vektoren, die als Basis des neuen y^j- Systems angesehen werden können. Wir bezeichnen diese neue Basis mit

$$\mathbf{q}_j := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} = \mathbf{r}_{,j} \tag{7.147}$$

und können daher schreiben

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{r}_{,j} = dx^i \mathbf{g}_i = dy^j \mathbf{r}_{,j} = dy^j \mathbf{q}_j \quad .$$

Das Transformationsverhalten zwischen der Basis $\mathbf{g}_i$ des geradlinigen Systems und der Basis $\mathbf{q}_j$ des krummlinigen Systems lautet also:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mathbf{q}_j = y^j{}_{,i} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathbf{g}_i = x^i{}_{,j} \mathbf{g}_i \quad . \end{aligned} \tag{7.148}$$

Zwischen den Basen der Systeme besteht also eine lineare Beziehung, obgleich zwischen den Koordinaten in den beiden Systemen keine lineare Beziehung besteht.

Transformation zwischen den kovarianten Basen verschiedener krummliniger Systeme

Diese Transformation kann wie in Abschnitt 4.3.4 hergeleitet, übersichtlich in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \frac{\partial y^j}{\partial z^k} \mathbf{q}_j = y^j{}_{,k} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_j &= \frac{\partial z^k}{\partial y^j} \mathbf{p}_k = z^k{}_{,j} \mathbf{p}_k \end{aligned} \tag{7.149}$$

geschrieben werden, und es gilt wieder der Satz:

- *Das Transformationsgesetz (7.148) gilt ganz allgemein zwischen den Basen beliebiger auch krummliniger Koordinatensysteme.*

7.2.1.1 Transformationsverhalten der Komponenten eines beliebigen Tensors der ersten Stufe

Der Tensor erster Stufe habe die Komponenten $a^i = a^i\left(x^k\right)$ bezogen auf die kovariante Basis $\mathbf{p}_i$ sowie die Komponenten $b^j = b^j\left(y^l\right)$ bezogen auf die kovariante Basis $\mathbf{q}_j$, wobei die x^k, y^l krummlinige Koordinaten seien:

$$a^i\left(x^k\right)\mathbf{p}_i = b^j\left(y^l\right)\mathbf{q}_j \quad .$$

Werden hier die Transformationen (7.149) eingesetzt, wird

$$\begin{aligned} a^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} b^j = x^i{}_{,j}\, b^j \\ b^j &= \frac{\partial y^j}{\partial x^i} a^i = y^j{}_{,i}\, a^i \quad . \end{aligned} \tag{7.150}$$

In gleicher Weise werden auch andere Vektoren und Tensoren nach den kontravarianten Koordinaten eines Vektor- bzw. Tensorfeldes transformiert. Die kontravarianten Basisvektoren werden etwa nach den kontravarianten Koordinaten transformiert nach

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \mathbf{q}^k = x^i{}_{,k}\, \mathbf{q}^k \\ \mathbf{q}^k &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \mathbf{p}^i = y^k{}_{,i}\, \mathbf{p}^i \quad . \end{aligned} \tag{7.151}$$

Für die Basis eines Tensors der zweiten Stufe gelten analog die Transformationen

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l = y^k{}_{,i}\, y^l{}_{,j}\, \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = x^i{}_{,k}\, x^j{}_{,l}\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \end{aligned} \tag{7.152}$$

und entsprechend für die Komponenten eines beliebigen Tensors der zweiten Stufe

$$t^{ij}\left(x^k\right) \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j = s^{kl}\left(y^m\right) \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_l \tag{7.153}$$

die Transformation

$$\begin{aligned} s^{kl} &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} t^{ij} = y^k{}_{,i}\, y^l{}_{,j}\, t^{ij} \\ t^{ij} &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} s^{kl} = x^i{}_{,k}\, x^j{}_{,l}\, s^{kl} \quad . \end{aligned} \tag{7.154}$$

Analog sind die Transformationsregeln für die höherstufigen Tensoren.

7.2.1.2 Transformationsverhalten der kontravarianten Basen bei krummlinigen Koordinaten

Für die kontravariante Basis gelten bei Bezug auf kovariante krummlinige Koordinaten y_j

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{g}^i = x_i\left(y_i\right)\mathbf{g}^i \tag{7.155}$$

entsprechend

$$d\mathbf{r} = dx_i\, \mathbf{g}^i = dx_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = dy^j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j} = \mathbf{r}_{,}{}^j\, dy_j = \mathbf{q}^j\, dy_j \tag{7.156}$$

und

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j = x_{i,}{}^{j}\, dy_j \quad , \quad dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i = y_{j,}{}^{i}\, dx_i \tag{7.157}$$

die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^j &= \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \mathbf{g}^i = x_{i,}{}^{j}\, \mathbf{g}^i \\ \mathbf{g}^i &= \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \mathbf{q}^j = y_{j,}{}^{i}\, \mathbf{q}^j \quad . \end{aligned} \tag{7.158}$$

Entsprechend gilt für die Basen zweier beliebiger (also auch krummliniger) Systeme die Transformationsregel

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^j &= \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \mathbf{p}^i = y_{i,}{}^{j}\, \mathbf{p}^i \\ \mathbf{p}^i &= \frac{\partial z_j}{\partial y_i} \mathbf{q}^j = z_{j,}{}^{i}\, \mathbf{q}^j \quad . \end{aligned} \tag{7.159}$$

Für die kovarianten Komponenten des Tensors der ersten Stufe

$$a_i(y_k)\,\mathbf{p}^i = b_j(z_l)\,\mathbf{q}^j$$

gelten somit die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\partial y_i}{\partial z_j} b_j = y_{i,}{}^{j}\, b_j \\ b_j &= \frac{\partial z_j}{\partial y_i} a_i = z_{j,}{}^{i}\, a_i \quad . \end{aligned} \tag{7.160}$$

Vergleich mit den Transformationsregeln (7.150) auf Seite 268 und (7.151) zeigt überdies die Beziehung zwischen den Ableitungen der kovarianten und der kontravarianten Koordinaten

$$\frac{\partial y_k}{\partial z_i} = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} \quad . \tag{7.161}$$

Auch für die kovarianten Koordinaten gilt der zu (7.145) auf Seite 266 entsprechende Satz über die Reziprozität der Jacobi Matrizen:

$$\frac{\partial z_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_j} = z_{k,}{}^{i}\, y_{i,}{}^{j} = \delta_k{}^{j} \quad . \tag{7.162}$$

7.2.1.3 Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten

Die Transformation zwischen geradlinigen und krummlinigen Koordinaten am Beispiel von Polarkoordinaten wurde bereits in Abschnitt 4.3.5 gegeben. Die Polarkoordinaten wurden dort im krummlinigen $\mathbf{q}_j$- System berechnet. Dieses System bildet ein Orthogonalsystem. Der zugehörige metrische Fundamentaltensor lautet:

$$\begin{aligned} &g_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \quad , \\ &g_{11} = 1 \quad , \quad g_{22} = r^2 \cos^2 B \quad , \quad g_{33} = r^2 \quad , \quad g_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \end{aligned} \tag{7.163}$$

Seine Spur ist

$$I_1 \;=\; g^i{}_i \;=\; 1+r^2(1+\cos^2 B) \quad . \tag{7.164}$$

In einem Polarkoordinatensystem besteht daher die Metrik (ds = Bogenelement)

$$(d\mathbf{r})^2 \;=\; ds^2 \;=\; dy^i\,\mathbf{q}_i \cdot dy^j\,\mathbf{q}_j \;=\; \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j\, dy^i\, dy^j \;=\; g_{ij}\, dy^i\, dy^j \quad , \tag{7.165}$$

somit

$$ds^2 \;=\; (dr^2)+r^2\cos^2 B\,(dA)^2 + r^2\,(dB)^2 \quad . \tag{7.166}$$

Die kontravariante Basis $\mathbf{q}_j$ des krummlinigen Polarkoordinatensystems kann mit den Formeln (7.13) auf Seite 233 berechnet werden. Sie lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^1 &= \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}^2 &= \frac{1}{r^2\cos^2 B}\,\mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}^3 &= \frac{1}{r^2}\,\mathbf{q}_3 \end{aligned} \tag{7.167}$$

mit dem zugehörigen Fundamentaltensor

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1 = \frac{1}{g_{11}} \quad , \\ g^{22} &= \frac{1}{r^2\cos^2 B} = \frac{1}{g_{22}} \quad , \qquad \blacktriangleleft \\ g^{33} &= \frac{1}{r^2} = \frac{1}{g_{33}} \quad , \\ g^{ij} &= 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \end{aligned} \tag{7.168}$$

7.2.2 Die Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten

Nach der Einführung krummliniger Koordinaten und der Untersuchung ihres Transformationsverhaltens kann die Bewegungsgleichung eines bewegten Körpers oder allgemeiner eines Systems bewegter Objekte aufgestellt werden.

Aus der Beziehung (7.144) auf Seite 266 folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\ddot{x}^i \;=\; \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j\,\partial y^k}\,\dot{y}^j\,\dot{y}^k + \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\ddot{y}^j \tag{7.169}$$

und wegen der Reziprozität der Jacobi Matrizen nach Formel (7.162) auf auch

$$\ddot{y}^l + \frac{\partial y^l}{\partial x^i}\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j\,\partial y^k}\,\dot{y}^j\,\dot{y}^k \;=\; y^l{}_{,i}\,\ddot{x}^i \quad . \tag{7.170}$$

Hier werden die Ausdrücke

$$\Gamma^{l}{}_{jk} \;:=\; \frac{\partial y^{l}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial^{2} x^{i}}{\partial y^{j}\,\partial y^{k}} \tag{7.171}$$

üblicherweise als *Christoffel Symbole* bezeichnet. Mit ihnen kann die Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten in der Form

$$\ddot{y}^{l} + \Gamma^{l}{}_{jk}\,\dot{y}^{j}\,\dot{y}^{k} \;=\; y^{l}{}_{,i}\,\ddot{x}^{i} \tag{7.172}$$

geschrieben werden, die in vielen Anwendungen der Bewegungslehre in Mechanik und Relativitätstheorie von grundlegender Bedeutung ist.

Die *Christoffel* Symbole werden beim Rechnen mit krummlinigen Koordinaten und daher auch bei der Darstellung von Bewegungen vielfach verwendet. Es werden daher soweit jetzt schon möglich einige ihrer Eigenschaften zusammengestellt.

Einige Eigenschaften der *Christoffel* Symbole

1. Um den Zusammenhang der Darstellung einer Bewegung in krummlinigen Koordinaten mit der zugehörigen Basis herzustellen wird als erstes *die Variation der Basis* $\mathbf{q}_j$ *eines krummlinigen Systems* untersucht. Aus der zweiten der Transformationsformeln (7.148) auf Seite 267 folgt

$$\mathbf{q}_{j,l} \;:=\; \frac{\partial \mathbf{q}_{j}}{\partial y^{l}} \;=\; \frac{\partial^{2} x^{i}}{\partial y^{j}\,\partial y^{l}}\,\mathbf{g}_{i}$$

und mit $\mathbf{g}_i$ aus der ersten dieser Transformationsgleichungen auch

$$\mathbf{q}_{j,l} \;=\; \frac{\partial y^{k}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial^{2} x^{i}}{\partial y^{j}\,\partial y^{l}}\,\mathbf{q}_{k} \quad . \tag{7.173}$$

Die Variationen der kovarianten Basis eines krummlinigen Systems können somit auf diese Basis zurückgeführt werden. Die Koeffizienten dieser Beziehung sind gerade die *Christoffel Symbole*[1]. Für die Ableitung der Basis eines krummlinigen Systems kann daher geschrieben werden:

$$\mathbf{q}_{j,l} \;=\; \Gamma^{k}{}_{jl}\,\mathbf{q}_{k} \quad . \tag{7.174}$$

2. In einem krummlinigen Koordinatensystem lautet die **Bewegungsgleichung** (7.172) bezogen auf die Basis $\mathbf{q}_l$

$$\ddot{y}^{l}\,\mathbf{q}_{l} + \mathbf{q}_{j,k}\,\dot{y}^{j}\,\dot{y}^{k} \;=\; y^{l}{}_{,i}\,\ddot{x}^{i}\,\mathbf{q}_{l} \quad . \tag{7.175}$$

3. *Die Christoffel Symbole sind in den unteren Indizes symmetrisch*:

[1] Diese gemischtvarianten *Christoffel*symbole (einfach kontravariant, zweifach kovariant) werden in der älteren Literatur gelegentlich als die *Christoffelsymbole der zweiten Art* bezeichnet.

$$\Gamma^k{}_{jl} \;=\; \Gamma^k{}_{lj} \quad . \tag{7.176}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (7.171).

3. **Anzahl der *Christoffel* Symbole**: In einem eindimensionalen Raum (d. h. auf Kurven) gibt es genau ein *Christoffel* Symbol:

$$\Gamma^1{}_{11} \quad .$$

In einem zweidimensionalen Raum (d. h. auf Flächen) gibt es genau $2\times 3 = 6$ *Christoffel* Symbole.

In einem dreidimensionalen Raum gibt es genau $3\times 6 = 18$ *Christoffel* Symbole.

In einem vierdimensionalen Raum gibt es genau $4\times 10 = 40$ *Christoffel* Symbole.

4. Die **Variation der kontravarianten Basis** hat bis auf das Vorzeichen dieselben *Christoffel* Symbole wie die Variation der entsprechenden kovarianten Basis:

$$\mathbf{q}^j{}_{,l} \;=\; -\Gamma^j{}_{kl}\,\mathbf{q}^k \quad . \tag{7.177}$$

BEWEIS: Aus der Definitionsgleichung der kontravarianten Basisvektoren (7.3) auf Seite 232

$$\mathbf{q}^j \cdot \mathbf{q}_k \;\coloneqq\; \delta^j{}_k$$

folgt

$$\mathbf{q}^j{}_{,l} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{q}_{k,l} \;=\; 0$$

und es ergibt sich mit Formel (7.171)

$$\mathbf{q}^j{}_{,l} \cdot \mathbf{q}_k \;=\; \frac{\partial \mathbf{q}^j}{\partial y^l} \cdot \mathbf{q}_k \;=\; -\Gamma^m{}_{kl}\,\mathbf{q}_m \cdot \mathbf{q}^j \;=\; -\Gamma^j{}_{kl} \quad . \;\blacktriangleleft \tag{7.178}$$

5. Die *Christoffel Symbole können auf den Metriktensor zurückgeführt werden*:

$$\Gamma^j{}_{ik} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{jn}\left(g_{kn,i} + g_{ni,k} - g_{ik,n}\right) \quad . \tag{7.179}$$

BEWEIS: Aus der Formel über die Beziehung zwischen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren (7.9) auf Seite 232

$$\mathbf{q}_i \;=\; g_{im}\,\mathbf{q}^m \;, \qquad \text{mit} \quad g_{im} \;=\; \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_m$$

folgt durch Differentiation mit der Bezeichnung

$$g_{mi,k} \;\coloneqq\; \frac{\partial g_{mi}}{\partial y^k} \tag{7.180}$$

die Beziehung

$$\mathbf{q}_{i,k} \;=\; g_{mi,k}\,\mathbf{q}^m + g_{mi}\,\mathbf{q}^m{}_{,k} \quad ,$$

nach Multiplikation mit $\mathbf{q}^p$ und mit den Beziehungen (7.171) und (7.177) für die Ableitungen der Basisvektoren

$$\mathbf{q}_{i,k}\cdot\mathbf{q}^p \;=\; \Gamma^n{}_{ik}\,\mathbf{q}_n\cdot\mathbf{q}^p \;=\; \Gamma^p{}_{ik} \;=\; g_{mi,k}\,g^{mp} - g_{mi}\,\Gamma^m{}_{jk}\,g^{jp}$$

und nach Überschiebung mit g_{pn} schließlich

$$g_{pn}\,\Gamma^p{}_{ik} + g_{pi}\,\Gamma^p{}_{nk} \;=\; g_{ni,k} \tag{7.181}$$

sowie entsprechend (nach zyklischer Vertauschung der (*l, m, n*)- Indizes und Austausch von *k* und *p*)

$$g_{pi}\,\Gamma^p{}_{kn} + g_{pk}\,\Gamma^p{}_{in} \;=\; g_{ik,n}$$
$$g_{pk}\,\Gamma^p{}_{ni} + g_{pn}\,\Gamma^p{}_{ki} \;=\; g_{kn,i} \quad .$$

Hieraus kann durch Elimination berechnet werden:

$$2\,g_{pn}\,\Gamma^p{}_{ik} \;=\; g_{kn,i} + g_{ni,k} - g_{ik,n}$$

sowie nach Überschiebung mit g^{nj}

$$\Gamma^j{}_{ik} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{nj}\left(g_{kn,i} + g_{ni,k} - g_{ik,n}\right) \quad . \;\blacktriangleleft$$

6. Die rein kovarianten *Christoffel* Symbole werden definitionsgemäß durch Überschiebung mit dem Metriktensor erhalten[1]:

$$\Gamma_{nik} \;:=\; g_{nj}\,\Gamma^j{}_{ik} \quad . \tag{7.182}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\Gamma_{nik} \;=\; \Gamma_{nki} \quad . \tag{7.183}$$

Nach Formel (7.179) können die *Christoffel* Symbole der ersten Art auf die Variationen der Metrikkoeffizienten bezogen werden:

---

[1] Die rein kovarianten *Christoffel* Symbole werden in der älteren Literatur häufig als *Christoffel Symbole der ersten Art* bezeichnet. Bezeichnungsweise etwa nach LANDAU UND LIFSCHITZ [1992] p. 288: $\Gamma_{n,ik}$. Das Komma nach dem *n* gibt an, dass das *Christoffel* Symbol durch Differentiation nach den krummlinigen Koordinaten x^j, x^k gebildet wurde. Andererseits gibt das Komma in der Tensorrechnung Differentiation der betreffenden Größe nach den Koordinaten x^i, x^k an, was aber im Fall der üblichen Schreibweise der *Christoffel* Symbole nicht gegeben ist. Es sind somit Missverständnisse möglich. Im vorliegenden Bericht werden daher in den *Christoffel* Symbolen der ersten Art konsequenterweise die Kommas weggelassen, wenn keine Differentiation gemeint ist und daher stets $\Gamma_{nik} := \Gamma_{n,ik}$ verwendet. Eine alternative Schreibweise findet sich etwa bei D. LAUGWITZ [1960], p.35: $\Gamma_{nik} = \Gamma_{n,ik} = \Gamma_{ik|n}$.

Neben den $\Gamma^J{}_{ak}$ und Γ_{nick} werden keine weiteren *Christoffel* Symbole verwendet (etwa $\Gamma^{Aj}{}_k$ oder $\Gamma_{Aj}{}^k$ usw.).

Man muss sich hier streng an die Definition halten, da die Regeln für das Herauf- und Herunterziehen der Indizes nur für Tensoren gelten, während die *Christoffel* Symbole, wie in Punkt 9. gezeigt, keine Tensoren sind.

$$\Gamma_{nik} = \frac{1}{2}\left(g_{kn,i} + g_{ni,k} - g_{ik,n}\right) \quad . \tag{7.184}$$

Die Beziehung (7.181) lautet in dieser Schreibweise

$$\Gamma_{nik} + \Gamma_{ink} = g_{ni,k} \quad . \tag{7.185}$$

7. **Die *Christoffel* Symbole geradliniger Koordinaten**: Für geradlinige Systeme sind die Metrikkoeffizienten

$$g_{ij} = const.$$

Die Variationen sind dann also stets

$$g_{ij,n} = 0 \quad .$$

Für geradlinige Koordinaten verschwinden die *Christoffel* Symbole:

$$\text{Koordinaten geradlinig} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{j}_{\ ik} = 0 \quad . \tag{7.186}$$

8. **Transformationsverhalten der *Christoffel* Symbole**

Zur Herleitung werden die folgenden Regeln verwendet: (7.149), (7.151) und (7.178):

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{p}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathbf{q}^k \quad , \quad \mathbf{q}^j{}_{,i} \cdot \mathbf{q}_k = -\Gamma^{j}_{\ ik} \quad .$$

Aus der letzteren Formel wird

$$\Gamma^{j}_{\ ik} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^s}\mathbf{q}^s\right)\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\mathbf{q}_l$$

$$\Gamma^{j}_{\ ik} = -\frac{\partial}{\partial y^m}\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^s}\mathbf{q}^s\right)\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\mathbf{q}_l$$

$$\Gamma^{j}_{\ ik} = -\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^m \partial y^s}\mathbf{q}^s\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\mathbf{q}_l - \frac{\partial x^j}{\partial y^s}\mathbf{q}^s{}_{,m}\cdot\mathbf{q}_l\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^{j}_{\ ik} = \Gamma^{*s}_{\ ml}\frac{\partial x^j}{\partial y^s}\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^m \partial y^s}\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^k} \quad . \tag{7.187}$$

Dies ist die Transformationsregel der *Christoffel* Symbole, wenn die $\Gamma^{j}_{\ ik}$ auf neue Symbole $\Gamma^{*s}_{\ ml}$ transformiert werden sollen. Wären die $\Gamma^{j}_{\ ik}$ ein Tensor, dürfte in diesem Ausdruck das zweite Glied nicht existieren, während das erste Glied die Transformationsregel für Tensoren der dritten Stufe erfüllt.

Damit gilt der folgende

Satz: *Die Christoffel Symbole sind keine Koeffizienten eines Tensors.*

9. **Die Verjüngung der *Christoffel* Symbole**

Für die Ableitung der Determinante $g = \det\left(g_{ij}\right)$ gilt

$$g_{,k} = \frac{\partial g}{\partial x^k} = g\ g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g\, g^{ij}\, g_{ij,k} \quad . \tag{7.188}$$

Aus dem Lemma von *Ricci* in der Form (7.211) auf Seite 279 erhält man durch Überschiebung mit den g^{ij}

$$g^{ij}\, g_{ij,k} = g^{ij}\left(g_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik} + g_{im}\,\Gamma^m{}_{jk}\right) = \Gamma^i{}_{ik} + \Gamma^m{}_{mk} = 2\Gamma^i{}_{ik} \quad ,$$

daher mit Formel (7.188)

$$\Gamma^i{}_{ik} = \frac{1}{2}\, g^{ij}\, g_{ij,k} = \frac{1}{2g}\, g_{,k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{|g|}}{\partial x^k} \quad . \tag{7.189}$$

10. **Produkt aus *Christoffel* Symbolen erster und zweiter Art**

$$\Gamma_{jlk}\,\Gamma^j{}_{nm} = \Gamma^j{}_{lk}\,\Gamma_{jnm} \tag{7.190}$$

BEWEIS: Mit der Definitionsgleichung (7.182) auf Seite 273 wird

$$\Gamma_{jlk}\,\Gamma^j{}_{nm} = g_{ij}\,\Gamma^i{}_{lk}\,\Gamma^j{}_{nm} = \Gamma^i{}_{lk}\,\Gamma_{inm} = \Gamma^j{}_{lk}\,\Gamma_{jnm} \quad . \text{ q.e.d. } \blacktriangleleft$$

11. **Differentiation der *Christoffel* Symbole**

Die *Christoffel* Symbole hängen nur von krummlinigen Koordinaten ab. Ihre Variation nach den krummlinigen Koordinaten kann mit dem Ausdruck (7.184) erhalten werden:

$$\Gamma_{nlk,m} := \frac{\partial\,\Gamma_{nlk}}{\partial\, x^m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^l\,\partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{nl}}{\partial x^k\,\partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^n\,\partial x^m}\right) \tag{7.191}$$

mit der Schreibweise

$$g_{nk,lm} := \frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^l\,\partial x^m} \quad ,$$

wobei offensichtlich

$$g_{nk,lm} = g_{kn,lm} = g_{nk,ml} = g_{kn,ml} \tag{7.192}$$

auch

$$\Gamma_{nlk,m} = \frac{1}{2}\left(g_{nk,lm} + g_{nl,km} - g_{lk,nm}\right) \quad . \tag{7.193}$$

BEISPIEL**: Die *Christoffel* Symbole von Polarkoordinaten**

Die Metrikkoeffizienten der Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
x^1 &= r\cos B\cos A \\
x^2 &= r\cos B\sin A \\
x^3 &= r\sin B \\
y^1 &= r \\
y^2 &= A \\
y^3 &= B
\end{aligned}
$$

wurden im Rahmen eines Beispiels in den Formeln (7.163) – (7.168) berechnet. Für die *Christoffel* Symbole ergeben sich mit diesen Koeffizienten:

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^1\,\partial y^1} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right) = 0 \tag{7.194}$$

$$\Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{13} = \Gamma^1{}_{21} = \Gamma^1{}_{23} = \Gamma^1{}_{31} = \Gamma^1{}_{32} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -r\cos^2 B \quad , \quad \Gamma^1{}_{33} = -r$$

$$\Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2{}_{22} = -\tan B$$

$$\Gamma^2{}_{11} = \Gamma^2{}_{13} = \Gamma^2{}_{31} = \Gamma^2{}_{23} = \Gamma^2{}_{32} = \Gamma^2{}_{33} = 0$$

$$\Gamma^3{}_{31} = \Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3{}_{11} = \Gamma^3{}_{12} = \Gamma^3{}_{21} = \Gamma^3{}_{22} = \Gamma^3{}_{32} = \Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{33}\ 0 \quad . \ \blacktriangleleft$$

7.2.3 Die kovariante Ableitung

Ein Tensor erster Stufe sei in der Form

$$\mathbf{a} = a^i\,\mathbf{p}_i = a^i\left(x^j\right)\mathbf{p}_i \tag{7.195}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten a^i durch die krummlinigen Koordinaten x^j dargestellt werden. Die partielle Ableitung des Vektors **a** nach den x^j lautet

$$\mathbf{a}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\mathbf{p}_i + a^i\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial x^j} = a^i{}_{,j}\,\mathbf{p}_i + a^i\,\mathbf{p}_{i,j} \quad . \tag{7.196}$$

Die $\mathbf{p}_{i,j}$ können nach der Beziehung (7.174) auf Seite 271 durch *Christoffel* Symbole ausgedrückt werden und es wird (nach Umbenennung der Indizes)

$$\mathbf{a}_{,j} = \left(a^i{}_{,j} + a^l\,\Gamma^i{}_{lj}\right)\mathbf{p}_i \quad . \tag{7.197}$$

Hier bezeichnet man den Ausdruck

$$a^i{}_{;j} := a^i{}_{,j} + a^l\,\Gamma^i{}_{lj} \tag{7.198}$$

als *kovariante Ableitung* der kontravarianten Koeffizienten des Vektors $\mathbf{a} = a^i \mathbf{p}_i$ nach den kontravarianten krummlinigen Koordinaten x^j. Damit lautet die Schreibweise der partiellen Ableitung eines Vektors **a** nach den krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{a}_{,j} \;\coloneqq\; a^i{}_{;j}\, \mathbf{p}_i \quad . \tag{7.199}$$

7.2.3.1 Eigenschaften der kovarianten Ableitung

Satz: *Die Koeffizienten $a^i{}_{;j}$ der kovarianten Ableitung sind die Koeffizienten eines Tensors der zweiten Stufe.*

BEWEIS: Es werden die Transformationsregeln (7.150) auf Seite 268 und (7.145) auf Seite 266 verwendet:

$$a^m \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial y^n}\, b^n \quad , \quad \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \;=\; \delta_j{}^k$$

sowie die Transformationsregel (7.194) der *Christoffel* Symbole. Damit wird

$$\begin{aligned}
a^m{}_{;j} \;&=\; a^m{}_{,j} + a^i\, \Gamma^m{}_{ij} \;= \\
&=\; \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^m}{\partial y^r}\, b^r \right) + \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\, b^r\, \Gamma^m{}_{ij} \;= \\
&=\; \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^l\, \partial y^r}\, b^r\, \frac{\partial y^l}{\partial x^j} + \frac{\partial x^m}{\partial y^r}\, \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\, \frac{\partial b^r}{\partial y^l} + \\
&\quad + \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\, b^r\, \Gamma^{*s}{}_{nl}\, \frac{\partial x^m}{\partial y^s}\, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}\, \frac{\partial y^l}{\partial x^j} - \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\, b^r\, \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^n\, \partial y^s}\, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}\, \frac{\partial y^s}{\partial x^j} \;= \\
&=\; \left(b^s{}_{,l} + b^n\, \Gamma^{*s}{}_{nl} \right) \frac{\partial x^m}{\partial y^s}\, \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \quad .
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Transformationsregel für die Koeffizienten eines Tensors der zweiten Stufe:

$$a^m{}_{;j} \;=\; b^s{}_{;l}\, \frac{\partial x^m}{\partial y^s}\, \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \quad . \tag{7.200}$$

q.e.d.◀

7.2.3.2 Kovariante Ableitung der kovarianten Komponenten eines Vektors

Aus der Vektordarstellung mit den kovarianten Komponenten a_i in Bezug auf die krummlinigen Koordinaten x^j

$$\mathbf{a} \;=\; a_i\, \mathbf{p}^i \;=\; a_i\left(x^j\right) \mathbf{p}^i$$

wird mit der Beziehung (7.177)

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\, \mathbf{p}^i + a_i\, \mathbf{p}^i{}_{,j} \;=\; \left(a_{k,j} - a_i\, \Gamma^i{}_{kj} \right) \mathbf{p}^k \quad .$$

Die kovariante Ableitung lautet in diesem Fall

$$a_{k;j} = a_{k,j} - a_i \, \Gamma^i{}_{kj} \quad . \tag{7.201}$$

Damit kann die kovariante Ableitung eines Vektors mit kontravarianter Basis geschrieben werden

$$\mathbf{a}_j = a_{k;j} \, \mathbf{p}^k \quad . \tag{7.202}$$

7.2.3.3 Die kontravariante Ableitung

Die *kontravariante Ableitung* wird mit den Metrikkoeffizienten auf die kovariante Basis zurückgeführt:

$$\begin{aligned} a_i{}^{;j} &= g^{kl} \, a_{i;l} \\ a^{i;j} &= g^{kl} \, a^i{}_{;l} \quad . \end{aligned} \tag{7.203}$$

7.2.3.4 Die kovariante Ableitung von Tensoren höherer Stufe

Die kovariante Ableitung der rein kovarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe lautet (als ein Beispiel für höherstufige Tensoren]:

$$a_{ij;k} = a_{ij,k} - a_{mj} \, \Gamma^m{}_{ik} - a_{in} \, \Gamma^n{}_{jk} \quad . \tag{7.204}$$

BEWEIS: Gegeben sei der Tensor zweiter Stufe bezogen auf die rein kontravariante Basis

$$T = a_{ij} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = a_{ij} \left(x^k \right) \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \quad .$$

Die partielle Ableitung des Tensors nach den krummlinigen Koordinaten x^k ergibt mit den Beziehungen (7.240) auf Seite 285

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x^k} = T_{,k} &= a_{ij,k} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j + a_{ij} \, \mathbf{p}^i{}_{,k} \otimes \mathbf{p}^j + a_{ij} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j{}_{,k} = \\ &= a_{ij,k} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j - a_{ij} \, \Gamma^i{}_{mk} \, \mathbf{p}^m \otimes \mathbf{p}^j - a_{ij} \, \Gamma^j{}_{nk} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^n = \\ &= \left(a_{ij,k} - a_{mj} \, \Gamma^m{}_{ik} - a_{im} \, \Gamma^m{}_{jk} \right) \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j = \\ &= a_{ij;k} \, \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \quad . \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

◀

Analog gelten die Beziehungen

$$a^{ij}{}_{;k} = a^{ij}{}_{,k} + a^{lj} \, \Gamma^i{}_{lk} + a^{im} \, \Gamma^j{}_{mk} \tag{7.205}$$

$$a^i{}_{j;k} = a^i{}_{j,k} + a^l{}_j \, \Gamma^i{}_{lk} - a^i{}_m \, \Gamma^m{}_{jk} \tag{7.206}$$

$$a_i{}^j{}_{;k} \;=\; a_i{}^j{}_{,k} + a_m{}^j\,\Gamma^m{}_{ik} + a_i{}^n\,\Gamma^j{}_{nk} \quad . \tag{7.207}$$

7.2.3.5 Die kovariante Ableitung der Summe zweier Vektoren

Aus

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(a^i + b^i\right)\mathbf{p}_i\right] \;=\; \frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^i + b^i\right)\mathbf{p}_i + \left(a^i + b^i\right)\mathbf{p}_{i,k} = \left[a^i{}_{,k} + b^i{}_{,k} + \left(a^j + b^i\right)\Gamma^i{}_{jk}\right]\mathbf{p}_i$$

wird

$$\left(a^i + b^i\right)_{;k} \;=\; a^i{}_{;k} + b^i{}_{;k} \quad . \tag{7.208}$$

- *Die kovariante Ableitung der Summe zweier Tensoren ist gleich der Summe der kovarianten Ableitung der Tensoren.*

7.2.3.6 Die kovariante Ableitung von Produkten von Tensoren

Es gelten dieselben Regeln wie für die gewöhnliche Ableitung von Produkten.

BEISPIEL:

$$\left(a^i\,b^j\right)_{;k} \;=\; a^i{}_{;k}\,b^j + a^i\,b^j{}_{;k} \quad . \tag{7.209}$$

BEWEIS: Seien $a^i\,b^j =: t^{ij}$ als Koeffizienten eines Tensors 2. Stufe aufgefasst, liefert die Beziehung (7.205)

$$\begin{aligned}\left(a^i\,b^j\right)_{;k} \;&=\; t^{ij}{}_{;k} \;=\; t^{ij}{}_{,k} + t^{lj}\,\Gamma^i{}_{lk} + t^{im}\,\Gamma^j{}_{mk} \;= \\ &=\; a^i{}_{,k}\,b^j + a^i\,b^j{}_{,k} + a^l\,b^j\,\Gamma^i{}_{lk} + a^i\,b^m\,\Gamma^j{}_{mk} \;= \\ &=\; a^i{}_{;k}\,b^j + a^i\,b^j{}_{;k} \quad . \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

◀

7.2.3.7 Das Lemma von Ricci

- *Die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors verschwindet:*

$$g_{ij;k} \;=\; 0 \quad . \tag{7.210}$$

BEWEIS: Nach Formel (7.204) wird

$$g_{ij;k} \;=\; g_{ij,k} - g_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik} - g_{im}\,\Gamma^m{}_{jk} \quad .$$

Wird der Ausdruck (7.162) auf S. 273 eingesetzt

$$g_{ij,k} \;=\; g_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik} + g_{im}\,\Gamma^m{}_{jk} \quad , \tag{7.211}$$

(der bisweilen auch als Alternative des *Ricci* Lemmas bezeichnet wird) ergibt sich das Lemma (7.191). q.e.d. ◀

Auch die kovariante Ableitung des rein kontravarianten Fundamentaltensors verschwindet:

$$g^{ij}{}_{;k} = 0 \quad . \tag{7.212}$$

BEWEIS: Zunächst ist

$$g^{ij}{}_{;k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial\left(\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j\right)}{\partial x^k} = \mathbf{p}^i{}_{,k} \cdot \mathbf{p}^j + \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j{}_{,k}$$

und wegen der Beziehung (7.158)

$$g^{ij}{}_{,k} = -\Gamma^i{}_{lk}\,\mathbf{p}^l \cdot \mathbf{p}^j - \mathbf{p}^i\,\Gamma^j{}_{lk} \cdot \mathbf{p}^l = -g^{lj}\,\Gamma^i{}_{lk} - g^{il}\,\Gamma^j{}_{lk} \quad . \tag{7.213}$$

Nach Formel (7.205) gilt für die kovariante Ableitung

$$g^{ij}{}_{;k} = g^{ij}{}_{,k} + g^{lj}\,\Gamma^i{}_{lk} + g^{il}\,\Gamma^j{}_{lk} \quad ,$$

somit wegen der vorstehenden Beziehung schließlich (7.212). q.e.d. ◀

Wegen $g_i{}^j = \delta_i{}^j$ und $g^i{}_j = \delta^i{}_j$ verschwinden auch die kovarianten Ableitungen der gemischtvarianten Fundamentaltensoren

$$g^i{}_{j;k} = g_i{}^j{}_{;k} = 0 \quad . \tag{7.214}$$

7.2.3.8 Das absolute Differential

Das absolute Differential wird mit $a^i = a^i\left(x^k\right)$ im Hinblick auf die krummlinigen Koordinaten x^k definiert durch

$$Da^i := a^i_{;k}\,dx^k \quad . \tag{7.215}$$

Damit wird

$$Da^i = \left(a^i{}_{,k} + a^j\,\Gamma^i{}_{jk}\right)dx^k = da^i + a^j\,\Gamma^i{}_{jk}\,dx^k$$

mit

$$da^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k}\,dx^k = a^i_{,k}\,dx^k$$

und

$$\frac{Da^i}{dt} = \dot{a}^i + a^j\,\Gamma^i{}_{jk}\,\dot{x}^k \quad . \tag{7.216}$$

Insbesondere gilt für das vollständige Differential des Vektors $\mathbf{a} = a^i\,\mathbf{p}_i$ mit der Beziehung (7.199) auf Seite 277

$$d\mathbf{a} \;=\; \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j}\,dx^j \;=\; \mathbf{a}_{,j}\,dx^j \;=\; a^i_{;j}\,dx^j\,\mathbf{p}_i \;=\; Da^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{7.217}$$

- *Das vollständige Differential eines Vektors hat das absolute Differential des betreffenden Vektors als Koeffizienten.*

7.2.3.9 Der Geschwindigkeitsvektor in krummlinigen Koordinaten

Der Geschwindigkeitsvektor lautet in krummlinigen Koordinaten wegen des vollständigen Differentials (7.194)

$$\dot{\mathbf{a}} \;=\; \frac{Da^i}{dt}\,\mathbf{p}_i \;=\; a^i_{;j}\,\dot{x}^j\,\mathbf{p}_i \tag{7.218}$$

sowie nach Einsetzen der kovarianten Ableitung (7.197)

$$\dot{\mathbf{a}} \;=\; \dot{a}^i\,\mathbf{p}_i + a^j\,\Gamma^i{}_{jk}\,\dot{x}^k\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{7.219}$$

7.2.3.10 Der Gradient einer Skalarfunktion

Es sei $u = u\left(x^i\right)$ eine (skalare) Funktion der krummlinigen Koordinaten x^j. Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial y^j} \;=\; u_{,j} \;=\; u_{;j} \tag{7.220}$$

ist gleich der kovarianten Ableitung von u nach den x^j. Die $u_{,j}$ sind die kovarianten Komponenten eines Tensors der ersten Stufe, der als *Gradient* bezeichnet wird:

$$\operatorname{grad} u \;:=\; u_{,j}\,\mathbf{p}^j \;=\; u_{;j}\,\mathbf{p}^j \quad . \tag{7.221}$$

Die Tensoreigenschaft wird üblicherweise über das Transformationsverhalten nachgewiesen: Durch $x^j = x^j\left(y^k\right)$ sei auf neue krummlinige Koordinaten y^k transformiert. Dann gilt die Transformationsregel für Tensoren der ersten Stufe:

$$u_{,j} \;=\; \frac{\partial u}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial u}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\,u_{,k} \quad .$$

Gelegentlich wird der *Nablavektor* durch das Symbol

$$\nabla \;:=\; \mathbf{p}^i\,\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{7.222}$$

eingeführt. Der Gradient eines skalaren Feldes wird durch (tensorielles) Produkt aus dem Nablavektor mit u gebildet:

$$\operatorname{grad} u \;=\; \nabla u \;=\; \mathbf{p}^i\,\frac{\partial u}{\partial x^j} \;=\; \mathbf{p}^i\,u_{,j} \;=\; \mathbf{p}^j\,u_{;j} \quad . \tag{7.223}$$

In der Literatur[1] findet sich gelegentlich für die Komponenten des Nablavektors die Beziehung

[1] z. B. in A. LICHNEROWICZ [1966], p. 64 ff.

$$\nabla_j \;:=\; \frac{\partial}{\partial x^j} \quad . \tag{7.224}$$

Somit sind folgende Beziehungen äquivalent

$$\nabla_j u \;=\; u_{;j} \quad . \tag{7.225}$$

7.2.3.11 Der Gradient eines Vektorfeldes

In Verallgemeinerung des Gradienten eines skalaren Feldes wird als *Gradient eines Vektorfeldes* das tensorielle Produkt aus Nablavektor und dem Vektorfeld bezeichnet. Sei $\mathbf{a} = a^i \mathbf{p}_i = a^i\left(x^i\right)\mathbf{p}_i$ das Vektorfeld mit den krummlinigen Koordinaten x^j, ist

$$\operatorname{Grad}\mathbf{a} \;:=\; \nabla \otimes \mathbf{a} \quad . \tag{7.226}$$

Hierfür gilt mit den Formeln (7.172) auf Seite 271 und (7.222)

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \mathbf{a} \;&=\; \mathbf{p}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes a^i \mathbf{p}_i \;= \\ &=\; \mathbf{p}^j \otimes \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\mathbf{p}_i + \mathbf{p}^j a^i \otimes \mathbf{p}_{i,j} \;= \\ &=\; \left(a^i_{\;,j} + a^k \Gamma^i_{\;kj}\right)\mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}_i \;=\; a^i_{\;;j}\,\mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}_i \quad . \end{aligned}$$

Der Gradient eines Vektorfeldes ist somit ein Tensor der zweiten Stufe mit der kovarianten Ableitung des Feldes als Koeffizienten:

$$\operatorname{Grad}\mathbf{a} \;:=\; \nabla \otimes \mathbf{a} \;=\; a^i_{\;;j}\,\mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}_i \quad . \tag{7.227}$$

Mit den Koeffizienten ∇_j des Nablavektors ergibt sich somit die äquivalente Schreibweise der kovarianten Differentiation

$$\nabla_j a^i \;=\; a^i_{\;;j} \quad . \tag{7.228}$$

7.2.3.12 Gradient höherstufiger Tensoren

Als Gradient höherstufiger Tensoren wird allgemein das tensorielle Produkt aus Nablavektor und dem betreffenden Tensor bezeichnet. Sei etwa der Tensor zweiter Stufe

$$\mathbf{T} \;=\; a^{ij}\,\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j$$

gegeben, wird mit Formel (7.205) auf Seite 278

$$\nabla \otimes \mathbf{T} \;=\; a^{ij}_{\;;k}\,\mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \quad . \tag{7.229}$$

7.2.3.13 Divergenz eines Vektorfeldes

Als Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{a} = a^i\left(x^j\right)\mathbf{p}_i$ mit den kontravarianten Koeffizienten a^i und abhängig von den krummlinigen Koordinaten x^j wird das verjüngende Produkt aus Nablavektor und dem betreffenden Vektor bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{a} \;&:=\; \nabla\cdot\mathbf{a} \;=\; \mathbf{p}^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,a^i\cdot\mathbf{p}_i \;= \\
&=\; \mathbf{p}^j\,\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{p}_i + \mathbf{p}^j\,a^i\,\mathbf{p}_{i,j} \;= \\
&=\; \mathbf{p}^j\,a^i_{\,,j}\,\mathbf{p}_i + \mathbf{p}^j\,a^k\,\Gamma^i{}_{kj}\,\mathbf{p}_i \;= \\
&=\; a^i_{\,;j}\,\delta^j{}_i \;=\; a^i_{\,;i} \quad .
\end{aligned}$$

Es gilt somit folgende Regel:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \;:=\; \nabla\cdot\mathbf{a} \;=\; a^i_{\,;i} \quad . \tag{7.230}$$

BEISPIEL: In geradlinigen Koordinaten ist $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ und es bleibt

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \;:=\; \sum\frac{\partial a^i}{\partial x^i} \quad , \qquad \text{wenn} \quad g_{ij} \;=\; \text{const.}$$ ◀

Mit dem Ausdruck (7.189) auf Seite 275 kann die Divergenz (7.230) umgeschrieben werden

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \;=\; a^i_{\,;i} \;=\; a^i_{\,,i} + a^k\,\Gamma^i{}_{ki} \;=\; \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{a^k}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k}$$

und es wird

$$\sqrt{|g|}\,\operatorname{div}\mathbf{a} \;=\; \sqrt{|g|}\,a^i_{\,;i} \;=\; \frac{\partial\left(a^i\sqrt{|g|}\right)}{\partial x^i} \;=\; \left(a^i\sqrt{|g|}\right)_{,i} \quad . \tag{7.231}$$

Der Ausdruck

$$a^i\sqrt{|g|} \tag{7.232}$$

wird gelegentlich als *Tensordichte* erster Stufe bezeichnet.

7.2.3.14 Rotation eines Tensorfeldes

Als *Rotation* eines Tensorfeldes wird der schiefsymmetrische Tensor zweiter Stufe mit den Koeffizienten

$$\operatorname{rot}_{ij}\mathbf{a} \;:=\; a_{i;j} - a_{j;i} \;=\; a_{i,j} - a_{j,i} \tag{7.233}$$

bezeichnet.

BEISPIEL: Im dreidimensionalen Raum entsteht die Rotation als äußeres Produkt von Nablavektor und Vektor $\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{p}_i$ mit den kovarianten Koeffizienten a_i und abhängig von den krummlinigen Koordinaten x^i:

$$\nabla \times \mathbf{a} \;=\; \left(\mathbf{p}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \times \left(a_i \mathbf{p}^i\right) \;=\; \left(a_{i,k} - a_l \Gamma^l{}_{ik}\right) \mathbf{p}^k \times \mathbf{p}^i$$

und mit der Beziehung (7.129) auf Seite 262 auch

$$\nabla \times \mathbf{a} \;=\; a_{i;k} \mathbf{p}^k \times \mathbf{p}^i \;=\; a_{i;k} \varepsilon^{ikm} \mathbf{p}_m \quad . \quad \blacktriangleleft \tag{7.234}$$

7.2.3.15 Der Laplace'sche Operator

Der *Laplace'sche Operator*, angewandt auf eine Skalarfunktion $u = u\left(x^i\right)$ der krummlinigen Koordinaten y^j, wird definiert durch

$$\Delta_2 u \;:=\; \operatorname{div} \operatorname{grad} u \quad . \tag{7.235}$$

Mit

$$\operatorname{grad} u \;=\; u_{,i} \mathbf{p}^i$$

wird

$$\operatorname{div}\left(u_{,i} \mathbf{p}^i\right) \;=\; \operatorname{div}\left(\mathrm{g}^{\mathrm{ij}} u_{,i} \mathbf{p}_j\right) \;=\; \left(g^{ij} u_{,i}\right)_{;j} \;=\; g^{ij}{}_{;j} u_{,i} + g^{ij} \left(u_{,i}\right)_{;i} \quad .$$

Da nach dem Lemma von *Ricci* in der Form (7.212) auf Seite 280 $g^{ij}{}_{;j} = 0$, bleibt

$$\Delta_2 u \;=\; g^{ij} \left(u_{,ij} - u_{,k} \Gamma^k{}_{ij}\right) \tag{7.236}$$

und wegen Formel (7.230) auch

$$\Delta_2 u \;=\; \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} u_{,j}\right)_{,i} \quad . \tag{7.237}$$

BEISPIEL: Im dreidimensionalen euklidischen Raum ($g_{ij} = \delta_{ij}$) ist

$$\Delta_2 u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\left(dx^1\right)^2} + \frac{\partial^2 u}{\left(dx^2\right)^2} + \frac{\partial^2 u}{\left(dx^3\right)^2} \qquad \left(n = 3,\, g_{ij} = \delta_{ij}\right) \quad . \blacktriangleleft \tag{7.238}$$

7.2.4 Der *Riemann*sche Tensor

Die kovariante Ableitung ist die vollständige Differentiation, wie sie im Fall krummliniger Koordinaten notwendig wird. So ergibt sich auch die Notwendigkeit zu höheren kovarianten Ableitungen. Sei ein Vektorfeld mit kovarianten Koeffizienten und kontravarianter Basis

$$\mathbf{a} = a_i \left(x^k\right) \mathbf{p}^i \tag{7.239}$$

abhängig von den kontravarianten krummlinigen Koordinaten x^k gegeben, so wird wie im Fall der Formel (7.199) auf Seite 277

$$\mathbf{a}_{,k} \;=\; a_{i;k}\,\mathbf{p}^i \;=\; a_{i,k}\,\mathbf{p}^i + a_i\,\mathbf{p}^i{}_{,k} \quad . \tag{7.240}$$

Die zweite Ableitung wird mit

$$\mathbf{a}_{,km} \;:=\; \mathbf{a}_{,k,m} \;=\; \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{a}_{,k}\right) \;=:\; a_{i;k;m}\,\mathbf{p}^i \;=:\; a_{i;km}\,\mathbf{p}^i \tag{7.241}$$

bezeichnet, wobei $a_{i;km}$ die *zweite kovariante Ableitung* ist. Die zweite Ableitung der kontravarianten Basis ergibt sich mit Formel (7.177) auf Seite 272 zu

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^i{}_{,km} \;:=\; \mathbf{p}^i{}_{,k,m} \;&=\; \frac{\partial \mathbf{p}^i{}_{,k}}{\partial x^m} \;=\; -\frac{\partial\left(\Gamma^i{}_{jk}\,\mathbf{p}^j\right)}{\partial x^m} \;= \\ &=\; -\frac{\partial\,\Gamma^i{}_{jk}}{\partial\,x^m}\,\mathbf{p}^j - \Gamma^i{}_{jk}\,\mathbf{p}^j{}_{,m} \;=\; \Gamma^i{}_{jk,m}\,\mathbf{p}^j + \Gamma^i{}_{jk}\,\Gamma^j{}_{lm}\,\mathbf{p}^l \quad ,\end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde

$$\Gamma^i{}_{lk,m} \;:=\; \frac{\partial\,\Gamma^i{}_{lk}}{\partial\,x^m} \quad , \tag{7.242}$$

somit

$$\mathbf{p}^i{}_{,km} \;=\; -\left(\Gamma^i{}_{lk,m} - \Gamma^i{}_{jk}\,\Gamma^j{}_{lm}\right)\mathbf{p}^l \quad . \tag{7.243}$$

Die zweite kovariante Ableitung der kovarianten Koeffizienten des Vektorfeldes $\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{p}^i$ ergibt sich durch Differentiation des Ausdrucks (7.240) nach der krummlinigen Koordinate x^m:

$$\mathbf{a}_{,km} \;=\; a_{i,km}\,\mathbf{p}^i + a_{i,k}\,\mathbf{p}^i{}_{,m} + a_{i,m}\,\mathbf{p}^i{}_{,k} + a_i\,\mathbf{p}^i{}_{,km} \quad . \tag{7.244}$$

Hier ist offenbar

$$a_{i,km} \;=\; \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^k\,\partial x^m} \;=\; a_{i,mk} \tag{7.245}$$

und mit Formel (7.177) auf Seite 272 auch

$$\mathbf{a}_{,km} \;=\; a_{i,km}\,\mathbf{p}^i - a_{l,k}\,\Gamma^l{}_{im}\,\mathbf{p}^i - a_{l,m}\,\Gamma^l{}_{ik}\,\mathbf{p}^i + a_i\,\mathbf{p}^i{}_{,km} \quad . \tag{7.246}$$

Im Allgemeinen ist aber die zweite Ableitung eines Vektors (nach einem Parameter) nicht vertauschbar, d. h. es ist

$$\mathbf{a}_{,km} \;\neq\; \mathbf{a}_{,mk} \quad ,$$

und es wird

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{,km} - \mathbf{a}_{,mk} \;&=\; \left(a_{i;km} - a_{i;mk}\right)\mathbf{p}^i \;= \\ &=\; \left(a_{i,km} - a_{l,k}\,\Gamma^l{}_{im} - a_{l,m}\,\Gamma^l{}_{ik} - \right. \\ &\quad \left. - a_{i,mk} + a_{l,m}\,\Gamma^l{}_{ik} + a_{l,k}\,\Gamma^l{}_{im}\right)\mathbf{p}^i + \\ &\quad + a_i\left(\mathbf{p}^i{}_{,km} - \mathbf{p}^i{}_{,mk}\right) \quad .\end{aligned}$$

Wegen Beziehung (7.245) bleibt nur der letzte Term auf der rechten Seite dieses Ausdrucks, der mit der Beziehung (7.243) formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{,km} - \mathbf{a}_{,mk} &= a_i \left(\mathbf{p}^i{}_{,km} - \mathbf{p}^i{}_{,mk} \right) = \\ &= a_i \left[-\Gamma^i{}_{lk,m} + \Gamma^i{}_{jk}\, \Gamma^j{}_{lm} + \Gamma^i{}_{lm,k} - \Gamma^i{}_{jm}\, \Gamma^j{}_{lk} \right] \mathbf{p}^l \quad . \end{aligned} \tag{7.247}$$

Der Ausdruck in der Klammer hängt nur von den *Christoffel*symbolen und ihren Ableitungen, d. h. nur vom Metriktensor ab. Dieser Ausdruck wird üblicherweise bezeichnet durch

$$R^i{}_{lkm} \coloneqq -\Gamma^i{}_{lk,m} + \Gamma^i{}_{jk}\, \Gamma^j{}_{lm} + \Gamma^i{}_{lm,k} - \Gamma^i{}_{jm}\, \Gamma^j{}_{lk} \quad . \tag{7.248}$$

Somit gilt die Schreibweise

$$\mathbf{a}_{,km} - \mathbf{a}_{,mk} = a_i\, R^i{}_{lkm}\, \mathbf{p}^l \quad . \tag{7.249}$$

Da auf der linken Seite der Gleichung (7.247) ein Tensor steht und rechts die a_i die Koeffizienten eines Tensors sind, muss nach der Quotientenregel (5) in Abschnitt 7.1.6 auch die $R^i{}_{lmk}$ die Komponenten eines Tensors sein. Dieser Tensor wird der *Riemannsche Tensor*, bisweilen auch der *Riemannsche Krümmungstensor* oder auch der *Riemann-Christoffelsche Tensor* oder einfach als der Krümmungstensor im *Riemann*schen Raum bezeichnet.

7.2.4.1 Kovariante Form des Riemann Tensors

Die rein kovariante Form des *Riemann*schen Tensors wird durch Überschiebung mit dem Fundamentaltensor g_{ni} erhalten. Dazu wird zunächst die Beziehung (7.182) auf Seite 273

$$\Gamma_{nik} \coloneqq g_{nj}\, \Gamma^j{}_{ik}$$

nach der krummlinigen Koordinate x^m differenziert:

$$\Gamma_{nlk,m} = \frac{\partial \Gamma_{nlk}}{\partial x^m} = g_{ni,m}\, \Gamma^i{}_{lk} + g_{ni}\, \Gamma^i{}_{lk,m}$$

und mit dem Lemma von *Ricci* in der Form (7.222) auf Seite 281

$$g_{ni,m} = \Gamma_{inm} + \Gamma_{nim}$$

umgeformt zu

$$g_{ni}\, \Gamma^i{}_{lk,n} = g_{ni}\, \frac{\partial \Gamma^i{}_{lk}}{\partial x^m} = \Gamma_{nlk,m} - \Gamma_{inm}\, \Gamma^i{}_{lk} - \Gamma_{nim}\, \Gamma^i{}_{lk} \quad . \tag{7.250}$$

Der rein kovariante *Riemann*sche Tensor folgt daher aus der Beziehung (7.248) zu

$$
\begin{aligned}
R_{nlkm} &= g_{ni} R^{i}{}_{lkm} = \\
&= -g_{ni} \Gamma^{i}{}_{lk,m} + g_{ni} \Gamma^{i}{}_{lm,k} + g_{ni} \Gamma^{i}{}_{jk} \Gamma^{j}{}_{lm} - g_{ni} \Gamma^{i}{}_{jm} \Gamma^{j}{}_{lk} = \\
&= -\Gamma_{nlk,m} + \Gamma_{inm} \Gamma^{i}{}_{lk} + \Gamma_{nim} \Gamma^{i}{}_{lk} + \\
&\quad + \Gamma_{nlm,k} - \Gamma_{ink} \Gamma^{i}{}_{lm} - \Gamma_{nik} \Gamma^{i}{}_{lm} + \\
&\quad + \Gamma_{njk} \Gamma^{j}{}_{lm} - \Gamma_{njm} \Gamma^{j}{}_{lk} \quad .
\end{aligned}
$$

Somit bleibt

$$
R_{nlkm} = -\Gamma_{nlk,m} + \Gamma_{nlm,k} + \Gamma_{jnm} \Gamma^{j}{}_{lk} - \Gamma_{jnk} \Gamma^{j}{}_{lm} \quad . \tag{7.251}
$$

Wird hier der Ausdruck für die Variation der *Christoffel*symbole (7.191) auf Seite 275 oder (7.193) auf Seite 275 eingesetzt, kann der *Riemann*sche Tensor auch in der Form

$$
\begin{aligned}
R_{nlkm} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^n \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{nm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^n \partial x^k} \right) + \\
&\quad + \Gamma_{jnm} \Gamma^{j}{}_{lk} - \Gamma_{jnk} \Gamma^{j}{}_{lm}
\end{aligned} \tag{7.252}
$$

geschrieben werden.

Eigenschaften des Riemannschen Tensors:

7.2.4.2 Symmetrie- und Antisymmetrieeigenschaften

$$
R_{nlkm} = -R_{lnkm} = -R_{nlkm} = R_{kmnl} \quad . \tag{7.253}
$$

- *Der Riemannsche Tensor ist in den Indizes km und nl schiefsymmetrisch, symmetrisch in den Paaren (km) und (nl).*

BEWEIS: Aus Beziehung (7.248) und der Symmetriebeziehung (7.190) auf Seite 275 der *Christoffel*symbole folgt:

$$
\begin{aligned}
R_{\ln km} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^n \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^n \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{nm}}{\partial x^l \partial x^k} \right) + \\
&\quad + \Gamma^{j}{}_{lm} \Gamma_{jnk} - \Gamma^{j}{}_{lk} \Gamma_{jnm} = -R_{nlkm} \quad .
\end{aligned}
$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
R_{nlkm} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{nm}}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^n \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^n \partial x^m} \right) + \\
&\quad + \Gamma_{jnk} \Gamma^{j}{}_{lm} - \Gamma_{jnm} \Gamma^{j}{}_{lk} = -R_{nlkm}
\end{aligned}
$$

sowie wegen der Symmetrieeigenschaften der Variationen der Metrikkoeffizienten (7.192) und (7.193) auf Seite 275

$$R_{kmnl} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^m \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{nl}}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^k \partial x^n} \right) + + \Gamma_{jkl}\,\Gamma^{j}{}_{mn} - \Gamma_{jkn}\,\Gamma^{j}{}_{ml} = R_{nlkm} \quad . \qquad \blacktriangleleft$$

Für den gemischtvarianten *Riemann*schen Tensor gelten folgende Antisymmetrie- und Symmetrieeigenschaften:

$$R^{i}{}_{lkm} = -R_{l}{}^{i}{}_{km} = -R^{i}{}_{lmk} = R_{km}{}^{i}{}_{l} \quad . \tag{7.254}$$

BEWEIS:

$$R^{i}{}_{lkm} = g^{ni} R_{nlkm} = -g^{ni} R_{lnkm} = -R_{l}{}^{i}{}_{km} \quad ,$$
$$R^{i}{}_{lkm} = g^{ni} R_{nlkm} = -g^{ni} R_{nlmk} = -R^{i}{}_{lmk} \quad ,$$
$$R^{i}{}_{lkm} = g^{ni} R_{nlkm} = g^{ni} R_{kmnl} = R_{km}{}^{i}{}_{l} \quad . \quad \text{q.e.d.} \qquad \blacktriangleleft$$

7.2.4.3 Erste Bianchi Identität

$$R_{\ln km} + R_{lkmn} + R_{lmnk} = 0 \quad . \tag{7.255}$$

Diese Beziehung, die durch zyklische Vertauschung der Indizes *nkm* entsteht, kann unmittelbar durch Anwendung der Beziehung (7.252) hergeleitet werden. Überschiebung dieses Ausdrucks mit g^{il} führt auf den Ausdruck

$$R^{i}{}_{nkm} + R^{i}{}_{kmn} + R^{i}{}_{mnk} = 0 \quad , \tag{7.256}$$

der gelegentlich auch als *erste Bianchi Identität* bezeichnet wird.

7.2.4.4 Anzahl der Komponenten des Riemannschen Tensors

Der *Riemann*sche Tensor hat

$$N = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12} \tag{7.257}$$

unabhängige Koeffizienten[1]. Insbesondere verschwinden alle Koeffizienten mit vier gleichen Indizes:

$$R_{llll} = 0 \quad . \tag{7.258}$$

Alle Koeffizienten, deren erste beide Indizes gleich sind, verschwinden. Mit den Beziehungen (7.253) ist

[1] Beweis etwa in BUCERIUS UND SCHNEIDER [1967], p. 223 ff.

$$R_{llkm} = -R_{llkm} = 0 \quad , \tag{7.259}$$

ebenso verschwinden die Koeffizienten, deren letzte beide Indizes gleich sind:

$$R_{nlkk} = -R_{nlkk} = 0 \quad . \tag{7.260}$$

Demnach haben eindimensionale Räume (Kurven, n = 1) keinen Riemannschen Tensor, bei zweidimensionalen Räumen (Flächen, n = 2) hat der Riemannsche Tensor genau einen unabhängigen Koeffizienten, in dreidimensionalen Räumen (n = 3) genau 6, in vierdimensionalen Räumen (*n* = 4) genau 20 unabhängige Koeffizienten.

7.2.4.5 Der Ricci Tensor

Verjüngung des *Riemann*schen Tensors nach den ersten beiden Indizes führt zum Verschwinden dieser Koeffizienten: Mit Formel (7.254) gilt notwendig

$$R^{i}{}_{ikm} = -R_{i}{}^{i}{}_{km} = g^{ni} R_{nikm} = R_{n}{}^{n}{}_{km} = R_{i}{}^{i}{}_{km} = 0 \quad .$$

Wegen der schiefen Symmetrie in den beiden letzten Indizes

$$R^{i}{}_{nki} = -R^{i}{}_{nik}$$

gibt es für jeden Koeffizienten $R^{i}{}_{lkm}$ des *Riemann*schen Tensors im Wesentlichen nur eine Verjüngung, die ohne Einschränkung mit $R^{i}{}_{lik}$ bezeichnet sei. Der verjüngte *Riemann* Tensor wird *Ricci Tensor* genannt:

$$R_{lk} := R^{i}{}_{lik} = g^{ni} R_{nlik} = \delta^{i}{}_{m} R^{m}{}_{lik} \quad . \tag{7.261}$$

Der *Ricci* Tensor lautet mit Formel (7.248) auf Seite 286

$$R_{lk} = -\Gamma^{i}{}_{li,k} + \Gamma^{i}{}_{lk,i} - \Gamma^{i}{}_{jk}\,\Gamma^{j}{}_{li} + \Gamma^{i}{}_{ji}\,\Gamma^{j}{}_{lk} \tag{7.262}$$

oder mit den Ausdrücken (7.231) auf Seite 283 auch

$$R_{lk} = \Gamma^{i}{}_{ik,i} - \frac{\partial^2 \ln\sqrt{|g|}}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma^{i}{}_{jk}\,\Gamma^{j}{}_{li} + \Gamma^{i}{}_{lk}\,\frac{\partial \ln\sqrt{|g|}}{\partial x^j} \quad . \tag{7.263}$$

Der *Ricci* Tensor ist symmetrisch, denn

$$R_{lk} = R^{i}{}_{lik} = g^{nm} R_{nlmk} = g^{mn} R_{mknl} = R_{kl} \quad . \tag{7.264}$$

Der negative Ricci Tensor wird nach Verjüngung des Riemann Tensors nach den beiden letzten Indizes erhalten:

$$g^{ni} R_{nlki} = -g^{ni} R_{nlik} = -R_{lk} \quad . \tag{7.265}$$

7.2.4.6 Der Krümmungsskalar

Der Krümmungsskalar wird aus dem *Ricci* Tensor durch Verjüngung mit dem Metriktensor erhalten

$$R := g^{lk} R_{lk} = g^{lk} g^{ni} R_{nlki} = R_{l}{}^{l} = R^{l}{}_{l} \quad . \tag{7.266}$$

7.2.4.7 Die zweite Bianchi Identität

Für die kovariante Ableitung der Koeffizienten des *Riemann* Tensors gilt die Beziehung

$$R^{i}{}_{lkm;\,j} + R^{i}{}_{ljk;m} + R^{i}{}_{lmj;k} \;=\; 0 \quad . \tag{7.267}$$

BEWEIS: Für die kovariante Ableitung des gemischtvarianten vierstufigen *Riemann* Tensors liefert die Beziehung (7.206) auf Seite 278

$$\begin{aligned} R^{i}{}_{lkm;\,j} \;=\;& R^{i}{}_{lkm,\,j} + R^{p}{}_{lkm}\,\Gamma^{i}{}_{pj} - R^{i}{}_{pkm}\,\Gamma^{p}{}_{lj} - \\ & - R^{i}{}_{lpm}\,\Gamma^{p}{}_{kj} - R^{i}{}_{lkp}\,\Gamma^{p}{}_{mj} \quad . \end{aligned} \tag{7.268}$$

Aus der Definitionsgleichung (7.248) folgt durch partielle Differentiation nach den kontravarianten krummlinigen Koordinaten x^{j}

$$\begin{aligned} R^{i}{}_{lkm,\,j} \;=\; \frac{\partial R^{i}{}_{lkm}}{\partial x^{j}} \;=\;& -\Gamma^{i}{}_{lk,mj} + \Gamma^{i}{}_{lm,kj} + \\ & + \Gamma^{i}{}_{pk,\,j}\,\Gamma^{p}{}_{lm} + \Gamma^{i}{}_{pk}\,\Gamma^{p}{}_{lm,\,j} - \Gamma^{i}{}_{pm,\,j}\,\Gamma^{p}{}_{lk} - \Gamma^{i}{}_{pm}\,\Gamma^{p}{}_{lk,\,j} \quad . \end{aligned} \tag{7.269}$$

Wird diese Beziehung sowie die $R^{p}{}_{lkm}$ aus Formel (7.248) in Formel (7.268) eingesetzt und werden anschließend die letzten drei Indizes zyklisch vertauscht, ergibt sich durch Addition der drei entstehenden Ausdrücke in elementarer Weise die Beziehung (7.267), wozu nur noch die Symmetrie in den beiden unteren Indizes der (zweiten) *Christoffel*symbole $\Gamma^{i}{}_{jk} = \Gamma^{i}{}_{kj}$ beachtet werden muss. q.e.d. ◀

7.2.4.8 Der Einstein Tensor

Aus der (zweiten) *Bianchi* Identität (7.267) folgt durch Verjüngung mit $i = m$

$$R^{i}{}_{lki;\,j} + R^{i}{}_{ljk;i} + R^{i}{}_{lij;k} \;=\; 0 \quad .$$

Da nach Definition (7.261) für den *Ricci* Tensor gilt

$$R_{lk} \;=\; R^{i}{}_{lik} \quad , \quad R_{lj} \;=\; R^{i}{}_{lij} \quad ,$$

wird

$$-R_{lk;\,j} + R_{lj;k} + R^{i}{}_{ljk;i} \;=\; 0 \quad .$$

Da nach dem Lemma von *Ricci* (7.210) – (7.214) auf Seite 280 die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors verschwindet, ist

$$\left(g^{nl}\,R_{lk}\right)_{;\,j} \;=\; g^{nl}{}_{;\,j}\,R_{lk} + g^{nl}\,R_{lk;\,j} \;=\; g^{nl}\,R_{lk;\,j} \quad ,$$

somit folgt

$$-g^{nl}\,R_{lk;\,j} + g^{nl}\,R_{lj;k} + g^{nl}\,R^{i}{}_{ljk;i} \;=\; 0$$

und

$$-R^{n}{}_{k;\,j} - R^{n}{}_{j;k} + R^{in}{}_{jk;i} \;=\; 0 \quad .$$

Weitere Verjüngung mit $n = k$ gibt

$$-R^{k}{}_{k;j} + R^{k}{}_{j;k} + R^{ik}{}_{jk;i} = 0 \quad .$$

Hier kann mit Formel (7.266) der Krümmungsskalar

$$R = R^{k}{}_{k}$$

eingesetzt werden. Ferner ist mit den Symmetrieregeln (7.254) des *Riemann* Tensors

$$R^{ik}{}_{jk;i} = R^{ki}{}_{ji;k} = R^{ik}{}_{ij;k} = g^{kn} R^{i}{}_{nij;k} = g^{kn} R_{nj;k} = R^{k}{}_{j;k} \quad .$$

Somit bleibt

$$-R_{;j} + 2R^{k}{}_{j;k} = 0$$

und wegen

$$g_{j}{}^{k} = \delta_{j}{}^{k}$$

auch

$$\left(R^{k}{}_{j} - \frac{1}{2} g_{j}{}^{k} R \right)_{;k} = 0 \quad . \tag{7.270}$$

Der Ausdruck in der Klammer wird als *Einstein Tensor* bezeichnet:

$$G^{k}{}_{j} := R^{k}{}_{j} - \frac{1}{2} g_{j}{}^{k} R \quad . \tag{7.271}$$

Es gilt somit der

Satz: Die kovariante Ableitung des Einstein Tensors verschwindet.

$$G^{k}{}_{j;k} = 0 \quad . \tag{7.272}$$

7.3 Flächentheorie

Flächen sind im Allgemeinen nichteuklidische Räume. Sie können jedoch in euklidische Räume eingebettet sein. Je zwei beliebigen Punkten auf einer Fläche kann ein Vektor zugeordnet werden, der im einbettenden Raum aber im Allgemeinen nicht auf der Fläche liegt. Zur Beschreibung der Geometrie einer Fläche und damit von Bewegungen auf der Fläche können daher nur krummlinige Koordinaten verwendet werden. Die krummlinigen Koordinaten auf einer Fläche werden nach dem Schöpfer der modernen Flächentheorie als *Gaußsche Koordinaten* (*Gauß*sche Flächenkoordinaten) bezeichnet.

Bei der Untersuchung der Flächen wird das vornehmliche Ziel sein, eine Metrik auf den Flächen zu bestimmen, die Eigenschaften der Geometrie auf Flächen zu beschreiben, sowie die zugeordneten Tangentialräume kennen zu lernen.

7.3.1 Beschreibung einer Fläche

Wenn – wie in der Flächentheorie üblich – angenommen wird, dass der einbettende Raum euklidisch ist, kann eine Fläche als ein Vektorfeld

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^j\right) \qquad , \quad (j=1,2) \tag{7.273}$$

beschrieben werden. Hier liegen die Vektoren $\mathbf{r}$ im einbettenden Raum und die Parameter u^j sind krummlinige Koordinaten („*Gauß*sche Koordinaten"), die auf der Fläche definiert sind. Durch Variation der u^j sollen alle Punkte auf der Fläche beschrieben werden können.

7.3.2 Flächenvektoren, Flächentensoren

Vektoren $\mathbf{r}\left(u^j\right)$, die nur mit den krummlinigen Flächenkoordinaten u^j variieren, werden als Flächenvektoren bezeichnet, wenn sie bei Bezug auf die *Gauß*schen Flächenkoordinaten die Transformationsregeln von Vektoren erfüllen. In gleicher Weise sind Flächentensoren solche Tensoren $\mathbf{T}\left(u^j\right)$, die nur von den u^j abhängen und die Transformationsregeln im Hinblick auf die *Gauß*schen Koordinaten erfüllen. Werden neue krummlinige Koordinaten υ^k durch

$$u^j = u^j\left(\upsilon^k\right) \tag{7.274}$$

eingeführt, gilt für das Vektorfeld $\mathbf{r}\left(\upsilon^k\right)$ wegen des Differentials

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,j}\, du^j = \mathbf{r}_{,k} \frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} du^j = \mathbf{r}_{,k}\, d\upsilon^k \tag{7.275}$$

die Transformationsregel

$$\mathbf{r}_{,j} = \mathbf{r}_{,k} \frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} \tag{7.276}$$

und analog

$$\mathbf{r}_{,k} = \mathbf{r}_{,j} \frac{\partial u^j}{\partial \upsilon^k} \quad . \tag{7.277}$$

Die Basisvektoren $\mathbf{r}_{,j}$ bzw. $\mathbf{r}_{,k}$ sind also kovariante Flächenvektoren, somit die kovariante, ortsabhängige Basis auf der Fläche.

Voraussetzung für die Transformation muss sein, dass die u^j hinreichend oft nach den υ^k und umgekehrt die υ^k hinreichend oft nach den u^j differenzierbar sind. Die Flächentensoren genügen in Bezug auf die *Gauß*schen Koordinaten der Fläche den üblichen Tensorregeln. Dies wird im folgenden Abschnitt kurz untersucht.

7.3.3 Die Tangentialebene

In einem Flächenpunkt $\mathbf{r}\left(u^j\right)$ wird die Tangentialebene durch die Basisvektoren

$$\mathbf{q}_j := \mathbf{r}_{,j} \tag{7.278}$$

aufgespannt. Die Tangentialebene hat daher den Normalenvektor

$$\mathbf{q}_3 := \frac{\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2|} = \frac{\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}}{|\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}|} \quad , \quad \mathbf{q}_3{}^2 = 1 \quad , \tag{7.279}$$

wenn als dritte Koordinate u^3 in Richtung der Normalen gezählt wird. Die drei Koordinaten u^1, u^2, u^3 sind daher Koordinaten des einbettenden Raumes.

Offenkundig ist aber der Normalenvektor $\mathbf{q}_3$ nur von den krummlinigen Koordinaten in der Fläche abhängig:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_3\left(u^j\right) \quad , \; (j = 1,2) \tag{7.280}$$

und es gilt daher die Beziehung

$$\mathbf{q}_{j,3} = 0 \quad , \qquad (j = 1,2) \quad , \tag{7.281}$$

wegen $\mathbf{q}_3{}^2 = 1$ auch

$$\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_{3,j} = 0 \qquad , \; (j = 1,2) \quad , \tag{7.282}$$

mit $\mathbf{q}_3 := \frac{\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2|}$ auch

$$\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \qquad , \quad (j = 1,2) \quad . \tag{7.283}$$

Für einen beliebigen Ort **x** in der Tangentialebene gilt dann auch die Beziehung

$$\left[\mathbf{x} - \mathbf{r}\left(u^j\right)\right] \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \qquad , \quad (j = 1,2) \quad . \tag{7.284}$$

Falls $\mathbf{q}_3 = 0$, also $\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = 0$ oder $\mathbf{r}_{,1} = 0$ oder $\mathbf{r}_{,2} = 0$, gibt es keine Tangentialebene.

Im Fall $\mathbf{r}_{,1} = \mathbf{r}_{,2} = 0$ wird der betreffende Flächenpunkt als Kegelpunkt bezeichnet.

7.3.4 Der Metriktensor auf Flächen

Es sei $\mathbf{R} = \mathbf{R}\left(u^1, u^2, u^3\right)$ der Ortsvektor eines Punktes im einbettenden Raum über der Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^1, u^2\right)$ und es sei

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{q}_3 \quad , \tag{7.285}$$

wobei $\mathbf{q}_3$ der Normalenvektor in **r** an die Fläche $\mathbf{r}\left(u^j\right)$ sei. Der einbettende Raum hat die Basis

$$\mathbf{g}_j := \mathbf{R}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^j} \qquad , \; (j = 1,2,3) \quad . \tag{7.286}$$

Differentiation gibt

$$\mathbf{R}_{,j} = \mathbf{r}_{,j} + u^3 \mathbf{q}_{3,j} \qquad , \quad (j = 1,2) \quad , \tag{7.287}$$

wobei wegen $\mathbf{q}_{j,3} = 0$ nach Formel (7.281) auch

$$\mathbf{R}_{,3} = \mathbf{r}_{,3} \tag{7.288}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j &= \mathbf{q}_j + u^3\, \mathbf{q}_{3,j} \qquad (j=1,2) \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{q}_3 \end{aligned} \tag{7.289}$$

gilt. Da der einbettende Raum euklidisch angenommen wurde, hat er den Metriktensor mit den Komponenten

$$g_{ij} := \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad . \tag{7.290}$$

Wird für die Flächenvektoren

$$q_{ij} := \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \tag{7.291}$$

gesetzt, ergibt sich aus Formel (7.286) zunächst

$$g_{ij} = q_{ij} + u^3\, \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,j} + u^3\, \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_{3,i} + \left(u^3\right)^2 \mathbf{q}_{3,i} \cdot \mathbf{q}_{3,j} \qquad (i,j=1,2) \tag{7.292}$$

und mit den Ausdrücken (7.282), (7.283) und (7.289) auch

$$g_{23} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_3 + u^3\, \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_{3,j} = 0 \quad (i=1,2) \tag{7.293}$$

$$g_{33} = 1 \quad . \tag{7.294}$$

Mit den Beziehungen (7.279) wird insbesondere auch

$$q_{j3} = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \quad ; \quad q_{33} = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3 = 1 \quad . \tag{7.295}$$

Es gilt somit der Satz:

- *Die q_{ij} sind die Komponenten eines Flächentensors. Dieser wird als Metriktensor der Fläche bezeichnet.*

BEWEIS: Die *Gauß*schen Parameter u^j werden auf neue *Gauß*sche Parameter υ^k transformiert, die jeweils für j=1,2 und k=1,2 in der Fläche liegen sollen. Die transformierte Basis lautet mit Beziehung (7.276)

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{p}_n \frac{\partial \upsilon^n}{\partial u^j}$$

und somit

$$q_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m \frac{\partial \upsilon^n}{\partial u^i} \frac{\partial \upsilon^m}{\partial u^j} = p_{nm} \frac{\partial \upsilon^n}{\partial u^i} \frac{\partial \upsilon^m}{\partial u^j} \quad . \tag{7.296}$$

Die q_{ij} erfüllen also für die *Gauß*schen Koordinaten das Transformationsgesetz des Flächentensors der 2. Stufe. q.e.d. ◀

Sei *t* der Parameter einer Kurve $u^i(t)$ auf der Fläche $\mathbf{r}\left(u^1, u^2\right)$. Die Kurve hat die Bogenlänge *ds* mit

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\, du^i\, du^j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j\, du^i\, du^j = q_{ij}\, \dot{u}^i \dot{u}^j (dt)^2 \quad ,$$

somit

$$ds = \sqrt{q_{ij}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j}\, dt \qquad (i,j=1,2) \quad . \tag{7.297}$$

Dieser Ausdruck wird als die *erste Grundform der Flächentheorie* mit den *Fundamentalgrößen 1. Ordnung*[1] $q_{11}, q_{12} = q_{21}, q_{22}$.

Wie in Formel (7.11) auf Seite 233 können die den kovarianten Komponenten q_{ij} zugeordneten Komponenten des Metriktensors gebildet werden aus

$$q_{ij}\, q^{jk} \coloneqq \delta_i^{\ k} \tag{7.298}$$

und entsprechend die kovariante Basis

$$\mathbf{q}^i \coloneqq q^{ik}\, \mathbf{q}_k \quad . \tag{7.299}$$

Somit gelten auch die Beziehungen

$$\mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}_j = q^{ik}\, \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}_j = q^{ik}\, q_{kj} = \delta^i_{\ j} \quad . \tag{7.300}$$

Insbesondere ist mit Formel (7.295) $q_{33} = 1$ auch $q^{33} = 1$. Der kontravariante Normalenvektor ist dem kovarianten Normalenvektor gleich:

$$\mathbf{q}^3 = \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.301}$$

Beliebige Vektoren

$$\mathbf{a} = a^i\, \mathbf{q}_i = a_j\, \mathbf{q}^j \qquad (i = 1,2) \tag{7.302}$$

liegen vollständig in der von der Basis $\mathbf{q}_i$ bzw. $\mathbf{q}^j$ aufgespannten Tangentialebene an die gegebene Fläche. Sie sind Flächenvektoren, denn aus

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}\left(u^1, u^2\right) = a^i\, \mathbf{q}_i = a^i\, \mathbf{p}_k\, \upsilon^k_{\ ,i} = b^k\, \mathbf{p}_k$$

folgt für die Komponenten dieses Vektors

$$b^k = a^i\, \upsilon^k_{\ ,i} = a^i\, \frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^i} \quad , \quad i,k = 1,2 \tag{7.303}$$

und umgekehrt

$$a^i = b^k\, u^i_{\ ,k} = b^k\, \frac{\partial u^i}{\partial \upsilon^k} \quad , \quad i,k = 1,2 \quad . \tag{7.304}$$

Mit

$$\mathbf{a} = a^i\, \mathbf{q}_i = a_k\, \mathbf{q}^k$$

folgt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^j = a^i\, \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}^j = a^i\, \delta_i^{\ j} = a^j = a_k\, \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{q}^j = a_k\, q^{kj} \quad . \tag{7.305}$$

Dies bestätigt die Regel:

- *Die Indizes der Komponenten von Flächentensoren werden mit den Koeffizienten des Metriktensors der Fläche herauf- bzw. heruntergezogen.*

[1] In der Differentialgeometrie werden die Fundamentalgrößen der Fläche häufig noch mit den Buchstaben $E = q_{11}$, $F = q_{12} = q_{21}$, $G = q_{22}$ bezeichnet.

7.3.5 Das Flächenelement

Das Flächenelement wird definiert durch

$$dF := \left|\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_2\right| du^1\, du^2 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{q}_j = \mathbf{r}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}$$

oder

$$dF = \sqrt{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\cdot(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)}\; du^1\, du^2$$

und

$$dF = \sqrt{q_{11}\, q_{22} - q_{12}^2}\; du^1\, du^2 \quad .$$

Hier ist die Determinante der Koeffizienten des Metriktensors der Fläche gegeben durch

$$q = q_{11}\, q_{22} - q_{12}^2 \quad , \tag{7.306}$$

so dass für das Flächenelement schließlich bleibt

$$dF = \sqrt{q}\, du^1\, du^2 \quad . \tag{7.307}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich für die Berechnung der Determinante des Metriktensors der Fläche die Beziehung

$$\sqrt{q} = \left|\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}\right| = \left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| \quad . \tag{7.308}$$

Der Normalenvektor $\mathbf{q}_3$ in Formel (7.279) kann daher auch aus der Beziehung

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2}{\sqrt{q}} \tag{7.309}$$

berechnet werden.

7.3.6 Die Fundamentalgrößen der 2. Ordnung der Flächentheorie

Auf der Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^i\right)$, $(i = 1,2)$ werde eine Kurve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}\left(u^i(s)\right)$ betrachtet. In einem Flächenpunkt *P* hat die Kurve den Tangentenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}_{,i}\frac{du^i}{ds} = \mathbf{q}_i \frac{du^i}{ds} \qquad (i = 1,2) \quad . \tag{7.310}$$

Nach den (speziellen) *Frenet*formeln (4.284) gilt für die Variation der Bogenlänge *s*

$$\mathbf{v}_1' := \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} = \kappa\, \mathbf{v}_2 \quad , \tag{7.311}$$

wobei κ die Krümmung der Kurve im betreffenden Kurvenpunkt *P* ist und $\mathbf{v}_2$ die Richtung der Hauptnormalen angibt. Da der Punkt *P* auch auf der Fläche liegt, hat die Fläche dort den Normalenvektor $\mathbf{q}_3$. Um eine Aussage über die Krümmung der Fläche mit Hilfe der Krümmung κ der Kurve zu erhalten, wird das skalare Produkt aus dem Vektor der Hauptnormalen der Kurve und dem Richtungsvektor der Normalen der Fläche gebildet

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{q}_3 = \kappa\, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.312}$$

Da der Tangentenvektor $\mathbf{v}_1$ der Kurve im Punkt *P* in der Tangentialfläche mit der Flächennormalen $\mathbf{q}_3$ liegt, muss

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \tag{7.313}$$

sein und es ist

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{q}_3 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_3' = 0 \quad . \tag{7.314}$$

Da

$$\mathbf{q}_3' = \frac{d\mathbf{q}_3}{ds} = \mathbf{q}_{3,j} \frac{du^j}{ds} \quad , \tag{7.315}$$

wird mit $\mathbf{v}_1$ aus der Beziehung (7.310)

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{q}_3 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_3' = -\mathbf{q}_i \frac{du^i}{ds} \cdot \mathbf{q}_{3,j} \frac{du^j}{ds} = -\frac{1}{(ds)^2} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,j}\, du^i\, du^j = \kappa \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.316}$$

Die Größen[1]

$$L_{ij} := -\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,j} \tag{7.317}$$

werden als *Fundamentalgrößen der 2. Ordnung* der Flächentheorie bezeichnet und der Ausdruck

$$L_{ij}\, du^i\, du^j \tag{7.318}$$

als die *zweite Grundform der Flächentheorie*.

Wird die erste Grundform aus der Beziehung (7.297) eingeführt, bleibt für die Krümmung der Kurve im Punkt *P*

$$\kappa \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = \frac{L_{ij}\, du^i\, du^j}{q_{ij}\, du^i\, du^j} \quad . \tag{7.319}$$

Da nach Formel (7.295) $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_3 = 0$, $(i = 1,2)$, ist

$$\mathbf{q}_{i,j} \cdot \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,j} = 0$$

und es ergibt sich für die Fundamentalgrößen der 2. Ordnung die Beziehung

$$L_{ij} = -\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,j} = \mathbf{q}_{i,j} \cdot \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.320}$$

Da außerdem

$$\mathbf{q}_i = \frac{d\mathbf{x}}{du^i}$$

gilt für die zweite Ableitung die Beziehung

$$\mathbf{q}_{i,j} = \frac{d\mathbf{x}}{du^i\, du^j} = \frac{d\mathbf{x}}{du^j\, du^i} = \mathbf{q}_{j,i} \quad .$$

[1] In der Flächentheorie ist es üblich, die Fundamentalgrößen der 2. Ordnung mit den Buchstaben L := L_{11}, 2 M := L_{12}+L_{21}, N := L_{22} zu bezeichnen

Somit ergibt sich die Regel:

- *Die Fundamentalgrößen der zweiten Ordnung der Flächentheorie sind symmetrisch:*

$$L_{ij} = L_{ji} \quad . \tag{7.321}$$

Der Normalenvektor $\mathbf{q}_3$ kann nach Formel (7.309) berechnet werden. Damit ergibt sich zur Berechnung der Fundamentalgrößen der zweiten Ordnung die Beziehung

$$L_{ij} = \frac{\left|\mathbf{q}_{i,j}\, \mathbf{q}_1\, \mathbf{q}_2\right|}{\sqrt{q}} \quad . \tag{7.322}$$

Wird an Stelle der Krümmung κ der Krümmungsradius

$$\rho := \frac{1}{\kappa} \tag{7.323}$$

eingeführt, wird mit der Bezeichnung R

$$\kappa\, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3}{\rho} =: \frac{1}{R} = \frac{L_{ij}\, du^i\, du^j}{q_{ij}\, du^i\, du^j} \quad . \tag{7.324}$$

Wenn mit Θ der Winkel zwischen der Hauptnormalen $\mathbf{v}_2$ und der Flächennormalen $\mathbf{q}_3$ bezeichnet wird, gilt

$$\rho = R\, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = R \cos\Theta \quad . \tag{7.325}$$

R entspricht der Krümmung einer Kurve, deren Hauptnormale dieselbe Richtung wie die Flächennormale hat. Eine Kurve auf einer Fläche, die in der Ebene liegt, welche durch Kurventangente und Flächennormale aufgespannt wird, wird als *Normalschnitt* bezeichnet. R ist der Radius des zugehörigen Krümmungskreises. Somit gilt der Satz von MEUSNIER[1]

- *Alle Flächenkurven, die in einem Flächenpunkt dieselbe Tangente und dieselbe Hauptnormale haben, haben auch denselben Krümmungskreis.*

Der Krümmungsradius hat positives Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Seite der Flächennormalen liegt, sonst negatives Vorzeichen, da dann $\Theta = 180°$ ist.

Die Richtung des Normalschnitts wird durch das Verhältnis $du^1:du^2$ gegeben. Sei nämlich α der Winkel, den die Kurve etwa mit der Koordinatenlinie u^2=const. einschließe, ist

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_i \frac{du^i}{ds} \cdot \mathbf{q}_2 = q_{12} \frac{du^1}{ds} + q_{22} \frac{du^2}{ds} \\
\sin\alpha &= \left|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{q}_2\right| = \left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| \left|\frac{du^1}{ds}\right| = \sqrt{q} \left|\frac{du^1}{ds}\right| \\
\tan\alpha &= \pm \frac{\sqrt{q}\, \dfrac{du^1}{du^2}}{q_{12} \dfrac{du^1}{du^2} + q_{22}} \quad .
\end{aligned} \tag{7.326}$$

[1] *Jean-Baptiste Muesnier de la Place* (geb. 19. Juni 1754 in Tours – gef. 13. Juni 1793 in Mainz-Kastel), aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Meusnier_de_la_Place

Da die q_{ij} die metrischen Fundamentalgrößen der Fläche sind, also unabhängig von der Kurve auf der Fläche, hängt der Winkel α und damit die Richtung der Kurve nur vom Verhältnis $du^1:du^2$ ab.

7.3.7 Die Krümmung von Flächenkurven

Gegeben sei auf der Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^i\right)$ die Raumkurve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}\left(u^i(s)\right)$. Ihr Tangentenvektor ist nach Formel (4.275)

$$\mathbf{x}' := \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds} = \mathbf{x}_{,i}\left(u^i\right)' = \mathbf{q}_i\left(u^i\right)' \quad . \tag{7.327}$$

Nach den (speziellen) *Brumberg*schen Formeln (4.285) ist für die zweite Ableitung

$$\mathbf{x}'' := \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \mathbf{v}_1' = \kappa \mathbf{v}_2 \quad , \tag{7.328}$$

wenn κ die Krümmung der Raumkurve ist. Dieser Ausdruck wird in einen tangentialen und einen normalen Anteil zerlegt

$$\mathbf{x}'' = \kappa \mathbf{v}_2 = \kappa_g \mathbf{s} + \kappa_n \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.329}$$

Hier ist $\mathbf{q}_3$ der Flächennormalenvektor und $\mathbf{s}$ ein Vektor in der Tangentialebene, für den also

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{q}_3 = 0 \tag{7.330}$$

erfüllt sein muss. Da nach der ersten der Formeln (4.281)

$$\left(\mathbf{v}_1\right)^2 = \left(\mathbf{q}'\right)^2 = 1 \quad , \quad \mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'' = 0 \quad , \tag{7.331}$$

folgt mit $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{q}_3 = 0$ auch

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}_3 = \mathbf{s}\cdot\mathbf{q}' = 0 \quad . \tag{7.332}$$

Der Vektor $\mathbf{s}$ ist also senkrecht auf dem Tangentialvektor $\mathbf{v}_1$ und der Flächennormalen $\mathbf{q}_3$, so dass (bis auf das Vorzeichen)

$$\mathbf{s} = \mathbf{q}_3 \times \mathbf{v}_1 \tag{7.333}$$

gesetzt werden kann. Dann bleibt

$$\mathbf{x}'' = \kappa \mathbf{v}_2 = \kappa_g \mathbf{q}_3 \times \mathbf{v}_1 + \kappa_n \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.334}$$

κ_g wird als *tangentiale* oder *geodätische Krümmung*, κ_n als *binormale Krümmung* der Flächenkurve bezeichnet. Insbesondere ist dann mit Formel (7.323) die normale Krümmung durch die Beziehung

$$\kappa_n = \kappa \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = \frac{L_{ij}\, du^i\, du^j}{q_{ij}\, du^i\, du^j} \tag{7.335}$$

gegeben.

Ein Schnitt mit der Fläche, der eine Kurve ergibt, die nur eine normale Krümmung κ_n aber keine geodätische Krümmung hat $(\kappa_g = 0)$, wird als *Normalschnitt* bezeichnet. Über die Be-

ziehung (7.335) wird die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse auf die Untersuchung der Normalschnitte zurückgeführt. Der *Satz von Meusnier* lässt sich dann so fassen:

- *Die Mittelpunkte aller sich in einem bestimmten Punkt einer Fläche berührenden Krümmungskreise liegen auf einem Kreis in der Normalebene dieser Kurven mit dem Durchmesser* $R = 1/|\kappa_n|$.

7.3.8 Die Hauptkrümmungen

In einem Punkt *P* auf einer Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^i)$ werden die Richtungen der Flächenkurven mit extremaler normaler Krümmung κ_n gesucht. Zunächst wird aus der Darstellung der Normalkrümmung (7.335) mit der Richtung

$$\chi := \frac{du^1}{du^2} \tag{7.336}$$

und *i*,*j*=1,2 die folgende Darstellung erhalten

$$\kappa_n = \frac{L_{11}\chi^2 + 2L_{12}\chi + L_{22}}{q_{11}\chi^2 + 2q_{12}\chi + q_{22}} \quad . \tag{7.337}$$

Die notwendige Bedingung

$$\frac{d\kappa_n}{d\chi} = 0$$

führt auf die Bedingungsgleichung

$$(q_{12}L_{11} - q_{11}L_{12})\chi^2 + (q_{22}L_{11} - q_{11}L_{22})\chi + q_{22}L_{12} - q_{12}L_{22} = 0 \tag{7.338}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}\chi_{1/2} = \left(\frac{du^1}{du^2}\right)_{1/2} = \frac{1}{2(q_{12}L_{11} - q_{11}L_{12})}\Big[& -(q_{22}L_{11} - q_{11}L_{12}) \pm \\ & \pm\sqrt{(q_{12}L_{11} - q_{11}L_{12})^2 - 4(q_{12}L_{11} - q_{11}L_{12})(q_{22}L_{12} - q_{12}L_{22})}\Big] \quad .\end{aligned} \tag{7.339}$$

Mit den Richtungen $\chi_{1/2}$ folgen somit nach Gleichung (7.337) zwei extremale Normalkrümmungen $\kappa_{n1/2}$. Andererseits kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu

$$(\kappa_n q_{11} - L_{11})\chi^2 + (\kappa_n q_{12} - L_{12})\chi + (\kappa_n q_{22} - L_{22}) = 0 \quad . \tag{7.340}$$

Dies bedeutet, dass für eine vorgegebene Normalkrümmung κ_n zwei Richtungen $\chi = du^1/du^2$ gegeben sind. Da es aber nach dem Vorstehenden für ein extremales κ_n nur genau eine Richtung χ geben kann, kann dies nur der Fall sein, wenn die beiden Richtungen $\chi_{1/2}$ zusammenfallen, wenn also in Gleichung (7.340) die Bedingung

$$(\kappa_n q_{12} - L_{12})^2 - (\kappa_n q_{11} - L_{11})(\kappa_n q_{22} - L_{22}) = 0 \tag{7.341}$$

erfüllt ist. Daraus können die beiden Normalkrümmungen berechnet werden. Zunächst ist

$$\kappa_n{}^2\left(q_{12}{}^2 - q_{11}\,q_{22}\right) + \kappa_n\left(q_{11}\,L_{22} + q_{22}\,L_{11} - 2\,q_{12}\,L_{12}\right) - L_{11}\,L_{22} + L_{12}{}^2 \;=\; 0$$

oder

$$\kappa_n{}^2 - 2\,H\,\kappa_n + K \;=\; 0 \tag{7.342}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} q &:= q_{11}\,q_{22} - q_{12}{}^2 \\ L &:= L_{11}\,L_{22} - L_{12}{}^2 \\ H &:= \frac{1}{2\,q}\left(q_{11}\,L_{22} + q_{22}\,L_{11} - 2\,q_{12}\,L_{12}\right) \\ K &:= \frac{L}{q} \quad . \end{aligned} \tag{7.343}$$

Die Größe H wird als die *mittlere Krümmung* der Fläche bezeichnet, K als ihre *Gaußsche Krümmung*.

Für die beiden Lösungen gilt somit

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\kappa_{n1} + \kappa_{n2}\right) \\ K &= \kappa_{n1}\;\kappa_{n2} \end{aligned} \tag{7.344}$$

oder wenn mit der Bezeichnung (7.324) die Krümmungsradien R_i der beiden Normalkrümmungen eingeführt werden

$$\kappa_{ni} \;=\; \frac{1}{R_i} \qquad\qquad (i = 1,2) \tag{7.345}$$

auch

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ K &= \frac{1}{R_2}\frac{1}{R_2} \quad . \end{aligned} \tag{7.346}$$

Aus der Beziehung

$$q_{ij}\,q^{jk} \;=\; \delta_i{}^k \tag{7.347}$$

folgen unmittelbar die Beziehungen

$$q_{22} \;=\; q\,q^{11} \;\;,\;\; q_{11} \;=\; q\,q^{22} \;\;,q_{12} \;=\; -\,q\,q^{12} \tag{7.348}$$

und somit

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\;L_{ij}\,q^{ij} \;=\; \frac{1}{2}\;L_i{}^j \\ K &= \frac{L}{q} \;=\; \frac{\det\left(L_{ik}\right)}{\det\left(q_{kj}\right)} \;=\; \det\left(L_{ik}\right)\det\left(q^{kj}\right) \;=\; \det\left(L_i{}^j\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.349}$$

Aus diesen Ausdrücken folgt auch, dass die mittlere Krümmung H und die *Gauß*sche Krümmung K parameterinvariant sind, da sie nur von den Fundamentalgrößen der Fläche abhängig

sind. Da die Hauptkrümmungen durch *H* und *K* in Gleichung (7.342) dargestellt werden können, trifft diese Eigenschaft auch für sie zu. Es gilt sodann der Satz:

- *Die beiden Hauptkrümmungen stehen aufeinander senkrecht.*

Beweis: In Gleichung (7.326) sei α der Winkel zwischen einer Hauptkrümmungsrichtung und einer Parameterlinie. Es werde ohne Einschränkung als Parameterlinie u1 diejenige gewählt, die in Richtung der Hauptkrümmungsrichtung weise. Dann ist für die erste Hauptkrümmungsrichtung $\chi_1 = \left(\frac{du^1}{du^2}\right)_1$

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sqrt{q}\,\chi_1}{q_{12}\,\chi_1 + q_{22}} = 0$$

auch $\chi_1 = 0$, da sicher $q_{22} \neq 0$. In der Lösung (7.339) ist somit

$$q_{22}\,L_{11} - q_{11}\,L_{21} = \sqrt{\left(q_{22}\,L_{11} - q_{11}\,L_{12}\right)^2 - 4\left(q_{12}\,L_{11} - q_{11}\,L_{12}\right)\left(q_{22}\,L_{12} - q_{12}\,L_{22}\right)}$$

und für die zweite Hauptkrümmungsrichtung folgt daher

$$\tan\alpha_2 = \frac{-\sqrt{q}\left(q_{22}\,L_{11} - q_{11}\,L_{22}\right)}{-q_{12}\left(q_{22}\,L_{11} - q_{11}\,L_{22}\right) + q_{22}\left(q_{12}\,L_{11} - q_{11}\,L_{12}\right)} = \infty \quad ,$$

also $\alpha_2 = 90°$. Die beiden Hauptkrümmungen stehen also aufeinander. □

Wenn die Parameterlinien u^1, u^2 in die Richtung der Hauptkrümmungsrichtungen orientiert sind, stehen sie im Auftreffpunkt aufeinander senkrecht, es ist dann also

$$q_{12} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \quad .$$

Dann ist mit $u^1 = \frac{du^1}{du^2} = 0$ in Gleichung (7.341)

$$\kappa_n\,q_{22} - L_{22} = 0 \qquad (\chi_1 = 0)$$

und aus Gleichung (7.341) folgt auch $L_{12} = 0$.

Parameterlinien, für die stets $q_{12} = L_{12} = 0$ gilt, die also stets die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche berühren, werden als *Krümmungslinien* (Hauptkrümmungslinien) bezeichnet.

Falls die *Gauß*schen Parameterlinien (Haupt-) Krümmungslinien sind, ist mit $q_{12} = L_{12} = 0$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $q_{11} = q_{22} = 1$ für die Normalenkrümmungen in Gleichung (7.337)

$$\begin{aligned} \kappa_{n1}\left(\chi_2 = \frac{du^2}{du^1} \to \infty\right) &= \frac{L_{11}}{q_{11}} \\ \kappa_{n2}\left(\chi_1 = \frac{du^1}{du^2} = 0\right) &= \frac{L_{22}}{q_{22}} \end{aligned} \qquad (7.350)$$

und somit für die Normalkrümmung einer beliebigen Raumkurve

$$\kappa_n = \kappa_{n1} \frac{q_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2}{q_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + q_{22}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2} + \kappa_{n2} \frac{q_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2}{q_{11}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 + q_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2} \quad .$$

Wenn α gemäß den Gleichungen (7.326) der Winkel zwischen der Kurventangente mit Richtungsvektor $\mathbf{v}_1$ und der Parameterlinie u^2 ist, gilt

$$\cos\alpha = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_i \frac{du^i}{ds} \cdot \mathbf{q}_2 = q_{12}\frac{du^1}{ds} + q_{22}\frac{du^2}{ds}$$

und im Fall, dass die u^i Krümmungslinien sind

$$\cos\alpha = q_{22}\frac{du^2}{ds} = \frac{du^2}{ds} \quad .$$

In diesem Fall ist auch

$$\sin\alpha = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_1 = q_{11}\frac{du^1}{ds} = \frac{du^1}{ds} \quad .$$

Es wird also (Satz von *Euler*)

$$\kappa_n = \kappa_{n1}\sin^2\alpha + \kappa_{n2}\cos^2\alpha \quad . \tag{7.351}$$

Sei R der Radius der Nomalenkrümmung $\kappa_n = 1/R$ und R_i die Radien der Hauptkrümmungen $\kappa_{ni} = 1/R_i$, wird

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{R_2} \quad . \tag{7.352}$$

Diese Gleichung, welche die Normalgleichung eines Kegelschnittes mit den beiden Hauptachsen $\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}$ ist, gestattet eine Charakterisierung des betroffenen Kurvenpunktes und wird daher als *Dupinsche Indikatrix* bezeichnet:

- Wenn $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, handelt es sich um eine Ellipse,
- Wenn $R_1 R_2 < 0$ um eine Hyperbel.

Die *Gauß*sche Krümmung K nach Gleichung (7.344) erlaubt daher die Aussagen:

$K > 0$	=>	Kurvenpunkt elliptisch	(„elliptische Krümmung“)
$K < 0$	=>	Kurvenpunkt hyperbolisch	(„hyperbolische Krümmung“)
$K = 0$	=>	Kurvenpunkt parabolisch	(„parabolische Krümmung“) .

7.3.9 Die *Christoffel* Symbole der Flächentheorie

Die Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^i\right)$ sei durch die *Gauß*schen Flächenparameter u^1, u^2 beschrieben. Dann sind die *Christoffel*symbole der Fläche mit Formel (7.179) auf Seite 272

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} q^{im}\left(q_{mj,k} + q_{km,j} - q_{jk,m}\right) \tag{7.353}$$

gegeben. Die zweite Fundamentalgröße verschwindet außerhalb der Fläche. Aus der Beziehung (7.320) folgt nämlich für j=3 mit $q_{23}=0$

$$L_{i3} = -\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{3,3} = 0 \quad , \tag{7.354}$$

sowie

$$L_{3i} = -\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_{3,i} \quad .$$

Da nach Beziehung (7.320) $\left(L_{ij} = \mathbf{q}_{i,j} \cdot \mathbf{q}_3\right)$

$$L_{3i} = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_{3,i}$$

gilt, muss auch

$$L_{3i} = 0 \tag{7.355}$$

sein.

Der Metriktensor $q_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j$ ist aber derart an die Fläche gebunden, dass $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ stets in einer Tangentialebene an die Fläche liegen und

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|}$$

stets in Richtung der Flächennormale weist. Dann ist mit den Beziehungen (7.293)

$$q_{33} = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3 = 1 \quad , \quad q_{i3} = q_{3i} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \tag{7.356}$$

und es gilt

$$q_{33,j} = q_{i3,j} = q_{3i,j} = 0 \quad , \tag{7.357}$$

so dass in Formel (7.353) die Indizes zwar formal bis 3, real jedoch nur bis 2 laufen. Das hier definierte *Christoffel*symbol ist daher auf die gegebene Fläche bezogen. ◀

Wenn die Fläche in einem dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet ist und u^3 der Parameter in Richtung der Flächennormalen ist, wird mit der Beziehung für die *Christoffel*-symbole aus Formel (7.174) auf Seite 271 und für die Fundamentalgrößen der zweiten Ordnung der Flächentheorie (7.320) auf Seite 297

$$\Gamma^i{}_{j3} = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}_{3,j} = q^{im}\, \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{q}_{3,j} = -q^{im} L_{mj} = -L^i{}_j \quad , \tag{7.358}$$

mit $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_3\left(u^1, u^2\right)$, $\mathbf{q}_{3,3} = 0$ folgen

$$\Gamma^i{}_{33} = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}_{3,3} = 0 \qquad \left(i = 1,2\right) \tag{7.359}$$

und

$$\Gamma^3{}_{33} = \mathbf{q}^3 \cdot \mathbf{q}_{3,3} = 0 \quad . \tag{7.360}$$

Ferner ergibt sich mit Formel (7.281) auf Seite 293

$$\Gamma^3{}_{j3} = \mathbf{q}^3 \cdot \mathbf{q}_{j,3} = 0 \quad , \quad \left(j = 1,2\right) \ , \tag{7.361}$$

außerdem mit den Formeln (7.301) und (7.320) schließlich

$$\Gamma^3{}_{jk} = \mathbf{q}^3 \cdot \mathbf{q}_{j,k} = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_{j,k} = L_{jk} \quad . \tag{7.362}$$

7.3.10 Die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie

Die Ableitungen der Basisvektoren $\boldsymbol{g}_i$ des einbettenden Raumes werden durch die Ableitungsgleichungen (7.174) auf Seite 271 und (7.177) auf die Basis $\boldsymbol{g}_i$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{i,k} &= \Gamma^j{}_{ik}\, \mathbf{g}_j \\ \mathbf{g}^i{}_{,k} &= -\Gamma^i{}_{jk}\, \mathbf{g}^j \quad . \end{aligned} \tag{7.363}$$

Im Fall der Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^i\right)$ mit der Basis $\mathbf{r}_{,i} = \mathbf{q}_i$ wird

$$\mathbf{q}_{i,k} = \Gamma^j{}_{ik}\, \mathbf{q}_j + \Gamma^3{}_{ik}\, \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.364}$$

Mit dem *Christoffel*symbol (7.362) folgt für die *Ableitungsgleichung von Gauß*

$$\mathbf{q}_{i,k} = \Gamma^j{}_{ik}\, \mathbf{q}_j + L_{ik}\, \mathbf{q}_3 \quad . \tag{7.365}$$

Entsprechend gilt für die kontravariante Basis

$$\mathbf{q}^i{}_{,k} = -\Gamma^i{}_{jk}\, \mathbf{q}^j + \Gamma^i{}_{3k}\, \mathbf{q}^3$$

und mit Formel (7.358) die Ableitungsgleichung von *Gauß* für die kontravariante Basis

$$\mathbf{q}^i{}_{,k} = -\Gamma^i{}_{jk}\, \mathbf{q}^j + L^i{}_k\, \mathbf{q}^3 \quad . \tag{7.366}$$

Ferner ist

$$\mathbf{q}_{3,k} = \Gamma^j{}_{3k}\, \mathbf{q}_j + \Gamma^3{}_{3k}\, \mathbf{q}_3 \quad ,$$

daher wegen der Beziehungen (7.358) und (7.361) auch die als *Ableitungsgleichung von Weingarten* bekannte Beziehung

$$\mathbf{q}_{3,k} = \mathbf{q}^3{}_{,k} = -L^j{}_k\, \mathbf{q}_j \quad . \tag{7.367}$$

7.3.11 Die kovariante Ableitung auf der Fläche

Auf Flächen, die in einem euklidischen Raum eingebettet sind, gibt es die kovariante Ableitung von Flächentensoren analog der kovarianten Ableitung im einbettenden Raum. Es kann also wie im einbettenden Raum auf Flächen Tensoranalysis betrieben werden. Dies soll im Folgenden (als ein Beispiel zur Anwendung des Tensorkalküls) hergeleitet werden.

Es sei auf der Fläche

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^k\right) = \mathbf{r}\left(\upsilon^j\right) \tag{7.368}$$

mit den krummlinigen Koordinaten u^k bzw. υ^j die Basen

$$\mathbf{q}_k = \frac{d\mathbf{r}}{du^k} = \mathbf{r}_{,k} \quad , \quad \mathbf{p}_j = \frac{d\mathbf{r}}{d\upsilon^j} = \mathbf{r}_{,j} \tag{7.369}$$

gegeben, mit der Transformation

$$u^k = u^k\left(\upsilon^j\right) \quad , \quad \upsilon^j = \upsilon^j\left(u^k\right) \tag{7.370}$$

somit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon^j}\frac{\partial \upsilon^j}{\partial u^k} = \mathbf{p}_j \frac{\partial \upsilon^j}{\partial u^k} = \mathbf{p}_j \, \upsilon^j{}_{,k} \\ \mathbf{p}_j &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial \upsilon^j} = \mathbf{q}_k \frac{\partial u^k}{\partial \upsilon^j} = \mathbf{q}_k \, u^k{}_{,j} \quad . \end{aligned} \tag{7.371}$$

Die Koordinaten u^1, u^2 bzw. υ^1, υ^2 liegen in der Fläche, u^3 und υ^3 senkrecht dazu, so dass $u^3 = \upsilon^3$ und somit

$$\frac{\partial u^i}{\partial \upsilon^3} = \delta_{i3} \quad , \quad \frac{\partial \upsilon^j}{\partial u^3} = \delta_{j3} \tag{7.372}$$

gesetzt werden können. Damit ist auch

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_j \, \upsilon^j{}_{,k} \quad , \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{q}_k \, u^k{}_{,j} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{p}_3 \tag{7.373}$$

erfüllt. Es sei nun

$$\mathbf{a} := a^k \, \mathbf{q}_k = b^j \, \mathbf{p}_j \qquad (j,k = 1,2,3) \tag{7.374}$$

ein Flächenvektor mit

$$b^j = a^k \, \upsilon^j{}_{,k} \quad , \quad a^k = b^j \, u^k{}_{,j} \quad , \quad b^3 = a^3 \quad . \tag{7.375}$$

Die Variation des Vektors **a** nach der krummlinigen Koordinate u^j ist

$$\mathbf{a}_{,j} := \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = a^k{}_{,j} \, \mathbf{q}_k + a^k \, \mathbf{q}_{k,j} \quad , \tag{7.376}$$

wobei nach den Ableitungsgleichungen von *Gauß* (7.365)

$$\mathbf{q}_{k,j} = \Gamma^i{}_{kj} \, \mathbf{q}_i + L_{kj} \, \mathbf{q}_3$$

gilt, was schließlich auf die Beziehung

$$\mathbf{a}_{,j} = \left(a^i{}_{,j} + a^k \Gamma^i{}_{kj}\right)\mathbf{q}_i + a^k \, L_{kj} \, \mathbf{q}_3 =: a^i{}_{;j} \, \mathbf{q}_i + a^k \, L_{kj} \, \mathbf{q}_3 \tag{7.377}$$

führt. Hier ist

$$a^i{}_{;j} = a^i{}_{,j} + a^k \, \Gamma^i{}_{kj} \tag{7.378}$$

die *kovariante Ableitung auf der Fläche*. Diese Koeffizienten sind, wie die kovariante Ableitung des einbettenden euklidischen Raumes, Koeffizienten eines Tensors und zwar des Flächentensors. Dies wird durch Nachweis der Transformationseigenschaften eines Flächentensors beweisen:

Die Variation von **a** bezogen auf die krummlinigen Koordinaten υ^k ist

$$\mathbf{a}_{,k} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \upsilon^k} = b^i{}_{,k} \, \mathbf{p}_i + b^i \, \mathbf{p}_{i,k} \qquad (i,k,j = 1,2) \quad ,$$

wobei die Variationen der Basis nach den Ableitungsgleichungen von *Gauß*

$$\mathbf{p}_{i,k} = \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \upsilon^k} = \Gamma^{*j}{}_{ki} \, \mathbf{p}_j + L^*{}_{ik} \, \mathbf{p}_3 \qquad (i,k,j = 1,2)$$

lauten. Hier sind die $\Gamma^{*j}{}_{ki}$ wie in den Beziehungen (7.353) auf die Fläche und die L^{*}_{ik} die 2. Fundamentalgrößen mit den Beziehungen (7.320). Somit gilt

$$\mathbf{a}_{,k} = \left(b^{i}{}_{,k} + b^{j}\,\Gamma^{*i}{}_{kj}\right)\mathbf{p}_i + b^{i}\,L^{*}_{ik}\,\mathbf{p}_3$$

mit der kovarianten Ableitung

$$b^{i}{}_{;k} = b^{i}{}_{,k} + b^{j}\,\Gamma^{*i}{}_{kj} \quad .$$

Aus der Beziehung (7.376) folgt

$$\mathbf{a}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \upsilon^k}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} = \mathbf{a}_{,k}\,\upsilon^{k}{}_{,j} \quad ,$$

somit

$$\mathbf{a}_{,j} = b^{i}{}_{;k}\,\mathbf{p}_i\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} + b^{i}\,L^{*}_{ik}\,\mathbf{p}_3\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} = a^{i}{}_{;j}\,\mathbf{q}_i + a^{k}\,L_{kj}\,\mathbf{q}_3$$

und wegen (7.371) auch

$$\mathbf{a}_{,j} = b^{i}{}_{;k}\,\mathbf{q}_m\frac{\partial u^m}{\partial \upsilon^i}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} + a^{m}\frac{\partial \upsilon^i}{\partial u^m}L^{*}_{ik}\,\mathbf{p}_3\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} \quad .$$

Da $\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_3$ vorausgesetzt wurde, ist

$$a^{k}\,L_{kj} = a^{m}\,L^{*}_{ik}\frac{\partial \upsilon^i}{\partial u^m}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j}$$

bzw.

$$a^{k}\,L_{kj} = a^{m}\,L^{*}_{im}\frac{\partial \upsilon^i}{\partial u^k}\frac{\partial \upsilon^m}{\partial u^j} \quad .$$

Dies führt auf das Transformationsgesetz des 2. Fundamentaltensors der Flächentheorie als einem Flächentensor (alle Größen k=3, j=3 verschwinden)

$$\begin{aligned} L_{kj} &= L^{*}_{im}\frac{\partial \upsilon^i}{\partial u^k}\frac{\partial \upsilon^m}{\partial u^j} \\ L^{*}_{im} &= L_{im}\frac{\partial u^k}{\partial \upsilon^i}\frac{\partial u^j}{\partial \upsilon^m} \end{aligned} \tag{7.379}$$

und es bleibt das Transformationsgesetz der kovarianten Ableitung auf der Fläche

$$a^{m}{}_{;j} = b^{i}{}_{;k}\frac{\partial u^m}{\partial \upsilon^i}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^j} \quad . \tag{7.380}$$

- *Die kovariante Ableitung der Fläche ist ein (gemischtvarianter) Flächentensor der 2. Stufe.*

Auch für Flächentensoren gilt das 2. Lemma von *Ricci*:

- *Die kovarianten Ableitungen in der Fläche des Metriktensors der Fläche verschwinden.*

$$q^{ij}{}_{;k} = q^{i}{}_{j;k} = q_{ij;k} = 0 \quad . \tag{7.381}$$

Der Beweis folgt wie im allgemeinen Ansatz, wobei für die Indizes i=3, j=3, k=3 die speziellen Werte aus den Beziehungen (7.367) eingesetzt werden.

7.3.12 Geodätische Linien

Zur Herleitung der geodätischen Linien auf einer Fläche geht man von folgender Aufgabenstellung aus: Auf einer Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(y^j\right)$ mit den *Gauß*schen Parametern y^j und den Basisvektoren $\mathbf{q}_j := \mathbf{r}_{,j}$ mit der Metrik

$$q_{ik} = \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \tag{7.382}$$

werde der Extremwert einer Strecke, dargestellt durch das Differential

$$ds = \sqrt{q_{ik}\, \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_k}\; dt \quad , \tag{7.383}$$

gebildet. Wenn die Strecke

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{q_{ik}\, \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_k}\; dt =: \int L\, dt \tag{7.384}$$

ein Extremum annimmt, sind die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen der Variationsrechnung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y^i} = 0 \quad . \tag{7.385}$$

notwendig erfüllt. Im Fall der *Lagrange* Funktion

$$L = \sqrt{q_{ik}\, \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_k} \tag{7.386}$$

gelten, da die Metrikkoeffizienten nicht von den Variationen $\dot{y}^j$ der *Gauß*schen Parameter abhängen,

$$\frac{\partial q_{ik}}{\partial \dot{y}^j} = 0 \quad , \tag{7.387}$$

somit die folgenden Beziehungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j} = \frac{1}{L} q_{jk}\, \dot{y}^k \tag{7.388}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j} = \frac{1}{2L} \frac{\partial q_{ik}}{\partial y^j}\, \dot{y}^i\, \dot{y}^k \tag{7.389}$$

sowie

$$\dot{L} = \frac{1}{2L} \dot{q}_{ik}\, \dot{y}^i\, \dot{y}^k + \frac{1}{L} q_{ik}\, \dot{y}^i\, \ddot{y}^k \quad . \tag{7.390}$$

Aus Gleichung (7.388) wird nach Differentiation nach dem Kurvenparameter *t*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j}\right) = \frac{1}{L}\left(\dot{q}_{jk}\,\dot{y}^k + q_{jk}\,\ddot{y}^k\right) - \frac{\dot{L}}{L^2} q_{jk}\,\dot{y}^k \quad .$$

Nach Einsetzen von Gleichung (7.390) und Einführung widerspruchsfreier Indizierung wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j}\right) = \frac{1}{L}\left(\dot{q}_{jk}\,\dot{y}^k + q_{jk}\,\ddot{y}^k\right) - \frac{1}{2L^3}\dot{q}_{mk}\,\dot{y}^m\,\dot{y}^k\,q_{jh}\,\dot{y}^h - \frac{1}{L^3} q_{ik}\,\dot{y}^i\,\ddot{y}^k\,q_{jm}\,\dot{y}^m \quad .$$

Wegen $\dfrac{\partial q_{ik}}{\partial \dot{y}^i} = 0$ gilt

$$\dot{q}_{km} = \frac{\partial q_{km}}{\partial y^i}\,\dot{y}^i \tag{7.391}$$

und es wird bei geeigneter Anpassung der Indizes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j}\right) = \dot{y}^i\left(\frac{1}{L}\frac{\partial q_{kj}}{\partial y^i}\dot{y}^k - \frac{1}{2L^3}\frac{\partial q_{mk}}{\partial y^i}\dot{y}^m\,\dot{y}^k\,q_{jh}\,\dot{y}^h\right) + \ddot{y}^i\left(\frac{1}{L}\,q_{ij} - \frac{1}{L^3} q_{ik}\,\dot{y}^k\,q_{jm}\,\dot{y}^m\right) .$$

Mit den Beziehungen (7.390) und (7.391) wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j}\right) = \dot{y}^i\left(\frac{1}{L}\frac{\partial q_{kj}}{\partial y^i}\dot{y}^k - \frac{1}{L^2}\frac{\partial L}{\partial y^i}\,q_{jk}\,\dot{y}^k\right) + \ddot{y}^i\left(\frac{1}{L}q_{ji} - \frac{1}{L^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i}q_{jk}\,\dot{y}^k\right)$$

somit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^j}\right) = \dot{y}^i\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{q_{kj}\,\dot{y}^k}{L}\right) + \ddot{y}^i\frac{\partial}{\partial \dot{y}^i}\left(\frac{q_{kj}\,\dot{y}^k}{L}\right) . \tag{7.392}$$

Die *Euler-Lagrange*schen Gleichungen lauten daher mit Gleichung (7.390)

$$\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{q_{kj}\,\dot{y}^k}{L}\right) + \ddot{y}^i\frac{\partial}{\partial \dot{y}^i}\left(\frac{q_{kj}\,\dot{y}^k}{L}\right) - \frac{1}{2L}\frac{\partial q_{ik}}{\partial y^j}\dot{y}^i\,\dot{y}^k = 0 \quad .$$

Wird hier $s = t$ gesetzt, wird also für die *Lagrange*funktion

$$L := 1 \qquad , \quad (s = t) \tag{7.393}$$

angenommen, bleiben für die *Euler-Lagrange*schen Gleichungen

$$q_{kj,\,j}\,\dot{y}^i\,\dot{y}^k + \ddot{y}^i\,q_{ji} - \frac{1}{2}\,q_{ik,\,j}\,\dot{y}^i\,\dot{y}^k = 0$$

oder

$$q_{ji}\,\ddot{y}^i + \frac{1}{2}\left(q_{kj,i} + q_{ji,k} - q_{ik,\,j}\right)\dot{y}^i\,\dot{y}^k = 0$$

und nach Überschiebung mit q^{mj}

$$\ddot{y}^m + \frac{1}{2}q^{mj}\left(q_{kj,i} + q_{ji,k} - q_{ik,\,j}\right)\dot{y}^i\,\dot{y}^k = 0 \qquad ,$$

bzw. mit dem *Christoffel* Symbol (7.353) auch

$$\ddot{y}^m + \Gamma^m{}_{ik}\,\dot{y}^i\,\dot{y}^k = 0 \quad . \tag{7.394}$$

Kurven mit den *Gauß*schen Parametern $y^i(s)$ (s =Bogenlänge; i=1,2) werden als *geodätische Linien* bezeichnet, wenn die Parameter der Differentialgleichung (7.394) genügen. Sie sind Kurven extremaler Länge, wobei die Kurven minimaler Länge interessieren. Die Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten y^i nach Formel (7.175) auf Seite 271 hat die Form einer geodätischen Linie. Die „ungestörte" Bewegung auf einer Fläche erfolgt somit notwendig längs einer geodätischen Kurve.

Dies schließt den Fall von Kurven ein, die in geradlinigen Koordinaten dargestellt werden können. Dann verschwinden die *Christoffel* Symbole und $\ddot{y}_m = 0$ ist die Bewegungsgleichung längs einer ungestörten Kurve, also einer Geraden. Davon ist in Kapitel 6 ausgegangen worden.

7.3.13 Parallelverschiebung auf Flächen

Gegeben sei eine Kurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(x^i(t)\right)$, die in einer Fläche liegt. In dieser Fläche sei längs dieser Kurve ein Feld von Tangentenvektoren $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \upsilon^i \mathbf{p}_i$ definiert, wobei eine Eigenbewegung der Basis $\mathbf{p}_i$ vernachlässigt werde. Dann wird nach *Levi-Cività* definiert:

Die Vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ *werden geodätisch parallel längs der Kurve* $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(x^i\right)$ *genannt, wenn die Tangentialkomponente von* $\dot{\mathbf{v}}$ *verschwindet.*

Dazu wird der Tangentenvektor in einen tangentialen und einen normalen Anteil mit Normalenvektor

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|} \tag{7.395}$$

zerlegt in

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\upsilon}^i \mathbf{q}_i + C\,\mathbf{c} \tag{7.396}$$

mit beliebigem Parameter C. Nach obiger Definition ist in diesem Fall

$$\dot{\mathbf{v}} \| \mathbf{c} \quad , \tag{7.397}$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{q}_j \cdot \frac{d\left(\upsilon^i \mathbf{q}_i\right)}{dt} = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_i \dot{\upsilon}^i + \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_{i,k}\, \dot{x}^k \upsilon^i = g_{ji} \dot{\upsilon}^i + \mathbf{q}_j \cdot \Gamma^l{}_{ik} \mathbf{q}_l \dot{x}^k \upsilon^i = \\ = g_{ji} \dot{\upsilon}^i + g_{jl} \Gamma^l{}_{ik} \dot{x}^k \upsilon^i = g_{ji} \dot{\upsilon}^i + \Gamma_{jik} \dot{x}^k \upsilon^i = 0 \quad . \end{aligned} \tag{7.398}$$

Nach Multiplikation mit dem kontravarianten Metriktensor g^{jr} folgen die (zwei) Bedingungsgleichungen für geodätische Parallelität

$$\dot{\upsilon}^r + \Gamma^r{}_{ik} \dot{x}^k \upsilon^i = 0 \quad . \tag{7.399}$$

Diese Gleichungen besagen, dass der Begriffe der geodätischen Parallelität zur inneren Geometrie einer Fläche gehört[1].

[1] Weitere Eigenschaften zur geodätischen Parallelität und inneren Geometrie einer Fläche können etwa bei D. LAUGWITZ [1960], pp.34-45 nachgelesen werden.

7.4 Mögliche Entwicklungen

1. Auf Grund der Überlegungen im Zusammenhang mit geradlinigen Koordinaten ist es nahe liegend, dass auch im Fall der Erweiterung auf krummlinige Koordinaten ein Analogon zum Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{qp}$ existieren muss.

2. Ferner ergibt die analoge Überlegung, dass an jeden nichteuklidischen Raum der Dimension *n* (bei Erfüllung von bestimmten Stetigkeitseigenschaften) ein euklidischer Tangentialraum der Dimension *n*-1 konstruiert werden kann (Tangente an zweidimensionale Kurve, Tangentialebene an räumlichen Körper), dass zu einem dreidimensionalen euklidischen Raum (der also durch ein geradliniges Koordinatensystem aufgespannt werden kann) ein (oder vielleicht mehrere) vierdimensionale nichteuklidische Räume existieren, die diesen dreidimensionalen Raum als Tangentialraum aufweisen. Wenn diese sich längs des vierdimensionalen Raumes bewegen, könnten eventuell neue Eigenschaften eines solchen Bewegungsvorganges gefunden werden.

3. Wegen der fundamentalen Bedeutung der *Hansen* Räume zur Beschreibung beliebiger Bewegungsvorgänge und ihrer Variationen in geradlinigen Koordinaten ist es nahe liegend zu untersuchen, ob auch ein Analogon zu den *Hansen* Räumen in krummlinigen Koordinaten gefunden werden kann, und welche besonderen Eigenschaften diesem dann zugeordnet werden können.

8 Einige spezielle Koordinatensysteme

In diesem Kapitel werden einige in bahnmechanischem Zusammenhang benötigte Koordinatensysteme und Beziehungen zwischen den Systemen behandelt. Sie sind im Wesentlichen nichts anderes als sich formal wiederholende Anwendungen der in den vorstehenden Kapiteln hergeleiteten Formeln zur Koordinatendarstellung und Beziehungen zwischen den Systemen. Um jedoch die späteren bahnmechanischen Untersuchungen nicht unnötig zu belasten, um die mit Sorgfalt zu gebrauchende einheitliche Schreibweise durchzuhalten sowie aus Referenzgründen werden die Einzelsysteme soweit möglich vollständig und systematisch zusammengestellt.

Die ausführlichen Darstellungen in diesem Kapitel haben vor allem den Sinn, die Bedeutung und Anwendung des jeweiligen System-Eigenbewegungsvektors herauszustellen.

Ein räumliches Koordinatensystem wird durch drei (unabhängige) Achsen (kartesisch, schiefwinklig), durch Angabe des Mittelpunktes (Zentrum eines Körpers, Beobachters, Raumflugkörpers, …), die Bezugsebene (Äquator, Ekliptik, Bahnebene, …), die Bezugsrichtungen (Frühlingspunkt, Knoten, … sowie für eine zweite Achse die Richtung zum Nordpol, Pol der Bahn, …) und schließlich durch den Bezugszeitpunkt (Fundamentalepoche, mittleres Datum, wahres Datum, …) festgelegt.

Die Variabilität der einzelnen Systeme in der Zeit wird in systematischem Zusammenhang in Kapitel 9 behandelt. Erst dann ist die Darstellung der Systeme vollständig. Die anderen definierenden Eigenschaften der Koordinatensysteme und ihre Beziehungen werden in diesem Kapitel behandelt. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Systemen in diesem Kapitel erfolgt also stets bei Bezug auf ein und denselben Zeitpunkt. Bei Bezug auf diesen einen Zeitpunkt, an dem die Systeme und damit ihre Beziehungen untereinander gültig sind, sind die folgenden Formelsysteme in sich abgeschlossen.

In Kapitel 5 haben wir gesehen, dass vier der Variationsgleichungen (5.193) der allgemeinen Bewegung vom Koordinatensystem unabhängig, zwei jedoch von der Wahl des Koordinatensystems abhängig sind. Die Variationsgleichungen der Parameter, die von einem Koordinatensystem abhängen, werden in diesem Kapitel hergeleitet.

Alle hier besprochenen Koordinatensysteme sind geradlinige Systeme, vorzugsweise mit orthonormierter Basis. Solche Systeme sind in der Literatur am intensivsten untersucht worden um geeignete aktuelle Probleme etwa in der Raumfahrt ausreichend zu beschreiben. Man darf jedoch nicht aus dem Auge verlieren, dass diese Systeme nur Spezialfälle der allgemeineren krummlinigen Systeme sind und daher nur von entsprechend eingeschränkter Aussagekraft. Die Entdeckung der allgemeinen Relativitätstheorie hat gezeigt, dass erst in krummlinigen Koordinaten Aussagen geöffnet werden können, die in geradlinigen Systemen verlustig gehen müssen. Vielleicht gibt diese Überlegung auch Anlass zu der Aussage, dass physikalische Erkenntnisse nur im Rahmen mathematischer Darstellbarkeit gewonnen werden können, dass physikalische Eigenschaften vermutlich noch verborgen sind, die erst mit heute noch nicht entdeckten mathematischen Verfahren gefunden werden können.

8.1 Das geozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

Das auf den Erdäquator bezogene und nach dem Sternhimmel orientierte Bezugssystem ist das fundamentale System, das für alle Zwecke erdgebundener und interplanetarer Raumflug-

missionen eingesetzt wird. Bezugsebene ist die Erdäquatorebene. Da die Polachse der Erde selbst bewegt ist, werden die Äquatorebene und damit das ganze System zu einer gewissen Epoche festgeschrieben. Alle Rechnungen in diesem System und alle Umrechnungen gelten stets nur für diese Epoche. Wie die Beschreibung in einem Basissystem zu einer Koordinatenepoche auf eine andere Koordinatenepoche umgerechnet werden muss, wird in Kapitel 9 besprochen.

Wir wollen also in diesem Kapitel annehmen, dass die Äquatorebene für eine (Koordinaten-) Epoche festliegt. Ebenso wird der auf den Sternhimmel bezogene Ursprung für eine Koordinatenzählung in der Äquatorebene für diese Epoche festgeschrieben. Hierzu wird der (fiktive) aufsteigende Schnittpunkt („Knoten“) der mittleren Sonnenbahn (= Ekliptik) mit der Äquatorebene gewählt. Dieser Punkt wird als *Frühlingspunkt* bezeichnet, weil auf der Nordhalbkugel der Erde dann Frühlingsanfang ist, wenn die Sonne von der Erde aus gesehen gerade diesen Punkt durchläuft. Wenn die Koordinaten von (mindestens einem) stellaren Objekt (Stern, Quasar, Galaxie, usw.) im gewählten Äquatorsystem bekannt sind, kann der Ort des Frühlingspunktes berechnet werden. Hierzu stellt die Astrometrie eine Reihe sehr sorgfältiger vermessener Fundamentalsterne zur Verfügung[1]. Aus der Kenntnis der Örter mehrerer solcher Fundamentalsterne kann die räumliche Orientierung des betreffenden Fundamentalsystems eindeutig berechnet werden.

Da die Sterne sich im täglichen scheinbaren Umschwung der Himmelssphäre um die Erde bezogen auf einen Beobachter auf der Erdoberfläche bewegen, wird dieses System in der sphärischen Astronomie das *bewegliche Äquatorsystem* genannt, alternativ auch das *Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem*. Dieses System wird in Aufgabenstellungen der Astronautik üblicherweise geozentrisch angesetzt, kann durch Parallelverschiebung aber auch in ein Baryzentrum, ein Topozentrum auf der Erdoberfläche, in einen erdumlaufenden Satelliten oder eine interplanetare Sonde mitgenommen werden, oder auch in einem anderen Himmelskörper, z. B. dem Mond, einem Planeten, Kometen, angenommen werden.

8.1.2 Koordinatendarstellungen im Äquatorsystem

Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem (siehe Bild 8-1) werde durch das orthonormierte Basissystem $\mathbf{p}_i$ aufgespannt. Die $\mathbf{p}_1$-Achse sei durch den Frühlingspunkt, die $\mathbf{p}_3$-Achse durch den Nordpol gerichtet, die $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1$ -Achse ergänze in der Äquatorebene, welche die durch $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ aufgespannte Ebene ist, das System. Als Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad r[\alpha, \delta] \tag{8.1}$$

werde die *Rektaszension* in der Äquatorebene vom Frühlingspunkt rechtsläufig im Stundenmaß gezählt

$$0^h \;\le\; \alpha \;\le\; 24^h \quad , \tag{8.2}$$

die *Deklination* positiv vom Äquator zum Nordpol, negativ zum Südpol

$$-90° \;\le\; \delta \;\le\; 90° \quad . \tag{8.3}$$

[1] Die scheinbaren Örter der Fundamentalsterne werden jährlich vom astronomischen Rechenzentrum in Heidelberg veröffentlicht. Es enthält (siehe AA 1984, p. IX) die mittleren und scheinbaren Örter von 1535 Sternen des FK5 (näheres hierzu in Kapitel 9)

r ist der geozentrische Radius des beobachteten Objektes. Werden stellare Objekte beobachtet, ist in den meisten Fällen der Abstand *r* nicht bekannt. Dann wird an Stelle des Vektors **r** mit dem Richtungsvektor

$$\mathbf{r}_0 \;\Leftrightarrow\; [\alpha,\delta] \tag{8.4}$$

gerechnet.

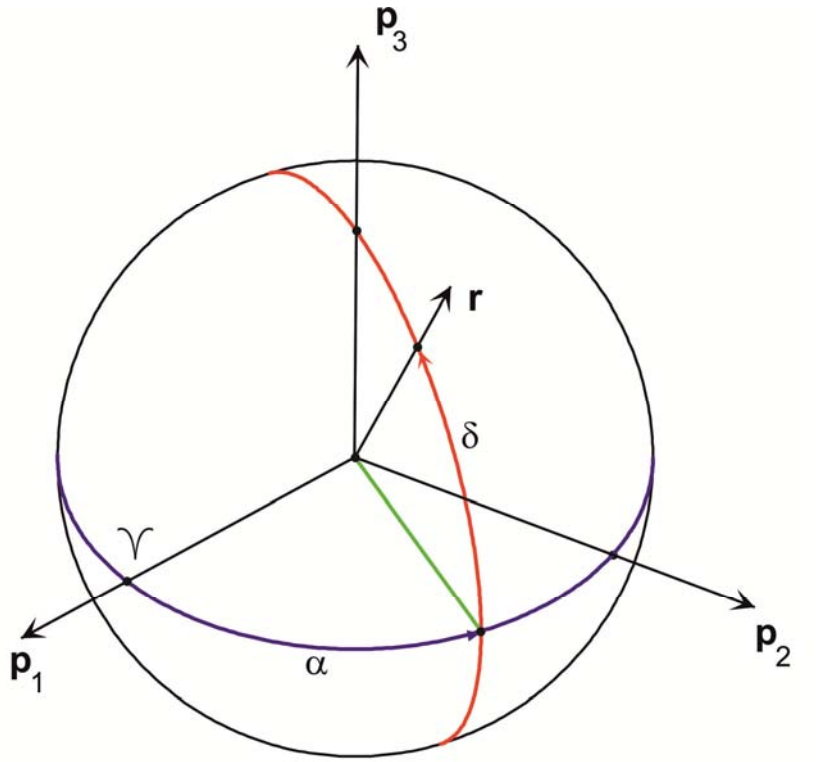


Bild 8-1: Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem = geozentrisches Frühlingspunkt-bezogenes Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten Rektaszension α und Deklination δ

Ein Ortsvektor habe die äquatorialen kartesischen Koordinaten x_i

$$\mathbf{r} \;=\; x^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{8.5}$$

Somit ist der Zusammenhang der Polarkoordinaten (α,δ) mit den kartesischen Koordinaten x^i gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\delta\cos\alpha \\ x_2 &= r\cos\delta\sin\alpha \\ x_3 &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Die Polarkoordinaten des Äquatorsystems werden aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^i\, x_i} \\
\sin\delta &= \frac{x_3}{r} \quad , \quad \cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} \\
\cos\alpha &= \frac{x_1}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \\
\sin\alpha &= \frac{x_2}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.122)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_1 - \dot{\delta}\, x_3 \cos\alpha - \dot{\alpha}\, x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_2 - \dot{\delta}\, x_3 \sin\alpha + \dot{\alpha}\, x_1 \\
\dot{x}_3 &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_3 + \dot{\delta}\, r\cos\delta
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{x^i\, \dot{x}_i}{r} \\
\dot{\alpha} &= \frac{x_1\, \dot{x}_2 - x_2\, \dot{x}_1}{r^2\cos^2\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \\
\dot{\delta} &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_3\, \dot{x}_1 - x_1\, \dot{x}_3\right)\cos\alpha - \left(x_2\, \dot{x}_3 - x_3\, \dot{x}_2\right)\sin\alpha\right] \quad , \quad (r > 0) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

8.1.3 Das Äquatorsystem als (inertiales) Fundamentalsystem

Im absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\, \mathbf{p}_i + x^i\, \dot{\mathbf{p}}_i \tag{8.10}
$$

ist die Variation $\dot{\mathbf{p}}_i$ eines Fundamentalsystems nicht bekannt. Wird also das (bewegliche) Äquatorsystem als das System zugrunde gelegt, auf das die Beschreibungen **aller** Bewegungen zurückgeführt werden sollen, werden für dieses und nur für dieses System die Variationen der Basisvektoren gleich Null gesetzt:

$$
\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System ist Fundamentalsystem} \quad . \tag{8.11}
$$

Allerdings unterliegt auch das bewegliche Äquatorsystem im Allgemeinen Bewegungen, die ab Abschnitt 9.3 beschrieben werden. Es ist also nötig, ein bestimmtes Äquatorsystem als **das** fundamentale System auszuzeichnen, das zu einer bestimmten *Fundamentalepoche* gilt. Es ist somit einsichtig, dass es genau nur ein Fundamentalsystem geben kann. Die Beschreibung aller Bewegungen muss dann letztlich auf dieses System zurückgeführt werden. Es ist erforderlich, bei allen Koordinatenangaben sehr präzise anzugeben, auf welches System sie sich beziehen.

In der Unkenntnis des absoluten Geschwindigkeitsvektors liegt auch begründet, weshalb der (absolute) Normalenvektor

$$\mathbf{c} \;=\; \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$$

einer Bewegung und damit eine momentane Bahnebene grundsätzlich nicht bestimmbar sind. Nach Formel (4.117) gilt für den absoluten Geschwindigkeitsvektor in äquatorialen Koordinaten

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \dot{r}\,\dot{\alpha}\cos\delta\,\mathbf{h}_2 + r\,\dot{\delta}\,\mathbf{h}_3 + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \tag{8.12}$$

mit dem (orthonormierten) Hilfssystem nach den Formeln (4.106) – (4.109)

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1 \;=\; \mathbf{r}_0 \;&=\; \cos\alpha\,\mathbf{p}_1 \;+\sin\alpha\,\mathbf{p}_2 \;&&=\; \mathbf{h}_2\times\mathbf{h}_3\\
\mathbf{h}_2 \;&=\; -\sin\alpha\,\mathbf{p}_1 \;+\cos\alpha\,\mathbf{p}_2 \;&&=\; \mathbf{h}_3\times\mathbf{h}_1\\
\mathbf{h}_3 \;&=\; -\sin\delta\cos\alpha\,\mathbf{p}_1 \;-\sin\delta\sin\alpha\,\mathbf{p}_2 \;+\cos\delta\,\mathbf{p}_3 \;&&=\; \mathbf{h}_1\times\mathbf{h}_2
\end{aligned} \tag{8.13}$$

und für die Variation des Einheitsortsvektors

$$\dot{\mathbf{r}}_0 \;=\; \dot{\alpha}\cos\delta\,\mathbf{h}_2 + \dot{\delta}\,\mathbf{h}_3 + \frac{1}{r}\,x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{8.14}$$

Mit den Formeln (4.128) und (4.129) gilt für den Richtungsvektor der Bahnnormalen

$$\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0 \;=\; \mathbf{r}_0\times\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \;=\; \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \;=\; \dot{\alpha}\cos\delta\,\mathbf{h}_3 - \dot{\delta}\,\mathbf{h}_2 + \frac{1}{r^2}\left(x^i\,\mathbf{p}_i\right)\cdot\left(x^j\,\dot{\mathbf{p}}_j\right) \quad . \tag{8.15}$$

Um von der Bewegung des Bezugssystems unabhängig zu werden, muss entweder $\mathbf{r}\times x^j\,\dot{\mathbf{p}}_j = 0$ oder $x^j\,\dot{\mathbf{p}}_j = 0$ sein. Das Basissystem muss also stets als Fundamentalsystem definiert werden können $\left(\dot{\mathbf{p}}_j \equiv 0\right)$ oder es muss *Hansen*-ideal sein $\left(x^j\,\dot{\mathbf{p}}_j = 0\right)$.

Wenn das betrachtete Äquatorsystem $\mathbf{p}_i$ nicht das Fundamentalsystem ist, hat es die Variation

$$\dot{\mathbf{p}}_i \;=\; p_i{}^j\,\mathbf{p}_j \tag{8.16}$$

und den Systemeigenbewegungsvektor (Drehvektor)

$$\mathbf{D}_p \;=\; D_p{}^j\,\mathbf{p}_j \tag{8.17}$$

mit den Koeffizienten

$$D_{p1} = p_{23} \;,\; D_{p2} = p_{31} \;,\; D_{p3} = p_{12} \quad . \tag{8.18}$$

Die p_{ij} sind aus der Transformation auf das Basissystem und ihrer Variation bekannt (siehe in Abschnitt 6.3.4).

Dieser Drehvektor $\mathbf{D}_p$ wird als der „absolute“ Eigenbewegungsvektor (Drehvektor) auf ein System bezogen, welches als Fundamentalsystem angenommen werden kann. Ist dies nicht möglich, muss der Eigenbewegungsvektor als relativer Eigenbewegungsvektor aufgefasst werden: $\mathbf{D}_p \;=\; \mathbf{D}_p^{(1)}$.

Die Aussage – das $\mathbf{p}_i$ Basissystem ist das Fundamentalsystem – ist wegen der Beziehung $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p\times\mathbf{p}_i$ gleichbedeutend mit:

➡ *Das* $\mathbf{p}_i$ *Basissystem ist genau dann das (inertiale) Fundamentalsystem, wenn sein Eigenbewegungsvektor (Drehvektor, allgemeiner Darboux'scher Vektor) der Nullvektor ist:*

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}_p = 0 \qquad . \tag{8.19}$$

8.1.4 Eigenbewegungen des Äquatorsystems

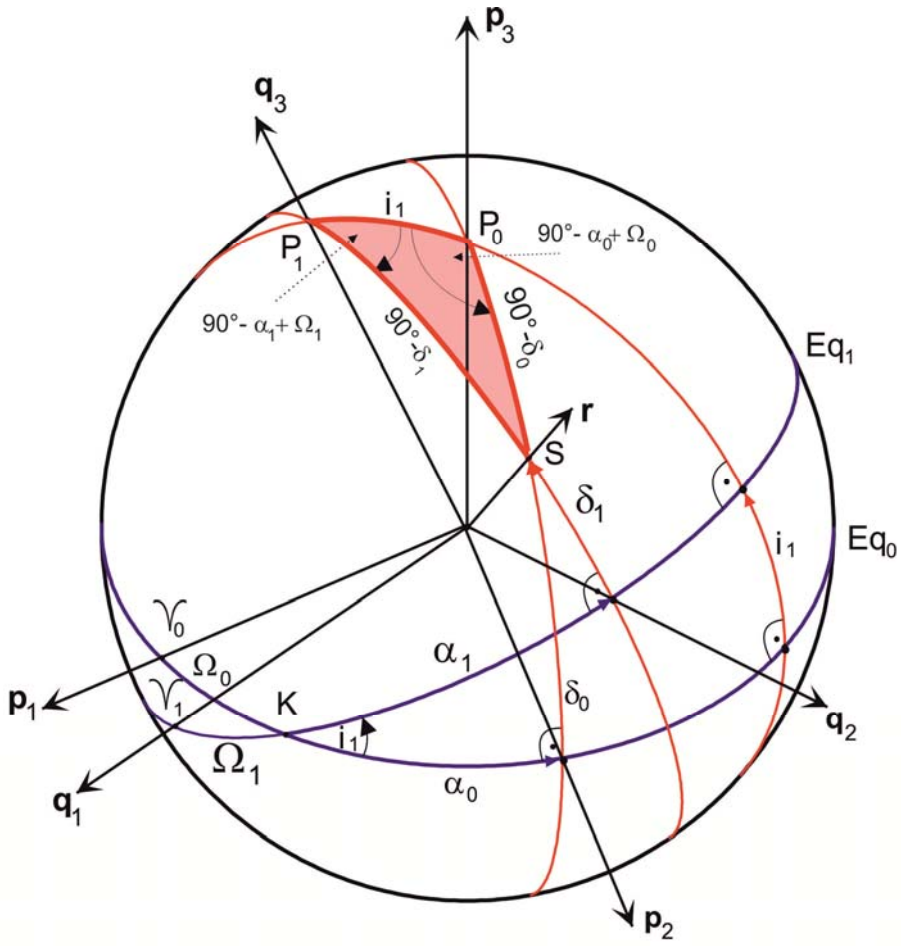


Bild 8-2: Zur Beschreibung der Eigenbewegung eines Äquatorsystems

Es sei ein festes Äquatorsystem Eq_0 mit der Basis $\mathbf{p}_i$ vorgegeben, das als Fundamentalsystem angenommen sei, dessen Basissystem daher die Bedingung

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$$

(und damit auch $d^n\mathbf{p}_i / dt^n \equiv 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) erfülle. Die Basisebene dieses Systems sei Eq_0, sein Pol P_0, Υ_0 der Bezugspunkt in der Basisebene für eine Koordinatendarstellung (siehe Bild 8-2). Gegenüber diesem System werde ein bewegliches $\mathbf{q}_j$ – Äquatorsystem Eq_1 angenommen mit Pol P_1 und Ursprung Υ_1. Dieses System habe die Neigung i_1 im Schnittpunkt K

der beiden Basisebenen Eq_0 und Eq_1. Es seien $\Omega_0 := \sphericalangle(\Upsilon_0, K)$, $\Omega_1 := \sphericalangle(\Upsilon_1, K)$. Die Transformationen zwischen dem ursprünglichen und festen $\mathbf{p}_i -$ und dem neuen $\mathbf{q}_j -$System

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \; \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j \tag{8.20}$$

hat mit dem Gleichungssystem (6.91) die Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos i_1 \sin\Omega_1 \sin\Omega_0 + \cos\Omega_1 \cos\Omega_0 \\
a_{12} &= -\cos i_1 \sin\Omega_1 \cos\Omega_0 + \cos\Omega_1 \sin\Omega_0 \\
a_{13} &= -\sin i_1 \sin\Omega_1 \\
a_{21} &= -\cos i_1 \cos\Omega_1 \sin\Omega_0 + \sin\Omega_1 \cos\Omega_0 \\
a_{22} &= \cos i_1 \cos\Omega_1 \cos\Omega_0 + \sin\Omega_1 \sin\Omega_0 \\
a_{23} &= \sin i_1 \cos\Omega_1 \\
a_{31} &= \sin i_1 \sin\Omega_0 \\
a_{32} &= -\sin i_1 \cos\Omega_0 \\
a_{33} &= \cos i_1 \quad .
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Ein beliebiger Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = y^j \mathbf{q}_j \tag{8.22}$$

habe die Polarkoordinaten Darstellungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r\left(\mathbf{p}_1 \cos\alpha_0 \cos\delta_0 + \mathbf{p}_2 \sin\alpha_0 \cos\delta_0 + \mathbf{p}_3 \sin\delta_0\right) = \\
&= r\left(\mathbf{q}_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 + \mathbf{q}_2 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 + \mathbf{q}_3 \sin\delta_1\right) \quad .
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Die Komponenten des Ortsvektors werden mit

$$x^i = y^j a_j{}^i \quad , \quad y^j = a^j{}_i x^i \tag{8.24}$$

transformiert. Der zugehörige Geschwindigkeitsvektor im $\mathbf{p}_i$-Fundamentalsystem ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{x}^i \mathbf{p}_i \qquad \left(\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0\right) \quad , \tag{8.25}$$

im bewegten $\mathbf{q}_j -$System

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \quad , \tag{8.26}$$

wobei

$$\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j \tag{8.27}$$

der relative auf das $\mathbf{q}_j -$System bezogene Geschwindigkeitsvektor ist. Seine Komponenten werden mit

$$\dot{x}^i = \dot{y}^j a_j{}^i + y^j \dot{a}_j{}^i \quad , \quad \dot{y}^j = \dot{x}^i a^j{}_i + x^i \dot{a}^j{}_i \tag{8.28}$$

transformiert. Mit den Formeln (6.99) lauten die Variationen der Transformationsmatrix

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\left(i_1\right)^{\cdot} a_{31} \sin\Omega_1 - \dot{\Omega}_1 a_{21} - \dot{\Omega}_0 a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -\left(i_1\right)^{\cdot} a_{32} \sin\Omega_1 - \dot{\Omega}_1 a_{22} + \dot{\Omega}_0 a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\left(i_1\right)^{\cdot} a_{33} \sin\Omega_1 - \dot{\Omega}_1 a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \left(i_1\right)^{\cdot} a_{31} \cos\Omega_1 + \dot{\Omega}_1 a_{11} - \dot{\Omega}_0 a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \left(i_1\right)^{\cdot} a_{32} \cos\Omega_1 + \dot{\Omega}_1 a_{12} + \dot{\Omega}_0 a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= \left(i_1\right)^{\cdot} a_{33} \cos\Omega_1 + \dot{\Omega}_1 a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \left(i_1\right)^{\cdot} a_{33} \sin\Omega_0 - \dot{\Omega}_0 a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -\left(i_1\right)^{\cdot} a_{33} \cos\Omega_0 + \dot{\Omega}_0 a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\left(i_1\right)^{\cdot} \sin i_1 \quad .
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

Der zugehörige absolute (also auf das Fundamentalsystem bezogene) Systemeigenbewegungsvektor (Drehvektor, „*Darboux*'scher Vektor") lautet

$$
\mathbf{D}_q := D_q{}^j \mathbf{q}_j \tag{8.30}
$$

mit den (zunächst unbekannten) Komponenten $D_q{}^j$. Damit kann Gleichung (8.26) auch ausführlich geschrieben werden

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + \left(y_3 D_{q2} - y_2 D_{q3}\right)\mathbf{q}_1 + \left(y_1 D_{q3} - y_3 D_{q1}\right)\mathbf{q}_2 + \left(y_2 D_{q1} - y_1 D_{q2}\right)\mathbf{q}_3 \quad . \tag{8.31}
$$

Bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System als einem Fundamentalsystem hat der absolute Geschwindigkeitsvektor die Darstellung

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\times\mathbf{r} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{r} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \tag{8.32}
$$

mit $\mathbf{D}_p \equiv 0$ wegen des Fundamentalsystems und der Bezeichnung

$$
\mathbf{D}_{qp} =: D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j \quad . \tag{8.33}
$$

Die Komponenten dieses relativen Systemeigenbewegungsvektors können entsprechend Bild 8-2 mit den Formeln (6.136) und den Zuordnungen $A \to \Omega_0$, $B \to i_1$, $C \to -\Omega_1$ aus dem System

$$
\begin{aligned}
D_{qp1} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \cos\Omega_1 - \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \sin\Omega_1 \\
D_{qp2} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \sin\Omega_1 + \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \cos\Omega_1 \\
D_{qp3} &= \dot{\Omega}_0 \cos i_1 - \dot{\Omega}_1
\end{aligned}
\tag{8.34}
$$

berechnet werden.

Wird umgekehrt ein relativer Zustandsvektor $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j$, $\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j \mathbf{q}_j$ im bewegten $\mathbf{q}_j$ – System vorgegeben, kann der Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystem nur mit Hilfe der Transformationen (8.20) über die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p &= \dot{x}^i \mathbf{p}_i = \dot{y}^j a_j{}^i \mathbf{p}_i + D_q{}^j \mathbf{q}_j \times y^k \mathbf{q}_k = \\ &= \dot{y}^j a_j{}^i \mathbf{p}_i + D_q{}^j a_j{}^i \mathbf{p}_i \times y^k a_k{}^m \mathbf{p}_m = \\ &= \dot{y}^j a_j{}^i \mathbf{p}_i + \left[D_q{}^j a_{j2}\, y^k a_{k3} - D_q{}^j a_{j3}\, y^k a_{k2} \right] \mathbf{p}_1 + \\ &\quad + \left[D_q{}^j a_{j3}\, y^k a_{k1} - D_q{}^j a_{j1}\, y^k a_{k3} \right] \mathbf{p}_2 + \\ &\quad + \left[D_q{}^j a_{j1}\, y^k a_{k2} - D_q{}^j a_{j2}\, y^k a_{k1} \right] \mathbf{p}_3\end{aligned} \tag{8.35}$$

hergestellt werden, wenn der Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q = D_q{}^j \mathbf{q}_j$ bekannt ist. Üblicherweise wird das aber nur bei Bezug auf ein Fundamentalsystem also bei Kenntnis des relativen Systemeigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{qp}$ möglich sein. In diesem Fall gilt

$$D_{qj} = D_{qpj} \quad , \text{ wenn } \mathbf{D}_p \equiv 0 \quad , \quad (j = 1,2,3) \qquad . \tag{8.36}$$

8.1.5 Relativ bewegte Äquatorsysteme

Es werde die Bewegung eines Äquatorsystems gegenüber einem als fundamental angenommenen festen Äquatorsystem betrachtet und zu zwei Zuständen (etwa zwei Zeitpunkte, wie etwa im Rahmen von Präzession und Nutation in Kapitel 9 behandelt) wechselseitig untersucht. Das erste System, das als $\mathbf{q}_j^{(1)}$-System bezeichnet werde, hat gegenüber dem festen System die Drehwinkel $\Omega_0, i_1, -\Omega_1$ wie in den Formeln (8.21) und (8.34) dargestellt.

Das zweite System werde als $\mathbf{q}_j^{(2)}$-System bezeichnet mit den analogen Drehwinkeln $\Omega_{02}, i_2, -\Omega_2$ (mit $\Omega_{02} = \Omega_0 + \Delta\Omega$) gegenüber dem Fundamentalsystem und der entsprechenden Rotationsmatrix aus dem Formelsystem (8.21), in der die neuen Winkel eingesetzt werden. In Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystem werden die Transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{(1)}{}_j &= a^{(1)}{}_j{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^{(1)j}{}_i \, \mathbf{q}^{(1)}{}_j \\ \mathbf{q}^{(2)}{}_j &= a^{(2)}{}_j{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^{(2)j}{}_i \, \mathbf{q}^{(2)}{}_j\end{aligned} \tag{8.37}$$

verwendet, deren Komponenten ausführlich lauten:

$$\begin{aligned}a^{(1)}{}_{11} &= \cos i_1 \sin\Omega_1 \sin\Omega_0 + \cos\Omega_1 \cos\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{12} &= -\cos i_1 \sin\Omega_1 \cos\Omega_0 + \cos\Omega_1 \sin\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{13} &= -\sin i_1 \sin\Omega_1 \\ a^{(1)}{}_{21} &= -\cos i_1 \cos\Omega_1 \sin\Omega_0 + \sin\Omega_1 \cos\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{22} &= \cos i_1 \cos\Omega_1 \cos\Omega_0 + \sin\Omega_1 \sin\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{23} &= \sin i_1 \cos\Omega_1 \\ a^{(1)}{}_{31} &= \sin i_1 \sin\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{32} &= -\sin i_1 \cos\Omega_0 \\ a^{(1)}{}_{33} &= \cos i_1\end{aligned} \tag{8.38}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
a^{(2)}{}_{11} &= \cos i_2 \sin\Omega_2 \sin\Omega_{02} + \cos\Omega_2 \cos\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{12} &= -\cos i_2 \sin\Omega_2 \cos\Omega_{02} + \cos\Omega_2 \sin\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{13} &= -\sin i_2 \sin\Omega_2 \\
a^{(2)}{}_{21} &= -\cos i_2 \cos\Omega_2 \sin\Omega_{02} + \sin\Omega_2 \cos\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{22} &= \cos i_2 \cos\Omega_2 \cos\Omega_{02} + \sin\Omega_2 \sin\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{23} &= \sin i_2 \cos\Omega_2 \\
a^{(2)}{}_{31} &= \sin i_2 \sin\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{32} &= -\sin i_2 \cos\Omega_{02} \\
a^{(2)}{}_{33} &= \cos i_2 \qquad .
\end{aligned}
\tag{8.39}
$$

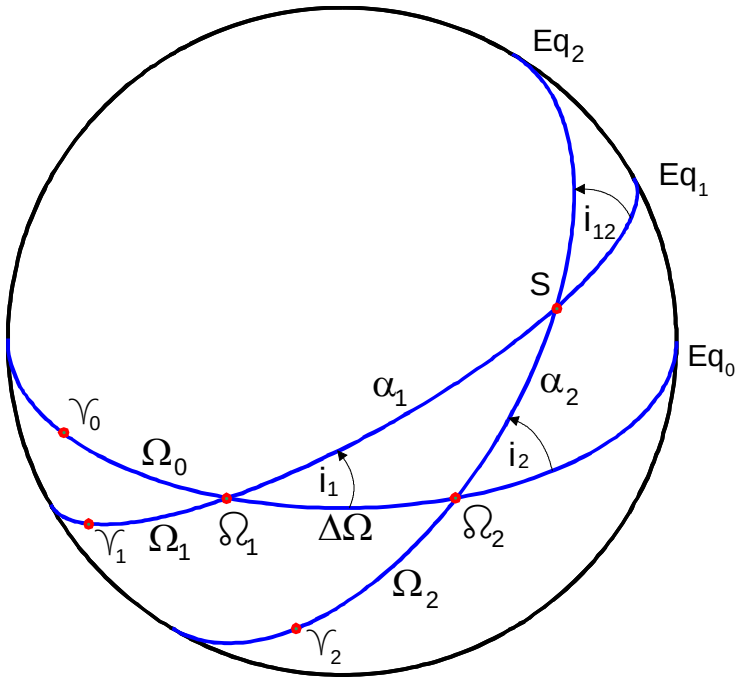


Bild 8-3: Relativ bewegte Äquatorsysteme

Bei bekannten Basisvektoren $\mathbf{q}^{(1)}_j, \mathbf{q}^{(2)}_j$ folgen aus den Gleichungen (8.37) die Beziehungen zwischen den Transformationsmatrizen[1]

$$a^{(1)j}{}_i \, \mathbf{q}^{(1)}{}_j \cdot \mathbf{q}^{(1)}{}_n = a^{(1)j}{}_i \, \delta_{jn} = a^{(1)}{}_{ni} \quad ,$$

somit

$$a^{(1)}{}_{ni} = a^{(2)k}{}_i \, \mathbf{q}^{(2)}{}_k \cdot \mathbf{q}^{(1)}{}_n \quad , \qquad a^{(2)}{}_{ni} = a^{(1)j}{}_i \, \mathbf{q}^{(1)}{}_j \cdot \mathbf{q}^{(2)}{}_n \quad . \tag{8.40}$$

[1] Vgl. die Formeln (7.9) bzw. (7.10) über das Herauf- und Herunterziehen der Indizes in Abschnitt 7.1.1

Für die Eigenbewegungsvektoren der beiden Systeme im jeweiligen Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystem

$$\mathbf{D}_{qp}^{(1)} =: D_{qp}^{(1)j}\,\mathbf{q}^{(1)}{}_j \quad , \quad \mathbf{D}_{qp}^{(2)} =: D_{qp}^{(2)k}\,\mathbf{q}^{(2)}{}_k \tag{8.41}$$

folgen entsprechend den Gleichungen (8.34) die Beziehungen

$$\begin{aligned} D_{qp\,1}^{(1)} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \cos\Omega_1 - \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \sin\Omega_1 \\ D_{qp\,2}^{(1)} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \sin\Omega_1 + \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \cos\Omega_1 \\ D_{qp\,3}^{(1)} &= \dot{\Omega}_0 \cos i_1 - \dot{\Omega}_1 \end{aligned} \tag{8.42}$$

und

$$\begin{aligned} D_{qp\,1}^{(2)} &= \left(i_2\right)^{\cdot} \cos\Omega_2 - \dot{\Omega}_{02} \sin i_2 \sin\Omega_2 \\ D_{qp\,2}^{(2)} &= \left(i_2\right)^{\cdot} \sin\Omega_2 + \dot{\Omega}_{02} \sin i_2 \cos\Omega_2 \\ D_{qp\,3}^{(2)} &= \dot{\Omega}_{02} \cos i_2 - \dot{\Omega}_2 \quad . \end{aligned} \tag{8.43}$$

Von besonderem Interesse ist der Bezug des Geschwindigkeitsvektors in den verschiedenen bewegten Systemen untereinander. Aus der Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q^{(1)} + \mathbf{D}_q^{(1)} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} + \mathbf{D}_q^{(2)} \times \mathbf{r} \tag{8.44}$$

wird die Bewegung zwischen den Zuständen 1 und 2 erfasst durch die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_q^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} + \left(\mathbf{D}_q^{(2)} - \mathbf{D}_q^{(1)}\right) \times \mathbf{r} \quad . \tag{8.45}$$

Die Systeme zu allen Zuständen seien als orthonormiert angenommen. Sei $\left(a_{ij}^{(21)}\right)$ die Rotationsmatrix vom $\mathbf{q}_j^{(2)}$-System in das $\mathbf{q}_k^{(1)}$-System

$$\mathbf{q}_j^{(2)} = a_j^{(21)k}\,\mathbf{q}_k^{(1)} \quad , \quad \mathbf{q}_k^{(1)} = a^{(21)j}{}_k\,\mathbf{q}_j^{(2)} \quad , \tag{8.46}$$

so lautet der relative Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(2)}$-Systems in Bezug auf das $\mathbf{q}_k^{(1)}$-System

$$\mathbf{D}_q^{(21)} := \mathbf{D}_q^{(2)} - \mathbf{D}_q^{(1)} = D_q^{(2)k}\,\mathbf{q}_k^{(2)} - D_q^{(1)k}\,\mathbf{q}_k^{(1)} = \left(D_q^{(2)k} - D_q^{(1)j}\; a^{(21)k}{}_j\right)\mathbf{q}_k^{(2)} \quad . \tag{8.47}$$

Mit den Bezeichnungen von Bild 8-3 lautet die Transformationsmatrix vom $\mathbf{q}_k^{(1)}$ – in das $\mathbf{q}_j^{(2)}$ – System (im Vergleich zu den Formeln (6.91) werden hier die Parameter $A \to \Omega_1 + \alpha_1$, $B \to i_{12}$, $C \to -\left(\Omega_2 + \alpha_2\right)$) zugeordnet

$$
\begin{aligned}
a^{(21)}{}_{11} &= \cos i_{12}\,\sin(\Omega_2+\alpha_2)\sin(\Omega_1+\alpha_1) + \cos(\Omega_2+\alpha_2)\cos(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{12} &= -\cos i_{12}\,\sin(\Omega_2+\alpha_2)\cos(\Omega_1+\alpha_1) + \cos(\Omega_2+\alpha_2)\sin(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{13} &= -\sin i_{12}\,\sin(\Omega_2+\alpha_2)\\
a^{(21)}{}_{21} &= -\cos i_{12}\,\cos(\Omega_2+\alpha_2)\sin(\Omega_1+\alpha_1) + \sin(\Omega_2+\alpha_2)\cos(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{22} &= \cos i_{12}\,\cos(\Omega_2+\alpha_2)\cos(\Omega_1+\alpha_1) + \sin(\Omega_2+\alpha_2)\sin(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{23} &= \sin i_{12}\,\cos(\Omega_2+\alpha_2)\\
a^{(21)}{}_{31} &= \sin i_{12}\,\sin(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{32} &= -\sin i_{12}\,\cos(\Omega_1+\alpha_1)\\
a^{(21)}{}_{33} &= \cos i_{12} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.48}
$$

Entsprechend hat der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(2)}$-Systems in Bezug auf das $\mathbf{q}_k^{(1)}$-System die Komponentendarstellung

$$
\begin{aligned}
D_q^{(21)}{}_1 &= (i_{12})^{\cdot}\cos(\Omega_2+\alpha_2) - (\dot\Omega_1+\dot\alpha_1)\sin i_{12}\sin(\Omega_2+\alpha_2)\\
D_q^{(21)}{}_2 &= (i_{12})^{\cdot}\sin(\Omega_2+\alpha_2) + (\dot\Omega_1+\dot\alpha_1)\sin i_{12}\cos(\Omega_2+\alpha_2)\\
D_q^{(21)}{}_3 &= (\dot\Omega_1+\dot\alpha_1)\cos i_{12} - (\dot\Omega_2+\dot\alpha_2) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.49}
$$

Wenn es darum geht, eine Bewegungsgleichung zu integrieren oder verschiedene Bezugssysteme untereinander zu vergleichen, muss sie stets auf das („feste“ = „inertiale“) zurücktransformiert und so die Eigenbewegung des Basissystems eliminiert werden. Erst anschließend kann wieder auf das aktuelle Bezugssystem vorwärts gerechnet werden.

Im nächsten Kapitel 9 werden einige bekannte Variationen des Äquatorsystems (Präzession in Abschnitt 9.3, Nutation in Abschnitt 9.4, Polbewegung in Abschnitt 9.5) untersucht. Es ist prinzipiell immer nötig, die Eigenbewegung eines Systems zu berücksichtigen. Prinzipiell ist von keinem System bekannt, ob es wirklich ein Fundamentalsystem im Sinne eines inertialen Systems (mit gleichförmig geradliniger nicht aber rotatorischer Eigenbewegung, d.h. verschwindendem Eigenbewegungsvektor) ist. Aus diesem Grund muss eigentlich immer auch bei der Darstellung eines „absoluten“ Eigenbewegungsvektors der Eigenbewegungsanteil des „fundamentalen“ (inertialen?) Bezugssystems als Unbekannte mit berücksichtigt werden. Für diesen Fall kann aus Gleichung (8.47) die Beziehung

$$
\mathbf{D}_q = D_q{}^j\mathbf{q}_j = \mathbf{D}_{qp} - \mathbf{D}_p = \left(D_{qp}{}^j - D_p{}^i a^j{}_i\right)\mathbf{q}_j \tag{8.50}
$$

erhalten werden, wenn $\mathbf{D}_p = D_p{}^i\mathbf{p}_i$ der „absolute“ Eigenbewegungsvektor des „fundamentalen“ $\mathbf{p}_i$-Systems ist mit unbekannten Koeffizienten D_{pi}. Diese gilt es entweder mit Methoden der Astrometrie zu bestimmen, wenn das nicht möglich ist oder wie etwa in Raumfahrtanwendungen nicht (dringend) nötig ist, zu vernachlässigen, d.h. das $\mathbf{p}_i$-System als Fundamentalsystem zu definieren.

8.2 Das geozentrische Ekliptiksystem

Als Ekliptik wird üblicherweise die Bahnebene der Sonne bei ihrer scheinbaren Bewegung um die Erde bezeichnet. Sie findet sich somit auf einem Großkreis um die Erde. Dieser scheinbaren Bewegung entspricht die Bewegung der Erde um die Sonne. Genau genommen

handelt es um die Bewegung des Schwerpunktes des Erde-Mond-Systems um das Baryzentrum des Sonnensystems. Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt etwa um ¾ des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt[1], also noch innerhalb des Erdkörpers. Dieser Punkt definiert somit die Bewegung der mittleren Sonne und damit die Lage der mittleren Ekliptik. Da der Mittelpunkt der Erde mal oberhalb mal unterhalb dieses Schwerpunktes liegt, hat die wahre Sonne im Verlauf eines synodischen Monats eine periodische Schwankung bezüglich der mittleren Ekliptik, die sich in einer Variation der ekliptikalen Breite der Sonne im Bereich $\Delta b < |0''.7|$ auswirkt. Die Bahn der wahren scheinbaren Sonne um die Erde wird gelegentlich auch als „wahre Ekliptik" bezeichnet. Die mittlere Ekliptik vernachlässigt zudem die periodischen Einflüsse der Planeten auf die Erdbahn, was einen Fehler von $1''$–$2''$ gegenüber der wahren Erdbahnebene ausmacht[2].

Die Berechnungen interplanetarer Bewegungen werden üblicherweise in heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten durchgeführt. Das Ekliptiksystem wird auf das bewegliche (Frühlingspunkt-bezogene) Erd-Äquatorsystem bezogen. Der aufsteigende Knoten der Ekliptik bezüglich des Erdäquatorsystems ist der Frühlingspunkt Υ , die Neigung der Ekliptik bezüglich des Äquators wird *Schiefe der Ekliptik* ε genannt. Alle diese Koordinatensysteme sind zeitabhängig. Es ist daher nötig, auf den Zeitbezug der Systeme zu achten. Basissystem ist jeweils das mittlere Äquatorsystem zu einem Referenz-Zeitpunkt (Epoche, Fundamentalsystem). Drehung dieses Systems um die mittlere Schiefe $\overline{\varepsilon}$ führt auf die mittlere Ekliptik. Im folgenden Abschnitt wird das Rechnen im Ekliptiksystem prinzipiell unabhängig vom Zeitbezug behandelt. Der Zeitbezug vor allem infolge von Präzession und Nutation wird systematisch in den Abschnitten 9.3 und 9.4 dargestellt.

8.2.1 Koordinatendarstellungen des Ekliptiksystems

Der Nordpol der Ekliptik ist in dieselbe Hemisphäre gerichtet wie der Nordpol des Äquatorsystems. Das orthonormierte Basissystem $\mathbf{q}_j^{(E)}$ des Ekliptiksystems hat die $\mathbf{q}_1^{(E)}$ – Achse zum Frühlingspunkt und die $\mathbf{q}_3^{(E)}$ – Achse zum ekliptikalen Nordpol gerichtet. Die $\mathbf{q}_2^{(E)} = \mathbf{q}_3^{(E)} \times \mathbf{q}_1^{(E)}$ -Achse ergänzt in der Ekliptik das System zum Rechtssystem.

Ein Zustandsvektor hat im ekliptikalen System die kartesischen Koordinaten y_j

$$\mathbf{r} = y^{(E)j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} \tag{8.51}$$

und die Polarkoordinaten ekliptikale Länge l

$$0° \le l \le 360° \quad , \tag{8.52}$$

ekliptikale Breite b

$$-90° \le b \le 90° \quad , \tag{8.53}$$

sowie die Distanz r und damit die Darstellung

---

[1] Siehe etwa in VOGT, H.-H. [1969], p. 65

[2] Der Begriff wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Man findet gelegentlich den Begriff „Ekliptik" als Synonym für „mittlere Ekliptik" und unterscheidet diese zur „wahren Sonnenbahn". In der vorliegenden Arbeit wird im Anschluss an die in der IAF üblichen Bezeichnungsweise zwischen „mittlerer" und „wahrer Ekliptik" unterschieden (siehe etwa in SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], etwa p. 115). Die Eigenbewegung der mittleren Ekliptik auf Grund der planetaren Präzession wird in Abschnitt 9.3.2 behandelt.

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l,b\right] \quad . \tag{8.54}$$

Der Zusammenhang der Polarkoordinaten mit den kartesischen Koordinaten y^j ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1^{(E)} &= r\cos b\cos l \\ y_2^{(E)} &= r\cos b\sin l \\ y_3^{(E)} &= r\sin b \quad . \end{aligned} \tag{8.55}$$

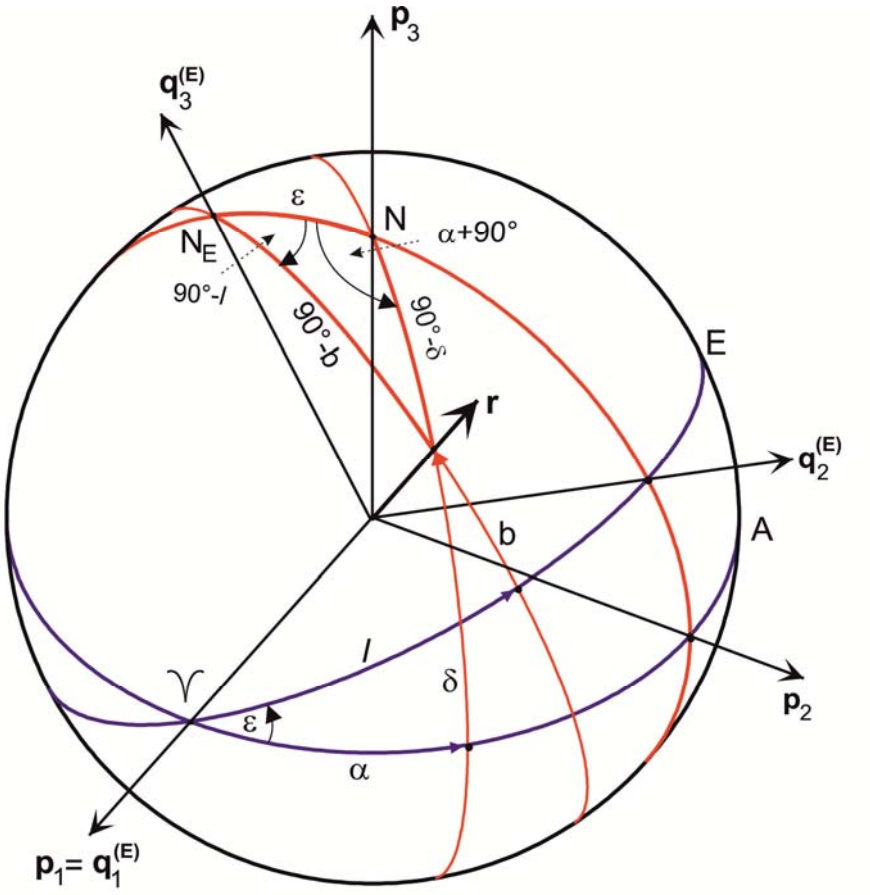


Bild 8-4: Das geozentrische Ekliptiksystem (Grundebene E, Pol NE) und das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem (Grundebene A, Pol N)

Die Polarkoordinaten des Ekliptiksystems werden aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{y^{(E)i}\, y_j^{(E)}} \\
\sin b &= \frac{y_3^{(E)}}{r} \quad , \quad \cos b = \sqrt{1-\sin^2 b} \\
\cos l &= \frac{y_1^{(E)}}{r\cos b} \quad , \quad (r\cos b > 0) \\
\sin l &= \frac{y_2^{(E)}}{r\cos b} \quad , \quad (r\cos b > 0) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.56}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.123)

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1^{(E)} &= \frac{\dot r}{r}\, y_1^{(E)} - \dot b\, y_3^{(E)} \cos l - \dot l\, y_2^{(E)} \\
\dot{y}_2^{(E)} &= \frac{\dot r}{r}\, y_2^{(E)} - \dot b\, y_3^{(E)} \sin l + \dot l\, y_1^{(E)} \\
\dot{y}_3^{(E)} &= \frac{\dot r}{r}\, y_3^{(E)} + \dot b\, r\cos b
\end{aligned}
\tag{8.57}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot r &= \frac{y^{(E)i}\, \dot y_i^{(E)}}{r} \\
\dot l &= \frac{y_1^{(E)}\, \dot y_2^{(E)} - y_2^{(E)}\, \dot y_1^{(E)}}{r^2\cos^2 b} \quad , \quad (r\cos b > 0) \\
\dot b &= \frac{1}{r^2}\left[\left(y_3^{(E)}\, \dot y_1^{(E)} - y_1^{(E)}\, \dot y_3^{(E)}\right)\cos l - \left(y_2^{(E)}\, \dot y_3^{(E)} - y_3^{(E)}\, \dot y_2^{(E)}\right)\sin l\right] \quad , \quad (r > 0) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.58}
$$

8.2.2 Transformationen

Die Schnittlinie von Ekliptik- und (beweglichem) Äquatorsystem verbindet Frühlings- (♈) und Herbstpunkt (♎). Der Frühlingspunkt definiert in beiden Systemen die Richtung des ersten Basisvektors $\mathbf{p}_1$ bzw. $\mathbf{q}_1^{(E)}$ in einem orthonormierten Basissystem. Entsprechend ist der Bezug der $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Basis des Ekliptiksystems zur $\mathbf{p}_i$ – Basis des Äquatorsystems gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \mathbf{p}_1 \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \mathbf{p}_2\cos\varepsilon + \mathbf{p}_3\sin\varepsilon \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= -\mathbf{p}_2\sin\varepsilon + \mathbf{p}_3\cos\varepsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} &= \dot{\mathbf{p}}_1 \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} &= \dot\varepsilon\,\mathbf{q}_3^{(E)} + \dot{\mathbf{p}}_2\cos\varepsilon + \dot{\mathbf{p}}_3\sin\varepsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} &= -\dot\varepsilon\,\mathbf{q}_2^{(E)} - \dot{\mathbf{p}}_2\sin\varepsilon + \dot{\mathbf{p}}_3\cos\varepsilon
\end{aligned}
\tag{8.59}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(E)} \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_2^{(E)} \cos\varepsilon - \mathbf{q}_3^{(E)} \sin\varepsilon \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_2^{(E)} \sin\varepsilon + \mathbf{q}_3^{(E)} \cos\varepsilon \\
\dot{\mathbf{p}}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1 \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= -\dot{\varepsilon}\,\mathbf{p}_3 + \dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} \cos\varepsilon - \dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \sin\varepsilon \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \dot{\varepsilon}\,\mathbf{p}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} \sin\varepsilon + \dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \cos\varepsilon \quad .
\end{aligned}
\tag{8.60}
$$

Wird der allgemeine Ansatz

$$
\mathbf{q}_j^{(E)} = a_j{}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i\,\mathbf{q}_j^{(E)} \tag{8.61}
$$

gemacht, lauten die Transformationskoeffizienten in Matrixschreibweise

$$
\left(a_{ji}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \tag{8.62}
$$

mit den Variationen

$$
\left(\dot{a}_{ji}\right) = \dot{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \\ 0 & -\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \end{pmatrix} \quad . \tag{8.63}
$$

Der Bezug des Ekliptiksystems zu beliebigen anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das bewegliche (Frühlingspunkt-bezogene) Äquatorsystem hergestellt. Um einen Zustand im Ekliptiksystem aus dem Äquatorsystem zu erhalten, erhält man aus den Formeln (8.61)

$$
\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i = x^i\,a^j{}_i\,\mathbf{q}_j^{(E)} = y^{(E)j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} = y^{(E)j}\,a_j{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{8.64}
$$

somit

$$
y^{(E)j} = x^i\,a^j_i \quad , \quad \dot{y}^{(E)j} = \dot{x}^i\,a^j{}_i + x^i\,\dot{a}^j_i \tag{8.65}
$$

und umgekehrt

$$
x^i = y^{(E)j}\,a_j{}^i \quad , \quad \dot{x}^i = \dot{y}^{(E)j}\,a_j{}^i + y^{(E)j}\,\dot{a}_j{}^i \quad , \tag{8.66}
$$

und ausführlich

$$
\begin{aligned}
y_1^{(E)} &= x_1 \\
y_2^{(E)} &= x_2 \cos\varepsilon + x_3 \sin\varepsilon \\
y_3^{(E)} &= -x_2 \sin\varepsilon + x_3 \cos\varepsilon
\end{aligned}
\tag{8.67}
$$

mit den Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1^{(E)} &= \dot{x}_1 \\
\dot{y}_2^{(E)} &= \dot{x}_2 \cos\varepsilon + \dot{x}_3 \sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}\,y_3 \\
\dot{y}_3^{(E)} &= -\dot{x}_2 \sin\varepsilon + \dot{x}_3 \cos\varepsilon - \dot{\varepsilon}\,y_2
\end{aligned}
\tag{8.68}
$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{(E)} \\ x_2 &= y_2^{(E)} \cos\varepsilon - y_3^{(E)} \sin\varepsilon \\ x_3 &= y_2^{(E)} \sin\varepsilon + y_3^{(E)} \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{8.69}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y}_1^{(E)} \\ \dot{x}_2 &= \dot{y}_2^{(E)} \cos\varepsilon - \dot{y}_3^{(E)} \sin\varepsilon - \dot{\varepsilon}\, x_3 \\ \dot{x}_3 &= \dot{y}_2^{(E)} \sin\varepsilon + \dot{y}_{13}^{(E)} \cos\varepsilon + \dot{\varepsilon}\, x_2 \quad . \end{aligned} \tag{8.70}$$

Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen wird aus den Beziehungen (8.6) auf Seite 314 und (8.55)

$$\begin{aligned} \cos l \cos b &= \cos\alpha \cos\delta \\ \sin l \cos b &= \sin\alpha \cos\delta \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon \\ \sin b &= -\sin\alpha \cos\delta \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{8.71}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\delta &= \cos l \cos b \\ \sin\alpha \cos\delta &= \sin l \cos b \cos\varepsilon - \sin b \sin\varepsilon \\ \sin\delta &= \sin l \cos b \sin\varepsilon + \sin b \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{8.72}$$

mit den Variationen relativ zum Ekliptiksystem[1]

$$\begin{aligned} \dot{l}\cos b = {} & \dot{\alpha}\cos\delta\,(\sin\alpha\sin l + \cos\alpha\cos l\cos\varepsilon) + \\ & + \dot{\delta}\left[\cos l\,(-\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon) + \sin l\cos\alpha\sin\delta\right] + \\ & + \dot{\varepsilon}\cos l\sin b \end{aligned} \tag{8.73}$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = {} & \dot{\alpha}\cos\delta\left[-\cos b\cos\alpha\sin\varepsilon + \sin b\,(-\sin l\cos\alpha\cos\varepsilon + \cos l\sin\alpha)\right] + \\ & + \dot{\delta}\left[\cos b\,(\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon) + \right. \\ & \left. + \sin l\sin b\,(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) + \cos l\sin b\cos\alpha\sin\delta\right] - \\ & - \dot{\varepsilon}\sin l \end{aligned} \tag{8.74}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum beweglichen (Frühlingspunkt-bezogenen) Äquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\cos\delta = {} & \dot{l}\cos b\,(\cos\varepsilon\cos\alpha\cos l + \sin l\sin\alpha) + \\ & + \dot{b}\left[-\cos\alpha\,(\sin l\sin b\cos\varepsilon + \cos b\sin\varepsilon) + \sin\alpha\cos l\sin b\right] - \\ & - \dot{\varepsilon}\cos\alpha\sin\delta \end{aligned} \tag{8.75}$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} = {} & \dot{l}\cos b\left[\cos\delta\cos l\sin\varepsilon + \sin\delta\,(-\cos\varepsilon\cos l\sin\alpha + \sin l\cos\alpha)\right] + \\ & + \dot{b}\left[\cos\delta\,(-\sin l\sin b\sin\varepsilon + \cos b\cos\varepsilon) + \right. \\ & \left. + \sin\delta\sin\alpha\,(\sin l\sin b\cos\varepsilon + \cos b\sin\varepsilon) + \sin\delta\cos\alpha\cos l\sin b\right] + \\ & + \dot{\varepsilon}\sin\alpha \quad . \end{aligned} \tag{8.76}$$

[1] siehe auch die Formeln (6.117) bis (6.121)

Bild 8-5 zeigt den Sternhimmel wie er vom Mittelpunkt der Erde gesehen würde in äquatorialen Koordinaten. Eingezeichnet sind die Ekliptik (sinusförmige Kurve um den Äquator), der ekliptikale Nordpol (EN) und der ekliptikale Südpol (ES). Die andere markante Kurve (in Magenta) ist der galaktische Äquator mit dem galaktischen Nordpol (GN) und dem galaktischen Südpol (GS). ◄

8.2.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das äquatoriale Fundamentalsystem

Der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j^{(E)}$ des Ekliptiksystems ($\mathbf{q}_j^{(E)}$ – System) in Bezug auf das (bewegliche) Äquatorsystem ($\mathbf{p}_i$ – System) hat nach dem Formelsystem (6.136), wenn dort $A = C = 0$, $B = \varepsilon$ gesetzt werden, die Darstellung

$$\mathbf{D}_{qp} = \dot{\varepsilon}\,\mathbf{q}_1^{(E)} \quad . \tag{8.77}$$

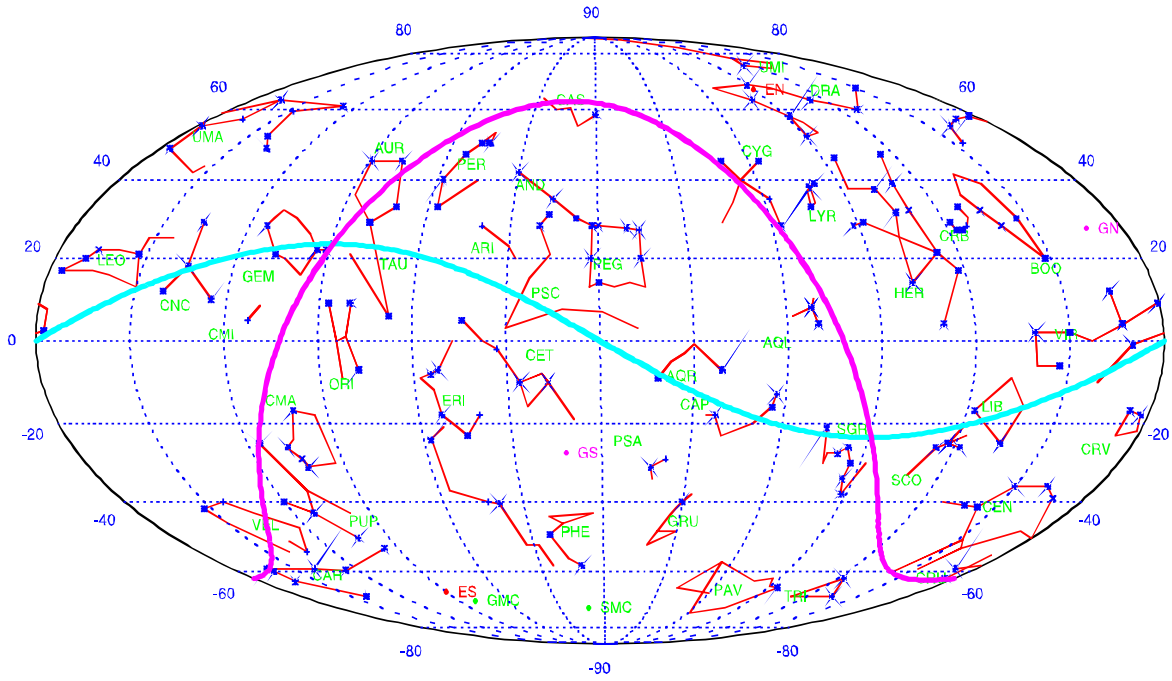


Bild 8-5: Ekliptik und galaktischer Äquator vor dem Sternhintergrund in äquatorialen Koordinaten, EN - ekliptikaler Nordpol, ES - ekliptikaler Südpol, GN - galaktischer Nordpol, GS - galaktischer Südpol

Umgekehrt lautet der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{pq} = \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q = D_{pq}{}^i \mathbf{p}_i$ in Bezug auf das $\mathbf{q}_j$ – System nach den Gleichungen (6.142)

$$\mathbf{D}_{pq} = -\dot{\varepsilon}\,\mathbf{p}_1 \quad . \tag{8.78}$$

Der relative Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_q$ eines bewegten Objektes im Ekliptiksystem hat im Bezug auf den relativen Geschwindigkeitsvektor im Äquatorsystem (mit Formel (6.48) neben den Beziehungen (8.68) daher auch die äquivalente Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;=\; \dot{\mathbf{r}}_p \;-\; \dot{\varepsilon}\,\mathbf{q}_1^{(E)} \times \mathbf{r} \qquad . \tag{8.79}$$

Wird hier nach Beziehung (8.64) $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(E)}$ eingesetzt, wird

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;=\; \dot{\mathbf{r}}_p - \dot{\varepsilon}\, y_2\, \mathbf{q}_3^{(E)} + \dot{\varepsilon}\, y_3\, \mathbf{q}_2^{(E)}$$

und mit $\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(E)}$, $\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i$ auch

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;=\; \dot{x}^i\, a^k{}_i\, \mathbf{q}_k^{(E)} - \dot{\varepsilon}\, y_2\, \mathbf{q}_3^{(E)} + \dot{\varepsilon}\, y_3\, \mathbf{q}_2^{(E)} \qquad ,$$

also

$$\dot{\mathbf{r}}_q \;=\; \dot{x}_1\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \left(\dot{x}_2 \cos\varepsilon + \dot{x}_3 \sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}\, y_3\right) \mathbf{q}_2^{(E)} + \left(-\dot{x}_2 \sin\varepsilon + \dot{x}_3 \cos\varepsilon - \dot{\varepsilon}\, y_2\right) \mathbf{q}_3^{(E)} \tag{8.80}$$

wie in den Beziehungen (8.68). Umgekehrt ist wegen (8.59) bzw. (8.60)

$$\mathbf{D}_{pq} \;=\; -\mathbf{D}_{qp} \;=\; -\dot{\varepsilon}\, \mathbf{q}_1^{(E)} \;=\; -\dot{\varepsilon}\, \mathbf{p}_1 \tag{8.81}$$

und somit

$$\dot{\mathbf{r}}_p \;=\; \dot{\mathbf{r}}_q + \dot{\varepsilon}\, \mathbf{p}_1 \times \mathbf{r} \;=\; \dot{y}^j\, a_j{}^i \mathbf{p}_i + \dot{\varepsilon}\, x_2\, \mathbf{p}_3 - \dot{\varepsilon}\, x_3\, \mathbf{p}_2 = \dot{x}^i\, \mathbf{p}_i$$

bzw. wie in den Gleichungen (8.70)

$$\dot{\mathbf{r}}_p \;=\; \dot{y}_1\, \mathbf{p}_1 + \left(\dot{y}_2 \cos\varepsilon - \dot{y}_3 \sin\varepsilon - \dot{\varepsilon}\, x_3\right) \mathbf{p}_2 + \left(\dot{y}_2 \sin\varepsilon + \dot{y}_3 \cos\varepsilon + \dot{\varepsilon}\, x_2\right) \mathbf{p}_2 \qquad . \tag{8.82}$$

Um nachzuprüfen, ob das $\mathbf{p}_i$ – Basis-Äquatorsystem wirklich ein Fundamentalsystem ist, muss zunächst für den absoluten Eigenbewegungsvektor dieses Systems $\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i \equiv 0$ postuliert werden. Im $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptiksystem werde er durch $\mathbf{D}_q^{(0)}$ bezeichnet:

$$\mathbf{D}_p \;=\; D_p{}^i\, \mathbf{p}_i \;=:\; \mathbf{D}_q^{(0)} \;=:\; D_q^{(0)j}\, \mathbf{q}_j^{(E)} \qquad . \tag{8.83}$$

Somit hat er im $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptiksystem die Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} D_q^{(0)}{}_1 \;&=\; D_{p1} \\ D_q^{(0)}{}_2 \;&=\; D_{p2}\, \cos\varepsilon + D_{p3}\, \sin\varepsilon \\ D_q^{(0)}{}_3 \;&=\; -D_{p2}\, \sin\varepsilon + D_{p3}\, \cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{8.84}$$

Ist umgekehrt der absolute Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Basis-Äquatorsystems im $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptiksystem in der Gestalt $\mathbf{D}_q^{(0)} = D_q^{(0)j}\, \mathbf{q}_j^{(E)}$ vorgegeben, errechnen sich seine Komponenten im $\mathbf{p}_i$ – System aus den Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} D_{p1} \;&=\; D_q^{(0)}{}_1 \\ D_{p2} \;&=\; D_q^{(0)}{}_2 \cos\varepsilon - D_q^{(0)}{}_3\, \sin\varepsilon \\ D_{p3} \;&=\; D_q^{(0)}{}_2 \sin\varepsilon + D_q^{(0)}{}_3\, \cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{8.85}$$

Anmerkung: In den Komponenten $D_{pi}, D_q^{(0)}{}_j$ können die Indizes im vorliegenden Fall nur deshalb heruntergezogen werden, da die Basen der beiden Systeme orthonormiert sind:

$D_{pi} = D_p{}^i$, $D_q^{(0)}{}_j = D_q^{(0)j}$ (vgl. Abschnitt 7.1.1). Andernfalls müssten die kovarianten und kontravarianten Parameter getrennt behandelt werden ($D_{pi} \neq D_p{}^i$, $D_q^{(0)}{}_j \neq D_q^{(0)j}$).

8.2.4 Systembezogene Darstellungen eines Geschwindigkeitsvektors

Um das Transformationsverhalten bei mehrfach gekoppelten Transformationen und damit die Anwendung des Additionstheorems der Eigenbewegungsvektoren beispielhaft zu erläutern, werde angenommen, dass das betrachtete (hier nicht näher spezifizierte) Ekliptiksystem zunächst in ein zeitabhängiges also nicht-fundamentales Äquatorsystem transformiert und erst anschließend auf das als fundamental angenommene Äquatorsystem bezogen werde. Entsprechende Herleitungen für spezielle weitere Ekliptik- bzw. Äquatorsysteme und insbesondere der Kombination mit zusätzlichen Transformationen können nach den hier gegebenen Beispielen analog durchgeführt werden.

Gegeben seien der Ortsvektor $\mathbf{r}$ und der absolute Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ einer Bewegung. Der Geschwindigkeitsvektor hat im $\mathbf{q}_j^{(E)}-$Ekliptiksystem die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \quad , \tag{8.86}$$

wenn $\dot{\mathbf{r}}_q$ der relative auf das $\mathbf{q}_j^{(E)}-$System bezogene Geschwindigkeitsvektor und $\mathbf{D}_q$ der absolute Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(E)}-$Systems ist. Ferner hat er die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p^{(1)} + \mathbf{D}_p^{(1)} \times \mathbf{r} \quad , \tag{8.87}$$

wenn $\dot{\mathbf{r}}_p^{(1)}$ der relative auf das zeitabhängige Frühlingspunkt ausgerichtete $\mathbf{p}_k^{(1)}-$Äquatorsystem bezogene Geschwindigkeitsvektor ist und $\mathbf{D}_p^{(1)}$ der absolute Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_k^{(1)}-$Systems ist. Außerdem bei Bezug auf das als fundamental angenommene $\mathbf{p}_i-$Äquatorsystem

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \quad , \tag{8.88}$$

wenn $\dot{\mathbf{r}}_p$ der relative Geschwindigkeitsvektor ist und $\mathbf{D}_p$ der (absolute) Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i-$ Systems ist. Dieser müsste identisch im Fall eines Fundamentalsystems verschwinden, wird im vorliegenden Formalismus jedoch stets mitgeführt. Damit kann letztendlich der Nachweis ermöglicht werden, ob es sich bei diesem System wirklich um ein fundamentales System handelt oder nicht.

Da die absoluten Systemeigenbewegungsvektoren (zunächst) nicht als bekannt angenommen werden dürfen, kann nur die Eigenbewegung eines Systems relativ zu einem anderen als bekannt anzusehenden System berechnet werden. Der relative Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(E)}-$Ekliptiksystems bezüglich des zeitabhängigen $\mathbf{p}_k^{(1)}-$Äquatorsystems sei

$$\mathbf{D}_{qp}^{(1)} := \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p^{(1)} =: D_{qp}^{(1)j} \mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{8.89}$$

Das $\mathbf{p}_k^{(1)}-$Äquatorsystem habe bei Bezug auf das (fundamentale) $\mathbf{p}_i-$ System den Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{p\,p}^{(1)} := \mathbf{D}_p^{(1)} - \mathbf{D}_p =: D_{p\,p}^{(1)\,k} \mathbf{p}_k^{(1)} \quad . \tag{8.90}$$

Damit folgen für die relativen Geschwindigkeitsvektoren die Darstellungen

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_p^{(1)} + \mathbf{D}_{p\,p}^{(1)} \times \mathbf{r} \quad ; \quad \dot{\mathbf{r}}_p^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp}^{(1)} \times \mathbf{r} \quad , \tag{8.91}$$

somit

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp}^{(1)} \times \mathbf{r} + \mathbf{D}_{p\,p}^{(1)} \times \mathbf{r} \quad . \tag{8.92}$$

Schließlich hat der absolute Geschwindigkeitsvektor bei Vorgabe des zum $\mathbf{q}_j -$Ekliptiksystem relativen Geschwindigkeitsvektors die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_{qp}^{(1)} + \mathbf{D}_{p\,p}^{(1)} + \mathbf{D}_p \right) \times \mathbf{r} \quad . \tag{8.93}$$

Dieser kann jedoch nur berechnet werden, wenn der absolute Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p$ des $\mathbf{p}_i -$ Systems bekannt ist bzw. dieses System als fundamental angenommen werden darf, so dass dann $\mathbf{D}_p \equiv 0$ gesetzt werden kann.

Um die Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren berechnen zu können, muss zunächst der Ortsvektor in den verschiedenen Systemen bekannt sein

$$\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(E)} = z^k \mathbf{p}_k^{(1)} = x^i \mathbf{p}_i \tag{8.94}$$

mit den zugehörenden Transformationen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j^{(E)} &= a^{(E)\,k}_{\;\;j}\, \mathbf{p}_k^{(1)} \quad ; \quad \mathbf{p}_k^{(1)} = a^{(E)\,j}_{\;\;k}\, \mathbf{q}_j^{(E)} \\ \mathbf{p}_k^{(1)} &= a^{(A)\,i}_{\;\;k}\, \mathbf{p}_i \quad ; \quad \mathbf{p}_i = a^{(A)k}_{\;\;\;i}\, \mathbf{p}_k^{(1)} \end{aligned} \tag{8.95}$$

und entsprechend für die Komponenten

$$\begin{aligned} z^k &= y^j\, a^{(E)}_{\;\;j}{}^{k} \quad ; \quad y^j = z^k\, a^{(E)j}_{\;\;\;k} \\ x^i &= z^k\, a^{(A)}_{\;\;k}{}^{i} \quad ; \quad z^k = x^i\, a^{(A)k}_{\;\;\;i} \quad , \end{aligned} \tag{8.96}$$

somit

$$x^i = y^j\, a^{(E)}_{\;\;j}{}^{k}\; a^{(A)}_{\;\;k}{}^{i} \quad ; \quad y^j = x^i\, a^{(A)k}_{\;\;\;i}\; a^{(E)j}_{\;\;\;k} \quad . \tag{8.97}$$

Die Variationen dieser Koeffizienten zur jeweiligen Umrechnung der relativen Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j\, \mathbf{q}_j^{(E)} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_p^{(1)} = \dot{z}^k\, \mathbf{p}_k^{(1)} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i\, \mathbf{p}_i \tag{8.98}$$

lauten dann

$$\dot{z}^k = \dot{y}^j\, a^{(E)}_{\;\;j}{}^{k} + y^j\, \dot{a}^{(E)}_{\;\;j}{}^{k} \quad ; \quad \dot{x}^i = \dot{z}^k\, a^{(A)}_{\;\;k}{}^{i} + z^k\, \dot{a}^{(A)}_{\;\;k}{}^{i} \tag{8.99}$$

sowie

$$\dot{z}^k = \dot{x}^i\, a^{(A)k}_{\;\;\;i} + x^i\, \dot{a}^{(A)k}_{\;\;\;i} \quad ; \quad \dot{y}^j = \dot{z}^k\, a^{(E)j}_{\;\;\;k} + z^k\, \dot{a}^{(E)j}_{\;\;\;k} \tag{8.100}$$

und schließlich bei Bezug des $\mathbf{q}_j^{(E)} -$Ekliptiksystems auf das $\mathbf{p}_i -$ System unter Übergang über das zeitabhängige $\mathbf{p}_k^{(1)} -$Äquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \dot{y}^j\, a^{(E)}{}_j{}^k\, a^{(A)}{}_k{}^i + y^j\, \dot{a}^{(E)}{}_j{}^k\, a^{(A)}{}_k{}^i + y^j\, a^{(E)}{}_j{}^k\, \dot{a}^{(A)}{}_k{}^i \\ \dot{y}^j &= \dot{x}^i\, a^{(A)k}{}_i\, a^{(A)}{}_k{}^j + x^i\, \dot{a}^{(A)k}{}_i\, a^{(E)j}{}_k + x^i\, a^{(A)k}{}_i\, \dot{a}^{(E)j}{}_k \quad . \end{aligned} \tag{8.101}$$

Die hierfür benötigte Transformationsmatrix $\left(a^{(E)}{}_{jk}\right)$ entspricht der Matrix $\left(a_{ji}\right)$ im System (8.62) und die Variationsmatrix $\left(\dot{a}^{(E)}{}_{jk}\right)$ dem System (8.63), sowie $\left(a^{(A)}{}_{ki}\right)$ dem System (8.21) oder (8.38) und die Variation $\left(\dot{a}^{(A)}{}_{ki}\right)$ dem System (8.29).

Die relativen Systemeigenbewegungsvektoren

$$\mathbf{D}^{(1)}_{p\,p} = D^{(1)\,k}_{p\,p}\,\mathbf{p}^{(1)}_k \quad ; \quad \mathbf{D}^{(1)}_{q\,p} = D^{(1)\,j}_{q\,p}\,\mathbf{q}^{(E)}_j \quad ; \quad \mathbf{D}_p = D_p{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{8.102}$$

haben nach den Beziehungen (8.34) und (8.42) die Koordinaten

$$\begin{aligned} D^{(1)}_{p\,p1} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \cos\Omega_1 - \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \sin\Omega_1 \\ D^{(1)}_{p\,p2} &= \left(i_1\right)^{\cdot} \sin\Omega_1 + \dot{\Omega}_0 \sin i_1 \cos\Omega_1 \\ D^{(1)}_{p\,p3} &= \dot{\Omega}_0 \cos i_1 - \dot{\Omega}_1 \quad , \end{aligned} \tag{8.103}$$

wenn Ω_0 die Rektaszension des aufsteigenden Knotens des $\mathbf{p}^{(1)}_k$ – Äquatorsystem im $\mathbf{p}_i$ – System ist, i_1 die Inklination dieses Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System und Ω_1 der Winkel zwischen Knoten und Ursprung im $\mathbf{p}^{(1)}_k$ – System.

Wenn ferner ε die Schiefe der Ekliptik des $\mathbf{q}^{(E)}_j$ – Ekliptiksystems bezogen auf das zeitvariable $\mathbf{p}^{(1)}_k$ – System sei, hat der Eigenbewegungsvektor dieses Systems nach den Formeln (8.77) die Komponenten

$$D_{qp}{}^{(1)}{}_1 = \dot{\varepsilon} \;,\; D_{qp}{}^{(1)}{}_2 = D_{qp}{}^{(1)}{}_3 = 0 \;. \tag{8.104}$$

Die Koeffizienten des (absoluten) Systemeigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_p$ sind entweder gleich null, wenn es sich um ein Fundamentalsystem handelt, oder müssen als Unbekannte mitgeschleppt werden, die es durch Beobachtung zu bestimmen gilt.

Der Geschwindigkeitsvektor (8.93) im $\mathbf{q}^{(E)}_j$ – Ekliptiksystem muss in allen Komponenten durch die $\mathbf{q}^{(E)}_j$ – Basis ausgedrückt werden. Somit ergibt sich

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j \mathbf{q}^{(E)}_j + \left(D^{(1)\,j}_{qp}\,\mathbf{q}^{(E)}_j + D^{(1)\,k}_{p\;p}\,a^{(E)\,j}{}_k\,\mathbf{q}^{(E)}_j + D_p{}^i\,a^{(A)k}{}_i\,a^{(E)\,j}{}_k\,\mathbf{q}^{(E)}_j\right) \times y^j \mathbf{q}^{(E)}_j \quad . \tag{8.105}$$

8.3 Das galaktische System

8.3.1 Koordinatendarstellungen des galaktischen Systems II

Das galaktische System wird zur Darstellung von interstellaren Objekten und Vorgängen bei Bezug auf den galaktischen Äquator benutzt (siehe auch Bild 8-5). Der Abstand dieser Objekte vom Sonnensystem ist nur ungenau oder meist gar nicht bekannt, so dass in diesem System üblicherweise nur Winkelkoordinaten benutzt werden, als Winkel im galaktischen Äquator (= galaktische Ebene) die *galaktische Länge* l^{II}

$$0° \le l^{II} \le 360° \tag{8.106}$$

und die *galaktische Breite* b^{II} senkrecht zum galaktischen Äquator zu den galaktischen Polen

$$-90° \le b^{II} \le 90° \quad . \tag{8.107}$$

Der Index *II* deutet an, dass früher ein anderes galaktisches System l^I, b^I, verwendet wurde, das noch ungenauer als das neue bekannt war und jetzt nicht mehr verwendet wird. Wenn keine Verwechslungen auftreten und auch keine Verwechslungen mit dem Ekliptiksystem zu erwarten sind, ist es üblich, die galaktischen Winkelkoordinaten ohne Index (l, b) zu verwenden. (Dies wird aber im vorliegenden Bericht nicht angewendet.)

Der Bezug des galaktischen Systems zum beweglichen Äquatorsystem (siehe Abschnitt 8.1) wird durch Festlegung des galaktischen Nordpols in äquatorialen Koordinaten geleistet

$$\alpha_G = 12^h49^m.0 \quad , \quad \delta_G = +27°24' \quad \text{(B1950.0)} \tag{8.108}$$

und des Nullpunkts auf dem galaktischen Äquator, der vom aufsteigenden Knoten (entgegen der Zählung von l^{II}) den Abstand

$$l_0^{II} = -33° \quad \text{(B1950.0)} \tag{8.109}$$

hat. Diese Zahlenwerte[1] beziehen sich auf die Besselsche Epoche 1950.0. Für die Umrechnung ins und vom beweglichen Äquatorsystem müssen also alle Werte in diesem System auf das mittlere Äquinoktium und den mittleren Äquator B1950.0 bezogen sein (siehe hierzu Abschnitt 9.1.3.3).

8.3.2 Transformationen

Der Bezug des galaktischen Systems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das geozentrische bewegliche Äquatorsystem hergestellt. Nach Bild 8-6 können die galaktischen Winkelkoordinaten l^{II}, b^{II} bei Vorgabe der äquatorialen Koordinaten α, δ aus dem folgenden System berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos\left(l^{II} - l_0^{II}\right)\cos b^{II} &= \sin\left(\alpha - \alpha_G\right)\cos\delta \\ \sin\left(l^{II} - l_0^{II}\right)\cos b^{II} &= \cos\left(\alpha - \alpha_G\right)\cos\delta\sin\delta_G - \sin\delta\cos\delta_G \\ \sin b^{II} &= \cos\left(\alpha - \alpha_G\right)\cos\delta\cos\delta_G + \sin\delta\sin\delta_G \end{aligned} \tag{8.110}$$

und umgekehrt die äquatorialen Koordinaten

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha - \alpha_G\right)\cos\delta &= \sin\left(l^{II} - l_0^{II}\right)\cos b^{II}\sin\delta_G - \sin b^{II}\cos\delta_G \\ \sin\left(\alpha - \alpha_G\right)\cos\delta &= \cos\left(l^{II} - l_0^{II}\right)\cos b^{II} \\ \sin\delta &= \sin\left(l^{II} - l_0^{II}\right)\cos b^{II}\cos\delta_G + \sin b^{II}\sin\delta_G \quad . \end{aligned} \tag{8.111}$$

[1] siehe etwa GREEN [1985], pp. 48–51

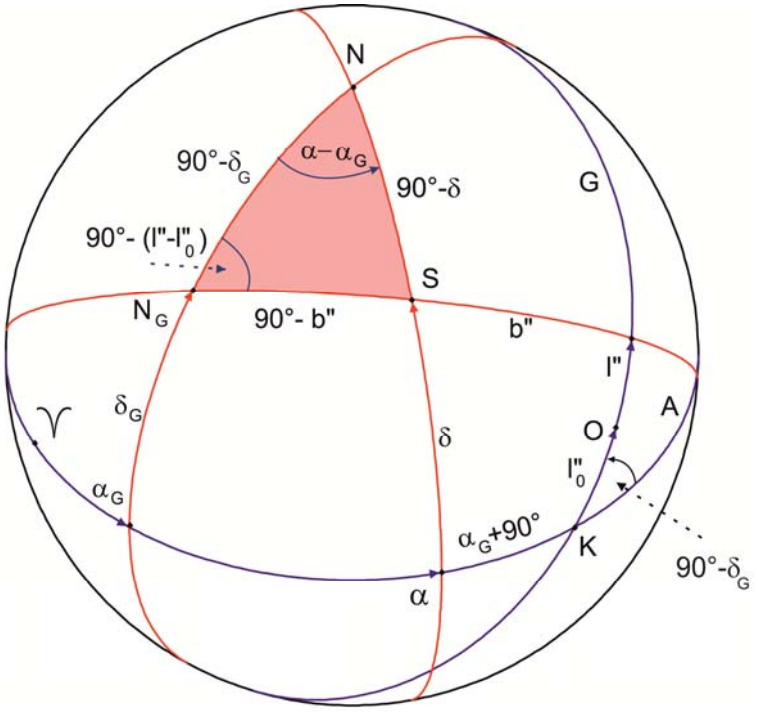


Bild 8-6: Das galaktische System bezogen auf das Frühlinspunkt bezogene Äquatorsystem

Die Variationen relativ zum galaktischen System sind (siehe auch die Formeln (6.117)

$$\begin{aligned}\left(\dot{l}^{II}-\dot{l}_0^{II}\right)\cos b^{II} &= \left(\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_G\right)\cos\delta\left[-\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta_G\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)-\right.\\ &\quad\left.-\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\right]+\\ &\quad\dot{\delta}\left\{\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\left[-\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\sin\delta_G-\cos\delta\cos\delta_G\right]+\right.\\ &\quad\left.+\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\right\}+\\ &\quad\dot{\delta}_G\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\left[\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\cos\delta\cos\delta_G+\sin\delta\sin\delta_G\right]\end{aligned}\tag{8.112}$$

$$\begin{aligned}\dot{b}^{II} &= \left(\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_G\right)\cos\delta\left\{-\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\cos\delta_G\cos b^{II}+\right.\\ &\quad\left.+\sin b^{II}\left[\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta_G\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)-\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\right]\right\}\\ &\quad\dot{\delta}\left\{\cos b^{II}\left[-\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\sin\delta_G+\cos\delta\cos\delta_G\right]+\right.\\ &\quad\left.+\sin b^{II}\left[\left(\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\sin\delta_G+\cos\delta\cos\delta_G\right)+\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\right]\right\}+\\ &\quad\dot{\delta}_G\left\{\cos b^{II}\left[-\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\cos\delta\sin\delta_G-\sin\delta\cos\delta_G\right]-\right.\\ &\quad\left.-\sin b^{II}\left[\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\cos\delta\cos\delta_G+\sin\delta\sin\delta_G\right]\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\right\}\end{aligned}\tag{8.113}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum beweglichen Äquatorsystem

$$
\begin{aligned}
(\dot\alpha-\dot\alpha_G)\cos\delta \;=\; & -\left(\dot l^{II}-\dot l_0^{II}\right)\cos b^{II}\left[\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta_G+\right.\\
& \left.+\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\right]+\\
& +\dot b^{II}\left\{-\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin b^{II}\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)+\right.\\
& \left.+\left[\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin b^{II}\sin\delta_G-\cos b^{II}\cos\delta_G\right]\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\right\}-\\
& -\dot\delta_G\left[\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos b^{II}\cos\delta_G+\sin b^{II}\sin\delta_G\right]\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)
\end{aligned}
\tag{8.114}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot\delta \;=\; & \left(\dot l^{II}-\dot l_0^{II}\right)\cos b^{II}\left\{\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos\delta_G\cos\delta+\right.\\
& \left.+\sin\delta\left[-\sin\delta_G\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)+\right.\right.\\
& \left.\left.+\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\right]\right\}+\\
& +\dot\delta_G\left\{\cos\delta\left[-\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin\delta_G\cos b^{II}+\cos\delta_G\sin b^{II}\right]-\right.\\
& \left.-\sin\delta\left[\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos\delta_G\cos b^{II}+\sin\delta_G\sin b^{II}\right]\right\}+\\
& +\dot b^{II}\left\{\cos\delta\left[-\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\cos\delta_G\sin b^{II}+\sin\delta_G\cos b^{II}\right]+\right.\\
& +\sin\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\cos\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin b^{II}+\\
& \left.+\cos\left(\alpha-\alpha_G\right)\sin\delta\left[\sin\left(l^{II}-l_0^{II}\right)\sin b^{II}\sin\delta_G-\cos b^{II}\cos\delta_G\right]\right\}\quad .
\end{aligned}
\tag{8.115}
$$

8.3.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des galaktischen Systems zum Äquatorsystem

Entsprechend Bild 8-6 wird das galaktische System über die Winkel α_G, δ_G, l_0'' in das Äquatorsystem gedreht. Dazu müssen in den Formeln (6.136) die folgenden Parameter ersetzt werden: $A\to\alpha_G+90°, B\to 90°-\delta_G, C\to -l_0''$. Der relative Eigenbewegungsvektor des galaktischen Systems in Bezug auf das B1950.0 Äquatorsystem

$$
\mathbf{D}_{qp} \;=\; D_{qp}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(gal)} \tag{8.116}
$$

hat demnach die Komponenten

$$
\begin{aligned}
D_{qp1} \;&=\; -\dot\delta_G\cos l_0'' - \dot\alpha_G\cos\delta_G\sin l_0''\\
D_{qp2} \;&=\; -\dot\delta_G\sin l_0'' + \dot\alpha_G\cos\delta_G\cos l_0''\\
D_{qp3} \;&=\; \dot\alpha_G\sin\delta_G - \left(l_0''\right)^{\cdot}\quad .
\end{aligned}
\tag{8.117}
$$

Umgekehrt kann in Bezug auf das galaktische System eine Eigenbewegung des Äquatorsystems mit dem Eigenbewegungsvektor

$$
\mathbf{D}_{pq} \;=\; D_{pq}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \tag{8.118}
$$

und den Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
D_{pq1} &= -\dot{\delta}_G \sin\alpha_G + \left(l_0''\right)^{\cdot} \cos\delta_G \cos\alpha_G \\
D_{pq2} &= \dot{\delta}_G \cos\alpha_G + \left(l_0''\right)^{\cdot} \cos\delta_G \sin\alpha_G \\
D_{pq3} &= -\dot{\alpha}_G + \left(l_0''\right)^{\cdot} \sin\delta_G
\end{aligned}
\tag{8.119}
$$

dargestellt werden.

8.4 Das geozentrische Meridian - bezogene Äquatorsystem

8.4.1 Koordinatendarstellungen im geozentrischen Meridian - bezogenen Äquatorsystem

Das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem hat als Grundebene die Äquatorebene und ist fest mit dem Erdkörper verbunden. Aus diesem Grund wird dieses System auch *festes Äquatorsystem* genannt. Die Bezugsrichtung in der Äquatorebene ist durch einen Meridian (= Längenkreis), der durch einen Bezugsort (Beobachter, fest oder beweglich auf oder über der Erdoberfläche) hindurch geht.

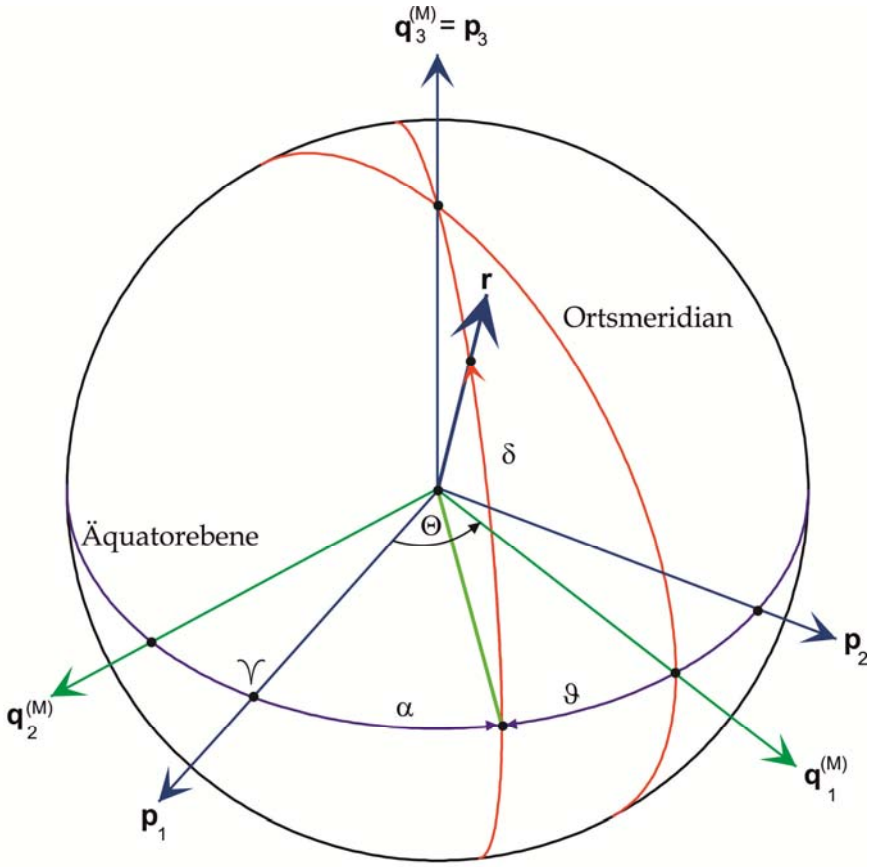


Bild 8-7: Das geozentrische Meridian - bezogene Äquatorsystem = festes Äquatorsystem

Das System wird durch ein orthonormiertes Basissystem $\mathbf{q}_j^{(M)}$ aufgespannt, dessen $\mathbf{q}_1^{(M)}$ – Achse in der Äquatorebene durch den Bezugsmeridian geht, die $\mathbf{q}_3^{(M)}$ – Achse durch den

Nordpol und $\mathbf{q}_2^{(M)} = \mathbf{q}_1^{(M)} \times \mathbf{q}_3^{(M)}$ -Achse in der Äquatorebene das System zu einem Linkssystem ergänzt. Als Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} \;=\; r\left\{\mathbf{q}_1^{(M)} \cos\delta \cos\vartheta + \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\delta \sin\vartheta + \mathbf{q}_3^{(M)} \sin\delta\right\} \quad \Leftrightarrow \quad r\left[\vartheta, \delta\right] \tag{8.120}$$

werden der Meridian-bezogene *Stundenwinkel* ϑ

$$0^h \;\leq\; = \;\vartheta\; \leq\; 24^h \quad , \tag{8.121}$$

die Deklination δ

$$-90° \;\leq\; \delta \;\leq\; 90° \tag{8.122}$$

und die geozentrische Distanz r des beobachteten Objektes verwendet. Der Stundenwinkel wird positiv von Süd nach West gemessen, da die Himmelskörper infolge der Erdrotation scheinbar nach Westen wandern. Wird ein bestimmter Himmelskörper, üblicherweise (besser: aus historischer Gründen) die Sonne, zur Zeitmessung verwendet, so ist es um so später je weiter der Himmelskörper im Westen steht, je größer also der Stundenwinkel ist. Der Stundenwinkel ist also mit der lokalen Zeitmessung, bezogen auf den lokalen Meridian, korreliert.

Mit den kartesischen Koordinaten y_j in

$$\mathbf{r} \;:=\; y^{(M)j}\, \mathbf{q}_j^{(M)} \tag{8.123}$$

wird

$$\begin{aligned} y_1^{(M)} &= r\cos\delta\cos\vartheta \\ y_2^{(M)} &= r\cos\delta\sin\vartheta \\ y_3^{(M)} &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{8.124}$$

Umgekehrt werden die Polarkoordinaten des festen Äquatorsystems aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^{(M)i}\, y_i^{(M)}} \\ \sin\delta &= \frac{y_3^{(M)}}{r} \quad , \quad \cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} \\ \cos\vartheta &= \frac{y_1^{(M)}}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \\ \sin\vartheta &= \frac{y_{12}^{(M)}}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \quad . \end{aligned} \tag{8.125}$$

Im Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{y}^{(M)j}\, \mathbf{q}_j^{(M)} + y^{(M)j}\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(M)} \tag{8.126}$$

lauten die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors mit dem Formelsystem (4.123)

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1^{(M)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_1^{(M)} - \dot{\delta}\, y_3^{(M)} \cos\vartheta - \dot{\vartheta}\, y_2^{(M)} \\
\dot{y}_2^{(M)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_2^{(M)} - \dot{\delta}\, y_3^{(M)} \sin\vartheta + \dot{\vartheta}\, y_1^{(M)} \\
\dot{y}_3^{(M)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_3^{(M)} + r\,\dot{\delta}\cos\delta
\end{aligned} \tag{8.127}$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{y^{(M)i}\, \dot{y}_i^{(M)}}{r} \\
\dot{\vartheta} &= \frac{y_1^{(M)}\, \dot{y}_2^{(M)} - y_2^{(M)}\, \dot{y}_1^{(M)}}{r^2 \cos^2\delta} \quad , \quad (r > 0, r\left|\cos\delta\right| > 0) \\
\dot{\delta} &= \frac{1}{r^2}\left[\left(y_3^{(M)}\, \dot{y}_1^{(M)} - y_1^{(M)}\, \dot{y}_3^{(M)}\right)\cos\vartheta - \left(y_2^{(M)}\, \dot{y}_3^{(M)} - y_3^{(M)}\, \dot{y}_2^{(M)}\right)\sin\vartheta\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.128}$$

8.4.2 Transformationen

Der Bezug des Meridian-bezogenen (festen) zum Frühlingspunkt-bezogenen (beweglichen) Äquatorsystem wird über die Orientierung der beiden Systeme zum Frühlingspunkt hergestellt. Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes wird als *Sternzeit* bezeichnet:

$$\Theta := \vartheta_{\Upsilon} \quad . \tag{8.129}$$

Als BEISPIEL zur Berechnung der Sternzeit wollen wir die mittlere Sternzeit für einen Ort auf der Erde wählen (weitere Details sowie die Berechnung der Sternzeit auf einigen Planeten finden sich in Kapitel 30 (Band IV) und in Anhang E (Band V)). Zur Berechnung der (irdischen) Sternzeit wird für jeden Zeitpunkt die Sternzeit Θ_G bezogen auf den 0-Meridian (= Meridian durch Greenwich) benötigt. Die Sternzeit für Greenwich um 0^h. UT1 errechnet sich aus[1]

$$\Theta_{G_0} = 6^h\, 41^m\, 50^s.54841 + 8640184^s.812866\, T_U + 0^s.093104\, T_U^2 - 6^s.2 \times 10^{-6}\, T_U^3 \quad , \tag{8.130}$$

wobei T_U die Anzahl in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0 ist. Sei J das julianische Datum des betreffenden Tages ist

$$T_U = \frac{J - 2451545.0}{36525} \quad . \tag{8.131}$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t (in UT1) ist dann die Sternzeit in Greenwich

$$\Theta_G = \Theta_{G_0} + \dot{\Theta}\left(t - t_0\right) \quad , \tag{8.132}$$

wobei die Relation zwischen Sternzeit und UT1 (tropische Rotationsgeschwindigkeit der Erde) gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} = \; & 1.002737909350795 + 5.9006 \times 10^{-11}\, T_U + 5.9 \times 10^{-15}\, T_U^2 \\
& \left[\text{Umläufe pro mittlerem Sonnentag}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.133}$$

[1] AA 1984 S. 12

Anmerkung: Bei der Berechnung der Sternzeit wurde angenommen, dass das Bezugssystem ein mittleres System ist, also auch der Frühlingspunkt ein mittlerer ist. Dann handelt es sich hier wie üblicherweise verwendet um die mittlere Sternzeit (im Gegensatz zur scheinbaren Sternzeit bei Bezug auf ein „wahres“ Äquatorsystem, siehe hierzu Abschnitt 9.4.4). ◀

Ganz allgemein (also gültig für einen beliebigen Planeten oder anderen Himmelskörper) gilt weiter: hat der Meridian des Beobachtungsortes die östliche geographische Länge λ, ist nach Bild 8-7 auf Seite 337

$$\Theta = \Theta_G + \lambda = \alpha + \vartheta \tag{8.134}$$

bzw.

$$\alpha = \Theta_G + \lambda - \vartheta \quad . \tag{8.135}$$

Die zugehörige Variation ist dann

$$\dot{\alpha} = \dot{\Theta} + \dot{\lambda} - \dot{\vartheta} \quad . \tag{8.136}$$

Da die Deklination in beiden Systemen dieselbe ist, ist mit α und $\dot{\alpha}$ die vollständige Beziehung zwischen den beiden Systemen hergestellt. $\dot{\lambda}$ kann nur dann vernachlässigt werden, wenn der Beobachtungsort auf der Erdoberfläche und damit der zugehörige Meridian der geographischen Länge λ fest mit der Erdoberfläche gekoppelt ist.

Die Basen des beweglichen und des festen Äquatorsystems haben nach Bild 8-7 auf Seite 337 die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(M)} &= \mathbf{p}_1 \cos\Theta + \mathbf{p}_2 \sin\Theta \\
\mathbf{q}_2^{(M)} &= \mathbf{p}_1 \sin\Theta - \mathbf{p}_2 \cos\Theta \\
\mathbf{q}_3^{(M)} &= \mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} &= -\dot{\Theta}\mathbf{q}_2^{(M)} + \dot{\mathbf{p}}_1 \cos\Theta + \dot{\mathbf{p}}_2 \sin\Theta \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \dot{\Theta}\mathbf{q}_1^{(M)} + \dot{\mathbf{p}}_1 \sin\Theta - \dot{\mathbf{p}}_2 \cos\Theta \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} &= \dot{\mathbf{p}}_3
\end{aligned} \tag{8.137}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(M)} \cos\Theta + \mathbf{q}_2^{(M)} \sin\Theta \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(M)} \sin\Theta - \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\Theta \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_3^{(M)} \\
\dot{\mathbf{p}}_1 &= -\dot{\Theta}\mathbf{p}_2 + \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \cos\Theta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \sin\Theta \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= \dot{\Theta}\mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \sin\Theta - \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \cos\Theta \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)}
\end{aligned} \tag{8.138}$$

Damit gelten für die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors die Beziehungen

$$\mathbf{r} = x^j \mathbf{p}_i = y^{(M)j} \mathbf{q}_j^{(M)} \tag{8.139}$$

und somit die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{(M)}\cos\Theta + y_2^{(M)}\sin\Theta \\ x_2 &= y_1^{(M)}\sin\Theta - y_2^{(M)}\cos\Theta \\ x_3 &= y_3^{(M)} \\ \dot{x}_1 &= \dot{y}_1^{(M)}\cos\Theta + \dot{y}_2^{(M)}\sin\Theta - \dot{\Theta}\,x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{y}_1^{(M)}\sin\Theta - \dot{y}_2^{(M)}\cos\Theta + \dot{\Theta}\,x_1 \\ \dot{x}_3 &= \dot{y}_3^{(M)} \end{aligned} \tag{8.140}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} y_1^{(M)} &= x_1\cos\Theta + x_2\sin\Theta \\ y_2^{(M)} &= x_1\sin\Theta - x_2\cos\Theta \\ y_3^{(M)} &= x_3 \\ \dot{y}_1^{(M)} &= \dot{x}_1\cos\Theta + \dot{x}_2\sin\Theta - \dot{\Theta}\,y_2^{(M)} \\ \dot{y}_2^{(M)} &= \dot{x}_1\sin\Theta - \dot{x}_2\cos\Theta + \dot{\Theta}\,y_1^{(M)} \\ \dot{y}_3^{(M)} &= \dot{x}_3 \end{aligned} \quad . \tag{8.141}$$

Um das Rechnen mit weiteren anzuschließenden Transformationen zu erleichtern, soll die Variationsmatrix dieser Transformation angegeben werden. Mit $\mathbf{q}_j^{(M)} = a_j{}^i\,\mathbf{p}_i$ lautet sie

$$\left(a_j{}^i\right) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & -\cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.142}$$

und die zugehörige Variationsmatrix

$$\left(\dot{a}_j{}^i\right) = \dot{\Theta}\begin{pmatrix} -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.143}$$

8.4.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des geozentrischen Meridian - bezogenen Äquatorsystems

Seien $\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^{(M)j}\,\mathbf{q}_j^{(M)}$ und $\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i\mathbf{p}_i$ die relativen Geschwindigkeitsvektoren eines Bewegungsvorganges bezogen auf das $\mathbf{q}_j^{(M)}-$ bzw. auf das $\mathbf{p}_i-$System, lautet deren Beziehung mit den entsprechenden Eigenbewegungsvektoren

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_q + \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\times\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{r} \quad . \tag{8.144}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(M)}-$Systems hat in Bezug auf das $\mathbf{p}_i-$Basissystem die Komponentendarstellung

$$\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(M)} \quad . \tag{8.145}$$

Um sie zu berechnen, muss entsprechend den Formeln (6.136) und nach Bild 8-7 die Zuordnung $A \to 0°, B \to 0°, C \to \Theta$ erfolgen. Es bleibt

$$D_{qp1} = D_{qp2} = 0 \quad , \quad D_{qp3} = \dot{\Theta} \quad . \tag{8.146}$$

Dieser Eigenbewegungsvektor verdient also in diesem Zusammenhang den charakterisierenden Beinamen „Drehvektor“, da er in der Form

$$\mathbf{D}_{qp} = \dot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(M)} \tag{8.147}$$

die Drehung dieses Systems um die Normalachse beschreibt. Der absolute Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^{(M)j}\mathbf{q}_j^{(M)} + \dot{\Theta}\left[y_1^{(M)}\mathbf{q}_2^{(M)} - y_2^{(M)}\mathbf{q}_1^{(M)} \right] + D_p{}^i\, a^j{}_i\, \mathbf{q}_j^{(M)} \times y^{(M)k}\mathbf{q}_k^{(M)} \tag{8.148}$$

beschreibt die Bewegung bei Bezug auf ein Fundamentalsystem, wenn $\mathbf{D}_p = D_p{}^i\mathbf{p}_i \equiv 0$ angenommen werden darf. Ansonsten muss mit weiteren Transformationen durch Drehung über zeitabhängige Äquatorsysteme, wie etwa in den Abschnitten 8.1.4 und 8.1.5 beschrieben, versucht werden, zu einem Fundamentalsystem vorzudringen.

8.5 Das geozentrische erdfeste System (Greenwich System)

Das geozentrische Greenwich-bezogene Koordinatensystem wird in der Satellitenbahnmechanik gerne verwendet, um den Bezug einer Satellitenbahn zur Erdoberfläche darstellen zu können.

8.5.1 Koordinatendarstellungen im erdfesten System

Die Basisebene des geozentrischen erdfesten Systems ist die Äquatorebene. Das $\mathbf{q}_j^{(G)}$-Basissystem wird durch die $\mathbf{q}_1^{(G)}-$Achse durch den Schnitt des Greenwich Meridians *G* mit dem Äquator definiert, die $\mathbf{q}_3^{(G)} = \mathbf{p}_3 -$Achse geht durch die Pole des Äquatorsystems, die $\mathbf{q}_2^{(G)} =: \mathbf{q}_3^{(G)} \times \mathbf{q}_1^{(G)}$ -Achse ergänzt das System zum orthonormierten Rechtssystem. Man beachte den Unterschied der Orientierung dieses Systems zum (im Abschnitt 8.8 ab Seite 357 besprochenen) Meridian-bezogenen System.

Der geozentrische Ortsvektor eines beliebigen Objektes sei

$$\mathbf{r} = y^{(G)i}\mathbf{q}_j^{(G)} = r\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta\sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta \right] \Leftrightarrow \quad r\left[\lambda,\delta\right] \ . \tag{8.149}$$

Die Polarkoordinaten eines beobachteten Objektes in diesem System seien der geozentrische Radius *r*, die geozentrische Länge λ, die auf der Erde positiv nach Osten gezählt wird und definiert ist für

$$0° \ \le \ \lambda \ \le \ 360° \tag{8.150}$$

und die Deklination δ

$$-90° \ \le \ \delta \ \le \ 90° \quad . \tag{8.151}$$

Damit lauten die Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten $y^{(G)j}$ und den Polarkoordinaten im geozentrischen erdfesten System

$$\begin{aligned} y_1^{(G)} &= r\cos\delta\cos\lambda \\ y_2^{(G)} &= r\cos\delta\sin\lambda \\ y_3^{(G)} &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{8.152}$$

Bild 8-8: Das geozentrische erdfeste System (das „Greenwich System“)

Die Polarkoordinaten des geozentrischen erdfesten Systems werden aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^{(G)i}\, y_i^{(G)}} \\ \sin\delta &= \frac{y_3^{(G)}}{r} \quad , \quad \cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} \\ \cos\lambda &= \frac{y_1^{(G)}}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \\ \sin\lambda &= \frac{y_2^{(G)}}{r\cos\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \quad . \end{aligned} \tag{8.153}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.123)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(G)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_1^{(G)} - \dot{\delta}\, y_3^{(G)} \cos\lambda - \dot{\lambda}\, y_2^{(G)} \\ \dot{y}_2^{(G)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_2^{(G)} - \dot{\delta}\, y_3^{(G)} \sin\lambda + \dot{\lambda}\, y_1^{(G)} \\ \dot{y}_3^{(G)} &= \frac{\dot{r}}{r} y_3^{(G)} + r\,\dot{\delta}\cos\delta \end{aligned} \tag{8.154}$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{y^{(G)i}\,\dot{y}_i^{(G)}}{r} \\
\dot{\lambda} &= \frac{y_1^{(G)}\,\dot{y}_2^{(G)} - y_2^{(G)}\,\dot{y}_1^{(G)}}{r^2\cos^2\delta} \quad , \quad (r\cos\delta > 0) \\
\dot{\delta} &= \frac{1}{r^2}\left[\left(y_3^{(G)}\,\dot{y}_1^{(G)} - y_1^{(G)}\,\dot{y}_3^{(G)}\right)\cos\lambda - \left(y_2^{(G)}\,\dot{y}_3^{(G)} - y_3^{(G)}\,\dot{y}_2^{(G)}\right)\sin\lambda\right] \quad ,
\end{aligned}
\tag{8.155}
$$

8.5.2 Transformationen

8.5.2.1 Bezug des Greenwich-Systems auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

Das geozentrische erdfeste System wird auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem durch Drehung um die Sternzeit Θ_G bezogen und somit der Rotation der Erde zugeordnet. Da Θ_G auf der Erde auf den Meridian durch Greenwich bezogen ist, wird dieses System gerne auch als *Greenwich System* bezeichnet. Seien die $\mathbf{p}_i$ die Basisvektoren des Äquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(G)}$ die Basisvektoren im geozentrischen erdfesten System. Dann gelten die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(G)}\cos\Theta_G - \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\Theta_G \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(G)}\sin\Theta_G + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\Theta_G \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_3^{(G)}
\end{aligned}
\tag{8.156}
$$

mit den Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)}\cos\Theta_G - \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)}\sin\Theta_G - \dot{\Theta}_G\,\mathbf{p}_2 \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)}\sin\Theta_G + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)}\cos\Theta_G + \dot{\Theta}_G\,\mathbf{p}_1 \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)}
\end{aligned}
\tag{8.157}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(G)} &= \mathbf{p}_1\cos\Theta_G + \mathbf{p}_2\sin\Theta_G \\
\mathbf{q}_2^{(G)} &= -\mathbf{p}_1\sin\Theta_G + \mathbf{p}_2\cos\Theta_G \\
\mathbf{q}_3^{(G)} &= \mathbf{p}_3
\end{aligned}
\tag{8.158}
$$

mit den Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} &= \dot{\mathbf{p}}_1\cos\Theta_G + \dot{\mathbf{p}}_2\sin\Theta_G + \dot{\Theta}_G\,\mathbf{q}_2^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} &= -\dot{\mathbf{p}}_1\sin\Theta_G + \dot{\mathbf{p}}_2\cos\Theta_G - \dot{\Theta}_G\,\mathbf{q}_1^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} &= \dot{\mathbf{p}}_3 \quad .
\end{aligned}
\tag{8.159}
$$

Die lokale Sternzeit ist durch

$$
\Theta = \Theta_G + \lambda \tag{8.160}
$$

gegeben. Somit gilt für die Variationen

$$
\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_G + \dot{\lambda} \quad . \tag{8.161}
$$

Da grundsätzlich $\dot{\lambda} \neq 0$ angenommen werden muss (Flugzeug, Auto, Erdbeben …), muss für die Variation des Drehwinkels stets die Variation der Rektaszension in Formel (8.136) genommen werden.

Zur Transformation der kartesischen Koordinaten wird von der Beziehung

$$\mathbf{q}_j^{(G)} = a_j{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \, \mathbf{q}_j^{(G)} \tag{8.162}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\left(a_{ji}\right) = \begin{pmatrix} \cos\Theta_G & \sin\Theta_G & 0 \\ -\sin\Theta_G & \cos\Theta_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.163}$$

und der zugehörenden Variationsmatrix

$$\left(\dot{a}_{ji}\right) = \dot{\Theta}_G \begin{pmatrix} -\sin\Theta_G & \cos\Theta_G & 0 \\ -\cos\Theta_G & -\sin\Theta_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.164}$$

ausgegangen. Über

$$\mathbf{r} = x^i \, \mathbf{p}_i = y^{(G)j} \, \mathbf{q}_j^{(G)} \tag{8.165}$$

werden die Beziehungen erhalten:

$$\begin{aligned} x^i &= y^{(G)j} \, a_j{}^i \quad , \quad \dot{x}^i = \dot{y}^{(G)j} \, a_j{}^i + y^{(G)j} \, \dot{a}_j{}^i \\ y^{(G)j} &= x^i \, a^j{}_i \quad , \quad \dot{y}^{(G)j} = \dot{x}^i \, a^j{}_i + x^i \, \dot{a}^j{}_i \end{aligned} \tag{8.166}$$

ausführlich

$$\begin{aligned} y_1^{(G)} &= x_1 \cos\Theta_G + x_2 \sin\Theta_G \\ y_2^{(G)} &= -x_1 \sin\Theta_G + x_2 \cos\Theta_G \\ y_3^{(G)} &= x_3 \end{aligned} \tag{8.167}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(G)} &= \dot{x}_1 \cos\Theta_G + \dot{x}_2 \sin\Theta_G + \dot{\Theta}_G \, y_2^{(G)} \\ \dot{y}_2^{(G)} &= -\dot{x}_1 \sin\Theta_G + \dot{x}_2 \cos\Theta_G - \dot{\Theta}_G \, y_1^{(G)} \\ \dot{y}_3^{(G)} &= \dot{x}_3 \end{aligned} \tag{8.168}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{(G)} \cos\Theta_G - y_2^{(G)} \sin\Theta_G \\ x_2 &= y_1^{(G)} \sin\Theta_G + y_2^{(G)} \cos\Theta_G \\ x_3 &= y_3^{(G)} \end{aligned} \tag{8.169}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y}_1^{(G)} \cos\Theta_G - \dot{y}_2^{(G)} \sin\Theta_G - \dot{\Theta}_G \, x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{y}_1^{(G)} \sin\Theta_G + \dot{y}_2^{(G)} \cos\Theta_G + \dot{\Theta}_G \, x_1 \\ \dot{x}_3 &= \dot{y}_3^{(G)} \quad . \end{aligned} \tag{8.170}$$

8.5.2.2 Bezug auf das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem

Das geozentrische erdfeste System ist ein wichtiger Verknüpfungspunkt zwischen dem Frühlingspunkt-bezogenen (also fundamentalen) Äquatorsystem und den in einem Ort auf der Erdoberfläche benötigten lokalen Systemen. Zu dieser Verknüpfung wird als erstes der Bezug auf das durch den betreffenden Ortsmeridian definierte geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem benötigt. Unter Verwendung der Beziehung (8.160) zwischen geographischer Länge (Ost) und der Sternzeit, ergeben die Transformationsformeln (8.137) und (8.138) sowie (8.156) bis (8.159) die Transformationsformeln zwischen dem Greenwich- und dem (Orts-) Meridian-bezogenen Äquatorsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(M)} &= \mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda \\ \mathbf{q}_2^{(M)} &= \mathbf{q}_1^{(G)} \sin\lambda - \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\lambda \\ \mathbf{q}_3^{(M)} &= \mathbf{q}_3^{(G)} \end{aligned} \tag{8.171}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_2^{(M)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \sin\lambda - \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_1^{(M)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} \end{aligned} \tag{8.172}$$

sowie umgekehrt

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(G)} &= \mathbf{q}_1^{(M)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(M)} \sin\lambda \\ \mathbf{q}_2^{(G)} &= \mathbf{q}_1^{(M)} \sin\lambda - \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\lambda \\ \mathbf{q}_3^{(G)} &= \mathbf{q}_3^{(M)} \end{aligned} \tag{8.173}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_2^{(G)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \sin\lambda - \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_1^{(G)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} \quad . \end{aligned} \tag{8.174}$$

Um die Beziehungen zwischen den Koordinaten in den beiden Systemen herzuleiten, werden die Koeffizienten mit dem jeweiligen System gekennzeichnet. Aus dem Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;=\; y^{(M)i}\,\mathbf{q}_i^{(M)} \;=\; y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} \tag{8.175}$$

und den obigen Beziehungen der jeweiligen Basisvektoren fogen die Beziehungen

$$\begin{aligned} y_1^{(G)} &= y_1^{(M)} \cos\lambda + y_2^{(M)} \sin\lambda \\ y_2^{(G)} &= y_1^{(M)} \sin\lambda - y_2^{(M)} \cos\lambda \\ y_3^{(G)} &= y_3^{(M)} \end{aligned} \tag{8.176}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(G)} &= \dot{y}_1^{(M)} \cos\lambda + \dot{y}_2^{(M)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\,y_2^{(G)} \\ \dot{y}_2^{(G)} &= \dot{y}_1^{(M)} \sin\lambda - \dot{y}_2^{(M)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\,y_1^{(G)} \\ \dot{y}_3^{(G)} &= \dot{y}_3^{(M)} \end{aligned} \tag{8.177}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
y_1^{(M)} &= y_1^{(G)} \cos\lambda + y_2^{(G)} \sin\lambda \\
y_2^{(M)} &= y_1^{(G)} \sin\lambda - y_2^{(G)} \cos\lambda \\
y_3^{(M)} &= y_3^{(G)}
\end{aligned}
\tag{8.178}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1^{(M)} &= \dot{y}_1^{(G)} \cos\lambda + \dot{y}_2^{(G)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\, y_2^{(M)} \\
\dot{y}_2^{(M)} &= \dot{y}_1^{(G)} \sin\lambda - \dot{y}_2^{(G)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\, y_1^{(M)} \\
\dot{y}_3^{(M)} &= \dot{y}_3^{(G)} \qquad .
\end{aligned}
\tag{8.179}
$$

8.5.3 Der Systemeigenbewegungsvektor des erdfesten Systems

Der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(G)}p} = D_{q^{(G)}p}^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(G)}$ des geozentrischen erdfesten Systems bei Bezug auf das Frühlingspunkt orientierte Äquatorsystem hat entsprechend dem System (6.136) und nach Bild 8-8 mit den Zuordnungen $A \to 0°, B \to 0°, C \to \Theta_G$ die Komponenten

$$
D_{q^{(G)}p1} = D_{q^{(G)}p2} = 0\ ,\ D_{q^{(G)}p3} = \dot{\Theta}_G \tag{8.180}
$$

und beschreibt somit die Drehung dieses Systems in östlicher Richtung (d.h. mit der Erdrotation)

$$
\mathbf{D}_{q^{(G)}p} = \dot{\Theta}_G\, \mathbf{q}_3^{(G)} \qquad . \tag{8.181}
$$

Der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(G)}q^{(M)}} = D_{q^{(G)}q^{(M)}}^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(G)}$ des geozentrischen erdfesten Äquatorsystems bei Bezug auf ein geozentrisches Meridian-bezogenes Äquatorsystem lautet mit den Beziehungen (8.147) und (8.181), sowie (8.161)

$$
\mathbf{D}_{q^{(G)}q^{(M)}} = \mathbf{D}_{q^{(G)}p} - \mathbf{D}_{q^{(M)}p} = \left(\dot{\Theta}_G - \dot{\Theta}\right) \mathbf{q}_3^{(G)} = -\dot{\lambda}\, \mathbf{q}_3^{(G)} \tag{8.182}
$$

bzw. der entsprechende Eigenbewegungsvektor des geozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystems bei Bezug auf das geozentrische erdfeste Äquatorsystem

$$
\mathbf{D}_{q^{(M)}q^{(G)}} = \mathbf{D}_{q^{(M)}p} - \mathbf{D}_{q^{(G)}p} = \left(\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_G\right) \mathbf{q}_3^{(M)} = \dot{\lambda}\, \mathbf{q}_3^{(M)} \qquad . \tag{8.183}
$$

8.6 Das geographische System

Das geographische System ist fest an den Erdkörper gebunden und erlaubt die Berechnung eines Ortes auf oder über der Erdoberfläche bei Bezug auf ein Referenzellipsoid. Damit ist die Beobachtung von einem Beobachtungsort (einer „Bodenstation“) aus möglich sowie andererseits die Beobachtung eines Zielobjektes auf der Erdoberfläche („Test Site“) von einem Beobachter über der Erdoberfläche (Satellit, Flugzeug, …) möglich. Die dazu benötigten Formeln werden unabhängig in Abschnitt 37.2 (Band V) hergeleitet und im vorliegenden Kapitel aus Referenzgründen mit aufgenommen. Damit ist die Translation Erdmittelpunkt–Topozentrum auf der Erdoberfläche möglich, die zur Parallelverschiebung („Mitnahme“) eines geozentrischen Systems (Äquatorsystem, Ekliptiksystem, …) in ein Topozentrum benötigt wird.

8.6.1 Koordinatendarstellungen im geographischen System

Das geographische System hat wie das geozentrische erdfeste System als Grundebene die Erdäquatorebene. Der Pol des Systems ist identisch mit dem Pol des Erdäquatorsystems. Der Referenzmeridian ist der Greenwich Meridian. Auch die Basis $\mathbf{q}_j^{(G)}$ ist dieselbe wie im Greenwich System. Das geographische System berücksichtigt jedoch die Abplattung der Erde und erlaubt die umkehrbar eindeutige Zuordnung zu einem Punkt auf oder über der Erdoberfläche.

Das Referenzsystem habe den mittleren Äquatorradius R_E und die Abplattung f. Für sehr genaue Rechnungen wird angenommen, dass auch die Variationen $\dot{R}_E$ und $\dot{f}$ bekannt seien.

Sei **R** der geozentrische Ortsvektor eines Ortes auf der Erdoberfläche oder im Bezug auf diese. Als Polarkoordinaten werden die *geographische Länge* λ (positiv nach Osten gezählt im Gegensatz zu den planetographischen Systemen (siehe Kapitel 30, Band IV)

$$0 \le \lambda \le 360° \quad , \tag{8.184}$$

die *geodätische Breite* φ

$$-90° \le \varphi \le 90° \tag{8.185}$$

und die geozentrische Distanz R verwendet. Sei der *Querkrümmungsradius* R_Q zur geodätischen Breite φ gegeben durch[1]

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{1-\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi}} \quad , \tag{8.186}$$

hat ein Ort der Höhe H' über dem Referenzellipsoid die geozentrischen Koordinaten in einem auf das Greenwich System ausgerichteten $\mathbf{q}_j^{(G)}-$System

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \; & \mathbf{q}_1^{(G)}\left(R_Q+H'\right)\cos\varphi\cos\lambda + \\ & + \mathbf{q}_2^{(G)}\left(R_Q+H'\right)\cos\varphi\sin\lambda + \\ & + \mathbf{q}_3^{(G)}\left[R_Q\,(1-f)^2+H'\right]\sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{8.187}$$

Der Bezug zu den geozentrischen erdfesten Polarkoordinaten mit der Deklination δ wird mit Hilfe des Ortsvektors

$$\mathbf{R} = R\left(\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta\sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta\right) \tag{8.188}$$

ermöglicht:

$$\begin{aligned} R\cos\delta &= \left(R_Q+H'\right)\cos\varphi \\ R\sin\delta &= \left[R_Q\,(1-f)^2+H'\right]\sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{8.189}$$

Bei bekannten H' und φ können aus diesen Beziehungen R und δ eindeutig berechnet werden. Sind umgekehrt R und δ vorgegeben, kann die geodätische Breite φ nur iterativ berechnet werden:

[1] Herleitung aller dieser Formeln in Bezug auf ein Rotationsellipsoid in Abschnitt 37.2, Band V

$$\begin{aligned} \mathrm{fct}(\sin\varphi) \;\equiv\; & R\left(\sin\varphi\cos\delta-\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,\sin\delta\right)\sqrt{1-\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi}\,- \\ & -\left[1-(1-f)^2\right]R_E\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi} \;=\; 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.190}$$

Bild 8-9: Beziehungen im geographischen System (φ - geodätische Breite, φ′ - geozentrische Breite, δ - Deklination, R_Q - Querkrümmungsradius)

Mit bekanntem φ kann dann die Höhe H' über der berechnet werden:

$$H' \;=\; R\,(\cos\varphi\cos\delta+\sin\varphi\sin\delta)-R_E\sqrt{1-\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi} \quad . \tag{8.191}$$

Danach kann etwa mit der ersten der Gleichungen (8.189) unmittelbar auch der Querkrümmungsradius berechnet werden:

$$R_Q \;=\; R\,\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}-H' \quad (\cos\varphi\neq 0) \quad . \tag{8.192}$$

φ' sei die φ zugeordnete *geozentrische* Breite. Sie ist auf das Erdellipsoid bezogen und kann mit Hilfe der Formeln in Abschnitt 37.2 (Band V) berechnet werden:

$$\tan\varphi' \;=\; (1-f)^2\tan\varphi \tag{8.193}$$

oder

$$\sin\varphi' \;=\; \frac{(1-f)^2\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-f)^4\sin^2\varphi}} \quad . \tag{8.194}$$

Für Orte nahe dem Referenzellipsoid (H' klein) kann

$$\delta \;\approx\; \varphi' \quad (H' \text{ klein}) \tag{8.195))}$$

gesetzt werden (vgl. hierzu die numerischen Abschätzungen in Abschnitt 38.2.1 in Band V). Sei schließlich α die Rektaszension des betrachteten Ortes, gilt nach Bild 8-9 auf Seite 349

$$\alpha \;=\; \Theta_G+\lambda \quad . \tag{8.196}$$

Rektaszension und geographische Länge haben die Variationen (vgl. auch Formel (8.136))

$$\dot\alpha \;=\; \dot\Theta_G+\dot\lambda \;=\; \dot\Theta+\dot\lambda \quad . \tag{8.197}$$

Der Ort **R** hat nach Formel (8.187) die Variation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} \;=\; & \left(R_Q+H'\right)\cos\varphi\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)}\cos\lambda+\dot{\mathbf{q}}_2^{(G)}\sin\lambda\right)+\dot{\mathbf{q}}_3^{(G)}\left[R_Q\,(1-f)^2+H'\right]\sin\varphi+\\ & +\dot R_Q\;\left[\cos\varphi\left(\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda+\mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda\right)+\mathbf{q}_3^{(G)}\,(1-f)^2\sin\varphi\right]+\\ & +\dot H'\;\left[\cos\varphi\left(\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda+\mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda\right)+\mathbf{q}_3^{(G)}\sin\varphi\right]-\\ & -\dot f\;\;2\,\mathbf{q}_3^{(G)}\,R_Q\,(1-f)\sin\varphi+\\ & +\dot\lambda\;\;\left(R_Q+H'\right)\cos\varphi\left[-\mathbf{q}_1^{(G)}\sin\lambda+\mathbf{q}_2^{(G)}\cos\lambda\right]+\\ & +\dot\varphi\;\;\left\{-\left(R_Q+H'\right)\sin\varphi\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda+\mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda\right]+\right.\\ & \qquad\left.+\mathbf{q}_3^{(G)}\left[R_Q\,(1-f)^2+H'\right]\cos\varphi\right\} \quad .\end{aligned} \tag{8.198}$$

Bei Vorgabe der geographischen Koordinaten $\left(H',\lambda,\varphi,\Theta_G\right)$ und ihrer Variationen $\dot H'$, $\dot\lambda$, $\dot\varphi$ und als bekannt angenommenen Variationen $\dot f$, $\dot R_E$, $\dot\Theta$ kann die Variation des Querkrümmungsradius R_Q mit Formel (8.186) berechnet werden aus

$$\dot R_Q\,R_Q \;=\; \frac{R_E}{\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi}\left[\dot R_E-\frac{\dot f\,R_E\,(1-f)}{1-(1-f)^2}-\frac{\dot\varphi\,R_E\cos\varphi}{\sin\varphi}\right] \quad . \tag{8.199}$$

Die Variation in der Deklination kann mit Hilfe der Iterationsformel (8.190) und der Bezeichnung

$$e_f^2 \;=:\; 1-(1-f)^2 \quad , \quad \dot e_f\,e_f \;=\; \dot f\,(1-f) \tag{8.200}$$

erhalten werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}\, R\cos(\varphi-\delta)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi} \;\; &= \\
&= \;\; \dot{\varphi}\;\left\{R\cos(\varphi-\delta)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}-\frac{e_f^2\,R\sin(\varphi-\delta)\sin 2\varphi}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}}-e_f^2\,R_E\cos 2\varphi\right\}+ \\
&\quad +\dot{R}\;\sin(\varphi-\delta)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}- \\
&\quad -\dot{R}_E\;\frac{e_f^2}{2}\sin 2\varphi- \\
&\quad -\dot{e}_f\;e_f\left[\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}}+R_E\sin 2\varphi\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{8.201}
$$

Außerdem liefern die Formeln (8.189)

$$
\begin{aligned}
\dot{R} \;\; &= \;\; \left[\left(\dot{R}_Q+\dot{H}'\right)\cos\varphi-\dot{\varphi}\left(R_Q+H'\right)\sin\varphi\right]\cos\delta+ \\
&\quad +\left\{\left[\dot{R}_Q(1-f)^2-2\,\dot{f}\,(1-f)\,R_Q+\dot{H}'\right]\sin\varphi+\dot{\varphi}\left[R_Q(1-f)^2+H'\right]\cos\varphi\right\}\sin\delta \quad .
\end{aligned}
\tag{8.202}
$$

Werden umgekehrt die äquatorialen Koordinaten (R, α, δ; Θ_G) mit ihren Variationen vorgegeben, können die Variationen in den geographischen Koordinaten $\dot{\varphi}, \dot{H}', \dot{R}_Q$ ($\dot{\lambda}$ ist aus Formel (8.197) bekannt) berechnet werden: $\dot{\varphi}$ mit Formel (8.189), sodann $\dot{H}'$ mit Formel (8.191) aus

$$
\begin{aligned}
\dot{H}' \;\; &= \;\; \dot{R}\;\cos(\varphi-\delta)- \\
&\quad -\dot{\varphi}\;\;R\sin(\varphi-\delta)+ \\
&\quad +\dot{\delta}\;\;R\sin(\varphi-\delta)- \\
&\quad -\dot{R}_E\;\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}+ \\
&\quad +\dot{f}\;\;\frac{2\,R_E(1-f)^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}}- \\
&\quad -\dot{\varphi}\;\;\frac{R_E\,e_f^2\sin 2\varphi}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi}} \quad ,
\end{aligned}
\tag{8.203}
$$

sowie schließlich die Variation des Querkrümmungsradius mit Formel (8.192) aus

$$
\dot{R}_Q \;\; = \;\; -\dot{H}'+\dot{R}\,\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}-\dot{\delta}\,\frac{R\sin\delta}{\cos\varphi}+\dot{\varphi}\,R\,\frac{\cos\delta\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad (\cos\varphi\neq 0) \quad .
\tag{8.204}
$$

Die Variationen der geozentrischen und der geodätischen Breite haben nach Formel (8.193) die Beziehung

$$
\frac{\dot{\varphi}'}{\cos^2\varphi'} \;\; = \;\; -2\,\dot{f}\,(1-f)\tan\varphi+\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} \quad .
\tag{8.205}
$$

8.6.2 Der Eigenbewegungsvektor des geographischen Systems

Das geographische System unterscheidet sich vom Greenwich System lediglich durch die Unterscheidung von geodätischer Breite φ und Deklination δ. Mithin sind die Transformationen zum Basis-Äquatorsystem dieselben wie für das Greenwich System (vgl. die Formeln (8.156) - (8.170)) und auch der Systemeigenbewegungsvektor ist wie im Greenwich System gegeben durch

$$\mathbf{D}_{q^{(G)}p} = \dot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(G)} \quad . \tag{8.206}$$

Um die Anwendung des Systemeigenbewegungsvektors zu erläutern, wird in diesem Abschnitt der Beschleunigungsvektor im geographischen System hergeleitet. Ein Ortsvektor

$$\mathbf{R} = y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} = x^i\,\mathbf{p}_i$$

habe die Komponenten (vgl. die Formeln (8.152) und (8.187)) im geographischen System

$$\begin{aligned} y_1^{(G)} &= r\cos\delta\cos\lambda &&= \left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\cos\lambda \\ y_2^{(G)} &= r\cos\delta\sin\lambda &&= \left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\sin\lambda \\ y_3^{(G)} &= r\sin\delta &&= \left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\sin\varphi \end{aligned} \tag{8.207}$$

und nach (8.6) im Basis-Äquatorsystem

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\delta\cos\alpha \\ x_2 &= r\cos\delta\sin\alpha \\ x_3 &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{8.208}$$

Der relative Geschwindigkeitsvektor im $\mathbf{q}_j^{(G)}$-(geographischen) System lautet

$$\dot{\mathbf{R}}_q = \dot{y}^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} \tag{8.209}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(G)} &= \left(\dot{R}_Q + \dot{H}'\right)\cos\varphi\cos\lambda - \dot{\varphi}\left(R_Q + H'\right)\sin\varphi\cos\lambda - \dot{\lambda}\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\sin\lambda \\ \dot{y}_2^{(G)} &= \left(\dot{R}_Q + \dot{H}'\right)\cos\varphi\sin\lambda - \dot{\varphi}\left(R_Q + H'\right)\sin\varphi\sin\lambda + \dot{\lambda}\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\cos\lambda \\ \dot{y}_3^{(G)} &= \left[\dot{R}_Q\left(1-f\right)^2 - 2\dot{f}\left(1-f\right)R_Q + \dot{H}'\right]\sin\varphi + \dot{\varphi}\left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\cos\varphi \end{aligned} \tag{8.210}$$

beschreibt die Bewegung eines Objektes bezüglich des geographischen Systems. Im absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_q + \mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{R} + \mathbf{D}_p\times\mathbf{R} \tag{8.211}$$

beschreibt der Term $\mathbf{D}_{qp}\times\mathbf{R}$ den Anteil der Bewegung infolge der Eigenbewegung des geographischen Systems in Bezug auf das Äquatorsystem und $\mathbf{D}_p\times\mathbf{R}$ den Anteil der Bewegung infolge der absoluten Eigenbewegung des betrachteten Äquatorsystems.

BEISPIEL: Diese vorgenannte klare Trennung der Bewegungsanteile ist etwa dann wichtig, wenn ein fester Punkt auf der Erdoberfläche betrachtet wird, etwa eine Satelliten-Beobachtungsstation. Ein solcher Ort hat keine Bewegung gegenüber dem geographischen

System (es sei denn es findet gerade ein Erdbeben statt) und es kann $y_1^{(G)} = const.,\ y_2^{(G)} = const.,\ y_3^{(G)} = const.,$ somit $\dot{y}_1^{(G)} = \dot{y}_2^{(G)} = \dot{y}_3^{(G)} = 0$ gesetzt werden. Werde überdies angenommen, dass das Basis-Äquatorsystem fundamental sei $\left(\mathbf{D}_p \equiv 0\right)$, bleibt für den Geschwindigkeitsvektor mit Beziehung (8.206) und den Transformationen (8.137) und (8.141)

$$\dot{\mathbf{R}} \approx \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{R} = \dot{\Theta}\left(-y_2^{(G)}\,\mathbf{q}_1^{(G)} + y_1^{(G)}\,\mathbf{q}_2^{(G)}\right) = \dot{\Theta}\left(-x_2\,\mathbf{p}_1 + x_1\,\mathbf{p}_2\right) \quad . \blacktriangleleft$$

Diese Aussage ist von besonderem Interesse: Der Geschwindigkeitsvektor im geographischen System (analoge Aussagen ergeben sich selbstverständlich auch in anderen Systemen, jedoch lässt sich dort nicht so leicht ein fester Punkt wie ein fester Punkt auf der Erdoberfläche auszeichnen) hängt einzig und allein von der Eigenbewegung dieses Systems ab und nicht von der Beschreibung der Bewegung im erdfesten geographischen System oder dem auf den Frühlingspunkt bezogenen Äquatorsystem ab. Dieser Sachverhalt kann entsprechend auf den Beschleunigungsvektor einer Bewegung im geographischen System übertragen werden.

8.6.3 Der Beschleunigungsvektor im geographischen System

Zur Berechnung des Beschleunigungsvektors wird aus dem Geschwindigkeitsvektor (8.211)

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_q + \dot{\mathbf{D}}_{qp} \times \mathbf{R} + \mathbf{D}_{qp} \times \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{D}}_p \times \mathbf{R} + \mathbf{D}_p \times \dot{\mathbf{R}} \tag{8.212}$$

erhalten. Für die zum geographischen System relative Bewegung liefert der Ausdruck (8.209)

$$\ddot{\mathbf{R}}_q = \ddot{y}^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} + \dot{y}^{(G)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(G)} \quad , \tag{8.213}$$

wobei die $\ddot{y}_j^{(G)}$ aus den Ausdrücken (8.210) durch Differentiation erhalten werden und die Variationen $\ddot{R}_Q, \ddot{H}', \ddot{\varphi}, \ddot{\lambda}$ als bekannt angenommen werden müssen. Ferner ist mit dem absoluten Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_q$ des $\mathbf{q}_j^{(G)} -$Systems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(G)} = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j^{(G)} \qquad \left(j = 1,2,3\right) \quad , \tag{8.214}$$

wobei

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_{qp} + \mathbf{D}_p \quad . \tag{8.215}$$

Der absolute Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ ist in dem Ausdruck (8.211) gegeben. Aus (8.206) folgt

$$\dot{\mathbf{D}}_{qp} = \ddot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(G)} + \dot{\Theta}\dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} = \ddot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(G)} + \dot{\Theta}\mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{q}_3^{(G)} + \dot{\Theta}\mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_3^{(G)} = \ddot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(G)} + \dot{\Theta}\mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_3^{(G)} \quad ,$$

somit

$$\dot{\mathbf{D}}_{qp} \times \mathbf{R} = \ddot{\Theta}\left(y_1^{(G)}\,\mathbf{q}_2^{(G)} - y_2^{(G)}\,\mathbf{q}_1^{(G)}\right) + \dot{\Theta}\left(\mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_3^{(G)}\right) \times \mathbf{R} \quad , \tag{8.216}$$

außerdem

$$\mathbf{D}_{qp} \times \dot{\mathbf{R}} = \dot{\Theta}\left[\mathbf{q}_3^{(G)} \times \dot{y}^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} + \mathbf{q}_3^{(G)} \times \left(\dot{\Theta}\,\mathbf{q}_3^{(G)} \times y^{(G)j}\mathbf{q}_j^{(G)}\right) + \mathbf{q}_3^{(G)} \times \left(\mathbf{D}_p \times \mathbf{R}\right)\right]$$

bzw.

$$\mathbf{D}_{qp} \times \dot{\mathbf{R}} = \dot{\Theta}\left[\dot{y}_1^{(G)} \mathbf{q}_2^{(G)} - \dot{y}_2^{(G)} \mathbf{q}_1^{(G)} - \dot{\Theta}\left(y_1^{(G)} \mathbf{q}_1^{(G)} + y_2^{(G)} \mathbf{q}_2^{(G)} \right) + \mathbf{q}_3^{(G)} \times \left(\mathbf{D}_p \times \mathbf{R} \right) \right] \quad .(8.217)$$

BEISPIEL: Wird jetzt wieder ein fester Punkt auf der Erdoberfläche betrachtet, der gegenüber dem geographischen System keine Eigenbewegung hat $\left(\dot{y}_j^{(G)} = \ddot{y}_j^{(G)} = 0 \ , \ j = 1,2,3 \right)$ und wird auch wieder $\mathbf{D}_p \equiv 0$ angenommen, bleibt

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\Theta} \left(y_1^{(G)} \mathbf{q}_2^{(G)} - y_2^{(G)} \mathbf{q}_1^{(G)} \right) - \dot{\Theta}^2 \left(y_1^{(G)} \mathbf{q}_1^{(G)} + y_2^{(G)} \mathbf{q}_2^{(G)} \right) + ... \quad .$$

Für praktische Anwendungen in der Satellitenbeobachtung zeigen die Zahlenwerte (8.133), dass der Beschleunigungswert $\ddot{\Theta}$ in den meisten Fällen vernachlässigt werden kann, es bleibt also, wenn noch die Transformationen (8.156) - (8.170) angewendet werden

$$\ddot{\mathbf{R}} \approx -\dot{\Theta}^2 \left(y_1^{(G)} \mathbf{q}_1^{(G)} + y_2^{(G)} \mathbf{q}_2^{(G)} \right) = -\dot{\Theta}^2 \left(x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 \right) \quad .\blacktriangleleft \qquad (8.218)$$

8.7 Das topozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

Ist ein Ort (Topozentrum) auf oder über der Erdoberfläche mit seinen geographischen Koordinaten (R, λ, φ) bzw. (H', λ,φ) bzw. (H', Θ,φ) gegeben, kann auf ihn bezogen die Bewegung eines Satelliten beschrieben werden (vgl. Bild 8-9 auf Seite 343). Dazu kann das geozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem durch Translation in dieses Topozentrum verschoben werden.

8.7.1 Koordinatendarstellungen im topozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem

Ein Satellitenort (bzw. allgemeiner ein zu beobachtendes Objekt) habe die geozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen äquatorialen Koordinaten (vgl. Abschnitt 8.1 ab S. 314, jedoch hier auf das Topozentrum bezogen)

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ \Leftrightarrow \ r\left[\alpha, \delta\right] \quad . \qquad (8.219)$$

Das Topozentrum mit der geographischen Länge λ hat zum Zeitpunkt t die Sternzeit

$$\Theta = \Theta_G + \lambda \quad , \qquad (8.220)$$

die Höhe H' und den Querkrümmungsradius R_Q aus Formel (8.95) und somit entsprechend Formel (8.96) die (geozentrischen) äquatorialen Frühlingspunkt-bezogenen Koordinaten (bezogen auf die Basis $\mathbf{p}_i$)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = x_g{}^i \mathbf{p}_i = \ & \mathbf{p}_1 \, (R_Q + H') \cos\varphi \cos\Theta + \\ & + \mathbf{p}_2 \, (R_Q + H') \cos\varphi \sin\Theta + \\ & + \mathbf{p}_3 \left[R_Q \, (1-f)^2 + H' \right] \sin\varphi \quad . \end{aligned} \qquad (8.221)$$

Der topozentrische Ortsvektor des zu beobachtenden Objektes

$$\mathbf{r}_T := \mathbf{r} - \mathbf{R} \qquad (8.222)$$

hat die Frühlingspunkt-bezogenen Koordinaten

$$\mathbf{r}_T \;=\; x_T^{\,i}\mathbf{p}_i \;\Leftrightarrow\; \rho\left[\alpha_T,\delta_T\right] \quad . \tag{8.223}$$

Hier sind $\rho=\sqrt{x^i x_i}$ die topozentrische Entfernung des Objektes (in der raumfahrttechnischen Literatur gerne auch als „Schrägentfernung“ bezeichnet), α_T die *topozentrische Rektaszension*,

$$0^h \;\le\; \alpha_T \;\le\; 24^h \quad , \tag{8.224}$$

δ_T die *topozentrische Deklination*

$$-90° \;\le\; \delta_T \;\le\; 90° \quad . \tag{8.225}$$

Die Beziehungen zwischen dem geozentrischen und dem topozentrischen System lauten ausführlich

$$\begin{aligned}
x_{T1} \;&=\; \rho\cos\delta_T\cos\alpha_T \;&=\; x_1 - x_{g1} \;&=\; r\cos\delta\cos\alpha - (R_Q + H')\cos\varphi\cos\Theta \\
x_{T2} \;&=\; \rho\cos\delta_T\sin\alpha_T \;&=\; x_2 - x_{g2} \;&=\; r\cos\delta\sin\alpha - (R_Q + H')\cos\varphi\sin\Theta \\
x_{T3} \;&=\; \rho\sin\delta_T \;&=\; x_3 - x_{g3} \;&=\; r\sin\delta \quad -\left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right]\sin\varphi \quad .
\end{aligned} \tag{8.226}$$

Damit sind die Polarkoordinaten (ρ, α_T, δ_T) und (r, α, δ) umkehrbar eindeutig ineinander umzurechnen, sofern nur die Koordinaten des Topozentrums (H', λ, φ) bzw. (H', Θ, φ) bekannt sind. Bei Vorgabe des topozentrischen Ortsvektors $\mathbf{r}_T$ ist dann auch der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}$ eindeutig zu berechnen.

Zur Darstellung des Geschwindigkeitsvektors in den beiden Systemen

$$\dot{\mathbf{r}}_T \;=\; \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} \tag{8.227}$$

werden die entsprechenden Variationen benötigt. Es sei $\dot{\mathbf{R}}$ im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem bekannt:

$$\dot{\mathbf{R}} \;=\; \dot{x}_g^{\,i}\mathbf{p}_i \tag{8.228}$$

bzw. mit $\dot{R}_Q$ aus Formel (8.108) und H' aus Formel (8.112) (das in diesen Formeln auf $\dot{\mathbf{R}}$ bezogene δ und $\dot{\delta}$ ist mit den Formeln (8.98) und (8.109) bekannt)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{g1} \;&=\; (\dot{R}_Q + \dot{H}')\cos\varphi\cos\Theta - (R_Q + H')\,(\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\cos\Theta + \dot{\Theta}\cos\varphi\sin\Theta) \\
\dot{x}_{g2} \;&=\; (\dot{R}_Q + \dot{H}')\cos\varphi\sin\Theta - (R_Q + H')\,(\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\sin\Theta - \dot{\Theta}\cos\varphi\cos\Theta) \\
\dot{x}_{g3} \;&=\; \left[\dot{R}_Q\,(1-f)^2 - 2\,\dot{f}\,(1-f)\,R_Q + \dot{H}'\right]\sin\varphi + \dot{\varphi}\left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right]\cos\varphi \quad .
\end{aligned} \tag{8.229}$$

Bei Vorgabe der geozentrischen Polarkoordinaten $\left[r,\alpha,\delta\right]$ und ihrer Variationen $\left[\dot{r},\dot{\alpha},\dot{\delta}\right]$ können die Variationen $\left[\dot{\rho},\dot{\alpha}_T,\dot{\delta}_T\right]$ der topozentrischen äquatorialen Polarkoordinaten berechnet werden aus:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} \;=\;& \dot{r}\,\left[\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta\cos\delta_T+\sin\delta\sin\delta_T\right]+\\ &+\dot{\delta}\;r\left[-\cos(\alpha-\alpha_T)\sin\delta\cos\delta_T+\cos\delta\sin\delta_T\right]-\\ &-\dot{\alpha}\;r\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta\cos\delta_T-\\ &-\left[\dot{x}_{g1}\cos\delta_T\cos\alpha_T+\dot{x}_{g2}\cos\delta_T\sin\alpha_T+\dot{x}_{g3}\sin\delta_T\right]\end{aligned} \tag{8.230}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_T\,\rho \;=\;& \dot{r}\,\left[-\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta\sin\delta_T+\sin\delta\cos\delta_T\right]+\\ &+\dot{\delta}\;r\left[-\cos(\alpha-\alpha_T)\sin\delta\sin\delta_T+\cos\delta\cos\delta_T\right]-\\ &-\dot{\alpha}\;r\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta\sin\delta_T-\\ &-\left[\dot{x}_{g1}\sin\delta_T\cos\alpha_T+\dot{x}_{g2}\sin\delta_T\sin\alpha_T+\dot{x}_{g3}\cos\delta_T\right]\end{aligned} \tag{8.231}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_T\,\rho\cos\delta_T \;=\;& \dot{r}\;\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta-\\ &-\dot{\delta}\;r\sin(\alpha-\alpha_T)\sin\delta-\\ &-\dot{\alpha}\;r\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta+\\ &+\dot{x}_{g1}\sin\alpha_T+\dot{x}_{g2}\cos\alpha_T\end{aligned} \tag{8.232}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\dot{r} \;=\;& \dot{\rho}\left[\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T\cos\delta+\sin\delta_T\sin\delta\right]+\\ &+\dot{\delta}_T\;\rho\left[-\cos(\alpha-\alpha_T)\sin\delta_T\cos\delta+\cos\delta_T\sin\delta\right]-\\ &-\dot{\alpha}_T\;\rho\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T\cos\delta+\\ &+\left[\dot{x}_{g1}\cos\delta\cos\alpha+\dot{x}_{g2}\cos\delta\sin\alpha+\dot{x}_{g3}\sin\delta\right]\end{aligned} \tag{8.233}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}\,r \;=\;& \dot{\rho}\left[-\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T\sin\delta+\sin\delta_T\cos\delta\right]+\\ &+\dot{\delta}_T\;\rho\left[\cos(\alpha-\alpha_T)\sin\delta_T\sin\delta+\cos\delta_T\cos\delta\right]+\\ &+\dot{\alpha}_T\;\rho\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T\sin\delta-\\ &-\left[\dot{x}_{g1}\sin\delta\cos\alpha+\dot{x}_{g2}\sin\delta\sin\alpha-\dot{x}_{g3}\cos\delta\right]\end{aligned} \tag{8.234}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}\,r\cos\delta \;=\;& \dot{\rho}\sin(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T-\\ &-\dot{\delta}_T\;\rho\sin(\alpha-\alpha_T)\sin\delta_T+\\ &+\dot{\alpha}_T\;\rho\cos(\alpha-\alpha_T)\cos\delta_T-\\ &-\dot{x}_{g1}\sin\alpha+\dot{x}_{g2}\cos\alpha\qquad .\end{aligned} \tag{8.235}$$

8.7.2 Der Eigenbewegungsvektor des topozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems

Das topozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem wird durch Parallelverschiebung vom Erdmittelpunkt in das Topozentrum erhalten. Seine inertiale Orientierung und Eigenbewegung wird durch diese Verschiebung nicht beeinflusst. Somit hat auch das topozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem denselben (absoluten) Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_p \;=\; D_p{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{8.236}$$

wie das geozentrische System (siehe Formel (8.17) und folgenden Absatz).

8.8 Das topozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem

Das topozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem hat als Grundebene eine Parallelebene zur Äquatorebene durch den Beobachtungsort (Topozentrum) und ist wie das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem fest mit dem Erdkörper verbunden. Die Bezugsrichtung in der Äquatorebene ist durch einen Meridian (= Längenkreis), der durch das Topozentrum hindurchgeht, festgelegt.

8.8.1 Koordinatendarstellungen im topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystem

Das System wird durch ein orthonormiertes Basissystem $\mathbf{q}_j^{(M)}$ aufgespannt, dessen $\mathbf{q}_1^{(M)}$ – Achse in der Äquatorebene durch den Bezugsmeridian geht, $\mathbf{q}_3^{(M)}$ – Achse parallel zur Rotationsachse der Erde durch die Pole gerichtet ist und $\mathbf{q}_2^{(M)} = \mathbf{q}_3^{(M)} \times \mathbf{q}_1^{(M)}$-Achse in der Äquatorebene das System zu einem Linkssystem ergänzt (vgl. Bild 8-7 auf Seite 337, jedoch hier auf das Topozentrum bezogen). Als Polarkoordinaten eines in diesem System beobachteten Objektes

$$\mathbf{r}_T = y_T^{(M)j}\,\mathbf{q}_j^{(M)} = \rho\left[\mathbf{q}_1^{(M)}\cos\delta_T\,\cos\vartheta_T + \mathbf{q}_2^{(M)}\cos\delta_T\,\sin\vartheta_T + \mathbf{q}_3^{(M)}\sin\delta_T\right] \Leftrightarrow \rho\left[\vartheta_T, \delta_T\right] \quad (8.237)$$

werden der Meridian-bezogene *Stundenwinkel* $\vartheta_T = \Theta - \alpha_T$, wenn Θ die lokale Sternzeit ist (vgl. die Formeln (8.134) und (8.135)),

$$o^h \;\le\; \vartheta_T \;\le\; 24^h \quad , \qquad (8.238)$$

die topozentrische Deklination δ_T

$$-90° \;\le\; \delta_T \;\le\; 90° \qquad (8.239)$$

und die Schrägentfernung ρ des beobachteten Objektes verwendet. Der Stundenwinkel wird positiv von Süd nach West gemessen. Der Stundenwinkel ist also wie bei dem parallelen geozentrischen System mit der lokalen Zeitmessung, bezogen auf den lokalen Meridian, korreliert.

Für die kartesischen Koordinaten $y_{Tj}^{(M)}$ in Formel (8.237) besteht die Zuordnung zu den entsprechenden Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} y_{T1}^{(M)} &= \rho\cos\delta_T\cos\vartheta_T \\ y_{T2}^{(M)} &= \rho\cos\delta_T\sin\vartheta_T \\ y_{T3}^{(M)} &= \rho\sin\delta_T \quad . \end{aligned} \qquad (8.240)$$

Umgekehrt werden die Polarkoordinaten des festen Äquatorsystems aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{y_T^{(M)i}\, y_{Ti}^{(M)}} \\
\sin\delta_T &= \frac{y_{T3}^{(M)}}{\rho} \quad , \quad \cos\delta_T = \sqrt{1-\sin^2\delta_T} \\
\cos\vartheta_T &= \frac{y_{T1}^{(M)}}{\rho\cos\delta_T} \quad , \quad (\rho\cos\delta_T > 0) \\
\sin\vartheta_T &= \frac{y_{T2}^{(M)}}{\rho\cos\delta_T} \quad , \quad (\rho\cos\delta_T > 0) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.241}
$$

Im Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{y}_T^{(M)j}\, \mathbf{q}_j^{(M)} + y_T^{(M)j}\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(M)} \tag{8.242}
$$

lauten die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors mit dem Formelsystem (4.122)

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_{T1}^{(M)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T1}^{(M)} - \dot\delta_T\, y_{T3}^{(M)} \cos\vartheta_T - \dot\vartheta_T\, y_{T2}^{(M)} \\
\dot{y}_{T2}^{(M)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T2}^{(M)} - \dot\delta_T\, y_{T3}^{(M)} \sin\vartheta_T + \dot\vartheta_T\, y_{T1}^{(M)} \\
\dot{y}_{T3}^{(M)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T3}^{(M)} + \rho\,\dot\delta_T \cos\delta_T
\end{aligned}
\tag{8.243}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.122) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot\rho &= \frac{y_T^{(M)i}\, \dot{y}_{Ti}^{(M)}}{\rho} \\
\dot\vartheta_T &= \frac{y_{T1}^{(M)}\, \dot{y}_{T2}^{(M)} - y_{T2}^{(M)}\, \dot{y}_{T1}^{(M)}}{\rho^2\cos^2\delta_T} \quad , \quad (\rho\cos\delta_T > 0) \\
\dot\delta_T &= \frac{1}{\rho^2}\left[\left(y_{T3}^{(M)}\, \dot{y}_{T1}^{(M)} - y_{T1}^{(M)}\, \dot{y}_{T3}^{(M)}\right)\cos\vartheta_T - \left(y_{T2}^{(M)}\, \dot{y}_{T3}^{(M)} - y_{T3}^{(M)}\, \dot{y}_{T2}^{(M)}\right)\sin\vartheta_T\right] , \quad (\rho > 0) .
\end{aligned}
\tag{8.244}
$$

8.8.2 Transformationen

Der Bezug des topozentrischen Meridian-bezogenen (festen) zum topozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen (beweglichen) Äquatorsystem erfolgt mit denselben Formeln wie bei den entsprechenden Beziehungen zwischen den zugehörigen geozentrischen Systemen in Abschnitt 8.4.2 auf Seite 339, jedoch mit den topozentrischen Koordinaten $x_{Ti}, y_{Tj}^{(M)}$, bzw. $\rho, \vartheta_T, \delta_T$ und die entsprechenden Variationen (siehe die Formeln (8.137) bis (8.141)]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(M)} &= \mathbf{p}_1 \cos\Theta + \mathbf{p}_2 \sin\Theta \\
\mathbf{q}_2^{(M)} &= \mathbf{p}_1 \sin\Theta - \mathbf{p}_2 \cos\Theta \\
\mathbf{q}_3^{(M)} &= \mathbf{p}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} &= -\dot{\Theta}\,\mathbf{q}_2^{(M)} + \dot{\mathbf{p}}_1 \cos\Theta + \dot{\mathbf{p}}_2 \sin\Theta \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \dot{\Theta}\,\mathbf{q}_1^{(M)} + \dot{\mathbf{p}}_1 \sin\Theta - \dot{\mathbf{p}}_2 \cos\Theta \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} &= \dot{\mathbf{p}}_3
\end{aligned}
\tag{8.245}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(M)} \cos\Theta + \mathbf{q}_2^{(M)} \sin\Theta \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(M)} \sin\Theta - \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\Theta \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_3^{(M)} \\
\dot{\mathbf{p}}_1 &= -\dot{\Theta}\,\mathbf{p}_2 + \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \cos\Theta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \sin\Theta \\
\dot{\mathbf{p}}_2 &= \dot{\Theta}\,\mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \sin\Theta - \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \cos\Theta \\
\dot{\mathbf{p}}_3 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)}
\end{aligned}
\tag{8.246}
$$

Sowie für die kartesischen Koordinaten eines

$$
\begin{aligned}
x_{T1} &= y_{T1}^{(M)} \cos\Theta + y_{T2}^{(M)} \sin\Theta \\
x_{T2} &= y_{T1}^{(M)} \sin\Theta - y_{T2}^{(M)} \cos\Theta \\
x_{T3} &= y_{T3}^{(M)} \\
\dot{x}_{T1} &= \dot{y}_{T1}^{(M)} \cos\Theta + \dot{y}_{T2}^{(M)} \sin\Theta - \dot{\Theta}\, x_{T2} \\
\dot{x}_{T2} &= \dot{y}_{T1}^{(M)} \sin\Theta - \dot{y}_{T2}^{(M)} \cos\Theta + \dot{\Theta}\, x_{T1} \\
\dot{x}_{T3} &= \dot{y}_{T3}^{(M)}
\end{aligned}
\tag{8.247}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
y_{T1}^{(M)} &= x_{T1} \cos\Theta + x_{T2} \sin\Theta \\
y_{T2}^{(M)} &= x_{T1} \sin\Theta - x_{T2} \cos\Theta \\
y_{T3}^{(M)} &= x_{T3} \\
\dot{y}_{T1}^{(M)} &= \dot{x}_{T1} \cos\Theta + \dot{x}_{T2} \sin\Theta - \dot{\Theta}\, y_{T2}^{(M)} \\
\dot{y}_{T2}^{(M)} &= \dot{x}_{T1} \sin\Theta - \dot{x}_{T2} \cos\Theta + \dot{\Theta}\, y_{T1}^{(M)} \\
\dot{y}_{T3}^{(M)} &= \dot{x}_{T3} \qquad .
\end{aligned}
\tag{8.248}
$$

Die Transformationsformeln zwischen dem erdfesten Greenwichsystem bzw. geographischen System und dem topozentrischen (Orts-)Meridian-bezogenen Äquatorsystem sind dieselben wie im geozentrischen Fall nach Abschnitt 8.5.2.2:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(M)} &= \mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda \\
\mathbf{q}_2^{(M)} &= \mathbf{q}_1^{(G)} \sin\lambda - \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\lambda \\
\mathbf{q}_3^{(M)} &= \mathbf{q}_3^{(G)}
\end{aligned}
\tag{8.249}
$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_2^{(M)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \sin\lambda - \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_1^{(M)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)}
\end{aligned} \tag{8.250}$$

sowie umgekehrt

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(G)} &= \mathbf{q}_1^{(M)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(M)} \sin\lambda \\
\mathbf{q}_2^{(G)} &= \mathbf{q}_1^{(M)} \sin\lambda - \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\lambda \\
\mathbf{q}_3^{(G)} &= \mathbf{q}_3^{(M)}
\end{aligned} \tag{8.251}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \sin\lambda - \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_2^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} \sin\lambda - \dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \cos\lambda + \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_1^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)} \quad .
\end{aligned} \tag{8.252}$$

Die Beziehungen zwischen den Koordinaten in den beiden Systemen können auch in diesem Fall aus dem Ortsvektor hergeleitet werden:

$$\mathbf{r} \;=\; y_T^{(M)j}\,\mathbf{q}_j^{(M)} \;=\; y_T^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} \quad . \tag{8.253}$$

8.8.3 Der Eigenbewegungsvektor des topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystems

Die Orientierung und Eigenbewegung des topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystems ist infolge einer Parallelverschiebung identisch zu der des geozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystems Deshalb ist der Eigenbewegungsvektor dieses Systems auch derselbe wie der des geozentrischen Systems (vgl. Formel (8.147)]:

$$\mathbf{D}_{q^{(M)}p} \;=\; \dot{\Theta}\,\mathbf{q}_3^{(M)} \quad . \tag{8.254}$$

8.9 Das Horizontsystem

Das Horizontsystem ist das System, in dem gewöhnlich Beobachtungen durchgeführt werden. Dies können entweder Beobachtungen sein, die von einem Beobachtungsort auf der Erdoberfläche oder einem anderen Bezugskörper durchgeführt werden. Dieser kann sich bewegen, etwa durch Veränderung des Bezugssystems der Bezugskörper (siehe etwa die Polbewegung in Abschnitt 9.5) oder die Zeitabhängigkeit der betrachteten Systeme. Dieser Ort kann aber auch ein Fahrzeug auf der Oberfläche (Auto, Schiff) oder in der Luft (Flugzeug, Ballon, Luftschiff) oder über der Lufthülle (Satellit) sein. Der Fall beliebiger satellitenzentrierter Systeme wird in Abschnitt 8.16 auf Seite 416 behandelt.

8.9.1 Koordinatendarstellungen im Horizontsystem

Die Grundebene des Horizontsystems, die Horizontebene, könnte in naiver Weise als die Ebene im Beobachtungspunkt an die Erdoberfläche gewählt werden. Wegen der Rauhigkeit der Erdoberfläche (dies trifft auch bei anderen Planetenoberflächen zu) ist diese Ebene aber in der Regel nicht eindeutig bestimmbar. Ein üblicher Weg ist mit Hilfe eines Senkbleis die lo-

kale Vertikale zu bestimmen. Die Ebene senkrecht zur Richtung des Senkbleis durch den Beobachtungsort wird dann als *astronomische Horizontebene* bezeichnet. Das Senkblei weist über der Ebene zum *astronomischen Zenit* Z_A (siehe Bild 8-10 auf S. 361). Die Richtung des Senkbleis ist von lokalen Schwankungen des Erdschwerefeldes abhängig. Derart an verschiedenen Orten definierte astronomische Horizontsysteme sind daher nur mühsam miteinander vergleichbar und schwer mathematisch präzisierbar.

Bild 8-10: Das Horizontsystem, E_{rot} = Rotationsellipsoid, O = Erdoberfläche (Geoid), Z_A = astronomischer Zenit, Z = ellipsoidischer Zenit, T= Topozentrum, P = Nordpol, T' = Projektion von T auf Rotationsellipsoid, HOR' = Tangentialebene an Rotationsellipsoid, HOR = lokale Horizontebene, N = Nordrichtung auf Horizontebene, S = Südrichtung auf Horizontebene, φ = geodätische Breite, φ' = geozentrische Breite, H' = Höhe von T über Rotationsellipsoid

Um zu einem einheitlich zugänglichen und mathematisch beschreibbaren Horizontsystem zu kommen, geht man davon aus, dass ein Referenzellipsoid bekannt ist und die Beziehungen des Beobachtungsortes zu diesem Referenzellipsoid eindeutig mathematisch fassbar sind. Falls diese Beziehung bekannt ist – die Aufgabe ist nicht trivial und erfordert einen hohen Aufwand geodätischer Messungen[1] – wird entsprechend Bild 8-10 auf Seite 361 der Beobachtungsort T auf das Rotationsellipsoid E_{rot} gelotet. Im so erhaltenen Projektionspunkt T' wird die Tangentialebene HOR' an das Rotationsellipsoid gelegt. Deren Parallelebene *HOR* durch T bildet die Horizontebene, genauer: *ellipsoidische Horizontebene*. In dieser Ebene wird die Richtung von T zur auf den Nordpol P gerichteten Rotationsachse des Rotationsellipsoids als Nordrichtung N gewählt, die entgegengesetzte Richtung als Südrichtung S. Die Richtung nach

[1] siehe etwa MUELLER [1969], Kap. 2 ff., SEEBER [1989], Kap. 2 ff.

Norden wird als Bezugsrichtung gewählt, von der aus positiv über Osten nach Süden das Azimut *A* gerechnet wird[1]

$$0° \leq A \leq 360° \quad . \tag{8.255}$$

Es handelt sich hierbei genau genommen um das *ellipsoidische Azimut* im Gegensatz zu dem auf den astronomischen Horizont bezogenen astronomischen Azimut. Die Vertikale zur Horizontebene, also die Gerade durch TT', weist „über" der Horizontebene (also von der Erdoberfläche weg) zum *Zenit Z*, genauer *ellipsoidischer Zenit*. Die entgegengesetzte Richtung weist zum *Nadir*. Der Nadir ist für die Beobachtung von Objekten von einem Objekt oberhalb der Oberfläche des Zentralkörpers aus von großer Bedeutung. Der Winkel zwischen ellipsoidischem Zenit *Z* und astronomischem Zenit Z' wird als *Lotabweichung* bezeichnet.

Der Winkel zwischen Horizontebene und einer Richtung zu einem Beobachtungsgegenstand wird in der Astrodynamik *Elevation* genannt. Es ist

$$-90° \leq h \leq 90° \quad . \tag{8.256}$$

Statt Elevation verwendet die sphärische Astronomie den Begriff *Höhe h* [Grad]. In der Satellitenbahnmechanik wird *Höhe H* [km] für den Abstand eines Ortes über dem Rotationsellipsoid verwendet. So ist etwa $H' = \overline{TT'}$ die Höhe von *T*. Der in der sphärischen Astronomie häufige Begriff *Zenitdistanz z* wird auch gelegentlich in der Satellitenbahnmechanik verwendet. Es ist

$$z := 90° - h \quad . \tag{8.257}$$

Das Horizontsystem hat die orthonormierte Basis $\mathbf{q}_j^{(H)}$, wobei $\mathbf{q}_1^{(H)}$ in der (ellipsoidischen) Horizontebene nach Norden und $\mathbf{q}_2^{(H)}$ nach Osten gerichtet ist, $\mathbf{q}_3^{(H)}$ zum (ellipsoidischen) Zenit.

Das Basissystem $\mathbf{q}_j^{(H)}$ des Horizontsystems kann auf folgende Weise unter Verwendung der Formeln des Mittelpunkt-orientierten Ellipsoids bestimmt werden

Der topozentrische Ortsvektor eines Satelliten

$$\mathbf{r}_T = y_T^{(H)j}\, \mathbf{q}_j^{(H)} \tag{8.258}$$

hat im Horizontsystem die Polarkoordinaten *Schrägentfernung* ρ vom Topozentrum zum Beobachtungsgegenstand (Himmelskörper, Satellit, ...), und die Winkel *A*, *h*, also

$$\mathbf{r}_T = \rho\left(\mathbf{q}_1^{(H)} \cosh\cos A + \mathbf{q}_2^{(H)} \cosh\sin A + \mathbf{q}_3^{(H)} \sinh\right) \Leftrightarrow \rho\left[A, h\right] \quad . \tag{8.259}$$

Ihr Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten $y_T^{(H)j}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_{T1}^{(H)} &= \rho \cosh\cos A \\ y_{T2}^{(H)} &= \rho \cosh\sin A \\ y_{T3}^{(H)} &= \rho \sin h \quad , \end{aligned} \tag{8.260}$$

In der technischen Literatur finden sich bisweilen die *Richtungskosinus*

[1] In der sphärischen Astronomie ist es nach wie vor gebräuchlich, die Südrichtung als Bezugsrichtung zu wählen, da im Süden Sterne und im wesentlichen auch Sonne, Mond und Planeten ihre obere Kulmination durchlaufen, und deshalb das Azimut von Süd positiv über Westen nach Norden zu rechnen. Weitere Definitionen, wie die Ostrichtung als Bezugsrichtung zu nehmen, haben sich (glücklicherweise) nicht durchsetzen können.

$$\begin{aligned} c_{H1} &= \cosh\cos A \\ c_{H2} &= \cosh\sin A \\ c_{H3} &= \sin h \quad . \end{aligned} \tag{8.261}$$

Im Fall bodengebundener Beobachtungen, etwa zur Berechnung von Ephemeriden für Antennendrehstände, ist die Elevation h stets positiv. Es genügen dann zwei Richtungskosinus c_{H1}, c_{H2} zur vollständigen Richtungsangabe und der dritte kann aus $c_{H3} = \sqrt{1-c_{H1}^2+c_{H2}^2}$ berechnet werden. Wir wollen diesen Weg hier nicht weiterverfolgen.

Die Polarkoordinaten des Horizontsystems werden aus den kartesischen Koordinaten nach dem Formelsystem (4.91) erhalten

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{y_T^{(H)i}\, y_{Ti}^{(H)}} \\ \sin h &= \frac{y_{T3}^{(H)}}{\rho} \quad , \quad \cos h = \sqrt{1-\sin^2 h} \\ \cos A &= \frac{y_{T1}^{(H)}}{\rho\cos h} \quad , \quad (\rho\cos h > 0) \\ \sin A &= \frac{y_{T2}^{(H)}}{\rho\cos h} \quad , \quad (\rho\cos h > 0) \quad . \end{aligned} \tag{8.262}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.122)

$$\begin{aligned} \dot{y}_{T1}^{(H)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T1}^{(H)} - \dot h\, y_{T3}\cos A - \dot A\, y_{T2}^{(H)} \\ \dot{y}_{T2}^{(H)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T2}^{(H)} - \dot h\, y_{T3}\sin A + \dot A\, y_{T1}^{(H)} \\ \dot{y}_{T3}^{(H)} &= \frac{\dot\rho}{\rho}\, y_{T3}^{(H)} + \rho\,\dot h\cos h \end{aligned} \tag{8.263}$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.122) bis (4.131)

$$\begin{aligned} \dot\rho &= \frac{y_T^{(H)i}\, \dot y_{Ti}^{(H)}}{\rho} \\ \dot A &= \frac{y_{T1}^{(H)}\, \dot y_{T2}^{(H)} - y_{T2}^{(H)}\, \dot y_{T1}^{(H)}}{\rho^2\cos^2 h} \quad , \quad \langle |\rho\cos h| > 0, \rho > 0 \\ \dot h &= \frac{1}{\rho^2}\left[-\left(y_{T3}^{(H)}\, \dot y_{T1}^{(H)} - y_{T1}^{(H)}\, \dot y_{T3}^{(H)}\right)\cos A + \left(y_{T2}^{(H)}\, \dot y_{T3}^{(H)} - y_{T3}^{(H)}\, \dot y_{T2}^{(H)}\right)\sin A\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.264}$$

8.9.2 Das Basisyssystem des Horizontsystems in Bezug auf ein Basisellipsoid

Das Topozentrum T ist im geographischen Koordinatensystem durch die geographische (östliche) Länge λ, die geodätische Breite φ und die Höhe über dem Ellipsoid H' gegeben. Die

der geodätischen Breite entsprechende geozentrische Breite φ' ist bei bekannter Abplattung f berechenbar[1]:

$$\tan\varphi' = (1-f)^2 \tan\varphi \quad . \tag{8.265}$$

Der Bezugspunkt P_1' auf dem Rotationsellipsoid, der dem Topozentrum T zugeordnet ist, hat den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{R}_1' = R_1' \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\varphi' \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\varphi' \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi' \right) \tag{8.266}$$

Mit dem Querkrümmungsradius (37.89)

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-f)^2 \sin^2\varphi}} \tag{8.267}$$

hat dieser Ort die geodätische Koordinatendarstellung

$$\mathbf{R}_1' = R_Q \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\varphi \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\varphi \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)} (1-f)^2 \sin\varphi \right) \quad . \tag{8.268}$$

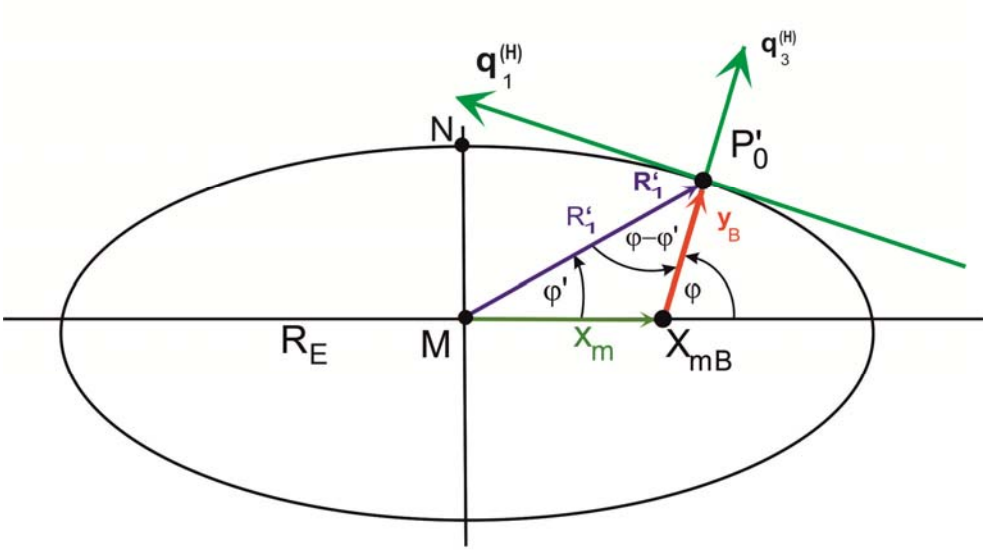


Bild 8-11: Zur Herleitung der Basisvektoren des Horizontsystems

Nach Bild 8-11[2] weist der Vektor

$$\mathbf{y} = R_1' \left\{ (1-f)^2 \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda \right) \cos\varphi' + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi' \right\} \tag{8.269}$$

in die Richtung der Normale des Horizontsystems. Seine geodätische Darstellung lautet bei Bezug auf das Rotationsellipsoid des Erdkörpers, bzw. eines entsprechenden Planeten

$$\mathbf{y} = (1-f)^2 R_Q \left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\varphi \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\varphi \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi \right] \quad . \tag{8.270}$$

---

[1] Unter Verwendung von Formel (37.36). Es werden hier die in Kapitel 37 (Geometrie über einem Rotationsellipsoid in Band V) ohne Einschränkung hergeleiteten Formeln verwendet.

[2] und Beziehung (37.117) in Band V

Damit kann der normale Richtungsvektor des Horizontsystems aus

$$\mathbf{q}_3^{(H)} := \frac{\mathbf{y}}{\left(1-f\right)^2 R_Q} = \mathbf{q}_1^{(G)} \cos\varphi \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\varphi \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi \quad . \tag{8.271}$$

berechnet werden. Der zweite Richtungsvektor des Horizontsystems weist genau nach Osten, ist also entgegengesetzt zu dem zweiten Richtungsvektor des topozentrischen Meridian-bezogenen Koordinatensystems. Da für dieses System die Formeln (8.171) zum Bezug auf das geographische System gültig sind, ist

$$\mathbf{q}_2^{(H)} = -\mathbf{q}_1^{(G)} \sin\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\lambda \quad . \tag{8.272}$$

Für den ersten Richtungsvektor bleibt

$$\mathbf{q}_1^{(H)} = \mathbf{q}_3^{(H)} \times \mathbf{q}_2^{(H)} \quad . \tag{8.273}$$

Dieser ist nach Norden gerichtet, so dass das Horizontsystem ein Linkssystem wird. In geographischen Koordinaten hat dieser Richtungsvektor somit die Darstellung

$$\mathbf{q}_1^{(H)} = -\mathbf{q}_1^{(G)} \sin\varphi \cos\lambda - \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\varphi \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)} \cos\varphi \quad . \tag{8.274}$$

Die hier durchgeführte Herleitung der Basis des Horizontsystems schließt ein, dass die in der sphärischen Astronomie üblichen Transformationsformeln zu einem Äquatorsystem auch bezüglich einer als Rotationsellipsoid angenommenen Planetenoberfläche gültig bleiben, sofern nur die geodätische Breite (und nicht wie im Fall einer Kugeloberfläche die geozentrische Breite) für die Drehung herangezogen wird.

8.9.3 Transformationen mit anderen Systemen

8.9.3.1 Horizontsystem und geographisches System

Ein Ort auf der Erdoberfläche ist mit seinen geographischen Koordinaten bestimmt. Entsprechend der Herleitung der Basisvektoren des Horizontsystems mit Hilfe dieser Koordinaten kann der Bezug des Horizontsystems zum geographischen System hergestellt werden. Die Darstellung des Horizontsystems in geographischen Koordinaten ist durch die Beziehungen (8.271) - (8.274) gegeben. Umgekehrt kann das geographische System im Horizontsystem dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(G)} &= -\mathbf{q}_1^{(H)} \cos\lambda \sin\varphi - \mathbf{q}_2^{(H)} \sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(H)} \cos\lambda \cos\varphi \\
\mathbf{q}_2^{(G)} &= -\mathbf{q}_1^{(H)} \sin\lambda \sin\varphi + \mathbf{q}_2^{(H)} \cos\lambda + \mathbf{q}_3^{(H)} \sin\lambda \cos\varphi \\
\mathbf{q}_3^{(G)} &= \mathbf{q}_1^{(H)} \cos\varphi + \mathbf{q}_3^{(H)} \sin\varphi \quad .
\end{aligned} \tag{8.275}$$

Die Eigenvariationen dieser Systeme schließen Bewegungen des Beobachtungsortes ein (Fahrzeuge wie Autos, Flugzeug, Schiff, Höhenforschungsrakete, usw.). Man erhält

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \sin\varphi \cos\lambda - \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \sin\varphi \sin\lambda - \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} \cos\varphi - \dot{\varphi}\mathbf{q}_3^{(H)} - \dot{\lambda}\mathbf{q}_2^{(H)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \sin\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \cos\lambda - \dot{\lambda}\left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda\right] \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \cos\varphi \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \cos\varphi \sin\lambda + \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} \sin\varphi + \dot{\varphi}\mathbf{q}_1^{(H)} + \dot{\lambda}\mathbf{q}_2^{(H)}
\end{aligned} \tag{8.276}$$

sowie umgekehrt

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} \cos\lambda \, \sin\varphi - \dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} \sin\lambda + \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} \cos\lambda \, \cos\varphi - \dot{\varphi}\mathbf{q}_3^{(G)} \cos\lambda - \dot{\lambda}\mathbf{q}_2^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} \sin\lambda \, \sin\varphi + \dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} \cos\lambda + \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} \sin\lambda \, \cos\varphi - \dot{\varphi}\mathbf{q}_3^{(G)} \sin\lambda + \dot{\lambda}\mathbf{q}_1^{(G)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} \cos\varphi + \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} \sin\varphi + \dot{\varphi}\left[-\mathbf{q}_1^{(H)} \sin\varphi + \mathbf{q}_3^{(H)} \cos\varphi\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.277}$$

Über den Zustandsvektor in den verschiedenen Systemen

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = y^{(H)j}\mathbf{q}_j^{(H)} &= \rho\left[\mathbf{q}_1^{(H)} \cos h \, \cos A + \mathbf{q}_2^{(H)} \cos h \cos A + \mathbf{q}_3^{(H)} \sin h\right] = \\
= y^{(G)i}\mathbf{q}_i^{(G)} &= \rho\left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\delta_T \, \cos\lambda_T + \mathbf{q}_2^{(H)} \cos\delta_T \cos\lambda_T + \mathbf{q}_3^{(H)} \sin\delta_T\right]
\end{aligned} \tag{8.278}$$

können die Beziehungen der jeweiligen Koeffizienten sowie die zugehörigen Variationen berechnet werden. Die Winkelkoordinaten eines im horizontalen System beobachteten Objektes können im topozentrischen geographischen System berechnet werden

$$\begin{aligned}
\cos\lambda_T \, \cos\delta_T &= \cos\lambda \, \left[-\cos A \cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi\right] - \sin\lambda \, \sin A \cosh \\
\sin\lambda_T \, \cos\delta_T &= \sin\lambda \, \left[-\cos A \cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi\right] + \cos\lambda \, \cos A \cosh \\
\sin\delta_T &= \cos A \cos h \cos\varphi + \sin h \, \sin\varphi
\end{aligned} \tag{8.279}$$

und umgekehrt die horizontalen Winkelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\cos A \, \cos h &= -\cos\left(\lambda - \lambda_T\right) \cos\delta_T \, \sin\varphi + \sin\delta_T \, \cos\varphi \\
\sin A \, \cos h &= -\sin\left(\lambda - \lambda_T\right) \cos\delta_T \\
\sin h &= \cos\left(\lambda - \lambda_T\right) \cos\delta_T \, \cos\varphi + \sin\delta_T \, \sin\varphi \quad .
\end{aligned} \tag{8.280}$$

8.9.3.2 Horizontsystem und topozentrisches Meridian-bezogenes Äquatorsystem

Im Fall der Beobachtung etwa von Satelliten ist deren Bewegung üblicherweise in geozentrischen auf den Frühlingspunkt bezogenen äquatorialen Kordinaten gegeben. Der Bezug des Horizontsystems zu diesem System wird über das topozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem hergestellt. Seien die $\mathbf{q}_i^{(M)}$ die Basisvektoren des Meridian-bezogenen Äquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(H)}$ die Basisvektoren im Horizontsystem. Um das Horizontsystem aus dem Meridian-bezogenen topozentrischen Äquatorsystem zu erhalten, wird die Richtung zum Nordpol $\mathbf{p}_3$ in den Zenit $\mathbf{q}_3$ durch Drehung um den Winkel 90°–φ (φ= geodätische Breite des Topozentrums) mit $-\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2^{(H)}$ als Drehachse erhalten. Es muss beachtet werden, dass die neue $\mathbf{q}_1^{(H)}$ Achse des Horizontsystems nach Norden, die $\mathbf{p}_1$-Achse des Äquatorsystems nach Süden weist, so dass noch eine Drehung um 180° um die $\mathbf{q}_3^{(H)}$ – Achse erfolgen muss.

Die Transformation

$$\mathbf{q}_j^{(H)} = a_j{}^i \, \mathbf{q}_i^{(M)} \tag{8.281}$$

hat die Koeffizienten der Drehmatrix entsprechend den für eine Drehung orthonormaler Systeme gültigen Beziehungen (6.91)

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \mathbf{q}_1^{(H)} \cdot \mathbf{q}_1^{(M)} = -\sin\varphi \\
a_{12} &= \mathbf{q}_1^{(H)} \cdot \mathbf{q}_2^{(M)} = 0 \\
a_{13} &= \mathbf{q}_1^{(H)} \cdot \mathbf{q}_3^{(M)} = \cos\varphi \\
a_{21} &= \mathbf{q}_2^{(H)} \cdot \mathbf{q}_1^{(M)} = 0 \\
a_{22} &= \mathbf{q}_2^{(H)} \cdot \mathbf{q}_2^{(M)} = -1 \\
a_{23} &= \mathbf{q}_2^{(H)} \cdot \mathbf{q}_3^{(M)} = 0 \\
a_{31} &= \mathbf{q}_3^{(H)} \cdot \mathbf{q}_1^{(M)} = \cos\varphi \\
a_{32} &= \mathbf{q}_3^{(H)} \cdot \mathbf{q}_2^{(M)} = 0 \\
a_{33} &= \mathbf{q}_3^{(H)} \cdot \mathbf{q}_3^{(M)} = \sin\varphi \quad .
\end{aligned}
\tag{8.282}
$$

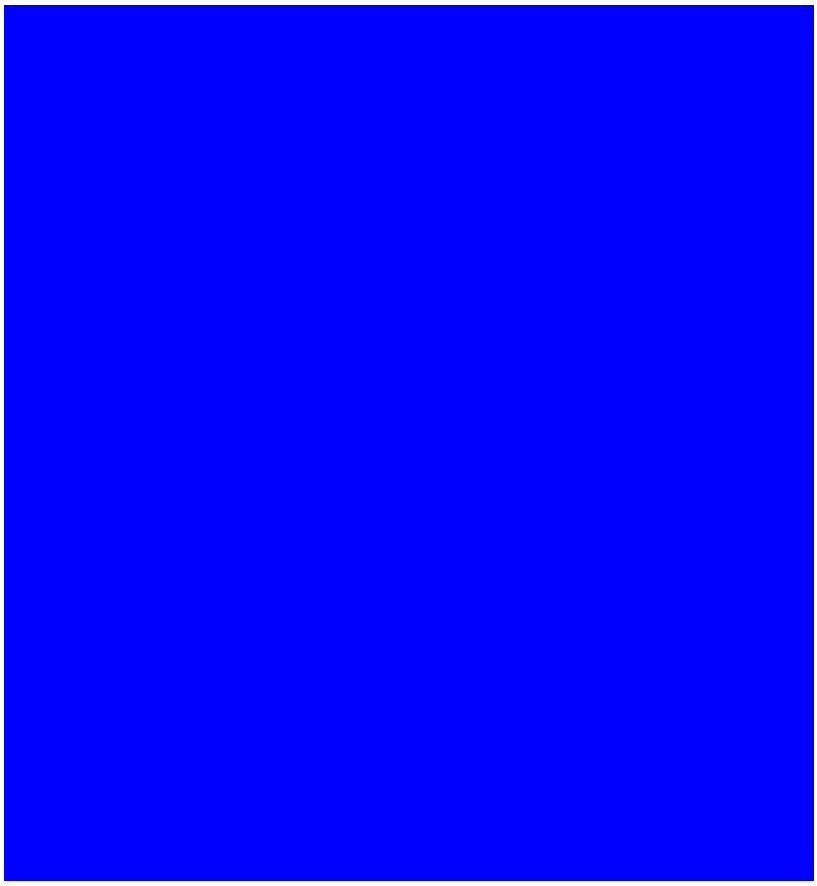


Bild 8-12: Beziehungen zwischen topozentrischem Horizont- und Meridian-bezogenem Äquatorsystem (Z-Zenith, N-Nordrichtung, S-Südrichtung auf Horizont)

Für die Umkehrabbildung

$$
\mathbf{q}_i^{(M)} = b_i{}^j \, \mathbf{q}_j^{(H)} \tag{8.283}
$$

ist daher mit (6.92) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det(a_j{}^i) = 1$ und $b_i{}^j = a_j{}^i$ in Matrixschreibweise

$$\left(b_{ij}\right) \;=\; \left(a_{ji}\right) \;=\; \begin{bmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad . \tag{8.284}$$

Damit sind auch für den topozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_T \;=\; y_T^{(M)i}\,\mathbf{q}_i^{(M)} \;=\; y_T^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} \tag{8.285}$$

die Transformationen der Komponenten bekannt

$$y_T^{(M)i} \;=\; a_j{}^i\, y_T^{(H)j} \quad ; \quad y_T^{(H)j} \;=\; a^j{}_i\, y_T^{(M)i}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} y_{T1}^{(M)} &= -y_{T1}^{(H)}\sin\varphi + y_{T3}^{(H)}\cos\varphi \\ y_{T2}^{(M)} &= -y_{T2}^{(H)} \\ y_{T3}^{(M)} &= \;\; y_{T1}^{(H)}\cos\varphi + y_{T3}^{(H)}\sin\varphi \end{aligned} \tag{8.286}$$

$$\begin{aligned} y_{T1}^{(H)} &= -y_{T1}^{(M)}\sin\varphi + y_{T3}^{(M)}\cos\varphi \\ y_{T2}^{(H)} &= -y_{T2}^{(M)} \\ y_{T3}^{(H)} &= \;\; y_{T1}^{(M)}\cos\varphi + y_{T3}^{(M)}\sin\varphi \end{aligned} \tag{8.287}$$

und für die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Äquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_{T1}^{(M)} &= -\dot{y}_{T1}^{(H)}\sin\varphi + \dot{y}_{T3}^{(H)}\cos\varphi - \dot{\varphi}\,y_{T3}^{(M)} \\ \dot{y}_{T2}^{(M)} &= -\dot{y}_{T2}^{(H)} \\ \dot{y}_{T3}^{(M)} &= \;\; \dot{y}_{T1}^{(H)}\cos\varphi + \dot{y}_{T3}^{(H)}\sin\varphi + \dot{\varphi}\,y_{T1}^{(M)} \end{aligned} \tag{8.288}$$

und relativ zum Horizontsystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_{T1}^{(H)} &= -\dot{y}_{T1}^{(M)}\sin\varphi + \dot{y}_{T3}^{(M)}\cos\varphi - \dot{\varphi}\,y_{T3}^{(H)} \\ \dot{y}_{T2}^{(H)} &= -\dot{y}_{T2}^{(M)} \\ \dot{y}_{T3}^{(H)} &= \;\; \dot{y}_{T1}^{(M)}\cos\varphi + \dot{y}_{T3}^{(M)}\sin\varphi + \dot{\varphi}\,y_{T1}^{(H)} \end{aligned} \quad . \tag{8.289}$$

Die Transformation der Basen und ihrer Variationen lauten daher

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(H)} &= -\mathbf{q}_1^{(M)}\sin\varphi + \mathbf{q}_3^{(M)}\cos\varphi \\ \mathbf{q}_2^{(H)} &= -\mathbf{q}_2^{(M)} \\ \mathbf{q}_3^{(H)} &= \;\; \mathbf{q}_1^{(M)}\cos\varphi + \mathbf{q}_1^{(M)}\sin\varphi \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} &= -\dot{\varphi}\,\mathbf{q}_3^{(H)} - \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)}\sin\varphi + \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)}\cos\varphi \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} &= \qquad\qquad -\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} &= \;\; \dot{\varphi}\,\mathbf{q}_1^{(H)} + \dot{\mathbf{q}}_1^{(M)}\cos\varphi + \dot{\mathbf{q}}_3^{(M)}\sin\varphi \end{aligned} \tag{8.290}$$

sowie für die Umkehrabbildung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(M)} &= -\mathbf{q}_1^{(H)} \sin\varphi + \mathbf{q}_3^{(H)} \cos\varphi \\
\mathbf{q}_2^{(M)} &= -\mathbf{q}_2^{(H)} \\
\mathbf{q}_3^{(M)} &= \mathbf{q}_1^{(H)} \cos\varphi + \mathbf{q}_3^{(H)} \sin\varphi \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(M)} &= -\dot{\varphi}\mathbf{q}_3^{(M)} - \dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} \sin\varphi + \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} \cos\varphi \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= -\dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \dot{\varphi}\mathbf{q}_1^{(M)} + \dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} \cos\varphi + \dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} \sin\varphi \quad .
\end{aligned}
\tag{8.291}
$$

Der Ortsvektor $\mathbf{r}_T$ hat im Meridian-bezogenen Äquatorsystem die Polarkoordinaten Schrägentfernung ρ, Stundenwinkel ϑ_T und Deklination δ_T , so dass zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen aus

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_T \;\Leftrightarrow\; \rho\left[\vartheta_T, \delta_T\right] \;\Leftrightarrow\; \rho\left[A, h\right] \\
&\mathbf{r}_T = \rho\left\{\mathbf{q}_1^{(M)} \cos\delta_T \cos\vartheta_T + \mathbf{q}_2^{(M)} \cos\delta_T \sin\vartheta_T + \mathbf{q}_3^{(M)} \sin\delta_T\right\} \\
&\mathbf{r}_T = \rho\left\{\mathbf{q}_1^{(H)} \cosh\cos A + \mathbf{q}_2^{(H)} \cosh\sin A + \mathbf{q}_3^{(H)} \sinh\right\}
\end{aligned}
\tag{8.292}
$$

die Schrägentfernung ρ herausgekürzt werden kann. Dies führt mit den Formeln (8.156) und (8.157) oder direkt aus Bild 8-12 auf die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\cos A\cos h &= -\cos\vartheta_T \cos\delta_T \sin\varphi + \sin\delta_T \cos\varphi \\
\sin A\cos h &= -\sin\vartheta_T \cos\delta_T \\
\sin h &= \cos\vartheta_T \cos\delta_T \cos\varphi + \sin\delta_T \sin\varphi
\end{aligned}
\tag{8.293}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\vartheta_T \cos\delta_T &= -\cos A\cosh\sin\varphi + \sin h\cos\varphi \\
\sin\vartheta_T \cos\delta_T &= -\sin A\cos h \\
\sin\delta_T &= \cos A\cosh\cos\varphi + \sin h\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{8.294}
$$

mit den Variationen relativ zum Horizontsystem (siehe auch die Formeln (6.117) bis (6,121))

$$
\begin{aligned}
\dot{A}\cos h = &-\dot{\vartheta}_T \cos\vartheta_T (\sin A\sin\vartheta_T \sin\varphi + \cos A\cos\vartheta_T) - \\
&-\dot{\delta}_T \left[\sin A(\cos\vartheta_T \sin\delta_T \sin\varphi + \cos\delta_T \cos\varphi) - \cos A\sin\vartheta_T \sin\delta_T\right] + \\
&+\dot{\varphi}\sin A\sin h
\end{aligned}
\tag{8.295}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h} = &-\dot{\vartheta}_T \cos\delta_T \left[\cosh\sin\vartheta_T \cos\varphi + \sin h(\cos A\sin\vartheta_T \sin\varphi - \sin A\cos\vartheta_T)\right] - \\
&-\dot{\delta}_T \left[\cos h(\cos\vartheta_T \sin\delta_T \cos\varphi - \cos\delta_T \sin\varphi) + \right. \\
&\quad +\sinh\cos A(\cos\vartheta_T \sin\delta_T \sin\varphi + \cos\delta_T \cos\varphi) + \\
&\quad \left. +\sinh\sin A\sin\vartheta_T \sin\delta_T\right] + \\
&+\dot{\varphi}\cos A
\end{aligned}
\tag{8.296}
$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystem

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_T \cos\delta_T = &-\dot{A}\cos h(\sin\vartheta_T \sin A\sin\varphi + \cos\vartheta_T \cos A) - \\
&-\dot{h}\left[\sin\vartheta_T (\cos A\sinh\sin\varphi + \cosh\cos\varphi) - \cos\vartheta_T \sin A\sin h\right] + \\
&+\dot{\varphi}\sin\vartheta_T \sin\delta_T
\end{aligned}
\tag{8.297}
$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_T \;=\; & -\dot{A}\cos h\left[\cos\delta_T \sin A\cos\varphi - \sin\delta_T\ (\cos\vartheta_T \sin A\sin\varphi - \sin\vartheta_T \cos A)\right] - \\ & -\dot{h}\left[\cos\delta_T\ (\cos A\sinh\cos\varphi - \cosh\sin\varphi) + \right. \\ & \quad +\sin\delta_T \cos\vartheta_T\ (\cos A\sinh\sin\varphi + \cosh\cos\varphi) + \\ & \quad \left. +\sin\delta_T \sin\vartheta_T \sin A\sin h\right] + \\ & +\dot{\varphi}\cos\vartheta_T \qquad .\end{aligned} \tag{8.298}$$

8.9.4 Der Eigenbewegungsvektor des Horizontsystems

Nach Bild 8-12 lauten die Zuordnungen bei einer Transformation vom topozentrischen Meridian-bezogenen Äquatorsystem in das (auf die Nordrichtung orientierte) lokale Horizontsystem $A \to 90°, B \to 90° - \varphi, C \to 90°$. Der relative Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(H)}$ −Horizontsystems bei Bezug auf das $\mathbf{q}_i^{(M)}$-Meridian-bezogene Äquatorsystem ist

$$\mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(M)}} \;=\; \dot{\varphi}\,\mathbf{q}_2^{(H)} \tag{8.299}$$

und umgekehrt des Meridian-bezogenen Äquatorsystems bei Bezug auf das Horizontsystem

$$\mathbf{D}_{q^{(M)}q^{(H)}} \;=\; -\mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(M)}} \;=\; \dot{\varphi}\,\mathbf{q}_2^{(M)} \quad . \tag{8.300}$$

Der Bezug zum Frühlingspunkt orientieren Äquatorsystem erfordert den Eigenbewegungsvektor (8.254)

$$\mathbf{D}_{q^{(M)}p} \;=\; -\dot{\Theta}\,\mathbf{q}_3^{(M)} \tag{8.301}$$

bei Bezug auf die $\mathbf{q}_i^{(M)}$-Basis des Meridian-bezogenen Äquatorsystems. Der absolute Eigenbewegungsvektor des Horizontsystems unter Verwendung des absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_p$ des Äquatorsystems lautet dann

$$\mathbf{D}_{q^{(H)}} \;=\; \mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(M)}} + \mathbf{D}_{q^{(M)}p} + \mathbf{D}_p \quad , \tag{8.302}$$

mit den Vektoren (8.299) und (8.301) nach Anwendung der entsprechenden Transformationen (8.291) und (8.246) in horizontalen Koordinaten

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{q^{(H)}} \;=\; & D^j_{q^{(H)}}\,\mathbf{q}_j^{(H)} \;= \\ & = \mathbf{q}_1^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\varphi\cos\Theta + D_{p2}\sin\varphi\sin\Theta + \left(D_{p3} - \dot{\Theta}\right)\cos\varphi\right] + \\ & + \mathbf{q}_2^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\Theta + D_{p2}\cos\Theta + \dot{\varphi}\right] + \\ & + \mathbf{q}_3^{(H)}\left[\ D_{p1}\cos\varphi\cos\Theta + D_{p2}\cos\varphi\sin\Theta + \left(D_{p3} - \dot{\Theta}\right)\sin\varphi\right] \qquad .\end{aligned} \tag{8.303}$$

Mit bekanntem absolutem Systemeigenbewegungsvektor kann die Eigenbewegung des Horizontsystems durch Berechnung der Variationen ihrer Basis

$$\dot{\mathbf{q}}_i^{(H)} \coloneqq q_i^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} \tag{8.304}$$

durch Anwendung der Äquivalenz

$$q_{12}^{(H)} = D_{q^{(H)}3} = -q_{21}^{(H)} \quad , \quad q_{23}^{(H)} = D_{q^{(H)}1} = -\,q_{32}^{(H)} \quad , \quad q_{31}^{(H)} = D_{q^{(H)}2} = -q_{13}^{(H)} \tag{8.305}$$

erhalten werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(H)} = & -\dot{\Theta}\mathbf{q}_2^{(H)}\sin\varphi - \dot{\varphi}\mathbf{q}_3^{(H)} + \\
& + \mathbf{q}_2^{(H)}\left[D_{p1}\cos\varphi\cos\Theta + D_{p2}\cos\varphi\sin\Theta + D_{p3}\sin\varphi\right] - \\
& - \mathbf{q}_3^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\Theta + D_{p2}\cos\Theta\right] \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(H)} = & \dot{\Theta}\mathbf{q}_1^{(H)}\sin\varphi - \dot{\Theta}\mathbf{q}_3^{(H)}\cos\varphi + \\
& - \mathbf{q}_1^{(H)}\left[D_{p1}\cos\varphi\cos\Theta + D_{p2}\cos\varphi\sin\Theta + D_{p3}\sin\varphi\right] + \\
& + \mathbf{q}_3^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\varphi\cos\Theta + D_{p2}\sin\varphi\,\sin\Theta + D_{p3}\cos\varphi\right] \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(H)} = & \dot{\varphi}\mathbf{q}_1^{(H)} + \dot{\Theta}\mathbf{q}_2^{(H)}\cos\varphi + \\
& + \mathbf{q}_1^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\Theta + D_{p2}\cos\Theta\right] - \\
& - \mathbf{q}_2^{(H)}\left[-D_{p1}\sin\varphi\cos\Theta + D_{p2}\sin\varphi\,\sin\Theta + D_{p3}\cos\varphi\right] .
\end{aligned} \tag{8.306}$$

BEISPIEL: Um eine Anwendung der vorstehenden Formeln zu geben, werde der topozentrische Geschwindgkeitsvektor im Horizontsystem berechnet. Zur Vereinfachung werde angenommen, dass das Basisbezugssystem inertial mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$, $D_{pi} \equiv 0$ sei. Dann führt die dritte der Ausdrücke (8.292) auf

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_T = & \mathbf{q}_1^{(H)}\left[\dot{\rho}\cos h\cos A + \rho\left(\dot{\Theta}\sin\varphi\cos h\sin A + \dot{\varphi}\sinh - \right.\right. \\
& \left.\left. - \dot{h}\sin h\cos A - \dot{A}\cos h\sin A\right)\right] + \\
& + \mathbf{q}_2^{(H)}\left[\dot{\rho}\cos h\sin A + \rho\left(\dot{\Theta}\left(-\sin\varphi\cos h\cos A + \cos\varphi\sinh\right) - \right.\right. \\
& \left.\left. - \dot{h}\sin h\sin A + \dot{A}\cos h\cos A\right)\right] + \\
& + \mathbf{q}_3^{(H)}\left[\dot{\rho}\sin h + \rho\left(-\dot{\varphi}\cos h\cos A - \dot{\Theta}\cos\varphi\cosh\sin A + \dot{h}\cos h\right)\right] \quad , \left(\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0\right) .
\end{aligned} \tag{8.307}$$

◀

Der relative Systemeigenbewegungsvektor des Horizontsystems in Bezug auf das geographische (Greenwich orientierte erdfeste) System lautet mit den Beziehungen (8.183) und (8.300)

$$\mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(G)}} = \mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(M)}} + \mathbf{D}_{q^{(M)}q^{(G)}} = \dot{\varphi}\,\mathbf{q}_2^{(H)} + \dot{\lambda}\,\mathbf{q}_3^{(M)} \tag{8.308}$$

in horizontalen Koordinaten somit

$$\mathbf{D}_{q^{(H)}q^{(G)}} = \dot{\lambda}\mathbf{q}_1^{(H)}\cos\varphi + \dot{\varphi}\mathbf{q}_2^{(H)} + \dot{\lambda}\mathbf{q}_3^{(H)}\sin\varphi \quad . \tag{8.309}$$

In diesem Ausdruck bildet sich etwa die Bewegung eines Fahrzeugs auf der Erdoberfläche oder die Bewegung eines Sensoraufsichtspunktes auf der Erdoberfläche bei der Beobachtung von einem Satelliten (oder Flugzeug oder Höhenforschungsrakete oder einem anderen Instrumententräger) ab, wenn der lokale Horizont mit dieser Bewegung mitgenommen werden muss.

8.9.5 Einschussbahnelemente einer Satellitenbahn

Bild 8-13: Zur Berechnung des Zustandsvektors aus Einschusselementen, A- lokales Azimut, h – lokale Höhe („Elevation“ über lokalem Horizont), Hor – lokale Horizontebene durch Satellitenort senkrecht zum Radiusvektor, Eq – lokale Äquatorebene (parallel zum Erdäquator)

Wenn ein Satellit durch die Oberstufe einer Rakete in eine Erdumlaufbahn eingeschossen wird, wird der Bewegungszustand des Satelliten gern in folgendem Mischsystem gegeben: Der Ortsvektor wird durch Angabe von geozentrischem Radius r, Rektaszension α und Deklination δ gegeben

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\delta\cos\alpha \\ x_2 &= r\cos\delta\sin\alpha \\ x_3 &= r\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{8.310}$$

Für den (relativen) Geschwindigkeitsvektor ist neben dem Betrag der Geschwindigkeit V das lokale Azimut A und die Elevation h gegeben. Azimut und Elevation werden in diesem Zusammenhang auch *Flugwinkel* genannt. Der lokale Horizont wird in diesem Fall sphärisch verstanden, d. h. die Horizontebene ist eine Ebene, die senkrecht auf dem Radiusvektor im Ort des Satelliten errichtet wird. Somit kann die Berechnung des relativen Geschwindigkeitsvektors nach Bild 8-13 auf S. 372 auf den Mittelpunkt einer Einheitskugel bezogen werden. Der Geschwindigkeitsvektor habe die (geozentrischen) Rektaszension α_1 und Deklination δ_1, die aus dem System

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1-\alpha)\cos\delta_1 &= -\cos A\cosh\sin\delta+\sinh\cos\delta \\ \sin(\alpha_1-\alpha)\cos\delta_1 &= \sin A\cos h \\ \sin\delta_1 &= \cos A\cosh\cos\delta+\sinh\sin\delta \end{aligned} \tag{8.311}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 \cos\delta_1 &= (-\cos A\cosh \sin\delta + \sinh \cos\delta)\cos\alpha - \sin A\cosh \sin\alpha \\
\sin\alpha_1 \cos\delta_1 &= (-\cos A\cosh \sin\delta + \sinh \cos\delta)\sin\alpha + \sin A\cosh \cos\alpha \\
\sin\delta_1 &= \cos A\cosh \cos\delta + \sinh \sin\delta \quad .
\end{aligned} \tag{8.312}$$

Der Geschwindigkeitsvektor kann dann aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= V \cos\delta_1 \cos\alpha_1 \\
\dot{x}_2 &= V \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \\
\dot{x}_3 &= V \sin\delta_1
\end{aligned} \tag{8.313}$$

berechnet werden. Umgekehrt liefert ein Zustandsvektor x_i, $\dot{x}_i$ die Polarkoordinaten r, α, δ mit dem Formelsystem (4.91)

$$\begin{aligned}
r &= |\mathbf{r}| = \sqrt{x^i x_i} \\
\sin\delta &= \frac{x_3}{r} \\
\cos\delta &= \sqrt{1-\sin^2\delta} \\
\cos\alpha &= \frac{x_1}{r\cos\delta} \quad , \quad r > 0 \quad , \quad \cos\delta > 0 \quad , \\
\sin\alpha &= \frac{x_2}{r\cos\delta} \quad , \quad r > 0 \quad , \quad \cos\delta > 0 \quad .
\end{aligned} \tag{8.314}$$

Geschwindigkeit V und Flugwinkel Azimut A und Elevation h ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
V &= |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} \\
\cos A\cos h &= \frac{1}{V}\left[-\dot{x}_1 \cos\alpha \sin\delta - \dot{x}_2 \sin\alpha \sin\delta + \dot{x}_3 \cos\delta\right] \\
\sin A\cos h &= \frac{1}{V}\left[\dot{x}_2 \cos\alpha - \dot{x}_1 \sin\alpha\right] \\
\sin h &= \frac{1}{V}\left[\dot{x}_1 \cos\alpha \cos\delta + \dot{x}_2 \sin\alpha \cos\delta + \dot{x}_3 \sin\delta\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.315}$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Gegeben sei der Einschussort in geozentrischen äquatorialen Polarkoordinaten

$$r = 7000\,\text{km} \quad , \quad \alpha = 120°.135112 \quad , \quad \delta = 2°$$

sowie die Geschwindigkeit und die Flugwinkel in topozentrischen horizontalen Koordinaten

$$V = 8\,\text{km/s} \quad , \quad A = 190° \quad , \quad h = 5° \quad .$$

Dies ergibt im geozentrischen Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem den Zustandsvektor

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3512.145\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_1 = 0.7095110\ \text{km/s} \\
x_2 &= 6050.220\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_2 = 1.5343032\ \text{km/s} \\
x_3 &= 244.220\,\text{km} \quad , \quad \dot{x}_3 = -7.8193675\ \text{km}
\end{aligned}$$

◀

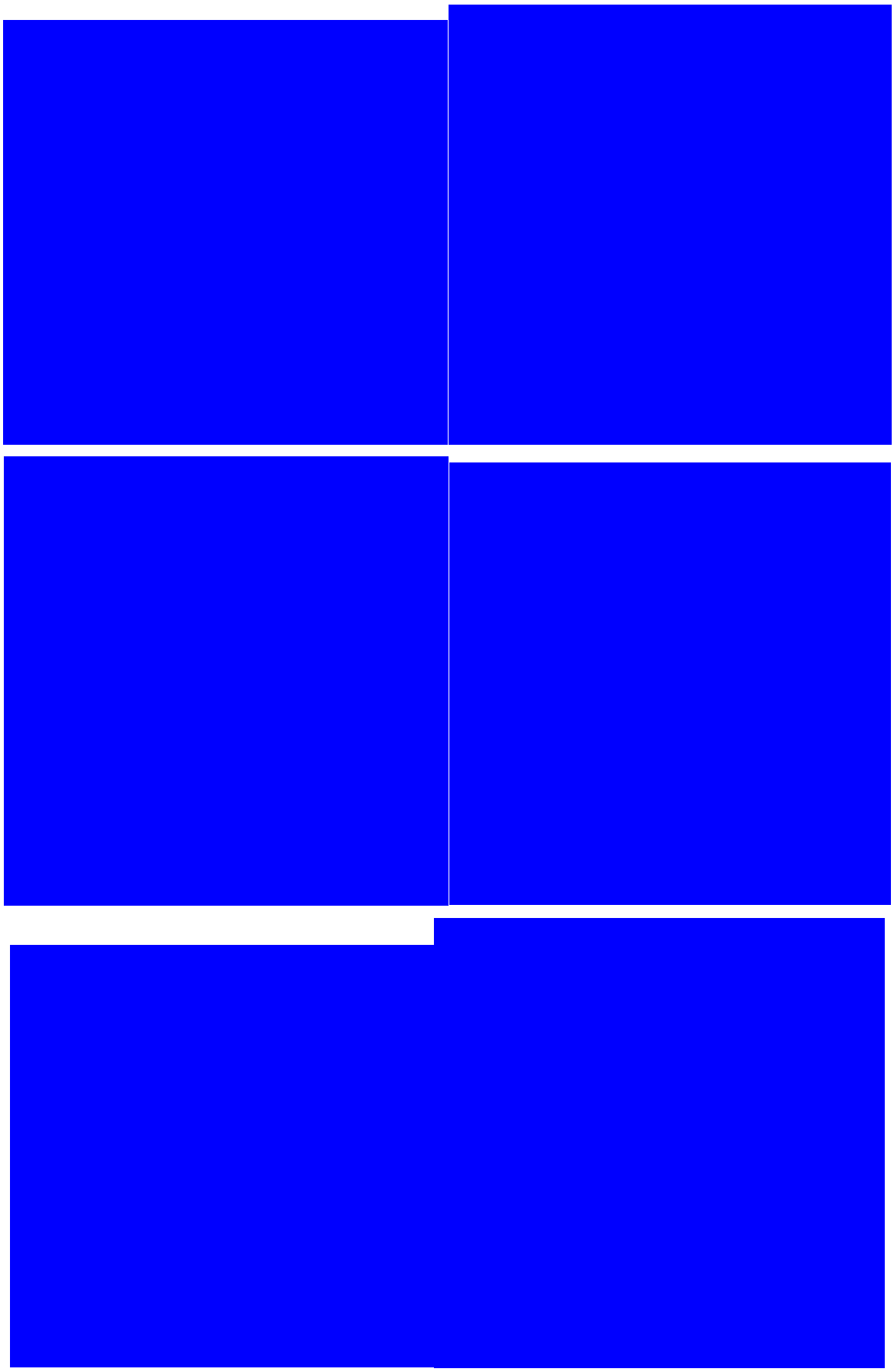


Bild 8-14: Tägliche Bewegung des Sternhimmels im Horizontsystem gesehen von München aus und projiziert auf das topozentrische bewegliche (= Frühlingspunkt-bezogene) Äquatorsystem (gerechnet für den 13./14. Nov. 2003, jeweils im Abstand von 3^h, ab 15^h U.T.)

Anmerkung: In der Praxis der Satellitentechnik wird statt der Rektaszension α die geographische Länge λ des Einschussortes über der als fest gedachten Erde gegeben um so von der Rotation der Erde unabhängig zu werden. Bei bekannter Einschusszeit *t* wird mit Hilfe der Sternzeit Θ_G nach Formel (8.65) λ in α umgerechnet. Ferner wird an Stelle der Deklination δ die geodätische Breite φ gegeben, so dass nach Formel (8.98) erst noch δ aus φ berechnet werden muss. Als Ergebnis werden dann gewöhnlich die *Kepler*elemente gewünscht. ◀

8.9.6 Die tägliche Bewegung des Sternhimmels

Bild 8-14 auf S. 375 zeigt die tägliche Bewegung des Sternhimmels gesehen von einem Ort auf der nördlichen Erdhalbkugel. Eingetragen ist die Projektion des (topozentrischen) Horizontsystems auf die topozentrische Himmelssphäre, die geraden Linien entsprechen den Azimutkreisen mit der Schrittweite $\Delta A = 30°$, die Kreise um den Zenit sind die Elevationskreise mit der Schrittweite $\Delta h = 10°$. Punktiert ist das Frühlingspunkt-bezogene (= bewegliche) Äquatorsystem eingetragen. Man kann den Nordpol erkennen, die Rektaszensionskreise im Abstand $\Delta\alpha = 2^h$ und die Deklinationskreise mit Abstand $\Delta\delta = 20°$. Die sechs Einzelbilder sind jeweils im Abstand von 3^h gezeichnet. Dadurch ist es leicht möglich, die Rotation des Sternhimmels um den Nordpol zu verfolgen und den Auf- und Untergang der Sterne bezogen auf den Beobachtungsort abzuschätzen[1].

8.10 Das Antennensystem

Als Antennensystem werde hier ein Koordinatensystem bezeichnet, das bei der Beobachtung eines Himmelskörpers (Stern, Planet, Raumsonde, Erdsatellit) mit einem Sensor von einem Beobachtungsort („Antenne in Bodenstation“) auf der Erdoberfläche aus verwendet werden kann. Die erste Koordinate sei direkt vom Beobachtungsort zum beobachteten Objekt gerichtet. Die Grundebene dieses Systems werde durch den relativen Ortsvektor und den relativen Geschwindigkeitsvektor aufgespannt. Von primärem Interesse ist der Bezug dieses Systems zum Frühlingspunkt-orientierten Äquatorsystem, in dem die zu beobachtende Bewegung berechnet wird, und damit auch der Eigenbewegungsvektor des Antennensystems. Dieser kann wichtige Aussagen über eine Beobachtungsqualität ermöglichen.

8.10.1 Grundformeln des Antennensystems

Das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem sei durch die orthonormierte Basis $\mathbf{p}_i$ und den absoluten Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p$ charakterisiert. Ein bewegtes Objekt habe in diesem System den geozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r} = x^i\mathbf{p}_i$. Falls ein interplanetares Objekt beobachtet werden soll, setzt sich dieser Ortsvektor aus dem baryzentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_B$ dieses Objek-

[1] Die Digitalisierung der Sternkarte wurde von Herrn *Steuer* (DLR-RB) bereitgestellt.

tes und dem baryzentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_{\oplus}$ des Erdmittelpunktes zusammen $\left(\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{\oplus}\right)$ (vgl. Bild 8-15). Der Antennenbezugspunkt *T* habe den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{R} = x_g^{\ i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{8.316}$$

Bild 8-15: Zur Definition eines Antennensystems (B – Baryzentrum der Sonnensystems, T – Antennenstandort auf Erdoberfläche, S – Satelliten- bzw. Raumsondenort)

Der Antennen-bezogene relative Ortsvektor des Objektes

$$\mathbf{r}_T := \mathbf{r} - \mathbf{R} = \left(x^i - x_g^{\ i}\right)\mathbf{p}_i =: x_T^{\ i}\,\mathbf{p}_i \tag{8.317}$$

definiere die $\mathbf{q}_1^{(A)}$-Achse des Antennensystems

$$\mathbf{q}_1^{(A)} := \frac{\mathbf{r}_T}{\rho} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{R}\right|} = q_1^{\ i}\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \rho := \left|\mathbf{r}_T\right| \quad . \tag{8.318}$$

Der geozentrische absolute Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes hat bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System mit dem relativen auf das $\mathbf{p}_i$ – System bezogenen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_p := \dot{x}^i\mathbf{p}_i \tag{8.319}$$

die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{r}}_p + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} \quad . \tag{8.320}$$

Der geozentrische absolute Geschwindigkeitsvektor des Antennenortes ist in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{x}_g^i\,\mathbf{p}_i + \mathbf{D}_p \times \mathbf{R} \quad . \tag{8.321}$$

Somit lautet mit dem topozentrischen relativen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tp} := \left(\dot{x}^i - \dot{x}_g^i\right)\mathbf{p}_i \tag{8.322}$$

der topozentrische absolute Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{x}^i - \dot{x}_g^{\ i}\right)\mathbf{p}_i + x_T^{\ i}\,\mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i = \dot{x}_T^{\ i}\,\mathbf{p}_i + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r}_T = \dot{\mathbf{r}}_{Tp} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r}_T \quad . \tag{8.323}$$

Mit dessen Hilfe kann der Normalenvektor des bewegungsbezogenen Antennensystems berechnet werden

$$\mathbf{q}_3^{(A)} := \frac{\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T}{\left|\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T\right|} =: q_3^{\ i}\,\mathbf{p}_i \tag{8.324}$$

und in Ergänzung der transversale Richtungsvektor dieses Systems

$$\mathbf{q}_2^{(A)} := \mathbf{q}_3^{(A)} \times \mathbf{q}_1^{(A)} =: q_2^{\ i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{8.325}$$

Die komponentenweise Darstellung dieser Basis des Antennensystems ist mit den Transformationsformeln (6.87) bis (6.89) durch

$$\mathbf{q}_j^{(A)} = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i \tag{8.326}$$

im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem gegeben und es ist daher notwendig

$$q_j^{\ i} = a_j^{\ i} \quad . \tag{8.327}$$

Dieses Antennensystem hat einen (notwendigerweise nicht verschwindenden) absoluten Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(A)}}$ mit der Eigenschaft

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(A)} = \mathbf{D}_{q^{(A)}} \times \mathbf{q}_j^{(A)} \qquad \left(j = 1,2,3\right) \quad . \tag{8.328}$$

Seine Koordinatendarstellung im $\mathbf{q}_j$-Antennensystem ist

$$\mathbf{D}_{q^{(A)}} =: D_q^{\ j}\,\mathbf{q}_j^{(A)} \tag{8.329}$$

und es wird

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(A)} &= D_{q3}\,\mathbf{q}_2^{(A)} - D_{q2}\,\mathbf{q}_3^{(A)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(A)} &= -D_{q3}\,\mathbf{q}_1^{(A)} + D_{q1}\,\mathbf{q}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(A)} &= D_{q2}\,\mathbf{q}_1^{(A)} - D_{q1}\,\mathbf{q}_2^{(A)} \quad .
\end{aligned} \tag{8.330}$$

Bei Bezug auf dieses System hat der topozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}_T = y_T^{(A)j}\,\mathbf{q}_j^{(A)}$ die Koordinaten

$$y_{T1}^{(A)} = \left|\mathbf{r}_T\right| =: \rho \quad , \quad y_{T1}^{(A)} = y_{T3}^{(A)} = 0 \tag{8.331}$$

und es ist (wie schon in Formel (8.318) definiert)

$$\mathbf{r}_T = \rho\,\mathbf{q}_1^{(A)} \quad . \tag{8.332}$$

Der topozentrische absolute Geschwindigkeitsvektor hat im Antennensystem die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{y}_T^{(A)j}\,\mathbf{q}_j^{(A)} + y_T^{(A)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(A)} = \dot{\mathbf{r}}_{Tq} + \mathbf{D}_{q^{(A)}} \times \mathbf{r}_T \quad , \tag{8.333}$$

wenn mit

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq} := \dot{y}_T^{(A)j}\,\mathbf{q}_j^{(A)} \tag{8.334}$$

der topozentrische zum Antennensystem relative Geschwindigkeitsvektor bezeichnet wird. Dabei ist

$$\dot{y}_T^{(A)} = \dot{\rho} \quad , \quad \dot{y}_{T2}^{(A)} = \dot{y}_{T3}^{(A)} = 0 \quad . \tag{8.335}$$

Damit gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}\,\mathbf{q}_1^{(A)} + \rho\,\mathbf{D}_{q^{(A)}} \times \mathbf{q}_1^{(A)} = \dot{\rho}\,\mathbf{q}_1^{(A)} + \rho\left[-D_{q^{(A)}2}\,\mathbf{q}_3^{(A)} + D_{q^{(A)}3}\,\mathbf{q}_2^{(A)}\right] \quad . \tag{8.336}$$

Da $\dot{\mathbf{r}}_T$ in der von $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$ aufgespannten Ebene liegt (vgl. Formel (8.324)), ist

$$\mathbf{q}_3^{(A)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_T = 0 = -\rho D_{q^{(A)}2} \quad ,$$

also notwendigerweise wie zu erwarten

$$D_{q^{(A)}2} = 0 \quad . \tag{8.337}$$

Ferner wird nach skalarer Multiplikation des Ausdruckes (8.336) mit $\mathbf{q}_2^{(A)}$ der vollständig bekannte Koeffizient

$$D_{q^{(A)}3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_2^{(A)}}{\rho} \tag{8.338}$$

erhalten. Der topozentrische absolute Geschwindigkeitsvektor hat im Antennensystem somit die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}\,\mathbf{q}_1^{(A)} + \rho\,D_{q^{(A)}3}\,\mathbf{q}_2^{(A)} \quad . \tag{8.339}$$

Der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(A)}}$ des $\mathbf{q}_j^{(A)}-$Antennensystems liegt wegen des Wertes (8.337) in der von $\mathbf{q}_1^{(A)}$ und $\mathbf{q}_3^{(A)}$ aufgespannten Ebene.

Zur Berechnung der noch fehlenden ersten Komponente D_{q1} der Eigenbewegungsvektors wird die dritte der Gleichungen (8.330) mit D_{q2}=0 herangezogen. Aus Gleichung (8.339) wird

$$\ddot{\mathbf{r}}_T = \ddot{\rho}\,\mathbf{q}_1^{(A)} + \dot{\rho}\,D_{q^{(A)}3}\,\mathbf{q}_2^{(A)} + \left(\rho\,D_{q^{(A)}3}\right)^{\cdot}\,\mathbf{q}_2^{(A)} - \rho\left(D_{q^{(A)}3}\right)^2\,\mathbf{q}_1^{(A)} + \rho\,D_{q^{(A)}3}\,D_{q^{(A)}1}\,\mathbf{q}_3^{(A)} \quad ,$$

somit

$$D_{q^{(A)}1} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_3^{(A)}}{\rho\,D_{q^{(A)}3}} \quad . \tag{8.340}$$

Zur Berechnung des topozentrischen absoluten Beschleunigungsvektors

$$\ddot{\mathbf{r}}_T = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} \tag{8.341}$$

muss das gesamte bekannte Bewegungsmodell zur Berechnung der Bewegung des beobachteten Objektes im zentrischen Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}$ verwendet werden. Ob hier die keplersche Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx \ddot{\mathbf{r}}_K = -\mu\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

ausreicht, muss aus den Genauigkeitsanforderungen geklärt werden. Der zentrische Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{R}}$ des Antennenstandortes ist mit ausreichender Genauigkeit aus Formel (8.218) bekannt.

Der auf die hier geschilderte Weise berechnete Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(A)}}$ hängt von der Bewegung des beobachteten Objektes, also seinem Zustand $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ und seiner Bewegung $\ddot{\mathbf{r}}$ ab, abgesehen von der relativen Bewegung des Antennenortes. Somit kann es sich bei dem nach den vorstehenden Formeln berechneten Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(A)}}$ nicht um den („wahren“) absoluten Eigenbewegungsvektor handeln, sondern um einen Vektor, der in Bezug auf das System zu sehen ist, in dem die Bewegung berechnet wurde und in Bezug auf das verwendete Bewegungsmodell. Eine alternative Berechnung von $D_{q^{(A)}1}$ bei Bezug auf das hier relevante Basissystem wird im folgenden Abschnitt unter Vermeidung des Beschleunigungsvektors hergeleitet.

8.10.2 Transformationen des Antennensystems

Die $\mathbf{q}_j^{(A)}$ – Basisvektoren des Antennensystems sind durch Vorgabe des topozentrischen absoluten Zustandsvektors $\mathbf{r}_T, \dot{\mathbf{r}}_T$ aus den Gleichungen (8.318)-(8.325) berechenbar. Damit sind auch die Drehwinkel *A*, *B*, *C* vom Frühlingspunkt-orientierten Äquatorsystem in das Antennensystem mit den Transformationsformeln (6.87) bis (6.89) bekannt. Für die Komponenten des Normalenvektors $\mathbf{q}_3^{(A)}$ wird

$$q_{33} = a_{33} = \cos B \tag{8.342}$$

und der Inklinationswinkel *B* mit $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B}$ kann eindeutig berechnet werden. Die weiteren Komponenten

$$\begin{aligned} q_{31} &= a_{31} = \sin B \sin A \\ q_{32} &= a_{32} = -\sin B \cos A \end{aligned} \tag{8.343}$$

erlauben die eindeutige Berechnung des Winkels A längs des Äquators zum aufsteigenden Knoten der Basisebene des Antennensystems (vgl. etwa 6-5). Die Komponenten des Basisvektors $\mathbf{q}_1^{(A)}$ aus Formel (8.318)

$$\begin{aligned} q_{13} &= a_{13} = \sin B \sin C \\ q_{23} &= a_{23} = \sin B \cos C \end{aligned} \tag{8.344}$$

erlauben die eindeutige Berechnung des Winkels *C* längs der Basisebene des Antennensystems zur $\mathbf{q}_1^{(A)}$ Hauptstrahlrichtung der Antenne. Damit sind die Transformationsformeln (6.91) und die Beziehungen zwischen den beiden Systemen

$$\mathbf{q}_j^{(A)} = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(A)} \quad . \tag{8.345}$$

vollständig berechenbar. Mit

$$\mathbf{r}_T = x_T{}^i \mathbf{p}_i = \rho \mathbf{q}_1^{(A)} \quad , \tag{8.346}$$

wobei ρ aus den Beziehungen (8.332) bekannt ist, wird

$$x_T^{\ i} = y_T^{(A)j}\, a_j^{\ i} \qquad \text{mit} \qquad x_{Ti} = a_{1i}\, \rho \quad . \tag{8.347}$$

Zur Transformation des Geschwindigkeitsvektors wird die radiale Entfernungsvariation

$$\dot{\rho} = \frac{\mathbf{r}_T \cdot \dot{\mathbf{r}}_T}{\rho} \tag{8.348}$$

benötigt. Dann sind (unter Berücksichtigung der Beziehungen (8.331)-(8.335)) aus den Variationen

$$\dot{x}_{Ti} = \dot{a}_{1i}\, \rho + a_{1i}\, \dot{\rho} \qquad , \quad (i = 1,2,3) \tag{8.349}$$

die Variationen $\dot{a}_{1i}$ berechenbar:

$$\dot{a}_{1i} = \frac{1}{\rho}\left(\dot{x}_{Ti} - a_{1i}\, \dot{\rho}\right) \quad . \tag{8.350}$$

Vergleich mit dem Formelsystem (6.99) gibt

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \dot{B}\, a_{31} \sin C + \dot{C}\, a_{21} - \dot{A}\, a_{12} \\ \dot{a}_{12} &= \dot{B}\, a_{32} \sin C + \dot{C}\, a_{22} + \dot{A}\, a_{11} \\ \dot{a}_{13} &= \dot{B}\, a_{33} \sin C + \dot{C}\, a_{23} \qquad . \end{aligned} \tag{8.351}$$

Hieraus können die Variationen der drei Drehwinkel allerdings nicht berechnet werden, da diese drei Gleichungen linear abhängig sind. Aus Gleichung (8.345) folgt nämlich

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j_{\ i}\, \mathbf{q}_j^{(A)} + a^j_{\ i}\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(A)} \quad , \tag{8.352}$$

somit

$$\mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = a^j_{\ i}\, \mathbf{q}_j^{(A)} \cdot \dot{a}^k_{\ i}\, \mathbf{q}_k^{(A)} + a^j_{\ i}\, \mathbf{q}_j^{(A)} \cdot a^k_{\ i}\, \dot{\mathbf{q}}_k^{(A)} = a^j_{\ i}\, \dot{a}^k_{\ i}\, \delta_{jk} = a^j_{\ i}\, \dot{a}_{ji} = 0 \quad . \tag{8.353}$$

Mit bekannten $\dot{a}_{1i}\ (i = 1,2,3)$ können aus diesem System etwa zwei unabhängige Gleichungen erhalten werden:

$$\dot{a}_{13} = \dot{B} \cos B \sin C + \dot{C} \sin B \cos C \quad ,$$

woraus die Beziehung

$$\dot{C} \sin B = \frac{\dot{a}_{13} - \dot{B} \cos B \sin C}{\cos C} \tag{8.354}$$

folgt. Es sind noch die Beziehungen für die Variationen $\dot{A}, \dot{B}$ zu suchen. Aus (8.347) folgen

$$\begin{aligned} y_T^{(A)j} &= a^j_{\ i}\, x_T^{\ i} \\ \dot{y}_T^{(A)j} &= \dot{a}^j_{\ i}\, x_T^{\ i} + a^j_{\ i}\, \dot{x}_T^{\ i} \end{aligned} \tag{8.355}$$

mit

$$\begin{aligned} y_{T1}^{(A)} &= \rho\,, \quad y_{T2}^{(A)} = y_{T3}^{(A)} = 0 \\ \dot{y}_{T1}^{(A)} &= \dot{\rho}\,, \quad \dot{y}_{T2}^{(A)} = \dot{y}_{T3}^{(A)} = 0 \end{aligned} \tag{8.356}$$

und daher etwa die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{y}_{T3}^{(A)} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{3i}\, x_T^{\,i} = -a_{3i}\, \dot{x}_T^{\,i} =: A_3 \\ \dot{y}_{T2}^{(A)} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{2i}\, x_T^{\,i} = -a_{2i}\, \dot{x}_T^{\,i} =: B_4 \quad . \end{aligned} \tag{8.357}$$

mit bekannten rechten Seiten A_3 und B_4. Dies führt auf

$$x_{T1}\left(\dot{B}\cos B\sin A + \dot{A}\sin B\cos A\right) + x_{T2}\left(-\dot{B}\cos B\cos A + \dot{A}\sin B\sin A\right) - x_{T3}\,\dot{B}\sin B = A_3$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_1 &:= x_{T1}\cos B\sin A - x_{T2}\cos B\cos A - x_{T3}\sin B \\ A_2 &:= x_{T1}\cos A + x_{T2}\sin A \end{aligned} \tag{8.358}$$

und

$$\begin{aligned} x_{T1}\left(\dot{B}\,a_{31}\cos C - \dot{C}\,a_{11} - \dot{A}a_{22}\right) + x_{T2}\left(\dot{B}\,a_{32}\cos C - \dot{C}\,a_{12} + \dot{A}a_{21}\right) + \\ + \; x_{T3}\left(\dot{B}\cos B\cos C - \dot{C}\,a_{13}\right) = B_4 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_1 &:= x_{T1}\,a_{31}\cos C + x_{T2}\,a_{32}\cos C + x_{T3}\cos B\cos C \\ B_2 &:= x_{T1}\,a_{11} + x_{T2}\,a_{12} + x_{T3}\,a_{13} \\ B_3 &:= x_{T1}\,a_{22} + x_{T2}\,a_{21} \quad . \end{aligned} \tag{8.359}$$

Damit kann die Variation des Inklinationswinkels B berechnet werden:

$$\dot{B} = \frac{A_3\,B_3\cos C - A_2\,B_4\sin B\cos C - B_2\,A_2\,\dot{a}_{13}}{A_1\,B_3\cos C - A_2\,B_1\sin B\cos C - A_2\,B_2\cos B\sin C} \quad , \tag{8.360}$$

sowie die Variation des Knotenwinkels

$$\dot{A}\sin B = \frac{1}{A_2}\left(A_3 - \dot{B}\,A_1\right) \quad , \tag{8.361}$$

sofern die jeweiligen Nenner nicht verschwinden.

8.10.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des Antennensystems

Mit den Variationen $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ können die Komponenten des zum Frühlingspunktsystem relativen Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{q^{(A)}p} = \mathbf{D}_{q^{(A)}} - \mathbf{D}_p = D_{q^{(A)}p}^{\;j}\,\mathbf{q}_j^{(A)}$ nach dem Formelsystem (6.136) berechnet werden (*Euler*sche kinematische Gleichungen)

$$\begin{aligned} D_{q^{(A)}p1} &= \dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C \\ D_{q^{(A)}p2} &= -\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C \\ D_{q^{(A)}p3} &= \dot{A}\cos B + \dot{C} \end{aligned} \tag{8.362}$$

ohne den Umweg über die Bewegungsgleichung (8.341) gehen zu müssen.

Ein bemerkenswerter Spezialfall ergibt sich bei Bezug auf das Fundamentalsystem, dessen Eigenbewegungsvektor identisch verschwindet $\mathbf{D}_p \equiv 0$. Dann ist

$$\mathbf{D}_{q^{(A)}p} = \mathbf{D}_{q^{(A)}} - \mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{q^{(A)}} \quad , \; \left(\mathbf{D}_p \equiv 0\right)$$

und insbesondere

$$D_{q^{(A)}p1} = D_{q^{(A)}1}\ ,\ D_{q^{(A)}p2} = D_{q^{(A)}2}\ ,\ D_{q^{(A)}p3} = D_{q^{(A)}3}\ .$$

Hier sind die Größen $D_{q^{(A)}2} = 0$ aus der Beziehung (8.337) und $D_{q^{(A)}3}$ aus (8.338) bekannt und müssen durch die Gleichungen (8.362) bestätigt werden können. Entsprechendes gilt für D_{q1} und Gleichung (8.340). In diesem Fall ergeben sich auch die manchmal nützlichen Beziehungen

$$\begin{aligned} D_{q^{(A)}p1}\cos C &= \dot{B} \\ D_{q^{(A)}p1}\sin C &= \dot{A}\sin B \qquad , \quad \left(D_{q^{(A)}2} = D_{q^{(A)}p2} = 0\right) \end{aligned} \tag{8.363}$$

sowie

$$\dot{C}\sin B = -D_{q^{(A)}p1}\cos B\sin C + D_{q^{(A)}p3}\sin B\ , \tag{8.364}$$

außerdem die Beziehung

$$\dot{a}_{13} = D_{q^{(A)}p3}\sin B\cos C\ , \tag{8.365}$$

die zur Kontrolle benutzt werden kann.

8.11 Das *Leibniz* System

Das von *G. W. Leibniz*[1] eingeführte mitbewegte Bahnsystem ist an die Bahnbewegung des betrachteten Körpers gebunden. Es schließt somit die inertiale Eigenbewegung dieses Körpers wie alle zugehörenden Scheinbeschleunigungen ein[2]. Dieses System wird in satellitentechnischem Zusammenhang bisweilen als HCL-System bezeichnet, dessen H-Komponente ('Height') in Richtung des Radiusvektors weist, die L-Komponente ('Long'-) in transversaler Richtung und die C-Komponente ('Cross'-) in Richtung der Bahnnormale weist. Allerdings wird in der Literatur die L-Komponente häufig entlang der Bahn also in tangentialer Richtung angesetzt. Dann steht die L-Komponente nicht senkrecht auf dem Radiusvektor und in diesem Fall muss das Tangenten-bezogene System (siehe in Abschnitt 8.15) zur Anwendung kommen.

8.11.1 Die Eigenbewegung des *Leibniz*-Systems

Hat der beobachtete Körper in Bezug auf einen Referenzpunkt den Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$, ist das mitbewegte System als ein orthonormiertes System durch das begleitende Dreibein in radialer Richtung

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\ , \tag{8.366}$$

in normaler Richtung

[1] Siehe auch Abschnitt 2.4 (Band I)

[2] Siehe in den Abschnitten 4.4.2 bis 4.4.9

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{\left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right|} \tag{8.367}$$

und transversaler Richtung

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0\times\mathbf{r}_0 \tag{8.368}$$

eindeutig definiert.

Bild 8-16: Zur Herleitung der Beziehungen zwischen dem *Leibniz*-System und dem Frühlingspunkbezogenen Äquatorsystem (das als Fundamentalsystem angesehen wird)

Die mit der Bewegung des betrachteten Körpers verknüpfte Eigenbewegung dieses Systems ist durch die *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik[1]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\mathbf{q}_0\\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\mathbf{c}_0\\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\mathbf{q}_0\end{aligned} \tag{8.369}$$

gegeben, wobei

$$\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \tag{8.370}$$

und $\dot{\eta}$ die räumliche Variation der Bahnebene beschreibt. Der zugehörende Eigenbewegungsvektor dieses Systems[1] liegt in der zur transversalen Bewegungsrichtung senkrechten Ebene

[1] Siehe die Formeln (4.318)

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{8.371}$$

Die Komponenten dieses Vektors im mitgeführten System

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = D_{q^{(L)}1}\,\mathbf{r}_0 + D_{q^{(L)}2}\,\mathbf{q}_0 + D_{q^{(L)}3}\,\mathbf{c}_0 \tag{8.372}$$

sind somit

$$D_{q^{(L)}1} = \dot{\eta} \;,\; D_{q^{(L)}2} = 0 \;,\; D_{q^{(L)}3} = \dot{\zeta} \quad . \tag{8.373}$$

8.11.2 Transformationen des *Leibniz*-Systems

Wird die Basis des mitbewegten Bahnsystems einheitlich mit

$$\mathbf{q}_1^{(L)} = \mathbf{r}_0 \;,\; \mathbf{q}_2^{(L)} = \mathbf{q}_0 \;,\; \mathbf{q}_3^{(L)} = \mathbf{c}_0 \tag{8.374}$$

bezeichnet, kann für die Transformation vom mitbewegten in das Frühlingspunkt - bezogene Äquatorsystem

$$\mathbf{q}_j^{(L)} = a_j{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{8.375}$$

geschrieben werden. Die Koeffizienten der Transformationsmatrix lauten nach den Beziehungen (6.91) mit den Zuordnungen $A \to \Omega$, $B \to i$, $C \to u$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \\
a_{12} &= \cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \\
a_{13} &= \sin i \sin u \\
a_{21} &= -\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega \\
a_{22} &= \cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \\
a_{23} &= \sin i \cos u \\
a_{31} &= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{8.376}$$

Damit hat der radiale Richtungsvektor in äquatorialen Koordinaten die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(L)} = a_1{}^i\,\mathbf{p}_i = \\
&= \mathbf{p}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \\
&\quad + \mathbf{p}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \\
&\quad + \mathbf{p}_3 \quad \sin i \sin u \quad ,
\end{aligned} \tag{8.377}$$

der transversale Richtungsvektor

[1] Siehe den Ausdruck (4.319)

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_2^{(L)} = a_2{}^i\ \mathbf{p}_i\ = \\ &= \mathbf{p}_1\left(-\cos i\cos u\sin\Omega-\sin u\cos\Omega\right)+ \\ &+\mathbf{p}_2\left(\ \cos i\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\right)+ \\ &+\mathbf{p}_3\quad \sin i\cos u\quad ,\end{aligned} \tag{8.378}$$

sowie der normale Richtungsvektor

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(L)} = a_3{}^i\ \mathbf{p}_i\ = \\ &= \mathbf{p}_1\ \sin i\sin\Omega\ - \\ &-\mathbf{p}_2\ \sin i\cos\Omega\ + \\ &+\mathbf{p}_3\ \cos i\quad .\end{aligned} \tag{8.379}$$

Über die *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik (8.369) können dann auch die Variationen dieser Basisvektoren des *Leibniz*-Systems im fundamentalen Äquatorsystem ebenso wie der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_r$ mit der Beziehung (8.371) dargestellt werden.

Da die beiden Systeme orthonormiert sind, lautet die Umkehrabbildung

$$\mathbf{p}_i\ =\ a^j{}_i\ \mathbf{q}_j^{(L)}\quad . \tag{8.380}$$

Zum Bezug der Eigenbewegungen der beiden Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_j^{(L)}\ &=\ \dot{a}_j{}^i\ \mathbf{p}_i\ +\ a_j{}^i\ \dot{\mathbf{p}}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_i\ &=\ \dot{a}^j{}_i\ \mathbf{q}_j^{(L)}\ +\ a^j{}_i\ \dot{\mathbf{q}}_j^{(L)}\end{aligned} \tag{8.381}$$

werden die Variationen der Transformationsmatrix benötigt. Sie lauten (unter Verwendung der Beziehungen (6.99))

$$\begin{aligned}\dot{a}_{11} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{31}\sin u+\dot{u}\,a_{21}-\dot{\Omega}\,a_{12} \\ \dot{a}_{12} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{32}\sin u+\dot{u}\,a_{22}+\dot{\Omega}\,a_{11} \\ \dot{a}_{13} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{33}\sin u+\dot{u}\,a_{23} \\ \dot{a}_{21} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{31}\cos u-\dot{u}a_{11}-\dot{\Omega}\,a_{22} \\ \dot{a}_{22} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{32}\cos u-\dot{u}\,a_{12}+\dot{\Omega}\,a_{21} \\ \dot{a}_{23} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{33}\cos u-\dot{u}\,a_{13} \\ \dot{a}_{31} &= \ \ (i)^{\cdot}\ a_{33}\sin\Omega-\dot{\Omega}\,a_{32} \\ \dot{a}_{32} &= -(i)^{\cdot}\ a_{33}\cos\Omega+\dot{\Omega}\,a_{31} \\ \dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot}\sin i\qquad .\end{aligned} \tag{8.382}$$

8.11.3 Der relative Eigenbewegungsvektor des *Leibniz*-Systems

Der Eigenbewegungsvektor des mitbewegten Bahnsystems kann auf das äquatoriale Basissystem, dessen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_p\ =\ D_p{}^i\ \mathbf{p}_i \tag{8.383}$$

sei, bezogen werden mit dem relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}p} := D^j_{q^{(L)}p}\,\mathbf{q}^{(I)}_j := \mathbf{D}_{q^{(L)}} - \mathbf{D}_p = D^j_{q^{(L)}}\,\mathbf{q}^{(L)}_j - D^i_p\,\mathbf{p}_i = \left(D^j_{q^{(L)}} - D^i_p\,a^{\,j}{}_i\right)\mathbf{q}^{(L)}_j \quad . \tag{8.384}$$

Mit den Formeln (6.136) und den Beziehungen (8.373) können die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_{q^{(L)}p1} &= \dot{(i)}\cos u + \dot{\Omega}\sin i\sin u = \dot{\eta} - D^i_p\,a_{1i} \\ D_{q^{(L)}p2} &= -\dot{(i)}\sin u + \dot{\Omega}\sin i\cos u = -D^i_p\,a_{2i} \\ D_{q^{(L)}p3} &= \dot{\Omega}\cos i + \dot{u} = \dot{\zeta} - D^i_p\,a_{3i} \quad . \end{aligned} \tag{8.385}$$

Umgekehrt kann der relative Eigenbewegungsvektor des äquatorialen Basissystems in Bezug auf das mitbewegte Bahnsystem berechnet werden aus

$$\mathbf{D}_{pq^{(L)}} := \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_{q^{(L)}} = D^i_{pq^{(L)}}\,\mathbf{p}_i \tag{8.386}$$

mit den Komponenten (siehe die Formeln (6.142))

$$\begin{aligned} D_{pq^{(L)}1} &= -\dot{(i)}\cos\Omega - \dot{u}\sin i\sin\Omega \\ D_{pq^{(L)}2} &= -\dot{(i)}\sin\Omega + \dot{u}\sin i\cos\Omega \\ D_{pq^{(L)}3} &= -\dot{\Omega} - \dot{u}\cos i \quad . \end{aligned} \tag{8.387}$$

8.11.4 Beispiel zur Anwendung des *Leibniz*-Systems: Relativbewegung

G. W. Hill [1878] untersuchte im Rahmen des eingeschränkten Dreikörperproblems die relative Bewegung kleiner Körper in Bezug auf einen Hauptkörper unter sehr vereinfachenden Annahmen: Die Bahn des Bezugkörpers („erster Satellit", „master satellite M"), der massenlos angenommen wird, bewegt sich auf einer ungestörten Kreisbahn um den Zentralkörper, während die Bahn eines zweiten ebenfalls masselos gedachten Satelliten sich nur geringfügig von der des Hauptkörpers unterscheiden soll. Die Bahn des zweiten Satelliten ist relativ zur Bewegung des Hauptsatelliten darzustellen. Für eine überblickmäßige Untersuchung dieser relativen Bewegung werden beide Bahnen als ungestörte *Kepler*bahnen angenommen. Von *Hill* wurden die Bewegungsgleichungen dieser Relativbewegung aufgestellt („*Hill*sche Gleichungen"[1]) und mit den obigen Vereinfachungen gelöst.

Es ist allerdings nicht nötig, diese Integration im Rahmen einer Untersuchung einer nahen Relativbewegung durchzuführen, da das Ergebnis nämlich die Bahnen der beiden Körper bekannt ist. Vielmehr genügt es, die Bewegung des zweiten Körpers im mitbewegten System des Hauptkörpers darzustellen, womit ein Bezug dieser Relativbewegung zu den Variationen in den *Kepler*elementen zwischen den beiden Bahnen direkt gefunden werden kann[2].

Der Radius des Hauptkörpers, der sich auf einer ungestörten Kreisbahn bewegen soll, ist somit konstant, $r_M = const.$, seine Exzentrizität ist $e_M = 0.0$, auch die restlichen Bahnelemente sind Konstante, $i_M, \Omega_M, \omega_M, M_{M0}$. Werden diese Elemente in die Transformationsmatrix (8.376) eingesetzt, wird mit dem Ausdruck (8.377) der Radiusvektor des Hauptkörpers erhalten

[1] Die „*Hill*schen Gleichungen" wurden später unter dem Namen „*Clohessy-Wiltshire*-Gleichungen" wiederentdeckt: CLOHESSY, WILTSHIRE [1960]

[2] Erstveröffentlichung in: *Acta Astronautica*, AA-**68** [2011] 1002-1014

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M &= r_M \, \mathbf{r}_{M0} = r_M \, a_{M1}{}^{i} \, \mathbf{p}_i = r_M \, a_{M1}{}^{i} \, a_M{}^{j}{}_{i} \, \mathbf{q}_j^{(L)} \\ \text{mit} \quad & a_{M1}{}^{i} \, a_M{}^{1}{}_{i} = 1 \;, \quad a_{M1}{}^{i} \, a_M{}^{j}{}_{i} = 0 \quad \text{für} \quad j = 2,3 \quad . \end{aligned} \tag{8.388}$$

Mit dem radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_{M0} = \mathbf{q}_1^{(L)}$ sind entsprechend der transversale und der normale Richtungsvektor $\mathbf{q}_{M0} = \mathbf{q}_2^{(L)}$, $\mathbf{c}_{M0} = \mathbf{q}_3^{(L)}$ bekannt. Auf diese werde die Bewegung eines zweiten Körpers (Tochter-Satellit, „Slave Satellite“) bei gleicher Umlaufzeit bezogen, dessen Bahn sich nur geringfügig von der des Hauptkörpers unterscheidet. Er hat den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_S = r_S \, a_{S1}{}^{i} \, \mathbf{p}_i = r_S \, a_{S1}{}^{i} \, a_M{}^{j}{}_{i} \, \mathbf{q}_j^{(L)} \quad . \tag{8.389}$$

Der relative Ortsvektor des Tochtersatelliten in Bezug auf das mitbewegte System des Hauptsatelliten ist

$$\Delta\mathbf{r} := \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_M = r_S \, a_{S1}{}^{i} \, a_M{}^{j}{}_{i} \, \mathbf{q}_j^{(L)} - r_M \, \mathbf{q}_1^{(L)} \quad . \tag{8.390}$$

Die Koeffizienten der Transformationsmatrix des Tochtersatelliten sind auf den Hauptsatelliten bezogen mit

$$\begin{aligned} r_S &= r_M \\ e_S &= \Delta e \qquad\qquad , \quad \Delta e \ll 1 \\ i_S &= i_M + \Delta i \qquad , \quad \Delta i \ll 1 \\ \Omega_S &= \Omega_M + \Delta\Omega \qquad , \quad \Delta\Omega \ll 1 \\ u_S &= \upsilon_S + \omega_S = u_M + \Delta u \;, \quad \Delta u \ll 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.391}$$

Werden diese Näherungsausdrücke in die Transformationsmatrix (8.376) eingesetzt, folgt der Näherungsausdruck für die Transformationsmatrix

$$a_{Sij} = a_{Mij} + \Delta a_{Mij} \tag{8.392}$$

mit den Näherungen (vgl. auch die Variationsausdrücke (8.382))

$$\begin{aligned} \Delta a_{M11} &\approx \Delta i \; a_{M31} \sin u_M + \Delta u \, a_{M21} - \Delta\Omega \, a_{M12} \\ \Delta a_{M12} &\approx \Delta i \; a_{M32} \sin u_M + \Delta u \, a_{M22} + \Delta\Omega \, a_{M11} \\ \Delta a_{M13} &\approx \Delta i \; a_{M33} \sin u_M + \Delta u \, a_{M23} \\ \Delta a_{M21} &\approx \Delta i \; a_{M31} \cos u_M - \Delta u \, a_{M11} - \Delta\Omega \, a_{M22} \\ \Delta a_{M22} &\approx \Delta i \; a_{M32} \cos u_M - \Delta u \; a_{M12} + \Delta\Omega \, a_{M21} \\ \Delta a_{M23} &\approx \Delta i \; a_{M33} \cos u_M - \Delta u \, a_{M13} \\ \Delta a_{M31} &\approx \Delta i \; a_{M33} \sin\Omega_M - \Delta\Omega \, a_{M32} \\ \Delta a_{M32} &\approx -\Delta i \; a_{M33} \cos\Omega_M + \Delta\Omega \, a_{M31} \\ \Delta a_{M33} &\approx -\Delta i \; \sin i_M \qquad . \end{aligned} \tag{8.393}$$

Der Radius des Tochtersatelliten kann wegen der kleinen Exzentrizität linearisiert werden:

$$r_S = \frac{a_S\left(1-e_S^2\right)}{1+e_S\cos\upsilon_S} \approx r_M\left(1-\Delta e\cos\upsilon_S\right) \quad , \tag{8.394}$$

wobei a_S die große Halbachse der sekundären Satellitenbahn („Slave Bahn“) sei. Diese wird um dieselbe keplersche Umlaufzeit zu garantieren der großen Halbachse der Masterbahn gleichgesetzt. Damit lautet der relative Ortsvektor schließlich

$$\Delta\mathbf{r} := Y^j \mathbf{q}_j^{(L)} \approx r_M \left(\Delta a_{M1}{}^i \, a_M{}^j{}_i - \Delta e \cos\upsilon_S \, a_{M1}{}^i \, a_M{}^j{}_i \right) \mathbf{q}_j^{(L)} \quad . \tag{8.395}$$

Werden hier die Koeffizienten der Transformationsmatrix (8.376) mit den Bahnparametern des Master - Satelliten eingesetzt sowie die Variationen aus (8.393) folgen die Koeffizienten des relativen Ortsvektors im mitbewegten Bahnsystem

$$\begin{aligned} Y_1 &= -r_M \, \Delta e \cos\upsilon_S && +\cdots \\ Y_2 &= r_M \left(\Delta\Omega \cos i_M + \Delta u \right) && +\cdots \\ Y_3 &= r_M \left(\Delta i \sin u_M - \Delta\Omega \sin i_M \cos u_M \right) && +\cdots \; . \end{aligned} \tag{8.396}$$

Die wahre Anomalie υ_S kann wegen der Kleinheit der Exzentrizität $e_S = \Delta e$ durch die ersten Glieder der Mittelpunktsgleichung angenähert werden:

$$\upsilon_S = M_S + 2 \, \Delta e \sin M_S + \ldots \quad . \tag{8.397}$$

Damit wird

$$\cos\upsilon_S \approx \cos M_S - 2 \, \Delta e \sin^2 M_S \tag{8.398}$$

und es bleibt für den ersten Koeffizienten

$$Y_1 = -r_M \, \Delta e \cos\left(M_S \right) + \cdots \; . \tag{8.399}$$

Die mittlere Anomalie des zweiten Satelliten unterscheidet sich von der des Mastersatelliten um einen bestimmten (nicht notwendig kleinen) Betrag

$$M_S = M_M + \Delta M \quad . \tag{8.400}$$

Sei

$$n_M = \sqrt{\frac{\mu}{r_M^3}} \tag{8.401}$$

die mittlere keplersche Bewegung des Mastersatelliten, kann seine mittlere Anomalie aus

$$M_M = M_{M0} + n_M \left(t - t_0 \right) \tag{8.402}$$

berechnet werden und der erste Koeffizient nimmt die Gestalt (um das negative Vorzeichen in der ersten der Gleichungen (8.396) zu eliminieren, wird das Argument um 270° gedreht)

$$Y_1 = r_M \, \Delta e \sin\left[M_{M0} + \Delta M + 270° + n_M \left(t - t_0 \right) \right] + \cdots \tag{8.403}$$

an. Da die wahre Anomalie des Mastersatelliten wegen dessen kreisförmiger Bahn gleich der mittlere Anomalie ist ($\upsilon_M = M_M$), kann die Variation des Argumentes der Breite berechnet werden (unter Anwendung der Ausdrücke (8.391), (8.397) und (8.400)) aus

$$\Delta u = u_S - u_M = \upsilon_S + \omega_S - \upsilon_M - \omega_M = \Delta M + \Delta\omega + 2\,\Delta e \sin M_S \quad .$$

Damit folgt für den zweiten Koeffizienten

$$Y_2 = r_M \left\{ \Delta\Omega \cos i_M + \Delta M + \Delta\omega + 2 \, \Delta e \cos\left[M_{M0} + \Delta M + 270° + n_M \left(t - t_0 \right) \right] \right\} + \cdots . \tag{8.404}$$

Wird das Argument der Breite u_M des Mastersatelliten als unabhängige Variable verwendet, kann

$$u_M = \upsilon_M + \omega_M = M_M + \omega_M = M_{M0} + n_M \left(t - t_0 \right) + \omega_M =: u_{M0} + n_M \left(t - t_0 \right) \tag{8.405}$$

gesetzt werden. In den Anwendungen werden die Koeffizienten des relativen Ortsvektors gelegentlich in der Form

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_1 \sin\left[n_M (t-t_0) + A_0\right] &+\cdots \\ Y_2 &= 2A_1 \cos\left[n_M (t-t_0) + A_0\right] + \Delta Y &+\cdots \\ Y_3 &= B_1 \sin\left[n_M (t-t_0) + B_0\right] &+\cdots \end{aligned} \tag{8.406}$$

geschrieben. Die Konstanten dieser Ausdrücke haben zu den relativen *Kepler*-Elementen die Beziehungen (wegen der Annahme $r_M = a_M$ wird jetzt die große Bahnhalbachse des Mastersatelliten angeschrieben)

$$\begin{aligned} A_1 &= a_M \, \Delta e \\ A_0 &= M_{M0} + \Delta M + 270° \\ \Delta Y &= a_M \left(\Delta M + \Delta\omega + \Delta\Omega \cos i_M\right) \\ u_{M0} &= M_{M0} + \omega_M \\ B_1 \sin B_0 &= a_M \left[\Delta i \sin u_{M0} - \Delta\Omega \sin i_M \cos u_{M0}\right] \\ B_1 \cos B_0 &= a_M \left[\Delta i \cos u_{M0} + \Delta\Omega \sin i_M \sin u_{M0}\right] \quad , \end{aligned} \tag{8.407}$$

wenn neben den Bahnelementen ($a_M, e_M = 0.0, i_M, \Omega_M, \omega_M, M_{M0}$) des Mastersatelliten die relativen *Kepler*elemente des zweiten Satelliten $\left(\Delta a = 0, \Delta e, \Delta i, \Delta\Omega, \Delta\omega, \Delta M\right)$ vorgegeben sind.

Umgekehrt bei Vorgabe der Parameter der relativen Bewegung der definierenden relativen *Kepler* Elemente folgen die relativen *Kepler* Elemente aus[1]

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{A_1}{a_M} \\ \Delta M &= A_0 - M_{M0} - 270° \\ u_{M0} &= M_{M0} + \omega_M \\ \Delta i &= \frac{B_1}{a_M} \cos\left(u_{M0} - B_0\right) \\ \Delta\Omega \sin i_M &= \frac{B_1}{a_M} \sin\left(u_{M0} - B_0\right) \\ \Delta\omega &= \frac{\Delta Y}{a_M} - \Delta M - \Delta\Omega \cos i_M \quad . \end{aligned} \tag{8.408}$$

In manchen Studien zur Relativbewegung werden an Stelle der *Kepler*elemente bzw. der Parameter der Relativbewegung sogenannte Exzentrizitäts- bzw. Inklinationsvektoren der Relativbewegung eingeführt. Ihr Zusammenhang mit den vorstehenden Formeln wird hier kurz zusammengestellt. Als unabhängige Variable bei der Beschreibung der Relativbewegung wird das Argument der Breite u_M des Mastersatelliten gewählt. Aus der Entwicklung (8.400) folgt

---

[1] Anmerkung: wird an Stelle der Variationen in den *Kepler*elementen der Anfangszustandsvektor in relativen Koordinaten vorgegeben, können die Umrechnungen von *Kepler*elementen in Koordinaten verwendet werden. Die fertigen Formeln können etwa in D. A. VALLADO [2001], pp.372-399 nachgelesen werden. Auch in der Arbeit von CLOHESSY, WILTSHIRE [1960] wurde der Bezug auf einen Anfangszustandsvektor untersucht.

$$\cos M_S \;=\; \cos\left(M_M + \Delta M\right) = \cos\left(u_M - \omega_M + \Delta M\;\right) = \cos u_M \cos\varphi + \sin u_M \sin\varphi$$

mit der Abkürzung

$$\omega_R \;:=\omega_M - \Delta M \quad ,$$

was als „relatives Argument des Perigäums“ bezeichnet wird. Als „Exzentrizitätsvektor der Relativbewegung“ werden die Ausdrücke

$$\Delta e_x := \Delta e\,\cos\omega_R \;\;,\;\; \Delta e_y := \Delta e\,\sin\omega_R$$

eingeführt. Dieser kann somit als ein Spezialfall von Bahnparametern der Relativbewegung bezeichnet werden. Damit kann der erste der Koeffizienten des relativen Ortsvektors in der Form

$$Y_1 \;=\; -a_M\left(\Delta e_x \cos u_M \;+\Delta e_y \sin u_M\right) \;+\cdots \tag{8.409}$$

geschrieben werden. Entsprechend lautet der zweite Koeffizient

$$Y_2 \;=\; -2\,a_M\,\Delta e_x \cos u_M \;+\; 2\,a_M\,\Delta e_y \sin u_M \;+\; \Delta Y \;+\cdots\;. \tag{8.410}$$

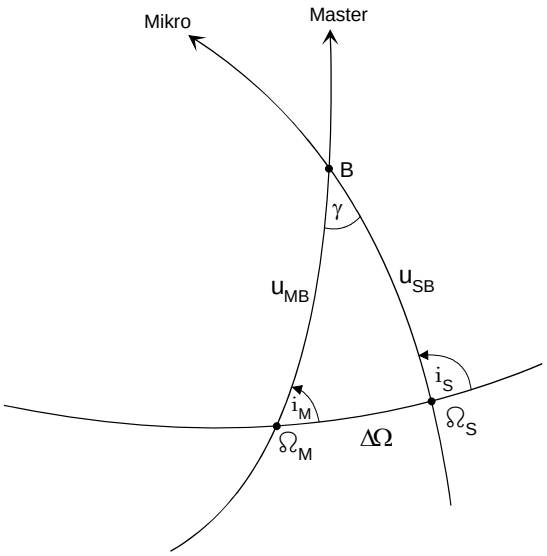


Bild 8-17: Zur Beschreibung des Inklinationsvektors der Relativbewegung

Schließlich kann die dritte der Koeffizientengleichungen (8.396) mit Einführung des “Inklinationsvektors der Relativbewegung”

$$\Delta i_x := \Delta i \quad,\quad \Delta i_y := \Delta\Omega\cos i_M \quad, \tag{8.411}$$

in die Form

$$Y_3 \;=\; -\Delta i_x \cos u_M \;+\; \Delta i_y \sin u_M \;+\cdots \tag{8.412}$$

umgeschrieben werden. Wird der Bezug auf den Schnittpunkt *B* der Bahnebene des Mastersatelliten mit der Bahnebene des Mikrosatelliten hergestellt, sei γ der Schnittwinkel dieser beiden Ebenen und u_{sB} das „relative Argument der Breite“ dieses Schnittpunktes enlang der Bahn des Mikrosatelliten. Dann kann nach Bild 8-17 der Inklinationsvektor der Relativbewegung alternativ geschrieben werden in der Form

$$\Delta i_x := \sin\gamma \, \sin u_{sB} \quad , \quad \Delta i_y := \sin\gamma \, \cos u_{sB} \quad . \tag{8.413}$$

8.12 Das *Hansen* System

Das von *P. A. Hansen* entdeckte bewegungsbezogene Bahnsystem (von *Hansen* als „ideale Koordinaten“ bezeichnet) ist für die allgemeine Untersuchung beliebiger Bewegungen von fundamentaler Bedeutung[1].

8.12.1 Eigenschaften und Besonderheiten des *Hansen* Systems

Ein *Hansen* System habe als orthonormale Basis die Richtungsvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$. Die Basisebene dieses Systems ist die momentane (= oskulierende) Bahnebene des bewegten Objektes. Ist diese Bewegung durch Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ bekannt, spannen diese beiden Vektoren die Bahnebene auf (sofern sie nicht kollinear sind). Der Normalenvektor der Bahnebene

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\mathbf{c}_0 \quad , \; G := |\mathbf{c}| \quad , \quad \mathbf{c}_0{}^2 = 1 \quad , \tag{8.414}$$

weist in die normale Richtung des *Hansen* Systems:

$$\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{G} \quad . \tag{8.415}$$

Seien $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ der radiale und der transversale Richtungsvektor der Bewegung mit

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \quad r := |\mathbf{r}| \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = |\dot{\mathbf{r}}_0|\mathbf{q}_0 \quad , \quad \mathbf{q}_0{}^2 = 1, \; \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0 \quad . \tag{8.416}$$

Der Betrag der Variation des radialen Richtungsvektors werde mit

$$\dot{\zeta} := |\dot{\mathbf{r}}_0| \tag{8.417}$$

bezeichnet. Das Integral

$$\zeta = \zeta_0 + \int \dot{\zeta}\, dt \tag{8.418}$$

kann als ein Winkel gedeutet werden, der (bis auf eine willkürliche Integrationskonstante ζ_0) notwendig und hinreichend ein *Hansen* System definiert[2]. Dieser Winkel wird als der auf das *Hansen* System bezogene *Bahnwinkel* (bisweilen auch als erster *Hansen*-Winkel) bezeichnet. Mit seiner Hilfe werden die in der Bahnebene gelegenen Basisvektoren des *Hansen* Systems auf die Bewegung bezogen:

---

[1] Das *Hansen* System wurde in den Kapiteln 4 und 6 6 elementar und detailliert untersucht. Die Ergebnisse und allgemeinen Eigenschaften dieses Systems werden in diesem Abschnitt in Ergänzung zu den anderen Koordinatensystemen systematisch zusammengestellt. (siehe auch: DLR-FB 2011-04 und JOCHIM, E. F. M. [2012]: ‘The Significance of the Hansen Ideal Space frame’, Astr. Nachr. / AN **333**, No. 8, 774-783 (2012) / **DOI** 10.1002/asna.202222711)

[2] Siehe Satz H10 in Abschnitt 4.3.16

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{r}_0 \cos\zeta - \mathbf{q}_0 \sin\zeta \\ \mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{r}_0 \sin\zeta + \mathbf{q}_0 \cos\zeta \end{aligned} \tag{8.419}$$

Bild 8-18: Das bewegungsbezogene Bahnsystem (*Hansen*-System)

Ein *Hansen* System ist aus folgendem Grund für die Untersuchung von beliebigen Bewegungen von grundlegender Bedeutung: Werde ein Ortsvektor durch die *Hansen* Koordinaten

$$y_1^{(I)} := r\cos\zeta \;,\quad y_2^{(I)} := r\sin\zeta \;,\quad y_3^{(I)} := 0 \;,\quad \mathbf{r} = y^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \tag{8.420}$$

beschrieben, lautet der Geschwindigkeitsvektor bezogen auf das *Hansen* System

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}_1^{(I)}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{y}_2^{(I)}\,\mathbf{q}_2^{(I)} + y_1^{(I)}\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} + y_2^{(I)}\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \quad .$$

Für *Hansen* Systeme ist nun notwendig und hinreichend, dass in diesem Ausdruck der Anteil mit den Variationen der Basisvektoren identisch verschwindet[1], es ist also

$$y_1^{(I)}\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} + y_2^{(I)}\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} = r\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\zeta\right) \equiv 0 \quad . \tag{8.421}$$

Dieser Sachverhalt begründet die einzigartige Stellung der *Hansen* Systeme: Die Beschreibung einer Bewegung in Hansen Systemen ist unabhängig von einer Eigenbewegung dieses Systems, die durch physikalische Effekte (sogenannte Störungen) auf die Bewegung verursacht werden. Nur das inertiale Basissystem hat (definitionsgemäß) keine Eigenbewegung (bei aller bekannten Problematik ein solches System allgemeingültig zu definieren). Alle Koordinatensysteme außerhalb von *Hansen* Systemen haben eine Eigenbewegung, die auf ein inertiales Basissystem (mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0,\ \mathbf{D}_p = 0$) bezogen werden muss.

Bei Bezug auf ein *Hansen* System hat der Geschwindigkeitsvektor somit notwendig die allgemeingültige(!) Darstellung

[1] Siehe den auf *Hansen* selbst zurückgehenden Satz H1 in Abschnitt 4.3.10

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dy_1^{(I)}}{d\zeta}\mathbf{q}_1^{(I)} + \frac{dy_2^{(I)}}{d\zeta}\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{8.422}$$

8.12.2 Transformationen des *Hansen* Systems

Eine Bewegung (insbesondere jede Satellitenbewegung) wird üblicherweise in einem als inertial angenommenen Basissystem berechnet. Somit muss jedes bewegungsbezogene System, insbesondere auch ein *Hansen* System auf dieses Basissystem bezogen werden. Als „inertiales" Basissystem wird üblicherweise das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem gewählt. Die Umrechnungen erfolgen mit den Beziehungen aus Abschnitt 6.3.2 mit den Zuordnungen $A \to \Omega,\ B \to i,\ C \to -\sigma$. Hier bedeuten Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens, i die Inklination der Bahnebene bezüglich der Äquatorebene, σ die Länge des aufsteigenden Knotens bezüglich des Anfangspunktes O in der Bahnebene. Dieser Punkt ist durch den ersten Basisvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ des *Hansen* Systems ausgezeichnet.

Die Basisvektoren des *Hansen* Systems können aus denen des Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{p}_1(\ \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega) + \\
&+ \mathbf{p}_2(-\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega) + \\
&+ \mathbf{p}_3\ \sin i \sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{p}_1(-\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma\cos\Omega) + \\
&+ \mathbf{p}_2(\ \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega) + \\
&+ \mathbf{p}_3\ \sin i \cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \\
&- \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \\
&+ \mathbf{p}_3 \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{8.423}$$

Umgekehrt wird ein *Hansen* System auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem durch die Transformationsformeln umgerechnet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(I)}(\ \cos i \sin\Omega \sin\sigma + \cos\Omega \cos\sigma) + \\
&+ \mathbf{q}_2^{(I)}(-\cos i \sin\Omega \cos\sigma + \cos\Omega \sin\sigma) + \\
&+ \mathbf{q}_3^{(I)}\ \sin i \sin\Omega \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(I)}(-\cos i \cos\Omega \sin\sigma + \sin\Omega \cos\sigma) + \\
&+ \mathbf{q}_2^{(I)}(\ \cos i \cos\Omega \cos\sigma + \sin\Omega \sin\sigma) - \\
&- \mathbf{q}_3^{(I)}\ \sin i \cos\Omega \\
\mathbf{p}_3 &= -\mathbf{q}_2^{(I)} \sin i \sin\sigma + \\
&+ \mathbf{q}_2^{(I)} \sin i \cos\sigma + \\
&+ \mathbf{q}_3^{(I)} \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{8.424}$$

Die Basisvektoren haben die Verknüpfungen

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^i \mathbf{p}_i \,, \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \,, \, \mathbf{q}_i^{(I)} \cdot \mathbf{q}_j^{(I)} = \delta_{ij}) \quad , \tag{8.425}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega \\
a_{12} &= -\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega \\
a_{13} &= -\sin i \sin\sigma \\
a_{21} &= -\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma \cos\Omega \\
a_{22} &= \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega \\
a_{23} &= \sin i \cos\sigma \\
a_{31} &= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{8.426}$$

Seien die x^i Koordinaten eines Ortsvektors in Frühlingspunkt-bezogenen kartesischen Koordinaten, $y_j^{(I)}$ die entsprechenden Koordinaten im *Hansen* System, lauten die Transformationen

$$x^i = a_j{}^i y^{(I)j} \quad , \quad y^{(I)j} = a^j{}_i x^i \tag{8.427}$$

Die zugehörigen Variationen der Transformationsmatrix lauten

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -(i)^{\cdot} a_{31} \sin\sigma - \dot{\sigma} a_{21} - \dot{\Omega}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -(i)^{\cdot} a_{32} \sin\sigma - \dot{\sigma} a_{22} + \dot{\Omega} a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= (i)^{\cdot} a_{33} \sin\sigma - \dot{\sigma} a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= (i)^{\cdot} a_{31} \cos\sigma + \dot{\sigma} a_{11} - \dot{\Omega} a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= (i)^{\cdot} a_{32} \cos\sigma + \dot{\sigma} a_{12} + \dot{\Omega} a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= (i)^{\cdot} a_{33} \cos\sigma + \dot{\sigma} a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= (i)^{\cdot} a_{33} \sin\Omega - \dot{\Omega}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -(i)^{\cdot} a_{33} \cos\Omega + \dot{\Omega}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot} \sin i
\end{aligned} \tag{8.428}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= (i)^{\cdot} \sin\Omega \sin i \sin\sigma + \\
&\quad + \dot{\sigma}(\cos i \cos\sigma \sin\Omega - \sin\sigma \cos\Omega) + \\
&\quad + \dot{\Omega}(\cos i \sin\sigma \cos\Omega - \cos\sigma \sin\Omega) \\
\dot{a}_{12} &= (i)^{\cdot} \cos\Omega \sin i \sin\sigma - \\
&\quad - \dot{\sigma}(\cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega) + \\
&\quad + \dot{\Omega}(\cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega) \\
\dot{a}_{13} &= -(i)^{\cdot} \cos i \sin\sigma - \dot{\sigma} \sin i \cos\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{21} &= \dot{(i)} \sin\Omega \sin i \cos\sigma + \\
&\quad + \dot{\sigma}\left(\cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega\right) - \\
&\quad - \dot{\Omega}\left(\cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega\right) \\
\dot{a}_{22} &= -\dot{(i)} \cos\Omega \sin i \cos\sigma + \\
&\quad + \dot{\sigma}\left(-\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega\right) - \\
&\quad - \dot{\Omega}\left(\cos i \cos\sigma \sin\Omega - \sin\sigma \cos\Omega\right) \\
\dot{a}_{23} &= \dot{(i)} \cos i \cos\sigma - \dot{\sigma} \sin i \sin\sigma \\
\dot{a}_{31} &= \dot{(i)} \sin\Omega \cos i + \dot{\Omega} \cos\Omega \sin i \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{(i)} \cos\Omega \cos i + \dot{\Omega} \sin\Omega \sin i \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{(i)} \sin i
\end{aligned}
\tag{8.429}
$$

Die Variationen der Basisvektoren des *Hansen* Systems haben im Äquatorsystem die Darstellung und umgekehrt

$$
\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = \dot{a}_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} + a^j{}_i \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \quad . \tag{8.430}
$$

Entsprechend haben die Variationen der Koeffizienten zwischen den beiden Systemen die Beziehungen

$$
\dot{x}^i = \dot{a}_j{}^i y^{(I)j} + a_j{}^i \dot{y}^{(I)j} \quad , \quad \dot{y}^{(I)j} = \dot{a}^j{}_i x^i + a^j{}_i \dot{x}^i \quad . \tag{8.431}
$$

8.12.3 Der Eigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems

Der absolute Eigenbewegungsvektor eines *Hansen* Systems

$$
\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\, \mathbf{r}_0 \tag{8.432}
$$

weist in Richtung des Ortsvektors des bewegten Objektes[1] und hat als Betrag die Winkelgeschwindigkeit, mit der die oskulierende Bahnebene um den Radiusvektor gedreht wird. Mit den Formeln (4.325) haben die Variationen der Basisvektoren des *Hansen* Systems bezogen auf das *Hansen* System die Darstellung („*Frenet*sche Formeln des *Hansen* Systems“)

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(I)} \sin\zeta \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\, \mathbf{q}_3^{(I)} \cos\zeta \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\, (\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta)
\end{aligned}
\tag{8.433}
$$

Nach Beziehung (4.326) lauten die entsprechenden Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
&q_{11} = q_{12} = q_{21} = q_{22} = q_{33} = 0 \\
&q_{13} = -q_{31} = -\dot{\eta} \sin\zeta \\
&q_{23} = -q_{32} = \dot{\eta} \cos\zeta
\end{aligned}
\tag{8.434}
$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des *Hansen* Systems lautet bei Bezug auf dieses System

[1] Satz von *Hansen* [1857], siehe in Abschnitt 4.3.15

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = D^j_{q^{(I)}}\,\mathbf{q}^{(I)}_j \;=\; \dot\eta\left(\mathbf{q}^{(I)}_1\cos\zeta + \mathbf{q}^{(I)}_2\sin\zeta\right) \tag{8.435}$$

mit den Koeffizienten

$$D_{q^{(I)}1} = q_{23} = \dot\eta\;\cos\zeta \quad , \quad D_{q^{(I)}2} = q_{31} = \dot\eta\;\sin\zeta \quad , \quad D_{q^{(I)}3} = q_{12} = 0 \quad . \tag{8.436}$$

Der relative Systemeigenbewegungsvektor des *Hansen* Systems bezüglich des Äquatorsystems

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}p} := \mathbf{D}_{q^{(I)}} - \mathbf{D}_p = D^j_{q^{(I)}p}\mathbf{q}^{(I)}_j = D^j_{q^{(I)}}\mathbf{q}^{(I)}_j \;-\; D^i_p\;a^{\,j}{}_i\;\mathbf{q}^{(I)}_j \tag{8.437}$$

hat mit den Formeln (6.136) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_{q^{(I)}p1} &= \dot a^i_2\,a_{3i} = \dot{(i)}\cos\sigma - \dot\Omega\,\sin i\,\sin\sigma \\ D_{q^{(I)}p2} &= \dot a^i_3\,a_{1i} = \dot{(i)}\sin\sigma + \dot\Omega\,\sin i\,\cos\sigma \\ D_{q^{(I)}p3} &= \dot a^i_1\,a_{2i} = \dot\Omega\,\cos i - \dot\sigma \quad . \end{aligned} \tag{8.438}$$

Der absolute Systemeigenbewegungsvektor des äquatorialen Basissystems lautet

$$\mathbf{D}_p := D^i_p\,\mathbf{p}_i = D^i_p\,a^{\,j}{}_i\mathbf{q}^{(I)}_j \quad , \; D_{p1} =: p_{23} \; , \; D_{p2} =: p_{31} \; , \; D_{p3} =: p_{12} \; . \tag{8.439}$$

Damit können die Variationsgleichungen der räumlichen Orientierungswinkel einer Bewegung aus der Beziehung (8.437) direkt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \dot{(i)} \;&= q_{31}\sin\sigma + q_{23}\cos\sigma \;-\; p_{31}\sin\Omega \;-\; p_{23}\cos\Omega \\ \dot\Omega\,\sin i \;&= \;\; q_{31}\cos\sigma - q_{23}\sin\sigma - p_{12}\,\sin i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\cos i \\ \dot\sigma\,\sin i \;&= -p_{31}\cos\Omega + p_{23}\sin\Omega + (q_{31}\cos\sigma - q_{23}\sin\sigma)\cos i \; . \end{aligned} \tag{8.440}$$

Mit den obigen Parametern lauten die Variationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{(i)} \;&= \;\; \dot\eta\,\cos(\zeta-\sigma) \;-\; p_{31}\sin\Omega \;-\; p_{23}\cos\Omega \\ \dot\Omega\sin i \;&= \;\; \dot\eta\,\sin(\zeta-\sigma) \;-\; p_{12}\,\sin i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\cos i \\ \dot\sigma\sin i \;&= \;\; \dot\eta\,\sin(\zeta-\sigma)\cos i - p_{31}\cos\Omega + p_{23}\sin\Omega \quad . \end{aligned} \tag{8.441}$$

Für die Länge σ in der Bahn ergeben die beiden letzten Beziehungen auch

$$\dot\sigma = \dot\Omega\cos i + p_{12}\cos i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\sin i \quad . \tag{8.442}$$

Ist ein Bewegungsvorgang durch den Zustandsvektor und damit den Flächenparameter $G = |\mathbf{c}| = |\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}|$ und seinen Radius $r = |\mathbf{r}|$ gegeben und ist die normale Beschleunigung b_N bekannt, kann die Variation des räumlichen Rotationswinkel η (zweiter *Hansen*-Winkel) aus Formel (4.307) erhalten werden:

$$\dot\eta = \frac{r}{G}b_N \quad . \tag{8.443}$$

Damit können die (für jede Bewegung gültigen) Variationsgleichungen der räumlichen Winkel i und σ bzw. Ω gelöst werden, sofern nur die Eigenbewegung des Basissystems bekannt ist. In der Praxis wird das Basissystem als inertial angenommen (definiert), so dass die p_{ij} als verschwindend angenommen werden können. Das macht den Integrationsprozess einfacher

oder überhaupt erst möglich. Allerdings muss diese Vereinfachung stets im Auge behalten werden, wenn verfeinerte Beobachtungen eine Anpassung der Ergebnisse verlangen.

8.13 Das Apsidensystem

8.13.1 Eigenschaften des Apsidensystems

Das Apsidensystem ist ein bewegungsbezogenes System, das auf die Apsiden (Perizentrum, Apozentrum) ausgerichtet ist. Seine Basisebene ist die oskulierende Bahnebene, der Normalenvektor der Bahnebene ist somit identisch dem dritten Basisvektor des Apsidensystems

$$G\mathbf{q}_3^{(P)} = G\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \quad , \tag{8.444}$$

sein erster Basisvektor $\mathbf{q}_1^{(P)}$ weist in Richtung des Perizentrums der Bahn, der zweite Basisvektor

$$\mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{q}_3^{(P)} \times \mathbf{q}_1^{(P)} \tag{8.445}$$

ergänzt das System zu einem orthonormierten Rechtssystem[1]. Die wahre Anomalie υ dient als Bahnwinkel. Im Apsidensystem hat ein Zustandsvektor somit die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) + r\dot{\upsilon}\left(-\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon\right) + r\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)}\cos\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) \end{aligned} \quad . \tag{8.446}$$

8.13.2 Transformationen des Apsidensystems zu anderen Systemen

8.13.2.1 Transformationen zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem

Der wichtigste Bezug des Apsidensystems ist der zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem. Mit den Zuordnungen $A \to \Omega, B \to i, C \to \omega$, wobei Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens, i die Inklination der Bahnebene gegenüber der Äquatorebene und ω das Argument des Perizentrums (Winkel zwischen Knoten und Perizentrum) bedeutet, ergeben sich unter Verwendung der Beziehungen aus Abschnitt 6.3.2 die Transformationsformeln

[1] In der klassischen Himmelsmechanik (vgl. Abschnitt 2.5.2 (Band I) und Kapitel 10 (in Band III)) wird der erste Richtungsvektor des Apsidensystems als der Perizentrumsgerichtete Basisvektor **d** bezeichnet, für den im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit auch der Begriff „Hermannscher Vektor" verwendet wird, der zweite in der Bahnebene liegende Richtungsvektor mit **f**, der „Parametervektor", der dritte Richtungsvektor mit **c** als dem Bahnnormalenvektor.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{p}_1\,(-\cos i\,\sin\omega\,\sin\Omega+\cos\omega\,\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2\,(\ \ \cos i\,\sin\omega\,\cos\Omega+\cos\omega\,\sin\Omega)+\\
&\quad-\mathbf{p}_3\ \ \sin i\,\sin\omega\\
\mathbf{q}_2^{(P)} &= \mathbf{p}_1\,(-\cos i\,\cos\omega\ \sin\Omega-\sin\omega\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2\,(\ \ \cos i\,\cos\omega\,\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\ \ \sin i\,\cos\omega\\
\mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{p}_1\,\sin i\,\sin\Omega-\\
&\quad-\mathbf{p}_2\,\sin i\,\cos\Omega+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\,\cos i\quad .
\end{aligned}
\tag{8.447}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(P)}\,(-\cos i\,\sin\Omega\ \sin\omega+\cos\Omega\,\cos\omega)+\\
&\quad+\mathbf{q}_2^{(P)}\,(-\cos i\,\sin\Omega\ \cos\omega-\cos\Omega\,\sin\omega)+\\
&\quad+\mathbf{q}_3^{(P)}\ \ \sin i\,\sin\Omega\\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(P)}\,(\ \cos i\,\cos\Omega\,\sin\omega+\sin\Omega\,\cos\omega)+\\
&\quad+\mathbf{q}_2^{(P)}\,(\ \cos i\,\cos\Omega\,\cos\omega-\sin\Omega\ \sin\omega)-\\
&\quad-\mathbf{q}_3^{(P)}\ \ \sin i\ \cos\Omega\\
\mathbf{p}_3 &= \ \ \mathbf{q}_2^{(P)}\sin i\,\sin\omega+\\
&\quad+\mathbf{q}_2^{(P)}\sin i\,\cos+\\
&\quad+\mathbf{q}_3^{(P)}\cos i\quad .
\end{aligned}
\tag{8.448}
$$

Bild 8-19: Das Apsidensystem: p – Perizentrum, S-beobachtetes Objekt („Satellit“), a – Frühlingspunkt, e – aufsteigender Knoten, $\mathbf{p}_i$ - Frühlingspunkt bezogenes Äquatorsystem, $\mathbf{q}_j^{(P)}$ - Apsidensystem, □ - Rektaszension des aufsteigenden Knotens, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3^{(P)}$ - Knotensystem, h2 – Hilfsvektor für Knotensystem, $\mathbf{r}_0$ - radialer Ortsvektor zu Objekt S, i – Inklination, ω - Argument des Perizentrums P, v – wahre Anomalie

Die Basisvektoren haben die Verknüpfungen

$$\mathbf{q}_j^{(P)} = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i\,,\quad \mathbf{p}_i = a^j_{\ i}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j=\delta_{ij}\ ,\ \mathbf{q}_i^{(P)}\cdot\mathbf{q}_j^{(P)}=\delta_{ij}) \quad , \quad (8.449)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos i\,\sin\omega\,\sin\Omega + \cos\omega\,\cos\Omega \\
a_{12} &= \cos i\,\sin\omega\,\cos\Omega + \cos\omega\,\sin\Omega \\
a_{13} &= \sin i\,\sin\omega \\
a_{21} &= -\cos i\,\cos\omega\,\sin\Omega - \sin\omega\,\cos\Omega \\
a_{22} &= \cos i\,\cos\omega\,\cos\Omega - \sin\omega\,\sin\Omega \\
a_{23} &= \sin i\,\cos\omega \\
a_{31} &= \sin i\,\sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i\,\cos\Omega \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \qquad (8.450)$$

Seien die x^i Koordinaten eines Ortsvektors in Frühlingspunkt-bezogenen kartesischen Koordinaten, $y_j^{(P)}$ die entsprechenden Koordinaten im Apsidensystem, lauten die Transformationen

$$x^i = a_j^{\ i}\, y^{(P)j} \quad , \quad y^{(P)j} = a^j_{\ i}\, x^i \tag{8.451}$$

Die zugehörigen Variationen der Transformationsmatrix lauten

$$\begin{aligned}
\dot a_{11} &= (i)^{\cdot}\, a_{31} \sin\omega + \dot\omega a_{21} - \dot\Omega\, a_{12} \\
\dot a_{12} &= (i)^{\cdot}\, a_{32} \sin\omega + \dot\omega a_{22} + \dot\Omega\, a_{11} \\
\dot a_{13} &= (i)^{\cdot}\, a_{33} \sin\omega + \dot\omega a_{23} \\
\dot a_{21} &= (i)^{\cdot}\, a_{31} \cos\omega - \dot\omega a_{11} - \dot\Omega a_{22} \\
\dot a_{22} &= (i)^{\cdot}\, a_{32} \cos\omega - \dot\omega a_{12} + \dot\Omega a_{21} \\
\dot a_{23} &= (i)^{\cdot}\, a_{33} \cos\omega - \dot\omega a_{13} \\
\dot a_{31} &= (i)^{\cdot}\, a_{33}\, \sin\Omega - \dot\Omega\ a_{32} \\
\dot a_{32} &= -(i)^{\cdot}\, a_{33}\, \cos\Omega + \dot\Omega\, a_{31} \\
\dot a_{33} &= -(i)^{\cdot}\, \sin i
\end{aligned} \tag{8.452}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
\dot a_{11} &= (i)^{\cdot} \sin\Omega \sin i \sin\omega - \\
&\quad -\dot\omega(\cos i \cos\omega \sin\Omega + \sin\omega \cos\Omega) - \\
&\quad -\dot\Omega(\cos i \sin\omega \cos\Omega + \cos\omega \sin\Omega) \\
\dot a_{12} &= -(i)^{\cdot} \cos\Omega \sin i \sin\omega + \\
&\quad +\dot\omega(\ \cos i \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega) + \\
&\quad +\dot\Omega(-\cos i \sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega) \\
\dot a_{13} &= (i)^{\cdot} \cos i \sin\omega + \dot\omega\ \sin i \cos\omega \\
\dot a_{21} &= (i)^{\cdot} \sin\Omega\ \sin i\ \cos\omega - \\
&\quad -\dot\omega(\ -\cos i \sin\omega \sin\Omega\ + \cos\omega \cos\Omega) - \\
&\quad -\dot\Omega\ (\ \cos i \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega) \\
\dot a_{22} &= -(i)^{\cdot} \cos\Omega \sin i \cos\omega - \\
&\quad -\dot\omega\ (\cos i \sin\omega \cos\Omega + \cos\omega \sin\Omega) - \\
&\quad -\dot\Omega\ (\ \cos i \cos\omega \sin\Omega + \sin\omega \cos\Omega) \\
\dot a_{23} &= (i)^{\cdot} \cos i \cos\omega - \dot\omega \sin i\ \sin\omega \\
\dot a_{31} &= (i)^{\cdot} \sin\Omega\ \cos i\ + \dot\Omega \cos\Omega\ \sin i \\
\dot a_{32} &= -(i)^{\cdot} \cos\Omega\ \cos i\ + \dot\Omega \sin\Omega \sin i \\
\dot a_{33} &= -(i)^{\cdot} \sin i
\end{aligned} \tag{8.453}$$

Die Variationen der Basisvektoren des Apsidensystems haben im Äquatorsystem die wechselseitigen Beziehungen

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \dot{a}_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i \mathbf{q}_j^{(P)} + a^j{}_i \dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} \quad . \tag{8.454}$$

Entsprechend haben die Variationen der Koeffizienten zwischen den beiden Systemen die Beziehungen

$$\dot{x}^i = \dot{a}_j{}^i y^{(P)j} + a_j{}^i \dot{y}^{(P)j} \quad , \quad \dot{y}^{(P)j} = \dot{a}^j{}_i x^i + a^j{}_i \dot{x}^i \quad . \tag{8.455}$$

8.13.2.2 Transformationen zum Hansen-System

Mit dem Bahnwinkel ζ des *Hansen* Systems und der wahren Anomalie υ des Apsiden Systems ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon) + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon) \\ \mathbf{q}_2^{(P)} &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon) + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon) \\ \mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{q}_3^{(I)} \end{aligned} \tag{8.456}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon) - \mathbf{q}_2^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon) \\ \mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon) + \mathbf{q}_2^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon) \\ \mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{q}_3^{(P)} \quad . \end{aligned} \tag{8.457}$$

Die zugehörigen Variationen lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon) + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon) + (\dot{\zeta} - \dot{\upsilon})\left[-\mathbf{q}_1^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon) + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon)\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon) + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon) + (\dot{\zeta} - \dot{\upsilon})\left[-\mathbf{q}_1^{(I)} \cos(\zeta - \upsilon) - \mathbf{q}_2^{(I)} \sin(\zeta - \upsilon)\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} \end{aligned} \tag{8.458}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon) - \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon) + (\dot{\zeta} - \dot{\upsilon})\left[-\mathbf{q}_1^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon) - \mathbf{q}_2^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon)\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon) + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon) + (\dot{\zeta} - \dot{\upsilon})\left[\mathbf{q}_1^{(P)} \cos(\zeta - \upsilon) - \mathbf{q}_2^{(P)} \sin(\zeta - \upsilon)\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} \quad . \end{aligned} \tag{8.459}$$

8.13.2.3 Transformation zum *Leibniz*-System

Aus dem Ortsvektor, der in den Beziehungen (8.446) in Bezug auf das Apsidensystem dargestellt ist, folgt unmittelbar der radiale und der transversale Ortsvektor des *Leibniz*-Systems, sowie die Umkehrungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(P)} \cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)} \sin\upsilon \\
\mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(P)} \quad , \\
\mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{r}_0 \cos\upsilon - \mathbf{q}_0 \sin\upsilon \\
\mathbf{q}_2^{(P)} &= \mathbf{r}_0 \sin\upsilon + \mathbf{q}_0 \cos\upsilon \\
\mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{c}_0 .
\end{aligned}
\tag{8.460}
$$

Um die relative Eigenbewegung der beiden Systeme zu vergleichen, werden die Variationen der Basisvektoren verglichen. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \cos\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \sin\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \cos\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{r}_0 \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} \quad , \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \cos\upsilon - \dot{\mathbf{q}}_0 \sin\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_2^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 \sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_0 \cos\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_1^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\mathbf{c}}_0 \quad .
\end{aligned}
\tag{8.461}
$$

8.13.3 Darstellung der Geschwindigkeit im Apsidensystem für eine *Kepler*-bewegung

Der Geschwindigkeitsvektor kann im *Leibniz*-System in einen radialen und transversalen Anteil zerlegt werden[1]:

$$
\dot{\mathbf{r}} = V_R\,\mathbf{r}_0 + V_T\,\mathbf{q}_0 = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \quad . \tag{8.462}
$$

Hier ist G der (allgemeine) Flächenparameter, der in der allgemeinen Form des dritten keplerschen Gesetzes mit der Kegelschnittbewegung

$$
G = \sqrt{\mu p} \tag{8.463}
$$

verknüpft ist. Mit der Polargleichung einer Kegelschnittbewegung wird für die transversale Geschwindigkeit

$$
V_T = \frac{G}{r} = \frac{G}{p}\left(1 + e\cos\upsilon\right) \quad . \tag{8.464}
$$

[1] Diese Beziehuungen der Zweikörperbewegung sind in Abschnit 2.5.2 (Band I) hergeleitet

Bild 8-20: Das $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem in Bezug auf das $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)$ – *Leibniz*-System. υ-wahre Anomalie, E-Brennpunkt der Ellipse („Erdmittelpunkt“)

Hier kann die (langsame, also im „ungestörten“ Fall konstante) Größe

$$V_{TC} := \frac{G}{p} \tag{8.465}$$

eingeführt werden, was zu der Zerlegung der transversalen Geschwindigkeit führt:

$$V_T = V_{TC} + eV_{TC}\cos\upsilon \quad . \tag{8.466}$$

Die (absolute) Geschwindigkeit auf einer Kegelschnittbahn lautet

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right) \quad . \tag{8.467}$$

Mit der Polargleichung einer Kegelschnittbewegung, dem dritten keplerschen Gesetz in der Form (8.463) sowie dem konstanten Geschwindigkeitsanteil V_{TC} in (8.465) kann diese Geschwindigkeitsbeziehung umgeschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = V^2 = V_{TC}^2\left[\left(1+e\cos\upsilon\right)^2 + e^2\sin^2\upsilon\right] \quad . \tag{8.468}$$

Mit der transversalen Geschwindigkeit in der Darstellung (8.466) sowie der allgemeinen Geschwindigkeitsbeziehung (8.462) folgt daher

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = V^2 = V_R^2 + V_T^2 \quad , \tag{8.469}$$

somit

$$V_R^2 = V_{TC}^2\, e^2\sin^2\upsilon \quad . \tag{8.470}$$

Da eine physikalische Geschwindigkeit nie negativ werden kann, bleibt für die radiale Geschwindigkeit

$$V_R = eV_{TC}\sin\upsilon \quad . \tag{8.471}$$

Geometrisch bedeutet dies: in Richtung der $\mathbf{q}_2^{(P)}-$Achse des Apsidensystems hat die Geschwindigkeit eines Objektes, das sich auf einer Kegelschnittbahn bewegt, den konstanten Geschwindigkeitsanteil eV_{TC}, der sich in Bezug auf das *Leibniz*-System durch Drehung um die wahre Anomalie in die Komponenten $\left(eV_{TC}\sin\upsilon, eV_{TC}\cos\upsilon\right)$ zerlegen lässt. Werden die radiale Geschwindigkeit (8.471) sowie die transversale Geschwindigkeit (8.466) in die allgemeine Geschwindigkeitsbeziehung (8.462) eingesetzt, und anschließend die Transformation (8.460) vom *Leibniz*-System in das Apsidensystem durchgeführt, folgt die Gechwindigkeitsbeziehung in Bezug auf das Apsidensystem in der Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0\, eV_{TC}\sin\upsilon + \mathbf{q}_0\, V_{TC}\left(1+e\cos\upsilon\right) = -\mathbf{q}_1^{(P)}\, V_{TC}\sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\, V_{TC}\left(e+\cos\upsilon\right) \quad . \tag{8.472}$$

Hier ist wieder der konstante Anteil eV_{TC} in Richtung der $\mathbf{q}_2^{(P)}-$Achse erkennbar. Mit den Beziehungen (8.460) ist dann auch folgende bisweilen verwendete Darstellung des Geschwindigkeitsvektors[1] in einen transversalen Anteil und einen Anteil in Richtung der $\mathbf{q}_2^{(P)}-$Achse möglich:

$$\dot{\mathbf{r}} = V_{TC}\,\mathbf{q}_0 + eV_{TC}\left(\mathbf{r}_0\sin\upsilon + \mathbf{q}_0\cos\upsilon\right) = V_{TC}\,\mathbf{q}_0 + eV_{TC}\,\mathbf{q}_2^{(P)} =: \mathbf{V}_{TC} + \mathbf{V}_{TE} \quad . \tag{8.473}$$

8.13.4 Eigenbewegungsvektoren des Apsidensystems

8.13.4.1 Der relative Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems in Bezug auf das Äquatorsystem

Die Variationen der Basisvektoren des Apsidensystems bezogen auf dieses System lauten mit den Formeln (8.454) und den Beziehungen (8.449) und mit den Koeffizienten p_{ik} des absoluten Systemeigenbewegungsvektors des als Basis dienenden Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \dot{a}_j{}^i\, a^k{}_i\, \mathbf{q}_k^{(P)} + a_j{}^i\, p_i{}^m\, a^k{}_m\, \mathbf{q}_k^{(P)} = q_j{}^k\, \mathbf{q}_k^{(P)} \quad , \tag{8.474}$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} = {} & \mathbf{q}_2^{(P)}\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\cos i\right) + \mathbf{q}_3^{(P)}\left[\dot{(i)}\sin\omega - \dot{\Omega}\cos\omega\sin i\right] + \\
& + \dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{2j}\, \mathbf{q}_2^{(P)} + \dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j}\, \mathbf{q}_3^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} = {} & -\mathbf{q}_1^{(P)}\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\cos i\right) + \mathbf{q}_3^{(P)}\left[\dot{(i)}\cos\omega + \dot{\Omega}\sin\omega\sin i\right] - \\
& - \dot{a}_2{}^i\, p_i{}^j\, a_{1j}\, \mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{a}_2{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j}\, \mathbf{q}_3^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} = {} & -\mathbf{q}_1^{(P)}\left[\dot{(i)}\sin\omega - \dot{\Omega}\cos\omega\sin i\right] + \mathbf{q}_2^{(P)}\left[\dot{(i)}\cos\omega + \dot{\Omega}\sin\omega\sin i\right] - \\
& - \dot{a}_3{}^i\, p_i{}^j\, a_{1j}\, \mathbf{q}_1^{(P)} - \dot{a}_3{}^i\, p_i{}^j\, a_{2j}\, \mathbf{q}_2^{(P)} \quad .
\end{aligned} \tag{8.475}$$

[1] Siehe etwa in Abschnitt 9.8

Mit den Zuordnungen $D_{q^{(P)}1} = q_{23}, D_{q^{(P)}2} = q_{31}, D_{q^{(P)}3} = q_{12}$ lautet der absolute Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \; & \mathbf{q}_1^{(P)}\left[\dot{(i)}\cos\omega + \dot{\Omega}\,\sin\omega\sin i + \dot{a}_2{}^i\; p_i{}^j\; a_{1j}\right] - \\ & - \mathbf{q}_2^{(P)}\left[\dot{(i)}\sin\omega - \dot{\Omega}\,\cos\omega\sin i + \dot{a}_3{}^i\; p_i{}^j\; a_{2j}\right] + \\ & + \mathbf{q}_3^{(P)}\left(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\,\cos i + \dot{a}_1{}^i\; p_i{}^j\; a_{2j}\right) \;\; = \\ & = \mathbf{D}_{q^{(P)}p} + \mathbf{D}_p \quad .\end{aligned} \tag{8.476}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems bezüglich des Frühlingspunktorientierten Äquatorsystems lautet somit

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{q^{(P)}p} = \; & \mathbf{q}_1^{(P)}\left[\dot{(i)}\cos\omega + \dot{\Omega}\,\sin\omega\sin i\,\right] - \\ & - \mathbf{q}_2^{(P)}\left[\dot{(i)}\sin\omega - \dot{\Omega}\,\cos\omega\sin i\,\right] + \mathbf{q}_3^{(P)}\left(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\,\cos i\,\right) \quad .\end{aligned} \tag{8.477}$$

8.13.4.2 Der absolute Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems

Die *Frenet*schen Formeln des Apsidensystems können aus den Variationen (8.458) mit Hilfe der entsprechenden Formeln des *Hansen*-Systems (4.325) und den Beziehungen (8.457) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\sin\upsilon \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\cos\upsilon \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\eta}\left[\,\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon\,\right] \quad .\end{aligned} \tag{8.478}$$

Aus dem Ansatz

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = q_j{}^i\,\mathbf{q}_j^{(P)} = \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} \tag{8.479}$$

mit dem absoluten Systemeigenbewegungsvektor des Apsidensystems

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = D^j_{q^{(P)}}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \tag{8.480}$$

ergeben sich (ähnlich wie zum Beispiel in den Beziehungen (8.434) und (8.436)) die Zuweisungen

$$D_{q^{(P)}1} = q_{23} = -q_{32} \;\;,\;\; D_{q^{(P)}2} = q_{31} = -q_{13} \;\;,\;\; D_{q^{(P)}3} = q_{12} = -q_{21} \;\;,\;\; q_{jj} = 0 \;\; (j = 1,2,3) \tag{8.481}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems lautet somit

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} \quad . \tag{8.482}$$

Er kann nach diesem Ausdruck nicht ohne Kenntnis des zugeordneten *Hansen*-Systems verstanden werden. Durch Anwendung der Beziehungen (6.151) kann die Äquivalenz der in den beiden letzten Abschnitten hergeleiteten absoluten Eigenbewegungsvektoren des Apsidensystems nachgewiesen werden.

8.14 Das Knotensystem

8.14.1 Eigenschaften des Knotensystems

Bild 8-21: Das Knotensystem

Das Knotensystem („knotenbezogenes System“, „drakonitisches System“) ist (wie das Apsidensystem und wie die *Hansen* Systeme) ein bewegungsbezogenes System, das auf die Bahnknoten (auf- bzw. absteigender Knoten der Bahnebene mit der Äquatorebene) ausgerichtet ist. Seine Basisebene ist die oskulierende Bahnebene, der Normalenvektor der Bahnebene ist somit identisch dem dritten Basisvektor des Knotensystems

$$\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{\left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right|} = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{G} \quad , \tag{8.483}$$

sein erster Basisvektor $\mathbf{q}_1^{(D)}$ weist zum aufsteigenden Knoten ☊ der Bahn, der zweite Basisvektor

$$\mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)} \tag{8.484}$$

ergänzt das System zu einem orthonormierten Rechtssystem. Das Argument der Breite

$$u = \omega + \upsilon \tag{8.485}$$

dient als Bahnwinkel. Im Knotensystem hat ein Zustandsvektor somit die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u\right) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u\right) + r\,\dot{u}\left(-\mathbf{q}_1^{(D)}\sin u + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos u\right) + r\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin u\right) \end{aligned} \quad . \tag{8.486}$$

8.14.2 Transformationen zu anderen Systemen

8.14.2.1 Transformationen zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem

Der wichtigste Bezug des Knotensystems ist der zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem. Mit den Zuordnungen $A \to \Omega, B \to i, C \to 0°$, wobei Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens und i die Inklination der Bahnebene gegenüber der Äquatorebene bedeutet, ergeben sich unter Verwendung der Beziehungen aus Abschnitt 6.3.2 die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_1 \cos\Omega + \mathbf{p}_2 \sin\Omega \\ \mathbf{q}_2^{(D)} &= \mathbf{k}_2 = -\mathbf{p}_1 \cos i \sin\Omega + \mathbf{p}_2 \cos i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \sin i \\ \mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{k}_3 = \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \end{aligned} \tag{8.487}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(D)} \cos\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)} \cos i \sin\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)} \sin i \sin\Omega \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(D)} \sin\Omega + \mathbf{q}_2^{(D)} \cos i \cos\Omega - \mathbf{q}_3^{(D)} \sin i \cos\Omega \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_2^{(D)} \sin i + \mathbf{q}_3^{(D)} \cos i \quad . \end{aligned} \tag{8.488}$$

Die Basisvektoren haben die Verknüpfungen

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j^{\ i} \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i = a^j_{\ i} \mathbf{q}_j^{(D)} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \ , \ \mathbf{q}_i^{(D)} \cdot \mathbf{q}_j^{(D)} = \delta_{ij}) \quad , \tag{8.489}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\Omega \\ a_{12} &= \sin\Omega \\ a_{13} &= 0 \\ a_{21} &= -\cos i \sin\Omega \\ a_{22} &= \cos i \cos\Omega \\ a_{23} &= \sin i \\ a_{31} &= \sin i \sin\Omega \\ a_{32} &= -\sin i \cos\Omega \\ a_{33} &= \cos i \quad . \end{aligned} \tag{8.490}$$

Seien die x^i Koordinaten eines Ortsvektors in Frühlingspunkt-bezogenen kartesischen Koordinaten, $y_j^{(D)}$ die entsprechenden Koordinaten im Knotensystem, lauten die Transformationen

$$x^i = a_j^{\ i} y^{(D)j} \quad , \quad y^{(D)j} = a^j_{\ i} x^i \quad . \tag{8.491}$$

Die zugehörigen Variationen der Transformationsmatrix lauten

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{\Omega}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= \dot{\Omega}\, a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= 0 \\
\dot{a}_{21} &= (i)^{\cdot}\, a_{31} - \dot{\Omega}\, a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= (i)^{\cdot}\, a_{32} + \dot{\Omega}\, a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= (i)^{\cdot}\, a_{33} \\
\dot{a}_{31} &= (i)^{\cdot}\, a_{33}\, \sin\Omega - \dot{\Omega}\; a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -(i)^{\cdot}\, a_{33}\, \cos\Omega + \dot{\Omega}\; a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot}\, \sin i
\end{aligned}
\tag{8.492}
$$

bzw. ausführlich

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{\Omega}\, \sin\Omega \\
\dot{a}_{12} &= \dot{\Omega}\, \cos\Omega \\
\dot{a}_{13} &= 0 \\
\dot{a}_{21} &= (i)^{\cdot}\, \sin\Omega\; \sin i - \dot{\Omega}\, \cos i\; \cos\Omega \\
\dot{a}_{22} &= -(i)^{\cdot}\, \cos\Omega\, \sin i - \dot{\Omega}\; \cos i\; \sin\Omega \\
\dot{a}_{23} &= (i)^{\cdot}\, \cos i \\
\dot{a}_{31} &= (i)^{\cdot}\, \sin\Omega\; \cos i + \dot{\Omega}\, \cos\Omega\; \sin i \\
\dot{a}_{32} &= -(i)^{\cdot}\, \cos\Omega\; \cos i + \dot{\Omega}\, \sin\Omega\, \sin i \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot} \sin i
\end{aligned}
\tag{8.493}
$$

Die Variationen der Basisvektoren des Knotensystems haben im Äquatorsystem die Darstellung und umgekehrt

$$
\dot{\mathbf{q}}_j^{(D)} = \dot{a}_j{}^i\, \mathbf{p}_i + a_j{}^i\, \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i\, \mathbf{q}_j^{(D)} + a^j{}_i\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(D)} \quad . \tag{8.494}
$$

Entsprechend haben die Variationen der Koeffizienten zwischen den beiden Systemen die Beziehungen

$$
\dot{x}^i = \dot{a}_j{}^i\, y^{(D)j} + a_j{}^i\, \dot{y}^{(D)j} \quad , \quad \dot{y}^{(D)j} = \dot{a}^j{}_i\, x^i + a^j{}_i\, \dot{x}^i \quad . \tag{8.495}
$$

8.14.2.2 Transformationen zu einem *Hansen*-System

Der Bezug des Knotensystems zum *Hansen* System erfolgt durch Drehung um die Länge σ des aufsteigenden Knotens in der Bahn. Es ergeben sich die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{q}_3^{(I)}
\end{aligned}
\tag{8.496}
$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos\sigma - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin\sigma \\ \mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos\sigma \\ \mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{q}_3^{(D)} \quad .\end{aligned} \tag{8.497}$$

Die zugehörigen Variationen lauten:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\sigma + \dot{\sigma}\left[-\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\sigma\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\sigma + \dot{\sigma}\left[-\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\sigma - \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\sigma\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)}\end{aligned} \tag{8.498}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos\sigma - \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin\sigma + \dot{\sigma}\left[-\mathbf{q}_1^{(D)}\sin\sigma - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos\sigma\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos\sigma + \sigma\left[\mathbf{q}_1^{(D)}\cos\sigma - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin\sigma\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \quad .\end{aligned} \tag{8.499}$$

8.14.3 Der Eigenbewegungsvektor des Knotensystems

8.14.3.1 Der relative Eigenbewegungsvektor des Knotensystems bei Bezug auf das Äquatorsystem

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Knotensystems kann bei Bezug auf das Frühlingspunkt orientierte Äquatorsystem mit Hilfe der Beziehungen (8.490) - (8.494) aus den *Frenet*schen Formeln des Knotenystems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} = {} & \mathbf{q}_2^{(D)}\dot{\Omega}\cos i - \mathbf{q}_3^{(D)}\dot{\Omega}\sin i + \mathbf{q}_2^{(D)}\dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{2j} + \mathbf{q}_3^{(D)}\dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j} \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} = {} & -\mathbf{q}_1^{(D)}\dot{\Omega}\cos i + \mathbf{q}_3^{(D)}(i)^{\cdot} - \mathbf{q}_1^{(D)}\dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{2j} + \mathbf{q}_3^{(D)}\dot{a}_2{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j} \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} = {} & \mathbf{q}_1^{(D)}\dot{\Omega}\sin i - \mathbf{q}_2^{(D)}(i)^{\cdot} - \mathbf{q}_1^{(D)}\dot{a}_1{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j} - \mathbf{q}_2^{(D)}\dot{a}_2{}^i\, p_i{}^j\, a_{3j}\end{aligned} \tag{8.500}$$

erhalten werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \mathbf{q}_1^{(D)}(i)^{\cdot} + \mathbf{q}_2^{(D)}\dot{\Omega}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\dot{\Omega}\cos i + \mathbf{D}_p \quad . \tag{8.501}$$

Aus der Beziehung

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \mathbf{D}_{q^{(D)}p} + \mathbf{D}_p \tag{8.502}$$

wird der relative Eigenbewegungsvektor des Knotensystems bezüglich des Äquatorsystems erhalten:

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}p} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} - \mathbf{D}_p = \mathbf{q}_1^{(D)}(i)^{\cdot} + \mathbf{q}_2^{(D)}\dot{\Omega}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\dot{\Omega}\cos i \quad . \tag{8.503}$$

8.14.3.2 Der absolute Eigenbewegungsvektor des Knotensystems bei Bezug auf ein *Hansen*-System

Die *Frenet*schen Formeln des Knotensystems können aus den Variationen (8.498) mit Hilfe der entsprechenden Formeln des *Hansen* Systems (4.325) den Beziehungen (8.489) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\sigma}\mathbf{q}_2^{(D)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\sin(\zeta-\sigma) \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\dot{\sigma}\mathbf{q}_1^{(D)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\cos(\zeta-\sigma) \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\eta}\left[\mathbf{q}_1^{(D)}\sin(\zeta-\sigma) - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin(\zeta-\sigma)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.504}$$

Mit Einsetzen des Argumentes der Breite $u = \zeta - \sigma$ kann auch geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\sigma}\mathbf{q}_2^{(D)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\sin u \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\dot{\sigma}\mathbf{q}_1^{(D)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\cos u \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\eta}\left[\mathbf{q}_1^{(D)}\sin u - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.505}$$

Aus dem Ansatz

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(D)} = q_j{}^i\,\mathbf{q}_j^{(D)} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} \times \mathbf{q}_j^{(D)} \tag{8.506}$$

mit dem absoluten Systemeigenbewegungsvektor des Knotensystems

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = D^j_{q^{(D)}}\,\mathbf{q}_j^{(D)} \tag{8.507}$$

ergeben sich (ähnlich wie zum Beispiel in den Beziehungen (8.434) und (8.436)) die Zuweisungen

$$D_{q^{(D)}1} = q_{23} = -q_{32} \;\;,\;\; D_{q^{(D)}2} = q_{31} = -q_{13} \;\;,\;\; D_{q^{(D)}3} = q_{12} = -q_{21} \;\;,\;\; q_{jj} = 0 \;\; (j = 1,2,3) \tag{8.508}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Knotensystems in Bezug auf die Basis dieses Systems lautet somit

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_2^{(D)}\sin u + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \quad . \tag{8.509}$$

Er kann somit nicht ohne Kenntnis des zugeordneten *Hansen*-Systems verstanden werden. Werden die Komponenten des Eigenbewegungsvektors des Knotensystems in dieser Form mit der in Formel (8.501) erhaltenen verglichen, ergeben sich wieder die Differentialgleichungen der räumlichen Bewegung in den Systemen (6.150) bzw. (6.151).

8.15 Das Tangenten-bezogene System

Das Tangenten-bezogene System ist ein mitgeführtes Bahnsystem mit der Basis $\mathbf{q}_j^{(T)}$, dessen $\mathbf{q}_1^{(T)}$ – Komponente in Richtung des Radiusvektors weist, die $\mathbf{q}_2^{(T)}$ – Komponente in Richtung des Geschwindigkeitsvektors und die $\mathbf{q}_3^{(T)}$ – Komponente in Richtung der Bahnnormale (siehe Bild 8-22). Die Komponenten dieses Systems stehen im allgemeinen im Gegensatz zu dem vorstehend behandelten mitgeführten Bahnsystem nicht notwendig senkrecht aufeinander.

8.15.1 Tranformationen des Tangentensytems zu anderen Systemen

Das Bezugssystem sei das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem, das als ein fundamentales Bezugssystem mit Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p \equiv 0, \left(\mathbf{p}_i \equiv 0 \left(i = 1,2,3\right)\right)$ aufgefasst sei. In ihm habe der bewegte Körper den Radiusvektor

$$\mathbf{r} \;=\; x^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \;=\; \delta_{ij} \quad . \tag{8.510}$$

Der absolute Geschwindigkeitsvektor ist dann in diesem System dem relativen Geschwindigkeitsvektor gleich:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i . \tag{8.511}$$

Bild 8-22: Das Tangenten-bezogene System

Der diesem Geschwindigkeitsvektor zugeordnete Richtungsvektor werde auf das mitgeführte Koordinatensystem (*Leibniz*system) bezogen. Nach Bild 8-22 ist

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 \cos\gamma + \mathbf{q}_0 \sin\gamma \quad . \tag{8.512}$$

$\mathbf{r}_0$ sei der radiale, $\mathbf{q}_0$ der transversale, sowie $\mathbf{c}_0$ der normale Richtungsvektor, $\mathbf{c}$ der Normalenvektor und G sein Betrag. Das Tangenten-bezogene $\mathbf{q}_j$-System wird dann definiert durch

$$\mathbf{q}_1^{(T)} \;=\; \mathbf{r}_0 \;=\; \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \;=\; \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{8.513}$$

$$\mathbf{q}_2^{(T)} \;=\; \mathbf{v}_1 \;=\; \frac{\dot{\mathbf{r}}_p}{|\dot{\mathbf{r}}_p|} \;=\; \frac{\dot{\mathbf{r}}_p}{V} = \frac{1}{V}\dot{x}^i \mathbf{p}_i \, . \tag{8.514}$$

$$\mathbf{q}_3^{(T)} \;=\; \mathbf{c}_0 \;=\; \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_p}{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_p|} \;=\; \frac{\mathbf{c}}{G} \quad . \tag{8.515}$$

Offenbar gilt allgemein

$$\mathbf{q}_1^{(T)} \cdot \mathbf{q}_2^{(T)} \;=\; \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_1 \cos\gamma \left(\neq \; 0 \right) \tag{8.516}$$

$$\mathbf{q}_1^{(T)} \cdot \mathbf{q}_3^{(T)} \;=\; \mathbf{q}_2^{(T)} \cdot \mathbf{q}_3^{(T)} \;=\; 0 \quad , \tag{8.517}$$

wobei $\mathbf{q}_1^{(T)} \cdot \mathbf{q}_2^{(T)} = 0$ nur in Ausnahmefällen eintreten kann, wenn nämlich der Tangentenvektor senkrecht auf dem Radiusvektor steht. Ausgeschlossen sei der Fall sinγ=0, der einer geradlinigen Bewegung in Richtung des Radiusvektors oder diesem entgegen entspricht, also keine räumliche Bewegung beschreibt.

Die Transformation vom Äquatorsystem in das Tangenten-bezogene System

$$\mathbf{q}_j^{(T)} \;=\; a_j{}^i \, \mathbf{p}_i \tag{8.518}$$

hat die Transformationskoeffizienten

$$a_1{}^i \;=\; \frac{x^i}{r} \quad , \quad a_2{}^i \;=\; \frac{\dot{x}^i}{V} \quad , \quad a_3{}^i \;=\; \frac{c^i}{G} \quad , \tag{8.519}$$

wobei die c^i aus

$$G\mathbf{c}_0 \;=\; c^i \, \mathbf{p}_i \;=\; \left(x_2\dot{x}_3 - x_3\,\dot{x}_2\right)\mathbf{p}_1 + \left(x_3\dot{x}_1 - x_1\,\dot{x}_3\right)\mathbf{p}_2 + \left(x_1\dot{x}_2 - x_2\,\dot{x}_1\right)\mathbf{p}_3 \tag{8.520}$$

bekannt sind. Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{p}_i \;=\; b_i{}^j \, \mathbf{q}_j^{(T)}$$

werden die $b_i{}^j$ aus den Formeln (6.16) (in Abschnitt (6.1.2) berechnet. Nach den in den Formeln (8.180) gegebenen Definitionen der $a_j{}^i$ ist

$$\det\left(a_i{}^j\right) \;=\; \frac{c_i\, c^i}{r\,V\,G} \;=\; \frac{G}{rV} \quad . \tag{8.521}$$

Die Koeffizienten der Umkehrabbildung lauten damit explizit:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{r}{G^2}\left(c_3\,\dot{x}_2 - c_2\,\dot{x}_3\right) \\
b_{12} &= \frac{V}{G^2}\left(c_2\,x_3 - c_3\,x_2\right) \\
b_{13} &= \frac{c_1}{G} \;=\; a_{31} \\
b_{21} &= \frac{r}{G^2}\left(c_1\,\dot{x}_3 - c_3\,\dot{x}_1\right) \\
b_{22} &= \frac{V}{G^2}\left(c_3\,x_1 - c_1\,x_3\right) \\
b_{23} &= \frac{c_2}{G} \;=\; a_{32} \\
b_{31} &= \frac{r}{G^2}\left(c_2\,\dot{x}_1 - c_1\,\dot{x}_2\right) \\
b_{32} &= \frac{V}{G^2}\left(c_1\,x_2 - c_2\,x_1\right) \\
b_{33} &= \frac{c_3}{G} \;=\; a_{33} \quad .
\end{aligned} \tag{8.522}$$

Die Umkehrabbildung der Basen lautet somit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \frac{r}{G^2}\left(c_3\,\dot{x}_2 - c_2\,\dot{x}_3\right)\mathbf{q}_1^{(T)} + \frac{V}{G^2}\left(c_2\,x_3 - c_3\,x_2\right)\mathbf{q}_2^{(T)} + \frac{c_1}{G}\,\mathbf{q}_3^{(T)} \\
\mathbf{p}_2 &= \frac{r}{G^2}\left(c_1\,\dot{x}_3 - c_3\,\dot{x}_1\right)\mathbf{q}_1^{(T)} + \frac{V}{G^2}\left(c_3\,x_1 - c_1\,x_3\right)\mathbf{q}_2^{(T)} + \frac{c_2}{G}\,\mathbf{q}_3^{(T)} \\
\mathbf{p}_3 &= \frac{r}{G^2}\left(c_2\,\dot{x}_1 - c_1\,\dot{x}_2\right)\mathbf{q}_1^{(T)} + \frac{V}{G^2}\left(c_1\,x_2 - c_2\,x_1\right)\mathbf{q}_2^{(T)} + \frac{c_3}{G}\,\mathbf{q}_3^{(T)} \quad .
\end{aligned} \tag{8.523}$$

Damit ist auch die Transformation der Komponenten eines beliebigen Vektors

$$\mathbf{y} = y^j\,\mathbf{p}_i = z^j\,\mathbf{q}_j^{(T)} \tag{8.524}$$

möglich aus

$$z^j = y^i\,b_i{}^j \tag{8.525}$$

und umgekehrt

$$y^i = z^j\,a_j{}^i \quad . \tag{8.526}$$

Für die Transformation der Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{z}^j = \dot{y}^i\,b_i{}^j + y^i\,\dot{b}_i{}^j \tag{8.527}$$

$$\dot{y}^i = \dot{z}^j\,a_j{}^i + z^j\,\dot{a}_j{}^i \tag{8.528}$$

werden die $\dot{b}_i{}^j$ und $\dot{a}_j{}^i$ benötigt. Aus den Formeln (8.180) folgt zunächst

$$\dot{a}_1{}^i = \frac{\dot{x}^i\,r - x^i\,\dot{r}}{r^2} \quad , \quad \dot{a}_2{}^i = \frac{\ddot{x}^i\,V - \dot{x}^i\,\dot{V}}{V^2} \quad , \quad \dot{a}_3{}^i = \frac{\dot{c}^i\,G - c^i\,\dot{G}}{G^2} \tag{8.529}$$

mit

$$r\,\dot{r} = \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} \quad , \quad V\dot{V} = \ddot{x}^i\,x_i \quad , \quad G\dot{G} = \dot{c}^i\,c_i \tag{8.530}$$

und es wird

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1 &= \dot{x}_2\,\ddot{x}_3 - \dot{x}_3\,\ddot{x}_2 \\
\dot{c}_2 &= \dot{x}_3\,\ddot{x}_1 - \dot{x}_1\,\ddot{x}_3 \\
\dot{c}_3 &= \dot{x}_2\,\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\,\ddot{x}_1 \quad .
\end{aligned} \tag{8.531}$$

Hierfür sind die $\ddot{x}^i$ nicht unmittelbar bekannt. Wenn die die Bewegung beschreibende Bewegungsgleichung bekannt ist, können aus ihr die $\ddot{x}^i$ berechnet werden. Gewöhnlich sind aus einer Ephemeridenrechnung nur die x^i, $\dot{x}^i$ bekannt, so dass die $\ddot{x}^i$ näherungsweise aus den Differenzengleichungen

$$\ddot{x}^i \approx \frac{\dot{x}^i{}_2 - \dot{x}^i{}_1}{x^i{}_2 - x^i{}_1} \tag{8.532}$$

berechnet werden müssen. Die $\dot{b}_i{}^j$ sind dann aus den Formeln (6.20) zu berechnen.

Das Tangenten-bezogene System hat eine Metrik, die von der Einheitsmetrik abweicht, da nicht alle Basisvektoren dieses Systems aufeinander senkrecht stehen. Der kovariante Metriktensor dieses Systems lautet

$$\left(g_{ij}\right) \;=\; \left(\mathbf{q}_i^{(T)} \cdot \mathbf{q}_j^{(T)}\right) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{rV} & 0 \\ \dfrac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{rV} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{8.533}$$

Das äquatoriale $\mathbf{p}_i$-System ist orthonormiert, kovariante und kontravariante Basis dieses Systems sind somit nach Gleichung (7.17):

$$\mathbf{p}_i \;=\; \mathbf{p}^i \quad .$$

Das Tangenten-bezogene System ist im Allgemeinen nicht orthonormiert, da Radius- und Tangentenvektor nicht notwendig zueinander orthogonal sind. Somit sind die kovariante und die kontravariante Basis im Allgemeinen verschieden. Man kann die kontravariante Basis aus den Formeln (7.32) mit Hilfe der Transformationskoeffizienten b_{ij} berechnen:

$$\mathbf{q}^{(T)j} \;=\; b_i{}^j\, \mathbf{p}^i \quad .$$

Im Einzelnen gilt also für die kontravariante Basis

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(T)1} &= \frac{r}{G^2}\left[\left(c_3\,\dot{x}_2 - c_2\,\dot{x}_3\right)\mathbf{p}_1 + \left(c_1\,\dot{x}_3 - c_3\,\dot{x}_1\right)\mathbf{p}_2 + \left(c_2\,\dot{x}_1 - c_1\,\dot{x}_2\right)\mathbf{p}_3\right] \\ \mathbf{q}^{(T)2} &= \frac{V}{G^2}\left[\left(c_2\,x_3 - c_3\,x_2\right)\mathbf{p}_1 + \left(c_3\,x_1 - c_1\,x_3\right)\mathbf{p}_2 + \left(c_1\,x_2 - c_2\,x_1\right)\mathbf{p}_3\right] \\ \mathbf{q}^{(T)3} &= \frac{1}{G}\,c^i\,\mathbf{p}_i \;=\; \mathbf{c}_0 \quad . \end{aligned} \tag{8.534}$$

Diese Beziehungen können, da im dreidimensionalen Raum gültig, auch aus den Formeln (7.13) mit der Determinante

$$\left|\mathbf{q}_1^{(T)}\mathbf{q}_2^{(T)}\mathbf{q}_3^{(T)}\right| \;=\; \frac{G}{rV}$$

berechnet werden. Der zugehörige kontravariante Metriktensor hat die Koeffizienten

$$\begin{aligned} g^{11} &= \mathbf{q}^{(T)1}\cdot\mathbf{q}^{(T)1} &&= \frac{r^2V^2}{G^2} \\ g^{12} &= \mathbf{q}^{(T)1}\cdot\mathbf{q}^{(T)2} &&= g^{21} = -\frac{rV}{G^2}\,\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}} \\ g^{13} &= \mathbf{q}^{(T)1}\cdot\mathbf{q}^{(T)3} &&= g^{31} = 0 \\ g^{22} &= \mathbf{q}^{(T)2}\cdot\mathbf{q}^{(T)2} &&= \frac{r^2V^2}{G^2} \\ g^{23} &= \mathbf{q}^{(T)2}\cdot\mathbf{q}^{(T)3} &&= g^{32} = 0 \\ g^{33} &= \mathbf{q}^{(T)3}\cdot\mathbf{q}^{(T)3} &&= 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.535}$$

Diese Ergebnisse können mit den Formeln (7.16) mit der Determinante

$$D_g \;=\; 1-\frac{(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2}{\mathbf{r}^2\dot{\mathbf{r}}^2}$$

berechnet werden. Zur Probe sieht man, dass

$$g^{ij}\,g_{jl} \;=\; \delta^i{}_l$$

erfüllt ist. Da die $\dot{a}_k{}^i$ und die $\dot{b}_i{}^j$ bekannt sind und da $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}^i$, können auch die Variationen der kontravarianten Basen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^{(T)k} &= \dot{b}_i{}^k\,\mathbf{p}^i \;\;+ b_i{}^k\,\dot{\mathbf{p}}^i\\ \dot{\mathbf{p}}^i &= \dot{a}_k{}^i\,\mathbf{q}^{(T)k} + a_k{}^i\,\dot{\mathbf{q}}^{(T)k}\end{aligned} \tag{8.536}$$

berechnet werden. Wenn die $\mathbf{p}_i$ als fundamentale Basis betrachtet werden können, ist notwendig

$$b_i{}^k\,\dot{\mathbf{p}}^i \;=\; 0 \quad .$$

Der beliebige Vektor $\mathbf{y} = y_i\,\mathbf{p}^i = z_j\,\mathbf{q}^{(T)j}$ hat nach den Formeln (7.35) mit $y_i = y^i$ die Beziehungen seiner Koeffizienten bei Bezug auf die kontravariante Basis

$$\begin{aligned}z_j &= a_j{}^i\,y_i\\ \dot{z}_j &= \dot{a}_j{}^i\,y_i + a_j{}^i\,\dot{y}_i\\ y_i &= b_i{}^j\,z_j\\ \dot{y}_i &= \dot{b}_i{}^j\,z_j + b_i{}^j\,\dot{z}_j \quad .\end{aligned} \tag{8.537}$$

8.15.2 Die Eigenbewegung des Tangenten-orientierten Bahnsystems

Das Tangentenbezogene System ist ein schiefwinkliges System, was das Rechnen gegenüber einem orthonormierten System wesentlich erschwert. Es wird daher sinnvoll sein, möglichst auf ein orthonormiertes System zurückzugreifen. Im Fall des Tangenten-bezogenen Systems wird dies das (mitgeführte) *Leibniz*-System sein. Aus der Beziehung für den Tangentenrichtungsvektor (8.512) folgt

$$\mathbf{q}_0 = -\frac{1}{\sin\gamma}\left[\mathbf{r}_0\cos\gamma - \mathbf{v}_1\right] \quad . \tag{8.538}$$

Mit Hilfer der *Frenet*schen Formeln des *Leibniz*-Systems (8.369) ergibt sich die Eigenbewegung der Basisvektoren des Tangenten-bezogenen Systems (der Fall einer Bewegung in Richtung des Radiusvektors wird wieder ausgeschlossen, so dass stets $\sin\gamma \neq 0$ angenommen werden kann)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 &= -\frac{\dot{\zeta}}{\sin\gamma}\left[\mathbf{r}_0\cos\gamma - \mathbf{v}_1\right]\\ \dot{\mathbf{v}}_1 &= -\mathbf{r}_0\,\frac{\dot{\zeta}+\dot{\gamma}}{\sin\gamma} + \;\mathbf{v}_1\left(\dot{\zeta}+\dot{\gamma}\right)\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \;+\mathbf{c}_0\;\dot{\eta}\,\sin\gamma\\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= \frac{\dot{\eta}}{\sin\gamma}\left[\mathbf{r}_0\cos\gamma - \mathbf{v}_1\right] \quad .\end{aligned} \tag{8.539}$$

Wie in den vorstehenden Abschnitten sei die Koeffizientendarstellung eines Ortsvektors bezogen auf das mitgeführte *Leibniz*-System bzw. das Tangenten-bezogene System in der Form

$$\mathbf{r} = y^i_{q^{(L)}}\, \mathbf{q}^{(L)}_i = y^i_{q^{(T)}}\, \mathbf{q}^{(T)}_i \tag{8.540}$$

Gegeben. Der absolute Geschwindigkeitsvektor hat die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}_{q^{(T)}1}\, \mathbf{r}_0 + \dot{y}_{q^{(T)}2}\, \mathbf{v}_1 + \dot{y}_{q^{(T)}3}\, \mathbf{c}_0 + y_{q^{(T)}1}\, \dot{\mathbf{r}}_0 + y_{q^{(T)}2}\, \dot{\mathbf{v}}_1 + y_{q^{(T)}3}\, \dot{\mathbf{c}}_0 \quad . \tag{8.541}$$

Seine Koeffizienten können auf die entsprechenden Koeffizienten des *Leibniz*-Systems bezogen werden:

$$\begin{aligned}
y_{q^{(T)}1} &= y_{q^{(L)}1} - y_{q^{(L)}2}\, \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \;,\; y_{q^{(T)}2} = y_{q^{(L)}2}\, \frac{1}{\sin\gamma} \;,\; y_{q^{(T)}3} = y_{q^{(L)}3} \\
\dot{y}_{q^{(T)}1} &= \dot{y}_{q^{(L)}1} - \dot{y}_{q^{(L)}2}\, \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + y_{q^{(L)}2}\, \frac{\dot{\gamma}}{\sin^2\gamma} \;, \\
\dot{y}_{q^{(T)}2} &= \dot{y}_{q^{(L)}2}\, \frac{1}{\sin\gamma} + y_{q^{(L)}2}\, \frac{\dot{\gamma}\cos\gamma}{\sin^2\gamma} \;,\; \dot{y}_{q^{(T)}3} = \dot{y}_{q^{(L)}3} \quad .
\end{aligned} \tag{8.542}$$

Wird ein Eigenbewegungsvektor des Tangenten-bezogenen Systems gewünscht, ist es sinnvoll mit diesen Transformationen auf den des *Leibniz*-Systems zurückzugreifen.

8.16 Satellitenzentrierte Systeme

Satellitenzentrierte Systeme sind für die Satellitentechnik von zentraler Bedeutung. Auf diese Systeme werden die Struktur eines Satelliten, die Sonnenausleger, Sensoren, Beobachtungsrichtungen, Sternsensoren, die Lageorientierung, die Lagebestimmung, Änderungen der Lage und vieles mehr bezogen. In diesem Abschnitt wird zunächst ein satellitenzentriertes Basissystem definiert, auf das jedes beliebige andere satellitenzentrierte System bezogen werden kann. Dieser Bezug kann durch Angabe spezieller Orientierungsgrößen des neuen Systems im Basissystem gegeben sein oder durch Drehung um eine Folge von *Euler*winkeln erfolgen.

8.16.1 Satellitenzentriertes Basissystem

Als Bezug für die Untersuchung satellitenzentrierter Systeme werde ein lokales Horizontalsystem gewählt, dessen Basisebene nominal senkrecht zum geozentrischen Ortsvektor **r** des Satelliten gerichtet sei. Der nominale Normalenvektor dieser Ebene ist also wie der Ortsvektor gerichtet: $\mathbf{r}_0 =: \mathbf{q}^{(Sx)}_3$. Die Bezugsrichtung in dieser Ebene ist durch den transversalen Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 =: \mathbf{q}^{(Sx)}_1$ der Satellitenbewegung festgelegt. Das System sei wie bei Horizontalsystemen üblich links orientiert, so dass die dritte Richtung des Systemdreibeins entgegengesetzt dem Bahnnormalenvektor

$$\mathbf{q}^{(Sx)}_2 := \mathbf{q}^{(Sx)}_1 \times \mathbf{q}^{(Sx)}_3 = \mathbf{q}_0 \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{q}^{(Sx)}_1 = \mathbf{q}_0 \quad , \quad \mathbf{q}^{(Sx)}_3 = \mathbf{r}_0 \tag{8.543}$$

festgelegt wird.

Vom Satelliten aus werde ein beliebiges Objekt mit satellitenzentriertem Ortsvektor **r** beobachtet. Im satellitenzentrierten Basissystem $\mathbf{q}^{(Sx)}_j$ habe dieser Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i\, \mathbf{q}^{(Sx)}_i \quad , \quad |\mathbf{r}| =: r \quad . \tag{8.544}$$

Die Richtung dieses Vektors werde durch das lokale Azimut A_x und die Höhe („Elevation“) h_x im satellitenorientierten Horizontalsystem festgelegt (vgl. Bild 8-23)

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos h_x \cos A_x \\ x_2 &= r\cos h_x \sin A_x \\ x_3 &= r\sin h_x \quad . \end{aligned} \tag{8.545}$$

Bild 8-23: Das satellitenorientierte Horizontalsystem (satellitenorientiertes Basissystem, „x-System“), S – Satellitenort (Referenzort für Satellitenschwerpunkt), E – Richtung zum Erdmittelpunkt

Die Variationen des kartesischen Systems sind

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\dot{r}}{r} x_1 - \dot{h}_x x_3 \cos A_x - \dot{A}_x x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\dot{r}}{r} x_2 - \dot{h}_x x_3 \sin A_x + \dot{A}_x x_1 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\dot{r}}{r} x_3 + \dot{h}_x r\cos h_x \end{aligned} \tag{8.546}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x^i \dot{x}_i}{r} \\ \dot{A}_x &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2 \cos^2 h_x} \quad , \quad (r\cos h_x > 0) \\ \dot{h}_x &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3\right)\cos A_x - \left(x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2\right)\sin A_x\right] \quad , \quad (r > 0) \quad . \end{aligned} \tag{8.547}$$

Der Pol P_x dieses satellitenzentrierten Basissystems hat die Winkel Azimut A_{Pxx} und Höhe h_{Pxx}

$$A_{Pxx} = 0° \quad , \quad h_{Pxx} = 90° \quad . \tag{8.548}$$

Die $\mathbf{q}_{x,1}$ - und die $\mathbf{q}_{x,2}$ -Achse spannen den lokalen Horizont auf. Der Ursprung der Azimutzählung wird durch die *O*-Richtung O_x mit den Koordinaten

$$A_{Oxx} = 0° \quad , \quad h_{Oxx} = 90° \tag{8.549}$$

festgelegt.

8.16.2 Die Eigenbewegung des Satelliten-zentrierten Basissystems

Um mit dem hier vorgestellten Satelliten-zentrierten System im Rahmen einer Satellitenbewegung arbeiten zu können, wird es zunächst auf das mitgeführte (*Leibniz*-Ssystem) bezogen. Aus den Zuordnungen (8.543) mit der allgemeinen Formulierung (4.205) können die Variationen der Basisvektoren des Satelliten-zentrierten Systems berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(Sx)} &= \dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 = -\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_3^{(Sx)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_2^{(Sx)} = D_{q^{(Sx)}3}\,\mathbf{q}_2^{(Sx)} - D_{q^{(Sx)}2}\,\mathbf{q}_3^{(Sx)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(Sx)} &= -\dot{\mathbf{c}}_0 = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(Sx)} = -D_{q^{(Sx)}3}\,\mathbf{q}_1^{(Sx)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(Sx)} &= \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_1^{(Sx)} = D_{q^{(Sx)}2}\,\mathbf{q}_1^{(Sx)} \quad .
\end{aligned} \tag{8.550}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Satelliten-zentrierten Systems hat somit die Komponenten

$$D_{q^{(Sx)}1} = 0 \;,\; D_{q^{(Sx)}2} = \dot{\zeta} \;,\; D_{q^{(Sx)}3} = -\dot{\eta} \tag{8.551}$$

und lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(Sx)}} = \dot{\zeta}\mathbf{q}_2^{(Sx)} - \dot{\eta}\;\mathbf{q}_3^{(Sx)} = -\dot{\zeta}\mathbf{c}_0 - \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 = -\mathbf{D}_{q^{(L)}} \quad . \tag{8.552}$$

Er stimmt also bis auf die Richtung mit dem absoluten Eigenbewegungsvektor des *Leibniz*-Systems überein, setzt also die Kenntnis des zugeordneten *Hansen*-Systems voraus. Der relative Eigenbewegungsvektor des Satelliten-zentrierten Systems in Bezug auf das *Leibniz*-System lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(Sx)}q^{(L)}} = -2\mathbf{D}_{q^{(L)}} = 2\,\mathbf{D}_{q^{(Sx)}} \quad . \tag{8.553}$$

Um den relativen Eigenbewegungsvektor des *Leibniz*-Systems in Bezug auf das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem herzuleiten, wird zunächst die Transformation zwischen diesen Systemen untersucht. Dies geschieht durch Rückgriff auf die Beziehung des *Leibniz*-Sytems zum Äquatorsystem nach den Formeln (8.374) - (8.380). Die Transformationen der Basen seien durch die Beziehungen

$$\mathbf{q}_j^{(Sx)} =: a_j^{(Sx)i}\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^{(Sx)j}{}_i\,\mathbf{q}_j^{(Sx)} \tag{8.554}$$

gegeben, wobei die Transformationsparameter folgende Beziehungen haben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(Sx)} &= \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_2^{(L)} = a_2^i\,\mathbf{p}_i = a_1^{(Sx)i}\,\mathbf{p}_i \\
\mathbf{q}_2^{(Sx)} &= -\mathbf{c}_0 = -\mathbf{q}_3^{(L)} = -a_3^i\,\mathbf{p}_i = a_2^{(Sx)i}\,\mathbf{p}_i \\
\mathbf{q}_3^{(Sx)} &= \mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_1^{(L)} = a_1^i\,\mathbf{p}_i = a_3^{(Sx)i}\,\mathbf{p}_i \quad .
\end{aligned} \tag{8.555}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor lautet dann

$$\mathbf{D}_{q^{(Sx)}p} = \mathbf{D}_{q^{(Sx)}} - \mathbf{D}_p = \left(D_{q^{(Sx)}p}{}^{j} - D_p^i \, a^{(Sx)j}{}_i \right) \mathbf{q}_j^{(Sx)} \quad . \tag{8.556}$$

Er kann als Zwischensschritt über das *Leibniz*-System auf das Äquatorsystem bezogen werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(Sx)}p} = \mathbf{D}_{q^{(Sx)}q^{(L)}} + \mathbf{D}_{q^{(L)}p} = D_{q^{(Sx)}p}{}^{j} \, \mathbf{q}_j^{(Sx)} \quad . \tag{8.557}$$

Die Komponenten sind

$$\begin{aligned} D_{q^{(Sx)}p1} &= -D_p{}^i \, a_{2i} \\ D_{q^{(Sx)}p2} &= -\dot{\zeta} - D_p{}^i \, a_{3i} \\ D_{q^{(Sx)}p2} &= -\dot{\eta} - D_p{}^i \, a_{1i} \quad , \end{aligned} \tag{8.558}$$

bzw. mit den Gleichungen (8.385) auch

$$\begin{aligned} D_{q^{(Sx)}p1} &= -(i)^{\cdot} \sin u + \dot{\Omega} \sin i \cos u \\ D_{q^{(Sx)}p2} &= -2\dot{\zeta} + \dot{\Omega} \cos i + \dot{u} \\ D_{q^{(Sx)}p2} &= -2\dot{\eta} + (i)^{\cdot} \cos u + \dot{\Omega} \sin i \sin u \quad . \end{aligned} \tag{8.559}$$

8.16.3 Relative Orientierung zweier Systeme zueinander

Auf das zuvor untersuchte *x-System* genannte System als Basissystem kann ein beliebig gedrehtes ebenfalls Satelliten-zentriertes *y-System* bezogen werden. Dazu werden in den folgenden beiden Abschnitten zwei Möglichkeiten ausführlich vorgestellt.

8.16.3.1 Bezug des y-Systems auf das x-System

Das y-System sei durch seinen Pol P_y und Ursprung O_y gegeben. Pol und Ursprung des y-Systems haben in Bezug auf das x-System die Koordinaten (vgl. Bild 8-25 auf Seite 421)

$$P_y \left(A_{Pyx}, h_{Pyx} \right) \quad , \quad O_y \left(A_{Oyx}, h_{Oyx} \right) \quad . \tag{8.560}$$

Damit ist das y-System eindeutig festgelegt. Der Schnittpunkt K („Knoten“) der Hauptebenen (=„Horizontebenen“) der beiden Systeme hat die Koordinaten

$$\left(A_{Kx}, h_{Kx} \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(A_{Ky}, h_{Ky} \right) \quad \text{mit} \quad h_{Kx} = h_{Ky} = 0° \quad , \tag{8.561}$$

wobei nach Bild 8-25 für das Azimut des Knotens im y-System die Beziehung

$$A_{Kx} = A_{Pyx} - 90° \tag{8.562}$$

besteht.

Die Basisebenen der beiden Systeme sind gegeneinander um den Winkel („Inklination“)

$$90° - h_{Pyx} \tag{8.563}$$

geneigt. Die Beziehungen zwischen den Systemen ergeben sich nach Bild 8-25 aus

$$\begin{aligned} \cos h_{Pyx} \sin A_{Ky} &= \sin h_{Oyx} \\ \sin h_{Pyx} \sin A_{Ky} &= -\cos h_{Oyx} \cos \left(A_{Pyx} - A_{Oyx} \right) \\ \cos A_{Ky} &= \cos h_{Oyx} \sin \left(A_{Pyx} - A_{Oyx} \right) \end{aligned} \tag{8.564}$$

und für die relativen Variationen der beiden Systeme zueinander

$$\begin{aligned}\dot{A}_{Ky} &= \dot{h}_{Oyx}\left\{\cos A_{Ky}\left[\cos\left(A_{Pyx}-A_{Oyx}\right)\sin h_{Oyx}\sin h_{Pyx}+\cos h_{Oyx}\cos h_{Pyx}\right]+\right.\\ &\qquad\left.+\sin A_{Ky}\sin\left(A_{Pyx}-A_{Oyx}\right)\sin h_{Oyx}\right\}+\\ &\quad+\left(\dot{A}_{Pyx}-\dot{A}_{Oyx}\right)\sin h_{Pyx}\end{aligned} \tag{8.565}$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_{Pyx}\sin A_{Ky} &= \dot{h}_{Oyx}\left[\cos\left(A_{Pyx}-A_{Oyx}\right)\sin h_{Oyx}\cos h_{Pyx}-\cos h_{Oyx}\sin h_{Pyx}\right]+\\ &\quad+\left(\dot{A}_{Pyx}-\dot{A}_{Oyx}\right)\cos h_{Pyx}\cos A_{Ky}\quad .\end{aligned} \tag{8.566}$$

Bild 8-24: Die Winkelbeziehungen zwischen y-System und x-System

Zu ihrer Berechnung müssen die Variationen der Parameter $\dot{h}_{Oyx}$, $\dot{A}_{Pyx}$ und $\dot{A}_{Oyx}$ vorgegeben sein. Ferner gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\dot{A}_{Kx} &= \dot{A}_{Pyx}\\ \dot{A}_{Ky} &= \dot{A}_{Pxy}\\ \dot{h}_{Pxy} &= \dot{h}_{Pyx}\quad .\end{aligned} \tag{8.567}$$

Bezug des x-Systems auf das y-System

Pol P_x und Ursprung O_x des x-Systems haben in Bezug auf das y-System die Koordinaten (vgl. Bild 8-26 auf Seite 421)

$$P_x\left(A_{Pxy},h_{Pxy}\right)\quad ,\quad O_x\left(A_{Oxy},h_{Oxy}\right)\quad . \tag{8.568}$$

Für das Azimut des Knotens zwischen den Hauptebenen der beiden Systeme gilt die Beziehung zum Azimut des Pols P_x im y-System

$$A_{Ky} = A_{Pxy} + 90° \quad . \tag{8.569}$$

Ferner ist offenbar

$$h_{Pxy} = h_{Pyx} \quad . \tag{8.570}$$

Die Größen sind über das System

$$\begin{aligned} \cos h_{Pxy} \sin A_{Kx} &= \sin h_{Oxy} \\ \sin h_{Pxy} \sin A_{Kx} &= \cos h_{Oxy} \cos\left(A_{Pxy} - A_{Oxy}\right) \\ \cos A_{Kx} &= -\cos h_{Oxy} \sin\left(A_{Pxy} - A_{Oxy}\right) \end{aligned} \tag{8.571}$$

verknüpft. Zwei der Größen $A_{Pxy}, h_{Pxy}, A_{Oxy}, h_{Oxy}, A_{Kx}$ können daraus berechnet werden, wenn die übrigen zwei bekannt sind.

Bild 8-25: Zur Darstellung des y-Systems im x-System

Bild 8-26: Zur Darstellung des x-Systems im y-System

Für die Variationen der Systeme zueinander ergeben sich in diesem Fall

$$\begin{aligned}\dot{A}_{Kx} &= \dot{h}_{Oxy}\left\{\cos A_{Kx}\left[-\cos\left(A_{Pxy}-A_{Oxy}\right)\sin h_{Oxy}\sin h_{Pxy}+\cos h_{Oxy}\cos h_{Pxy}\right]+\right.\\ &\quad\left.+\sin A_{Kx}\sin\left(A_{Pxy}-A_{Oxy}\right)\sin h_{Oxy}\right\}+\\ &\quad+\left(\dot{A}_{Pxy}-\dot{A}_{Oxy}\right)\sin h_{Pxy}\end{aligned} \tag{8.572}$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_{Pxy}\sin A_{Kx} &= -\dot{h}_{Oxy}\left[\cos\left(A_{Pxy}-A_{Oxy}\right)\cos h_{Pxy}\sin h_{Oxy}+\sin h_{Pxy}\cos h_{Oxy}\right]+\\ &\quad+\left(\dot{A}_{Pxy}-\dot{A}_{Oxy}\right)\cos A_{Kx}\cos h_{Pxy}\quad .\end{aligned} \tag{8.573}$$

Nach Vorgabe der Variationen $\dot{h}_{Oxy}$ sowie $\dot{A}_{Pxy}$ und $\dot{A}_{Oxy}$ können somit die Variationen $\dot{A}_{Kx}$ und $\dot{h}_{Pxy}$ berechnet werden. Mit Formel (8.208) ist dann auch bekannt

$$\dot{A}_{Pxy} = \dot{A}_{Kx} \quad . \tag{8.574}$$

8.16.3.2 Umrechnung von Richtungskomponenten

Die Umrechnungsformeln für eine Richtung $S\left[A_x,h_x\right]\Leftrightarrow S\left[A_y,h_y\right]$ lauten dann mit dem x-System als Bezugssystem

$$\begin{aligned}\left(A_x,h_x\right) &\Rightarrow \left(A_y,h_y\right)\\ \cos\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y &= \sin\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x\\ \sin\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y &= -\cos\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x\sin h_{Pyx}+\sin h_x\cos h_{Pyx}\\ \sin h_y &= \cos\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x\cos h_{Pyx}+\sin h_x\sin h_{Pyx}\end{aligned} \tag{8.575}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\cos A_y\cos h_y &= -\cos A_x\cos h_x\left(\sin h_{Pyx}\sin A_{Ky}\cos A_{Pyx}-\cos A_{Ky}\sin A_{Pyx}\right)-\\ &\quad-\sin A_x\cos h_x\left(\sin h_{Pyx}\sin A_{Ky}\sin A_{Pyx}+\cos A_{Ky}\cos A_{Pyx}\right)+\\ &\quad+\sin h_x\cos h_{Pyx}\sin A_{Ky}\\ \sin A_y\cos h_y &= \cos A_x\cos h_x\left(\sin h_{Pyx}\cos A_{Ky}\cos A_{Pyx}+\sin A_{Ky}\sin A_{Pyx}\right)+\\ &\quad+\sin A_x\cos h_x\left(\sin h_{Pyx}\cos A_{Ky}\sin A_{Pyx}-\sin A_{Ky}\cos A_{Pyx}\right)-\\ &\quad-\sin h_x\cos h_{Pyx}\cos A_{Ky}\\ \sin h_y &= \cos A_x\cos h_x\cos h_{Pyx}\cos A_{Pyx}+\\ &\quad+\sin A_x\cos h_x\cos h_{Pyx}\sin A_{Pyx}+\\ &\quad+\sin h_x\sin h_{Pyx}\end{aligned} \tag{8.576}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\left(A_y,h_y\right) &\Rightarrow \left(A_x,h_x\right)\\ \cos\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x &= -\sin\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y\sin h_{Pyx}+\sin h_y\cos h_{Pyx}\\ \sin\left(A_{Pyx}-A_x\right)\cos h_x &= \cos\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y\\ \sin h_x &= \sin\left(A_{Ky}-A_y\right)\cos h_y\cos h_{Pyx}+\sin h_y\sin h_{Pyx}\end{aligned} \tag{8.577}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos A_x \cos h_x &= -\cos A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pyx} \cos A_{Pyx} \sin A_{Ky} - \sin A_{Pyx} \cos A_{Ky}\right) + \\
&\quad + \sin A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \cos A_{Ky} + \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky}\right) + \\
&\quad + \sin h_y \cos h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \\
\sin A_x \cos h_x &= -\cos A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} + \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky}\right) + \\
&\quad + \sin A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \cos A_{Ky} - \cos A_{Pyx} \sin A_{Ky}\right) - \\
&\quad + \sin h_y \cos h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \\
\sin h_x &= \cos A_y \cos h_y \cos h_{Pyx} \sin A_{Ky} - \\
&\quad - \sin A_y \cos h_y \cos h_{Pyx} \cos A_{Ky} + \\
&\quad + \sin h_y \sin h_{Pyx}
\end{aligned} \tag{8.578}$$

sowie mit dem y-System als Bezugssystem

$$\begin{aligned}
\left(A_x, h_x\right) &\Rightarrow \left(A_y, h_y\right) \\
\cos\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y &= -\sin\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x \sin h_{Pyx} + \sin h_x \cos h_{Pyx} \\
\sin\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y &= \cos\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x \\
\sin h_y &= \cos\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x \cos h_{Pyx} + \sin h_x \sin h_{Pyx}
\end{aligned} \tag{8.579}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\cos A_y \cos h_y &= \cos A_x \cos h_x \left(\sin h_{Pyx} \cos A_{Pxy} \sin A_{Kx} - \sin A_{Pxy} \cos A_{Kx}\right) - \\
&\quad - \sin A_x \cos h_x \left(\sin h_{Pyx} \cos A_{Pxy} \cos A_{Kx} + \sin A_{Pxy} \sin A_{Kx}\right) + \\
&\quad + \sin h_x \cos h_{Pyx} \cos A_{Pxy} \\
\sin A_y \cos h_y &= \cos A_x \cos h_x \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pxy} \sin A_{Kx} + \cos A_{Pxy} \cos A_{Kx}\right) - \\
&\quad - \sin A_x \cos h_x \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pxy} \cos A_{Kx} - \cos A_{Pxy} \sin A_{Kx}\right) + \\
&\quad + \sin h_x \cos h_{Pyx} \sin A_{Pxy} \\
\sin h_y &= -\cos A_x \cos h_x \cos h_{Pyx} \sin A_{Kx} + \\
&\quad + \sin A_x \cos h_x \cos h_{Pyx} \cos A_{Kx} + \\
&\quad + \sin h_x \sin h_{Pyx}
\end{aligned} \tag{8.580}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\left(A_y, h_y\right) &\Rightarrow \left(A_x, h_x\right) \\
\cos\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x &= \sin\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \\
\sin\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x &= -\cos\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \sin h_{Pxy} + \sin h_y \cos h_{Pxy} \\
\sin h_x &= \cos\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \cos h_{Pxy} + \sin h_y \sin h_{Pxy}
\end{aligned} \tag{8.581}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos A_x \cos h_x &= -\cos A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pxy} \sin A_{Kx} \cos A_{Pxy} + \cos A_{Kx} \sin A_{Pxy}\right) + \\
&\quad + \sin A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pxy} \sin A_{Kx} \sin A_{Pxy} + \cos A_{Kx} \cos A_{Pxy}\right) - \\
&\quad - \sin h_y \cos h_{Pxy} \sin A_{Kx} \\
\sin A_x \cos h_x &= -\cos A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pxy} \cos A_{Kx} \cos A_{Pxy} + \sin A_{Kx} \sin A_{Pxy}\right) - \\
&\quad - \sin A_y \cos h_y \left(\sin h_{Pxy} \cos A_{Kx} \sin A_{Pxy} - \sin A_{Kx} \cos A_{Pxy}\right) + \\
&\quad + \sin h_y \cos h_{Pxy} \cos A_{Kx} \\
\sin h_x &= \cos A_y \cos h_y \cos h_{Pxy} \cos A_{Pxy} + \\
&\quad + \sin A_y \cos h_y \cos h_{Pxy} \sin A_{Pxy} + \\
&\quad + \sin h_y \sin h_{Pxy} \quad .
\end{aligned} \tag{8.582}$$

8.16.3.3 Die Transformationsmatrix

Wenn der beobachtete Ort in kartesischen Koordinaten gegeben ist, im x-System durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos h_x \cos A_x \\
x_2 &= r \cos h_x \sin A_x \\
x_3 &= r \sin h_x
\end{aligned} \tag{8.583}$$

und im y-System durch

$$\begin{aligned}
y_1 &= r \cos h_y \cos A_y \\
y_2 &= r \cos h_y \sin A_y \\
y_3 &= r \sin h_y \quad ,
\end{aligned} \tag{8.584}$$

gilt für die Transformation der Basen

$$\mathbf{q}_j^{(Sy)} = a_j{}^i \, \mathbf{q}_i^{(Sx)} \quad , \quad \mathbf{q}_i^{(Sx)} = a^j{}_i \, \mathbf{q}_j^{(Sy)} \tag{8.585}$$

und der Koordinaten

$$x^i = a_j{}^i \, y^j \quad , \quad y^j = a^j{}_i \, x_i \tag{8.586}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\sin h_{Pyx} \cos A_{Pyx} \sin A_{Ky} + \sin A_{Pyx} \cos A_{Ky} = \\
&= \sin h_{Pxy} \cos A_{Pxy} \sin A_{Kx} - \sin A_{Pxy} \cos A_{Kx} \\
a_{12} &= -\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} - \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky} = \\
&= -\sin h_{Pxy} \cos A_{Pxy} \cos A_{Kx} - \sin A_{Pxy} \sin A_{Kx} \\
a_{13} &= \cos h_{Pyx} \sin A_{Ky} = \\
&= \cos h_{Pxy} \cos A_{Pxy}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{21} &= \sin h_{Pyx}\cos A_{Pyx}\cos A_{Ky} + \sin A_{Pyx}\sin A_{Ky} = \\
&= \sin h_{Pxy}\sin A_{Pxy}\sin A_{Kx} + \cos A_{Pxy}\cos A_{Kx} \\
a_{22} &= \sin h_{Pyx}\sin A_{Pyx}\cos A_{Ky} - \cos A_{Pyx}\sin A_{Ky} = \\
&= -\sin h_{Pxy}\sin A_{Pxy}\cos A_{Kx} + \cos A_{Pxy}\sin A_{Kx} \\
a_{23} &= -\cos h_{Pyx}\cos A_{Ky} = \\
&= \cos h_{Pxy}\sin A_{Pxy} \\
a_{31} &= \cos h_{Pyx}\cos A_{Pyx} = \\
&= -\cos h_{Pxy}\sin A_{Kx} \\
a_{32} &= \cos h_{Pyx}\sin A_{Pyx} = \\
&= \cos h_{Pxy}\cos A_{Kx} \\
a_{33} &= \sin h_{Pyx} = \\
&= \sin h_{Pxy}
\end{aligned}
\tag{8.587}
$$

mit den Variationen (nach den Formeln (6.99))

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{31}\sin A_{Ky} - \dot{A}_{Ky}\,a_{21} - \dot{A}_{Pyx}\,a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{32}\sin A_{Ky} - \dot{A}_{Ky}\,a_{22} + \dot{A}_{Pyx}\,a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{33}\sin A_{Ky} - \dot{A}_{Ky}\,a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{31}\cos A_{Ky} + \dot{A}_{Ky}\,a_{11} - \dot{A}_{Pyx}\,a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{32}\cos A_{Ky} + \dot{A}_{Ky}\,a_{12} + \dot{A}_{Pyx}\,a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{33}\cos A_{Ky} + \dot{A}_{Ky}\,a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{33}\cos A_{Pyx} - \dot{A}_{Pyx}\,a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{h}_{Pyx}\,a_{33}\sin A_{Pyx} - \dot{A}_{Pyx}\,a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= \dot{h}_{Pyx}\cos h_{Pyx} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.588}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich dann (vgl. die Formeln (8.586))

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^i &= \dot{a}_j{}^i\, y^j + a_j{}^i\, \dot{y}^j \\
\dot{y}^j &= \dot{a}^j{}_i\, x^i + a^j{}_i\, \dot{x}^i
\end{aligned}
\tag{8.589}
$$

sowie für die Variationen der Basen

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_j^{(Sy)} &= \dot{a}_j{}^i \mathbf{q}_i^{(Sx)} + a_j{}^i\, \dot{\mathbf{q}}_i^{(Sx)} \\
\mathbf{q}_i^{(Sx)} &= \dot{a}^j{}_i\, \mathbf{q}_j^{(Sy)} + a^j{}_i\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(Sy)} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.590}
$$

8.16.3.4 Die Variationen der Winkelkoordinaten

Mit den Formeln (8.203) auf und den vorstehenden Komponenten der Transformationsmatrix ergeben sich die Variationen in den Winkeln der Beobachtungsrichtungen in Bezug auf das x-System

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_y \cos h_y \;=\;& \cos A_x \cos h_x \left(-\dot{a}_{11} \sin A_y + \dot{a}_{21} \cos A_y\right) + \\
&+ \sin A_x \cos h_x \left(-\dot{a}_{12} \sin A_y + \dot{a}_{22} \cos A_y\right) + \\
&+ \sin h_x \left(-\dot{a}_{13} \sin A_y + \dot{a}_{23} \cos A_y\right) + \\
&+ \dot{A}_x \cos h_x \Big[\sin A_x \left(a_{11} \sin A_y + a_{21} \cos A_y\right) + \\
&\qquad + \cos A_x \left(-a_{12} \sin A_y + a_{22} \cos A_y\right)\Big] + \\
&+ \dot{h}_x \Big[\cos A_x \sin h_x \left(a_{11} \sin A_y - a_{21} \cos A_y\right) + \\
&\quad + \sin A_x \sin h_x \left(a_{12} \sin A_y + a_{22} \cos A_y\right) + \\
&\quad + \cos h_x \left(-a_{13} \sin A_y + a_{23} \cos A_y\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{8.591}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_y \;=\;& \cos A_x \cos h_x \Big[-\left(\dot{a}_{11} \cos A_y + \dot{a}_{21} \sin A_y\right) \sin h_y + \dot{a}_{31} \cos h_y\Big] + \\
&+ \sin A_x \cos h_x \Big[-\left(\dot{a}_{12} \cos A_y + \dot{a}_{22} \sin A_y\right) \sin h_y + \dot{a}_{32} \cos h_y\Big] + \\
&+ \sin h_x \Big[-\left(\dot{a}_{13} \cos A_y + \dot{a}_{23} \sin A_y\right) \sin h_y + \dot{a}_{33} \cos h_y\Big] + \\
&+ \dot{A}_x \cos h_x \Big[\sin A_x \left(a_{11} \cos A_y \sin h_y + a_{21} \sin A_y \sin h_y - a_{31} \cos h_y\right) + \\
&\qquad + \cos A_x \left(a_{12} \cos A_y \sin h_y - a_{22} \sin A_y \sin h_y + a_{32} \cos h_y\right)\Big] + \\
&+ \dot{h}_x \Big[\cos A_x \sin h_x \left(a_{11} \cos A_y \sin h_y + a_{21} \sin A_y \sin h_y - a_{31} \cos h_y\right) + \\
&\quad + \sin A_x \sin h_x \left(a_{12} \cos A_y \sin h_y - a_{22} \sin A_y \sin h_y - a_{32} \cos h_y\right) + \\
&\quad + \cos h_x \left(-a_{13} \cos A_y \sin h_y - a_{23} \sin A_y \sin h_y + a_{33} \cos h_y\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{8.592}
$$

und umgekehrt in Bezug auf das y-System

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_x \cos h_x \;=\;& \cos A_y \cos h_y \left(-\dot{a}_{11} \sin A_x + \dot{a}_{12} \cos A_x\right) + \\
&+ \sin A_y \cos h_y \left(-\dot{a}_{21} \sin A_x + \dot{a}_{22} \cos A_x\right) + \\
&+ \sin h_y \left(-\dot{a}_{31} \sin A_x + \dot{a}_{32} \cos A_x\right) + \\
&+ \dot{A}_y \cos h_y \Big[\sin A_y \left(a_{11} \sin A_x - a_{12} \cos A_x\right) + \\
&\qquad + \cos A_y \left(-a_{21} \sin A_x + a_{22} \cos A_x\right)\Big] + \\
&+ \dot{h}_y \Big[\cos A_y \sin h_y \left(a_{11} \sin A_x - a_{12} \cos A_x\right) + \\
&\quad + \sin A_y \sin h_y \left(a_{21} \sin A_x - a_{22} \cos A_x\right) + \\
&\quad + \cos h_y \left(-a_{31} \sin A_x + a_{32} \cos A_x\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{8.593}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_x \;=\;& \cos A_y \cos h_y \left(-\dot{a}_{11}\cos A_x \sin h_x - \dot{a}_{12}\sin A_x \sin h_x + \dot{a}_{13}\cos h_x\right) + \\
&+ \sin A_y \cos h_y \left(-\dot{a}_{21}\cos A_x \sin h_x - \dot{a}_{22}\sin A_x \sin h_x + \dot{a}_{23}\cos h_x\right) + \\
&+ \sin h_y \left(-\dot{a}_{31}\cos A_x \sin h_x - \dot{a}_{32}\sin A_x \sin h_x + \dot{a}_{33}\cos h_x\right) + \\
&+ \dot{A}_y \cos h_y \left[\sin A_y \left(a_{11}\cos A_x \sin h_x + a_{12}\sin A_x \sin h_x - a_{13}\cos h_x\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \cos A_y \left(-a_{21}\cos A_x \sin h_x - a_{22}\sin A_x \sin h_x + a_{23}\cos h_x\right)\right] + \\
&+ \dot{h}_y \left[\cos A_y \sin h_y \left(a_{11}\cos A_x \sin h_x + a_{12}\sin A_x \sin h_x - a_{13}\cos h_x\right) + \right. \\
&\qquad + \sin A_y \sin h_y \left(a_{21}\cos A_x \sin h_x + a_{22}\sin A_x \sin h_x - a_{23}\cos h_x\right) + \\
&\qquad \left. + \cos h_y \left(-a_{31}\cos A_x \sin h_x - a_{32}\sin A_x \sin h_x + a_{33}\cos h_x\right)\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{8.594}
$$

8.16.4 Beziehungen zwischen den Satellitensystemen über *Euler*winkel

Bild 8-27: *Euler*winkel und Orientierungswinkel der Satellitensysteme zur Charakterisierung der wechselseitigen Beziehungen der beiden Satellitensysteme

Ausgehend von einem durch bahnmechanische Bedingungen vorgegebenem satellitenzentriertem Basissystem kann durch Vorgabe von *Euler*winkeln (sie werden im Folgenden mit *P*, *Y*, *R* bezeichnet) ein beliebiges anderes satellitenzentriertes System erhalten werden,

wie es auch in Aufgabenstellungen der Satellitenlageregelung benötigt wird. Zur Durchführung der Transformationen werden die *Euler*winkel auf die im vorstehenden Abschnitt behandelten Größen zurückgeführt, welche die Orientierung der beiden Systeme zueinander charakterisieren.

Nach Bild 8-27 ist das x-System durch die Richtungsvektoren $\mathbf{q}_{x1}, \mathbf{q}_{x2}, \mathbf{q}_{x3}$ mit den (kartesischen) Koordinaten x_i vorgegeben. Die x_1-Achse weist in die Bewegungs- (= Flug-) Richtung des Satelliten, die x_2-Achse quer zur Bewegungsrichtung ist die *Nickachse* (Pitch). Die x_3-Achse wird (wegen des Linkssystems) gelegentlich auch als $-z_Q$ -Achse bezeichnet. Das „Nicken" mit dem Winkel *P* um die Nickachse in positiver Richtung wird bei der Transformation als erstes ausgeführt. Das so erhaltene neue System hat die neue x'_Q -Achse und die neue $-z'_Q$ -Achse, welche als *Gierachse* (Yaw) bezeichnet wird. Das Drehen dieses Systems um die Gierachse mit dem Winkel *Y*, das positiv um die $+z'_Q$ -Achse (also in negativer Richtung = im Uhrzeigersinn) um die $-z'_Q$ -Achse erfolgen soll, führt auf ein neues System mit der x''_Q -Achse und der y''_Q -Achse. Die neue x''_Q -Achse ist die (neue) *Rollachse*, um welche die letzte Drehung, das *Rollen*, in positiver Richtung erfolgt. Damit wird das neue System erhalten mit den neuen Koordinatenachsen $y_1 = x''_Q = x'''$, $y_2 = y'''$, $y_3 = -z''_Q$.

Bild 8-28: Poldreieck zur Berechnung der *Euler*winkel

Im Poldreieck $P_x Y_s P_y$ ergeben sich dann nach Bild 8-28 auf Seite 428 die Beziehungen zwischen den drei *Euler*winkeln *P*, *Y*, *R* und den Parametern A_{Ky} , A_{Pyx} , h_{Pyx} zur Charakterisierung des y-Systems in Bezug auf das x-System

$$\begin{aligned} P, Y, R \quad &\Rightarrow \quad A_{Pyx}, h_{Pyx}, A_{Ky} \\ \cos A_{Pyx} \cos h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \cos P - \cos R \sin P \\ \sin A_{Pyx} \cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin R \\ \cos A_{Ky} \cos h_{Pyx} &= \sin Y \sin P \cos R + \cos P \sin R \\ \sin A_{Ky} \cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin P \\ \sin h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P \quad . \end{aligned} \tag{8.595}$$

Umgekehrt können die *Euler*winkel bei Vorgabe der wechselseitigen Lage der beiden Systeme aus folgenden Beziehungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
A_{Pyx}, h_{Pyx}, A_{Ky} \quad &\Rightarrow \quad P, Y, R \\
\cos P \cos Y &= -\sin h_{Pyx} \sin A_{Ky} \cos A_{Pyx} + \cos A_{Ky} \sin A_{Pyx} \\
\sin P \cos Y &= \cos h_{Pyx} \sin A_{Ky} \\
\cos R \cos Y &= \sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \cos A_{Ky} - \cos A_{Pyx} \sin A_{Ky} \\
\sin R \cos Y &= \cos h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \\
\sin Y &= -\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} - \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky} \quad .
\end{aligned} \tag{8.596}$$

Neben den vorstehenden Formelsystemen wird noch folgende Beziehung benötigt, welche aus den vorstehenden Formeln hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}
&\sin Y \cos R \cos P - \sin R \sin P \quad = \\
&= \quad \sin h_{Pyx} \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky} - \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} \quad .
\end{aligned} \tag{8.597}$$

Die Variationen der Drehwinkel lauten bei Vorgabe der Variationen in den *Euler*winkeln

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{Pyx} \cos h_{Pyx} \quad = \quad & \dot{Y} \ \sin R \left(\cos P \cos Y \sin A_{Pyx} - \sin Y \cos A_{Pyx} \right) + \\
& + \dot{R} \ \Big[\cos A_{Pyx} \cos Y \sin R + \\
& \quad + \sin A_{Pyx} \left(\sin Y \cos R \sin P - \sin R \cos P \right) \Big] - \\
& - \dot{P} \ \sin A_{Pyx} \left(\sin Y \sin R \sin P - \cos R \cos P \right) \\
\dot{A}_{Ky} \cos h_{Pyx} \quad = \quad & -\dot{Y} \ \sin P \left(\cos R \cos Y \sin A_{Ky} + \sin Y \cos A_{Ky} \right) + \\
& + \dot{P} \ \Big[\cos A_{Ky} \cos Y \cos P - \\
& \quad - \sin A_{Ky} \left(\sin Y \cos P \cos R - \sin P \sin R \right) \Big] + \\
& + \dot{R} \ \sin A_{Ky} \left(\sin Y \sin P \sin R - \cos P \cos R \right) \\
\dot{h}_{Pyx} \quad = \quad & \dot{Y} \ \sin R \Big[-\cos h_{Pyx} \cos Y \sin P + \\
& \quad + \sin h_{Pyx} \left(\cos P \cos Y \cos A_{Pyx} + \sin Y \sin A_{Pyx} \right) \Big] + \\
& + \dot{R} \ \Big[-\cos h_{Pyx} \left(\sin Y \cos R \sin P + \sin R \cos P \right) - \\
& \quad - \sin A_{Pyx} \sin h_{Pyx} \cos Y \sin R + \\
& \quad + \cos A_{Pyx} \sin h_{Pyx} \left(\sin Y \cos R \sin P - \sin R \cos P \right) \Big] + \\
& + \dot{P} \ \Big[-\cos h_{Pyx} \left(\sin Y \sin R \cos P + \cos R \sin P \right) - \\
& \quad - \cos A_{Pyx} \sin h_{Pyx} \left(\sin Y \sin R \sin P - \cos R \cos P \right) \Big] \quad .
\end{aligned} \tag{8.598}$$

Die Variationen der *Euler*winkel ergeben sich bei Vorgabe der Variationen in den wechselseitigen Positionswinkeln der beiden Systeme aus

$$\begin{aligned}
\dot{R} \cos Y \quad = \quad & \dot{A}_{Pyx} \ \Big[-\sin R \left(\sin h_{Pyx} \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky} + \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} \right) + \\
& \quad + \cos R \cos h_{Pyx} \cos A_{Pyx} \Big] + \\
& + \dot{A}_{Ky} \ \sin R \left(\sin h_{Pyx} \sin A_{Pyx} \sin A_{Ky} + \cos A_{Pyx} \cos A_{Ky} \right) + \\
& + \dot{h}_{Pyx} \ \sin A_{Pyx} \left(\cos A_{Ky} \sin h_{Pyx} \sin R - \cos h_{Pyx} \cos R \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{P}\cos Y &= -\dot{A}_{Pyx}\ \sin P\left(\sin h_{Pyx}\sin A_{Pyx}\sin A_{Ky}+\cos A_{Pyx}\cos A_{Ky}\right)+\\
&\quad+\dot{A}_{Ky}\ \Big\{\sin P\Big[\left(\sin h_{Pyx}\cos A_{Pyx}\cos A_{Ky}+\sin A_{Pyx}\sin A_{Ky}\right)+\\
&\qquad+\cos P\cos h_{Pyx}\cos A_{Ky}\Big]+\\
&\qquad+\sin R\left(\sin h_{Pyx}\sin A_{Pyx}\sin A_{Ky}+\cos A_{Pyx}\cos A_{Kx}\right)\Big\}+\\
&\quad+\dot{h}_{Pyx}\ \sin A_{Ky}\left(\sin P\cos h_{Pyx}\cos A_{Pyx}-\cos P\cos h_{Pyx}\right)\\
\dot{Y} &= -\dot{A}_{Pyx}\Big[\quad\cos Y\left(-\cos A_{Pyx}\sin h_{Pyx}\sin A_{Ky}+\sin A_{Pyx}\cos A_{Ky}\right)-\\
&\qquad-\cos P\sin Y\left(\sin A_{Pyx}\sin h_{Pyx}\sin A_{Ky}+\cos A_{Pyx}\cos A_{Ky}\right)\\
&\quad+\dot{A}_{Ky}\Big[\quad\cos Y\left(-\sin A_{Pyx}\sin h_{Pyx}\cos A_{Ky}+\cos A_{Pyx}\sin A_{Ky}\right)+\\
&\qquad+\cos P\sin Y\left(\cos A_{Pyx}\sin h_{Pyx}\cos A_{Ky}+\cos A_{Pyx}\sin A_{Ky}\right)-\\
&\qquad-\sin P\sin Y\cos h_{Pyx}\cos A_{Ky}\Big]+\\
&\quad+\dot{h}_{Pyx}\ \sin A_{Ky}\Big(\quad-\cos Y\sin A_{Pyx}\cos h_{Pyx}+\\
&\qquad+\cos P\sin Y\cos A_{Pyx}\cos h_{Pyx}+\sin P\sin Y\sin h_{Pyx}\Big)\quad .
\end{aligned}
\tag{8.599}
$$

8.16.4.1 Zusammenhang der *Euler*winkel und der Drehmatrix

Die Matrixelemente in (8.223) auf ergeben mit den Beziehungen (8.241)- (8.243)

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos Y\cos P\\
a_{12} &= \sin Y\\
a_{13} &= \cos Y\sin P\\
a_{21} &= -\sin Y\cos R\cos P+\sin R\sin P\\
a_{22} &= \cos Y\cos R\\
a_{23} &= -\sin Y\cos R\sin P-\sin R\cos P\\
a_{31} &= -\sin Y\sin R\cos P-\cos R\sin P\\
a_{32} &= \cos Y\sin R\\
a_{33} &= -\sin Y\sin R\sin P+\cos R\cos P\quad .
\end{aligned}
\tag{8.600}
$$

Die Variationen der Matrixelemente lauten in Abhängigkeit von den *Euler*winkeln und ihren Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{Y}\sin Y\cos P \quad -\dot{P}\,a_{13} \\
\dot{a}_{12} &= \quad \dot{Y}\cos Y \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{Y}\sin Y\sin P \quad +\dot{P}\,a_{11} \\
\dot{a}_{21} &= -\dot{Y}\,a_{22}\cos P \quad -\dot{R}\,a_{31}-\dot{P}\,a_{23} \\
\dot{a}_{22} &= -\dot{Y}\sin Y\cos R \quad -\dot{R}\,a_{32} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{Y}\,a_{22}\sin P \quad -\dot{R}\,a_{33}+\dot{P}\,a_{21} \\
\dot{a}_{31} &= -\dot{Y}\,a_{32}\cos P \quad +\dot{R}\,a_{21}-\dot{P}\,a_{33} \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{Y}\sin Y\cos R \quad +\dot{R}\,a_{22} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{Y}\,a_{32}\sin P \quad +\dot{R}\,a_{23}+\dot{P}\,a_{31} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.601}
$$

8.16.4.2 Transformation mit *Euler*winkeln

Die Transformation des Richtungs- bzw. des Zustandsvektors kann mit den vorstehenden Matrixelementen entsprechend den Formeln (8.235) durchgeführt werden. Aus Referenzgründen werden die Beziehungen explizit angegeben:

$$
\begin{aligned}
(A_x, h_x) \;\Rightarrow\; & (A_y, h_y) \\
\cos A_y\cos h_y &= \cos A_x\cos h_x\cos Y\cos P + \\
&\quad +\sin A_x\cos h_x\sin Y + \\
&\quad \sin h_x\cos Y\sin P \\
\sin A_y\cos h_y &= -\cos A_x\cos h_x\left(\sin Y\cos R\cos P-\sin R\sin P\right)+ \\
&\quad +\sin A_x\cos h_x\cos Y\cos R- \\
&\quad -\sin h_x\left(\sin Y\cos R\sin P+\sin R\cos P\right) \\
\sin h_y &= -\cos A_x\cos h_x\left(\sin Y\sin R\cos P+\cos R\sin P\right)+ \\
&\quad +\sin A_x\cos h_x\cos Y\sin R- \\
&\quad -\sin h_x\left(\sin Y\sin R\sin P-\cos R\cos P\right)
\end{aligned}
\tag{8.602}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
(A_y, h_y) \;\Rightarrow\; & (A_x, h_x) \\
\cos A_x\cos h_x &= \cos A_y\cos h_y\cos Y\cos P- \\
&\quad -\sin A_y\cos h_y\left(\sin Y\cos P\cos R-\sin P\sin R\right)- \\
&\quad -\sin h_y\left(\sin Y\cos P\sin R+\sin P\cos R\right) \\
\sin A_x\cos h_x &= \cos A_y\cos h_y\sin Y+ \\
&\quad +\sin A_y\cos h_y\cos Y\cos R+ \\
&\quad +\sin h_y\cos Y\sin R \\
\sin h_x &= \cos A_y\cos h_y\sin Y\sin P- \\
&\quad -\sin A_y\cos h_y\left(\sin Y\sin P\cos R+\cos P\sin R\right)- \\
&\quad -\sin h_y\left(\sin Y\sin P\sin R-\cos P\cos R\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{8.603}
$$

Die kartesischen Koordinaten sind über die *Euler*winkel nach folgenden Formeln verknüpft:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \cos Y \cos P + \\
&\quad + x_2 \sin Y + \\
&\quad + x_3 \cos Y \sin P \\
y_2 &= -x_1 \left(\sin Y \cos R \cos P - \sin R \sin P\right) + \\
&\quad + x_2 \cos Y \cos R - \\
&\quad - x_3 \left(\sin Y \cos R \sin P + \sin R \cos P\right) \\
y_3 &= -x_1 \left(\sin Y \sin R \cos P + \cos R \sin P\right) + \\
&\quad + x_2 \cos Y \sin R - \\
&\quad - x_3 \left(\sin Y \sin R \sin P - \cos R \cos P\right)
\end{aligned}
\tag{8.604}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 \cos Y \cos P + \\
&\quad + \dot{x}_2 \sin Y + \\
&\quad + \dot{x}_3 \cos Y \sin P - \\
&\quad - \dot{Y} \left(x_1 \sin Y \cos P - x_2 \cos Y + x_3 \sin Y \sin P\right) - \\
&\quad - \dot{P} \left(x_1 \cos Y \sin P - x_2 \cos Y \cos P\right) \\
\dot{y}_2 &= -\dot{x}_1 \left(\sin Y \cos R \cos P - \sin R \sin P\right) + \\
&\quad + \dot{x}_2 \cos Y \cos R - \\
&\quad - \dot{x}_3 \left(\sin Y \cos R \sin P + \sin R \cos P\right) - \\
&\quad - \dot{Y} y_1 \cos R \\
&\quad + \dot{R} y_3 - \\
&\quad - \dot{P} \left[-x_1 \left(\sin Y \cos R \sin P + \sin R \cos P\right) + \right. \\
&\qquad \left. + x_3 \left(\sin Y \cos R \cos P - \sin R \sin P\right)\right] \\
\dot{y}_3 &= -\dot{x}_1 \left(\sin Y \sin R \cos P + \cos R \sin P\right) + \\
&\quad + \dot{x}_2 \cos Y \sin R + \\
&\quad + \dot{x}_3 \left(-\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P\right) - \\
&\quad - \dot{Y} y_1 \sin R + \\
&\quad + \dot{R} y_2 + \\
&\quad + \dot{P} \left[-x_1 \left(-\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P\right) - \right. \\
&\qquad \left. - x_3 \left(\sin Y \sin R \cos P + \cos R \sin P\right)\right]
\end{aligned}
\tag{8.605}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 \cos Y \cos P - \\
&\quad - y_2 \left(\sin Y \cos P \cos R - \sin P \sin R\right) - \\
&\quad - y_3 \left(\sin Y \cos P \sin R + \sin P \cos R\right) \\
x_2 &= y_1 \sin Y + \\
&\quad + y_2 \cos Y \cos R + \\
&\quad + y_3 \cos Y \sin R \\
x_3 &= y_1 \cos Y \sin P - \\
&\quad - y_2 \left(\sin Y \sin P \cos R + \cos P \sin R\right) - \\
&\quad - y_3 \left(\sin Y \sin P \sin R - \cos P \cos R\right)
\end{aligned}
\tag{8.606}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{y}_1 \cos Y \cos P - \\
&\quad - \dot{y}_2 \left(\sin Y \cos P \cos R - \sin P \sin R\right) - \\
&\quad - \dot{y}_3 \left(\sin Y \cos P \sin R + \sin P \cos R\right) - \\
&\quad - \dot{Y} \; x_2 \cos P - \\
&\quad - \dot{P} \; x_3 + \\
&\quad + \dot{R} \left[y_2 \left(\sin Y \cos P \sin R + \sin P \cos R\right) - \right. \\
&\qquad \left. - y_3 \left(\sin Y \cos P \cos R - \sin P \sin R\right) \right] \\
\dot{x}_2 &= \dot{y}_1 \sin Y + \\
&\quad + \dot{y}_2 \cos Y \cos R + \\
&\quad + \dot{y}_3 \cos Y \sin R - \\
&\quad - \dot{Y} \left(-y_1 \cos Y + y_2 \sin Y \cos R + y_3 \sin Y \sin R\right) + \\
&\quad + \dot{R} \left(-y_2 \cos Y \sin R + y_3 \cos Y \cos R\right) \\
\dot{x}_3 &= -\dot{y}_1 \cos Y \sin P - \\
&\quad - \dot{y}_2 \left(\sin Y \sin P \cos R + \cos P \sin R\right) + \\
&\quad + \dot{y}_3 \left(-\sin Y \sin P \sin R + \cos P \cos R\right) - \\
&\quad - \dot{Y} \; x_2 \sin P + \\
&\quad + \dot{P} \; x_1 - \\
&\quad - \dot{R} \left[y_2 \left(-\sin Y \sin P \sin R + \cos P \cos R\right) + \right. \\
&\qquad \left. + y_3 \left(\sin Y \sin P \cos R + \sin P \sin R\right) \right] \quad .
\end{aligned}
\tag{8.607}
$$

8.16.5 Der Eigenbewegungsvektor eines satellitenzentrierten Systems

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Satelliten-zentrierten y-Systems, kann schrittweise an das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem über die Eigenbewegungskette

$$
\mathbf{D}_{q^{(Sy)}} = \mathbf{D}_{q^{(Sy)}q^{(Sx)}} + \mathbf{D}_{q^{(Sx)}q^{(L)}} + \mathbf{D}_{q^{(L)}p} + \mathbf{D}_{p} \tag{8.608}
$$

angebunden werden. Hierzu fehlt noch der relative Eigenbewegungsvektor des y-Systems bezüglich des x-Systems

$$\mathbf{D}_{q^{(Sy)}q^{(Sx)}} = D_{q^{(Sy)}q^{(Sx)}}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(Sy)} \quad . \tag{8.609}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten dieses Vektors werden die Transformationsmatrix in der Gestalt (8.587) mit den Variationen (8.588), bzw. (8.600) mit (8.601) benötigt. Da die beiden Systeme orthonormiert sind, ergeben sich die gewünschten Koeffizienten aus den Formeln (6.133):

$$D_{q^{(Sy)}q^{(Syx)}{}_1} = \dot{a}_2{}^{j}\,a_{3j} \quad , \quad D_{q^{(Sy)}q^{(Syx)}{}_2} = \dot{a}_3{}^{j}\,a_{1j} \quad , \quad D_{q^{(Sy)}q^{(Syx)}{}_3} = \dot{a}_1{}^{j}\,a_{2j} \quad . \tag{8.610}$$

8.17 *Lorentz*-Transformationen

Die bisherigen Koordinatensysteme, wie sie üblicherweise in der Astrodynamik verwendet werden, berücksichtigen implizit Abhängigkeiten von der Zeit, jedoch keine relativen Zeitverschiebungen zwischen gleichartigen Systemen. Da im Prinzip unendlich viele inertiale Systeme denkbar sind, in denen also eine nichtbeeinflusste („ungestörte“) Bewegung geradlinig und gleichförmig verläuft, wird wegen der endlichen Wirkungsgeschwindigkeit c (Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit niedergelegt im *Einstein*schen Relativitätsprinzip) die Beobachtung einer Bewegung in jedem dieser Systeme unterschiedlich erfolgen. Dies erfordert neben den drei euklidischen Koordinaten die Berücksichtigung der Zeit und ihrer Veränderlichkeit, was mit Hilfe von Vierer-Vektoren und durch die *Lorentz*-Transformation durchgeführt wird[1].

Die *Lorentz*-Transformation behandelt die Transformation zwischen zwei inertialen Systemen. Sie setzt voraus, dass sich die beiden Systeme relativ zueinander gleichförmig geradlinig mit der relativen konstanten Geschwindigkeit V bewegen. Dieser Fall ohne Rotation wird als „*reine Lorentz-Transformation*“ bezeichnet. Eine *allgemeine Lorentz-Transformation* setzt sich aus einer Drehung und einer reinen *Lorentz*-Transformation zusammen.

Gegeben seien zwei orthonormierte Basen $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_j$, die mit Hilfe der Matrix $\left(a_{kj}\right)$ ineinander transformiert werden können.

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^{i}\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = b_i{}^{j}\,\mathbf{q}_j \quad . \tag{8.611}$$

Da die beiden Systeme orthonormiert sind, hat die inverse Transformationsmatrix nach Formel (6.30) die Darstellung $\left(a_{jk}\right) = \left(b_{kj}\right)$. Die Transformation erfülle die Orthogonalitätsbedingungen (siehe die Formeln (6.27) und (6.28))

$$a_k{}^{l}\,a_{jl} = \delta_{kj} \quad , \quad a^{l}{}_{k}\,a_{lj} = \delta_{kj} \quad . \tag{8.612}$$

Ein Ortsvektor hat in den beiden Systemen die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{r} := x^k\,\mathbf{p}_k \ , \ \mathbf{r}' := y^j\,\mathbf{q}_j \quad . \tag{8.613}$$

Die *Lorentz*-Transformation wird üblicherweise auf Grund des *Einstein*schen Relativitätsprinzips physikalisch mit einer sich ausbreitenden Kugelwelle begründet[2]. Sie hat die Darstellung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2\,t^2 \quad , \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c^2 t'^2 \quad . \tag{8.614}$$

---

[1] Die *Lorentz*-Transformation wurde von *Hendrick Antoon Lorentz* [1895, 1899, 1904] neben *Woldemar Voigt* [1887], *Joseph Lamour* [1897, 1900] und *Henri Poincaré* [1905] bei Arbeiten zur Elektrodynamik entdeckt.(siehe etwa in: http://de.wikipedia.org/wiki/Lorentz-Transformation)

[2] Siehe z.B. in H. GOLDSTEIN [1963], p.208 ff.

Da sich in beiden Systemen das Signal mit derselben Geschwindigkeit *c* ausbreitet, muss notwendigerweise die Zeit als unterschiedlich angesehen werden: $t \neq t'$. Man führt daher anstelle eines physikalischen Raumes vierdimensionale mathematische Parameterräume ein, in denen der Betrag eines Vektors die Darstellung hat

$$r^2 = \mathbf{r}^2 = x^k x_k \quad , \quad r'^2 = \mathbf{r}'^2 = y^j y_j \qquad \left(k = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4\right) \quad . \tag{8.615}$$

Die Koordinaten werden mit den Beziehungen (siehe die Beziehungen (6.36) und (6.37)) transformiert

$$x^i \;=\; y^j\, a_j{}^i \quad , \quad y^j \;=\; x^i\, a^j{}_i \quad . \tag{8.616}$$

Für die vierte Komponente ist dann

$$\begin{aligned} x_4^2 &= -c^2 t^2 \quad , \quad x_4 = i\,c\,t \qquad \left(i = \sqrt{-1}\ ,\ i^2 = -1\right) \\ y_4^2 &= -c^2 t'^2 \quad , \quad y_4 = i\,c\,t' \qquad . \end{aligned} \tag{8.617}$$

Sie ist also imaginär. Für die Zeit besteht im jeweiligen Bezugssystem die Beziehung

$$t = -\frac{i}{c} x_4 \quad , \quad t' = -\frac{i}{c} y_4 \quad . \tag{8.618}$$

Es ist nun üblich anzunehmen, dass das physikalische (x_1, x_2, x_3)-System so gedreht werde, dass die dritte Komponente in Bewegungsrichtung zeige, während die ersten beiden Komponenten nicht an der Bewegung teilnehmen:

$$y_1 = x_1 \ , y_2 = x_2 \quad . \tag{8.619}$$

Als Folge dieser Wahl hat die Transformationsmatrix die Komponenten

$$\begin{aligned} &a_{11} = a_{22} = 1 \quad , \\ &a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0 \quad , \ a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0 \ , \ a_{31} = a_{32} = 0 \ , \ a_{41} = a_{42} = 0 \end{aligned} \tag{8.620}$$

und die Transformationen der restlichen Komponenten lauten

$$y_3 = a_{33}\, x_3 \,+\, a_{34}\, x_4 \quad , \quad y_4 = a_{43}\, x_3 \,+\, a_{44}\, x_4 \quad . \tag{8.621}$$

Die noch fehlenden Komponenten werden folgendermaßen bestimmt: Die dritte physikalische Komponente bewege sich mit der Eigengeschwindigkeit V, so dass der Ursprung des $\mathbf{q}_j$ – Systems die Eigenschaft

$$x_3 = V\,t \quad \text{für} \quad y_3 = 0 \quad . \tag{8.622}$$

zeigt. Mit der ersten der Beziehungen (8.618) wird daher

$$x_3 = -i\frac{V}{c} x_4 =: -i\,\beta\, x_4 \quad . \tag{8.623}$$

Die letzten beiden Bedingungen führen in der ersten der Gleichungen (8.621) auf

$$a_{34} = i\,\beta\, a_{33} \quad . \tag{8.624}$$

Die Orthogonalitätsbedingung (8.612) mit k=j=3 ergibt

$$1 = a_{33}^2 + a_{34}^2 = a_{33}^2\left(1 - \beta^2\right) \quad ,$$

somit

$$a_{33} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a_{34} = \frac{i\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{8.625}$$

Damit lautet die Transformation der dritten Komponente des Ortsvektors unter Berücksichtigung der Beziehung (8.623)

$$y_3 = \frac{x_3}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{i\beta\, x_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_3 - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{8.626}$$

Die weiteren Orthogonalitätsbedingungen

$$a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{33}\,a_{43} + a_{34}\,a_{44} = 0 \tag{8.627}$$

führen auf

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a_{43} = -\frac{i\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{8.628}$$

Die vierte Komponente wird daher transformiert mit

$$y_4 = -\frac{i\,\beta\, x_3}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{i\left(-\beta\, x_3 + c\,t\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{8.629}$$

Wird die Zeit t' im $\mathbf{q}_j$ – System entsprechend der zweiten Bedingung (8.617) eingeführt, ergeben sich die Formeln der *Lorentz*-Transformation beim Übergang vom ursprünglich in das relativ bewegte System

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= \frac{x_3 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}\,x_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{8.630}$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= \frac{y_3 + V\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}\,y_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \end{aligned} \tag{8.631}$$

Eine allgemeinere vektorielle Darstellung der *Lorentz*-Transformation wird im Folgenden zusammengestellt[1].

8.17.1 Allgemeine *Lorentz*-Transformation ohne Drehung

Zwei dreidimensionale orthonormierte Koordinatensysteme werden gleichförmig relativ zueinander bewegt. Im ersten System sei ein Ortsvektor mit $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i$ im zweiten System mit $\mathbf{r}' = y^j \mathbf{q}_j$ bezeichnet. Die beiden Systeme sollen zu einem Anfangszeitpunkt zusammenfallen,

[1] Etwa nach H. G. L. KRAUSE [1956b/1961] p. **11**-2 ff., unter Berufung auf HERGLOTZ, G. [1911]: 'Über die Mechanik deformierbarer Körper vom Standpunkt der Relativitätstheorie', *Ann. Phys.* 36, pp. 493-533

es ist dann $\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i$, $(i = 1,2,3)$. Im ersten System sei die Zeit mit *t* bezeichnet, im zweiten System mit t'. Mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit *c* lautet die *Lorentz*-Bedingung

$$s^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - c^2 t^2 = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' - c^2 t'^2 \quad . \tag{8.632}$$

Das zweite System habe in Bezug auf das erste System den (konstanten) Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$. Das erste System hat dann in Bezug auf das zweite den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}' := -\mathbf{v}$. Mit der Bezeichnung

$$\alpha := \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}} \tag{8.633}$$

hat das zweite System in Bezug auf das erste die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{v}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} - \frac{t}{\alpha}\right] \\ t' &= \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right) \\ \mathbf{r}' + \mathbf{v}t' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}\left[(1-\alpha)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.634}$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} + \frac{t'}{\alpha}\right] \\ t &= \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right) \\ \mathbf{r} - \mathbf{v}t &= \mathbf{r}' - \mathbf{v}\left[(1-\alpha)\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.635}$$

Sei $\mathbf{u} := d\mathbf{r}/dt$ die Geschwindigkeit eines bewegten Objektes bezüglich des ersten Systems, $\mathbf{u}' := d\mathbf{r}'/dt'$ bezüglich des zweiten Systems, wenn sich das zweite System in Bezug auf das erste mit der gleichförmigen Geschwindigkeit **v** bewegt, so lauten die Transformationsformeln für die Geschwindigkeiten[1] unter Verwendung der Größe α aus Beziehung (8.633):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt}}{\dfrac{dt'}{dt}} = \frac{\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}\left[(1-\alpha)\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{V^2} - 1\right]}{1 - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}} \\ \mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt'}}{\dfrac{dt}{dt'}} = \frac{\alpha\mathbf{u}' + \mathbf{v}\left[(1-\alpha)\dfrac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{V^2} + 1\right]}{1 + \dfrac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}} \quad . \end{aligned} \tag{8.636}$$

Diese Beziehungen sind der Ausgangspunkt für eine relativistische Kinematik. Um Bewegungsgleichungen herleiten zu können, werden die Transformationsgleichungen der Beschleunigungen benötigt. Sie lauten[2]:

---

[1] H. G. L. KRAUSE [1961] p. **11**-4

[2] H. G. L. KRAUSE [1961] p. **11**-10

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt'} = \alpha^2 \frac{\frac{d\mathbf{u}}{dt}\left(1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)+\frac{\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\left[\mathbf{u}-\frac{\mathbf{v}}{1+\alpha}\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^3}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \alpha^2 \frac{\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\left(1+\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)-\frac{\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\left[\mathbf{u}'+\frac{\mathbf{v}}{1+\alpha}\right]}{\left(1+\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^3} \quad . \tag{8.637}$$

Im Rahmen einer Raketendynamik muss die Ausstoßgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{e0}$ des Treibstoffs im System der bewegten Rakete und in Bezug auf das System eines Beobachters (etwa auf der Erde) $\mathbf{v}_e$ verglichen werden können. Die entsprechenden Transformationsformeln lauten[1]:

$$\mathbf{v}_e = \frac{\alpha\,\mathbf{v}_{e0}+\mathbf{u}\left[\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{e0}}{c^2}\frac{1}{(1+\alpha)}-1\right]}{1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{e0}}{c^2}}$$

$$\mathbf{v}_{e0} = \frac{\alpha\,\mathbf{v}_e+\mathbf{u}\left[\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_e}{c^2}\frac{1}{(1+\alpha)}+1\right]}{1+\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_e}{c^2}} \quad . \tag{8.638}$$

8.17.2 Allgemeine *Lorentz*-Transformation mit Drehung

In diesem Fall wird angenommen, dass die beiden Systeme bereits im Ursprung zueinander mit der Drehmatrix D gedreht sind, so dass für die Basisvektoren $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{q}_i$, $(i=1,2,3)$ erfüllt sein muss. Dann gilt für den Geschwindigkeitsvektor[2]

$$D\mathbf{v}' = -\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v}' = -D^{-1}\,\mathbf{v} \tag{8.639}$$

und die Transformation des Ortsvektors lautet

$$D\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}-\frac{t}{\alpha}\right] \quad . \tag{8.640}$$

Die Transformation von System 1 in System 2 lautet

$$\mathbf{r}' = D^{-1}\,\mathbf{r} - \mathbf{v}'\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}-\frac{t}{\alpha}\right]$$

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right) \tag{8.641}$$

Die Umkehrabbildung lautet

[1] H. G. L. KRAUSE [1961] p. **11**-16

[2] H. G. L. KRAUSE [1961] p. **11**-3

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= D\mathbf{r}' - \mathbf{v}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}'}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} - \frac{t'}{\alpha}\right] \\ t &= \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}'}{c^2}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{8.642}$$

mit der Identität

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} - \frac{t}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}'}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} - \frac{t'}{\alpha} \quad . \tag{8.643}$$

8.17.3 Inhomogene *Lorentz*-Transformation

In dem Fall, dass der Ursprung des jeweiligen Systems nicht mit dem des anderen Systems im Anfangszeitpunkt zusammenfällt, muss die *Lorentz-B*edingung durch das vierdimensionale Linienelement

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 - c^2\, dt^2 \tag{8.644}$$

ersetzt werden.

8.18 *Gauß*sche Koordinaten

Die krummlinigen Koordinaten auf beliebigen Flächen werden als *Gauß*'sche Koordinaten bezeichnet (siehe in Kapitel 7.3). Sie müssen in der Satellitentheorie vor allem dann verwendet werden, wenn relativistische Effekte berücksichtigt werden müssen, also bei interplanetaren und insbesondere bei interstellaren Flügen.

Sei eine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum in der Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u_1, u_2\right) \tag{8.645}$$

mit den Parametern u_1, u_2 gegeben, so werden die *Gauß*'schen Koordinaten durch ein Liniennetz mit

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\left(u_1, u_2 = const.\right) \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}\left(u_1 = const., u_2\right) \tag{8.646}$$

definiert, wenn jeweils einer der beiden Parameter konstant gehalten wird. Damit kann dann auch der formale Zusammenhang mit den üblichen Koordinatendarstellungen und ihren Transformationen hergestellt werden.

9 Bewegungen in Zeit

Zur Beschreibung der Bewegung von Erdsatelliten und ihrer Beobachtung ist das Koordinatensystem fundamental, dessen Grundebene die Äquatorebene und dessen Normale die mittlere Erdachse ist, also das bewegliche Äquatorsystem (siehe u. a. in Abschnitt 8.1). Da die Erdachse nicht raumfest ist, sondern eine Präzessions- und Nutationsbewegung ausführt, müssen diese Einflüsse auch bei der Beobachtung von Erdsatelliten berücksichtigt werden (siehe die Abschnitte 9.3 auf S. 456 und 9.4 auf S. 470). Dazu kommen noch überlagernde unregelmäßige Bewegungen der Erdachse, ja die Erdachse ist nicht einmal fest bezüglich des Erdkörpers, der genaugenommen auch nicht als starrer Körper aufgefasst werden darf. Die davon herrührenden Bewegungen werden unter dem Begriff der *Polbewegung* zusammengefasst (Abschnitt 9.5 auf S. 478).

Beobachtungen von Satelliten wie von sonstigen Himmelskörpern werden durch weitere physikalische Effekte beeinflusst, die dafür sorgen, dass der betreffende Körper nicht dort beobachtet werden kann, wo er geometrisch berechnet stehen müsste, der Beobachter muss also „schielen“, um den Körper beobachten zu können. Die wichtigsten Effekte sind durch die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit bedingt und werden unter dem Begriff *Aberration* zusammengefasst (Abschnitt 9.8 auf S. 493). Mit der Aberration gekoppelt ist der Dopplereffekt, der bei der Beobachtung vor allem von interplanetaren und interstellaren Objekten aber auch bei Satelliten eine Rolle spielt (Abschnitt 9.7 auf Seite 488). Die Beugung in der Lufthülle, also die *Refraktion*, ist zudem wellenlängenabhängig (Abschnitt 9.9 auf Seite 501).

Der Bezug der Zeit zur Bewegung eines Satelliten muss sehr präzise durchgeführt werden, wofür schon die relativ rasche Bewegung erdnaher Satelliten mit etwa 8 km/s hinweist (Abschnitt 9.1). Weitere Koordinatensysteme, wie sie speziell zur Beschreibung von Satellitenbewegungen nützlich sind, werden in den folgenden Abschnitten basierend auf den allgemeinen Eigenschaften eingeführt, die in diesem Abschnitt behandelt werden.

9.1 Die Zeit

Die Veränderung der räumlichen Lage, wie sie in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann, vollzieht sich in der *Zeit*. Die Zeit ist die fundamentale Variable. Auch wenn es in grundlegenden Fällen der Bahnmechanik geeigneter erscheint, die Bewegung an Stelle durch die Zeit mit einer anderen Variablen zu beschreiben, etwa dem Winkel in der Bahn, bisweilen auch einer *regularisierenden* Variablen, vor allem bei der Berücksichtigung relativistischer Effekte, so lässt sich der Bezug zur Zeit letztlich nicht umgehen.

Im strengen physikalischen Sinn ist „Zeit“ die unabhängige Variable in den Bewegungsgleichungen und nur solche Größen, die zu dieser mechanistisch-physikalischen unabhängigen Variablen in einer streng linearen Beziehung stehen, sollten als „Zeit“ bezeichnet werden[1].

Die Zeitbestimmung ist die klassische Hauptaufgabe der Astronomie, der Ausgangspunkt ihrer Rechtfertigung zur praktischen Durchführung. In der Astronomie wird die Definition der Zeit auf Bewegungen zurückgeführt. Zum einen wird die tägliche Drehung der Erde um ihre Rotationsachse zugrunde gelegt, die auf die Sonne oder den Fixsternhimmel bezogen werden kann. Diese wird als *Rotationszeit* bezeichnet. Die Sekunde als Zeiteinheit wird dann als der

[1] siehe hierzu insbesondere: EICHHORN, H. [1988], pp. 237–241

86400te Teil eines mittleren Sonnentages definiert, was bis 1956 auch die offizielle Zeitdefinition war[1]. Es kann aber auch der jährliche Umlauf der Erde um die Sonne als Basisbewegung genommen werden, die *Revolutionszeit*, die ebenfalls auf Sonne oder Fixsterne bezogen werden kann[2]. Die Sekunde wird dann als der entsprechende Bruchteil eines (mittleren) tropischen Jahres definiert (für die genaue Definition siehe Abschnitt 9.1.1 auf Seite 441). Alle diese Bezugsrichtungen hängen von der Wahl geeigneter Koordinatensysteme ab, so dass unterschiedliche Zeitdefinitionen die Folge sind. Um sie auszugleichen, verzichtet die moderne hochgenaue Zeitmessung auf die astronomische Zeitdefinition und führt sie mit *Atomuhren* durch (siehe hierzu in Abschnitt 9.1.3 auf Seite 448). Neuerdings werden auch die Frequenzen bestimmter Pulsare als Zeitnormal diskutiert, werden aber noch nicht standardmäßig zur Zeitbestimmung eingesetzt.

In der Satellitenbahnmechanik werden alle drei grundlegenden Zeitdefinitionen benötigt, weshalb sie im Folgenden kurz erklärt werden. Die Anforderungen an die Genauigkeit einer Zeitfestlegung sind im Rahmen der Satellitenbahnmechanik sehr unterschiedlich. Für eine Bahnanalyse genügt es, einen Parameter als gleichförmige Zeitskala zu verwenden, der (in etwa) der mittleren Sonnenzeit gleichgesetzt werden kann. Fragen der Bahndynamik oder gar die Berücksichtigung relativistischer Effekte spielen hier für die meisten Anwendungen einer Satellitenbahnanalyse keine Rolle. Anders ist es bei der terrestrischen Beobachtung von Satellitenbewegungen, bei denen kleinere Effekte, insbesondere die Zuordnung der Erdrotation zu einer absolut gleichförmigen Zeitskala wegen der hohen Satellitengeschwindigkeit berücksichtigt werden müssen. Ein Genauigkeitskriterium ist hierbei auch die Öffnung einer Antenne und damit die Notwendigkeit zu einer präzisen Vorhersage einer Beobachtung. Bei der Beobachtung von Körpern des Sonnensystems muss eine Zeiteinheit, die auf das Baryzentrum des Sonnensystems bezogen wird, berücksichtigt werden.

In den folgenden Abschnitten werden die grundlegenden Definitionen zur Zeitfestlegung zusammengestellt, wie sie für eine Bahnanalyse und für elementare Beobachtungen erforderlich sind. Die Problematik einer verfeinerten Zeitdefinition wird anschließend andiskutiert.

9.1.1 Die Sonnenzeit

Die tägliche Bewegung der scheinbaren Sonne um die Erde als Folge der Erdrotation definiert Tag und Nacht auf der Erde und bestimmt so den Zeitablauf des täglichen Lebens, wie er von der Sonnenuhr abgelesen werden kann. Diese Rotation um die Rotationsachse der Erde definiert als Bezugsebene die Erdäquatorebene. Der Bezug eines beliebigen Punktes auf der Erdoberfläche bzw. an der Himmelssphäre kann längs des Äquators hergestellt werden, wenn seine Rektaszension α bekannt ist. Hat die Sonne die Rektaszension $\alpha_\odot$, kann zunächst der *Sonnenwinkel*

$$\tau \;:=\; \alpha - \alpha_\odot \tag{9.1}$$

eingeführt werden. Auf der Erdoberfläche wird die Zeitrechnung einheitlich auf den Meridian durch Greenwich, d. h. auf den Nullmeridian $\lambda = 0°$ bezogen. Dieser hat zu einem bestimmten Zeitpunkt den Stundenwinkel Θ_G. Der Sonnenwinkel des Nullmeridians lautet daher

$$\tau_G \;:=\; \Theta_G - \alpha_\odot \quad . \tag{9.2}$$

Wenn $\tau_G = 0°$, sind Nullmeridian und Sonne in Konjunktion, es ist Mittag. Da die Sonnenzeit jedoch auf Mitternacht bezogen wird, wird die *Sonnenzeit* definiert durch

[1] siehe in: BARNES, J. A. [1974], p. 11

[2] siehe auch in Abschnitt 28.2 in Band IV

$$T \;:=\; \tau_G + 12^h \;=\; \Theta_G - \alpha_\odot + 12^h \quad . \tag{9.3}$$

Für einen beliebigen Ort auf der Erdoberfläche mit der geographischen Länge λ wird die *Orts-Sonnenzeit* (lokale Sonnenzeit) entsprechend durch

$$T_\lambda \;:=\; \Theta_G + \lambda - \alpha_\odot + 12^h \tag{9.4}$$

definiert. Die Aufgabe einer Zeitbestimmung wird nach dieser Formel darauf zurückgeführt, eine Theorie über die Bewegung der Sonne aufzustellen sowie die Erdrotation formelmäßig zu beschreiben.

Die Sonne bewegt sich, wie leicht zu beobachten ist, nicht gleichförmig in der Äquatorebene, sondern ungleichförmig in der Ekliptik. Dies hat im Jahresverlauf nicht nur eine unterschiedliche Sonnenscheindauer, sondern auch eine variable Tageslänge zur Folge. Die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne um die Erde ist daher nicht als Grundlage für ein gleichförmiges Zeitmaß geeignet. Präzise Beobachtungen zeigen, dass auch die Erdrotation nicht völlig gleichmäßig erfolgt. Die Aufgabe einer Zeittheorie besteht somit darin, ein gleichförmiges Zeitmaß zu finden, das über die Formeln (9.3) zur Beschreibung der wahren Sonnenbewegung und der wahren Erdrotation geeignet ist. Dies wird zunächst dadurch erreicht, dass an Stelle der ungleichförmigen Rotationssonnenzeit versucht wird, die Sonnenzeit auf die Revolution der Erde um die Sonne zu beziehen.

9.1.1.1 Die mittlere Sonnenzeit

Die Rotationssonnenzeit ist nach Formel (9.3) als Differenz zweier Rektaszensionen vom Frühlingspunkt unabhängig. Wird allerdings die Bewegung der scheinbaren Sonne im Jahresverlauf zugrunde gelegt, also die Revolution der scheinbaren Sonne um die Erde, wird somit die Revolutionszeit als Grundlage der Zeitdefinition gewählt. Der Bezug dieser Bewegung ist der Frühlingspunkt, die betrachtete Bewegung ist also eine tropische. Ein tropisches Jahr Y_t wird als Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der (scheinbaren) Sonne durch den Frühlingspunkt definiert. Der so bestimmte Wert des tropischen Jahres wird der mittleren Sonnenzeit zugrunde gelegt: Dazu wird eine „fiktive mittlere Sonne“ definiert[1], die sich im Jahresverlauf im Äquator gleichförmig mit der mittleren Bewegung

$$n_\odot \;:=\; \frac{1}{Y_t} \tag{9.5}$$

bewegt, die also im Verlauf eines tropischen Jahres einmal die Erde umläuft ebenso wie die „wahre“ scheinbare Sonne in der Ekliptik. Ist die Dauer des tropischen Jahres in Sonnentagen bekannt, kann die Dauer *d* des mittleren Sonnentages als entsprechender Bruchteil des tropischen Jahres definiert werden. Dies ist die astronomische Zeiteinheit. Die physikalische Zeiteinheit ist die Sekunde, also der 86400te Teil eines mittleren Sonnentages.

Bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 hat ein tropisches Jahr die Dauer[2]

$$Y_t \;=\; 365^d.2421896698 - 0.00000615359\,T - 7.29\times10^{-10}T^2 + 2.64\times10^{-10}T^3 \quad , \tag{9.6}$$

wobei

$$T \;:=\; (Jd - 2451545 + t/86400.0 - 0.5)\times\frac{1}{36525} \tag{9.7}$$

---

[1] Begriff nach *S. Newcomb*

[2] siehe etwa in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 576, nach: LASKAR, J. [1986]: ‘Secular Terms of Classical Planetary Theories Using the Results of General Relativity’, *Astron. Astrophys.* ***157***, pp. 59–70

die Anzahl der julianischen Jahrhunderte seit der Fundamentalepoche J2000.0 ist.

Jd ist die julianische Tagesnummer zu einem bestimmten Datum, das in Jahr, Monat, Tag gegeben ist, und kann für den Zeitraum 1850 bis 2050 aus den Tabellen in Anhang F (in Band V) abgelesen werden. Bei dieser Definition der julianischen Tagesnummer werden anders als mit dem julianischen Datum in der astronomischen Praxis mit der julianischen Tagesnummer und der Tageszeit *t* in Sekunden zwei Werte zur Definition eines Zeitpunktes verwendet. In der Satellitenbahnmechanik wird gelegentlich das *modifizierte julianische Datum* verwendet. Ist *Jd* die (stets ganzzahlige) julianische Tagesnummer und *t* die Tageszeit in Sekunden, lautet das zugehörige julianische Datum

$$JD \;=\; Jd + t/86400.0 - 0.5 \tag{9.8}$$

und das zugehörige *modifizierte julianische Datum*

$$MJD \;=\; JD - 2400000.5 \quad . \tag{9.9}$$

Das *MJD* ist somit auf Mitternacht (einer näher zu spezifizierenden Weltzeit, bezogen auf den Meridian durch Greenwich) bezogen[1].

$n_\odot \left[\frac{\text{Winkelmaß}}{\text{Zeitmaß}}\right]$	**Tag** [*d*]	**Stunde** [*h*]	**Minute** [*m*]	**Sekunde** [*s*]
Grad	0°.985647240	0°.041068635	0°.000684477	0°.000011408
Bogenminuten	59′.13883442	2′.464118100	0′.041068635	0′.000684477
Bogensekunden	3548″.330065	147″.8470860	2″.464118101	0″.041068635
Bogenmaß	0.017202790	7.167829×10^{-4}	1.194638×10^{-5}	1.991063×10^{-7}
Stundenmaß	0^h.065709816	0^h.002737909	0^h.00004563181	$7^h.605302 \times 10^{-7}$
Minutenmaß	3^m.942588962	0^m.164274540	0^m.0027379093	$4^m.563181 \times 10^{-5}$
Sekundenmaß	236^s.5553377	9^s.856472404	0^s.164274540	$2^s.737909 \times 10^{-3}$

Tabelle 9-1 : Die mittlere tropische Bewegung der scheinbaren Sonne zur Standardepoche J2000.0 in verschiedenen Maßsystemen, Bezugswert: $n_\odot$ = 0.002737909350795 (Winkeleinheitsmaß / Zeiteinheitsmaß)

Da der Ausdruck (9.6) keine periodischen Glieder enthält, wird das so erhaltene Zeitintervall als „mittleres tropisches Jahr“ bezeichnet. Das tropische Jahr ist jedoch nicht konstant und daher in dieser Form nicht als Grundlage für die Zeitrechnung geeignet. Die Definition der Zeit muss deshalb auf eine bestimmte Zeitepoche bezogen werden, wozu derzeit die Fundamentalepoche J2000.0 gewählt wird. Die Dauer eines mittleren Sonnentages wird danach definiert als der 365.2421896698te Teil des tropischen Jahres, das am 1. Jan. 2000, 12^h mittlere Sonnenzeit beginnt. Die mittlere Bewegung wird damit von einer Variation freigehalten und definiert durch[2]

$$n_\odot \;=\; \frac{1}{365.2421896698} \;=\; 0.002737909350795 \quad . \tag{9.10}$$

Die fiktive mittlere Sonne $\bar{\odot}$ hat zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* in Bezug auf eine Epoche t_0 die Rektaszension

[1] siehe etwa in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 8., Weiteres und Beispiele hierzu in Anhang F, Band IV

[2] siehe in: AOKI, S. et al. [1982], p. 361

$$\alpha_{\bar{\odot}} = \alpha_{\bar{\odot},0} + n_{\odot}(t - t_0) \quad , \tag{9.11}$$

wobei *t* in einer gleichförmigen Zeitskala gegeben ist. Für die praktische Anwendung wird in Tabelle 9-1 die mittlere Bewegung $n_{\odot}$ der (scheinbaren) Sonne in verschiedenen Maßsystemen gegeben.

9.1.1.2 Die wahre Sonnenzeit

Die Erdrotation unterliegt säkularen, periodischen und unregelmäßigen Veränderungen. Die periodischen Schwankungen sind jahreszeitlich bedingt. Sie unterliegen auf Grund meteorologischer Ursachen einer ganzjährigen Periode mit der Amplitude 22ms, auf Grund der Gezeitenkräfte der Sonne einer halbjährigen Periode mit der Amplitude 10ms, sowie auf Grund der Gezeitenkräfte des Mondes einer 13.8 und 27.6-tägigen Periode. Diese Effekte bewirken Schwankungen in der Rotationssonnenzeit, die im Mai ein Vorgehen der wahren Sonnenzeit um 30ms, im September ein Nachgehen um 25ms verursachen. Entsprechend sind auch Unterschiede der Tageslänge zu erwarten, die maximal einen Fehler von etwa 0.6ms Abweichung, also einen Fehler von 10^{-8} ausmachen. Die säkularen Veränderungen sind (u.a.) eine Folge der säkularen Akzeleration des Mondes. Die siderische Umlaufzeit des Mondes um die Erde wird im Jahrhundert um 8″ kürzer. 6″ sind eine Folge der säkularen Abnahme der Exzentrizität der Erdbahn und die restlichen 2″ einer Änderung des Zeitmaßes. Die unregelmäßigen Schwankungen stammen zum Teil von Massenversetzungen im Erdkörper, zum Teil sind sie noch nicht erforscht. Jedenfalls sind sie nicht vorhersagbar. Man beobachtet derzeit einer Abnahme der Tageslänge von 1^s bezogen auf 60000 Jahre, d.h. von Tag zu Tag um $4.8*10^{-8}$ s.

Die Bewegung der wahren Sonne und damit auch die durch sie definierte wahre Sonnenzeit wie sie durch die Sonnenuhr gemessen werden kann ist für die Zeittheorie ohne jedes Interesse, da sie kein gleichmäßiges Zeitmaß definieren kann. Sie wird daher im Rahmen dieses Kapitels nicht behandelt. Die wahre Sonne und damit auch die wahre Sonnenzeit ist jedoch für die Untersuchung einer Satellitenbewegung von fundamentaler Bedeutung. Sie wird daher im Zusammenhang mit der sonnenbezogenen Satellitenbewegung in Kapitel 28 genauer untersucht[1].

9.1.2 Die Sternzeit

Als *Sterntag* wird das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen eines Meridians auf der Erdoberfläche mit dem Frühlingspunkt definiert. Der Sterntag wird somit auf die Erdrotation bezogen. Als Sternzeit wird der Stundenwinkel des betreffenden Meridians mit der geographischen Länge λ bezogen auf den mittleren Frühlingspunkt definiert. Da dieser Stundenwinkel auf den Frühlingspunkt bezogen ist, ist er der Rektaszension des Meridians gleich:

$$\Theta := \alpha_{\lambda} \quad . \tag{9.12}$$

Die Sternzeit kann also prinzipiell aus der Beobachtung von Objekten am Sternhimmel beobachtet werden. Für einen einheitlichen Bezug wird die Sternzeit Θ_G des Nullmeridians durch Greenwich gewählt, so dass die Sternzeit des Ortsmeridians (bei positiver Zählung der geographischen Länge nach Osten) aus

[1] Band IV

$$\Theta \;:=\; \Theta_G + \lambda \tag{9.13}$$

lautet. Ist die Sternzeit Θ_{G0} um 0^h Greenwich Zeit bekannt, kann mit der säkularen tropischen Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde die Sternzeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt *t* berechnet werden:

$$\Theta_G \;:=\; \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\,(t - t_0) \quad , \tag{9.14}$$

wenn Θ_{G0} die Sternzeit zur Zeit t_0 ist. Diese Beziehungen sind in der Satellitenbahnmechanik von fundamentaler Bedeutung, wenn die Bewegung eines Satelliten (oder eines anderen Objektes) der Erdoberfläche zugeordnet werden soll.

9.1.2.1 Die mittlere Sternzeit

Da die Erdrotation nicht gleichmäßig erfolgt, kann die Sternzeit im strengen physikalischen Sinn nicht als Zeitmaß verwendet werden. Gleichwohl wird die Weltzeit (U.T.) durch Bezug auf eine mittlere Sternzeit definiert, die bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 durch folgenden Ausdruck für die Sternzeit in Greenwich um 0^h Weltzeit (= mittlerer Sonnenzeit) gegeben ist:

$$\Theta_{G0} \;:=\; 24110^s.54841 + 8640184^s.812866\,T_U + 0^s.093104\,T_U^2 - 6^s.2\times10^{-6}\,T_U^3 \quad . \tag{9.15}$$

Dieser Ausdruck dient als Definition der Weltzeit (U.T.1), wie sie im Zusammenhang mit dem auf dem FK5 basierenden Referenzsystem verwendet werden soll[1]. Hier bedeutet T_U die Weltzeit in julianischen Jahrhunderten, die seit der Fundamentalepoche J2000.0 vergangen ist. Wird die Sternzeit zu einem Datum mit der julianischen Tagesnummer *Jd* benötigt, ist

$$T_U \;=\; \frac{2451545 - Jd - 0.5}{36525} \quad . \tag{9.16}$$

Die Anzahl der Sternzeitsekunden in einem mittleren Sonnentag (U.T.1) beträgt[2]

$$s(1d) \;=\; 86636^s.55536790872 + 5^s.098097\times10^{-6}T - 5^s.09\times10^{-10}T^2 \quad , \tag{9.17}$$

wobei das Zeitintervall *T* in mittlerer Sonnenzeit (hier genaugenommen in einer dynamischen Zeit, etwa Ephemeridenzeit (s. u.) oder TDB) gerechnet werden muss. Damit ergibt sich das Verhältnis von mittlerer Sonnenzeit zu mittlerer Sternzeit (= Länge eines Sterntages in Einheiten eines mittleren Sonnentages in UT1) aus

$$r' \;=\; \frac{86400^s.0}{s(1d)} \;=\; 0.997269566329084 - 5\,.8684\times10^{-11}T + 5.9\times10^{-15}T^2 \tag{9.18}$$

und das Verhältnis von mittlerer Sternzeit zu mittlerer Sonnenzeit aus

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} \;&=\; \frac{1}{r'} \;=\; \frac{s(1d)}{86400^s.0} \;= \\ &=\; 1.002737909350795 + 5\,.9006\times10^{-11}T - 5.9\times10^{-15}T^2 \quad .\end{aligned} \tag{9.19}$$

Die letzte Größe $\dot{\Theta}$ gibt die Erdrotation in Bezug auf den Frühlingspunkt an, bestimmt also den momentanen Wert der Sternzeit Θ . Wegen seiner Bedeutung in der Satellitenbahnmechanik ist dieser Wert in Tabelle 9-2 in verschiedenen Maßsystemen angegeben. Für Zwecke der Satellitenbahnanalyse kann die kleine säkulare Variation in Formel (9.19) vernachlässigt

---

[1] siehe in: AOKI, S. et al. [1982], p. 360; eine zwischenzeitlich erfolgte Weiterentwicklung des Grundgedankens zur Definition der mittleren Sonnenzeit durch die Weltzeit U.T.1; siehe in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 50–51

[2] AOKI, S. et al. [1982], p. 361

werden, sie wird aber bei der Berechnung der Sternzeit als Grundlage für präzise Beobachtungen mit berechnet.

$\dot{\Theta}_0 \left[\frac{\text{Winkelmaß}}{\text{Zeitmaß}}\right]$	**Tag** [d]	**Stunde** [h]	**Minute** [m]	**Sekunde** [s]
Grad	360°.985647240	15°.041068635	0°.250684477	$4°.178074 \times 10^{-3}$
Bogenminuten	21659′.13883442	902′.4641184	15′.041068635	0′.250684477
Bogensekunden	1299548″.330065	54147″.8470860	902″.4641184	15″.041068635
Bogenmaß	6.300388096	0.262516171	0.004375270	7.292115×10^{-5}
Stundenmaß	$24^{h}.065709816$	$1^{h}.0027379093$	$0^{h}.016712298$	$2^{h}.785383 \times 10^{-4}$
Minutenmaß	$1443^{m}.942588962$	$60^{m}.164274540$	$1^{m}.0027379093$	$1^{m}.671229 \times 10^{-2}$
Sekundenmaß	$86636^{s}.5553377$	$3600^{s}.856472404$	$60^{s}.164274540$	$1^{s}.00273791\ \% \ 10^{-3}$

Tabelle 9-2: Die mittlere Variation der Sternzeit (tropische Erdrotation) zur Standardepoche J2000.0 in verschiedenen Maßsystemen, Bezugswert: $\dot{\Theta}_0 = 1.002737909350795$ (1 Sternjahr / 1 tropisches Sonnenjahr)

Formel (9.18) auf S. 445 zeigte, dass ein (mittlerer) Sterntag kürzer als ein (mittlerer) Sonnentag ist. Die Erde bewegt sich in ihrer Bahn in Bezug auf die Sonne pro mittlerem Sonnentag d um den Winkel $\sphericalangle(n_\odot\, d)$, während die Rotation der Erde um ihre Achse in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne um genau diesen Winkel pro mittlerem Sonnentag weiter erfolgt ist. In Bild 9-1 auf Seite 447 entspricht dieser tägliche Bogen der Strecke von *A* nach *B*. *A* bezeichnet den auf einen Anfangs-Frühlingspunkt Υ_0 bezogenen Ausgangspunkt einer Erdrotation, der zum Frühlingspunkt den Winkelabstand $180° + \Delta_1$ habe. Der mittlere Sonnentag ist dann um den Winkel $\sphericalangle(n_\odot\, d)$ länger als die tropische Erdrotation. Nach genau einem tropischen Jahr hat die Erde somit genau eine Rotation mehr ausgeführt, es entsprechen also (in den Zahlenwerten bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0)

$$365^{d}.2421896698 \;\Leftrightarrow\; 366^{d}.2421896698 \text{ Erdrotationen} \quad . \tag{9.20}$$

Dieser Zeitraum wird als ein *Sternjahr* bezeichnet, das somit aus

$$S_t = 366.2421896698 \tag{9.21}$$

mittleren Sterntagen besteht. Das Verhältnis aus Sternjahr und tropischem (Sonnen-) Jahr ist somit wieder die tropische Rotationsperiode der Erde:

$$\dot{\Theta} = \frac{S_t}{Y_t} = \frac{366.2421896698}{365.2421896698} \quad . \tag{9.22}$$

Allgemein folgt daraus die wichtige und für die Bahnauslegung von Erdsatelliten grundlegende Beziehung zwischen Variation der mittleren Sternzeit und mittlerer Sonnenbewegung

$$\dot{\Theta} = 1 + n_\odot \quad . \tag{9.23}$$

Ein Sterntag hat in mittlerer Sonnenzeit die Dauer

$$1\,\mathrm{ST} \;=\; \frac{1^d}{\dot{\Theta}} \;=\; \frac{24^h}{1.002737909350795} \;=\; 23^h56^m04^s.0906 \qquad (J2000.0\,TDB) \qquad .(9.24)$$

Bild 9-1: Vergleich eines Sterntages zu einem Sonnentag

BEISPIEL 1: Genäherte Berechnung der mittleren Sternzeit aus der Weltzeit (U.T.1):

Für eine Überschlagsrechnung kann die säkulare Variation in der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ in dem Ausdruck (9.19) auf S. 445 vernachlässigt werden. Welche Sternzeit (= mittlere Ortssternzeit) ist am 3. August 1976 MEZ in Oberpfaffenhofen ($\lambda = 11°.2792$)?

Nach Anhang E[1] lautet die julianische Tagesnummer am 3. Aug. 1976: Jd = 2442994.

Das Zeitintervall für 0^h U.T. zur Fundamentalepoche J2000.0 beträgt nach Formel (9.16) auf S. 445: T = –0.234127310 (Jhrh.).

Die Sternzeit um 0^h U.T. beträgt nach Formel (9.15) auf S. 445: $\Theta_{G0} = 311°.6971800$.

Die Tageszeit in U.T. beträgt: $t = 47954^s.0 = 13^h.320556$.

Die (säkulare) Variation der Sternzeit beträgt nach Tabelle 9-2 auf S. 446: $\dot{\Theta} = 15°.041068639 / h$.

Die mittlere Sternzeit hat somit am 3. Aug. 1976 um $14^s19^m14^s$ MEZ $\Leftrightarrow$ $13^h19^m14^s$ U.T. nach den Formeln (9.13) und (9.14) auf S. 445 den Wert $\Theta = 163°.33157704$. ◀

[1] enthalten in Band V

9.1.2.2 Berechnung der Weltzeit aus der mittleren Sternzeit

Aus den Formeln (9.13) und (9.14) auf S. 445 kann die Weltzeit t an einem bestimmten Tag berechnet werden. Wenn insbesondere der Bezug zu Mitternacht $t_0 = 0^h.000$ U.T. hergestellt werden soll, ergibt sich aus der Sternzeit Θ, die an einem Tag *Jd* an einem Ort mit der (östlichen) geographischen Länge λ gemessen wurde,

$$t = \frac{\Theta - \Theta_{G0} - \lambda}{\dot{\Theta}} \quad . \tag{9.25}$$

Da ein Sterntag kürzer als ein Sonnentag ist, ist die Berechnung von t unter Umständen nicht eindeutig. Dies ist der Fall, wenn die Sternzeit in den Überschuss von 360° fällt, d. h.

1. wenn $\Theta < 0°.9856472$. Dann lautet neben einer ersten Lösung t_1 eine zweite $t_2 = t_1 + 86164^s.09058$;
2. wenn $\Theta > 359°.0143528$. Dann lautet neben einer ersten Lösung t_1 eine zweite $t_2 = t_1 - 86164^s.09058$.

BEISPIEL 2: *Genäherte Berechnung der Weltzeit aus der mittleren Ortssternzeit*:

Am 4. August 1976 werde in San Diego ($\lambda = 242°55'48''.3$, $\varphi = 32°46'35''.22$, $H = 0.146$ km) die mittlere Sternzeit $\Theta = 206°.2816667$ gemessen. Wieviel Uhr Weltzeit ist es zu diesem Zeitpunkt?

Nach Anhang F (Band V) lautet die julianische Tagesnummer am 4. Aug. 1976: *Jd* = 2442995.

Das Zeitintervall für 0^h U.T. zur Fundamentalepoche J2000.0 beträgt nach Formel (9.16) auf S. 445: T = –0.234099932 (Jhrh.).

Die Sternzeit um 0^h U.T. beträgt nach Formel (9.15) auf S. 445: $\Theta_{G0} = 312°.6828132$.

Die geographische Länge lautet: $\lambda = 242°.9300833$.

Die (säkulare) Variation der Sternzeit beträgt nach Tabelle 9-2 auf S. 446: $\dot{\Theta} = 15°.041068639 / h$.

Die Weltzeit beträgt dann mit Formel (9.25) $t = 0^h42^m33^s.5$ (U.T.). ◀

9.1.3 Überblick Zeitskalen

Mit zunehmender Messgenauigkeit und den theoretischen Fortschritten (allgemeine Relativitätstheorie) wurden die Anforderungen an die Zeitbestimmung immer kritischer. In den letzten Jahren seit der Mitte des 20. Jahrhunderts haben sich die grundlegenden Definitionen gewandelt und führten zu unterschiedlichen an den jeweiligen Zweck gebundenen Aussagen. Die an eine Bewegung gebundenen Zeitdefinitionen (Erdrotation, Revolution der Erde um die Sonne) sind nach wie vor grundlegend als Grundlage für astronomische Beobachtungen, da sie von einem bewegten Beobachtungsort aus durchgeführt werden müssen (UT1). Für einen allgemeingültigen Bezug müssen diese Beobachtungen jedoch auf ein unabhängiges Zeitmaß reduziert werden. Als solches wird derzeit die Atomzeit (TAI) verwendet. Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt eine Bewegungsabhängigkeit des Zeitverlaufs bewegter Objekte. Dies führt zur Einführung dynamischer Zeiten, je nachdem ob sich um die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne (TT, TCG), die Bewegung eines Satelliten um die Erde, den Bezug auf das Baryzentrum des Sonnensystems (TCB, TDB) handelt.

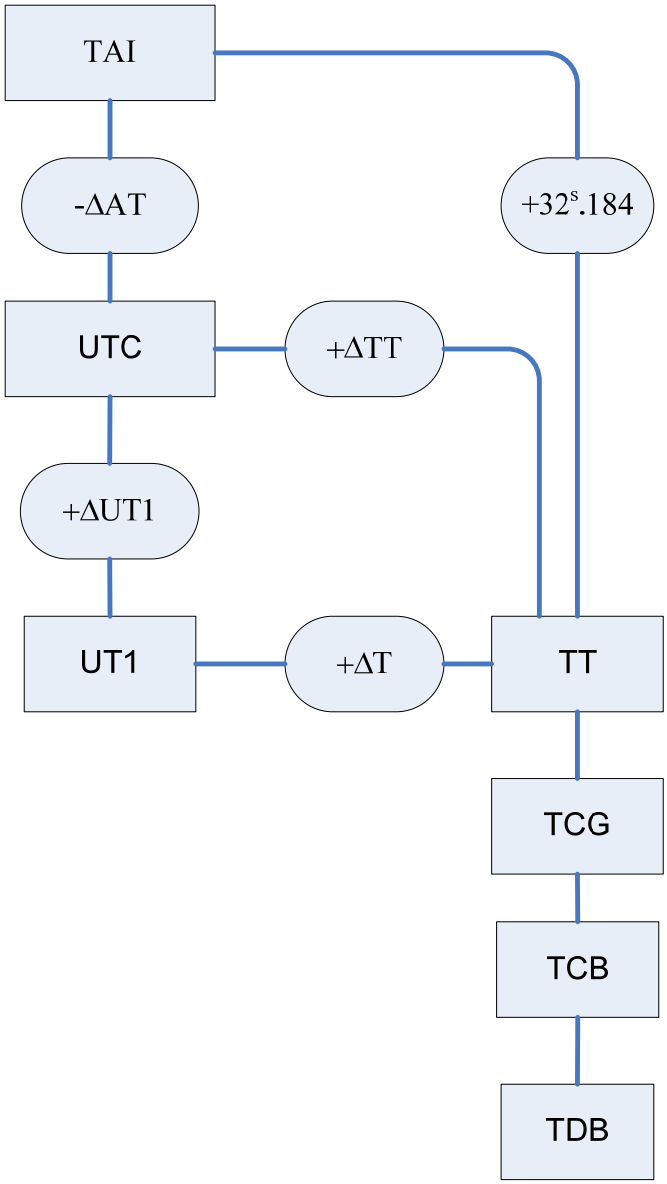


Bild 9-2: Die Beziehungen zwischen den derzeit aktuellen Zeitdefinitionen (Kopie aus: SOFA[2010/2], p.11)

9.1.3.1 Die Atomzeit (TAI)[1]

Die fundamentale und offiziell gültige Zeiteinheit ist die SI Sekunde (Système International). Sie ist definiert (um einen Bezug zur klassischen Sonnenzeit zu ermöglichen) als die Dauer von 9192631770 Schwingungen für den Strahlungsübergang zwischen den zwei untersten Schalen des Grundzustandes des Cäsium 133 Atoms. Der ständige Wechsel der so erreichten Energiezustände des Cäsiumatoms wird durch elektronische Strahlung mit einer charakteristischen Frequenz erzwungen. Die genaue von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig gegebene Definition lautet[2]:

[1] Näheres siehe etwa in: SEIDELMANN, P. K. ED. [1992]: p.40, p.60. SOFA [2010/2], p. 12

[2] http://www.atomzeit.de/

Die Hyperfeinstruktur-Übertragungsfrequenz im Grundzustand des Cäsiumatoms ermöglicht eine sehr genaue und einheitliche Zeitmessung. Sie hat eine Ungenauigkeit kleiner als 5 x 10-12. Das Frequenznormal der PTB hat eine Ungenauigkeit von sogar weniger als 0.65 x 10-14. Eine Sekunde ist folgendermaßen definiert: Die Sekunde ist das 9.192.631.770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hybridfeinstrukturenniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung.

9.1.3.2 Dynamische Zeiten

Dynamische Zeiten werden als unabhängige Variable in den Bewegungsgleichungen für die Himmelskörper im Sonnensystem verwendet. Im Hinblick auf die Relativitätstheorie hängen diese unabhängigen Variablen vom verwendeten Koordinatensystem als Referenzsystem ab. Entsprechend gibt es eine Familie von baryzentrischen dynamischen Zeitskalen, sowie für scheinbare geozentrische Ephemeriden eine terrestrische dynamische Zeit. Die verwendeten dynamischen Zeitskalen hängen von der jeweils verwendeten Theorie ab und können daher nicht als unabhängige Zeiteinheit verwendet werden. Als solche dient (derzeit) die Atomzeit[1].

Aus Referenzgründen werden die Definitionen der wichtigsten Zeitskalen zusammengestellt:

TT – Terrestrial time (früher TDT – terrestrial dynamical time genannt]: Zeitskala für die Beobachtung der scheinbaren Bewegung der Körper des Sonnensystems von der Erde aus. Dazu gehört auch die Beobachtung von Erdsatelliten. Der Bezug zur Atomzeit ist konstant und beträgt zurzeit näherungsweise

$$TT\left(TAI\right) - TAI = 32^{s}.184 \tag{9.26}$$

SI – Sekunden. Die Klammer nach TT gibt den Bezug von TT an. Es sind auch andere Bezüge möglich (daher die offizielle Unterscheidung).

TCG – Geocentric Coordinate Time: für Berechnungen, die auf die Erde (Erdmittelpunkt) in ihrer Bewegung im Weltraum bezogen werden.

TCB – Barycentric Coordinate Time: verwendet für Berechnungen außerhalb der Erdbahn (Bezug auf das Baryzentrum des Sonnensystems).

TDB – Barycentric Dynamical Time: eine spezielle Form von TCB, welche im Mittel einen Bezug zur TT erlaubt.

TT und TCG einerseits, sowie TCB und TDB andererseits unterscheiden sich voneinander durch lineare Beziehungen.

9.1.3.3 Zeitreduktion

Als Sonnenzeit werden verwendet:

UTC - Universal Time Coordinated: die Basis für das bürgerliche Leben, als Standardzeit per Funk (Radio) verteilt. Sie unterscheidet sich von der Atomzeit TAI durch eine ganze Anzahl von Sekunden:

$$\Delta AT = TAI - UTC \quad . \tag{9.27}$$

UT1 – Universal Time: Bezug auf die Erdrotation.

[1] Etwa nach SEIDELMANN, P. K. ed. [1992]: pp.41-48 und SOFA [2010/2], p. 9

Die Differenz

$$\Delta UT1 = UT1 - UTC \tag{9.28}$$

wird durch Funksignale verbreitet.

Aus historischen Gründen wird noch die Größe

$$\Delta T = TT - UT1 = 32^s.184 + \Delta AT - \Delta UT1 \tag{9.29}$$

verwendet. Ursprüngliche Aufgabe war den Bezug der Sonnenzeit zur Ephemeridenzeit (jetzt TT) herzustellen.

9.2 Eigenbewegung

Aussagen über das Bewegungsverhalten von Satelliten, planetaren oder stellaren Objekten benötigen den momentanen Zustand in einem aktuellen Koordinatensystem. Zur Berechnung des momentanen Zustandes wird die Kenntnis des Zustandes zu einer Epoche vorausgesetzt. Von dieser Epoche an wird zum aktuellen Zeitpunkt unter Berücksichtigung der *Eigenbewegung* des Objektes vorwärtsintegriert. Diese Berechnung erfolgt in einem als fest angenommenen Koordinatensystem. Das Ergebnis muss anschließend in das aktuelle Koordinatensystem transformiert werden.

9.2.1 Eigenbewegung von Satelliten und heliozentrischen Objekten

Die Eigenbewegung von Satelliten bzw. Orbitern ist ein wesentlicher Bestandteil dieses Berichtes und wird ab Kapitel 10 detailliert behandelt[1]. Die Eigenbewegung von Planeten, Sonden und anderen Objekten im interplanetaren Raum werden im Zusammenhang mit der synodischen Bewegung von Satelliten im Kapitel 30 vereinfacht dargestellt.

9.2.2 Baryzentrische Eigenbewegung stellarer Objekte

Entgegen den analytisch oder numerisch weitgehend erfassbaren Bewegungen von Satelliten und interplanetaren Objekten ist eine Eigenbewegung der meisten stellaren oder interstellaren Objekte wegen ihrer großen Entfernungen entweder gar nicht oder nur sehr grob aus Beobachtungen bekannt. Wegen der Unkenntnis der *wahren* (Eigen-) Bewegung der stellaren und interstellaren Objekte kann allenfalls eine lineare Bewegung relativ zum Sonnensystem beobachtet und vorausberechnet werden.

Sei $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ der baryzentrische (also auf das Baryzentrum des Sonnensystems bezogene) Ortsvektor eines stellaren Objektes zur Epoche t_1, so errechnet sich der baryzentrische Ort $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 näherungsweise aus

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (t_2 - t_1) \quad . \tag{9.30}$$

Der Geschwindigkeitsvektor („space motion vector“) $\dot{\mathbf{r}}(t_1)$ charakterisiert die Eigenbewegung des Objektes. Der Beobachtung zugänglich sind die Polarkoordinaten $\mathbf{r}_1 \Leftrightarrow r_1[\alpha_1, \delta_1]$ des Objektes, wobei α_1, δ_1 die baryzentrische Rektaszension und Deklination in einem zu t_1 gültigen Koordinatensystem sind. Die Distanz r_1 [in astronomischen Einheiten AU] wird aus der Parallaxe π_1, die in Bogensekunden gegeben ist (siehe Bild 9-3), mit

[1] Band III

$$\sin \pi_1 \approx \pi_1 [1''] \left[\frac{1^\circ}{3600''} \frac{\pi}{180^\circ} \right] = \frac{1[AU]}{r_1[AU]} \tag{9.31}$$

aus

$$r_1 = \frac{1}{\sin(\pi_1)} \approx \frac{1}{\pi_1} \cdot 2.062648062 \cdot 10^5 [AU] \tag{9.32}$$

berechnet. Somit ist in äquatorialen Koordinaten $\mathbf{r}_1 = x_1^i \mathbf{p}_i$

$$\mathbf{r}_1 <=> \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} \cos\delta_1 \cos\alpha_1 \\ \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \\ \sin\delta_1 \end{bmatrix} [AU] \tag{9.33}$$

und zum Zeitpunkt t_2 mit $\mathbf{r}_2 = x_2^i \mathbf{p}_i$, mit $\pi_2 \; r_2 = 1$,

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} \cos\delta_2 \cos\alpha_2 \\ \cos\delta_2 \sin\alpha_2 \\ \sin\delta_2 \end{bmatrix} [AU] \quad . \tag{9.34}$$

Bild 9-3: Parallaxe π_1 und geozentrische Entfernung r_1 [AU] eines stellaren Objektes Σ

Damit gilt für den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t_1 in äquatorialen Koordinaten

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_1}{r_1} <=> \frac{1}{r_1}\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \dot{x}_{12}\\ \dot{x}_{13}\end{bmatrix} = \frac{\dot{r}_1}{r_1}\begin{bmatrix}\cos\delta_1\cos\alpha_1\\ \cos\delta_1\sin\alpha_1\\ \sin\delta_1\end{bmatrix} + \dot{\alpha}_1\cos\delta_1\begin{bmatrix}-\sin\alpha_1\\ \cos\alpha_1\\ 0\end{bmatrix} + \dot{\delta}_1\begin{bmatrix}-\sin\delta_1\cos\alpha_1\\ -\sin\delta_1\sin\alpha_1\\ \cos\delta_1\end{bmatrix} \quad . \tag{9.35}$$

Hier sind die Größen

$$\dot{r}_1 = V_{r,1} = \text{Radialgeschwindigkeit } [AU/d]$$
$$\dot{\alpha}_1 = \mu_{\alpha,1} = \text{Eigenbewegung in Rektaszension } [\text{sec}/cy]$$
$$\dot{\delta}_1 = \mu_{\delta,1} = \text{Eigenbewegung in Deklination } [arc\,\text{sec}/cy]$$

Eingangsgrößen, die aus der Beobachtung zum Zeitpunkt t_1 erhalten wurden. Aus Formel (9.30) folgt daher

$$r(t_2) = r_2 = r_1\sqrt{1+2\frac{\dot{r}_1}{r_1}(t_2-t_1)+\left(\frac{\dot{r}_1^2}{r_1^2}+\dot{\alpha}_1^2\cos^2\delta_1+\dot{\delta}_1^2\right)(t_2-t_1)^2} \tag{9.36}$$

und daher schließlich

$$\frac{\mathbf{r}_2}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}+\frac{\dot{\mathbf{r}}_1}{r_1}(t_2-t_1)\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\cos\delta_{2,1}\cos\alpha_{2,1}\\ \cos\delta_{2,1}\sin\alpha_{2,1}\\ \sin\delta_{2,1}\end{bmatrix} \quad . \tag{9.37}$$

Hier bedeutet der Doppelindex <2,1>, dass der Ort $\mathbf{r}_2 = x_2^i\,\mathbf{p}_i$ des stellaren Objektes zum Zeitpunkt t_2 in Koordinaten zum Zeitpunkt t_1 gegeben ist, präzise ausgedrückt bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium zur Epoche t_1. Falls genauere Beobachtungen der betreffenden Eigenbewegung gemacht werden, muss bei einem Ergebnis auch stets mit angegeben werden, bezogen auf welche Epoche und mit welcher Eigenbewegung es erhalten wurde, da prinzipiell wegen der Linearisation (9.30) Unterschiede (wenn auch minimale) erwartet werden müssen.

Anmerkungen zur praktischen Rechnung: Zur Berechnung der Eigenbewegung eines stellaren Objektes werden zu einer Epoche t_1 folgende Größen gegeben:

- der mittlere Ort (α_1, δ_1) ,
- die Parallaxe in Bogensekunden: $\pi_1\,['']$, woraus der Abstand r_1 nach Formel (9.29) berechnet werden kann. Zur Umrechnung in Kilometer wird mit der astronomischen Einheit *AU* (Zahlenwert aus Anhang D)

$$r_1 = \frac{1}{\sin\pi_1}\,[AU] \tag{9.38}$$

$$r_1 = \frac{AU}{\sin\pi_1}\,[\text{km}] \tag{9.39}$$

  erhalten. Wenn π_1 unbekannt ist, wird üblicherweise $\pi_1 = 1'' \cdot 10^{-7}$ entsprechend $r_1 = 10\,Mpc$ gesetzt[1].
- die Radialgeschwindigkeit $V_R\,[\text{km/s}]$,

[1] S SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], p.121

- die Eigenbewegung in Rektaszension $\mu_\alpha \left[\text{s/Julian. Jahrhunderte}\right]$,
- die Eigenbewegung in Deklination $\mu_\delta \left[''/\text{Julian. Jahrhunderte}\right]$.

Die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ wird mit Hilfe des julianischen Datums, also in Tagen berechnet. Somit ist die Umrechnung der Eigenbewegung auf die Dimension rad/s nötig.

Bild 9-4: Baryzentrische und geozentrische Eigenbewegung,
S_1, S_2 – Stern zum Zeitpunkt t_1, t_2, B – Baryzentrum,
$\mathbf{r}_{\oplus B2}$ – baryzentrischer Ortsvektor der Erde zum Zeitpunkt t_2

Sei *Jd* die julianische Tagesnummer für ein gegebenes Datum[1], *t* die Tageszeit in Sekunden, errechnet sich das julianische Datum aus

$$JD = Jd - 0.5 + \frac{t}{86400}\left[d\right]$$

und die Zeitdifferenz in Tagen folgt aus

$$t_2 - t_1 = JD_2 - JD_1 \quad ,$$

wenn JD_2 und JD_1 die julianischen Daten an den beiden gegebenen Zeitpunkten sind. Mit

$$1\,AU\left[IAU, 1976\right] = 1.49597870 \times 10^8 \text{ km}$$

folgen, wenn π_1 in [Bogensekunden] gegeben ist, $V_{r,1}$ in [km/s], $\mu_{\alpha,1}$ in [s/cy], sowie $\mu_{\delta,1}$ in [arcsec/cy],

[1] etwa nach Anhang E, Das Julianische Datum, in Band V

$$\frac{\dot{r}_1}{r_1}\left[\frac{AU}{\frac{d}{AU}}\right] = \pi_1\left[1'' \cdot \frac{1}{AU}\right] \cdot V_{r,1}\left[\frac{km}{s}\right]\left[\cdot \frac{86400s}{1d} \cdot \frac{1\,AU}{1.49597870\times10^8\ \text{km}} \cdot \frac{1°}{3600''} \cdot \frac{\pi}{180°}\right] = \tag{9.40}$$

$$= 2.80003319 \cdot 10^{-9} \cdot \pi_1 \cdot V_{r,1}\left[\frac{\text{rad}}{\text{d}}\right] \quad ,$$

$$\dot{\alpha}_1 = \mu_{a,1}\left[\frac{s}{cy}\right]\left[\cdot \frac{1h}{3600s} \cdot \frac{360°}{24h} \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \frac{1cy}{36525d}\right] = 1.991021278\cdot10^{-9} \cdot \mu_{a,1}\left[\frac{\text{rad}}{\text{d}}\right] \quad , \tag{9.41}$$

$$\dot{\delta}_1 = \mu_{\delta,1}\left[\frac{1''}{cy}\right]\left[\cdot \frac{1°}{3600''} \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \frac{1cy}{36525d}\right] = 1.327347518\cdot10^{-10} \cdot \mu_{\delta,1}\left[\frac{\text{rad}}{\text{d}}\right] \quad . \tag{9.42}$$

Nach diesen Umrechnungen können r_1 / r_2 aus Formel , $\dot{\mathbf{r}}_1 / r_1$ aus Formel (9.35) und schließlich Rektaszension $\alpha_{2,1}$ und Deklination $\delta_{2,1}$ zum Zeitpunkt t_2 aus Formel (9.37) berechnet werden.

NUMERISCHES BEISPIEL:

Gegeben sei der Stern FK5 Nr.119 [1] zur Fundamentalepoche J2000 mit den Koordinaten und Bewegungsparametern

$$\alpha_1 = 03^h\,19^m\,55^s.6785 = 3^{\text{h}}.29879958 = 49°.48199375$$
$$\delta_1 = -43°\ 04'\ 10''.830 = \text{-}43°.069675$$
$$\pi_1 = 0''.1559$$
$$\mu_\alpha = 27^s.7694 / cy$$
$$\mu_\delta = 73''.050 / cy$$
$$V_r = \dot{r}_1 = 86.87\,km / s$$

Der geozentrische Ortsvektor (zur gegebenen Epoche) beträgt dann mit den Formeln (9.32) und (9.33)

$$\begin{aligned} x_1 &= 627939.153085\ \text{AU} \\ x_2 &= 734754.582518\ \text{AU} \\ x_3 &= \text{-}903499.685632\ \text{AU} \quad , \end{aligned}$$

der Geschwindigkeitsvektor nach Formel (9.35)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{-}0.0111205096359\ \text{AU/d} \\ \dot{x}_2 &= 0.0692408155072\ \text{AU/d} \\ \dot{x}_3 &= \text{-}0.0248898616945\ \text{AU/d} \quad . \blacktriangleleft \end{aligned}$$

9.2.3 Geozentrischer Ort stellarer Objekte

Sei $\mathbf{r}_{\overset{+}{\odot}B2}$ der baryzentrische Ortsvektor der Erde zum Zeitpunkt t_2, errechnet sich der geozentrische Ortsvektor des stellaren Objektes aus

[1] aus: SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], P.181

$$\mathbf{r}_{E2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\odot B2} \quad . \tag{9.43}$$

Die geozentrische Distanz des Sterns S_2 zum Zeitpunkt t_2 wird nach Bild 9-4 aus

$$r_{E2} = \sqrt{\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_{\odot B2}^2 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{\odot B2}} \tag{9.44}$$

berechnet.

Damit ergeben sich die geozentrischen äquatorialen Winkelkoordinaten aus

$$\frac{\mathbf{r}_{E2}}{r_{E2}} = \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}\frac{r_2}{r_{E2}} - \frac{\mathbf{r}_{\odot B2}}{r_{E2}} = \begin{bmatrix} \cos\delta_{E21}\cos\alpha_{E21} \\ \cos\delta_{E21}\sin\alpha_{E21} \\ \sin\delta_{E21} \end{bmatrix} \quad . \tag{9.45}$$

9.3 Präzession

Bild 9-5: Zur Beschreibung der lunisolaren Präzession: E – mittlere Ekliptik, A_0 – Äquator zum Zeitpunkt t_0, A_1 – Äquator zum Zeitpunkt t_1, Υ_0 – Frühlingspunkt zum Zeitpunkt t_0, Υ_1 – Frühlingspunkt zum Zeitpunkt t_1, P - mittlerer Pol der Ekliptik, P_0 – Pol des Äquatorsystems zum Zeitpunkt t_0, P_1 – Pol des Äquatorsystems zum Zeitpunkt t_1, $\overline{\varepsilon}$ - mittlere Schiefe der Ekliptik

Unter dem Begriff *Präzession* werden alle langperiodischen Variationen des Pols des (Erd-) Äquators und des Pols der Ekliptik zusammengefasst. Die kurzperiodischen Variationen des

Pols des Äquators werden als *Nutation* (siehe in Abschnitt 9.4) bezeichnet. Die langen Perioden haben eine Dauer von etwa 26000 Jahren, die kurzen unter 20 Jahren.

In diesem Abschnitt geht es um eine Anwendung der in den vorherigen Kapiteln entwickelten Transformationstheorie, insbesondere des Zusammenhangs der Rotationsvektoren $\mathbf{D}_q$ (Systemeigenbewegungsvektoren) mit den Formeln der sphärischen Astronomie. Eine physikalische Interpretation von Präzession (und im nächsten Abschnitt der Nutation) ist nicht Gegenstand dieses Berichtes. Die in der sphärischen Astronomie üblichen Näherungsausdrücke können in der einschlägigen Literatur nachgelesen werden[1].

9.3.1 Die lunisolare Präzession

Die mittlere Bewegung des Pols des Äquators (des „Himmelspol“) ist die *lunisolare Präzession.* Sie wurde von *Hipparch* entdeckt. Die lunisolare Präzession ist der Anteil der Präzession, der nicht die Ekliptik, nur den Äquator beeinflusst. *Hipparch* hatte beobachtet, dass die Rektaszension α der Sterne wächst, also zu größeren Werten in Rektaszension α fortschreitet (praecedere). Der Frühlingspunkt Υ wandert daher längs der (als fest betrachteten Epoche-) Ekliptik E_0 rückwärts, im Zeitraum t_0 nach t_1 zum Ort Υ_1 um die Längenverschiebung

$$\psi_A = p_L\left(t_1 - t_0\right) = p_L\,\Delta t \quad . \tag{9.46}$$

Der Parameter p_L ist die Rate der *lunisolaren Präzession* pro julianischem Jahrhundert[2]. Sie ist von der dynamischen Form des Erdkörpers, von der Schiefe der Ekliptik, sowie der Tatsache abhängig, dass im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie der Inertialraum in der Umgebung der sich bewegenden Erde eine kleine Rotation gegenüber dem heliozentischen Inertialsystem hat. Aus diesem Grund ist p_L keine Konstante. Der Parameter hat den Wert[3]

$$p_L = 5038''.7784 + 0''.49263\,T - 0''.000124\,T^2 \quad . \tag{9.47}$$

T wird gemessen in (julianischen) Jahrhunderten bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 (vgl. die Definitionsformel (9.7) auf Seite 442).

Die ekliptikale Breite der beobachteten Örter wird auf Grund der lunisolaren Präzession nicht verändert:

$$\Delta b = 0 \quad . \tag{9.48}$$

Um die Transformation vom ursprünglichen (Epochen-) Äquatorsystem A_0 in ein neues A_1 – System berechnen zu können, wird die Orientierung von A_1 in Bezug auf A_0 berechnet. Der neue Frühlingspunkt Υ_1, der durch eine Verschiebung längs der (Epoche-) Ekliptik E_0 aus dem ursprünglichen Frühlingspunkt Υ_0 erhalten wird (vgl. Bild 9-6), hat im neuen System A_1 die äquatorialen Koordinaten Rektaszension $\Delta\alpha$ und Deklination δ_F, die aus dem System

---

[1] SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 99-109; GREEN, R. M. [1985], pp. 208-233

[2] siehe etwa GREEN, R. M. [1985], p.211

[3] in SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 103 und p. 696 findet sich der Wert $p_L = 5029''.0966$ nach LIESKE, J.H., LEDERLE, T., FRICKE, W. and MORANDO, B. [1977]: 'Expressions for the Precession Quantities, Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants', *Astron. Astrophys.* **58**, 1.

$$\begin{aligned} \cos\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \cos\psi_A \\ \sin\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \sin\psi_A\ \cos\varepsilon_0 \\ \sin\delta_F &= \sin\psi_A\ \sin\varepsilon_0 \end{aligned} \tag{9.49}$$

eindeutig berechnet werden können. Der Hilfswinkel κ bei Υ_1 folgt aus

$$\begin{aligned} \sin\kappa\ \cos\delta_F &= \cos\varepsilon_0 \\ \cos\kappa\ \cos\delta_F &= \sin\varepsilon_0\ \cos\psi_A \quad . \end{aligned} \tag{9.50}$$

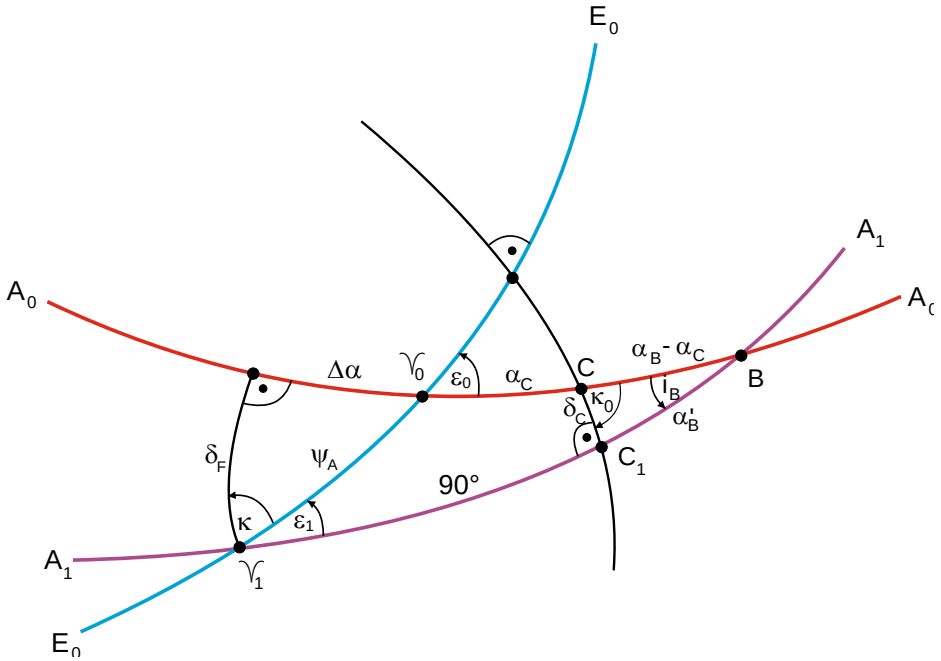


Bild 9-6: Transformation des Äquatorsystems als Folge der lunisolaren Präzession (Ausschnitt von Bild 9-5)

Der Schnittpunkt B von A_0 mit A_1 hat die Rektaszension α_B im A_0- System und α'_B im A_1- System. Der Schnittwinkel zwischen den beiden Äquatorebenen sei i_B. Die Winkel $i_B \in [0°, 180°]$ und α'_B folgen aus

$$\begin{aligned} \sin\alpha'_B\ \sin i_B &= \sin\delta_F \\ \cos\alpha'_B\ \sin i_B &= \cos\delta_F\ \cos(\kappa+\varepsilon_0) \\ \cos i_B &= \cos\delta_F\ \sin(\kappa+\varepsilon_0) \quad , \end{aligned} \tag{9.51}$$

sowie α_B aus

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\alpha+\alpha_B)\ \cos\delta_F &= \cos\alpha'_B \\ \sin(\Delta\alpha+\alpha_B)\ \cos\delta_F &= \sin\alpha'_B\ \cos i_B \quad . \end{aligned} \tag{9.52}$$

Die neue $\mathbf{p}'_i$ – Achse schneidet die A_1-Ebene im Punkt C_1 mit der Rektaszension $\alpha'_0 = 90°$, der Großkreis durch den Pol P der Ekliptik und C_1 schneidet die ursprüngliche Äquatorebene A_0 im Punkt C mit der Rektaszension α_C. Es sei

$$\delta_C := \sphericalangle(C, C_1)$$

und κ_0 Hilfswinkel bei C. Diese Winkel werden berechnet aus dem System

$$\begin{aligned}\tan\delta_C &= -\tan i_B \cos\alpha'_B \\ \sin\delta_C &= \frac{\tan\delta_C}{\sqrt{1+\tan^2\delta_C}} \\ \cos\delta_C &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta_C}}\,,\end{aligned} \tag{9.53}$$

sowie aus

$$\begin{aligned}\cos\delta_C \sin\kappa_0 &= \cos i_B \\ \sin\delta_C \sin\kappa_0 &= -\sin i_B \cos\alpha'_B \\ \cos\kappa_0 &= \sin i_B \sin\alpha'_B\,.\end{aligned} \tag{9.54}$$

Schließlich kann α_C aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_B-\alpha_C) &= \sin\alpha'_B\cos\delta_C \\ \sin(\alpha_B-\alpha_C) &= -\cos\alpha'_B\cos\delta_C\cos i_B + \sin\delta_C \sin i_B\end{aligned} \tag{9.55}$$

erhalten werden.

Habe ein Ortsvektor im A_0-System die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i = r\left(\cos\alpha_0\cos\delta_0\,\mathbf{p}_1 + sin\alpha_0\cos\delta_0\,\mathbf{p}_2 + sin\delta_0\,\mathbf{p}_3\right) \tag{9.56}$$

und im A_1- System

$$\mathbf{r} = y^i\,\mathbf{p}'_i = r\left(\cos\alpha_1\cos\delta_1\,\mathbf{p}'_1 + sin\alpha_1\cos\delta_1\,\mathbf{p}'_2 + sin\delta_1\,\mathbf{p}'_3\right)\,, \tag{9.57}$$

lautet die Transformation vom A_0- in das A_1-System

$$y^j = a^j{}_i\, x^i \tag{9.58}$$

mit der Transformationsmatrix (6.91)

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos i_B \sin\alpha'_B \sin\alpha_B + \cos\alpha'_B\cos\alpha_B \\ a_{12} &= -\cos i_B \sin\alpha'_B \cos\alpha_B + \cos\alpha'_B\sin\alpha_B \\ a_{13} &= -\sin i_B \sin\alpha'_B \\ a_{21} &= -\cos i_B \cos\alpha'_B \sin\alpha_B + \sin\alpha'_B\cos\alpha_B \\ a_{22} &= \cos i_B \cos\alpha'_B \cos\alpha_B + \sin\alpha'_B\sin\alpha_B \\ a_{23} &= \sin i_B \cos\alpha'_B \\ a_{31} &= \sin i_B \sin\alpha_B \\ a_{32} &= -\sin i_B \cos\alpha_B \\ a_{33} &= \cos i_B\,.\end{aligned} \tag{9.59}$$

Für Transformationen des Geschwindigkeitsvektors werden die entsprechenden Variationen der vorstehenden Ausdrücke benötigt. Aus den Gleichungen (9.49) folgen zunächst die Variationen

$$\begin{aligned}\dot{(\Delta\alpha)}\,\sin\Delta\alpha\cos\delta_F + \dot{\delta}_F\cos\Delta\alpha\,\sin\delta_F &= p_L\sin\psi_A \\ \dot{(\Delta\alpha)}\,\cos\Delta\alpha\cos\delta_F - \dot{\delta}_F\sin\Delta\alpha\,\sin\delta_F &= p_L\cos\Delta l\,\cos\varepsilon - \dot{\varepsilon}\sin\Delta l\,\sin\varepsilon \\ \dot{\delta}_F\cos\delta_F &= p_L\cos\Delta l\,\sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}\sin\Delta l\,\cos\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Mit Vorgabe der Variationen $(\Delta l)^{\cdot} = (\psi_A)^{\cdot} = p_L$, $\dot{\varepsilon}$ können die für eine Transformation des Geschwindigkeitsvektors benötigten Parameter aus den Gleichungen (9.49)-(9.55) und (9.59) berechnet werden:

$$(\Delta\alpha)^{\cdot}\cos\delta_F = p_L\left(\cos\varepsilon\,\cos\psi_A\cos\Delta\alpha+\sin\psi_A\sin\Delta\alpha\right)-\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon\,\sin\psi_A\cos\Delta\alpha \tag{9.60}$$

$$\dot{\delta}_F\sin\delta_F = p_L\left(-\cos\varepsilon\,\cos\psi_A\sin\Delta\alpha+\sin\psi_A\cos\Delta\alpha\right)+\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon\,\sin\psi_A\sin\Delta\alpha \tag{9.61}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_F = p_L\left[\left(-\cos\varepsilon\,\cos\psi_A\sin\Delta\alpha+\sin\psi_A\cos\Delta\alpha\right)\sin\delta_F+\sin\varepsilon\,\cos\psi_A\cos\delta_F\right]+\\ +\,\dot{\varepsilon}\,\sin\psi_A\left(\sin\Delta\alpha\,\sin\varepsilon\,\sin\delta_F+\cos\varepsilon\,\cos\delta_F\right)\end{aligned} \tag{9.62}$$

$$\dot{\kappa}\cos\delta_F = p_L\,\sin\psi_A\,\sin\varepsilon\,\sin\kappa-\dot{\varepsilon}\left(\cos\psi_A\,\cos\varepsilon\,\sin\kappa+\sin\varepsilon\,\cos\kappa\right) \tag{9.63}$$

$$\begin{aligned}(\alpha'_B)^{\cdot}\,\sin i_B = \dot{\delta}_F\left[\cos(\kappa+\varepsilon)\sin\alpha'_B\,\sin\delta_F+\cos\alpha'_B\,\cos\delta_F\right]+\\ +\left(\dot{\kappa}+\dot{\varepsilon}\right)\sin(\kappa+\varepsilon)\sin\alpha'_B\,\cos\delta_F\end{aligned} \tag{9.64}$$

$$\begin{aligned}(i_B)^{\cdot} = \dot{\delta}_F\left[\cos i_B\left(-\cos(\kappa+\varepsilon)\,\cos\alpha'_B\sin\delta_F+\sin\alpha'_B\cos\delta_F\right)+\sin i_B\,\sin(\kappa+\varepsilon)\,\sin\delta_F\right]-\\ -\left(\dot{\kappa}+\dot{\varepsilon}\right)\cos\delta_F\left[\cos\alpha'_B\sin(\kappa+\varepsilon)\cos i_B+\cos(\kappa+\varepsilon)\sin i_B\right]\end{aligned} \tag{9.65}$$

$$\begin{aligned}\left[(\Delta\alpha)^{\cdot}+\dot{\alpha}_B\right]\cos\delta_F = (\alpha'_B)^{\cdot}\left[\cos i_B\cos\alpha'_B\cos(\Delta\alpha+\alpha_B)+\sin\alpha'_B\sin(\Delta\alpha+\alpha_B)\right]-\\ -(i_B)^{\cdot}\,\sin i_B\sin\alpha'_B\cos(\Delta\alpha+\alpha_B)\quad .\end{aligned} \tag{9.66}$$

Der Systemeigenbewegungsvektor des momentanen Äquatorsystems in Bezug auf das fundamentale Basissystem

$$\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^{j}\,\mathbf{q}_j \tag{9.67}$$

hat mit den Formeln (6.136) und entsprechend Bild 9-6 die Komponenten

$$\begin{aligned}D_{qp1} &= (\alpha_B)^{\cdot}\sin i_B\sin\alpha'_B+(i_B)^{\cdot}\cos\alpha'_B\\ D_{qp2} &= (\alpha_B)^{\cdot}\sin i_B\cos\alpha'_B-(i_B)^{\cdot}\sin\alpha'_B\\ D_{qp3} &= (\alpha_B)^{\cdot}\cos i_B+(\alpha'_B)^{\cdot}\quad .\end{aligned} \tag{9.68}$$

Umgekehrt, wenn der Eigenbewegungsvektor in fundamentalen Koordinaten gegeben ist,

$$\mathbf{D}_{pq} = D_{pq}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \quad , \tag{9.69}$$

lauten seine Komponenten in Bezug auf das momentane System mit den Formeln (6.141)

$$\begin{aligned}D_{pq1} &= -(\alpha'_B)^{\cdot}\sin i_B\sin\alpha_B-(i_B)^{\cdot}\cos\alpha_B\\ D_{pq2} &= \;(\alpha'_B)^{\cdot}\sin i_B\cos\alpha_B-(i_B)^{\cdot}\sin\alpha_B\\ D_{pq3} &= -(\alpha'_B)^{\cdot}\cos i_B-(\alpha_B)^{\cdot}\quad .\end{aligned} \tag{9.70}$$

Die in der lunisolaren Präzession beschriebene Eigenbewegung des Äquatorsystems lässt sich als eine relative Bewegung in Bezug auf ein $\mathbf{p}_i$ – Basissystem beschreiben. Um die Bewegung zwischen dem Äquatorsystem zu einem Zeitpunkt t_1 und einem (späteren) Zeitpunkt t_2 zu erfassen, muss diese Drehung jeweils auf dieses fundamentale Basissystem bezogen werden. Der relative Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{q^{(1)}}$ zum Zeitpunkt t_1 hat bei Bezug auf den relativen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_p$ in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_{q^{(1)}} = \dot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{D}_{q^{(1)}p}\times\mathbf{r}\quad . \tag{9.71}$$

Hier ist $\mathbf{D}_{q^{(1)}p}$ der Systemeigenbewegungsvektor des Äquatorsystems zum Zeitpunkt t_1 in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem. Zum Zeitpunkt t_2 ist entsprechend

$$\dot{\mathbf{r}}_{q^{(2)}} = \dot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{D}_{q^{(2)}p} \times \mathbf{r} \quad . \tag{9.72}$$

Die relative Bewegung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 wird daher durch den relativen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_{q^{(2)}} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(1)}} + \left(\mathbf{D}_{q^{(2)}p} - \mathbf{D}_{q^{(1)}p} \right) \times \mathbf{r} \quad . \tag{9.73}$$

beschrieben.

In der Praxis der Satellitenbahntheorie wirkt sich hier nur die säkulare Variation in der lunisolaren Präzession p_L aus (siehe in Gleichung (9.47)), so dass der rotatorische Anteil $\mathbf{D}_{q^{(2)}p} - \mathbf{D}_{q^{(1)}p}$ vernachlässigt werden kann.

9.3.2 Die Präzession durch die Planeten

Bild 9-7: Präzession durch die Planeten, E_0 - mittlere Ekliptik zum Zeitpunkt t_0, E – mittlere Ekliptik zum Zeitpunkt t, A_0 – mittlerer Äquator zum Zeitpunkt t_0

Infolge einer gravitativen Einwirkung der Planeten ist die Ekliptik nicht raumfest. Sie unterliegt einer Eigen-Bewegung, die eine Präzession von etwa $12''$ pro Jahrhundert und eine Abnahme der Schiefe der Ekliptik von etwa $47''$ pro Jahrhundert bewirkt[1]. Die planetare Präzession wird beschrieben durch die Winkel

[1] Zahlenwerte aus: SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], p.99

π_A – dem Winkel zwischen der mittleren Ekliptik zu einer fixierten Epoche t_1 und der mittleren Ekliptik zu einem Zeitpunkt t_2 („of date“),

Π_A – der Winkeldistanz zwischen dem Frühlingspunkt Υ_0 zur fixierten Epoche t_1 und dem aufsteigenden Knoten R der mittleren Ekliptik zum Zeitpunkt t_2 mit der mittleren Ekliptik zur Epoche t_1.

Infolge der Eigenbewegung der Ekliptik wird die planetare Präzession χ_A erhalten.

Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Anhang E4 zusammengestellt[1].

9.3.3 Die allgemeine Präzession

Bild 9-8:: Zur Darstellung der allgemeinen Präzession

Unter der allgemeinen Präzession wird die Kombination aus lunisolarer und planetarer Präzession verstanden. Der mittlere Äquator bewegt sich auf Grund der lunisolaren Präzession, wie in Bild 9-8 dargestellt, von der Orientierung A_0 zur Epoche t_1 zur momentanen Orientierung A. Diese Bewegung wird längs der mittleren Ekliptik zur Epoche t_1 durch den Winkel ψ_A zwischen dem (mittleren) Frühlingspunkt Υ_0 zur Epoche t_0 und dem momentanen mittleren Frühlingspunkt Υ_1 charakterisiert. Die mittlere Ekliptik wird von der Orientierung E_0 zur Epoche t_1 infolge der Präzession durch die Planeten in die Orientierung E zum momentanen Zeitpunkt t_2 bewegt. Der charakterisierende Winkel dieser Bewegung ist längs des mittleren momentanen Äquators A der Winkel χ_A zwischen dem mittleren Frühlingspunkt Υ_1 und dem

[1] Band V

endgültigen mittleren Frühlingspunkt ♈. Die Zahlenwerte dieser Winkel sind in Anhang E4 wiedergegeben.

Im Rahmen der Berechnung von Satellitenbahnen wird die allgemeine Präzession unmittelbar an die Umrechnung des Zustandsvektors angebracht. Zur exakten Berechnung der Präzession werden die (akkumulierten) Winkel ζ_A, z_A, θ_A entsprechend Bild 9-9 verwendet. Sie lauten in Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0[1]

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 2306".2181\,t + 0".30188\,t^2 + 0".017998\,t^3 \\ \vartheta_A &= 2004".3109\,t - 0".42665\,t^2 - 0".041833\,t^3 \\ z_A &= 2306".2181\,t + 1".09468\,t^2 + 0".018203\,t^3 \quad . \end{aligned} \tag{9.74}$$

Bild 9-9: Zur Berechnung der allgemeinen Präzession

Hier ist t die Zeitdifferenz zwischen der Fundamentalepoche ε_0 und der Epoche ε_D zum Beobachtungszeitpunkt in julianischen Jahrhunderten

$$t := \frac{JD(\varepsilon_D) - JD(\varepsilon_0)}{36525} \quad . \tag{9.75}$$

Die Variation der Präzessionswinkel lautet mit den Werten aus den Formeln (9.74) zum Zeitpunkt ε_D

[1] SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], p.104

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_A &= 2306".2181 + 2\cdot 0".30188\,t + 3\cdot 0".017998\,t^2\\ \dot{\vartheta}_A &= 2004".3109 - 2\cdot 0".42665\,t - 3\cdot 0".041833\,t^2\\ \dot{z}_A &= 2306".2181 + 2\cdot 1".09468\,t + 3\cdot 0".018203\,t^2\end{aligned} \tag{9.76}$$

Sei $\mathbf{p}_i$ die orthonormierte Basis des Fundamentalsystems mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$, $\mathbf{q}_j$ die orthonormierte Basis eines Äquatorsystems zur Epoche ε_D. Die beiden Systeme unterscheiden sich durch die Präzession, welche durch die Präzessionswinkel ζ_A, z_A, θ_A beschrieben wird. Die Transformation zwischen dem Fundamentalsystem und dem zum Zeitpunkt ε_D gültigen $\mathbf{q}_j$ – System mit der Präzessionsmatrix P_i^j lautet

$$\mathbf{p}_i = P^j{}_i \mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{q}_j = P_j{}^i \mathbf{p}_i \tag{9.77}$$

wobei die Präzessionsmatrix mit den Formeln (6.91) durch das folgende System gegeben ist (es werden die Winkel $A := 90° - \zeta_A, B := \vartheta_A, C := -(90° + z_A)$ zugeordnet]:

$$\begin{aligned}P_{11} &= \cos\vartheta_A \cos z_A \cos\zeta_A - \sin z_A \sin\zeta_A\\ P_{12} &= -\cos\vartheta_A \cos z_A \sin\zeta_A - \sin z_A \cos\zeta_A\\ P_{13} &= -\sin\vartheta_A \cos z_A\\ P_{21} &= \cos\vartheta_A \sin z_A \cos\zeta_A + \cos z_A \sin\zeta_A\\ P_{22} &= -\cos\vartheta_A \sin z_A \sin\zeta_A + \cos z_A \cos\zeta_A\\ P_{23} &= -\sin\vartheta_A \sin z_A\\ P_{31} &= \sin\vartheta_A \cos\zeta_A\\ P_{32} &= -\sin\vartheta_A \sin\zeta_A\\ P_{33} &= \cos\vartheta_A \quad .\end{aligned} \tag{9.78}$$

Die Drehung vom fundamentalen $\mathbf{p}_i$ – System in das $\mathbf{q}_j$ – System wird durch den Systemeigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_q = D_q{}^j \mathbf{q}_j \tag{9.79}$$

mit der Eigenschaft

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j \tag{9.80}$$

kontrolliert, dessen Komponenten mit dem Formelsystem (6.134) berechnet werden können:

$$\begin{aligned}D_{q1} &= -\dot{\vartheta}_A \sin z_A + \dot{\zeta}_A \cos z_A \sin\vartheta_A + D_p{}^i P_{1i}\\ D_{q2} &= \dot{\vartheta}_A \cos z_A - \dot{\zeta}_A \sin z_A \sin\vartheta_A + D_p{}^i P_{2i}\\ D_{q3} &= -\dot{z}_A - \dot{\zeta}_A \cos\vartheta_A + D_p{}^i P_{3i} \quad .\end{aligned} \tag{9.81}$$

9.3.4 Exakte Formeln zur Berücksichtigung der Präzession

Im Zusammenhang mit Untersuchungen der Bewegung künstlicher Himmelskörper spielen die in der sphärischen Astronomie üblicherweise angewendeten Näherungsausdrücke zur Berücksichtigung der Präzession keine Rolle. Sie finden daher im vorliegenden Bericht keine

Erwähnung[1]. Im Folgenden werden ausschließlich für das automatische Rechnen geeignete Formelsysteme zusammengestellt.

9.3.4.1 Bezug eines bewegten Systems auf ein fundamentales System

Ein beobachteter Himmelskörper habe den Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Der Ortsvektor habe bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – Fundamentalsystem und das dagegen bewegte $\mathbf{q}_j$ – Basissystem die Darstellungen

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = y^j \mathbf{q}_j \quad . \tag{9.82}$$

Die Transformation vom $\mathbf{p}_i$ – in das $\mathbf{q}_j$ – System mit der Transformationsmatrix (9.78) ergibt für die Koordinaten wegen der angenommenen Orthonormie die Transformation

$$\mathbf{q}_j = P_j{}^i \mathbf{p}_i \ , \ \mathbf{p}_i = P^j{}_i \mathbf{q}_j \ , \ y^j = x^i P^j{}_i \ , \ x^i = y^j P_j{}^i \quad . \tag{9.83}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor folgt, da das $\mathbf{p}_i$ – System als ein inertiales System angenommen wird,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + y^j \dot{\mathbf{q}}_j \quad , \quad (\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0) \tag{9.84}$$

wobei die absolute (da Bezug auf ein als inertial angenommenes System) Eigenbewegung des $\mathbf{q}_j$ – Systems wegen Beziehung (9.80) mit den Koeffizienten (9.81) durch die Variations- (*Frenet*-) Formeln

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \quad\quad D_{q3} \mathbf{q}_2 - D_{q2} \mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{q3} \mathbf{q}_1 \quad\quad + D_{q1} \mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= \quad D_{q2} \mathbf{q}_1 - D_{q1} \mathbf{q}_2 \end{aligned} \tag{9.85}$$

beschrieben wird. Wird in Gleichung (9.84) als Basis das $\mathbf{q}_j$ – System mit Hilfe der Transformation (9.77) zugrunde gelegt, können die Komponenten des auf das $\mathbf{q}_j$ – System bezogenen relativen Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j \tag{9.86}$$

über die allgemeingültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_p + \mathbf{D}_p \times \mathbf{r} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + D_p{}^i x^k \mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_k \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + D_q{}^j y^k \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k \end{aligned} \tag{9.87}$$

aus dem Gleichungssystem

$$\dot{y}^j \mathbf{q}_j = \dot{x}^i P^j{}_i \mathbf{q}_j + D_p{}^i P^j{}_i y^k \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k - D_q{}^j y^k \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k \tag{9.88}$$

berechnet werden. Die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors lauten ausführlich komponentenweise

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}^i P_{1i} + y_2 D_{q3} - y_3 D_{q2} - D_p{}^i P_{2i} y_3 + D_p{}^i P_{3i} y_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}^i P_{2i} + y_3 D_{q1} - y_1 D_{q3} - D_p{}^i P_{3i} y_1 + D_p{}^i P_{1i} y_3 \\ \dot{y}_3 &= \dot{x}^i P_{3i} + y_1 D_{q2} - y_2 D_{q1} - D_p{}^i P_{1i} y_2 + D_p{}^i P_{2i} y_1 \quad . \end{aligned} \tag{9.89}$$

[1] Siehe die Näherungsausdrücke etwa in SEIDELMANN, ed. [1992], p.105 ff.

Diese Formeln werden für jede Integration eines Bewegungsproblems benötigt, wenn diese prinzipiell nicht in einem Inertialsystem durchgeführt werden kann. Dies trifft insbesondere im Fall der Präzession zu, da auch ein Fundamentalsystem, wie etwa das J2000.0 System, kein inertiales System ist.

9.3.4.2 Bezug auf ein relatives System bei jeweiligem Bezug auf das Fundamentalsystem

Zwei (äquatoriale) nicht fundamentale Basissysteme sollen aufeinander bezogen werden. Dazu wird zunächst jedes der Systeme auf das Fundamentalsystem bezogen und anschließend durch Differenzenbildung der wechselseitige Bezug der beiden bewegten Systeme hergestellt. Es seien das erste System durch seine Basis $\mathbf{q}_j$ mit der Transformationsmatrix P_j^i und der Transformation

$$\mathbf{p}_i = P^j{}_i \, \mathbf{q}_j \tag{9.90}$$

gegeben, wobei die Transformationsmatrix durch die Präzessionsmatrix (9.78) bekannt ist. Die Transformation des Zustandsvektors erfolgt mit den Beziehungen (9.83) und (9.89). Für das zweite System lautet die Transformation

$$\mathbf{p}_i = P^{(2)j}{}_i \, \mathbf{q}^{(2)}_j \tag{9.91}$$

mit der Präzessionsmatrix

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{11} &= \cos\vartheta^{(2)}_A \cos z^{(2)}_A \cos\zeta^{(2)}_A - \sin z^{(2)}_A \sin\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{12} &= -\cos\vartheta^{(2)}_A \cos z^{(2)}_A \sin\zeta^{(2)}_A - \sin z^{(2)}_A \cos\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{13} &= -\sin\vartheta^{(2)}_A \cos z^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{21} &= \cos\vartheta^{(2)}_A \sin z^{(2)}_A \cos\zeta^{(2)}_A + \cos z^{(2)}_A \sin\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{22} &= -\cos\vartheta^{(2)}_A \sin z^{(2)}_A \sin\zeta^{(2)}_A + \cos z^{(2)}_A \cos\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{23} &= -\sin\vartheta^{(2)}_A \sin z^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{31} &= \sin\vartheta^{(2)}_A \cos\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{32} &= -\sin\vartheta^{(2)}_A \sin\zeta^{(2)}_A \\
P^{(2)}_{33} &= \cos\vartheta^{(2)}_A \qquad ,
\end{aligned} \tag{9.92}$$

wobei die Präzessionswinkel $\zeta^{(2)}_A, \vartheta^{(2)}_A, z^{(2)}_A$ durch Bezug auf eine Epoche $\varepsilon^{(2)}_D$ aus den Formeln (9.74) berechnet werden können. Den Bezug zwischen den beiden relativen Systemen stellen die Gleichungen (9.90) und (9.91) her:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j &= P_j{}^i \, \mathbf{p}_i = P_j{}^i \, P^{(2)k}{}_i \, \mathbf{q}^{(2)}_k \\
\mathbf{q}^{(2)}_k &= P^{(2)i}_k \, \mathbf{p}_i = P^{(2)i}_k \, P^j{}_i \, \mathbf{q}_j \qquad .
\end{aligned} \tag{9.93}$$

Das zweite System hat in Bezug auf das Fundamentalsystem den Rotationsvektor

$$\mathbf{D}^{(2)}_q := D^{(2)j}_q \, \mathbf{q}^{(2)}_j \quad , \tag{9.94}$$

entsprechend den Gleichungen (9.81) mit den Komponenten

$$\begin{aligned} D_{q1}^{(2)} &= -\dot{\vartheta}_A^{(2)} \sin z_A^{(2)} + \dot{\zeta}_A \cos z_A^{(2)} \sin \vartheta_A^{(2)} + D_p^i P_{1i}^{(2)} \\ D_{q2}^{(2)} &= \dot{\vartheta}_A^{(2)} \cos z_A^{(2)} - \dot{\zeta}_A^{(2)} \sin z_A^{(2)} \sin \vartheta_A^{(2)} + D_p^i P_{2i}^{(2)} \\ D_{q3}^{(2)} &= -\dot{z}_A^{(2)} - \dot{\zeta}_A^{(2)} \cos \vartheta_A^{(2)} + D_p^i P_{3i}^{(2)} \quad , \end{aligned} \tag{9.95}$$

wobei die Variationen $\dot{\zeta}_A^{(2)}, \dot{\vartheta}_A^{(2)}, \dot{z}_A^{(2)}$ mit den Formeln (9.76) bei Bezug auf die Epoche $\varepsilon_D^{(2)}$ berechnet werden können. Damit kann auch die Umrechnung des Geschwindigkeitsvektors durchgeführt werden. Aus

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} + \mathbf{D}_q^{(2)} \times \mathbf{r} \tag{9.96}$$

Folgt mit den Beziehungen (9.93) sowie (9.79) und (9.94)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} &= \dot{y}^{(2)k} \mathbf{q}_k^{(2)} = \dot{y}^j P_j^{\ i} P^{(2)k}_{\ \ i} \mathbf{q}_k^{(2)} + y^{(2)m} \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)k}_{\ \ i} - D_q^{(2)k} \right) \mathbf{q}_k^{(2)} \times \mathbf{q}_m^{(2)} \\ \dot{\mathbf{r}}_q &= \dot{y}^j \mathbf{q}_j = \dot{y}^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P^j_{\ i} \mathbf{q}_j + y^m \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P^j_{\ i} - D_q^j \right) \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_m \end{aligned} \tag{9.97}$$

Und komponentenweise

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(2)} &= \dot{y}^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{1i} + \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{2i} - D_{q\ 2}^{(2)} \right) y_3^{(2)} - \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{3i} - D_{q\ 3}^{(2)} \right) y_2^{(2)} \\ \dot{y}_2^{(2)} &= \dot{y}^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{2i} + \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{3i} - D_{q\ 3}^{(2)} \right) y_1^{(2)} - \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{1i} - D_{q\ 1}^{(2)} \right) y_3^{(2)} \\ \dot{y}_3^{(2)} &= \dot{y}^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{3i} + \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{1i} - D_{q\ 1}^{(2)} \right) y_2^{(2)} - \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)}_{2i} - D_{q\ 2}^{(2)} \right) y_1^{(2)} \end{aligned} \tag{9.98}$$

bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{y}^{(2)j} P^{(2)}_{j\ \ i} P_{1i} + \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{2i} - D_{q2} \right) y_3 - \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{3i} - D_{q3} \right) y_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}^{(2)j} P^{(2)}_{j\ \ i} P_{2i} + \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{3i} - D_{q3} \right) y_1 - \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{1i} - D_{q1} \right) y_3 \\ \dot{y}_3 &= \dot{y}^{(2)j} P^{(2)}_{j\ \ i} P_{3i} + \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{1i} - D_{q1} \right) y_2 - \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P_{2i} - D_{q2} \right) y_1 \ . \end{aligned} \tag{9.99}$$

Hier können noch zur vereinfachten Schreibweise die relativen Rotationsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{qq^{(2)}} &:= \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_q^{(2)} = \left(D_q^j P_j^{\ i} P^{(2)k}_{\ \ i} - D_q^{(2)k} \right) \mathbf{q}_k^{(2)} \\ \mathbf{D}_{q^{(2)}q} &:= \mathbf{D}_q^{(2)} - \mathbf{D}_q = \left(D_q^{(2)k} P^{(2)}_{k\ \ i} P^j_{\ i} - D_q^j \right) \mathbf{q}_j \end{aligned} \tag{9.100}$$

eingeführt werden, so dass die Gleichungen (9.97) auch in der übersichtlichen Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} &= \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{qq^{(2)}} \times \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}}_q &= \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} + \mathbf{D}_{q^{(2)}q} \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{9.101}$$

geschrieben werden können. Hier kann klar erkannt werden, dass der Ausdruck in der ersten Zeile auf das $\mathbf{q}_j^{(2)}$ – System bezogen ist, dagegen der Ausdruck in der zweiten Zeile auf das $\mathbf{q}_j$ – System.

9.3.4.3 Direkter Bezug zweier Systeme ohne jeweiligen Bezug auf ein fundamentales System

Der Bezug auf das (inertiale) Fundamentalsystem ist für alle Untersuchungen im Rahmen der sphärischen Astronomie von grundlegender Bedeutung. Gleichwohl muss wie im vorhergehenden Abschnitt bei der Umrechnung von einem relativ bewegten $\mathbf{q}_j$ – System zur Epoche ε_F in ein anderes relatives $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System zur Epoche ε_D nicht der Umweg über das Fundamentalsystem gemacht werden. Dies ist möglich, da die Winkel der allgemeinen Präzession auch in

einer Form bereitgestellt werden, welche die relative Bewegung zwischen zwei Systemen beschreiben:

$$\begin{aligned}
\zeta_A^{(r)} &= \left(2306".2181+1".39656\,T-0".000139\;T^2\right)t+\left(\;0".30188-0".000344\;T\right)t^2+0".017998\,t^3\\
\vartheta_A^{(r)} &= \left(2004".3109-0".85330\,T-0".000217\;T^2\right)t+\left(-0".42665-0".000217\;T\right)t^2-0".041833\,t^3\\
z_A^{(r)} &= \left(2306".2181+1".39656\,T-0".000139\;T^2\right)t+\left(\;1".09468+0".000066\;T\right)t^2+0".018203\,t^3
\end{aligned} \tag{9.102}$$

Hier bedeuten T die Zeitdifferenz zwischen der Bezugsepoche ε_F und der Fundamentalepoche ε_0 in julianischen Jahrhunderten, sowie t die Zeitdifferenz zwischen der Bezugsepoche ε_F und der Epoche ε_D zum Beobachtungszeitpunkt, ebenfalls in julianischen Jahrhunderten

$$\begin{aligned}
T &:= \frac{JD(\varepsilon_F)-JD(\varepsilon_0)}{36525}\\
t &:= \frac{JD(\varepsilon_D)-JD(\varepsilon_F)}{36525}\quad .
\end{aligned} \tag{9.103}$$

Die Variation der Präzessionswinkel lautet mit den Werten aus den Formeln (9.102)

$$\begin{aligned}
\dot\zeta_A^{(r)} &= 2306".2181+1".39656\,T-0".000139\;T^2+2\cdot\left(\;0".30188-0".000344\;T\right)t+3\cdot0".017998\,t^2\\
\dot z_A^{(r)} &= 2306".2181+1".39656\,T-0".000139\;T^2+2\cdot\left(\;1".09468+0".000066\;T\right)t+3\cdot0".018203\,t^2\\
\dot\vartheta_A^{(r)} &= 2004".3109-0".85330\,T-0".000217\;T^2+2\cdot\left(-0".42665-0".000217\;T\right)t-3\cdot0".041833\,t^2
\end{aligned} \tag{9.104}$$

Die Transformation zwischen den beiden relativen Systemen erfolgt durch die Transformation

$$\mathbf{q}_j^{(2)} \;=\; P^{(r)k}{}_j\,\mathbf{q}_k \quad,\quad \mathbf{q}_k \;=\; P_k^{(r)j}\,\mathbf{q}_j^{(2)} \quad, \tag{9.105}$$

wobei die Transformationsmatrix („Präzessionsmatrix“) wie im System (9.78) berechnet wird, hier jedoch mit den relativen Präzessionswinkeln aus den Ausdrücken (9.102). Der Ortsvektor in den beiden Systemen ist wieder durch

$$\mathbf{r} \;=\; y^j\,\mathbf{q}_j \;=\; y^{(2)k}\,\mathbf{q}_k^{(2)} \tag{9.106}$$

gegeben, der Geschwindigkeitsvektor wie in den Gleichungen (9.101) formal durch

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} &= \dot{\mathbf{r}}_q \;-\mathbf{D}_{q^{(2)}q}\times\mathbf{r}\\
\dot{\mathbf{r}}_q &= \dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} \;-\mathbf{D}_{qq^{(2)}}\times\mathbf{r}\quad,
\end{aligned} \tag{9.107}$$

wobei die Rotationsvektoren die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{D}_{qq^{(2)}} := D_{qq^{(2)}}{}^j\,\mathbf{q}_j \quad,\quad \mathbf{D}_{q^{(2)}q} := D_{q^{(2)}q}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(2)} \tag{9.108}$$

haben. Mit den Gleichungen (6.136) wird die Eigenbewegung des (neuen) $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System relativ zum (alten) $\mathbf{q}_j$ – System beschrieben durch die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
D_{q^{(2)}q1} &= \;\;\dot\zeta_A^{(r)}\,\sin\vartheta_A^{(r)}\,\cos z_A^{(r)}-\dot\vartheta_A^{(r)}\sin z_A^{(r)}\\
D_{q^{(2)}q2} &= \;\;\dot\zeta_A^{(r)}\,\sin\vartheta_A^{(r)}\,\sin z_A^{(r)}+\dot\vartheta_A^{(r)}\cos z_A^{(r)}\\
D_{q^{(2)}q3} &= -\dot\zeta_A^{(r)}\cos\vartheta_A^{(r)}\;-\dot z_A^{(r)}\qquad\qquad .
\end{aligned} \tag{9.109}$$

Der Geschwindigkeitsvektor im (neuen) $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System hat im relativen Bezug auf das (alte) $\mathbf{q}_j$ – System die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_q^{(2)} = \dot{y}^{(2)k}\,\mathbf{q}_k^{(2)} = \dot{y}^k\,P^{(r)j}{}_k\,\mathbf{q}_j^{(2)} - D_{q^{(2)}q}{}^k\,\mathbf{q}_k^{(2)} \times y^{(2)j}\,\mathbf{q}_j^{(2)} \tag{9.110}$$

bzw. in Komponentendarstellung

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1^{(2)} &= \dot{y}^k\,P^{(r)}{}_{1k} - D_{q^{(2)}q2}\,y_3^{(2)} + D_{q^{(2)}q3}\,y_2^{(2)} \\
\dot{y}_2^{(2)} &= \dot{y}^k\,P^{(r)}{}_{2k} - D_{q^{(2)}q3}\,y_1^{(2)} + D_{q^{(2)}q1}\,y_3^{(2)} \\
\dot{y}_3^{(2)} &= \dot{y}^k\,P^{(r)}{}_{3k} - D_{q^{(2)}q1}\,y_2^{(2)} + D_{q^{(2)}q2}\,y_1^{(2)} \quad .
\end{aligned} \tag{9.111}$$

Umgekehrt hat der relative Geschwindigkeitsvektor im (alten) $\mathbf{q}_j$ – System bezogen auf das (neue) $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_q = \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j = \dot{y}^{(2)k}\,P^{(r)j}{}_k\,\mathbf{q}_j - D_{qq^{(2)}}{}^j\,\mathbf{q}_j \times y^k\,\mathbf{q}_k \quad . \tag{9.112}$$

Die Komponenten des Rotationsvektors $\mathbf{D}_{qq^{(2)}}$ des (alten) $\mathbf{q}_j$ – Systems in Bezug auf das (neue) $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System lauten entsprechend den Formeln (6.142)

$$\begin{aligned}
D_{qq^{(2)}1} &= \dot{z}_A^{(r)} \sin\vartheta_A^{(r)} \cos\zeta_A^{(r)} - \dot{\vartheta}_A^{(r)} \sin\zeta_A^{(r)} \\
D_{qq^{(2)}2} &= -\dot{z}_A^{(r)} \sin\vartheta_A^{(r)} \sin\zeta_A^{(r)} - \dot{\vartheta}_A^{(r)} \cos\zeta_A^{(r)} \\
D_{qq^{(2)}3} &= \dot{z}_A^{(r)} \cos\vartheta_A^{(r)} + \dot{\zeta}_A^{(r)} \quad .
\end{aligned} \tag{9.113}$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors im (alten) $\mathbf{q}_j$ – System in Bezug auf das (neue) $\mathbf{q}_k^{(2)}$ – System lauten

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \dot{y}^{(2)k}\,P^{(r)}{}_{1k} - D_{qq^{(2)}2}\,y_3 + D_{qq^{(2)}3}\,y_2 \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}^{(2)k}\,P^{(r)}{}_{2k} - D_{qq^{(2)}3}\,y_1 + D_{qq^{(2)}1}\,y_3 \\
\dot{y}_3 &= \dot{y}^{(2)k}\,P^{(r)}{}_{3k} - D_{qq^{(2)}1}\,y_2 + D_{qq^{(2)}2}\,y_1 \quad .
\end{aligned} \tag{9.114}$$

Anmerkung: Die Transformation zwischen den relativen Systemen erfolgte nicht über den Umweg über das (inertiale) Fundamentalsystem. Es muss daher erwartet werden, dass infolge des Verlustes des Bezuges auf das Fundamentalsystem, wenn der betreffende Anteil nicht berücksichtigt wird, ein anderes Ergebnis als im vorhergehenden Rechenprozess erhalten wird.

NUMERISCHES BEISPIEL: Die Kometensonde GIOTTO hatte am 14. März 1990 um $23^h59^m2^s.82$ UTC ($\cong$ 15. März 1990, 0^h TDB) bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium B1950.0 den Zustand $\mathbf{x}_{\bar{A},B1950}$. Der Zustand bezogen auf den mittleren Äquator bzw. die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0 seien $\mathbf{x}_{\bar{A},J2000}$ bzw. $\mathbf{x}_{E,J2000}$

$\mathbf{x}_{\bar{A},B1950}$ [km, km/s]	$\mathbf{x}_{\bar{A},J2000}$ [km, km/s]	$\mathbf{x}_{\bar{E},J2000}$ [km, km/s]

–91 145 268. 878	–91 897 907. 179	–91 897 907. 179
58 295 753. 865	57 272 601. 612	61 188 479. 186
22 170 187. 355	21 725 467. 213	–2 849 006. 124
–22. 523 765 422	–22. 158 040 741	–22. 158 040 741
–27. 031 506 406	–27. 281 912 163	–30. 177 456 793
–12. 815 781 774	–12. 924 622 395	–1. 127 810 941

Tabelle 9-3: Beispiel zur Präzession: Drehung der heliozentrischen Koordinaten der Kometensonde GIOTTO von B1950.0 nach J2000.0 ◀

9.3.5 Die Erdrotation

Ein mittlerer Sterntag ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen (Transit) des mittleren Frühlingspunktes. Infolge der (allgemeinen) Präzession bewegt sich der (mittlere) Frühlingspunkt nach Westen, während sich die Erde in ihrer täglichen Rotation nach Osten bewegt. Ein Sterntag ist daher um den Anteil der Präzession kürzer als die (siderische) Rotationsperiode der Erde. Die (allgemeine) Präzession in Rektaszension beträgt[1] in Abhängigkeit von der Zeit T in julianischen Jahrhunderten bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0

$$\begin{aligned} m(T) &= 307^s.495747+0^s.186208T-1^s.85\times10^{-5}T^2 = \\ &= 4612''.4362+2''.79312T-0''.000278T^2 \end{aligned} \tag{9.115}$$

Somit beträgt die Erdrotation, bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0

$$\omega_E = \dot{\Theta}-m(T) = 15''.04106717866910\left[\frac{1}{s}\right] \tag{9.116}$$

und die siderische Rotationsperiode der Erde

$$P_{\oplus} = \frac{2\pi}{\omega_E} = 86164^s.09890369732 \quad , \tag{9.117}$$

wobei die Sekunden s in Weltzeit (UT1, mittlerer Sonnenzeit) gerechnet sind.

Für hochgenaue Ansprüche müssen die unterschiedlichen astrometrischen Definitionen der unterschiedlichen Koordinatensysteme berücksichtigt werden.

9.4 Nutation

Die von *J. Bradley* (1693–1762) bis 1747 in Greenwich entdeckte *Nutation* zeigt sich als eine periodische Variation des Poles der Erdäquatorebene. Die Nutation ist der säkularen Bewegung des Äquatorpoles infolge der Präzession überlagert. Sie wird durch die wechselseitigen periodisch sich ändernden Stellungen von Sonne und Mond verursacht. Periodische Veränderungen des Poles durch Planetenstörungen werden nicht beobachtet. Die Lage der momentanen Ekliptik, wie sie unter Berücksichtigung der Präzession berechnet werden kann, wird somit durch die Nutation nicht beeinflusst, wohl aber die Lage des Äquators. Somit wird auch die Lage des Frühlingspunktes auf dem Äquator durch die Nutation beeinflusst.

[1] aus: AOKI, S. et al. [1982], p. 361 oder: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 104

9.4.1 Mathematische Beschreibung der Nutation

Der Ort eines Objekts an der Himmelssphäre wird somit in ekliptikaler Länge, nicht aber in ekliptikaler Breite, durch die Nutation variiert. Sei $[l_m, b_m]$ der *mittlere Ort* des Objektes in ekliptikalen Polarkoordinaten, wie er für einen bestimmten Zeitpunkt *t* durch die Eigenbewegung des Objektes und die Präzession bestimmt ist. Mit Berücksichtigung der Nutation erhält man den *wahren Ort* bzw. die wahren ekliptikalen Koordinaten

$$\begin{aligned} l_w &= l_m + \Delta\Psi \\ b_w &= b_m \quad . \end{aligned} \tag{9.118}$$

Hier ist $\Delta\Psi$ die *Nutation in Länge*, also die Abweichung des *wahren* Frühlingspunktes vom *mittleren* Frühlingspunkt, wie Bild 9-10 auf Seite 471 zeigt. Eine Nutation in Breite gibt es nicht. $\overline{A}$ ist der mittlere Äquator, $\overline{P}$ sein Pol. $\overline{P}$ hat vom momentanen Pol Π der Ekliptik den Abstand $\overline{\varepsilon}$, die mittlere Schiefe der Ekliptik. Der wahre Äquator *A* hat den wahren Pol *P*, der vom Pol der Ekliptik als Abstand die *wahre Schiefe der Ekliptik* ε hat. Den Unterschied Δε zwischen wahrer und mittlerer Schiefe der Ekliptik nennt man *Nutation in Schiefe*. Es ist

$$\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon \quad . \tag{9.119}$$

Bild 9-10: Zur Beschreibung der Nutation: Π - Pol der Ekliptik, A - wahrer Äquator, $\overline{A}$ -mittlerer Äquator, P-Pol des wahren Äquators, $\overline{P}$ -Pol des mittleren Äquators, E-mittlere Ekliptik, ε-wahre Schiefe der Ekliptik, $\overline{\varepsilon}$ -mittlere Schiefe der Ekliptik, Υ-wahrer Frühlingspunkt, $\overline{\Upsilon}$-mittlerer Frühlingspunkt, $\Delta\psi$ -Nutation in Länge

Die wahren äquatorialen Koordinaten $[\alpha_w, \delta_w]$ des betrachteten Objektes ergeben sich daher aus

$$\begin{aligned} \cos\alpha_w \cos\delta_w &= \cos(l_m + \Delta\Psi)\cos b_m \\ \sin\alpha_w \cos\delta_w &= \sin(l_m + \Delta\Psi)\cos b_m \cos(\overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) - \sin b_m \sin(\overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) \\ \sin\delta_w &= \sin(l_m + \Delta\Psi)\cos b_m \sin(\overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) + \sin b_m \sin(\overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) \quad . \end{aligned} \tag{9.120}$$

Gewöhnlich wird der mittlere Ort in äquatorialen Koordinaten $[\alpha_m, \delta_m]$ gegeben, so dass zunächst durch Drehung um die mittlere Schiefe der Ekliptik der mittlere Ort in ekliptikalen Koordinaten aus

$$\begin{aligned} \cos l_m \cos b_m &= \cos\alpha_m \cos\delta_m \\ \sin l_m \cos b_m &= \sin\alpha_m \cos b_m \cos\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m \sin\bar{\varepsilon} \\ \sin b_m &= -\sin\alpha_m \cos\delta_m \sin\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m \sin\bar{\varepsilon} \end{aligned} \tag{9.121}$$

berechnet werden muss, bevor die Nutation angebracht werden kann. Die Formeln (9.120) und (9.121) stellen das vollständige und exakte System zur Berücksichtigung der Nutation dar. In der Praxis werden jedoch gewöhnlich die im nächsten Abschnitt angegebenen Näherungsformeln verwendet.

Die Berechnung der Nutation erfolgt heutzutage[1] unter der Annahme, dass

- „die Erde nicht als starrer Körper und nicht axialsymmetrisch angenommen wird,
- die astronomischen Konstanten des IAU-1976 Systems verwendet werden (siehe Anhang E[2]),
- der Referenzpol so ausgewählt ist, dass keine täglichen oder quasi-täglichen Bewegungen gegenüber einem raumfesten oder erdfesten Koordinatensystem auftreten. Die Erscheinung der dynamischen Variation der Breite (= 'erzwungene tägliche Polbewegung') wird berücksichtigt, weiter alle von außen verursachten Bewegungen der Erdachse, jedoch keine internen, d. h. geophysikalisch bedingte, oder freie Bewegungen. Der Referenzpol wird 'Ephemeriden Himmelspol' ('celestial ephemeris pole CEP') genannt."[3]

Die Koeffizienten der gegenwärtig benutzten Nutationstheorie finden sich in aller Ausführlichkeit z. B. in AA 1984. Zur Illustration folgen die größten Terme mit Vernachlässigung aller Glieder kleiner als 0″.01:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi = {} & (-17''.1996 - 0''.01742\,T)\sin\Omega_{\leftmoon} + \\ & + (0''.2062 + 0''.00002\,T)\sin 2\Omega_{\leftmoon} - \\ & - (1''.3187 + 0''.00016\,T)\sin L_{\odot} + \\ & + (0''.1426 - 0''.00034T)\sin M_{\odot} - \\ & - (0''.0517 - 0''.00012\,T)\sin(2L_{\odot} + M_{\odot}) + \\ & + (0''.0217 - 0''.00005T)\sin(2L_{\odot} - M_{\odot}) + \\ & + (0''.0129 + 0''.00001T)\sin(2L_{\odot} - \Omega_{\leftmoon}) - \\ & - (0''.2274 + 0''.00002\,T)\sin 2L_{\leftmoon} + \\ & + (0''.0712 + 0''.00001T)\sin M_{\leftmoon} - \\ & - (0''.0386 + 0''.00004T)\sin(2F_{\leftmoon} + \Omega_{\leftmoon}) - \\ & - 0''.0301\sin(2L_{\leftmoon} + M_{\leftmoon}) - \\ & - 0''.0158\sin(M_{\leftmoon} - 2L_{\leftmoon}) + \\ & + 0''.0123\sin(2F_{\leftmoon} - M_{\leftmoon}) + \ldots \end{aligned} \tag{9.122}$$

[1] siehe AA 1984, pp. S21–S26

[2] Band V

[3] SEIDELMANN, P. K. ed. [1982], KINOSHITA [1977]

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon \;=\; & (9''.2025 + 0''.00089T)\sin\Omega_{\leftmoon} - \\ & -(0''.0895 - 0''.00005T)\sin 2\Omega_{\leftmoon} + \\ & +(0''.5736 - 0''.00031T)\sin L_{\odot} + \\ & +(0''.0224 - 0''.00006T)\sin(2L_{\odot} + M_{\odot}) + \\ & +(0''.0977 - 0''.00005T)\sin L_{\leftmoon} + \\ & +0''.0200\sin(2F_{\leftmoon} + \Omega_{\leftmoon}) + \\ & +(0''.0129 - 0''.00001T)\sin(2L_{\leftmoon} + M_{\leftmoon}) + \ldots\end{aligned} \tag{9.123}$$

Hier ist

T	Zeit in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0,
$\Omega_{\leftmoon}$	ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn, gemessen vom mittleren Frühlingspunkt
$L_{\odot}$	geometrische mittlere Länge der Sonne $(L_{\odot} = F_{\leftmoon} + \Omega_{\leftmoon} - D_{\leftmoon})$
$F_{\leftmoon}$	mittleres Argument des Mondes
$L_{\leftmoon}$	geometrische mittlere Länge des Mondes $(L_{\leftmoon} = F_{\leftmoon} + \Omega_{\leftmoon})$
$M_{\odot}$	mittlere Anomalie der Sonne
$M_{\leftmoon}$	mittlere Anomalie des Mondes
$D_{\leftmoon}$	mittlere Elongation des Mondes von der Sonne $(D_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - L_{\odot})$ („Alter“ des Mondes)

Die aktuellen Werte dieser Größen sind in Anhang E (Band V) gegeben. Sie zeigen die Abhängigkeit von der Sonnen- und Mondbewegung. Der Hauptterm wird von der Bewegung des Mondknotens beeinflusst. Da die siderische Umlaufzeit des Mondknotens 6798.4 mittlere Sonnentage = 19.11 tropische Jahre beträgt, ist diese Zeitdauer auch die Hauptperiode der Nutation.

9.4.2 Nutation in äquatorialen Koordinaten

Die Umrechnung von mittleren äquatorialen in wahre äquatoriale Örter zu einem Zeitpunkt t lautet

$$\begin{aligned}\cos\alpha_w\cos\delta_w &= \cos\alpha_m\cos\delta_m\cos\Delta\Psi - \left(\sin\alpha_m\cos\delta_m\cos\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m\sin\bar{\varepsilon}\right)\sin\Delta\Psi \\ \sin\alpha_w\cos\delta_w &= \left[\cos\alpha_m\cos\delta_m\sin\Delta\Psi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin\alpha_m\cos\delta_m\cos\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m\sin\bar{\varepsilon}\right)\cos\Delta\Psi\right]\cos\left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) - \\ &\quad - \left(-\sin\alpha_m\cos\delta_m\sin\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m\cos\bar{\varepsilon}\right)\sin\left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) \\ \sin\delta_w &= \left[\cos\alpha_m\cos\delta_m\sin\Delta\Psi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin\alpha_m\cos\delta_m\cos\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m\sin\bar{\varepsilon}\right)\cos\Delta\Psi\right]\sin\left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) + \\ &\quad + \left(-\sin\alpha_m\cos\delta_m\sin\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m\cos\bar{\varepsilon}\right)\cos\left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) \quad .\end{aligned} \tag{9.124}$$

Da $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$ kleine Größen sind, lässt sich dieser Ausdruck ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust (Fehler kleiner $3'' \times 10^{-8}$) vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_w \cos\delta_w &\approx \cos\alpha_m \cos\delta_m - \left(\sin\alpha_m \cos\delta_m \cos\bar{\varepsilon} + \sin\delta_m \sin\bar{\varepsilon}\right)\Delta\Psi \\
\sin\alpha_w \cos\delta_w &\approx \sin\alpha_m \cos\delta_m + \cos\alpha_m \cos\delta_m \cos\bar{\varepsilon}\ \Delta\Psi - \sin\delta_m\ \Delta\varepsilon \\
\sin\delta_w &\approx \sin\delta_m + \cos\alpha_m \cos\delta_m \sin\bar{\varepsilon}\ \Delta\Psi + \sin\alpha_m \cos\delta_m\ \Delta\varepsilon\ .
\end{aligned} \tag{9.125}$$

Ohne wesentliche Einschränkung wird üblicherweise auch $\bar{\varepsilon}$ durch $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$ ersetzt.

Die durch die Nutation verursachten Korrekturen in Rektaszension $\Delta\alpha := \alpha_w - \alpha_m$ und Deklination $\Delta\delta := \delta_w - \delta_m$ führen auf die Näherungsausdrücke

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_w &= \cos\left(\alpha_m + \Delta\alpha\right) \approx \cos\alpha_m - \Delta\alpha \sin\alpha_m \\
\sin\alpha_w &= \sin\left(\alpha_m + \Delta\alpha\right) \approx \sin\alpha_m + \Delta\alpha \cos\alpha_m \\
\cos\delta_m &= \cos\left(\delta_m + \Delta\delta\right) \approx \cos\delta_m - \Delta\alpha \sin\delta_m \\
\sin\delta_w &= \sin\left(\delta_m + \Delta\delta\right) \approx \sin\delta_m + \Delta\delta \cos\delta_m \\
\cos\Delta\Psi &\approx 1\ ,\ \sin\Delta\Psi \approx \Delta\Psi \\
\cos\varepsilon &\approx \cos\bar{\varepsilon} - \Delta\varepsilon \sin\bar{\varepsilon} \\
\sin\varepsilon &\approx \sin\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon \cos\bar{\varepsilon}\ .
\end{aligned} \tag{9.126}$$

Diese oben eingesetzt führen auf die bekannten Näherungsausdrücke

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &\approx \left(\cos\bar{\varepsilon} + \sin\alpha_m \tan\delta_m \sin\bar{\varepsilon}\right)\Delta\Psi - \cos\alpha_m \tan\delta_m\ \Delta\varepsilon \\
\Delta\delta &\approx \cos\alpha_m \sin\bar{\varepsilon}\ \Delta\Psi + \sin\alpha_m\ \Delta\varepsilon\ .
\end{aligned} \tag{9.127}$$

Die zugehörigen Variationen, die zur Umrechnung des Geschwindigkeitsvektors benötigt werden, lauten:

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\alpha\right)^{\cdot} = &\left(\cos\bar{\varepsilon} + \sin\alpha_w \tan\delta_m \sin\bar{\varepsilon}\right)\left(\Delta\Psi\right)^{\cdot} - \cos\alpha_m \tan\delta_m \left(\Delta\varepsilon\right)^{\cdot} + \\
&+\left(-\sin\bar{\varepsilon} + \sin\alpha_m \tan\delta_m \cos\bar{\varepsilon}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}\ \Delta\Psi + \\
&+\left(\cos\alpha_m \tan\delta_m \sin\bar{\varepsilon}\,\Delta\Psi + \sin\alpha_m \tan\delta_m\,\Delta\varepsilon\right)\dot{\alpha}_m\ + \\
&+\frac{1}{\cos^2\delta_m}\left(\sin\alpha_m \sin\bar{\varepsilon}\,\Delta\Psi - \cos\alpha_m\,\Delta\varepsilon\right)\dot{\delta}_m
\end{aligned} \tag{9.128}$$

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\delta\right)^{\cdot} = &\left(\Delta\varepsilon\right)^{\cdot} \sin\alpha_m + \dot{\alpha}_m\,\Delta\varepsilon \sin\alpha_m + \left(\Delta\Psi\right)^{\cdot} \cos\alpha_m \sin\bar{\varepsilon}\ - \\
&- \dot{\alpha}_m\,\Delta\Psi \sin\alpha_m \sin\bar{\varepsilon} + \dot{\bar{\varepsilon}}\ \Delta\Psi \cos\alpha_m \cos\bar{\varepsilon}\ .
\end{aligned} \tag{9.129}$$

In kartesischen auf den Frühlingspunkt bezogenen äquatorialen Koordinaten folgen die Näherungsausdrücke für den Ortsvektor

$$\begin{aligned}
x_{1w} &\approx x_{1m} - \Delta\psi\ \left(x_{2m}\cos\bar{\varepsilon} + x_{3m}\sin\bar{\varepsilon}\right) \\
x_{2w} &\approx x_{2m} + x_{1m}\,\Delta\psi\cos\bar{\varepsilon}\ - x_{3m}\,\Delta\varepsilon \\
x_{3w} &\approx x_{3m} + x_{1m}\,\Delta\psi\sin\bar{\varepsilon}\ + x_{2m}\,\Delta\varepsilon\ .
\end{aligned} \tag{9.130}$$

Für die Umkehrung ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_{1m} &\approx x_{1w} + \left(x_{2w}\cos\bar{\varepsilon} + x_{3w}\sin\bar{\varepsilon}\right)\Delta\psi \\
x_{2m} &\approx x_{2w} - x_{2w}\,\Delta\psi\ \cos\bar{\varepsilon} + x_{3w}\,\Delta\varepsilon \\
x_{3m} &\approx x_{3w} - x_{1w}\,\Delta\psi\ \sin\bar{\varepsilon} - x_{2w}\,\Delta\varepsilon\ .
\end{aligned} \tag{9.131}$$

Die entsprechenden Formeln für den wahren Geschwindigkeitsvektor lauten:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{1w} &= \dot{x}_{1m} - \left(\dot{x}_{2m}\cos\bar{\varepsilon} + \dot{x}_{3m}\sin\bar{\varepsilon}\right)\Delta\psi + \\
&\quad + \left(x_{2m}\sin\bar{\varepsilon} - x_{3m}\cos\bar{\varepsilon}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi - \\
&\quad - \left(x_{2m}\cos\bar{\varepsilon} + x_{3m}\sin\bar{\varepsilon}\right)(\Delta\psi)^{\cdot} \\
\dot{x}_{2w} &= \dot{x}_{2m} + \dot{x}_{1m}\,\Delta\psi\,\cos\bar{\varepsilon} - \dot{x}_{3m}\,\Delta\varepsilon - \\
&\quad - x_{1m}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi\,\sin\bar{\varepsilon} + x_{1m}(\Delta\psi)^{\cdot}\cos\bar{\varepsilon} - x_{3m}(\Delta\varepsilon)^{\cdot} \\
\dot{x}_{3w} &= \dot{x}_{3m} + \dot{x}_{1m}\,\Delta\psi\,\sin\bar{\varepsilon} + \dot{x}_{2m}\,\Delta\varepsilon + \\
&\quad + x_{1m}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi\,\cos\bar{\varepsilon} + x_{1m}(\Delta\psi)^{\cdot}\sin\bar{\varepsilon} + x_{2m}(\Delta\varepsilon)^{\cdot} \quad .
\end{aligned}
\tag{9.132}
$$

Für die Umkehrung folgt entsprechend

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{1m} &= \dot{x}_{1w} + \left(\dot{x}_{2w}\cos\bar{\varepsilon} + \dot{x}_{3w}\sin\bar{\varepsilon}\right)\Delta\psi - \\
&\quad - \left(x_{2w}\sin\bar{\varepsilon} - x_{3w}\cos\bar{\varepsilon}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi + \\
&\quad + \left(x_{2w}\cos\bar{\varepsilon} + x_{3w}\sin\bar{\varepsilon}\right)(\Delta\psi)^{\cdot} \\
\dot{x}_{2m} &= \dot{x}_{2w} - \dot{x}_{1w}\,\Delta\psi\cos\bar{\varepsilon} + \dot{x}_{3w}\,\Delta\varepsilon + \\
&\quad + x_{1w}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi\,\sin\bar{\varepsilon} - x_{1w}(\Delta\psi)^{\cdot}\cos\bar{\varepsilon} + x_{3w}(\Delta\varepsilon)^{\cdot} \\
\dot{x}_{3m} &= \dot{x}_{3w} - \dot{x}_{1w}\,\Delta\psi\sin\bar{\varepsilon} - \dot{x}_{2w}\,\Delta\varepsilon - \\
&\quad - x_{1w}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\Delta\psi\,\cos\bar{\varepsilon} - x_{1w}(\Delta\psi)^{\cdot}\sin\bar{\varepsilon} - x_{2w}(\Delta\varepsilon)^{\cdot} \quad .
\end{aligned}
\tag{9.133}
$$

9.4.3 Approximation der Nutation nach Tschebyscheff

Mit zunehmender Genauigkeit werden die Reihen zur Berechnung der Nutation länger. Während bis 1960 die noch auf *Newcomb* zurückgehende Theorie der Nutation in Länge 22 Glieder, in Schiefe 15 Glieder bei einer Genauigkeit von 0″.01 umfasste, waren es danach bei der von *Woolard* berechneten Theorie bereits 69 Glieder in Länge und 40 Glieder in Schiefe bei einer Genauigkeit von 0″.0002[1]. Die 1980 IAU Nutationstheorie nach *Wahr* und *Kinoshita* umfasst 106 Glieder in Länge und 64 Glieder in Schiefe bei einer Genauigkeit von 0″.0001 [1,2]. Da die Entwicklungen trigonometrische Reihen sind, wie die Formeln (9.122) und (9.123) zeigen, geht die zunehmende Länge dieser Reihen erheblich in den Rechenbedarf ein. Bei enggestaffelten Ephemeriden ist deshalb selbst auf raschen Rechenautomaten die schrittweise Berechnung der Nutation nicht mehr ökonomisch. Da sich die Nutationskoeffizienten über gewisse Zeiträume nur wenig ändern, ist es sinnvoll, diese Koeffizienten nur gelegentlich zu berechnen und umgerechnet in zeitweise gültigen Konstanten an einer Ephemeride anzubringen. Dazu dienten früher die *Besselschen Konstanten* (englisch: „day numbers“), die auch heute noch für das Rechnen von Hand und bei nicht allzu hohen Genauigkeitsanforderungen (nicht genauer als 0″.01 in Rektaszension und Deklination) ihre Bedeutung haben[3]. Für das automatische Rechnen kann in bestimmten Zeitintervallen die volle Genauigkeit der Theorie erhalten bleiben, wenn die Nutationsreihen über gewisse Zeitbereiche durch *Tschebyscheff-Polynome* approximiert werden. Diese spielen in der Ephemeridenrechnung eine zunehmend wichtige Rolle und werden im Zusammenhang mit Planeten- und Mondephemeriden (siehe Kapitel 28, 29, 30 in Band IIIb) zur Berechnung der *Stumpffschen Funktionen* usw. eingesetzt.

---

[1] Explanatory Supplement [1961], p. 42

[2] AA 1984, p. S21 ff.

[3] siehe etwa AA 1984, p. B19 ff.

Auch die vom JPL berechneten hochgenauen Ephemeriden, die heute in der Astronomie allgemein als Referenz verwendet werden, werden mit *Tschebyscheff*-Approximationen interpoliert[1].

In Anhang C (Band V) wird die Approximation mit *Tschebyscheff*-Polynomen hergeleitet, soweit diese für die Ephemeridenrechnung von Bedeutung sind.

NUMERISCHES BEISPIEL 1: Die Kometensonde GIOTTO hatte am 14. März 1990 um $23^h59^m2^s.82$ (UTC) bezogen auf den mittleren Äquator bzw. die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0 den Zustand $\mathbf{x}_{\bar{A},J2000.0}$ bzw. $\mathbf{x}_{\bar{E},J2000.0}$. Bezogen auf den wahren Äquator bzw. die wahre Ekliptik und das wahre Äquinoktium J2000.0 lautet der Zustand $\mathbf{x}_{A,J2000.0}$ bzw. $\mathbf{x}_{E,J2000.0}$.

$\mathbf{x}_{\bar{A},J2000}$ [km, km/s]	$\mathbf{x}_{A,J2000}$ [km, km/s]	$\mathbf{x}_{\bar{E},J2000}$ [km, km/s]	$\mathbf{x}_{E,J2000}$ [km, km/s]
–91 897 907. 179	–91 893 776. 806	–91 897 907. 179	–91 893 776. 806
57 272 601. 612	57 278 901. 263	61 188 479. 186	61 194 682. 533
21 725 467. 213	21 726 331. 407	–2 849 006. 124	–2 849 006. 125
–22. 158 040 741	–22. 160 081 471	–22. 158 040 741	–22. 160 081 471
–27. 281 912 163	–27. 280 890 609	–30. 177 456 793	–30. 175 948 426
–12. 924 622 395	–12. 923 257 404	–1. 127 810 941	–1. 127 821 821

Tabelle 9-4: Beispiel zur Nutation: Drehung der Koordinaten von GIOTTO zum mittleren Äquator und mittleren Äquinoktium J2000.0 in Koordinaten zum wahren Äquator und Ekliptik und wahren Äquinoktium J2000.0 ◀

NUMERISCHES BEISPIEL 2: Die Jupitersonde GALILEO hat im Moment des ersten Vorbeifluges an der Erde am t_0 = 8. Dez. 1990 um $19^h49^m16^s.0$ (UTC) die *Kepler*elemente[2] $\mathbf{E}_{E,B1950}$ bezogen auf das mittlere Äquinoktium und die Ekliptik zur Besselschen Epoche B1950.0. Zur Berechnung der geozentrischen Ephemeride des Vorbeifluges an der Erde werden die *Kepler*elemente $\mathbf{E}_{A,t_0}$ bezogen auf das wahre Äquinoktium und den wahren Äquator im Moment der größten Annäherung an die Erde benötigt:

[1] siehe STANDISH, E. M. JR. [1985], *User's Guide to JPL Lunar and Planetary Ephemeris Export Package*, JPL 264-664, Pasadena, Ca 91109

[2] nach: JOHANNESEN, J. [1990], 'Orbital Elements for Galileo Trajectory (Corrected)', JPL IOM GLL-NAV-90-10, January 24, 1990

$\mathbf{E}_{\bar{E},B1950}$	$\mathbf{E}_{A,t_0}$
a = –4974.189	a = –4974.175
e = 2.473142085	e = 2.473146360
i = 142°.19947	i = 143°.04043
l_Ω = 71°.72517	Ω = 103°.79848
ω = 95°.83976	ω = 134°.92129
υ = 0°.0	υ = 0°.0

Tabelle 9-5: Beispiel zur Nutation: Drehung der Bahnelemente von GALILEO zum mittleren Äquinoktium und Ekliptik B1950.0 in Koordinaten zum wahren Äquinoktium und wahren Äquator zur Elementeepoche 1990/Dez/08 $19^h49^m16^s$ ◄

9.4.4 Die scheinbare Sternzeit

Als *scheinbare Sternzeit* wird der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes, also des Schnittpunktes des wahren Äquators zum betreffenden Datum mit der Ekliptik zum Datum, bezeichnet. Der wahre Frühlingspunkt unterscheidet sich vom mittleren um die Nutation der Erdachse, so dass die scheinbare Sternzeit sich von der mittleren um periodische Variationen unterscheidet. Diese werden als *Gleichung der Äquinoktien* bezeichnet[1]

$$\Delta\alpha \;:=\; \Delta\Psi\cos\varepsilon \quad , \tag{9.134}$$

wobei $\Delta\Psi$ die Nutation in Länge und ε die wahre Schiefe der Ekliptik bedeuten. Die scheinbare Sternzeit[2] Θ^* kann aus der mittleren Sternzeit Θ durch Reduktion um die Gleichung der Äquinoktien erhalten werden:

$$\Theta^* \;=\; \Theta + \Delta\Psi\cos\varepsilon \quad . \tag{9.135}$$

Der *scheinbare Sterntag* besteht aus 24^h scheinbarer Sternzeit. Der Durchgang (*Transit*) eines Objektes am Sternhimmel durch den Ortsmeridian[3] einer Beobachtungsstation auf der Erdoberfläche findet wegen des gemeinsamen Bezugs auf den Frühlingspunkt genau dann statt, wenn die Ortssternzeit gleich der Rektaszension dieses Objektes ist. Aus diesem Grund wird in der klassischen Astrometrie die scheinbare Sternzeit aus dem Durchgang (Vorübergang, Transit) von bekannten Sternen über die Koordinaten des Sternes, die in einem (Fundamental-) Katalog zur Verfügung gestellt werden, auf das Äquinoktium dieses Kataloges bezogen. Derzeit handelt es sich um den Fundamentalkatalog 5 (FK5). Das Äquinoktium eines Fundamentalkataloges weicht jedoch von dem dynamischen Äquinoktium etwas ab, welches durch die Bewegung der Erde um die Sonne bestimmt wird.

Für praktische Anwendungen kann die mittlere Sternzeit aus der scheinbaren berechnet werden, wenn diese um die Gleichung der Äquinoktien reduziert wird. Moderne Messungen der

---

[1] bis 1960 wurde dieser Wert als *Nutation in Rektaszension* bezeichnet (vgl. SEIDELMANN P. K. ed. [1992], p. 42)

[2] Der Begriff „wahre Sternzeit“ wird in der sphärischen Astronomie nicht verwendet.

[3] bei Sternen, Planeten und anderen relativ langsam bewegten Objekten am Sternhimmel ist der Moment des Durchganges (Transit) gleich der „oberen Kulmination“. Dies trifft aber bei den relativ rasch bewegten Erdsatelliten nicht mehr zu, deren obere Kulmination in der Regel außerhalb des Ortsmeridians liegt.

Sternzeit werden mit interferometrischen Beobachtungen von Radioquellen oder mit hochgenauen Mond- bzw. auch Satelliten- Entfernungsbestimmungen mit Hilfe von Lasern (*Lunar Laser Ranging* LLR, *Satellite Laser Ranging* SLR) durchgeführt. Die aus solchen Messungen erhaltene Sternzeit muss um die Polbewegung und die kurzperiodischen Unregelmäßigkeiten der Erdrotation reduziert werden[1].

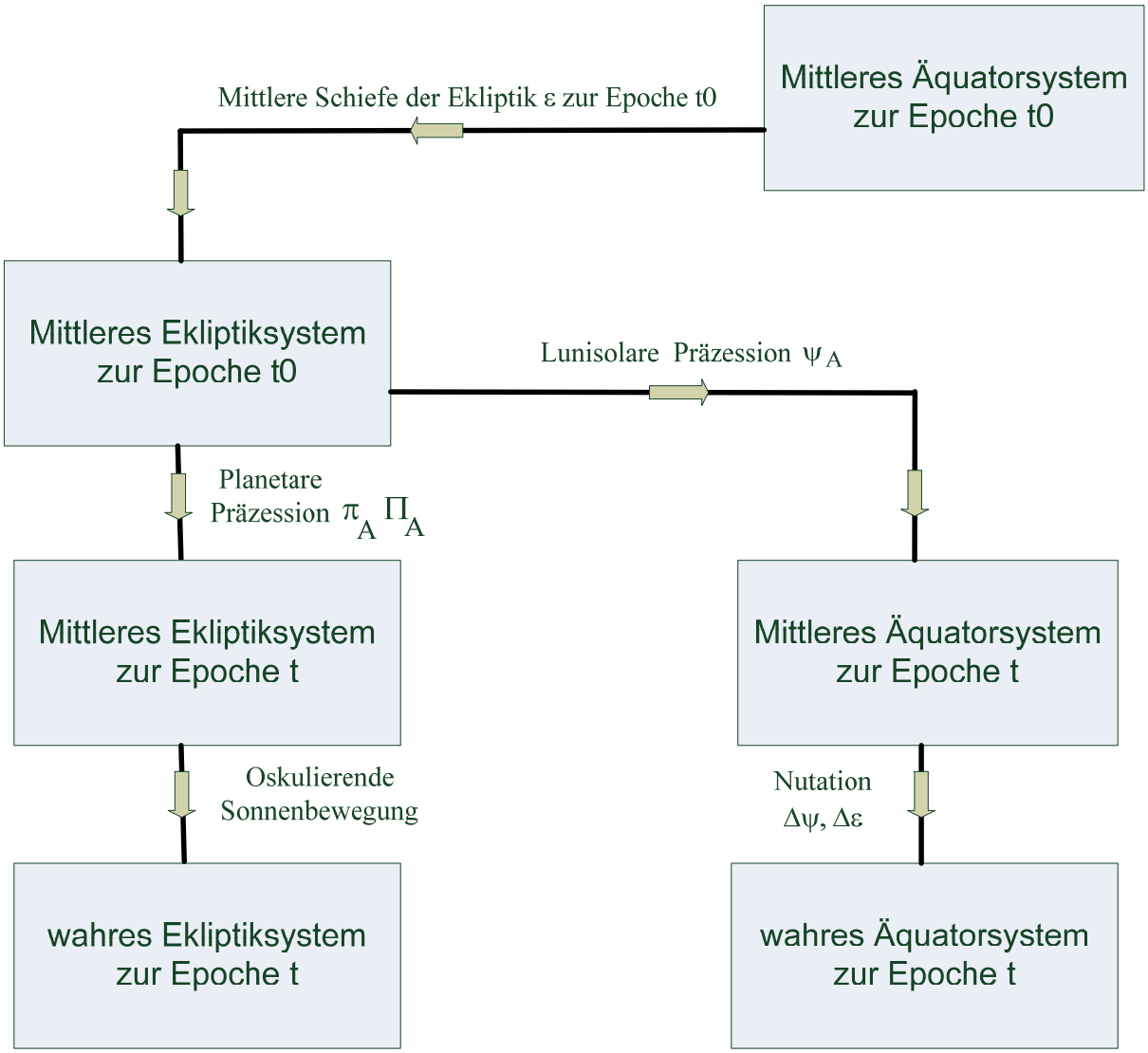


Bild 9-11: Zusammenspiel der grundlegenden Koordinatensysteme der sphärischen Astronomie Äquatorsystem und Ekliptiksystem (vgl. Bild 9-8 und Bild 9-10)

9.5 Polbewegung

Als Polbewegung wird eine Bewegung des momentanen Poles der Erde bezeichnet, die eine Folge geophysikalischer Vorgänge im Erdinneren ist[2]. Sie setzt sich zusammen aus einer Pe-

[1] siehe hierzu: WOOLARD, E. W. and CLEMENCE. C. M. [1966], pp. 335–345, auch SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 48–49

[2] Nähere Einzelheiten in GREEN, R. M. [1985], pp. 122-128; ferner in SEIDELMANN, P. K. ed.[1992], pp. 139–140 und pp. 238–240

riode von 428 Tagen (die 14 monatige *Chandler* Periode), einer Periode von einem Jahr sowie einem wesentlichen Anteil, der nicht vorhersagbar ist, etwa als Folge von Erdbeben und anderen Vorgängen im Erdmantel. Für den Erdkörper kann aus physikalischen Gründen eine Figurenachse mit Pol P_0 definiert werden. Von diesem Pol weicht die momentane Rotationsachse mit Pol P ab. Die Abweichung wird in ebenen rechtwinkligen Koordinaten

$$x_P = \gamma \cos \Gamma \quad , \quad y_P = -\gamma \sin \Gamma \tag{9.136}$$

angegeben. Diese Werte werden in IERS Tabellen zur Verfügung gestellt[1]. Hier bedeutet γ den Abstand $\gamma = \widehat{PP_0}$ den Abstand zwischen den beiden Polen in Bogensekunden, der typischerweise in der Größenordnung bis zu $0''.3$ liegt (entsprechend etwa 9m auf der Erdoberfläche) und in einem 6 jährigen Zyklus zwischen den Werten $0''.05$ und $0''.25$ schwankt. Γ ist der Winkel gesehen von P_0 aus von der Richtung zum Nullmeridian. Die Polbewegung verändert das Koordinatennetz auf dem Erdkörper, beeinflusst also nicht die Koordinaten eines Himmelskörpers. Seien (λ_0, φ_0) die geographischen Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche in Bezug auf die Figurenachse P_0 und (λ, φ) die geographischen Koordinaten in Bezug auf die momentane Rotationsachse P, besteht folgende Beziehung[2]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + x_P \cos \lambda_0 - y_P \sin \lambda_0 \\ \lambda &= \lambda_0 + (x_P \sin \lambda_0 + y_P \cos \lambda_0) \tan \varphi_0 \quad . \end{aligned} \tag{9.137}$$

Die Variation in Länge wirkt sich auch auf die Bestimmung der Sternzeit in Greenwich und damit die Bestimmung der Weltzeit (UT1) aus.

Bei einer exakten Bahnbestimmung von Erdsatelliten muss die Polbewegung berücksichtigt werden. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird sie gewöhnlich vernachlässigt.

9.6 Parallaxe

In den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels wurden die Koordinatensysteme beschrieben, in denen die Beobachtungen eines Satelliten erfolgen können. Damit werden Korrekturen berechenbar, die an den Beobachtungen beim Übergang von einem System zu einem anderen angebracht werden müssen. Sie werden notwendig durch ihren Bezug auf die Stellung der Sonne und in Bezug auf die Erdrotation, also zu Sonnen- und Sternzeit. Es gibt aber auch noch weitere Einflüsse, welche die scheinbare Stellung eines Satelliten an der Sphäre verändern können. Sie hängen mit der Erdrotation und der Atmosphäre um die Erde zusammen. Sie lassen sich einheitlich dadurch charakterisieren, dass sie den elektromagnetischen Strahl vom Himmelskörper (entsprechend von einem Satelliten) zum Beobachter beeinflussen. Der Beobachter „sieht“ das Objekt ganz woanders, als es wirklich ist, er „schielt“ daran vorbei. Man könnte diese Einflüsse als „Schielkorrekturen“ bezeichnen im Gegensatz zu den früher genannten „Systemkorrekturen“, die eine Folge der verschiedenartigen Bezugssysteme und ihrer unterschiedlichen relativen Bewegungen sind.

Als erste dieser „Schielkorrekturen“ wir in diesem Abschnitt die Parallaxe betrachtet. Als Parallaxe werden der unterschiedlichen Ortskoordinaten eines beobachteten Objektes infolge eines unterschiedlichen Beobachtungsortes bzw. Bezugspunktes bezeichnet. Solche unterschiedlichen Beobachtungsorte können ein Ort auf der Erde oder ein umlaufender Satelliten

[1] SOFA [2010/1], p. 12

[2] Herleitung in GREEN, R. M. [1985], pp. 126-127

sein, übliche Bezugspunkte sind der Erdmittelpunkt oder der Mittelpunkt eines Planeten, Der Sonnenmittelpunkt oder das Baryzentrum des Sonnensystems.

Bild 9-12: Ortsvektor eines Himmelskörpers bezogen auf das Baryzentrum *B* des Sonnensystems, sowie auf den Beobachtungsort *T* auf der Erdoberfläche bzw. den Mittelpunkt der Erde ♁. $\mathbf{p}_i$ sind die (orthonormierten) Basisvektoren eines einheitlich verwendeten Bezugssystems

9.6.1 Exakte Formulierung der Parallaxe

Im Fall bekannter Bahnen bei Satelliten, Raumflugkörpern, Planeten können die topozentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren berechnet werden (siehe Bild 9-12), wenn der geozentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{r}}_S\right)$ mit den Methoden der Bahnvorhersage berechnet wurde und wenn $\left(\mathbf{R}_T, \dot{\mathbf{R}}_T\right)$ der geozentrische Zustandsvektor des Beobachtungsortes ist:

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_S - \mathbf{R}_T \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}_S - \dot{\mathbf{R}}_T \quad . \tag{9.138}$$

Bei interplanetaren Bahnen muss der baryzentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\right)$ des Himmelskörpers und der baryzentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{♁}, \dot{\mathbf{r}}_{♁}\right)$ (zum Beispiel) der Erdbahn bekannt sein. Dann ist

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{♁} - \mathbf{R}_T \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_{♁} - \dot{\mathbf{R}}_T \quad . \tag{9.139}$$

In diesen Fällen wird keine Korrektur um eine Parallaxe benötigt, da diese bereits vollständig berücksichtigt ist. Eine Korrektur ist erforderlich, wenn die Entfernung des beobachteten Objektes (Stern, Galaxie, …) unbekannt ist. Dann müssen an die Beobachtungsdaten eine oder beide der folgenden Korrekturen angebracht werden.

9.6.2 Tägliche Parallaxe

Unter täglicher Parallaxe (gelegentlich auch als geozentrische Parallaxe bezeichnet) wird die Reduktion der Beobachtungsdaten vom Erdmittelpunkt auf ein Topozentrum verstanden.

1. Tägliche Parallaxe in horizontalen Koordinaten

Bild 9-13: Beobachtung eines Himmelskörpers S von einem Beobachter B auf der Erdoberfläche aus. gH – geodätischer Horizont, gZ – geodätischer Zenit, $\mathbf{q}_j^{(H)}$ -Basisvektoren des Horizontsystems, φ - geodätische Breite, φ' -geozentrische Breite von B, **r**-geozentrischer Ortsvektor von S mit Abstand r', $\mathbf{r}'$ -topozentrischer Ortsvektor von S mit Abstand ρ', $\mathbf{R}_T$ geozentricher Ortsvektor von B, δ - Deklination des Himmelskörpers

Die Reduktion von Beobachtungsdaten vom Erdzentrum auf ein Topozentrum auf der Erdoberfläche muss für genaue Aussagen die Abplattung der Erde einschließen. Dies geschieht mit den in Abschnitt 37.2 hergeleiteten und zusammengestellten Formeln[1].

Der geozentrische Zenit (gZ) im Beobachtungsort B (siehe Bild 9-13) habe den Richtungsvektor $\mathbf{q}_3^{(H)}$. Im astronomischen Sinn nach Süden sei im lokalen Horizont („geodätischer Horizont“ gH) der Richtungsvektor $\mathbf{q}_1^{(H)}$ gegeben. Der Vektor $\mathbf{q}_2^{(H)} = \mathbf{q}_3^{(H)} \times \mathbf{q}_1^{(H)}$ ergänzt das lokale geodätische Horizontsystem. In diesem System hat der Beobachter B die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{R}_T = R'\left[\mathbf{q}_1^{(H)} \sin\left(\varphi - \varphi'\right) + \mathbf{q}_3^{(H)} \cos\left(\varphi - \varphi'\right)\right] \quad . \tag{9.140}$$

[1] In Band V

Hier bedeuten φ die geodätische und φ' die geozentrische Breite. Der Differenzwinkel kann mit den Formeln in Abschnitt 37.2 und der Abplattung *f* auf die geodätische Breite bezogen werden:

$$\begin{aligned}\sin(\varphi-\varphi') &= \frac{\left[1-(1-f)^2\right]\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-f)^4\sin^2\varphi}} \\ \cos(\varphi-\varphi') &= \frac{\cos^2\varphi+(1-f)^2\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-f)^4\sin^2\varphi}} \quad .\end{aligned} \tag{9.141}$$

Ein Himmelskörper S (Stern, Planet, Satellit) hat im geodätischen Horizontsystem bezogen auf das Topozentrum B die Darstellung

$$\mathbf{r}' = \rho'\left(\mathbf{q}_1^{(H)}\cos A'\cosh'+\mathbf{q}_2^{(H)}\sin A'\cosh'+\mathbf{q}_3^{(H)}\sinh'\right) \quad . \tag{9.142}$$

Bezogen auf den Erdmittelpunkt lautet die entsprechende Darstellung

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1^{(H)}\cos A\cos h+\mathbf{q}_2^{(H)}\sin A\cos h+\mathbf{q}_3^{(H)}\sin h\right) \quad . \tag{9.143}$$

Die Berechnung des topozentrischen Ortes aus dem geozentrischen erfolgt dann mit der Beziehung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}_T \tag{9.144}$$

aus

$$\rho'^2 = r^2 + R_B^2 - 2\,r\,R_B\cos(\mathbf{r},\mathbf{R}_T) \tag{9.145}$$

wobei

$$\cos(\mathbf{r},\mathbf{R}_T) = \cos A\cos h\sin(\varphi-\varphi')+\sin h\cos(\varphi-\varphi') \quad . \tag{9.146}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\cos A'\cos h' &= \frac{r}{\rho'}\cos A\cos h-\frac{R_B}{\rho'}\sin(\varphi-\varphi') \\ \sin A'\cos h' &= \frac{r}{\rho'}\sin A\cos h \\ \sin h' &= \frac{r}{\rho'}\sin h-\frac{R_B}{\rho'}\cos(\varphi-\varphi') \quad .\end{aligned} \tag{9.147}$$

2. Tägliche Parallaxe in äquatorialen Koordinaten

Gegeben seien die geozentrischen äquatorialen Winkelkoordinaten (α,δ) des beobachteten Himmelskörpers, r_S seine geozentrische Distanz, R_E der mittlere Äquatorradius der Erde, R' die geozentrische Distanz des Beobachtungsortes, φ' die geozentrische Breite und λ die geo-

graphische Länge, sowie $\vartheta = \Theta_G + \lambda - \alpha$ mit der Greenwich Sternzeit Θ_G der Stundenwinkel im Beobachtungsort ist[1]. Dieser hat dann die Sternzeit

$$\Theta = \vartheta + \alpha \quad . \tag{9.148}$$

Der Beobachter B auf der Erdoberfläche hat im geozentrischen, Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{R}_T = R'\left(\mathbf{p}_1 \cos\Theta\cos\varphi' + \mathbf{p}_2 \sin\Theta\cos\varphi' + \mathbf{p}_3 \sin\varphi'\right) \quad . \tag{9.149}$$

Das beobachtete Objekt hat die geozentrische Darstellung

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{p}_1 \cos\alpha\cos\delta + \mathbf{p}_2 \sin\alpha\cos\delta + \mathbf{p}_3 \sin\delta\right) \tag{9.150}$$

und topozentrisch die Darstellung

$$\mathbf{r}' = \rho'\left(\mathbf{p}_1 \cos\alpha'\cos\delta' + \mathbf{p}_2 \sin\alpha'\cos\delta' + \mathbf{p}_3 \sin\delta'\right) \quad . \tag{9.151}$$

Um die topozentrischen um die tägliche Parallaxe korrigierten äquatorialen Winkelkoordinaten (α', δ') zu berechnen, wird mit den Beziehungen (9.144) und (9.145) erhalten

$$\cos\left(\mathbf{r}, \mathbf{R}_T\right) = \cos\left(\alpha - \Theta\right)\cos\delta\cos\varphi' + \sin\delta\sin\varphi' \quad , \tag{9.152}$$

somit

$$\begin{aligned}
\cos\alpha'\cos\delta' &= \frac{r}{\rho'}\cos\alpha\cos\delta - \frac{R_B}{\rho'}\cos\Theta\cos\varphi' \\
\sin\alpha'\cos\delta' &= \frac{r}{\rho'}\sin\alpha\cos\delta - \frac{R_B}{\rho'}\sin\Theta\cos\varphi' \\
\sin\delta' &= \frac{r}{\rho'}\sin\delta - \frac{R_B}{\rho'}\sin\varphi' \quad .
\end{aligned} \tag{9.153}$$

3. Näherungsformeln der täglichen Parallaxe in äquatorialen Koordinaten

Bei weit entfernten Objekten kann näherungsweise $r \mathrel{\hat{=}} \rho'$ gesetzt werden. Dann ist auch $\varphi' \approx \delta$ und die topozentrischen äquatorialen Koordinaten (α', δ') können an Stelle der Gleichungen (9.153) näherungsweise berechnet werden aus[2]

$$\alpha' = \alpha - P\frac{R}{R_E}\frac{\cos\varphi'\sin\vartheta}{\cos\delta} \quad , \quad \delta' = \delta - P\frac{R}{R_E}\left(\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\cos\vartheta\sin\delta\right) \quad . \tag{9.154}$$

In diesen Gleichungen bedeutet P die äquatorial-horizontale Parallaxe. Sie wird berechnet mit Hilfe der Sonnenparallaxe $P_\odot$

$$\sin P_\odot = \frac{R_E}{1AU} \quad , \quad P_\odot = 8''.794148 \tag{9.155}$$

aus

---

[1] siehe in Abschnitt 8.4

[2] Siehe in SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 124, die Formeln (3.242-1); vgl. auch WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966]: pp. 63-75

$$P = \frac{P_\odot}{r_S\left[AU\right]} \quad . \tag{9.156}$$

Bei neu-entdeckten Objekten ist die geozentrische Distanz unbekannt. Dann muss iterativ gearbeitet werden, etwa mit der Anfangsannahme $r_S \approx 1AU$. Außer beim Erdmond (dessen Ephemeride als bekannt angenommen werden kann) ist die tägliche Parallaxe von Objekten des Sonnensystems unter einer Bogenminute.

9.6.3 Jährliche Parallaxe

Als jährliche Parallaxe (gelegentlich auch als heliozentrische Parallaxe bezeichnet) wird die Reduktion der Beobachtungsdaten eines (stellaren) Objektes vom Baryzentrum des Sonnensystems auf den Erdmittelpunkt bezeichnet. Als heliozentrische Parallaxe (genauer: baryzentrische Parallaxe) wird die Größe

$$P_B = \frac{1AU}{r_B} \tag{9.157}$$

definiert. Ihre Einheit ist eine Bogensekunde.

1. Jährliche Parallaxe in ekliptikalen Koordinaten

In den astronomischen Jahrbüchern werden üblicherweise die geozentrischen ekliptikalen Sonnenkoordinaten (bzw. Koordinaten des Baryzentrums des Sonnensystems) angegeben statt des heliozentrischen (bzw. baryzentrischen) Ortes der Erde:

$$\mathbf{R}_\odot = -\mathbf{r}_{\overset{+}{\odot}} \quad . \tag{9.158}$$

Seien $\left(\lambda_\odot, \beta_\odot\right)$ die geozentrischen ekliptikalen Winkelkoordinaten der Sonne, $\left(\lambda_B, \beta_B\right)$ die baryzentrischen ekliptikalen Winkelkoordinaten des Himmelskörpers, $\left(\lambda_1, \beta_1\right)$ seine entsprechenden geozentrischen Winkelkoordinaten, besteht nach Bild 9-12 auf Seite 480 mit

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r} + \mathbf{R}_\odot \tag{9.159}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} r_S \cos\lambda_1 \cos\beta_1 &= r_B \cos\lambda_B \cos\beta_B + R_\odot \cos\lambda_\odot \cos\beta_\odot \\ r_S \sin\lambda_1 \cos\beta_1 &= r_B \sin\lambda_B \cos\beta_B + R_\odot \sin\lambda_\odot \cos\beta_\odot \\ r_S \qquad \sin\beta_1 &= r_B \sin\beta_B \qquad\quad + R_\odot \sin\beta_\odot \quad . \end{aligned} \tag{9.160}$$

Die ekliptikale Breite der Sonne kann wegen ihrer Kleinheit, $\beta_\odot \le 1''.2$, bei nicht allzu extremen Genauigkeitsanforderungen vernachlässigt werden ($\sin\beta_\odot \approx 0,\ \cos\beta_\odot \approx 1$) und mit

$$P_B = \frac{1AU}{r_B} \approx \frac{R_\odot}{r_B} \tag{9.161}$$

kann die Korrektur um die jährliche Parallaxe näherungsweise berechnet werden aus

$$\begin{aligned}
\frac{r_S}{r_B}\cos\lambda_1\cos\beta_1 &\approx \cos\lambda_B\cos\beta_B + P_B\cos\lambda_\odot \\
\frac{r_S}{r_B}\sin\lambda_1\cos\beta_1 &\approx \sin\lambda_B\cos\beta_B + P_B\sin\lambda_\odot \\
\frac{r_S}{r_B}\qquad \sin\beta_1 &\approx \sin\beta_B \quad .
\end{aligned} \tag{9.162}$$

Beziehung (9.159) liefert

$$r_S^2 = R_\odot^2 + r_B^2 + 2\,r_B\,R_\odot\cos\left(\mathbf{r},\mathbf{R}_\odot\right) \ . \tag{9.163}$$

Da

$$\cos\left(\mathbf{r},\mathbf{R}_\odot\right) \approx \cos\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right)\cos\beta_B \quad , \tag{9.164}$$

wird

$$\frac{r_S}{r_B} = \sqrt{1 + P_B^2 + 2\,P_B\cos\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right)\cos\beta_B} \ . \tag{9.165}$$

Wegen der dritten der Beziehungen (9.162) wird noch

$$\frac{r_S}{r_B}\cos\beta_1 = \sqrt{\left(\frac{r_S}{r_B}\right)^2 - \sin^2\beta_B} \quad . \tag{9.166}$$

Ist die jährliche Parallaxe aus Beobachtungen im Jahresverlauf bekannt, sind die Größen r_S, λ_1, β_1 somit eindeutig berechenbar.

2. Näherungsformeln der jährlichen Parallaxe in ekliptikalen Koordinaten

Die Näherungsformeln (9.162) führen auf die Differenzformel

$$\begin{aligned}
\frac{r_S}{r_B}\sin\left(\lambda_B - \lambda_1\right)\cos\beta_1 &= P_B\sin\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right) \\
\frac{r_S}{r_B}\cos\left(\lambda_B - \lambda_1\right)\cos\beta_1 &= \cos\beta_B + P_B\cos\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right) \\
\frac{r_S}{r_B}\qquad \sin\beta_1 &= \sin\beta_B \quad .
\end{aligned} \tag{9.167}$$

Mit (9.166) und Linearisierung nach P_B wird

$$\lambda_B - \lambda_1 \approx \sin\left(\lambda_B - \lambda_1\right) = P_B\,\frac{\sin\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right)}{\cos\beta_B} + O\left(P_B^2\right) \tag{9.168}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\beta_B - \beta_1 \approx \sin\left(\beta_B - \beta_1\right) &= \frac{r_S}{r_B}\sin\beta_1\cos\beta_1 - \cos\beta_B\sin\beta_1 = \\
&= \left[\frac{r_S}{r_B}\cos\beta_1\left(1 - \cos\left(\lambda_B - \lambda_1\right)\right) + P_B\cos\left(\lambda_B - \lambda_\odot\right)\right]\sin\beta_1 \quad .
\end{aligned}$$

Da P_B klein ist und somit auch $\lambda_B - \lambda_1$, kann $\cos(\lambda_B - \lambda_1) \approx 1$ gesetzt werden. Es bleibt

$$\beta_B - \beta_1 \approx P_B \cos(\lambda_B - \lambda_\odot) \sin\beta_1 \quad .$$

Wegen

$$\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta_B}{\frac{r_S}{r_B}} \approx \sin\beta_B \left[1 - \frac{1}{2}\left(P_B^2 + 2P_B \cos(\lambda_B - \lambda_\odot)\cos\beta_B + \cdots\right)\right]$$

wird

$$P_B \sin\beta_1 = P_B \sin\beta_B + O\left(P_B^2\right) \quad .$$

Werden hier die quadratischen Terme vernachlässigt, bleibt der Näherungsausdruck

$$\beta_B - \beta_1 = P_B \cos(\lambda_B - \lambda_\odot)\cos\beta_B + O\left(P_B^2\right) \quad . \tag{9.169}$$

3. *Die parallaktische Ellipse*

Die parallaktische Ellipse hat keine praktische Bedeutung, kann jedoch zum Vertiefen des Verständnisses der Wirkung der jährlichen Parallaxe beitragen. Mit den Abkürzungen $\Delta\lambda := \lambda_B - \lambda_1$, $\Delta\beta := \beta_B - \beta_1$ und nach Elimination von $\lambda_S - \lambda_\odot$ führen die Ausdrücke (9.168) und (9.169) auf die Ellipse

$$\frac{(\Delta\lambda)^2 \cos^2\beta_B}{P_B^2} + \frac{(\Delta\beta)^2}{P_B^2 \sin^2\beta_B} = 1 \quad . \tag{9.170}$$

Diese Ellipse beschreibt die Bewegung des geozentrischen Ortes eines Sterns an der Himmelskugel im Verlauf eines Jahres, wenn er nur der (jährlichen) Parallaxe unterliegen würde. Die große Halbachse dieser Ellipse ist stets der jährlichen Parallaxe P_B gleich und liegt auf einem Parallelkreis der Ekliptik. Sterne, deren heliozentrischer Ort in der Ekliptik liegt, bewegen sich auf einer Strecke in der Ekliptik. Sterne, deren heliozentrischer Ort im Pol der Ekliptik liegt, bewegen sich von der Erde aus gesehen scheinbar auf einem Kreis mit Radius P_B um den Pol. Hierbei bleibt die Elliptizität der Erdbahn um die Sonne unberücksichtigt.

4. *Die jährliche Parallaxe in äquatorialen Koordinaten*

Wird die Relation (9.159) in äquatorialen Koordinaten dargestellt, lauten die Beziehungen in äquatorialen Koordinaten

$$\begin{aligned} r_S \cos\alpha_1 \cos\delta_1 &= r_B \cos\alpha_B \cos\delta_B + R_\odot \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot \\ r_S \sin\alpha_1 \cos\delta_1 &= r_B \sin\alpha_B \cos\delta_B + R_\odot \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot \\ r_S \qquad \sin\delta_1 &= r_B \sin\delta_B + R_\odot \sin\delta_\odot \quad . \end{aligned} \tag{9.171}$$

Die geozentrischen Winkelkoordinaten der Sonne $\alpha_\odot, \delta_\odot$ werden gewöhnlich aus

$$X_\odot := R_\odot \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot \quad , \quad Y_\odot := R_\odot \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot \quad , \quad Z_\odot := R_\odot \sin\delta_\odot \tag{9.172}$$

berechnet, wobei die kartesischen geozentrischen äquatorialen Koordinaten $X_\odot, Y_\odot, Z_\odot$ der Sonne in astronomischen Einheiten gegeben sind. Mit den Näherungen

$$P_B \approx \frac{R_\odot}{r_B}\ ,\ \sin\beta_\odot \approx 0\ \ ,\ \ \cos\beta_\odot \approx 1 \tag{9.173}$$

wird bei Bezug auf die ekliptikale Darstellung der scheinbaren Sonnenbahn

$$\begin{aligned}
\frac{r_S}{r_B}\cos\alpha_1\cos\delta_1 &= \cos\alpha_B\cos\delta_B + P_B\cos\lambda_\odot \qquad + O\left(P_B^2\right)\\
\frac{r_S}{r_B}\sin\alpha_1\cos\delta_1 &= \sin\alpha_B\cos\delta_B + P_B\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon + O\left(P_B^2\right)\\
\frac{r_S}{r_B}\qquad \sin\delta_1 &= \sin\delta_B \qquad\quad + P_B\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon + O\left(P_B^2\right)\ .
\end{aligned} \tag{9.174}$$

Wegen der Kleinheit des jährlichen Parallaxe (gewöhnlich $P_B \ll 1''$) die momentane wahre Schiefe der Ekliptik durch die momentane mittlere Schiefe $\overline{\varepsilon}$ ersetzt werden. Mit dem Ausdruck (9.165) ist

$$\left(\frac{r_S}{r_B}\right)^2 = 1 + P_B^2 + 2P_B\left(\cos\alpha_B\cos\delta_B\cos\lambda_\odot + \sin\alpha_B\cos\delta_B\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon + \sin\delta_B\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon\right) \tag{9.175}$$

Mit den Relationen (9.174) ergibt sich

$$\frac{r_S}{r_B}\sin\left(\alpha_1-\alpha_B\right)\cos\delta_1 = P_B\left(\cos\varepsilon\,\sin\lambda_\odot\cos\alpha_B - \cos\lambda_\odot\sin\alpha_B\right)$$

mit Linearisierung von $1/(r_S/r_B)$ nach P_B schließlich

$$\alpha_B - \alpha_1 = P_B\left(\cos\lambda_\odot\sin\alpha_B - \sin\lambda_\odot\cos\alpha_B\cos\varepsilon\right)\frac{1}{\cos\delta_B} + O\left(P_B^2\right)\ . \tag{9.176}$$

Ferner folgt aus (9.174)

$$\frac{r_S}{r_B}\cos\left(\alpha_1-\alpha_B\right)\cos\delta_1 = \cos\delta_B + P_B\left(\cos\varepsilon\,\sin\lambda_\odot\sin\alpha_B + \cos\lambda_\odot\cos\alpha_B\right) + O\left(P_B^2\right)\ ,$$

somit

$$\begin{aligned}
\delta_B - \delta_1 \approx{}& \frac{r_S}{r_B}\sin\delta_1\cos\delta_1\left[1-\cos\left(\alpha_1-\alpha_B\right)\right] +\\
&+ P_B\left[\sin\lambda_\odot\left(\sin\alpha_B\cos\varepsilon\sin\delta_1 - \sin\varepsilon\cos\delta_1\right) + \cos\lambda_\odot\cos\alpha_B\sin\delta_1\right] + O\left(P_B^2\right)\ .
\end{aligned} \tag{9.177}$$

Da $\alpha_{B-\alpha_1} = O\left(P_B\right)$, kann $\cos\left(\alpha_1-\alpha_B\right) \approx 1$ gesetzt werden, und mit der Linearisierung

$$P_B\sin\delta_1 = P_B\sin\delta_B + O\left(P_B^2\right)\ ,\ \ P_B\cos\delta_1 = P_B\cos\delta_B + O\left(P_B^2\right)$$

wird schließlich

$$\delta_B - \delta_1 = P_B\left[\sin\lambda_\odot\left(\sin\alpha_B\cos\varepsilon\sin\delta_B - \sin\varepsilon\cos\delta_B\right) + \cos\lambda_\odot\cos\alpha_B\sin\delta_B\right] + O\left(P_B^2\right)\ . \tag{9.178}$$

5. *Näherungsformeln der jährlichen Parallaxe in äquatorialen Koordinaten*

Mit den kartesischen geozentrischen äquatorialen Koordinaten $X_\odot, Y_\odot, Z_\odot$ der Sonne (in astronomischen Einheiten) werden die baryzentrischen äquatorialen Winkelkoordinaten (α_B, δ_B) in die geozentrischen Winkelkoordinaten (α_1, δ_1) übertragen, wobei die Rektaszension in Zeiteinheiten gegeben ist, die Deklination in Radian. Dann lauten die Näherungsformeln der jährlichen Parallaxe:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_B + P_B \left(X_\odot \sin\alpha_B - Y_\odot \cos\alpha_B \right) / \left(15 \cos\delta_B \right) \\ \delta_1 &= \delta_B + P_B \left(X_\odot \cos\alpha_B \sin\delta_B + Y_\odot \sin\alpha_B \sin\delta_B - Z_\odot \cos\delta_B \right) \ . \end{aligned} \tag{9.179}$$

9.7 Dopplereffekt

9.7.1 Der relativistische Dopplereffekt

Eine (monochromatische elektromagnetische) Welle breitet sich mit einer ebenen Wellenfront in Richtung $\mathbf{c} = C\,\mathbf{c}_0,\ \left(C = |\mathbf{c}|,\ \mathbf{c}_0^2 = 1 \right)$, aus. Ein Ortsvektor **r** auf dieser Wellenfront erfüllt die Ebenengleichung (vgl. Bild 9-14 auf Seite 488)

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}_0 \ = \ 0 \quad ,$$

somit

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_0 \ = \ C \ \ (= const.) \quad .$$

Bild 9-14: Zur Darstellung einer Wellenfront

Bewegt sich die Front mit der Geschwindigkeit *c* längs der Strecke ρ („Schrägentfernung"), hat die Wellenfront die Ebenengleichung

$$\left[\mathbf{r} - (\rho + C)\,\mathbf{c}_0 \right] \cdot \mathbf{c}_0 \ = \ 0$$

bzw.

$$\left(\mathbf{r} - \rho\,\mathbf{c}_0 \right) \cdot \mathbf{c}_0 \ = \ C$$

oder wegen $\rho = c\,t$ auch

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0 - c\,t \;=\; C \quad . \tag{9.180}$$

Ein periodischer Vorgang (Welle) kann dann durch

$$\eta \;\coloneqq\; A_0 \sin\left[k\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0 - c\,t)\right] \tag{9.181}$$

dargestellt werden, wobei η die Auslenkung, A_0 die Amplitude und $k \coloneqq 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl bedeutet, so dass die Frequenz dieser Schwingung aus

$$\nu \;=\; \frac{c}{\lambda} \tag{9.182}$$

berechnet werden kann, und die Kreisfrequenz (= Periode) ist

$$\omega \;\coloneqq\; 2\pi\nu \;=\; \frac{2\pi c}{\lambda} \quad . \tag{9.183}$$

Als Wellenzahlvektor wird ein Vektor in Richtung der Ausbreitung $\mathbf{c}_0$ der Welle mit Betrag der Wellenzahl bezeichnet

$$\mathbf{k} \;\coloneqq\; k\,\mathbf{c}_0 \;=\; \frac{2\pi\nu}{c}\,\mathbf{c}_0 \;=\; \frac{\omega}{c}\,\mathbf{c}_0 \quad , \tag{9.184}$$

als Phase schließlich der Ausdruck

$$\Phi \;\coloneqq\; \mathbf{k}\,\mathbf{r} - \omega t \;=\; k\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0 - c\,t) \quad . \tag{9.185}$$

Die Welle kann daher in der Form

$$\eta \;=\; A_0 \sin\Phi \tag{9.186}$$

dargestellt werden.

Wird diese Welle in verschiedenen Systemen S und S' beobachtet, die relativ zueinander mit der Geschwindigkeit **v** bewegt werden, hat die Welle in beiden Systemen dieselbe Auslenkung η und Amplitude A_0, somit auch dieselbe Phase. Da die Phase *Lorentz*-invariant[1] ist, kann unter der **Annahme**, dass die beiden Systeme parallel zueinander bewegt werden, mit Hilfe der *Lorentz*-Transformation (8.634) die Transformation der Frequenz ν und der Ausbreitungsrichtung $\mathbf{c}_0$ zwischen den Systemen S und S' berechnet werden. Seien $\nu', \mathbf{c}_0', \Phi'$, die Zeit t' sowie der Ortsvektor $\mathbf{r}'$ die entsprechenden Werte, wie sie im System S' beobachtet werden, folgt aus der Lorentz-Invarianz der Phase

$$\Phi \;=\; \Phi' \tag{9.187}$$

zunächst mit Formel (9.185)

$$\nu\left[\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0}{c} - t\right] \;=\; \nu'\left[\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{c}_0'}{c} - t'\right] \tag{9.188}$$

und nach Einsetzen der *Lorentz*-Transformation mit der Abkürzung

[1] siehe etwa in M. SCHNEIDER [1981], pp. 414-435

$$\alpha \;:=\; \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad , \quad V \;:=\; \left|\mathbf{v}\right| \tag{9.189}$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned}\nu\left[\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0}{c}-t\right] \;&=\; \nu'\left\{\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}_0'}{c}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{c}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{V^2}-\frac{t}{\alpha}\right]-\frac{1}{\alpha}\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)\right\} \;= \\ &=\; \nu'\left\{\frac{\mathbf{r}}{c}\cdot\left[\mathbf{c}_0'+\mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{V^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\frac{\mathbf{v}}{c\,\alpha}\right]-\frac{t}{\alpha}\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{c}\right)\right\} \quad ,\end{aligned}$$

somit nach Komponentenvergleich der voneinander unabhängigen Orts- und Zeitglieder

$$\nu \;=\; \nu'\frac{1+\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{9.190}$$

und

$$\mathbf{c}_0 \;=\; \frac{1}{1+\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{c}}\left\{\mathbf{c}_0'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0'}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)+\frac{1}{c}\right]\right\} \quad . \tag{9.191}$$

Umgekehrt ergibt sich

$$\begin{aligned}\nu'\left[\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{c}_0'}{c}-t'\right] \;&=\; \nu\left\{\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{c}_0}{c}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{c}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}}{V^2}+\frac{t'}{\alpha}\right]-\frac{1}{\alpha}\left(t'+\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)\right\} \;= \\ &=\; \nu\left\{\frac{\mathbf{r}'}{c}\cdot\left[\mathbf{c}_0+\mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{V^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\frac{\mathbf{v}}{c\,\alpha}\right]-\frac{t'}{\alpha}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{c}\right)\right\} \quad ,\end{aligned}$$

somit

$$\nu' \;=\; \nu\frac{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{9.192}$$

und

$$\mathbf{c}_0' \;=\; \frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{c}}\left\{\mathbf{c}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)-\frac{1}{c}\right]\right\} \quad . \tag{9.193}$$

Ein Beobachter im System S beobachtet eine (Licht-) Welle, die von S' (zum Zeitpunkt t') abgesandt worden ist, unter der Wellenausbreitungsrichtung $\mathbf{c}_0$ auf sich zuzukommen und misst die Frequenz ν. Nach Formel (9.59) kann er daraus die Frequenz ν' berechnen, welche die Welle bezüglich des Systems S' hatte. Wird jetzt noch der Winkel θ eingeführt, der von System S aus gesehen zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ und der Wellenausbreitungs-

richtung $\mathbf{c}_0$ eingeschlossen ist (vgl. auch Bild 9-15), kann auch die radiale Geschwindigkeit, mit der sich das System S' gegenüber dem System S bewegt, berechnet werden

$$V_R = V\cos\vartheta = \mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0 \quad . \tag{9.194}$$

Bild 9-15: Beobachtung in S eines Objektes S', das sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v bewegt.

Damit kann folgende Unterscheidung gefunden werden

1. Ist $\vartheta < 90°$, wird $\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0 < 0$, das Objekt S' nähert sich relativ zum Beobachter S und es ist $\nu > \nu'$.

2. Wenn aber $\vartheta > 90°$, wird $\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0 > 0$, das Objekt S' entfernt sich relativ vom Beobachter S und es ist $\nu < \nu'$.

Wegen $\lambda\nu = \lambda'\nu' = c$ (vgl. Formel (9.49) auf S. 489) ist dann

$$\begin{aligned} &\text{Annähern} \Leftrightarrow \nu > \nu' \Leftrightarrow \lambda < \lambda' \Leftrightarrow \text{Blauverschiebung} \\ &\text{Entfernen} \Leftrightarrow \nu < \nu' \Leftrightarrow \lambda > \lambda' \Leftrightarrow \text{Rotverschiebung} \end{aligned} \tag{9.195}$$

Diese Erscheinung wird als *Dopplereffekt* bezeichnet. Geht man von einem Beobachter in S aus, kann die *Frequenzverschiebung*

$$\Delta\nu := \nu - \nu' \quad ,$$

die in S beobachtet wird, mit Formel (9.59) aus

$$\frac{\Delta\nu}{\nu'} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}_0}{c}} - 1 \tag{9.196}$$

berechnet werden.

Anmerkung: Die Bezeichnungen $\Phi, \eta, \mathbf{k}, k, A_0, \omega, C, \alpha, \vartheta$ werden in diesem Sinn nur im vorstehenden Abschnitt verwendet (sie spielen im späteren bahnmechanischen Zusammenhang dieses Berichtes keine Rolle).◀

9.7.2 Der Zweiweg-Doppler

Bild 9-16: Der Zweiweg Doppler

Ein Signal werde vom Ort („Topozentrum“, z.B. eine Bodenstation oder ein beobachtender Satellit) T_1 zum Zeitpunkt t_1 ausgesandt und erreiche nach der Lichtzeit τ_1 den Raumflugkörper S_1 zum Zeitpunkt $t_1+\tau_1$. T_1 habe den zentrischen Ortsvektor $\mathbf{R}_{A1}(t_1)$ und den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{R}}_{A1}(t_1)$, S_1 den zentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_1(t_1+\tau_1)$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1(t_1+\tau_1)$. Bis das von S_1 empfangene Signal wieder ausgesandt werden kann, hat sich der Raumflugkörper in der Zeitspanne Δt vom Ort S_1 nach S_2 bewegt. Dort lautet der Zustandsvektor $\mathbf{r}_2(t_1+\tau_1+\Delta t), \dot{\mathbf{r}}_2(t_1+\tau_1+\Delta t)$. Das von S_2 ausgesandte Signal erreicht nach der Lichtzeit τ_2 das Topozentrum am Ort T_2 mit Zustandsvektor $\mathbf{R}_{A2}(t_1+\tau_1+\Delta t+\tau_2), \dot{\mathbf{R}}_{A2}(t_1+\tau_1+\Delta t+\tau_2)$. Das Signal hat den Gesamtweg

$$\rho_1 + \rho_2 = \left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{A1}\right| + \left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{A2}\right| \tag{9.197}$$

zurückgelegt. Die entsprechenden Entfernungsvariationen, die zur Berechnung des Dopplers benötigt werden, sind daher (mit $r_i := \left|\mathbf{r}_i\right|$, $R_{Ai} := \left|\mathbf{R}_{Ai}\right|$, $i = 1,2$)

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\rho_i}\left(r_i \dot{r}_i + R_{Ai}\,\dot{R}_{Ai} - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{R}_{Ai} - \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_{Ai}\right) \quad , \ (i = 1,2) \ . \tag{9.198}$$

Der Zwei-Weg-Doppler wird mit dem Wert $\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2$ berechnet. Es ist offensichtlich aus der hier vorgestellten Herleitung, dass im Allgemeinen mit $\dot{\rho}_1 \neq \dot{\rho}_2$ gerechnet werden muss.

Bei geringeren Genauigkeitsanforderungen, etwa bei Satellitenbeobachtungen von einer Bodenstation auf der Erdoberfläche mit sehr kleinen Lichtwegen, ist es eventuell erlaubt, von der quantitativen Aussage „Zwei-Weg-Doppler ist zweimal Ein-Weg-Doppler“ auszugehen.

Die Untersuchungen werden in der Praxis nicht nur durch Berücksichtigung relativistischer Effekte, wie in den vorhergehenden Abschnitten hergeleitet, erschwert. Wenn der Zustand des Raumflugkörpers durch unbekannte physikalische Einflüsse „gestört“ wird, können die Beobachtungsbedingungen erheblich verkompliziert werden[1].

9.8 Aberration

Unter Aberration werden alle Einflüsse auf die scheinbare Beobachtungsrichtung zu einem beobachteten Objekt (stellares oder planetares Objekt) verstanden, die eine Folge der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit sind. Man unterscheidet:

1. Einflüsse auf die Beobachtungsrichtung infolge der endlichen Laufzeit des Lichtes vom beobachteten Objekt zum Beobachter, die *Lichtzeit*. Dieser Einfluss ist somit von der Entfernung abhängig.
   - Bei erdnahen Erdsatelliten (H> 200 km) beträgt sie mindestens 0.001 Sekunden ,
   - bei Navigationssatelliten (H=26000 km) mindestens etwa 0.09 Sekunden,
   - bei geostationären Satelliten mindestens 0.12 Sekunden,
   - beim Mond bereits 1.3 Sekunden
   - bei Sonnenbeobachtungen 8.3 Minuten
   - für die Venusentfernung mindestens 6 Minuten
   - für die Jupiterentfernung mindestens 35 Minuten.
   - Bei stellaren und galaktischen Objekten wird die Entfernung bereits in Lichtzeit angegeben: Jahre bis Jahrmilliarden.
   - Um die Beträge der Lichtzeit hat sich ein Beobachter weiterbewegt, durch die Rotation um die Erdachse sowie die Revolution um die Sonne, gegenüber dem Zeitpunkt, da von dem beobachteten Objekt der Lichtstrahl ausgesandt wurde. Dies muss auch die Annahme einschließen, dass das Licht nicht „unterwegs“ durch Ablenkung, also Umwege, bzw. beim Durchqueren bestimmter nicht evakuierter Gebiete verzögert wurde. Die Lichtgeschwindigkeit als physikalische Fundamentalkonstante bezieht sich ja ausschließlich auf die Ausbreitung im Vakuum.

[1] Vgl. hierzu auch die Untersuchungen in Acta Astronautica **66** [2010], pp. 309-330; auch in Band IV, Kapitel 27

2. Einflüsse infolge der endlichen Relation zwischen Lichtgeschwindigkeit und Eigenbewegung des Beobachters. Diese Einflüsse sind von der Entfernung unabhängig, jedoch wesentlich von der Eigengeschwindigkeit des Beobachtungsortes abhängig. Da sich diese in Einzelbewegungen zerlegen lässt, kann auch dieser Aspekt der Aberration in einzelne Anteile zerlegt werden:

   - Die Bewegung eines Beobachters auf der Erdoberfläche um die Erdachse infolge der täglichen Rotation, die *tägliche Aberration*.
   - Die Eigenbewegung eines Erdsatelliten, infolgedessen die relative Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Satellit und Beobachter auf der Erde, aber auch bei der Beobachtung von Himmelskörpern vom Satelliten aus, die Relation der Eigengeschwindigkeit des Satelliten im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit.
   - Die Bewegung des Erdmittelpunktes auf seiner jährlichen Revolution um die Sonne: die *jährliche Aberration*.
   - Die Bewegung des Sonnensystems in der Galaxis: die *stellare Aberration*. Bisweilen wird unter dem Begriff, stellare Aberration lediglich der gesamte Anteil der Aberration zusammengefasst, der von der Entfernung des beobachteten Objektes unabhängig ist[1].
   - Für die Beobachtung von Objekten im Sonnensystem, deren Entfernung bekannt ist, werden die beiden Effekte, Lichtzeit und Eigenbewegung der Erde unter dem Begriff *planetare Aberration* zusammengefasst.
   - Für hochgenaue Korrekturen muss auch die Eigenbewegung der Sonne bezüglich des Baryzentrums des Sonnensystems berücksichtigt werden.
   - Wird die Elliptizität der Erdbahn um die Sonne zur genauen Berechnung der jährlichen Aberration berücksichtigt, wird der dadurch nötige Zusatzeffekt als *elliptische Aberration* bezeichnet.

   Weitere übergeordnete Bewegungen werden zur Berechnung einer Aberration (bis jetzt) nicht berücksichtigt. Für eine exakte Berechnung der Aberration müssen wie stets, wenn die Lichtgeschwindigkeit einbezogen werden muss, die relativistischen Effekte miteinbezogen werden[2]. Im Zusammenhang mit der Beobachtung von Satelliten oder auch im interplanetaren Raum können diese normalerweise vernachlässigt werden. Beispiel. Der durch das Gravitationsfeld der Sonne verursachte Verzögerungsfehler verursacht einen Zeitfehler, der einen Ortsfehler von etwa $0''.000001$ verursacht.

9.8.1 Die tägliche Aberration

Infolge der Erdrotation hat ein Punkt auf dem Erdäquator die Geschwindigkeit (bei einer Dauer der Rotation von einem Sterntag (siehe in Abschnitt 9.1.2)

$$V_0 = \frac{2 R_E \pi}{1 ST} = 0.46510 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1674.36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad . \tag{9.199}$$

Ein Ort B auf der Erdoberfläche unter der geozentrischen Breite φ' und mit der geozentrischen Distanz $R_{\varphi'}$ hat dann (siehe Bild 9-18) die Geschwindigkeit

[1] Siehe etwa in SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 127

[2] Siehe etwa in GREEN, R. M. [1985], pp.75-79

$$V_{\varphi'} = V_0 \frac{R_{\varphi'}}{R_E} \cos\varphi' \quad . \tag{9.200}$$

Der geozentrische Radius kann mit der Abplattung f aus Formel (37.30)[1] berechnet werden:

$$R_{\varphi'} = R_E \frac{(1-f)R_E}{\sqrt{1-f(2-f)\cos^2\varphi'}} \quad . \tag{9.201}$$

Bild 9-17: Wirkung des entfernungsunabhängigen Anteils der täglichen Aberration: „Schieleffekt“ bei der Beobachtung eines Objektes von einem Beobachter B auf dem Breitenkreis φ', der sich mit der Geschwindigkeit $V_{\varphi'}$ um die (mittlere) Erdachse dreht. Der Lichtstrahl (tL – wahrer Lichtstrahl) bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit c auf den Beobachter zu. Diesem erscheint auf Grund seiner eigenen relativen Geschwindigkeit der Lichtstrahl aus Richtung aL (scheinbarer Lichtstrahl) kommend

BEISPIEL: Die zentrale deutsche Bodenstation (ZdBS) in Weilheim-Lichtenau hat die geozentrische Breite $\varphi' = 47°41'23''.81$ und die geozentrische Distanz $R_{\varphi'} = 6366.438\,\text{km}$. Dieser Ort dreht sich um die Erdachse mit der Geschwindigkeit $V_{\varphi'} = 0.3125\,\text{km/s} = 1125\,\text{km/h}$. ◀

Das endliche Verhältnis von Lichtgeschwindigkeit c zur Eigengeschwindigkeit des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche (und entsprechend auch zu einem beobachtenden Satelliten auf seiner Bahn um die Erde) bewirkt eine kleine Verschiebung des scheinbaren Ortes des beobachteten Objektes (Stern, Planet, Raumsonde, Erdsatellit) in Richtung der Eigenbewe-

[1] Band V

gung des Beobachtungsortes (siehe Bild 9-17). Diese Verschiebung ist am größten, wenn sich der beobachtete Ort im Ortsmeridian befindet. Das Verhältnis aus Beobachtergeschwindigkeit zu Lichtgeschwindigkeit wird als die *Konstante der täglichen Aberration* bezeichnet. Sie lautet (mit c=299792.5 km/s)

$$K = \frac{V_0}{c}\frac{R_{\varphi'}\cos\varphi'}{R_E} \triangleq 0''.320\frac{R_{\varphi'}\cos\varphi'}{R_E} = 0^s.213\frac{R_{\varphi'}\cos\varphi'}{R_E} \quad . \tag{9.202}$$

Bild 9-18: Radius des Breitenkreises mit der geozentrischen Breite φ'

Diese Konstante ist somit eine *charakteristische Ortskonstante*. Dieser Einfluss der Aberration ist völlig unabhängig von der Entfernung des beobachteten Objektes, beeinflusst also jede Beobachtung. Es seien α, δ die wahre (d.h. ohne die Aberration zu beobachtenden) Rektaszension und Deklination, sei $\vartheta = \Theta - \alpha = \Theta_G + \lambda - \alpha$ der lokale Stundenwinkel für einen Ort der (östlichen) geographischen Länge λ. Die tägliche Aberration verursacht dann die Verschiebungen auf den scheinbaren Ort (α_1, δ_1)

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &:= \alpha_1 - \alpha = K\cos\vartheta\frac{1}{\cos\delta} \\ \Delta\delta &:= \delta_1 - \delta = K\sin\vartheta\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{9.203}$$

Der Effekt ist am größten, wenn sich das Objekt im Ortsmeridian $(\vartheta = 0°)$ befindet, sowie für Beobachter auf dem Erdäquator $(R_{\varphi'} = R_E, \varphi' = 0°)$ und wächst für Objekte, die nahe einem Pol der Erdachse sind $(\delta \to 90°)$. Die Korrekturen müssen von beobachteten Örtern abgezogen werden bzw. zu vorausberechneten Örtern addiert werden. Am Pol (δ=90°) ist die Korrektur unbestimmt, dort ist die Rektaszension eines Himmelskörpers unbestimmt.

BEISPIEL: Ein Erdsatellit habe beim Meridiandurchgang die Deklination δ=85°. Die Rektaszension ist gesehen von der Bodenstation in Weilheim $\left(K = 0''.215\right)$ um $\Delta\alpha = 2''.47$ zu groß gemessen worden (im Meridian ist $\Delta\delta = 0°$). Für die Deklination δ=89°.9 ist $\Delta\alpha = 12''3.19$. ◀

Die aus der sphärischen Astronomie bekannten jährliche und säkulare Aberration sind wegen der geozentrischen Bewegung von Erdsatelliten nicht relevant. Wird jedoch von einem Erdsatelliten aus ein planetares oder stellares Objekt beobachtet, muss die Konstante K der täglichen Aberration durch die Relation der momentanen Eigengeschwindigkeit V des Satelliten zur Lichtgeschwindigkeit ersetzt werden. Dann lauten die Korrekturterme

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &:= \alpha_1 - \alpha = \frac{V}{c}\cos\vartheta\frac{1}{\cos\delta} \\ \Delta\delta &:= \delta_1 - \delta = \frac{V}{c}\sin\vartheta\,\sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{9.204}$$

9.8.2 Die Lichtzeit bei Erdsatelliten

Wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit dauert es einige Zeit, bis ein Lichtstrahl von einem Himmelskörper (bei dessen bekannter Eigenbewegung) zum Beobachter gelangt. Während dieser Zeit bewegt sich der Himmelskörper etwas auf seiner Bahn weiter, aber auch der Beobachter auf der Erde hat sich ein Stück weiterbewegt. Dies wirkt sich insbesondere auf die Beobachtung von Erdsatelliten aus (siehe Bild 9-19).

Ein von einem Erdsatelliten zum Zeitpunkt t_1 ausgesandter Sichtstrahl erreicht den Beobachter zum Zeitpunkt t_2. Falls die Satellitenbahn als bekannt angenommen werden kann, bzw. wenn sie durch geeignete Methoden (Radar) vermessen wird, ist die topozentrische Distanz ρ vom Beobachtungsort zum Zeitpunkt t_2 zum Satellitenort zum Zeitpunkt t_1 bekannt. Die Zeitdifferenz t_2-t_1 ist die Lichtzeit $t_2 - t_1 = \tau = \rho / c$. Mit ihr kann der Zeitpunkt t_1 aus dem bekannten Beobachtungszeitpunkt zumindest näherungsweise berechnet werden:

$$t_1 = t_2 - \tau = t_2 - \frac{\rho}{c} \quad . \tag{9.205}$$

Damit ist es möglich der Position des Satelliten zum Zeitpunkt t_1 die wahre Position des Beobachters zu diesem Zeitpunkt zuzuordnen. Auf dieser Basis ist es dann auch möglich, den scheinbaren Beobachtungswinkel h_2 auf den wahren Beobachtungswinkel h_1 zurückzuführen. Die Differenz dieser beiden Winkel ist gerade der parallaktische p_1 am Satelliten:

$$p_1 = \left|h_2 - h_1\right| \quad . \tag{9.206}$$

Andererseits muss auch bei der Prädiktion eines Satellitenortes die Entfernung des Satelliten berücksichtigt werden, so dass ein Signal von der Bodenstation zum Zeitpunkt t_1 in die Richtung ausgesandt werden muss, in der sich der Satellit zum Zeitpunkt t_2 befinden wird. Wenn die Schrägentfernung ρ (zumindest näherungsweise) bekannt ist, kann t_2 gemäß (9.205) aus

$$t_2 = t_1 + \frac{\rho}{c} \tag{9.207}$$

berechnet werden, bzw. der Beobachtungswinkel um den parallaktischen Winkel in Richtung der Satellitenbewegung korrigiert werden. Da die Bewegungen des Satelliten und des Beobachtungsortes durch Berechnung des Zustandsvektors für jeden Zeitpunkt bekannt sind,

müssen die Abweichungen hier nicht in Näherungsformeln für Rektaszension $\Delta\alpha$ und Deklination $\Delta\lambda$ formelmäßig erfasst werden. Ausgehend von einer Näherungslösung kann eine Verbesserung iterativ mit Hilfe eines Bahn-Prädiktionsprogramms gefunden werden.

Bild 9-19: Die Berücksichtigung der Lichtzeit bei der Beobachtung von Erdsatelliten (entfernungsabhängiger Anteil der Aberration), S – Bahn des Satelliten, B – Bahn des Beobachters auf der Erdoberfläche, p_1 - parallaktischer Winkel, h_1 , h_2 – Elevation des Satellitenortes gesehen vom Beobachter zu den Zeitpunkten t_1 und t_2, mit den geozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ und den jeweiligen Schrägentfernungen ρ_1, ρ_2 . $\mathbf{r}_1$ - Geozentrischer Ortsvektor des Satelliten zum Zeitpunkt t_1. Die Strecke $B(t_2)$ zu $S(t_1)$ wird als geometrische Sichtlinie bezeichnet, während die Strecke $B(t_2)$ zu $S(t_2)$ beobachtet wird.

Anmerkungen:

1. Für interplanetare Objekte werden bei deren bekannter Bahnbewegung die Lichtzeit und die Reduktion der Beobachtung mit Berechnung des geometrischen Ortes analog berechnet.

2. In den hier angegebenen Formeln wird die gravitative Lichtablenkung durch die Sonne nicht berücksichtigt (maximaler Fehler in der Größenordnung 0“.01)[1]. ◀

BEISPIEL für die Größenordnung des Einflusses der Lichtzeit bei interplanetaren Objekten: Entsprechend Bild 9-19 führt die Berücksichtigung der Lichtzeit zu einer Verschiebung von der geometrischen Beobachtungsrichtung $\overline{B(t_2)S(t_2)}$ zur scheinbaren Beobachtungsrichtung $\overline{B(t_2)S(t_1)}$, somit zu einer Drehung um den Winkel $\sphericalangle(S(t_2),B(t_2),S(t_1))$. Dieser Winkel ist je nach interplanetarem Objekt sehr klein und häufig vernachlässigbar. ◀

NUMERISCHES BEISPIEL: Die beiden Stereo Sonden zur Beobachtung der Sonne befinden sich auf heliozentrischen Bahnen in Erdbahnentfernung zur Sonne im Abstand von etwa ±120° in Bezug auf die Sonne, so dass die Sie Sonne ununterbrochen von allen Seiten beobachtet werden kann. Der Abstand der Sonden von der Erde beträgt etwa 1.7323 AU entsprechend einer Lichtzeit von 14.4 Minuten. Bezogen auf die Antennenposition auf der Erdoberfläche (hier gerechnet für den Standort Neustrelitz) ergibt sich eine Winkelabweichung von etwa 0°.074 entsprechend 4.41 Bogenminuten. Für einen bestimmten Zeitpunkt wurde eine Abweichung im Azimut von $\Delta A = 0'.464$, in der Höhe („Elevation“) von $\Delta h = 0'.441$ errechnet. ◀

9.8.3 Die jährliche Aberration

Seien $\dot{X}_\odot, \dot{Y}_\odot, \dot{Z}_\odot$ die Geschwindigkeitskoordinaten der Erde auf ihrer Bewegung um die Sonne in äquatorialen Koordinaten, so werden die nach Berücksichtigung aller Systemkorrekturen erhaltenen geometrischen äquatorialen Winkelkoordinaten (α,δ) infolge der jährlichen Aberration als Folge der Bewegung der Erde um die Sonne um folgende Beträge beeinflusst[2]:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha_1 - \alpha = \frac{\dot{Y}_\odot \cos\alpha - \dot{X}_\odot \sin\alpha}{c\cos\delta} \\ d\delta &= \delta_1 - \delta = \frac{\dot{Z}_\odot \cos\delta - \dot{X}_\odot \cos\alpha \sin\delta - \dot{Y}_\odot \sin\alpha \sin\delta}{c} \quad . \end{aligned} \tag{9.208}$$

9.8.4 Die Aberrationskonstante der jährlichen Aberration

Als Aberrationskonstante K wird der Winkel zwischen dem geometrischen und dem scheinbaren Ort der mittleren fiktiven Sonne bezeichnet. Der scheinbare Ort ist die Position, welche die (fiktive) Sonne um die Lichtzeit früher angenommen hat. Für eine einheitliche (für Näherungsrechnungen üblicherweise ausreichend genaue) allgemeine Aussage wird die transversale Geschwindigkeit V_T der Erde um die (fiktive) Sonne gewählt. Mit Formel (8.466) wird ein konstanter Anteil V_C abgespalten

$$V_T = V_{TC} + eV_{TC}\cos\upsilon \quad . \tag{9.209}$$

[1] SEIDELMANN, P. K. ed.[1992], p. 135 pp

[2] Herleitung siehe etwa in GREEN, R. M. [1985], pp.189-190

Bild 9-20: Zur Definition der Aberrationskonstante K: x - Bogen der Sonne zwischen scheinbarem Ort (aP) und geometrischem Ort (gP) im Zeitpunkt der Beobachtung, bezogen auf die mittlere Sonnendistanz 1 astronomische Einheit

Nach Mittelung über einen Umlauf (der wahren Anomalie) bleibt mit Formel (8.466) im Fall elliptischer *Kepler*bewegung

$$V_{TC\odot} = \frac{G_\odot}{p_\odot} = \frac{\sqrt{\mu_\odot p_\odot}}{p_\odot} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a_\odot\left(1-e_\odot^2\right)}} = \sqrt{\frac{\mu}{a_\odot^3}}\,\frac{a_\odot}{\sqrt{1-e_\odot^2}} = \frac{n_\odot\, a_\odot}{\sqrt{1-e_\odot^2}} \quad . \tag{9.210}$$

Hier bedeuten $a_\odot$ die mittlere große Bahnhalbachse der Bahn der fiktiven mittleren Sonne um die Erde (mittlere Erdbahnhalbachse, astronomische Einheit), $e_\odot$ die mittlere Exzentrizität der Erdbahn um die Sonne, $\mu_\odot$ die heliozentrische Gravitationskonstante, $n_\odot$ die mittlere (siderische) Bewegung der Erde um die Sonne. Sei x die Strecke, welche die (fiktive mittlere) Sonne in der Lichtzeit τ zurücklegt, entspricht diese in Bezug auf die transversale Geschwindigkeit $x = \tau V_{TC}$. Andererseits wird die (mittlere) Entfernung der Erde von der Sonne mit der Lichtzeit τ durchlaufen, so dass $a_\odot = \tau\, c$. Der entsprechende Winkel (im Bogenmaß) beträgt daher

$$K = \frac{x}{a_\odot} = \frac{x\,\tau}{\tau\, a_\odot} = \frac{V_{TC\odot}}{c} \quad . \tag{9.211}$$

Mit den Formeln (9.210) und im Gradmaß wird

$$K^{(0)} = K\,\frac{360°}{2\pi} = K\,\frac{\left(360\times 60\times 60\right)''}{2\pi} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mu_\odot}{a_\odot\left(1-e_\odot^2\right)}} = \frac{n_\odot\, a_\odot}{c\,\sqrt{1-e_\odot^2}} \quad . \tag{9.212}$$

Werden hier die entsprechenden Zahlenwerte aus Abschnitt 28.1.2 (in Band IIIb) sowie in Anhang E1 (in Band V) eingesetzt, folgt der Zahlenwert

$$K = 20''.49552 \quad . \tag{9.213}$$

Wegen der geringfügigen säkularen Variation der Exzentrizität der Erdbahn ist dieser Zahlenwert für die Aberration nicht konstant. Da dieser Wert jedoch nur in Näherungsformeln verwendet wird, wird diese Variation vernachlässigt.

Die Aberrationskonstante wird verwendet, um die geometrischen ekliptikalen Winkelkoordinaten $\left(\lambda, \beta\right)$ auf Grund der jährlichen Aberration zu korrigieren. Dazu wird die Breite der

Sonne vernachlässigt. Die korrigierten Winkelkoordinaten unter Berücksichtigung der ekliptikalen Länge der Sonne lauten:

$$\begin{aligned} d\lambda &= \lambda_1 - \lambda = -K \frac{\cos(\lambda - \lambda_\odot)}{\cos\beta} \\ d\beta &= \beta_1 - \beta = K \sin\beta \sin(\lambda - \lambda_\odot) \quad . \end{aligned} \tag{9.214}$$

9.8.5 Der E-Term der jährlichen Aberration

Bei Berechnung der Aberrationskonstante wurde nur der im ungestörten Fall konstante Anteil $\mathbf{V}_{TC}$ der transversalen Geschwindigkeit verwendet. Auf Grund der variablen Entfernung der Erde zur Sonne als Folge der Exzentrizität der Erdbahn variiert der Einfluss der Aberration während der Revolution um einen Betrag, der Folge des Geschwindigkeitsanteils $\mathbf{V}_{TE}$ (siehe Formel (8.473)). Dieser Anteil wird als der E-Term der Aberration bezeichnet[1]. Sei $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ die Länge des Perihels der Erdbahn, beträgt die Korrektur infolge des E-Terms in ekliptikalen Winkel-Koordinaten

$$d\lambda = K\, e_\odot \frac{\cos(\tilde{\omega} - \lambda)}{\cos\beta} \quad , \quad d\beta = K\, e_\odot \sin\beta \sin(\tilde{\omega} - \lambda) \quad . \tag{9.215}$$

9.9 Refraktion

Eine elektromagnetische Welle wird beim Übergang zwischen Medien unterschiedlicher Dichte zu dem Medium mit der größeren Dichte hin abgelenkt. Ein Himmelskörper wird daher von einem Beobachtungsort auf der Erdoberfläche aus bzw. von einem Satelliten oder einer Höhenforschungsrakete beim Blick durch die Atmosphäre hindurch wegen der Brechung in der Atmosphäre „höher“ gesehen als wenn keine Atmosphäre da wäre (siehe Bild 9-21).

9.9.1 Näherungsweise Berechnung der Refraktion

Als *scheinbare Elevation* h_a im Beobachtungsort *P* wird die beobachtete Elevation des Objektes (Himmelskörper, Satellit) bezeichnet, die um die Instrumentenfehler (z. B. Index Fehler eines Sextanten) und um die Kimmtiefe korrigiert wurde. Als *Kimmtiefe* wird der scheinbare Winkel zwischen dem geometrischen Horizont (d. h. senkrecht zur Ortsvertikalen) und dem sichtbaren Horizont bezeichnet. Hat der Beobachtungsort (Antenne) über der Erdoberfläche die Höhe *H*, beträgt die Kimmtiefe[2]

$$D(H) \;=\; 1'.75\sqrt{H} \quad , \tag{9.216}$$

wenn die Höhe *H* in Metern gegeben ist. Wird die scheinbare Elevation um die Refraktion *Ref* reduziert, wird die *wahre Elevation h* erhalten

$$Ref \;:=\; h_a - h \quad . \tag{9.217}$$

---

[1] siehe etwa in GREEN, R. M. [1985], pp.192

[2] nach WOOLARD, E. W. and CLEMENCE. C. M. [1966], p. 215

Bild 9-21: Zur Beschreibung der Refraktion: P – Beobachtungsort, S- wahrer Ort des Satelliten, P^* - Referenzort zur scheinbaren Beobachtung des Satelliten, Z – Zenit, R – Radius der Erdoberfläche, H – Höhe des Satelliten über Erdoberfläche, Hor – Horizontebene, Atm – Grenze der (wirksamen) Atmosphäre, z – scheinbare Zenitdistanz, h_g – berechnete Höhe („Elevation") des Satelliten, h_a – scheinbare Höhe („Elevation") des Satelliten, Ref – Refraktionswinkel (bezogen auf Beobachtungsort), γ - geozentrischer Zentralwinkel des Satelliten von der Zenitrichtung

Sei die wahre *Zenitdistanz* durch

$$z := 90° - h \tag{9.218}$$

eingeführt, kann die *scheinbare Zenitdistanz* $z_a = 90° - h_a$ auf die wahre Zenitdistanz zurückgeführt werden:

$$z = z_a + Ref \quad . \tag{9.219}$$

Die Refraktion wird üblicherweise so berechnet, als ob der Satellit *S* von einem Punkt *P** über dem eigentlichen Beobachtungsort *P* beobachtet würde, wobei also

$$Ref := Ref^* + ref \tag{9.220}$$

und für die *geometrische Zenitdistanz* z_g in *P*

$$z_g = z_a + Ref^* \quad . \tag{9.221}$$

Die geometrische Elevation beträgt dann in P

$$h_g = 90° - z_g \quad . \tag{9.222}$$

Der Winkel *ref* ist der Winkel am Satelliten zwischen wahrem und scheinbarem Sichtstrahl. Er ist die *Parallaxe* am Satelliten infolge einer Refraktion. Bei Satellitenbeobachtungen kann er erfahrungsgemäß Werte bis zu einer Bogenminute annehmen (siehe dazu das Beispiel am Ende dieses Abschnittes). Bei der Beobachtung von stellaren Objekten kann er vernachlässigt werden. Die Höhe H^* von P^* über P kann aus der Formel[1]

$$1 + \frac{H^*}{R} = N_R \frac{\sin(z_g)}{\sin(z_g - Ref)} \tag{9.223}$$

berechnet werden. Hier bedeutet z_g die geometrische Zenitdistanz, N_R den Refraktionsindex der Atmosphäre in P, R die geozentrische Distanz des Ortes P. Für $z = 90°$ ist[1] $H^* = 1.54$ km und es wird (als brauchbarer Näherungswert) $N_R = 1.000184$.

In der Literatur können viele sehr unterschiedliche Formulierungen zur Berechnung der Refraktion mit unterschiedlichen Genauigkeitsanforderungen gefunden werden[2]. Für scheinbare Elevationen über 5° gibt es die Näherungsformel[3]

$$Ref = (N_s - 1)\tan(90° - h_a)\frac{180°}{\pi} \times 10^{-6} \quad . \tag{9.224}$$

Der Brechungsindex N_s ist u. a. vom lokalen Druck p von (in mb), der lokalen Temperatur T (in Kelvin), vom Wasserdampfdruck e_p (in mb), somit auch von der Höhe über der Erdoberfläche abhängig. Er kann berechnet werden aus[4]:

$$N_s = 77.6\frac{p}{T} + 3.73 \times 10^{-5}\frac{e_s}{T^2} \quad . \tag{9.225}$$

Eine leicht modifizierte Formel zur Berechnung der Refraktion, die Werte mit einer Genauigkeit von 0′.5 garantiert, lautet bei Vorgabe der scheinbaren Elevation[5] im optischen Bereich

$$Ref = \left(\frac{0.28\,p}{T}\right)\frac{Ref_0}{\tan(h_a + 7.31/(h_a + 4.4))} \quad . \tag{9.226}$$

Diese Formel kann für niedrige Elevationen ($h_a < 15°$) verfeinert werden:

$$Ref = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{0°.1594 + 0.0196\,h_a + 0.00002\,h_a^2}{1 + 0.505\,h_a + 0.0845\,h_a^2} \quad . \tag{9.227}$$

---

[1] aus: EXPLANATORY SUPPLEMENT [1962], pp. 54–56

[2] Für eine genaue Formulierung siehe etwa in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], pp. 140–144, auch: WOOLARD, E. W. and CLEMENCE. C. M. [1966], pp. 79–96 mit weiteren Literaturangaben, für spezielle Untersuchungen zur Satellitenbeobachtung: EDENHOFER, P. et al. [1973]; insbesondere siehe: CAPELLARI ET AL. (GTDS) [1974], ch. 7.6, pp. 7-43, 7-75

[3] aus H. VOIGT [1968], p. 13

[4] aus: DFS-TN-PL-4100-002, Ausgabe 0 vom 25.2.1988, Fernmeldetechnisches Zentralamt, Darmstadt; übernommen aus: CCIR - Report 563-3, Radiometeorological Data

[5] aus: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 144

Druck: p = 1000 mb					
Temperatur	h = 1°	h = 5°	h = 45°	h = 80°	h = 90°
–60° C	1°.23	14′.73	1′.29	13″.64	0′.00
–30° C	1°.06	12′.73	1′.11	11″.78	0′.00
0° C	57′.51	11′.47	1′.00	10″.62	0′.00
30° C	51′.80	10′.33	54″.25	9″.57	0′.00
Druck: p = 500 mb					
Temperatur	h = 1°	h = 5°	h = 45°	h = 80°	h = 90°
–60° C	31′.31	6′.25	32″.80	5″.78	0′.00
–30° C	27′.38	5′.46	28″.67	5″.06	0′.00
0° C	24′.42	4′.87	25″.78	4″.51	0′.00
30° C	22′.06	4′.40	23″.10	4″.07	0′.00
Druck: p = 50 mb					
Temperatur	h = 1°	h = 5°	h = 45°	h = 80°	h = 90°
–60° C	3′.15	37″.72	3″.30	0″.58	0′.00
–30° C	2′.76	33″.00	2″.89	0″.51	0′.00
0° C	2′.36	28″.29	2″.48	0″.44	0′.00
30° C	2′.16	25″.93	2″.27	0″.40	0′.00

Tabelle 9-6: Astronomische Refraktion in Abhängigkeit von Druck und Temperatur für verschiedene Elevationen

Der Faktor Ref_0 hängt auch von der Frequenz ab. Bei Satellitenbeobachtungen sind die (aus Erfahrungen gewonnenen) Werte üblich: Tabelle 9-6[1] enthält einige Werte für die Refraktion Ref in Abhängigkeit von Druck p und Temperatur T für verschiedene Elevationen.

Falls Luftdruck und Temperatur nicht bekannt sind, kann näherungsweise der vereinfachte Ausdruck[2] (h_a im Gradmaß)

$$Ref = \frac{Ref_0}{\tan(h_a + 7.31/(h_a + 4.4))} \tag{9.228}$$

verwendet werden. Bei Vorgabe der wahren Elevation h, wenn also die zu beobachtende Elevation im Rahmen einer Ephemeridenrechnung zu berechnen ist, gilt (h im Gradmaß)

$$Ref = \frac{Ref_0}{\tan(h + 8.6/(h + 4.4))} \quad . \tag{9.229}$$

Die Werte in Tabelle 9-6 gelten im Wesentlichen für die Strahlbrechung in der Troposphäre. Außerhalb erfolgt zunächst keine Krümmung bis etwa in die Höhe 300 km, dann in der Iono-

[1] aus: DFVLR IB 552-74/7; nach Meyers Handbuch über das Weltall [1961], pp. 116–118

[2] siehe in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 489

sphäre wird die Brechung teilweise wieder aufgehoben, der Strahl zurückgebeugt. Der Sichtstrahl eines Satelliten unterhalb der Ionosphäre wird daher eine andere Ausbreitung erfahren als ein Satellit, der sich in oder über der Ionosphäre, d. h. über 300 km Bahnhöhe bewegt.

Das Brechungsvermögen der Ionosphäre kann aus[1]

$$N_I = \frac{-40.3\, N_e}{\nu^2} \times 10^{-6} \tag{9.230}$$

berechnet werden, wobei N_e die Elektronendichte der Ionosphäre (in 10^{12} Elektronen $/m^3$) und ν die Frequenz (Hz) bedeuten.

Anmerkung: Für die Frequenz $\nu = 11.45$ GHz ergibt sich das Brechungsvermögen der Ionosphäre $N_I = -0.3$. Da im Fall der Troposphäre das Brechungsvermögen $N_S = 300$ erwartet werden kann, wird bei nicht extremen Genauigkeitsanforderungen (> 1′) die Refraktion in der Ionosphäre in den meisten Anwendungen vernachlässigt. ◀

Die Ausbreitung eines Sichtstrahles von einem Satelliten hängt also wesentlich vom relativen Ort des Satelliten bezüglich der Bodenstation und in seiner Bahn ab, darüber hinaus vom Luftdruck, von der Temperatur, vom Wasserdampfdruck, von der Tageszeit, von der Jahreszeit, der Sonnenfleckentätigkeit und anderen meteorologischen Einflüssen ab, und ferner auch von der Frequenz, in der die Übertragung erfolgt. Dazu kommen unvorhersagbare Refraktionen wie eine Azimutrefraktion und Szintillationen. Die Aufstellung von Korrekturen an Beobachtungen von Erdsatelliten muss in der Praxis ad hoc während eines Beobachtungsvorganges oder unmittelbar vorher durchgeführt werden. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse werden Abschätzungen des Ausbreitungsfehlers in der Atmosphäre bei der Durchführung einer Bahnbestimmungs-Fehleranalyse erforderlich.

9.9.2 Refraktion bei Beobachtung eines Erdsatelliten

Wird in einer Ephemeridenrechnung der topozentrische Ort eines Beobachtungsobjektes *S* berechnet, kann die Refraktion *Ref* aus der berechneten geometrischen Zenitdistanz z_g bzw. der geometrischen Elevation $h_g = 90° - z_g$ nach Formel (9.222) (oder einer vergleichbaren Formel) erhalten werden. Bei Sternen und anderen Objekten, die als unendlich weit entfernt betrachtet werden dürfen, kann die geometrische Zenitdistanz z_g der „wahren“ Zenitdistanz *z*, unter der der Stern im Referenzpunkt *P** gesehen würde, gleichgesetzt werden. In diesem Fall ist $Ref = Ref_0$ und die Parallaxe am Stern kann $ref = 0°$ gesetzt werden. Die scheinbare Zenitdistanz, unter der ein bestimmter Stern im Beobachtungsort gesehen werden kann, ist $z_a = z_g - Ref$.

Bei Erdsatelliten ist die geozentrische Entfernung $r = R_E + H$ und damit die topozentrische Entfernung ρ so klein, dass die Parallaxe *ref* am Satelliten nicht vernachlässigt werden darf. Aus der berechneten geometrischen Elevation h_g bzw. Zenitdistanz $z_g = 90° - h_g$ kann über eine Formel vom Typ (9.224) auch im Fall von Erdsatelliten die Refraktion *Ref* berechnet werden. In diesem Fall kann die wahre Elevation *h* durch die geometrische Elevation h_g ersetzt werden. Um die scheinbare Elevation h_a bzw. die scheinbare Zenitdistanz $z_a = 90° - h_a$

[1] nach E. SCHMID, ‘Atmospheric Tracking Errors at S- and C-Band Frequencies’, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD., zitiert in: DFS-TN-PL-4100-002

im Beobachtungsort P daraus herleiten zu können, wird die reduzierte Refraktion $Ref* = Ref - ref$ benötigt. Um diese zu erhalten, wird zunächst nach Formel (9.223)

$$H* = R\left(N_R \frac{\sin z_g}{\sin(z_g - Ref)} - 1 \right) \quad , \tag{9.231}$$

im Dreieck $PSP*$ (nach Bild 9-22 auf Seite 508) die Entfernung $\rho*$ des Referenzpunktes $P*$ vom Satelliten

$$\rho* = \sqrt{(H*)^2 + \rho^2 - 2\,\rho\,H* \cos z_g} \tag{9.232}$$

sowie die Parallaxe *ref* aus

$$\sin ref = \frac{H*}{\rho*} \sin z_g \tag{9.233}$$

berechnet. Dann liefert Formel (9.220)

$$Ref* = Ref - ref \tag{9.234}$$

und die scheinbare Zenitdistanz

$$z_a = z_g - Ref* \tag{9.235}$$

oder die scheinbare Elevation

$$h_a = h_g + Ref* \quad . \tag{9.236}$$

H [km]	ρ [km]	$\rho*$ [km]	h	h_a	Ref	ref	$H*$ [km]
200	2258.439	2257.851	9°54′54″.4	10° 1′39″.7	6′45″.4	5′5″.7	3.398
300	2286.368	2285.780	9°54′58″.1	10° 1′43″.5	6′45″.4	5′1″.9	3.398
400	2318.277	2317.689	9°55′ 2″.2	10° 1′47″.7	6′45″.4	4′57″.8	3.398
500	2354.005	2353.417	9°55′ 6″.7	10° 1′52″.2	6′45″.4	4′53″.3	3.398
600	2393.380	2392.792	9°55′11″.6	10° 1′57″.0	6′45″.4	4′48″.4	3.398
700	2436.226	2435.638	9°55′16″.6	10° 2′ 2″.1	6′45″.4	4′43″.4	3.398
800	2482.363	2481.776	9°55′21″.9	10° 2′ 7″.3	6′45″.4	4′38″.1	3.398
900	2531.612	2531.024	9°55′27″.3	10° 2′12″.8	6′45″.4	4′32″.7	3.398
1000	2583.793	2583.205	9°55′32″.8	10° 2′18″.3	6′45″.4	4′27″.2	3.398
10000	10611.30	10610.71	9°58′55″.0	10° 5′40″.4	6′45″.4	1′ 5″.0	3.398
20000	20501.04	20500.45	9°59′26″.3	10° 6′11″.7	6′45″.4	0′33″.7	3.398
30000	30462.86	30462.27	9°59′37″.3	10° 6′22″.8	6′45″.4	0′22″.7	3.398
36000	36449.99	36449.40	9°59′41″.1	10° 6′26″.5	6′45″.4	0′18″.9	3.398

Tabelle 9-7: Wirkung der Refraktion bei Satellitenbeobachtung für verschiedene Satellitenabstände bei konstantem Zentralwinkel $\gamma = 20°$ und die konstante geometrische Elevation $h_g = 10°$

BEISPIEL: Für verschiedene Entfernungen eines Satelliten, der bezüglich eines Beobachtungsortes *P* den geozentrischen Winkelabstand (Zentralwinkel) γ hat, werden in Tabelle 9-7 für die geometrische Elevation $h_g = 10°$, die wahre *h* und scheinbare Elevation h_a, die Refraktion *Ref* und die Parallaxe *ref* am Satelliten sowie die Höhe *H** des Referenzpunktes *P** über dem Beobachtungsort *P* berechnet. ◀

9.9.3 Refraktion bei Auf- oder Untergang eines Satelliten

Ein Satellit geht von einer Beobachtungsstation auf der Erdoberfläche aus gesehen auf bzw. unter, wenn er den scheinbaren Horizont überfliegt, also die scheinbare Elevation $h_a = 0°$ hat. Dann ist die scheinbare Zenitdistanz $z_a = 90°$, die Refraktion *Ref* kann mit einer Formel vom Typ (9.224) berechnet werden. Die wahre Elevation *h* bzw. die wahre Zenitdistanz *z* lauten mit den Formeln (9.219) und (9.221)*Einfügeposition für Formelverweis*

$$h = h_a - Ref \quad , \quad z = z_a + Ref \quad .$$

Die geometrische Zenitdistanz z_g wird iterativ berechnet. Dazu ist bekannt, dass der Satellit die geometrische Distanz $r = R_E + H$ hat.

Mit der Annahme

$$z_g^{(0)} := z$$

werden in der *i*-ten Iteration die Parallaxe *p*, die topozentrische Distanz ρ, die Hilfshöhe *H**, die Parallaxe am Satelliten *ref*, die Hilfsrefraktion *Ref** und schließlich die entsprechende scheinbare Zenitdistanz $z_a^{(i)}$ mit den Formeln in Kapitel 38 (Band V) berechnet. Für die *i*-te Iteration $(i = 0,1,2,3,\ldots)$ gelten dann die Beziehungen:

$$\cos z_g^{(i)} = \sqrt{1-\sin^2 z_g^{(i)}}$$

$$\sin p^{(i)} = \frac{R_E}{r}\sin z_g^{(i)}$$

$$\cos p^{(i)} = \sqrt{1-\sin^2 p^{(i)}}$$

$$\cos \beta_g^{(i)} = \cos z_g^{(i)} \cos p^{(i)} \sin p^{(i)}$$

$$\rho^{(i)} = \sqrt{\left(R_E + H\right)^2 + R_E^2 - 2\left(R_E + H\right) R_E \cos \beta_g^{(i)}}$$

$$H^{*(i)} = R\left(N_R \frac{\sin z_g^{(i)}}{\sin z_g^{(i)} \cos Ref - \cos z_g^{(i)} \sin Ref} - 1 \right)$$

$$\rho^{*(i)} = \sqrt{\left(H^{*(i)}\right)^2 + \left(\rho^{(i)}\right)^2 - 2\,\rho^{(i)} H^{*(i)} \cos z_g^{(i)}}$$

$$\sin ref^{(i)} = \frac{H^{*(i)}}{\rho^{*(i)}} \sin z_g^{(i)}$$

$$\cos ref^{(i)} = \sqrt{1-\sin^2 ref^{(i)}}$$

$$\begin{aligned}
\sin Ref^{*(i)} &= \sin \mathrm{Re}\, f \cos ref^{(i)} - \cos \mathrm{Re}\, f \sin ref^{(i)} \\
\cos Ref^{*(i)} &= \cos \mathrm{Re}\, f \cos ref^{(i)} + \sin \mathrm{Re}\, f \sin ref^{(i)} \\
\sin z_a^{(i)} &= \sin z_g^{(i)} \cos Ref^{*(i)} + \cos z_g^{(i)} \sin Ref^{*(i)} \\
\cos z_a^{(i)} &= \cos z_g^{(i)} \cos Ref^{*(i)} - \sin z_g^{(i)} \sin Ref^{*(i)} \quad .
\end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichung für eine iterative Berechnung der geometrischen Zenitdistanz lautet also (mit bei Auf- oder Untergang $z_a = 90°$)

$$f(z_g) \equiv \sin\left(z_a^{(i)} - z_a\right) = 0 \quad .$$

9.9.4 Refraktion bei Sicht von einem Satelliten durch die Atmosphäre

Bild 9-22: Zur iterativen Berechnung der Refraktion

In einer Satellitenbahnanalyse werden auch Beobachtungsfälle aktuell, bei denen von einem Satelliten oder einer Höhenforschungsrakete, d. h. von einem Ort weit über der Erdoberfläche aus beobachtet wird und bei denen der Sichtstrahl durch die Atmosphäre führt. Bei diesen Fällen wird der Sichtstrahl, wie Bild 9-23 auf Seite 509 zeigt, beim Eintritt in die Atmosphäre und beim Austritt, also zweimal, gebrochen. Dadurch wird der Einfluss der Refraktion verdoppelt. Im ungünstigsten Fall tangiert der Sehstrahl die Erdoberfläche. Dann beträgt der Einfluss der Refraktion im optischen Bereich etwa 37′, der Sichtstrahl vom Satelliten zum Himmelskörper wird in diesem Fall um 1°14′ abgelenkt.

Bild 9-23: Sehstrahl Satellit–Himmelskörper durch die Atmosphäre, *S* – Ort eines Satelliten (oder einer Höhenforschungsrakete), *K* – Richtung zum Himmelskörper, *Ref* – Refraktion, HOR– Horizont im tiefsten Punkt des Sehstrahles, ♁ – Erde (Zentralkörper), Atm – Atmosphärenschicht

Hat ein Satellit (oder eine Höhenforschungsrakete) die Höhe H über der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche mit Referenzradius R (z. B. Radius des Startortes der Rakete), beträgt der Kimmwinkel κ_0 , das ist der Winkel zwischen der Tangente an die Erdoberfläche („Kimm“) und dem geozentrischen Radiusvektor nach Bild 9-23 auf Seite 509

$$\sin \kappa_0 = \frac{R}{R+H} \quad . \tag{9.237}$$

Sei **r** der geozentrische Ortsvektor des Satelliten, **s** der Einheitsvektor vom Satelliten in Richtung zum beobachteten Himmelskörper, schließt diese Richtung mit der Nadirrichtung den (Nadir-) Winkel β ein:

$$\cos \beta = -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{s}}{|\mathbf{r}|} \quad . \tag{9.238}$$

Ein Himmelskörper kann also von einem Satelliten nur dann beobachtet werden, wenn bei Vernachlässigung der Refraktion die Sichtbarkeitsbedingung

$$\beta \geq \kappa_0 \tag{9.239}$$

erfüllt ist. Wird nicht die Erdoberfläche sondern eine Grenzhöhe H_b über der Erdoberfläche als tiefste „Eintauchhöhe“ des Sichtstrahles zugelassen, ergibt sich als Grenzwinkel zwischen Sehstrahl und Erdoberfläche, der nicht unterschritten werden sollte, der Winkel

$$\kappa_b = \arcsin\frac{R+H_g}{R+H} - \arcsin\frac{R}{R+H} \quad . \tag{9.240}$$

Bild 9-24: Der Kimmwinkel κ bei Beobachtung von einem Satelliten S aus, Sichtbarkeitsverhältnisse zur Beobachtung eines Himmelskörpers Σ von einem Satelliten (oder Höhenforschungsrakete) aus bei Annahme einer kugelförmigen Erdoberfläche

BEISPIEL: Im Fall einer Höhenforschungsrakete, von der aus in H = 140 km Höhe beobachtet werden soll und wenn der Sichtstrahl die Atmosphäre in mindestens H_g = 30 km Höhe tangieren soll, beträgt der Grenzwinkel

$$\kappa_b = 1°21'19''.6 \quad \blacktriangleleft$$

Um den Einfluss der Refraktion in bestimmten Höhenbereichen über der Erdoberfläche abschätzen zu können, werden die durch Extrapolation gewonnen Kurven in Bild 9-25 genommen.

Infolge der Refraktion werden Kimm und Kimmwinkel gemäß Bild 9-26 auf Seite 512 verändert. Während κ_0 der Kimmwinkel ohne Einfluss der Refraktion ist, wird durch die Refrakti-

on der Sichtstrahl in der Atmosphäre so verändert, dass der Kimmwinkel κ^* am Satellitenort eingehalten werden muss, um die Erdoberfläche tangential zu berühren. Wegen seiner Biegung in der Atmosphäre trifft der Sichtstrahl die Erdoberfläche in einem anderen Punkt P^* als ohne Refraktion im Punkt P (vgl. Bild 9-24 auf Seite 510). Die geometrische (geradlinige) Verbindung des Satellitenortes mit P habe die Entfernung ρ und werde unter dem geometrischen Kimmwinkel κ' am Satelliten gesehen. Dieser Winkel kann im Vergleich mit Bild 9-21 auf Seite 502 aus der Beziehung

$$\kappa' = \kappa^* - ref \tag{9.241}$$

berechnet werden. Für alle diese und die folgenden mehr zur Abschätzung gedachten Beziehungen wird die Erde durch eine Kugel approximiert und eine – da ohnehin vergleichsweise verschwindend kleine – azimutale Refraktion vernachlässigt. Dann können alle Formeln mit elementarer ebener Trigonometrie abgeleitet werden.

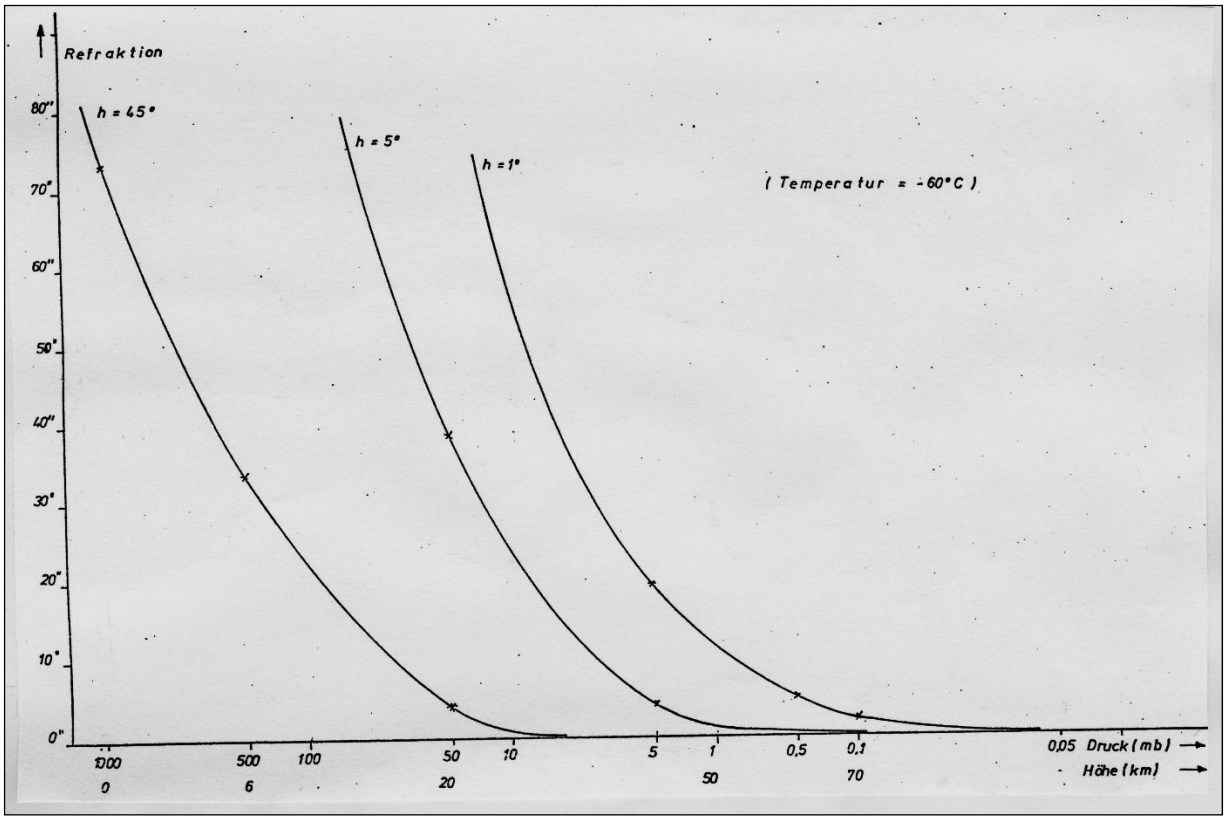


Bild 9-25: Refraktion in Abhängigkeit von der Höhe für einige (beobachtete) Elevationen[1]

Sei γ_0 der Zentralwinkel zwischen P und dem Satellitenort ohne Berücksichtigung der Refraktion

$$\cos\gamma_0 = \frac{R}{R+H} \quad , \tag{9.242}$$

wird infolge der Refraktion der Zentralwinkel γ benötigt, um den neuen Tangentialpunkt P erreichen zu können. In P trifft der Sichtstrahl somit unter der scheinbaren Zenitdistanz

[1] nach MEYERS HANDBUCH ÜBER DAS WELTALL [1961], pp. 116–118

$z_a = 90°$ ein. Die Zenitdistanz z im Referenzpunkt P^*, der um die Strecke H^* über P liegt, beträgt nach Formel (9.69) und wegen $z_a = 90°$

$$z = z_a + Ref = 90° + Ref \quad , \tag{9.243}$$

somit hat die Höhe H^* nach Formel (9.71) den Betrag

$$H^*(z_g = 90°) = R\left(N_R \frac{\sin(z_g - Ref)}{\sin z_g} - 1 \right) = R\left(\frac{N_R}{\cos Ref} - 1 \right) \quad . \tag{9.244}$$

Bild 9-26: Veränderung des Kimmwinkels infolge der Refraktion bei Sicht von einem Satelliten (oder einer Höhenforschungsrakete) aus

Damit kann der scheinbare Kimmwinkel aus

$$\sin \kappa^* = \frac{R + H^*}{R + H} \cos Ref \tag{9.245}$$

berechnet werden, der scheinbare Zentralwinkel aus

$$\gamma = z - \kappa^* \quad , \tag{9.246}$$

die Schrägentfernung vom Satelliten zum Punkt P^* aus

$$\rho^* = (R + H) \frac{\sin \gamma}{\cos Ref} \quad , \tag{9.247}$$

die geometrische Schrägentfernung ρ vom Satelliten zum Tangentialpunkt P aus

$$\rho = \sqrt{(\rho^*)^2 + (H^*)^2 - 2\,\rho^* H^* \sin Ref} \quad , \tag{9.248}$$

somit die scheinbare Refraktion in P

$$\cos Ref* = \frac{\rho*}{\rho}\cos Ref$$

und der Korrekturwinkel am Satelliten

$$ref = Ref - Ref* \quad , \tag{9.249}$$

um den geometrischen Kimmwinkel $\kappa' = \kappa* - ref$ nach Formel (9.89) auf S. 511 zu erhalten.

BEISPIEL: Ein Satellit habe die Höhe $H = 700$ km über der (kugelförmig angenommenen) Erdoberfläche mit $R = R_E$. Für die Temperatur $T = 303$ K und den Druck $p = 1000$ mb, $e_s = 1$ mb ergibt sich aus Formel (9.73) der Brechungsindex $N_s = 290.34$ sowie die Refraktion im Radiofrequenzbereich ($Ref_0 = 0°.02107$) nach den Formeln (9.74) auf S. 503 oder (9.75) $Ref = 0°.69421 = 41'.65263$.

Die Höhe des Referenzpunktes $P*$ über P ergibt sich zu[1] $H* = 1.54$ km und somit der scheinbare Kimmwinkel am Satelliten zu $\kappa = 64°.3257$.

Die Zenitdistanz in $P*$ beträgt $z = 90° + Ref = 90°.69421$ und damit der Zentralwinkel $\gamma = 26°.36851$.

Die Schrägentfernung vom Satelliten zum Hilfspunkt $P*$ ist $\rho* = 3143.936$ km und die Refraktion am Boden im Tangentialpunkt P ist $Ref* = 0°.666146 \Leftrightarrow 39'.96876$.

Damit wird der Korrekturwinkel am Satelliten $ref = Ref - Ref* = 1'.68387$ und schließlich der geometrische Kimmwinkel $\kappa' = 62°.641829$.

Zum Vergleich werden der Kimmwinkel ohne Berücksichtigung der Refraktion aus Formel (9.85) auf S. 509 berechnet $\kappa = 64°.303560$ und der entsprechende Zentralwinkel aus Formel (9.90) $\gamma_0 = 25°.696440$. Der Differenz $\gamma - \gamma_0 = 0°.6720697$ entspricht auf der kugelförmigen Erdoberfläche (mit R_E =6378.140 km) die Distanz (Strecke von P_0 zu P) $\Delta = 74.814$ km.◀

9.10 Überblick der Korrekturen an den Beobachtungsörtern

9.10.1 Die exakte Ephemeride eines Erdsatelliten

Die Ephemeridenrechnung für einen Erdsatelliten erfolgt in einem Koordinatensystem, das zu einer vorgegebenen Koordinatenepoche t_K festgehalten wird. Diese Koordinatenepoche stimmt nicht notwendig mit der Epoche t_0 der gegebenen Bahnelemente überein. Der geozentrische Zustandsvektor zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird dann jeweils im Koordinatensystem der Koordinatenepoche t_K berechnet und muss auf die Koordinatenepoche t umgerechnet werden. Die Koordinaten zur Koordinatenepoche t_K können auf den mittleren Frühlingspunkt bezogen sein, was gewöhnlich bei der Vorgabe von mittleren *Kepler*elementen der Fall ist. Bei Vorgabe des oskulierenden Zustandsvektors ist der Bezug üblicherweise der wahre Frühlingspunkt. In diesem Fall muss der in Bild 9-27 dargestellte Prozess zur Umrechnung des auf den im wahren Frühlingspunkt zum Zeitpunkt t_K gültigen Koordinatensystem berechneten Zustandsvektor in das zum Zeitpunkt t auf den wahren Frühlingspunkt bezogene gültige Koordinatensystem durchgeführt werden. Das Schema zeigt, dass ein Umweg über das System erforderlich ist, das zu jedem dieser Zeitpunkte auf den mittleren Frühlingspunkt bezogen ist.

[1] siehe hierzu auch: EXPLANATORY SUPPLEMENT [1962], p. 55

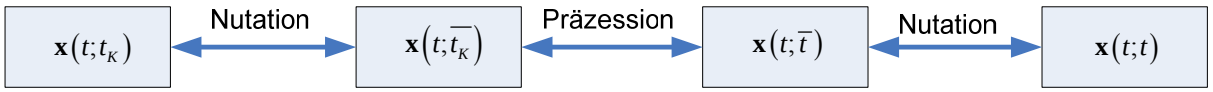


Bild 9-27: Umrechnung des Zustandsvektors eines Erdsatelliten oder eines interplanetaren Objektes von einem Koordinatensystem zum Zeitpunkt t_K in ein Koordinatensystem zum Zeitpunkt t. Hier bedeutet t_K den Bezug auf den wahren Frühlingspunkt, $\overline{t_K}$ den Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt

Für hochgenaue Ansprüche müssen die unterschiedlichen astrometrischen Definitionen der unterschiedlichen Koordinatensysteme berücksichtigt werden.

9.10.2 Korrekturen der Beobachtungen

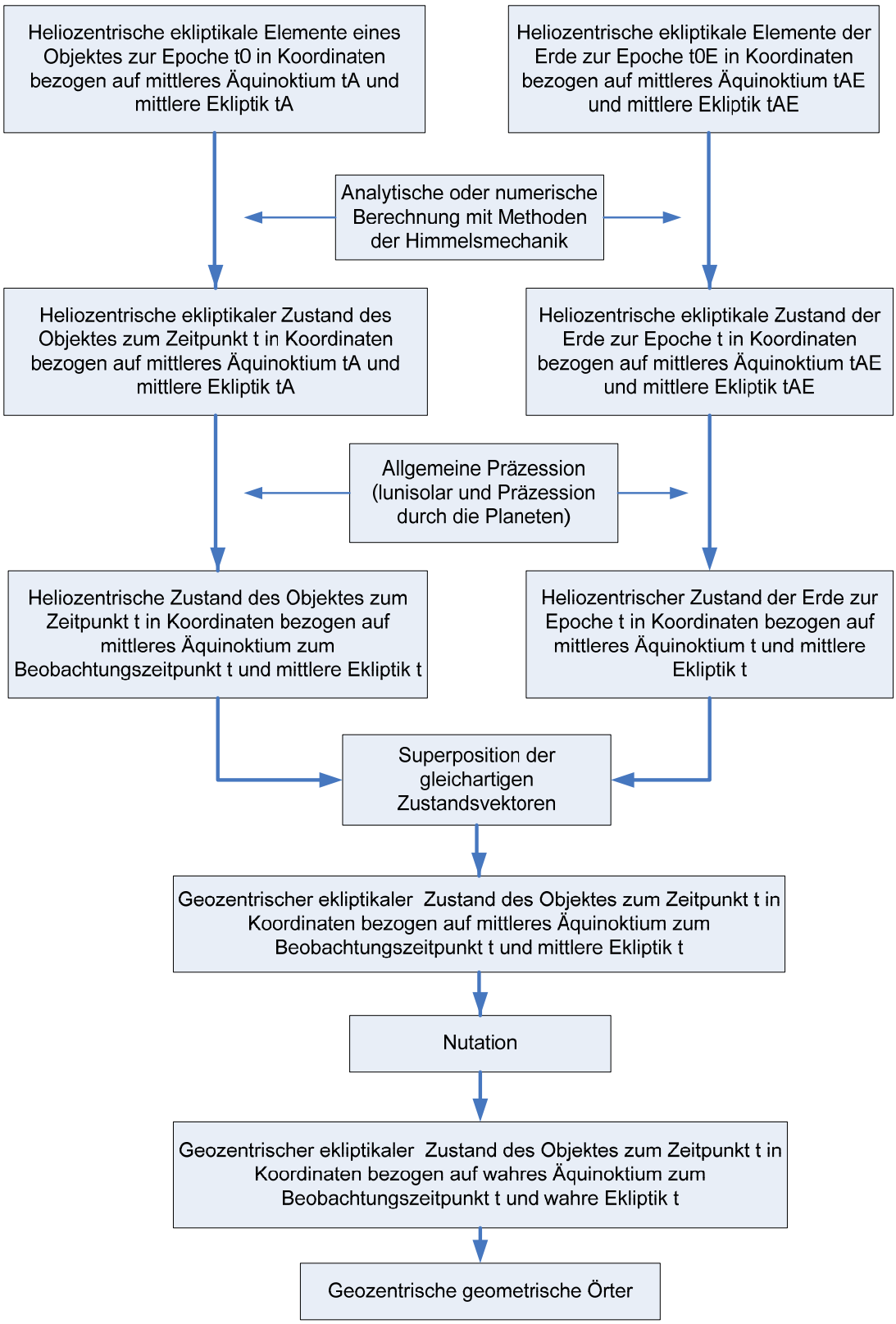


Bild 9-28: Überblick Erzeugung geozentrischer geometrischer Örter interplanetarer bzw. interstellarer Objekte

9.10.3 Korrekturen berechneter Beobachtungsörter

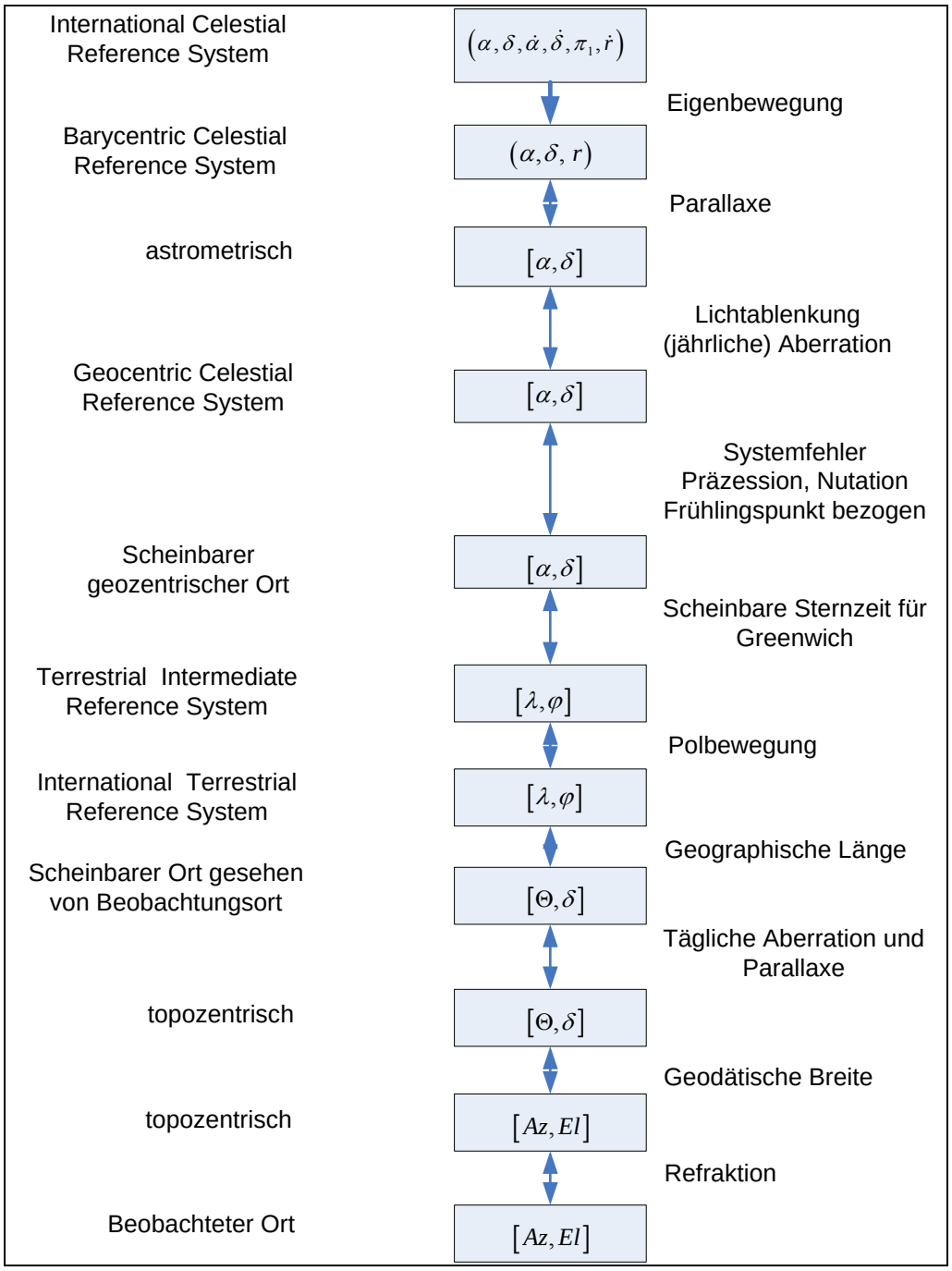


Bild 9-29: Umrechnung des Zustandsvektors vom Koordinatensystem zum Zeitpunkt t_K in das Koordinatensystem zum Zeitpunkt t. Hier bedeutet t_K den Bezug auf den wahren Frühlingspunkt, $\overline{t_K}$ den Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt.[1]

[1] Kopie aus: SOFA [2010/1], p.6, Figure 2

Schrifttum zu Band II

In diesem Literaturverzeichnis sind nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur aufgenommen. Einige weitere Einzelreferenzen und Hinweise auf ergänzende Literatur sind in direktem Bezug in den fortlaufenden Text eingefügt.

In diesem Literaturverzeichnis sind nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur aufgenommen. Einige weitere Einzelreferenzen und Hinweise auf ergänzende Literatur sind in direktem Bezug in den fortlaufenden Text eingefügt.

AA 1984 [1983]: *The Astronomical Almanac for the Year 1984*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AOKI, A., GUINOT, B., KAPLAN, G. H., KINOSHITA, H., MCCARTHY, D. D., SEIDELMANN, P. K. [1982]: 'The New Definition of Universal Time', *Astronomy and Astrophysics* **105**, 359–361

BARNES, J. A. [1974]: 'Basics Concepts of Precise Time and Frequency', in: Blair, B. R. ed., *Time and Frequency: Theory and Fundamentals*, U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Boulder, CO 80302, Issue May 1974

BATTIN, R. H. [1987]: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BOHRMANN, A. [1963]: *Bahnen künstlicher Satelliten*, BI Hochschultaschenbücher Nr. 40, Mannheim; zweite Auflage 1966

BRUMBERG, V. A. [1995]: *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BUCERIUS, H. [1966]: *Himmelsmechanik I*, BI Hochschultaschenbücher, 143/143a, Bibliographisches Institut Mannheim

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968]: *Himmelsmechanik II*, BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. [1976]: *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

CEFOLA, P. J. [1972]: 'Equinoctial Orbit Elements – Application to Artificial Satellite Orbits', AIAA/ AAS Astrodynamics Conference, Palo Alto, Calif., September 11–12, 1972, Preprint AIAA 72-937

CEFOLA, P. J. [1975]: 'On the Formulation of the Gravitational Potential in Terms of Equinoctial Variables', AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 1975, N76-10169

CHEBOTAREV, G. S. [1967]: *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, USSR Academy of Sciences, Translation from Russian, translated by Scripta Technica, Inc., Translation Editor: Ludwig Oster, University of Colorado, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York

DANJON, A. [1980]: *Astronomie Générale, Astronomie Sphérique et éléments de Mécanique Céleste*, Seconde Edition, revue et corrigée, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis, 75006 Paris

DEPRIT, A. [1975]: 'Ideal Elements for Perturbed Keplerian Motions', *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences.* **79B** , Nos. 1 and 2, January - June 1975, pp. 1-15

DEPRIT, A. [1976]: 'Ideal Frames for Perturbed Keplerian Motion', *Celest. Mech.* **13,** 253–263

ECKSTEIN, M. C. [1972]: 'Säkulare Bahnstörungen durch den Luftwiderstand', DFVLR IB 013-72/4

ECKSTEIN, M. C. [1973]: 'Ein Satellitenbahnmodell ohne Singularitäten', DLR-FB 73-67, 'A Satellite Model without Singularities', ESRO TT-102, Oct. 1974

ECKSTEIN, M. C. [1974]: 'Ein Satellitenbahnmodell mit Schubphase', DLR-IB 552-74/9

ECKSTEIN, M. C. AND F. HECHLER [1970]: 'A Reliable Derivation of the Perturbations due to any Zonal and Tesseral Harmonics of the Geopotential for Nearly-Circular Orbits', Scientific Report, *ESRO* SR-13, June 1970, 11 pages

EDENHOFER, P., GLESNER, D., STEIN, V. [1973]: 'Ausbreitungsfehler elektromagnetischer Wellen bei der Bahnvermessung von Erdsatelliten. Korrektur der systematischen und Abschätzung der statistischen Ausbreitungsfehler', DLR-FB 73-56

EICHHORN, H. [1988]: 'Physical Time and Astronomical Time', *Celest. Mech.* ***43***, 237–241

EINSTEIN, A. [1956]: *Grundzüge der Relativitätstheorie* , WTB Bd. 59, Akademie Verlag, Berlin, Pergamon Press, Oxford, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

EINSTEIN, A. [1969]: *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie* , Wissenschaftliche Taschenbücher, Bd. 59, Akademie Verlag, Berlin, Pergamon Press, Oxford, Vieweg & Sohn, Braunschweig

EL'YASBERG, P. E. [1967]: *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites* , (*V vedenie v teoriyu poleta iskusst vennykh sputnikov Zemli*), translated from Russian, Moskva 1965, Series: Mechanics of Space Flight, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem

ESCOBAL, P. R. [1965]: *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

ESCOBAL, P. R. [1968]: *Methods of Astrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York – London – Sydney

EXPLANATORY SUPPLEMENT *to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections [1962]

FIRNEIS, M. AND FIRNEIS, F. [1986]: 'On the Use of Quaternions in Spherical and Positional Astronomy', *The Astronomical Journal.* **91,** Number 1, 177-178

FISCHER LEXIKON MATHEMATIK. [1964], Band 1, Das Fischer Lexikon 29/1, Fischer Bücherei, Fankfurt am Main

GAUSS, C. F. [1809/1906]: *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium,* Hamburgi sumtibus Frid. Perthes et I. H. Besser; reprint in: C. F. Gauss, Werke

GAUSS, C. F. [1906]: *Werke,* herausgegeben von der königlichen Akademie der Wissenschaften, Göttingen

GRASSMANN, HERMANN [1844/1894]: *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. - Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik wie auch die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.* Enthalten in: Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke, auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Friedrich Engel, Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1894. Digitales Exemplar, Google, scanned by Images Digitales, Nogales, AZ

GREEN, R.M. [1985]: *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, ISBN 0 521 23988 5 and ISBN 0 521 31779-7, Library of Congress catalogue card number: 84-29208

HANSEN, P. A. [1857]: 'Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der Kleinen Planeten, erste Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, dritter Band, bei S. Hirzel, Leipzig;

dritte Abhandlung im fünften Band [1861]

HANSEN, P. A. [1864]: 'Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, erste, zweite Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, sechster Band und siebenter Band [1865], bei S. Hirzel, Leipzig

HERGET, P. AND P. MUSEN [1958]: 'A modified Hansen Lunar Theory for Artificial Satellites', *Astronomical Journal* **63**, No. 1264, 430–433

HERGET, P. AND P. MUSEN [1959]: 'The Calculation of Literal Expansions', *Astronomical Journal* **64**, No. 1266, 11–16

HILL, G. W. [1881]: 'Note on Hansen's Theory of Perturbations', *Am. J. Math.,* **4**, 256-259 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 348)

HILL, G. W. [1886]: 'On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the

HOERNER, SEBASTIAN VON UND KARL SCHAIFERS [1961]: *Meyers Handbuch über das Weltall,* Bibliographisches Institut, Mannheim

HOOTS, F. R. [1979]: 'A Nonsingular Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Provincetown, Mass., June 25–27, 1979, AAS Paper 79-137; see also: 1981, 'Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory for Improved Computational Efficiency', *Celest. Mech.* ***24***, 367–375

HOOTS, F. R. [1981]: 'Theory of the Motion of an Artificial Satellite', *Celest. Mech.* **23**, 307–363

HURWITZ, A. [1898]: 'Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen', *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen,* Klasse 1898, pp. 309-316

HURWITZ, A. [1923]: 'Über die Komposition der quadratischen Formen', *Math. Annalen* **88** Periodical Issue, pp. 1-25

IERS [1989]: 'IERS Standards 1989, IERS Technical Note 3', Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, 61, avenue de l'observatoire, F-75014 Paris, France

JENSEN, J., TOWNSEND, G., KORK, J., KRAFT, D. [1962]: *Design Guide to Orbital Flight,* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

JEZEWSKI, D. J. [1988]: 'An Ideal Reference Frame for Perturbed Orbital Motion', AIAA 88-4218-CP

JOCHIM, E. F. M.; HAUKE FIEDLER; GERHARD KRIEGER [2011]: 'Fuel Consumption and Collision Avoidance Strategy in Multi-Static Orbit Formations', *Acta Astronautica*, AA-**68**, pp. 1002-1014

KUSTAANHEIMO, P. E. [1964]: 'Die Spinordarstellung der energetischen Identitäten der Keplerbewegung', in: Stiefel, E. (Hrsg.) [1966], pp.333-340

KUSTAANHEIMO, P. E. UND E. STIEFEL [1965]: 'Perturbation Theory of Kepler Motion based on Spinor Regularization', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **218**, pp.204-219

LAUGWITZ, D. [1960]: *Differentialgeometrie*, Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart

LEIBNIZ, G. W. [1689]: 'Tentamen de Motuum Coelestium Causis', *Acta Eruditorum,* Feb. 1689, pp. 82-96

LENSE, J. [1940]: 'Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie', *Astronomische Nachrichten **271***, 121–132

LENZ, HANFRIED [1967]: *Nichteukliische Geometrie,* BI Hochschultaschenbücher, 123/123a, Bibliographisches Institut, Mannheim

LEVY, J. [1968]: 'Trois Siècles de Mécanique Céleste a l'Observatoire de Paris', *l'Astronomie*

LICHNEROWICZ, A. [1966]: *Einführung in die Tensoranalysis*, BI Hochschultaschenbücher 77*, Mannheim

MESCHKOWSKI, H. [1965]: *Mathematisches Begriffswörterbuch,* BI Hochschultaschenbücher, 99/99a, Bibliographisches Institut, Mannheim

MUSEN, P. [1958]: 'Modified Formulae for Hansen's Special Perturbations', *Astronomical Journal* **63**, No. 1264, 426–429

MUSEN, P. [1959]: 'Application of Hansen's Theory to the Motion of an Artificial Satellite in the Gravitational Field of the Earth', *Journal of Geophys. Research*, **64**, No. 12, 2271–2279

MUSEN, P. [1961]: 'The Theory of Artificial Satellite in Terms of the Orbital True Longitude', *Journal of Geophysical Research,* **66,** No. 2, pp. 403-409

MUSEN, P. [1963]: 'On a Modification of Hansen's Lunar Theory', *Journal of Geophysical Research,* **68,** No. 5, 1439-1456

MUSEN, P. [1968 a]: 'On Some Possible Simplifications and Changes in Hansen's Lunar Theory', *The Journal of the Astronautical Sciences ,* Vol. **XV**, No. 3, pp. 124-135

MUSEN, P. [1968 b]: 'Investigations in Hansen's Planetary Theory', (NASA TN D-4169, 19 pages), *Bulletin Astronomique,* Série 3, **3,** Fascicule 3, 253–263

MUSEN, PETER AND THEODORE FELSENTREGER [1973]: 'On the Determination of the Long Period Tidal Perturbations in the Elements of Artificial Earth Satellites', *Celestial Mechanics,* **7**, pp. 256-279

NEWCOMB, S. [1906]: *A Compendium of Spherical Astronomy*, The MacMillan Company, New York, London

PALACIOS, M, AND C. CALVO [1996]: 'Ideal Frames and Regularization in Numerical Orbit Computation', *The Journal of the Astronautical Sciences,* **44,** No. 1, January-March, pp. 63-77

PESCHL, E. [1961]: *Analytische Geometrie,* BI Hochschultaschenbücher, 15/15a, Bibliographisches Institut, Mannheim

RODRIGUES, O. [1840]: 'Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire', *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* **5**, 380–440 [verbreitet ist auch der Kurztitel der Arbeit: 'Théorie des rotations d'un solide']

SCHAUB, W. [1952]: 'Die himmelsmechanischen Grundlagen der Raumfahrt, das Zweikörperproblem und die lösbaren Fälle des Dreikörperproblems ', in: Gartmann, H., her.: *Raumfahrtforschung*, Verlag von R. Oldenbourg, München 1952, pp. 27–115.

SCHEIFELE, G.; STIEFEL, E. [1972]: 'Canonical Satellite Theory, Based on Independent Variables Different from Time', Report to ESRO, ESOC - Contract No. 219/70/AR

SEIDELMANN, P. K. [1982]: '1980 IAU Theory of Nutation: the Final Report of the IAU Working Group on Nutation', *Celest. Mech.* ***27***, 79–106

SEIDELMANN, P. K. ED. [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SEIDELMANN, P. K. AND FUKUSHIMA, T. [1992]: 'Why new time scales?', *Astronomy and Astrophysics* ***265***, 833–838

SMART, W. M. [1962]: *Text-Book on Spherical Astronomy*, Cambridge at the University Press

SOFA [2010/1]: *Standards of Fundamental Astronomy, SOFA Tools for Earth Attitude,* International Astronomical Union, Software version 4, Document revision 1.2, Version for Fortran programming language, 2010 September 5, http://www.iausofa.org

SOFA [2010/2]: *Standards of Fundamental Astronomy, SOFA Time Scale and Calendar Tools,* International Astronomical Union, Software version 1, Document revision 1.0, Version for Fortran programming language, 2010 August 27, http://www.iausofa.org

STIEFEL, E. [1964/1]: 'Koordinatenstörung in regularisierten Variablen', in: Stiefel, E. her. [1966], pp.87-96

STIEFEL, E. (Hrsg.) [1966]: *Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik*, Berichte aus dem mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Heft 1, Bericht einer Tagung des mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, 15. – 21. März 1964, Bibliographisches Institut Mannheim

STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. [1971]: *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933]: *Lehrbuch der Astronomie*, Springer-Verlag, Berlin

STRUBLE, R. A. [1960/1]: 'A Geometrical Derivation of the Satellite Equations', *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **1**, 300–307

STRUBLE, R. A. [1960/2]: 'The Geometry of the Orbits of Artificial Satellites', North Carolina State College, Raleigh, NC, June 1, 1960; and: *Arch. Rational Mech. Anal.,* [1961] ***7***, 87–104

STRUBLE, R. A. [1961]: 'An Application of the Method of Averaging in the Theory of Satellite Motion', *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **10**, No.5, 691–704

STUMPFF, K. [1959, 1965, 1974]: *Himmelsmechanik I* [1959]; *Himmelsmechanik II* [1965]; *Himmelsmechanik III* [1974], DVW Berlin

VALLADO, DAVID A. [2001]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VOGT, H.-H. [1969]: *Abriss der Astronomie I,* BI Hochschulskripten, 807/807a, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, *Band II*, 819/819a

VOLK, O. [1981]: 'Franciscus Vieta und die Eulersche Identität (Quaternionen) ', *Elemente der Mathematik*, **36**, pp.115-121

WALTER, H. G. AND SOVERS, O. S. [2000]: *Astrometry of Fundamental Catalogues,* The Evolution from Optical to Radio Reference Frames, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67436-5

WOOLARD, E. W. AND CLEMENCE, G. M. [1966]: *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York and London

YAROV-YAROVOI, M. S. [1961] [M. S. JAROV-JAROVOI]: 'The application of Hansen's ideal coordinates', *Soviet Astronomy – AJ*, vol. 4, No.5, March-April 1961; translated from Astronomicheskii Zhurnal, UdSSR, Vol. 37. No.5, pp.908-917 [1960]; P. K. Shternberg State Astronomical Institute

Liste der verwendeten Symbole

Lateinische Symbole

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
A	Grad	Azimut (positiv von Nord über Ost nach Süd)
A	m^2	Fläche
$\mathbb{A}_n$	---	Affiner Punktraum
A_D	m^2	Anströmfläche bei Luftwiderstand
A_0	<Länge>	Auslenkung einer Welle (nur in Kapitel 9)
A_1	Grad	Azimut der Sichtrichtung bezogen auf Bewegungsrichtung des Satelliten (Beobachtungsort)
A_T	Grad	Azimut der transversalen Bewegungskomponente des Satelliten
a	km	große Bahnhalbachse
a	< Länge >	große Halbachse einer Ellipse, Rotationsellipsoid (siehe Kapitel 32, Band V)
a_a	km	Näherungswert für a, wenn P_a gegeben ist
a_B	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *D. Brouwer*
a_d	km	Näherungswert für a, wenn P_d gegeben ist
a_g	km	große Bahnhalbachse der geostationären Bahn
a_{g0}	km	Näherungswert für a_g
a_H	km	erste Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
a_K	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *Y. Kozai*
a_m	km	Näherungswert für a, wenn P_m gegeben ist
a_t	km	Näherungswert für a, wenn P_t gegeben ist
a_S	km	Näherungswert für a, wenn P_S gegeben ist
a_{ss}	km	Näherungswert für a für eine sonnensynchrone Bahn
a_λ	km	Näherungswert für a, wenn $\Delta\lambda_\Omega$ gegeben ist
$a_{\odot}$	km [AU]	große Bahnhalbachse der Erdbahn um die Sonne

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$a_\odot$	km [*AU*]	große Bahnhalbachse der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
a	km, Grad	*Kepler*element $\mathbf{a} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$
a_L	km, Grad	*Kepler*element mit langperiodischen Störungen (kurzperiodische Störungen weggelassen)
B		*Bessel*sche Epoche (z. B. B1950.0)
B_2		$1.5\ \mu\ J_2\ R_E^2$
B_D	km^2/kg	ballistischer Koeffizient $B_D = c_D\ A_D / m$
b	Grad	ekliptikale Breite
b	< Länge >	kleine Halbachse einer Ellipse, eines Rotationsellipsoids (nur in Kapitel 31)
b_C	km	Kollisionsradius
b_H	km	zweite Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
b_{HN}	km/s^2	Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen
b_N	km/s^2	Normalbeschleunigung
b_R	km/s^2	Radialbeschleunigung
b_T	km/s^2	Transversalbeschleunigung
b_V	km/s^2	Tangentialbeschleunigung
C	–	Konstante bei Wellenvorgang (nur in Kapitel 9)
C_J		*Jacobi*sche Konstante (nur in Kapitel 2)
C_{JH}		*Jacobi*sche Konstante im *Hill*schen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems
c	km/s	Lichtgeschwindigkeit
c_D	-	Luftwiderstandsbeiwert
c_R	-	Strahlungsdruckbeiwert
c	km^2 / s	2. *Kepler*scher Vektor (1. *Laplace*scher Vektor, Normalenvektor der Bahnebene, Drallvektor, Drehmomentenvektor, Inklinationsvektor), $\mathbf{c} = c^i\ \mathbf{p}_i,\ G = \lvert\mathbf{c}\rvert$
$\mathbf{c}_0$		Richtungsvektor in Richtung des Normalenvektors der Bahnebene, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} / G$
D		*Darboux*scher Vektor (allgemeiner Drehvektor, allgemeiner Systemeigenbewegungsvektor)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{D}_p$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{D}_q$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j\right)$)
$\mathbf{D}_{q^{(L)}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des Leibniz-Systems
$\mathbf{D}_{qp}$		relativer Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\mathbf{D}_{qp} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)$
D		Tag [Bürgerliches Datum)
$D_p{}^i$		Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i\right)$
$D_{qp}{}^j$		Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j\right)$
$D_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Elongation des Mondes von der Sonne $D_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - L_{\odot}$
$\mathbf{d}$	$\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$	1. *Kepler*scher Vektor (*Herrmann-Laplace*-Vektor, 2. *Laplace*-scher Vektor, Exzentrizitätsvektor, Perizentrumsvektor), $\mathbf{d} = d^i \mathbf{p}_i,\ e\mu = \lvert\mathbf{d}\rvert$
dm	kg	Massenänderung (Massenausstoß bei Raketenmotor)
dV	km/s	Geschwindigkeitsänderung (durch Zünden eines Raketenmotors)
E	Grad	exzentrische Anomalie [bei Bezug auf Perizentrum)
$\mathbb{E}_n$		n-dimensionaler eigentlich euklidischer Vektorraum
E_A	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Apozentrum) $E_A = E + 180°$
$E^{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kontravariant
$E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kovariant
$\mathbf{E}$		beliebiger Bahnelementevektor
$\mathbf{E}$		Einheitstensor der zweiten Stufe: $\mathbf{E} = \mathbf{g}^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$
e		Exzentrizität (numerische)
e_H		Exzentrizität einer Hohmann-Übergangsbahn
e_F		numerische Exzentrizität einer formstabilen Bahn („eingefrorene Bahn“)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
e_f		numerische Exzentrizität einer Ellipse, eines Ellipsoids
e_l	Grad	säkularer und langperiodischer Anteil der Exzentrizität einer Bahnellipse ($e_l := \bar{e} + \delta e_l$)
$e_{\sun}$		numerische Exzentrizität der Erdbahn
$e_{\odot}$		numerische Exzentrizität der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
F	km kg/s^2	Kraftvektor
F	-	Phasing Parameter einer *Walker* Konstellation (T/P/F)
$F_{\leftmoon}$	Grad	mittleres Argument des Mondes von der Sonne $F_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - \Omega_{\leftmoon}$
f_N	km^3 kg^{-1} s^{-2}	*Newton*sche Gravitationskonstante
f		Abplattung des Zentralkörpers
f		3. Keplerscher Vektor = Hilfsvektor in Richtung $\upsilon = 90°$, $\mathbf{f} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}$ („Parametervektor“)
G	km^2 / s	Flächenparameter (= Betrag des Bahnnormalenvektors), in *Kepler*scher Bewegung: $G := \lvert\mathbf{c}\rvert = \sqrt{\mu\, p}$, (5. Delaunay Element)
G_N	km^3 s^{-1} kg^{-1}	*Newton*sche Gravitationskonstante
g	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne (Bezeichnung verwendet in AA und der klassischen Literatur. In diesem Bericht ist $g = M_{\odot}$ gesetzt.)
g_{ik}		kovarianter Metriktensor (= kovarianter Fundamentaltensor)
g^{ik}		kontravarianter Metriktensor (= kontravarianter Fundamentaltensor)
H	km	Höhe über R_E = „mittlere Äquatorbahnhöhe“
H'	km	Höhe über abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
H_A	km	Apogäumshöhe über R_E
H_P	km	Perigäumshöhe über R_E
h	Grad	Elevation (astronomisch: „Höhe“)
h	kg km^2/s^2	Gesamtenergie
I	Grad	Überflugwinkel über Breitenkreis
I'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Breitenkreis bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
I_1, I_2, I_3		skalare Invariante des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe
i	-	Imaginäre Einheit $\left(i^2 = -1\right)$
i	Grad	Inklination
i'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Äquator bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
i_{ss}	Grad	Inklination einer sonnensynchronen Bahn
$i_{\sun}$	Grad	Inklination der Erdbahn bezüglich Ekliptik
$i_{\odot}$	Grad	Inklination der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde bezüglich Ekliptik
J		*Lagrange*sche Funktion (in Kapitel 2)
J		julianische Epoche (z. B. J2000.0)
J_D		julianisches Datum
J_d		julianische Tagesnummer
$J_2, J_3, J_4, J_5, \ldots$		geodynamische Formfaktoren (Zonale des Schwerefeldes eines Zentralkörpers)
J_n		*Bessel* Funktionen
K		Reproduktionszyklus, Wiederholungszyklus (Anzahl der Perioden der Knotenlänge)
K_1		natürliche Zahl $(K = 2K_1 \text{ oder } K = 2K_1 - 1)$
k	–	Wellenzahl (nur in Kapitel 9)
k	–	Wellenzahlvektor (nur in Kapitel 9)
k^2	$\mathrm{AU}^3\,\mathrm{d}^{-2}\,\mathrm{M}_\odot^{-1}$	*Gauß*sche Gravitationskonstante, $k := 0.017202098950000000\, AE^3\, m_\odot^{-1}\, d^{-2}$
l	Grad	ekliptikale Länge
l	Grad	wahre Länge $(l = \upsilon + \omega + \sigma_i \Omega)$
L	Grad	mittlere Länge $(l = M + \omega + \sigma_i \Omega)$
L_E	Grad	exzentrische Länge $(L_E = E + \omega + \sigma_i \Omega)$
$L_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Länge des Mondes (in seiner Bahn)
$L_{\sun}$	Grad	mittlere Länge der Erde (in ihrer Bahn)
$L_{\odot}$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne
L_0	Grad	mittlere Epochelänge in der Bahn $(L_0 = M_0 + \omega + \sigma_i \Omega)$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
M	Grad	mittlere Anomalie
M	---	Monat (bürgerliches Datum)
$\mathbb{M}$	---	Metrischer Raum
M_{JD}		modifiziertes julianisches Datum
M_0	Grad	mittlere Epocheanomalie
$\dot{M}_{0s}$	Grad/s	säkulare Variation in M_0
$M_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Anomalie des Mondes
$M_{\odot}$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne
m	kg	Masse
N [N_d)	–	Anzahl der drakonitischen Umläufe
$\mathbb{N}$		natürliche Zahlen
N_s	–	Brechungsindex (siehe Abschnitt 9.9)
N_0		Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Knotenumlauf [≈ pro Tag)
N_1		Restzahl an Umläufen pro Tag: ($N = N_0 K + N_1$)
N_2		natürliche Zahl ($N_0 = 2N_2$ oder $N_0 = 2N_2 - 1$)
N_3		natürliche Zahl ($N_1 = 2N_3$ oder $N_1 = 2N_3 - 1$)
n	Grad/s	oskulierende (= Keplersche) mittlere Bewegung $n = \sqrt{\mu / a^3}$
$\bar{n}$	Grad/s	mittlere mittlere Bewegung $\bar{n} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$
$\overline{n_0}$	Grad/s	mittlere mittlere Bewegung zur Epoche $t0$: $\overline{n_0} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$
n_a	Grad/s	anomalistische mittlere Bewegung
n_d	Grad/s	drakonitische mittlere Bewegung
n_t	Grad/s	tropische mittlere Bewegung
n_m	Grad/s	Meridian-bezogene mittlere Bewegung
n_S	Grad/s	synodische mittlere Bewegung
$n_{\odot}$	Grad/s	tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne
P	h oder s	Keplersche Umlaufzeit
P	-	Anzahl der Bahnebenen einer Walker Konstellation (T/P/F)
P_a	h oder s	anomalistische Umlaufzeit
P_d	h oder s	drakonitische Umlaufzeit

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
P_j	d	julianisches Jahr (zu 365.25 mittleren Sonnentagen)
P_m	h oder s	Meridian-bezogene Umlaufzeit
P_S	h oder s	synodische Umlaufzeit
P_s	h oder s	siderische Umlaufzeit
P_t	h oder s	tropische Umlaufzeit
$P_{\odot,s}$	a oder d	siderisches Jahr (siehe auch $P_\odot, s$)
$P_{\odot,t}$	a oder d	tropisches Jahr (siehe auch $P_\odot, t$)
$P_{\mathbb{C},a}$	d oder h	anomalistischer Monat
$P_{\mathbb{C},d}$	d oder h	drakonitischer Monat
$P_{\mathbb{C},s}$	d oder h	siderischer Monat
$P_{\mathbb{C},S}$	d oder h	synodischer Monat
$P_{\mathbb{C},t}$	d oder h	tropischer Monat
p	km	Bahnparameter, Parameter des Kegelschnitts [semilatus rectum)
p	mbar	Druck (siehe Abschnitt 9.9)
$\mathbf{p}_i$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ \ (1 = 1, 2, 3)$, $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$
q	km	Perigäumsdistanz
$\mathbf{q}_0$		transversaler Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0$
$\mathbf{q}_j$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j \ \ (i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(A)}$		Kartesische Basis des Antennensystems
$\mathbf{q}_j^{(E)}$		Kartesische Basis des Ekliptik Systems
$\mathbf{q}_j^{(G)}$		Kartesische Basis des geographischen und des Greenwich bezogenen Koordinatensystems
$\mathbf{q}_j^{(H)}$		Kartesische Basis des topozentrischen Horizontsystems
$\mathbf{q}_j^{(I)}$		Kartesische Basis des mitgeführten (= mitbewegten) Koordinatesystems („Hansen“ System)
$\mathbf{q}_j^{(K)}$		Kartesische Basis des Knotensystems (drakonitisches System)
$\mathbf{q}_j^{(M)}$		Kartesische Basis des (geozentrischen oder topozentrischen) Koordinatensystems

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{q}_j^{(P)}$		Kartesische Basis des Apsidensystems (anomalistisches System, Perigäum bezogenes System)
$\mathbf{q}_j^{(S)}$		Kartesische Basis eines satellitenzentrierten Systems
$\mathbf{q}_j^{(T)}$		Kartesische Basis des Tangenten bezogenen Systems
Q		Überlappungsfaktor
R	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche
$\mathbb{R}$	---	Relle Zahlen
R'	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche
R_E	km	mittlerer Äquatorradius der Erde
R_G		Gravitationspotential
R_Q	km	Querkrümmungsradius des Ellipsoids
R_φ	km	Radius des Parallelkreises unter der Breite φ
r	km	zentrische Distanz („Radius“) eines Satelliten oder Raumflugkörpers
r_{32H}	[km], [AE]	Radius der Hillschen Gravitationssphäre (um einen Körper m_2 im eingeschränkten Dreikörperproblem)
r_A	km	Apozentrumsdistanz
r_F	km	antifokaler Radius ($r_F = 2a - r$)
r_P	km	Perizentrumsdistanz
r_g	km	Radius der geostationären Bahn
r_{g0}	km	Näherungswert für rg
r_K	km	Radius der Attraktionssphäre
r_0	km	Abstand des Mittelpunktes der Attraktionssphäre vom Mittelpunkt des Ablenkkörpers
$\mathbf{r}$	km	Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (absoluter)
$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{p}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (relativ zum pi -System) $\left(\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i\right)$
$\ddot{\mathbf{r}}$	km/s^2	Beschleunigungsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}_0$		radialer Richtungsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$
s	km	Bogenlänge

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
T	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$
T	C (oder Kelvin)	Temperatur (siehe Abschnitt 9.9)
T	-	Anzahl der Satelliten in einer Walker Konstellation (T/P/F)
T	kg km^2/s^2	kinetische Energie
T		Tensor
T_0	Jhrh.	Zeit einer Koordinatenepoche in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0 $\Leftrightarrow$ $JD = 2451545.0$
T_d	s	Wiederholungsdauer $T_d = N_d\, P_d$
T_m	h	mittlere Sonnenzeit
T_w	h	wahre Sonnenzeit
T_λ	h	mittlere Ortssonnenzeit für Meridian der (östlichen) geographischen Länge λ
T_Ω	h	mittlere Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten
t	s	Zeit
t_0	s	Epochezeit (U.T.)
t_Ω	s	Zeit (U.T.) im aufsteigenden Knoten
t	km	Tangente
U	kg km^2/s^2	potentielle Energie (Potential)
u	km/s	Geschwindigkeit einer Rakete in Bezug auf ein Ruhesystem (im Rahmen der spez. Relativitätstheorie)
u	Grad	Argument der Breite $(u = \upsilon + \omega)$
u	km/s	Betrag des Geschwindigkeitsvektors **u**
u_1, u_2, u_3, u_4,	---	*Gauß-Rodrigues* Parameter („*Euler* Parameter“)
V	km/s	Geschwindigkeit
$\mathbb{V}$	---	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	---	n-dimensionaler Vektorraum
V_A	km/s	Geschwindigkeit im Apozentrum der Bahn
V_A	km/s	Drehgeschwindigkeit des Äquators mit der Rotation des Zentralkörpers
V_B	km/s	Drehgeschwindigkeit eines Breitenkreises mit der Rotation des Zentralkörpers
V_E	km/s	elliptische Geschwindigkeit

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
V_e	km/s	Austritts – Geschwindigkeit der Treibgase eines Raketenmotors
V_F	km/s	Fluchtgeschwindigkeit (= Entweichgeschwindigkeit, = parabolische Geschwindigkeit im Perizentrum)
V_{g}	km/s	Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers
V'_{g0}	km/s	scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Äquatorüberflug auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V'_{gB}	km/s	Scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Überflug eines Breitenkreises auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V_H	km/s	hyperbolische Geschwindigkeit
V_K	km/s	Kreisbahngeschwindigkeit
V_P	km/s	Geschwindigkeit im Perizentrum der Bahn
V_R	km/s	radiale Geschwindigkeit
V_T	km/s	transversale Geschwindigkeit
V_{TC}	km/s	Konstanter (ungestörter) Anteil der transversalen Geschwindigkeit einer Keplerbewegung $V_C := \dfrac{G}{p}$, $V_T = V_{TC} + eV_C \cos\upsilon$
$V_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$	km/s	Geschwindigkeit der Erde um die Sonne
V_∞	km/s	asymptotische Geschwindigkeit
ν	Grad	wahre Anomalie
ν_F	Grad	antifokale Anomalie
ν_∞	Grad	asymptotische Anomalie (= hyperbolischer Exzess)
$\mathbf{v}_i$		begleitendes Dreibein
$\dot{\mathbf{v}}_q$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{q}_j$ – System $\left(\dot{\mathbf{v}}_q = \ddot{y}^j\,\mathbf{q}_j\right)$
$\dot{\mathbf{v}}_p$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{p}_i$ – -System$\left(\dot{\mathbf{v}}_p = \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{v}_1$		Tangentialvektor $\dot{\mathbf{r}} = V\,\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$		Hauptnormalenvektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$		Binormalenvektor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_0$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_{e0}$	km/s	Austrittsgeschwindigkeit von Raketentreibstoff [in Bezug auf ein bewegtes bzw. ruhendes System)
W	km	Überdeckungsstrecke
W_d		Wochentag (0 – Montag, 1 – Dienstag, 2 – Mittwoch, 3 – Donnerstag, 4 – Freitag, 5 – Samstag, 6 – Sonntag)
W_0	km	Überdeckung des Äquators
W_φ	km	Überdeckung eines Breitenkreises
$W_{\lambda\Omega}$	km	Distanz auf Äquator, die $\Delta\lambda_\Omega$ entspricht
$\mathbf{x}$	km, km/s	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_m\left[t; t_0\right]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t in Koordinaten, die auf den mittleren Äquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Epoche $t0$ bezogen sind
$\mathbf{x}_w\left[t\right]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t in Koordinaten, die auf den wahren momentanen Äquator und den wahren momentanen Frühlingspunkt bezogen sind
$\mathbf{x}_T$	km, km/s	topozentrischer Zustandsvektor
$x_{,j}$		kovariante Ableitung: $x_{,j} := \dfrac{\partial x}{\partial y^j}$, wenn $x = x\left(y^j\right)$
$x^i_{\ ,j}$		kovariante Ableitung: $x^i_{\ ,j} := \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$, wenn $x^i = x^i\left(y^j\right)$
$\mathbf{x}_{,j}$		kovariante Ableitung: $\mathbf{x}_{,j} := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^j}$, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(y^j\right)$
$t^{ij}_{\ \ ,l}$		kovariante Ableitung: $t^{ij}_{\ \ ,l} := \dfrac{\partial t^{ij}}{\partial y^l}$, wenn $t^{ij} = t^{ij}\left(y^l\right)$
Y		*Euler*winkel
Y	d	Jahr (bürgerliches Datum)
Y_B	d	*Bessel*sches Jahr (annus fictus)
Y_sid	d	siderisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,s}$)
Y_trop	d	tropisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,t}$)
Z	Grad, Min	Zeitgleichung
z	Grad	Zenitdistanz ($z = 90° - h$)
z_A	”	$90° + z_A \triangleq$ Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit $T0$ auf dem mittleren Äquator zur Zeit T [siehe auch ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)

Griechische Symbole

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
α	Grad	Rektaszension
α	–	$\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ (nur in Kapitel 8.17)
α_h	Grad	Steigungswinkel der Asymptote einer hyperbolischen Bahn
α_Ω	Grad	knotenbezogene Rektaszension $\alpha_\Omega(t) = \sigma_i \left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]$
$\alpha_\odot$	Grad	Rektaszension der wahren Sonne
$\overline{\alpha_\odot}$	Grad	Rektaszension der mittleren Sonne
$\alpha_{\bar{\odot}}$	Grad	Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne
β	Grad	Nadirwinkel
β	---	β=V/c im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (V = Geschwindigkeit des bewegten Inertialsystems, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)
β	---	$\beta := \left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right) / e = e / \left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)$, e = numerische Exzentrizität [im Rahmen von *Bessel* Funktionen)
β_g	Grad	Grenznadirwinkel an kugelförmige Oberfläche
β'_g	Grad	Grenznadirwinkel an Rotationsellipsoid
β_N	Grad	Sonneneinfallswinkel in Satellitenbahnebene (Komplement zum Sonnenaspektwinkel $\triangleq$ NASA Beta-Winkel $= \beta_N = 90° - \sigma$
$\Gamma_\odot$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne $\Gamma_\odot = \omega_\odot + \Omega_\odot$
$\Gamma^l{}_{ik}$		*Christoffel*symbol, gemischtvariantes (einfach kontravariant, zweifach kovariant) (= *Christoffel*symbol der zweiten Art) $\Gamma^l{}_{jk} := \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^i \partial y^k}$
γ	Grad	Zentralwinkel
Γ_{nik}		*Christoffel*symbol, rein kovariant (= *Christoffel*symbol der ersten Art) $\Gamma_{nik} := g_{nj} \Gamma^j{}_{ik}$
γ_g	Grad	Grenzzentralwinkel an kugelförmige Oberfläche

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
γ'_g	Grad	Grenzzentralwinkel an Rotationsellipsoid
γ_0	Grad	kürzester Zentralwinkel zwischen Sichtpunkt und Subsatellitenbahn
Δ	Grad	Überdeckung auf Äquator
Δ	Grad	Zwischenwinkel zwischen Radius und Tangente
Δ_φ	Grad	Überdeckung auf Parallelkreis φ
Δa_a	km	Korrektur zu a_a
Δa_d	km	Korrektur zu a_d
Δa_L	km	Korrektur zu a_L
Δa_R	km	Korrektur zu a_R
Δa_S	km	Korrektur zu a_S
Δa_t	km	Korrektur zu a_t
Δa_{ss}	km	Korrektur zu a_{ss}
Δa_g	km	Korrektur zu a_g
Δr_{g0}	km	Korrektur zu r_{g0}
Δt	s, h	Zeitintervall
Δu	Grad	Intervall im Argument der Breite während des Zeitintervalls Δt
ΔV	km/s	Geschwindigkeitsinkrement
ΔV_{char}	km/s	charakteristische Geschwindigkeit (für Manöver bei Bahnänderungen)
$\Delta\alpha$	”	Gleichung der Äquinoktien (Nutation in Rektaszension) $\Delta\alpha = \Delta\psi \cos\varepsilon$
$\Delta\delta$	”	Nutation in Deklination
$\Delta\varepsilon$	”	Nutation in Schiefe
$\Delta\lambda_k$	Grad	Toleranz-Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Spurstabilität
$\Delta\lambda_\Omega$	Grad	Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\lambda_{K\Omega}$	Grad	Knotenlängenrestverschiebung nach K Umläufen der Knotenlänge
$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	Grad	Spurfehler = Fehler der mittleren geographischen Länge des aufsteigenden Knotens infolge von Variationen in den Anfangsbahnelementen

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}$	Grad	Spurfehler beim *N*-ten Überflug des aufsteigenden Knotens
$\Delta\tau_k$	s	Toleranz-Zeitintervall für Zeitstabilität
$\Delta\tau_\Omega$	Grad	Verschiebung des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\psi$	”	Nutation in Länge
δ	Grad	Deklination
δ_h	Grad	Umlenkwinkel einer hyperbolischen Bewegung
$\delta_i^{\,j}$		*Kronecker*symbol $\delta_i^{\,j}=0$ für $i=j$, $\delta_i^{\,j}\neq 0$ für $i\neq j$ [*Kronecker*-tensor der zweiten Stufe)
$\delta_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n}$		*Kronecker*tensor der (2*n*)-ten Stufe
δ_m	Grad	Deklination des Grenzparallelkreises für Überdeckung
$\delta_\odot$	Grad	Deklination der wahren Sonne
$\overline{\delta_\odot}$	Grad	Deklination der mittleren Sonne
$\delta_{\bar{\odot}}$	Grad	Deklination der fiktiven mittleren Sonne
$\delta\mathbf{a}\left[t,t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in a zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
δa_l	Grad	langperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta a_l=\delta a\left[t,t_0\right]_l$
δa_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta a_k=\delta a\left[t,t_0\right]_k$
$\delta\mathbf{a}\left[t,t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein Keplerelement $\mathbf{a}=\{a,e,i,\Omega,\omega,M_0\}$
$\delta\mathbf{E}\left[t,t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein beliebiges Bahnelement zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
$\delta e\left[t,t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
δe_l	Grad	langperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta e_l=\delta e\left[t,t_0\right]_l$
δe_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta e_k=\delta e\left[t,t_0\right]_k$
$\delta i\left[t,t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
δi_l	Grad	langperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta i_l = \delta i\left[t, t_0\right]_l$
δi_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta i_k = \delta i\left[t, t_0\right]_k$
$\delta M_0\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *M*0 bezogen auf die Epoche *t*0
δM_l	Grad	langperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta M_l = \delta M\left[t, t_0\right]_l$
δM_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta M_k = \delta M\left[t, t_0\right]_k$
$\delta P\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *P*
$\delta\Omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
$\delta\Omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\Omega_l = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\Omega_{lG}$	Grad	Langperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\Omega_{lG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{lG}$
$\delta\Omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\Omega_k = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\Omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\Omega_{kG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in ω bezogen auf die Epoche *t*0
$\delta\omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\omega_l = \delta\omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\omega_{lG}$	Grad	langperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\omega_{lG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{lG}$
$\delta\omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\omega_k = \delta\omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta\omega_{kG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\lambda_\Omega\left[t_1, t_2\right]$	Grad	Änderung der Knotenlänge im Zeitintervall *t*1 bis *t*2

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ε	Grad	wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$
$\overline{\varepsilon}$	Grad	mittlere Schiefe der Ekliptik
$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kovariant
$\varepsilon^{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kontravariant
ζ	Grad	Bahnwinkel (wahre Länge in der Bahn, erster *Hansen* Winkel) $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma$
ζ_A	”	$90° + \zeta_A$ = Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit *T* auf dem mittleren Äquator zur Zeit *T*0 (siehe auch z_A; benötigt zur Berechnung der Präzession) (siehe Abschnitt 9.3)
Θ	Grad	Sternzeit (lokale, mittlere)
$\Theta*$	Grad	scheinbare Sternzeit $(\Theta* = \Theta + \Delta\psi\cos\varepsilon)$
Θ_A	”	Inklination des mittleren Äquators zur Zeit *T*0 bezüglich des mittleren Äquators zur Zeit *T* (siehe auch z*A*, ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)
Θ_G	Grad	Sternzeit in Greenwich [mittlere), bezogen auf Nullmeridian, zu beliebiger (mittlerer) Tageszeit
Θ_0	Grad	lokale Sternzeit (mittlere) zur Epoche *t*0
$\dot{\Theta}$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit eines Zentralkörpers
ϑ	Grad	Stundenwinkel
ϑ	Grad	Winkel zwischen Wellenfront und Bewegungsrichtung des Bezugssystems (nur in Kapitel 9)
$\vartheta_\odot$	Grad	Stundenwinkel der wahren Sonne
$\overline{\vartheta_\odot}$	Grad	Stundenwinkel der mittleren Sonne
$\vartheta_{\bar{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne (auf Äquator)
η	Grad	Auslenkung einer Welle (nur in Abschnitt 9.7)
η	Grad	Drehwinkel der Bahnebene bei beliebiger Bewegung [zweiter Bahnwinkel im *Hansen*-System)
κ	1/km	Krümmung
κ	Grad	Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9)
κ_g	Grad	Grenz-Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9)
λ	Grad	östliche geographische Länge

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
λ_Ω	Grad	geographische Länge des aufsteigenden Knotens [positiv nach Ost)
$\lambda_{K\Omega}$	Grad	Länge bezogen auf den wahren Knoten $\lambda_{K\Omega}(t) = \sigma_i \left[\lambda_\Omega(t_\Omega) - \lambda(t)\right]$
$\dot{\lambda}_\Omega$	Grad/s	Variation der Knotenlänge
$\dot{\lambda}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift der Knotenlänge
λ_O	Grad	östliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
λ_W	Grad	westliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
μ	km^3/s^2	zentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse des Zentralkörpers)
μ_α	”	Präzession in Rektaszension
μ_δ	”	Präzession in Deklination
π		Kreiszahl (π = 3.14159265358979323846264338327950288419 71…)
π_1	”	Parallaxe
π_2	”	Parallaxe
$\pi_{B,1}$	”	Parallaxe
$\pi_{E,1}$	”	Parallaxe
ρ	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf kugelförmiger Oberfläche des Zentralkörpers
ρ'	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
σ	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–Sonne
σ	Grad	Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf Anfangspunkt eines Hansen Systems $\left(\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i\right)$
$\bar{\sigma}$	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–mittlere Sonne
σ_i		relative Bewegungsrichtung der Bahn: $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)\right)$ $\sigma_i = 1 \triangleq$ rechtläufig, $\sigma_i = -1 \triangleq$ rückläufig
τ	Grad	Sonnenwinkel $(\tau = \alpha - \alpha_\odot) \triangleq$ Argument des sonnenbezogenen synodischen Umlaufs (auf dem Äquator)
τ	1/km	Torsion

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
τ_G	Grad	Sonnenwinkel ($\tau = \Theta_G - \alpha_\odot$) des Nullmeridians (Greenwich)
$\overline{\tau}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel ($\overline{\tau} = \alpha - \alpha_{\overline{\odot}}$), bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
τ_Ω	Grad	Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens ($\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$)
$\overline{\tau_\Omega}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens ($\overline{\tau_\Omega} = \overline{\Omega} - \alpha_{\overline{\odot}}$), bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
$\dot{\tau}_\Omega$	Grad/s	Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens
$\dot{\tau}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens
Φ	Grad	Phase (nur in Kapitel 9)
Φ		Pseudo Potential (nur in Kapitel 2)
Φ_H		Pseudo Potential im *Hill*schen Spezialfall (nur in Kapitel 2)
φ	Grad	geodätische Breite
φ'	Grad	geozentrische Breite
χ	Grad	geozentrische Elongation Satellit–Sonne
χ	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch die Abplaatung des Zentralkörpers (in Abschnitt 2.9)
$\overline{\chi}$	Grad	geozentrische Elongation Satellit–mittlere Sonne
ψ	Grad	Bahnwinkel in einem Bahnsystem, das kein *Hansen* System ist
ψ	Grad	Depressionswinkel ($\psi = 90° - \beta$)
$\psi_\odot, \psi_\leftmoon$	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch Sonnen- bzw. Mondattraktion (in Abschnitt 2.9)
Ω	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens
$\Omega_{\overset{+}{\odot}}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der Erdbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_\leftmoon$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_\odot$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der (scheinbaren) Sonnenbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\dot{\Omega}_s$	Grad/s	säkulare Störung in Ω
ω	Grad	Argument des Perizentrums
ω	–	Kreisfrequenz (nur in Kapitel 9)

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ω_A	Grad/s	Rotationswinkelgeschwindigkeit des Äquators bei Eigenrotation des Zentralkörpers
ω_E	Grad/s	Erdrotation (siderisch)
ω_l	Grad	säkularer und langperiodischer Störungsanteil im Argument des Perizentrums ω $(\omega_l := \bar{\omega} + \delta\omega_l)$
$\omega_{\sphericalangle}$	Grad	Argument des Perihels der Erdbahn um die Sonne
$\omega_{\odot}$	Grad	Argument des Perigäums der [scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\dot{\omega}_s$	Grad/s	Säkulare Störung in ω
$\tilde{\omega}$	Grad/s	Länge des Perizentrums $\tilde{\omega} = \omega + \sigma_i \Omega$

Indizes

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
A	Apozentrum (Apogäum, Aphel)
a	anomalistisch (bezogen auf das Perizentrum)
B	Attraktion durch dritte Körper
D	Luftwiderstand
d	drakonitisch (bezogen auf den aufsteigenden Knoten)
E	Entweich (nur bei Fluchtgeschwindigkeit *VE*)
G	Greenwich (Nullmeridian)
G	Schwerefeld des Zentralkörpers
g	geostationär
H	Hyperbel (hyperbolisch)
K	Kreis, kreisförmig
k	kurzperiodisch
l	langperiodisch
m	bezogen auf einen Meridian
m	mittlerer Wert von …
N	Nutation
PAR	Parabel, parabolisch

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
P	Präzession
P	Perizentrum [Perigäum, Perihel)
R	Strahlungsdruck
R	radial
S	synodisch [bezogen auf einen anderen Körper)
s	säkular
ss	sonnensynchron
T	transversal
t	tropisch [bezogen auf den [mittleren) Frühlingspunkt)
w	wahrer Wert von …
0	Epoche
0	bei Vektoren: Einheitsvektor
λ	Längenkreis der Länge λ
Ω	… des aufsteigenden Knotens
φ	Breitenkreis der Breite φ
♁	… der Erde
☾	… des Mondes
☉	… der Sonne
$\bar{\odot}$	… der fiktiven mittleren Sonne
♀	… der Venus
♂	… des Mars
♃	… des Jupiter
♄	… des Saturn
♆	… des Neptun
♈	… des Frühlingspunktes

Mathematische Symbole

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbb{A}_n$	endlich dimensionaler affiner Punktraum

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbb{E}_n$	endlich dimensionaler euklidischer Punktraum
$\mathbb{M}$	Metrischer Raum
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}_n$	Tangentialraum an einen n-dimensionalen Punktraum [$\mathbb{A}_n$ oder $\mathbb{E}_n$)
$\mathbb{V}$	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	endlicher Vektorraum (n-dimensionaler Vektorraum)
$\mathbb{V}_{En}$	endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum
$:=$	Definition eines Ausdrucks BEISPIEL: $g_1 := V\cos\zeta_A$, die Größe g_1 wird durch den rechts stehenden Ausdruck definiert
$\in$	Element von …
$\mathbf{a}$	Vektor
T	Tensor
$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$	tensorielles Produkt
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$	äußeres Produkt $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\left(a_i{}^j\right)$	Matrix mit Reihenindex *i*, Spaltenindex *j*
$\det\left(a_i{}^j\right)$	Determinante der Matrix $\left(a_i{}^j\right)$
$[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Richtungsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $[\lambda, \varphi] := \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$r[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Ortsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $\mathbf{x} \Leftrightarrow r[\lambda, \varphi] := r\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^i)$	Vektorfeld mit den Koordinaten x^i [i te Koordinate [kein Exponent, *Einstein*sche Schreibweise])
$\mathbf{r}_{,i}$	[partielle) Ableitung eines Vektorfeldes nach der i-ten Koordinate: $\mathbf{r}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$
$x^i{}_{,j}$	[partielle) Ableitung eines Skalarfeldes $x^i = x^i\left(y^j\right)$ nach der j-ten Koordinate: $x^i{}_{,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$
$[A, h]$	Horizontsystem
$[\alpha, \delta]$	bewegliches Äquatorsystem [Bezug Frühlingspunkt)
$[\vartheta, \delta]$	festes Äquatorsystem [Bezug Ortsmeridian)
$[\lambda, \delta]$	geozentrisches System [Bezug Nullmeridian)
$[\lambda, \varphi]$	geographisches System [Bezug Nullmeridian)
$[A_x, h_x]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„x-System“)
$[A_y, h_y]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„y-System“)
$[l, b]$	ekliptikales System
$[l_{II}, b_{II}]$	galaktisches System [neu)
$[\lambda, \varphi] \xrightarrow{A, B, C} [\alpha, \delta]$	Darstellung einer Rotation: Ein Einheitsvektor $[\lambda, \varphi]$ im λ,φ - System wird durch Drehung um die Winkel *A*, *B*, *C* [in dieser Reihenfolge) in den Einheitsvektor $[\alpha, \delta]$ des α,δ - Systems transformiert.
$A \in [0°, 180°)$	Beispiel für ein links geschlossenes, rechts offenes Intervall
O	Ordnung einer Funktion: In $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon)$ ist $O(\varepsilon)$ ein Restterm der Form $\varepsilon \mathbf{R}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, wobei R von $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0$ und ε abhängig ist.

Astronomische Symbole

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
♁	Erde
☉	Sonne
☉̄	fiktive mittlere Sonne

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
☾	Erdmond
☿	Merkur
♀	Venus
♂	Mars
♃	Jupiter
♄	Saturn
♆	Neptun
⛢	Satellit / Orbiter
♈	Frühlingspunkt

Abbildungsverzeichnis

BILD 4-1: KOORDINATEN EINES PUNKTES IM BASISSYSTEM $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 22

BILD 4-2: POL *C* EINES GROßKREISES MIT KNOTEN A_0 UND NEIGUNG B_0 25

BILD 4-3: HILFSSYSTEM ZUR DARSTELLUNG EINER BEWEGUNG $\mathbf{r}_0, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ 27

BILD 4-4: DAS BASISSYSTEM DES POLARKOORDINATENSYSTEMS ALS BEISPIEL FÜR EIN KRUMMLINIGES KOORDINATENSYSTEM 42

BILD 4-5: ZUR DEFINITION DES „IDEALEN KOORDINATENSYSTEMS“: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ - BEWEGUNGS-UNABHÄNGIGES INERTIALSYSTEM (*NEWTON*-SYSTEM, BLAU), $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ – MITBEWEGTES SYSTEM (*LEIBNIZ*-SYSTEM, ROT), $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)}$ – BEWEGUNGS-BEZOGENES KOORDINATENSYSTEM („IDEALES“ *HANSEN*-SYSTEM, GRÜN), $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_0$ – KNOTEN-BEZOGENES KOORDINATENSYSTEM, $\mathbf{d}_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{c}_0$ – APSIDEN-BEZOGENES KOORDINATENSYSTEM, ♈ - FRÜHLINGSPUNKT, *O* BEZUGSPUNKT DES BEWEGUNGSBEZOGENEN SYSTEMS („DEPARTURE POINT“ DES *HANSEN*-SYSTEMS), S ORT DES BEWEGTEN OBJEKTES, ☊ - AUFSTEIGENDER KNOTEN, P- PERIZENTRUM (PERIHEL, PERIGÄUM), Ω REKTASZENSION (LÄNGE) DES AUFSTEIGENDEN KNOTENS, *I* - INKLINATION, σ -LÄNGE IN DER BAHN DES AUFSTEIGENDEN KNOTENS, ζ - BAHNWINKEL (ERSTER *HANSEN* WINKEL), ω - ARGUMENT DES PERIZENTRUMS, υ - WAHRE ANOMALIE 59

BILD 4-6: TANGENTE UND KONKAVE SEITE EINER RAUMKURVE 65

BILD 4-7: RADIALER UND TRANSVERSALER GESCHWINDIGKEITSANTEIL 68

BILD 4-8: DAS MITGEFÜHRTE $\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{C}_0$ - BAHNSYSTEM UND DER BAHNWINKEL ζ SOWIE DAS BEWEGUNGSBEZOGENE *HANSEN*-IDEALE $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)}$ – SYSTEM 71

BILD 4-9 : ZUR GEOMETRISCHEN DEUTUNG DER ZWEITEN WINKELKOORDINATE η IM MITBEWEGTEN BAHNSYSTEM 76

BILD 5-1: BESCHREIBUNG EINER BELIEBIGEN BEWEGUNG DURCH ANPASSUNG MIT EINER GERADLINIGEN BEWEGUNG 90

BILD 5-2: ZUR BESCHREIBUNG DER GERADLINIGEN BEWEGUNG. DIE „BAHNEBENE“ WIRD DURCH DIE GERADE UND DEN (WILLKÜRLICHEN!) BEZUGSPUNKT M AUFGESPANNT 92

BILD 5-3: ZUR VERKNÜPFUNG DER PARAMETER ζ_P UND C_2 *DER* GERADLINIGEN BEWEGUNG. O – ANFANGSPUNKT EINES *HANSEN* SYSTEMS MIT ANFANGSVEKTOR $\mathbf{q}_1^{(I)}$ 93

BILD 5-4: ZUR GEOMETRISCHEN VERANSCHAULICHUNG DER MATHEMATISCHEN BESCHREIBUNG EINER GERADLINIGEN BEWEGUNG: S – ORT DES LÄNGS DER GERADEN BEWEGTEN OBJEKTES MIT ORTSVEKTOR R UND RADIUS R IN BEZUG AUF EINEN (WILLKÜRLICHEN) BEZUGSPUNKT M, MIT GESCHWINDIGKEITSVEKTOR $\dot{\mathbf{r}}$, P – PERIZENTRUM, O – ANFANGSPUNKT EINES *HANSEN*-SYSTEMS MIT ANFANGSRICHTUNG $\mathbf{q}_1^{(I)}$, ζ *HANSEN*SCHER BAHNWINKEL, ζ_P - *HANSEN*SCHER PERIZENTRUMSWINKEL, S=G/C1 BOGENLÄNGE ALS ABSTAND DES ORTES S VOM PERIZENTRUM P 94

BILD 5-5: DER FLÄCHENSATZ IM FALL DER GLEICHFÖRMIG GERADLINIGEN BEWEGUNG 96

BILD 5-6: DIE BASISVEKTOREN DES $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *HANSEN* SYSTEMS (GRÜN) BEI GERADLINIGER BEWEGUNG, DIE DURCH DEN ZUSTANDSVEKTOR $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ DEFINIERT IST, UND DURCH DAS MITGEFÜHRTE $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – *LEIBNIZ*SYSTEM (ROT) CHARAKTERISIERT WIRD 98

BILD 5-7: GEOMETRISCHE DEUTUNG DER INTEGRATIONSKONSTANTEN DER GERADLINIGEN BEWEGUNG. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ SIND KONSTANTE HILFSVEKTOREN 98

BILD 5-8: ZUR GEOMETRISCHEN DEUTUNG DER BESCHLEUNIGUNGEN BEI ANPASSUNG DER BEWEGUNG MIT EINER KURVE ERSTER ORDNUNG: AUF DAS BEWEGTE OBJEKT WIRKEN IN DER OSKULIERENDEN DURCH DEN

ZUSTANDSVEKTOR $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ AUFGESPANNTEN BAHNEBENE BESCHLEUNIGUNGEN IN RADIALER (B_R) UND TRANSVERSALER (B_T) RICHTUNG 104
BILD 5-9: SCHEMA ZUR ANPASSUNG EINER BELIEBIGEN BEWEGUNG DURCH EINE GERADLINIGE BEWEGUNG 106
BILD 5-10: ANPASSUNG EINER ELLIPSE DURCH EINE GERADEN G FEST VORGEGEBEN IST DER BEZUGSPUNKT E IN EINEM BRENNPUNKT DER ELLIPSE UND DIE PERIZENTRUMSDISTANZ R_P DER ELLIPSE, P_E DAS PERIZENTRUM DER ELLIPSE, P_G DAS PERIZENTRUM DER (ANPASSUNGS)-GERADEN, S IST DIE POSITION DES BEWEGTEN OBJEKTES 118
BILD 5-11: VERLAUF VON GESCHWINDIGKEIT V(ζ) (LINKE KURVE) UND VON RADIUS R(ζ) (RECHTS, OBERE KURVE, GRÜN) UND PERIGÄUMSDISTANZ $R_P(\zeta)$ (RECHTS UNTERE KURVE, ROT) ÜBER EINEN UMLAUF LÄNGS DER ELLIPSE, GERECHNET MIT DEN FORMELN DER GERADLINIGEN BEWEGUNG 121
BILD 5-12: VERLAUF DES DIFFERENZWINKELS $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_P$ DETAILLIERT ÜBER EINEN HALBEN UMLAUF (LINKE KURVE) UND DEN GANZEN UMLAUF (RECHTE KURVE) 121
BILD 5-13: ANPASSUNG EINER GERADEN G DURCH KEGELSCHNITTE: FEST VORGEGEBEN IST DER BEZUGSPUNKT E IN EINEM BRENNPUNKT DER ELLIPSE, DIE PERIZENTRUMSDISTANZ R_P UND DER PERIGÄUMSWINKEL ζ_P. ANPASSUNG IM PERIGÄUM DER GERADEN DURCH ELLIPSE (BLAU), FÜR BAHNWINKEL ζ=20° DURCH HYPERBEL H (GRAU), BEZUG AUF *HANSEN* SYSTEM (GRÜN) 123
BILD 5-14: VERLAUF DER EXZENTRIZITÄT $e(\zeta)$ (LINKE KURVE) UND PERIGÄUMSDISTANZ $\zeta_K(\zeta)$ (RECHTS) DER BEWEGUNG LÄNGS DER GERADEN (MIT V=8 KM/S, R_P =9000KM, ζ_A=40°) 124
BILD 5-15: VERLAUF DES RADIUS $R(\zeta)$ (LINKE KURVE) UND PERIGÄUMSDISTANZ $R_{PK}(\zeta)$ (RECHTS) DER BEWEGUNG LÄNGS DER GERADEN (MIT V=8 KM/S, R_P =9000KM, ζ_P=40°) 125
BILD 5-16: HYPERBOLISCHE SPIRALE (N = 2) MIT $G = 1.0$, $C = -1.0$, $\zeta_H = 20°$ 127
BILD 5-17:: ARCHIMEDISCHE SPIRALE (N = 0) MIT $G = 1.0$, $C = 1.0$, $\zeta_A = 20°$ 128
BILD 5-18: LOGARITHMISCHE SPIRALE (N=1) MIT $G = 5.0$, $C = 1.0$, $\zeta_L = 20°$ 130
BILD 5-19: DREIER-SPIRALE (N = 3) MIT $G = 5.0$, $C = -1.0$, $\zeta_3 = 50°$ 133
BILD 5-20: ANPASSUNG VON GERADE AN KREIS 136
BILD 5-21 : SCHEMATISCHER ÜBERBLICK ÜBER DIE METHODE DER SUKZESSIVEN APPROXIMATION ZUR MATHEMATISCHEN BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGSVORGÄNGEN IN DER ASTRODYNAMIK 151
BILD 5-22: FORMALER ÜBERBLICK ÜBER DIE METHODE DER SCHRITTWEISEN ANPASSUNG ZUR BESCHREIBUNG EINES BELIEBIGEN BEWEGUNGSPROBLEMS 155
BILD 5-23: HOCHEXZENTRISCHE SATELLITENBAHN (E=0.75) MIT DRIFT DER APSIDENLINIE INFOLGE RADIALER BESCHLEUNIGUNG DURCH DIE ABPLATTUNG DES ZENTRALKÖRPERS. DER GEODYNAMISCHE TERM J_2 IST UM DEN FAKTOR 100 ÜBERHÖHT. DIE DARGESTELLTE BAHN VERLÄUFT IN DER ÄQUATOREBENE DES ZENTRALKÖRPERS. NUMERISCHE INTEGRATION DER VARIATIONSGLEICHUNGEN MIT GERADLINIGER ANPASSUNG IN BEZUG AUF EIN *HANSEN* SYSTEM 173
BILD 5-24: HOCHEXZENTRISCHE SATELLITENBAHN (E=0.75) MIT DRIFT DER APSIDENLINIE INFOLGE RADIALER BESCHLEUNIGUNG DURCH DIE ABPLATTUNG DES ZENTRALKÖRPERS. VERGLEICH DER MIT EINER NUMERISCHEN INTEGRATION DER VARIATIONSGLEICHUNGEN MIT GERADLINIGER ANPASSUNG IN BEZUG AUF EIN *HANSEN* SYSTEM ERZEUGTEN BAHN MIT EINER NÄHERUNG DURCH EINE REIHENENTWICKLUNG DER ORDNUNG 19 (GRÜNER KURVENVERLAUF). DER GEODYNAMISCHE TERM J_2 IST UM DEN FAKTOR 100 ÜBERHÖHT. DIE DARGESTELLTE BAHN VERLÄUFT IN DER ÄQUATOREBENE DES ZENTRALKÖRPERS. 174
BILD 5-25: VERLAUF EINER BAHNKURVE, DIE AUSSCHLIEßLICH DURCH EINE KONSTANTE RADIALE BESCHLEUNIGUNG GEPRÄGT IST. LINKES BILD: VERLAUF DER BAHNKURVE IM EBENEN BAHNSYSTEM, BEZOGEN AUF DEN URSPRUNG, DER LINKS IM BILD ZU DENKEN IST. RECHTES BILD: VERLAUF DES BAHNRADIUS ÜBER DEM BAHNWINKEL 175
BILD 5-26: KONSTANTER RADIALER SCHUB AUF RAUMFLUGKÖRPER AUS KREISFÖRMIGER ERDUMLAUFBAHN MIT RADIUS R_A=7000 KM, SCHUB $B_{RC} = 0.001$ KM/S^2. KEIN ENTKOMMEN AUS ERDUMLAUF. DAS BILD ZEIGT DEN VERLAUF DER BAHN UM DIE ERDE ÜBER 4.3 UMLÄUFE, DIE AUSGANGSBAHN IST PUNKTIERT EINGETRAGEN. INTEGRATION MIT FORMALISMUS DER GERADLINIGEN BAHN IM *HANSEN* SYSTEM 178
BILD 5-27: KONSTANTER RADIALER SCHUB AUF RAUMFLUGKÖRPER AUS KREISFÖRMIGER ERDUMLAUFBAHN MIT RADIUS R_A=7000 KM, SCHUB $B_{RC} = 0.00101685$ KM/S^2. FLUCHTBAHN. VERLAUF DER BAHN UM DIE ERDE ÜBER DEN BAHNWINKEL 4.457, FLUCHTBAHN. DIE KREISFÖRMIGE AUSGANGSBAHN IST PUNKTIERT EINGEZEICHNET. INTEGRATION MIT FORMALISMUS DER GERADLINIGEN BAHN IM *HANSEN* SYSTEM 178
BILD 5-28: KONSTANTER RADIALER SCHUB AUF RAUMFLUGKÖRPER AUS KREISFÖRMIGER ERDUMLAUFBAHN MIT RADIUS R_A=7000 KM, SCHUB $B_{RC} = 0.0011$ KM/S^2. FLUCHTBAHN. INTEGRATION MIT FORMALISMUS DER GERADLINIGEN BAHN IM *HANSEN* SYSTEM 179
BILD 6-1: DER VEKTOR DER ZENTRIFUGALBESCHLEUNIGUNG 196
BILD 6-2: PUNKTDARSTELLUNG IN GERADLINIG BEWEGTEN SYSTEMEN 199

BILD 6-3: BERECHNUNG VON KNOTEN UND INKLINATION EINES DURCH ZWEI SPHÄRISCHE PUNKTE GEGEBENEN GROßKREISES 202
BILD 6-4: ZUR HEURISTISCHEN HERLEITUNG DER VARIATIONSGLEICHUNGEN DER RÄUMLICHEN BEWEGUNG. A - BASISEBENE, B1 - BAHNEBENE OHNE VARIATION, B2 - BAHNEBENE MIT VARIATION 203
BILD 6-5: DREHUNG DES $\mathbf{p}_i$ – SYSTEMS (BLAUE BASISEBENE E_1, „ÄQUATOR“) IN DAS $\mathbf{q}_j$ – SYSTEM (GRÜNE BASISEBENE E_2, „BAHNEBENE“) UM DIE *EULER*WINKEL A („KNOTENLÄNGE“), B („INKLINATION“), C („LÄNGE DES URSPRUNGS IN DER BAHNEBENE“). $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ – KNOTENSYSTEM IN DER E_2-EBENE, $\mathbf{H}_2$-VEKTOR EIN HILFSVEKTOR ZUR DREHUNG DER E_1-EBENE UM DEN AUFSTEIGENDEN KNOTEN $\mathbf{K}_1$ IN DIE EBENE E_2 NACH $\mathbf{K}_2$. EINE SICHTRICHTUNG P (STERN, SATELLIT) HAT IM $\mathbf{p}_i$ – SYSTEM DIE RICHTUNGSWINKEL A, BEZOGEN AUF $\mathbf{P}_1$, UND B (BREITE), IM $\mathbf{q}_j$ – SYSTEM DIE RICHTUNGSWINKEL C, BEZOGEN AUF $\mathbf{Q}_1$, UND D (BREITE). DIE UMRECHNUNG DIESER WINKEL ERFOLGT IM „POLDREIECK“ P, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{Q}_3$. 204
BILD 6-6: ROTATION DER BAHNEBENE UM DIE SATELLITENPOSITION S MIT DEM WINKEL $\eta(1)$ ALS FOLGE EINER NORMALEN BESCHLEUNIGUNG AUF DIE BEWEGUNG VON S. O(0) ANFANGSPUNKT DES HANSEN SYSTEMS IM FALL OHNE EINWIRKUNG VON BESCHLEUNIGUNGEN („UNGESTÖRTER“ FALL) MIT KNOTEN $\Omega(0)$, O(1) ANFANGSPUNKT DES HANSEN SYSTEMS NACH DER EINWIRKUNG VON (NORMALEN) BESCHLEUNIGUNGEN („GESTÖRTER“ FALL) MIT KNOTEN $\Omega(1)$ 229
BILD 8-1: DAS FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM = GEOZENTRISCHES FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENES ÄQUATORSYSTEM MIT DEN WINKELKOORDINATEN REKTASZENSION α UND DEKLINATION δ 314
BILD 8-2: ZUR BESCHREIBUNG DER EIGENBEWEGUNG EINES ÄQUATORSYSTEMS 317
BILD 8-3: RELATIV BEWEGTE ÄQUATORSYSTEME 321
BILD 8-4: DAS GEOZENTRISCHE EKLIPTIKSYSTEM (GRUNDEBENE E, POL NE) UND DAS FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM (GRUNDEBENE A, POL N) 325
BILD 8-5: EKLIPTIK UND GALAKTISCHER ÄQUATOR VOR DEM STERNHINTERGRUND IN ÄQUATORIALEN KOORDINATEN, EN - EKLIPTIKALER NORDPOL, ES - EKLIPTIKALER SÜDPOL, GN - GALAKTISCHER NORDPOL, GS - GALAKTISCHER SÜDPOL 329
BILD 8-6: DAS GALAKTISCHE SYSTEM BEZOGEN AUF DAS FRÜHLINSPUNKT BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM 335
BILD 8-7: DAS GEOZENTRISCHE MERIDIAN - BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM = FESTES ÄQUATORSYSTEM 337
BILD 8-8: DAS GEOZENTRISCHE ERDFESTE SYSTEM (DAS „GREENWICH SYSTEM“) 343
BILD 8-9: BEZIEHUNGEN IM GEOGRAPHISCHEN SYSTEM (φ - GEODÄTISCHE BREITE, φ' - GEOZENTRISCHE BREITE, δ - DEKLINATION, R_Q - QUERKRÜMMUNGSRADIUS) 349
BILD 8-10: DAS HORIZONTSYSTEM, E_{rot} = ROTATIONSELLIPSOID, O = ERDOBERFLÄCHE (GEOID), Z_A = ASTRONOMISCHER ZENIT, Z = ELLIPSOIDISCHER ZENIT, T= TOPOZENTRUM, P = NORDPOL, T' = PROJEKTION VON T AUF ROTATIONSELLIPSOID, HOR' = TANGENTIALEBENE AN ROTATIONSELLIPSOID, HOR = LOKALE HORIZONTEBENE, N = NORDRICHTUNG AUF HORIZONTEBENE, S = SÜDRICHTUNG AUF HORIZONTEBENE, φ = GEODÄTISCHE BREITE, φ' = GEOZENTRISCHE BREITE, H' = HÖHE VON T ÜBER ROTATIONSELLIPSOID 361
BILD 8-11: ZUR HERLEITUNG DER BASISVEKTOREN DES HORIZONTSYSTEMS 364
BILD 8-12: BEZIEHUNGEN ZWISCHEN TOPOZENTRISCHEM HORIZONT- UND MERIDIAN-BEZOGENEM ÄQUATORSYSTEM (Z-ZENITH, N-NORDRICHTUNG, S-SÜDRICHTUNG AUF HORIZONT) 367
BILD 8-13: ZUR BERECHNUNG DES ZUSTANDSVEKTORS AUS EINSCHUSSELEMENTEN, A- LOKALES AZIMUT, H – LOKALE HÖHE („ELEVATION“ ÜBER LOKALEM HORIZONT), HOR – LOKALE HORIZONTEBENE DURCH SATELLITENORT SENKRECHT ZUM RADIUSVEKTOR, EQ – LOKALE ÄQUATOREBENE (PARALLEL ZUM ERDÄQUATOR) 372
BILD 8-14: TÄGLICHE BEWEGUNG DES STERNHIMMELS IM HORIZONTSYSTEM GESEHEN VON MÜNCHEN AUS UND PROJIZIERT AUF DAS TOPOZENTRISCHE BEWEGLICHE (= FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE) ÄQUATORSYSTEM (GERECHNET FÜR DEN 13./14. NOV. 2003, JEWEILS IM ABSTAND VON 3^H, AB 15^H U.T.) 375
BILD 8-15: ZUR DEFINITION EINES ANTENNENSYSTEMS (B – BARYZENTRUM DER SONNENSYSTEMS, T – ANTENNENSTANDORT AUF ERDOBERFLÄCHE, S – SATELLITEN- BZW. RAUMSONDENORT) 376
BILD 8-16: ZUR HERLEITUNG DER BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEM *LEIBNIZ*-SYSTEM UND DEM FRÜHLINGSPUNKBEZOGENEN ÄQUATORSYSTEM (DAS ALS FUNDAMENTALSYSTEM ANGESEHEN WIRD) 383
BILD 8-17: ZUR BESCHREIBUNG DES INKLINATIONSVEKTORS DER RELATIVBEWEGUNG 390
BILD 8-18: DAS BEWEGUNGSBEZOGENE BAHNSYSTEM (*HANSEN*-SYSTEM) 392
BILD 8-19: DAS APSIDENSYSTEM: P – PERIZENTRUM, S-BEOBACHTETES OBJEKT („SATELLIT“), A – FRÜHLINGSPUNKT, E – AUFSTEIGENDER KNOTEN, $\mathbf{p}_i$ - FRÜHLINGSPUNKT BEZOGENES ÄQUATORSYSTEM, $\mathbf{q}_j^{(P)}$ - APSIDENSYSTEM, □ - REKTASZENSION DES AUFSTEIGENDEN KNOTENS, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3^{(P)}$ -

KNOTENSYSTEM, H2 – HILFSVEKTOR FÜR KNOTENSYSTEM, $\mathbf{r}_0$ - RADIALER ORTSVEKTOR ZU OBJEKT S, I – INKLINATION, ω - ARGUMENT DES PERIZENTRUMS P, V – WAHRE ANOMALIE 399
BILD 8-20: DAS $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – APSIDENSYSTEM IN BEZUG AUF DAS $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ – *LEIBNIZ*-SYSTEM. υ-WAHRE ANOMALIE, E-BRENNPUNKT DER ELLIPSE („ERDMITTELPUNKT“) 403
BILD 8-21: DAS KNOTENSYSTEM 406
BILD 8-22: DAS TANGENTEN-BEZOGENE SYSTEM 411
BILD 8-23: DAS SATELLITENORIENTIERTE HORIZONTALSYSTEM (SATELLITENORIENTIERTES BASISSYSTEM, „X-SYSTEM“), S – SATELLITENORT (REFERENZORT FÜR SATELLITENSCHWERPUNKT), E – RICHTUNG ZUM ERDMITTELPUNKT 417
BILD 8-24: DIE WINKELBEZIEHUNGEN ZWISCHEN Y-SYSTEM UND X-SYSTEM 420
BILD 8-25: ZUR DARSTELLUNG DES Y-SYSTEMS IM X-SYSTEM 421
BILD 8-26: ZUR DARSTELLUNG DES X-SYSTEMS IM Y-SYSTEM 421
BILD 8-27: *EULER*WINKEL UND ORIENTIERUNGSWINKEL DER SATELLITENSYSTEME ZUR CHARAKTERISIERUNG DER WECHSELSEITIGEN BEZIEHUNGEN DER BEIDEN SATELLITENSYSTEME 427
BILD 8-28: POLDREIECK ZUR BERECHNUNG DER *EULER*WINKEL 428
BILD 9-1: VERGLEICH EINES STERNTAGES ZU EINEM SONNENTAG 447
BILD 9-2: DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN DERZEIT AKTUELLEN ZEITDEFINITIONEN (KOPIE AUS: SOFA[2010/2], P.11) 449
BILD 9-3: PARALLAXE π_1 UND GEOZENTRISCHE ENTFERNUNG R_1 [AU] EINES STELLAREN OBJEKTES Σ 452
BILD 9-4: BARYZENTRISCHE UND GEOZENTRISCHE EIGENBEWEGUNG, S_1, S_2 – STERN ZUM ZEITPUNKT T_1, T_2, B – BARYZENTRUM, $\mathbf{r}_{\oplus B2}$ – BARYZENTRISCHER ORTSVEKTOR DER ERDE ZUM ZEITPUNKT T_2 454
BILD 9-5: ZUR BESCHREIBUNG DER LUNISOLAREN PRÄZESSION: E – MITTLERE EKLIPTIK, A_0 – ÄQUATOR ZUM ZEITPUNKT T_0, A_1 – ÄQUATOR ZUM ZEITPUNKT T_1, $\odot_0$ – FRÜHLINGSPUNKT ZUM ZEITPUNKT T_0, $\odot_1$ – FRÜHLINGSPUNKT ZUM ZEITPUNKT T_1, P - MITTLERER POL DER EKLIPTIK, P_0 – POL DES ÄQUATORSYSTEMS ZUM ZEITPUNKT T_0, P_1 – POL DES ÄQUATORSYSTEMS ZUM ZEITPUNKT T_1, $\overline{\varepsilon}$ - MITTLERE SCHIEFE DER EKLIPTIK 456
BILD 9-6: TRANSFORMATION DES ÄQUATORSYSTEMS ALS FOLGE DER LUNISOLAREN PRÄZESSION (AUSSCHNITT VON BILD 9-5) 458
BILD 9-7: PRÄZESSION DURCH DIE PLANETEN, E_0 - MITTLERE EKLIPTIK ZUM ZEITPUNKT T_0, E – MITTLERE EKLIPTIK ZUM ZEITPUNKT T, A_0 – MITTLERER ÄQUATOR ZUM ZEITPUNKT T_0 461
BILD 9-8:: ZUR DARSTELLUNG DER ALLGEMEINEN PRÄZESSION 462
BILD 9-9: ZUR BERECHNUNG DER ALLGEMEINEN PRÄZESSION 463
BILD 9-10: ZUR BESCHREIBUNG DER NUTATION: Π - POL DER EKLIPTIK, A - WAHRER ÄQUATOR, $\overline{A}$ -MITTLERER ÄQUATOR, P-POL DES WAHREN ÄQUATORS, $\overline{P}$ -POL DES MITTLEREN ÄQUATORS, E-MITTLERE EKLIPTIK, ε-WAHRE SCHIEFE DER EKLIPTIK, $\overline{\varepsilon}$ -MITTLERE SCHIEFE DER EKLIPTIK, ♈-WAHRER FRÜHLINGSPUNKT, $\overline{♈}$ -MITTLERER FRÜHLINGSPUNKT, $\Delta\psi$ -NUTATION IN LÄNGE 471
BILD 9-11: ZUSAMMENSPIEL DER GRUNDLEGENDEN KOORDINATENSYSTEME DER SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE ÄQUATORSYSTEM UND EKLIPTIKSYSTEM (VGL. BILD 9-8 UND BILD 9-10) 478
BILD 9-12: ORTSVEKTOR EINES HIMMELSKÖRPERS BEZOGEN AUF DAS BARYZENTRUM *B* DES SONNENSYSTEMS, SOWIE AUF DEN BEOBACHTUNGSORT *T* AUF DER ERDOBERFLÄCHE BZW. DEN MITTELPUNKT DER ERDE ♁. $\mathbf{p}_1$ SIND DIE (ORTHONORMIERTEN) BASISVEKTOREN EINES EINHEITLICH VERWENDETEN BEZUGSSYSTEMS.... 480
BILD 9-13: BEOBACHTUNG EINES HIMMELSKÖRPERS S VON EINEM BEOBACHTER B AUF DER ERDOBERFLÄCHE AUS. GH – GEODÄTISCHER HORIZONT, GZ – GEODÄTISCHER ZENIT, $\mathbf{q}_j^{(H)}$ -BASISVEKTOREN DES HORIZONTSYSTEMS, φ - GEODÄTISCHE BREITE, φ' -GEOZENTRISCHE BREITE VON B, **R**-GEOZENTRISCHER ORTSVEKTOR VON S MIT ABSTAND r', $\mathbf{r}'$ -TOPOZENTRISCHER ORTSVEKTOR VON S MIT ABSTAND ρ', $\mathbf{R}_T$ GEOZENTRICHER ORTSVEKTOR VON B, δ - DEKLINATION DES HIMMELSKÖRPERS 481
BILD 9-14: ZUR DARSTELLUNG EINER WELLENFRONT 488
BILD 9-15: BEOBACHTUNG IN *S* EINES OBJEKTES *S'*, DAS SICH GEGENÜBER *S* MIT DER GESCHWINDIGKEIT V BEWEGT 491
BILD 9-16: DER ZWEIWEG DOPPLER 492
BILD 9-17: WIRKUNG DES ENTFERNUNGSUNABHÄNGIGEN ANTEILS DER TÄGLICHEN ABERRATION: „SCHIELEFFEKT“ BEI DER BEOBACHTUNG EINES OBJEKTES VON EINEM BEOBACHTER B AUF DEM BREITENKREIS φ', DER SICH MIT DER GESCHWINDIGKEIT $V_{\varphi'}$ UM DIE (MITTLERE) ERDACHSE DREHT. DER LICHTSTRAHL (TL – WAHRER LICHTSTRAHL) BEWEGT SICH MIT LICHTGESCHWINDIGKEIT C AUF DEN

Beobachter zu. Diesem erscheint auf Grund seiner eigenen relativen Geschwindigkeit der Lichtstrahl aus Richtung aL (scheinbarer Lichtstrahl) kommend 495
Bild 9-18: Radius des Breitenkreises mit der geozentrischen Breite φ' 496
Bild 9-19: Die Berücksichtigung der Lichtzeit bei der Beobachtung von Erdsatelliten (entfernungsabhängiger Anteil der Aberration), S – Bahn des Satelliten, B – Bahn des Beobachters auf der Erdoberfläche, p_1 - parallaktischer Winkel, H_1 , H_2 – Elevation des Satellitenortes gesehen vom Beobachter zu den Zeitpunkten T_1 und T_2, mit den geozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ und den jeweiligen Schrägentfernungen ρ_1, ρ_2 . $\mathbf{R}_1$ - Geozentrischer Ortsvektor des Satelliten zum Zeitpunkt T_1. Die Strecke $B(T_2)$ zu $S(T_1)$ wird als geometrische Sichtlinie bezeichnet, während die Strecke $B(T_2)$ zu $S(T_2)$ beobachtet wird. 498
Bild 9-20: Zur Definition der Aberrationskonstante K: x - Bogen der Sonne zwischen scheinbarem Ort (aP) und geometrischem Ort (gP) im Zeitpunkt der Beobachtung, bezogen auf die mittlere Sonnendistanz 1 astronomische Einheit 500
Bild 9-21: Zur Beschreibung der Refraktion: P – Beobachtungsort, S- wahrer Ort des Satelliten, P^* - Referenzort zur scheinbaren Beobachtung des Satelliten, Z – Zenit, R – Radius der Erdoberfläche, H – Höhe des Satelliten über Erdoberfläche, Hor – Horizontebene, Atm – Grenze der (wirksamen) Atmosphäre, z – scheinbare Zenitdistanz, H_G – berechnete Höhe („Elevation“) des Satelliten, H_A – scheinbare Höhe („Elevation“) des Satelliten, Ref – Refraktionswinkel (bezogen auf Beobachtungsort), γ - geozentrischer Zentralwinkel des Satelliten von der Zenitrichtung 502
Bild 9-22: Zur iterativen Berechnung der Refraktion 508
Bild 9-23: Sehstrahl Satellit–Himmelskörper durch die Atmosphäre, *S* – Ort eines Satelliten (oder einer Höhenforschungsrakete), *K* – Richtung zum Himmelskörper, *Ref* – Refraktion, HOR– Horizont im tiefsten Punkt des Sehstrahles, ♁ – Erde (Zentralkörper), Atm – Atmosphärenschicht
50
9
Bild 9-24: Der Kimmwinkel κ bei Beobachtung von einem Satelliten S aus, Sichtbarkeitsverhältnisse zur Beobachtung eines Himmelskörpers Σ von einem Satelliten (oder Höhenforschungsrakete) aus bei Annahme einer kugelförmigen Erdoberfläche 510
Bild 9-25: Refraktion in Abhängigkeit von der Höhe für einige (beobachtete) Elevationen 511
Bild 9-26: Veränderung des Kimmwinkels infolge der Refraktion bei Sicht von einem Satelliten (oder einer Höhenforschungsrakete) aus 512
Bild 9-27: Umrechnung des Zustandsvektors eines Erdsatelliten oder eines interplanetaren Objektes von einem Koordinatensystem zum Zeitpunkt T_K in ein Koordinatensystem zum Zeitpunkt *T*. Hier bedeutet t_K den Bezug auf den wahren Frühlingspunkt, $\overline{t_K}$ den Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt 514
Bild 9-28: Überblick Erzeugung geozentrischer geometrischer Örter interplanetarer bzw. interstellarer Objekte 515
Bild 9-29: Umrechnung des Zustandsvektors vom Koordinatensystem zum Zeitpunkt T_K in das Koordinatensystem zum Zeitpunkt *T*. Hier bedeutet t_K den Bezug auf den wahren Frühlingspunkt, $\overline{t_K}$ den Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt. 516

Tabellenverzeichnis

TABELLE 5-1: ANPASSUNG DER GERADLINIGEN BEWEGUNG MIT V=8 KM/S, R_P =9000KM, ζ_P=40° DURCH KEGELSCHNITTE 125
TABELLE 5-2: EINIGE WESENTLICHE UNTERSCHIEDE ZWISCHEN DEN KLASSISCHEN VERFAHREN UND DEM IN DEM VORLIEGENDEN BERICHT ERARBEITETEN NEUEN INTEGRATIONSVERFAHREN 157
TABELLE 9-1 : DIE MITTLERE TROPISCHE BEWEGUNG DER SCHEINBAREN SONNE ZUR STANDARDEPOCHE J2000.0 IN VERSCHIEDENEN MAßSYSTEMEN, BEZUGSWERT: $n_{\odot}$ = 0.002737909350795 (WINKELEINHEITSMAß / ZEITEINHEITSMAß) 443
TABELLE 9-2: DIE MITTLERE VARIATION DER STERNZEIT (TROPISCHE ERDROTATION) ZUR STANDARDEPOCHE J2000.0 IN VERSCHIEDENEN MAßSYSTEMEN, BEZUGSWERT: $\dot{\Theta}_0$ = 1.002737909350795 (1 STERNJAHR / 1 TROPISCHES SONNENJAHR) 446
TABELLE 9-3: BEISPIEL ZUR PRÄZESSION: DREHUNG DER HELIOZENTRISCHEN KOORDINATEN DER KOMETENSONDE GIOTTO VON B1950.0 NACH J2000.0 ◀ 470
TABELLE 9-4: BEISPIEL ZUR NUTATION: DREHUNG DER KOORDINATEN VON GIOTTO ZUM MITTLEREN ÄQUATOR UND MITTLEREN ÄQUINOKTIUM J2000.0 IN KOORDINATEN ZUM WAHREN ÄQUATOR UND EKLIPTIK UND WAHREN ÄQUINOKTIUM J2000.0 ◀ 476
TABELLE 9-5: BEISPIEL ZUR NUTATION: DREHUNG DER BAHNELEMENTE VON GALILEO ZUM MITTLEREN ÄQUINOKTIUM UND EKLIPTIK B1950.0 IN KOORDINATEN ZUM WAHREN ÄQUINOKTIUM UND WAHREN ÄQUATOR ZUR ELEMENTEEPOCHE 1990/DEZ/08 $19^H49^M16^S$ ◀ 477
TABELLE 9-6: ASTRONOMISCHE REFRAKTION IN ABHÄNGIGKEIT VON DRUCK UND TEMPERATUR FÜR VERSCHIEDENE ELEVATIONEN 504
TABELLE 9-7: WIRKUNG DER REFRAKTION BEI SATELLITENBEOBACHTUNG FÜR VERSCHIEDENE SATELLITENABSTÄNDE BEI KONSTANTEM ZENTRALWINKEL γ = 20° UND DIE KONSTANTE GEOMETRISCHE ELEVATION H_G = 10° 506

Index

A

Abbildung
  affine · 239
  kongruente · 239
  lineare · 239
Aberration · 440, 493
  Aberrationskonstante · 499
  elliptische · 494
  jährliche · 494
  Konstante der täglichen · 496
  planetare · 494
  stellare · 494
  tägliche · 494
Ableitung
  kovariante
    auf einer Fläche · 306
  kovariante auf der Fläche · 307
Ableitungsgleichung
  von Gauß · 305
  von Weingarten · 305
absolutes Differential · 280
Abstandsgesetz · 97, 108
Additionstheorem · 51
  von Drehungen in geradlinigen Koordinaten · 228
Adjunkte · 187
affin · 8
  Operation · 8
affiner Vektorraum · 23
algebraisches Komplement · 187
allgemeine Präzession · 462
Amplitude · 489
Anfangselemente · 166
Anpassung · 100
  einer Bewegung · 116
  mit Kurve 1. Ordnung · 100, 101
  mit Kurve 2. Ordnung · 100, 113
Anpassungsbedingung · 101
Anpassungsgleichung · 70, 101, 114, 117, 140, 142
  erste · 131, 143, 183
  zweite · 143, 183
Anpassungskurve · 143
Antennensystem · 375
antisymmetrisch · 48
Äquatorsystem · 312, 337, 357
Äquinoktium · 477
  Gleichung der Äquinoktien · 477
  mittlerem · 477
  wahrer · 477
Argument der Breite
  relatives · 390
Argument der Perigäums
  relatives · 390
Atomuhren · 441
Ausdehnungslehre · 231
Auslenkung (einer Welle) · 489
äußeres Produkt von Vektoren · 261
Azimut · 362
  ellipsoidisches · 362
  -Refraktion · 505

B

Bahnanalyse
  Ausbreitungsfehler · 505
Bahnbestimmung · 4
Bahnebene · 64
Bahnsystem
  mitgeführtes
    Frenetsche Formeln · 72
Bahnwinkel · 61, 68, 391
Baryzentrum · 451
Basis
  Basissystem · 22
  eines Vektorraumes · 10
  kontravariante · 232
  kovariante · 232
Basistensor · 239
Begleitendes Dreibein
  der Astrodynamik · 73
  der Differentialgeometrie · 66
Beschleunigung · 1, 69
  Beschleunigungsvektor · 196
  Coriolis- · 3, 196, 227
  normale Komponente · 70
  Schein- · 3
  transversale Komponente · 70
  Zentrifugal- · 3, 196, 227
Beschleunigungsgleichung · 1
Besselsche Konstante · 475
Bewegung
  absolute · 87
    Nichtexistenz · 2
  Darstellung von · 1
  Elemente einer · 140
  geradlinige · 198
  gleichförmig geradlinig · 45
  gleichförmig geradlinige · 90
  im Raum · 2
  in absoluter Zeit · 2
  in krummlinigen Koordinaten · 270
  Keplersche · 69
  Kreisbewegung · 136
  natürliche (in der klassischen Bewegungslehre) · 90
  Polbewegung · 440

räumliche · 84
relative · 87, 208
relativistisch · 2
Verschiebung · 199
bewegungsbezogenes Bahnsystem · 391
Bewegungsgleichung · 1
in krummlinigen Koordinaten · 310
Bewegungsgröße · 90
Bewegungsproblem
allgemeines · 89
BIANCHI, A.
erste Identität · 288
zweite Identität · 290
Bilinearform · 11
nichtausgeartete · 11
Bodenstation · 347
Bogenlänge · 64
BRADLEY, J. · 470
Breite, ekliptikale · 324
BRÜNNOW, F. · 3

C

Chandler Periode · 479
charakteristische Gleichung · 246
Christoffel Symbole · 271
der ersten Art · 273
der zweiten Art · 271
Differentiation · 272
geradliniger Koordinaten · 274
Symmetrie · 271
Transformationsverhalten · 274
und Metriktensor · 272
Verjüngung · 275
von Polarkoordinaten · 275
CHRISTOFFEL, E. B. · 231
CLEMENCE, G. M. · 3
Coriolisbeschleunigung · 3, 196, 227

D

DANJON, A. · 3
DARBOUX, J. G.
Darbouxvektor · 210
Vektor
allgemeiner · 52, 54, 66, 73
Variation · 52
Darbouxscher Vektor
allgemeiner · 194
Day numbers · 475
Deklination · 313, 338, 357
Differential
absolutes · 280
vollständiges · 281
Differentialgleichungen
Euler-Lagrangesche · 308
Differentiation
kovariante · 277
zweite kovariante Ableitung · 285
Divergenz · 282
Dopplereffekt · 440, 488
Drehung · 239
Drehungen · 205
Drehvektor · 319
relativer · 194
Dreibein, natürliches · 42
Dreiecksungleichung · 13
Dreikörperproblem
eingeschränktes · 3
duale Ergänzung eines Tensors · 261
Dupinsche Indikatrix · 303
Dyade · 239

E

Ebene
euklidische
Pseudo- · 14
Eigenbewegung · 451
Eigenbewegungs vektor
relativer · 194
Eigenbewegungsvektor · 210, *Siehe* auch Vektor
absoluter · 227
relativer · 208, 215, 227
Eigenbewegungsvektor eines geradlinigen Systems · 52
Einschußbahnelemente · 372
EINSTEIN, A. · 2
Relativitätsprinzip · 434
Summenkonvention · 9
Tensor · 290
Ekliptik
Breite · 324
Länge · 324
mittlere · 457, 462
Schiefe · 324
-System · 323
Elemente · 140
Einschuß- · 372
Elevation · 362
beobachtete · 501
geometrische · 505
scheinbare · 501
wahre · 501
Ephemeride · 475
Ephemeridenrechnung · 475, 476
Ephemeridenrechnung · 513
Erde-Mond-System
Schwerpunkt · 324
erdfeste Koordinaten · 342
erdfestes System · 342
Erdrotation · 227, 470
ESCOBAL, P.R. · 3
euklidischer Vektorraum · 10, 23
EULER, L. · 3, 88
Eulerwinkel · 225
kinematische Euler Gleichungen · 213
Satz von · 303
Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen
der Variationsrechnung · 308
Eulerwinkel · 427

F

FK5 · 477
Fläche

Koordinaten
Gaußsche · 292
Flächenelement · 296
Flächenkoordinaten · 292
Flächensatz · 69, 96
Flächentensor · 306
Flächentensoren · 292
Flächentheorie · 291
Ableitungsgleichungen · 305
erste Grundform · 295
Fundamentalgrößen
1. Ordnung · 295
2. Ordnung · 297
zweite Grundform · 297
Flächenvektoren · 292
kovariante · 292
Flugwinkel · 372
FRENET, F. J. · 66
Frenetsche Formeln
allgemeine · 48, 194
der Astrodynamik · 72, 383
der Differentialgeometrie · 66
des bewegungsbezogenen Bahnsystems · 73
des mitgeführten Bahnsystems · 72
Frequenz · 489
Frequenzverschiebung · 491
Frühlingspunkt · 313, 324, 471
mittlerer · 471
wahrer · 471
Fundamentalepoche · 315
Fundamentalgrößen
1. Ordnung · 295
2. Ordnung · 297
Fundamentalkatalog · 477
Fundamentalsterne · 313
Fundamentalsystem · 46, 312, 330

G

galaktischer Äquator · 333
Galaktisches System · 333
Galilei-Transformation · 200
GAUSS, C. F. · 4
Ableitungsgleichung · 305
Gaußsche Koordinaten · 291, 439
Krümmung · 303
geodätische Breite · 348
geodätische Linien · 308, 310
geographische Länge · 348
Geographisches System · 347
Geometrie
affine · 17
euklidische · 18
innere, einer Fläche · 310
geozentrische Koordinaten · 342
geozentrisches System · 312, 337
geradlinige Bewegung · 198
Geschwindigkeit · 31, 67
Geschwindigkeitsvektor · 225
Licht- · 200
radiale · 68
Relativ- · 200
relativer Geschwindigkeitsvektor · 27, 193
Signal- · 200
Translations- · 227
Wirkungs- · 200
Geschwindigkeitsvektor
relativer · 224
Gierachse · 428
Gleichung der Äquinoktien · 477
Gradient · 281
einer Skalarfunktion · 281
eines Vektorfeldes · 282
höherstufiger Tensoren · 282
GRASSMANN, H. G. · 231
GREEN, R.M. · 3
Greenwich · 339, 470
Greenwich System · 342
Großkreis · 24
Grundbewegung · 158
Grundform
erste, der Flächentheorie · 295
zweite, der Flächentheorie · 297

H

HANSEN, P. A. · 1, 46, 70, 89
erster Hansen-Winkel · 391
Hansen Koordinaten · 46
Hansen System · 46, 142
Hansen-ideal · 316
ideale Koordinaten · 70
ideale Systeme · 46
zweiter Hansen Winkel · 396
Hauptachsentransformation · 245
Hauptkrümmungslinie · 302
Hauptnormale · 65
Heraufziehen der Indizes · 234, 238, 242, 249
HERMANN, J.
Hermannscher Vektor · 397
Herunterziehen der Indizes · 234, 238, 242, 249
HILL, G. W. · 386
Himmelspol · 457
HIPPARCH
Präzession · 457
Höhe · 362
Zenitdistanz · 502
Horizont
-ebene, astronomische · 361
-ebene, ellipsoidische · 361
Kimmtiefe · 501
Kimmwinkel · 509
Kimmwinkel bei Refraktion · 510
-system · 360
Horizontsystem · 360
geodätisches · 481

I

ideale Systeme · 46
ideale Transformation · 194
Identität von Bianchi, erste · 288
Identität von Bianchi, zweite · 290
Impuls · 90
Indikatrix

Dupinsche · 303
inertiale System · 215
intermediäre Bahn · 141

J

JACOBI, C. G. J. · 3
Jahr
mittleres tropisches · 443
Stern- · 446
JPL · 476
Julianisches Datum · 443
julianische Tagesnummer · 443
modifiziertes · 443

K

KAMEL, A. A. · 68
Kegelpunkt · 293
Kegelschnitt · 113
KEPLER, J. · 89, 97, 100
Abstandsgesetz · 108
drittes Keplersches Gesetz · 116
Flächensatz · 96
Keplergleichung · 104
Keplersches Gesetz
zweites · 69
Keplerelemente · 166
Kimm · 509, 510
geometrischer Kimmwinkel · 511
Kimmtiefe · 501
Kimmwinkel · 509
Kinematik · 1
KINOSHITA, H. · 475
Knotenvektor · 205
Koeffizienten
Metrik- · 232
Metrik-, kontravariante · 232
kogredient · 237
Komplement
algebraisches · 187
konkav · 133
konkave Seite
einer Raumkurve · 65
kontragredient · 237
kontravariant · 234
kontravariante Ableitung · 278
Koordinaten
affine · 232
äquatoriale mittlere · 471, 472
äquatoriale wahre · 471
Beschleunigung in tangentialen · 179
bewegungsbezogene · 46
differentielle · 3
ekliptikale mittlere · 471, 472
Gaußsche · 291
Hansen- · 46
Hansen System · 46
Hansen-ideale · 46, 70
ideale · 46
im affinen Raum · 16
kartesische · 17, 21, 24, 36
rechtwinklige · 19
krummlinige · 263, 291
Polar- · 21, 24, 36, 41
Polarkoordinaten · 269
Koordinatensystem
"festes" · 323
Antennensystem · 375
Äquator- · 312
bewegliches Äquator-bezogenes · 312
bewegtes · 2
bewegungsbezogenes Bahn- · 391
Ekliptik- · 323
erdfestes · 342
festes · 2, 45
festes Äquator- · 337, 357
Fundamentalsystem · 46
galaktisches · 333
geographisches · 347
geozentrisches · 342
geozentrisches Frühlingspunkt- · 312
geozentrisches Meridian-bezogenes Äquator- · 337
geradlinig bewegtes · 44, 198
geradliniges · 37
gleichförmig geradlinig bewegtes · 45
Greenwich- · 342
Hansen System · 97
Hansen System · 391
Hansen-ideales · 391
HCL- · 382
Horizont- · 360
ideales · 1, 195
inertiales · 2, 3, 200, 215
kartesisches · 190
krummliniges · 39, 263
Leibniz- · 382
mitbewegtes Bahn- · 382
mitgeführtes Bahn- · 67
orthonormiertes · 190
satellitenzentrierte · 416
Tangenten-bezogenes · 410
topozentrisches · 354
topozentrisches Meridian-bezogenes Äquator- · 357
kovariant · 234
Kovariante Ableitung
der kontravarianten Koeffizienten · 277
zweite · 285
Kraft · 90
Kreisfrequenz · 489
Kronecker Symbol · 238
Kronecker Tensor · 259
Kroneckersymbol · 12
Krümmung · 65
einer Kurve · 296
einer Raumkurve · 65
Gaußsche · 303
Gaußsche einer Fläche · 301
geodätische · 299
mittlere einer Fläche · 301
normale · 299
tangentiale · 299

Krümmungslinie · 302
Krümmungsradius · 298
Krümmungsskalar · 289
Kugelumgebung · 19
Kulmination · 477

L

Lageregelung · 428
Lagrange Funktion · 308
LAGRANGE, J. L. · 110
  Bedingung · 167
LAMBERT, J. H.
  -problem · 26
LAMOUR, J. · 434
Länge, ekliptikale · 324
Laplacescher Operator · 284
LEIBNIZ, G. W. · 382
  allgemeine Gleichung · 139
Leibnizgleichung · 88
Lemma von Ricci · 279
LEVI-CIVITA, T. · 231
  geodätische Parallelität · 310
  Tensoren · 260
Lichtgeschwindigkeit · 5
Lichtzeit · 493
linearer Operator · 242
Linien
  geodätische · 308
LLR · 478
LORENTZ, H. A.
  allgemeine Lorentz-Transformationen · 434
  Invarianz der Phase · 489
  reine Lorentz-Transformationen · 434
  Transformationen · 434
Lorentz-Transformation · 15
Lotabweichung · 362

M

MACH, E. · 50
Machsches Prinzip · 45
Meridian · 337, 357
Metrik · 18, 19
  Signatur · 19
Metrikkoeffizienten · 232
Metriktensor · 294
MEUSNIER, J.-B..
  Satz von · 298, 300
MICHELSON, A. A. · 200
mitbewegtes Bahnsystem · 382
MORLEY, E. W. · 200
Multilinearform · 250

N

Nablavektor · 281
Nadir · 362
n-Bein
  natürliches · 21
NEWCOMB, S. · 3, 442, 475
Nickachse · 428
Norm
  eines Vektors · 18
Normalschnitt · 298
  einer Fläche · 299
Nutation · 470, 513
  in Länge · 471
  in Rektaszension · 477
  in Schiefe · 471
  Koeffizienten · 472

O

Operation
  affine · 8
Operator · 242
Ort · 471
  mittlerer · 471
  wahrer · 471
orthogonal
  Transformation · 191
Orthogonalisierungsverfahren
  Schmidtsches · 190
Orthogonalitätsbedingung · 191
Orthonormalsystem · 205

P

Parallaxe · 451, 479, 503
  parallaktische Ellipse · 486
Parameter
  Bewegungsparameter · 140
Periode · 489
Phase · 489
Pitch · 428
planetare Präzession · 462
PLATON · 2, 136, 137
POINCARÉ, J. H.
  Lorentz Transformation · 434
Polbewegung · 440, 478
Präzession · 456, 470, 513
  lunisolare · 457, 461
  planetare · 462
Produkt
  skalares · 22
  tensorielles · 239
  verjüngendes · 242
Punktraum
  affiner · 16
  eigentlich euklidischer · 18
  euklidischer · 18
Punkträume
  n-dimensionale · 16

R

Raum
  einbettender · 291
  euklidischer · 7, 291
    nicht-eigentlicher · 14
    Pseudo- · 14
  metrischer · 19
  nicht euklidischer · 291
  physikalischer · 1
  Vektorraum · 7
Refraktion · 440, 501
  Azimut- · 505

bei Auf- und Untergang · 507
Beobachtung eines Erdsatelliten · 505
Beobachtung über Atmosphäre · 508
reduzierte · 506
Refraktionsindex · 503
Szintillation · 505
von Bodenstationen aus · 501
Regel
Cramersche · 187
Rektaszension · 313
Relativitätsprinzip
Einsteinsches · 434
Relativitätstheorie
Minkowski Raum · 5
Raum-Zeit Kontinuum · 5
spezielle · 5
Lorentz-Transformation · 15
spezielles Relativitätsprinzip · 2
Rest der Welt · 45, 50
Revolutionszeit · 441
Ricci · 307
2. Lemma von · 307
RICCI-CURBASTRO, G. · 231
Lemma von · 279
Tensor · 289
Richtungscosinus · 362
Richtungskosinus · 23
RIEMANN, B.
Riemannscher Krümmungstensor · 286
Riemannscher Tensor · 286
RODRIGUES, B. O.
-Parameter · 219
Rollachse · 428
RÖMER, O. · 200
Rotation · 283
um eine feste Achse · 227
Rotationszeit · 440

S

satellitenzentriertes System · 416
Scheinbeschleunigung · 3
Scheinbeschleunigungen · 196
Scheinkräfte · 196
Schiefe der Ekliptik · 324, 471
mittlere · 471
wahre · 471
Schielkorrekturen · 479
Schmiegebene · 66
Schrägentfernung · 355, 488, 512
Signalgeschwindigkeit · 5
Signatur · 19
skalare Invariante · 246
skalares Produkt · 23, 249, 251
Skalarprodukt · 11, 235
SLR · 478
SMART, W.M. · 3
Sonne
fiktive · 442
fiktive mittlere · 442
wahre · 444
Sonnenuhr · 444
Sonnenzeit · 441
lokale · 442
Revolutionszeit · 441, 442
Rotationszeit · 440
Spaltenvektoren · 23
Spirale · 126
Anpassung mit · 132
archimedische · 128
Dreier-Spirale · 132
hyperbolische · 126
Konstruktion von Spiralen · 132
logarithmische · 129, 131
systematischer Überblick · 134
Spurfehler · 535
Sternjahr · 446
Sterntag · 444
Dauer eines Sterntages · 446
Sternzeit · 339
Berechnung der Weltzeit · 448
Erdrotation · 470
scheinbare · 477
scheinbarer Sterntag · 477
Sternjahr · 446
Sterntag · 444
Sternzeitsekunden · 445
Variation · 446
Störung · 70
Störungen · 90
Schrittweise Integration mit Anpassungen · 158
Störbeschleunigung · 140
STUMPFF, K. · 70, 475
Stumpffsche Funktionen · 475
Stundenmaß · 313
Stundenwinkel · 338, 357, 441
Summenkonvention · 9
System
inertiales · 215
Systemeigenbewegungsvektor · 312, 457
absoluter des Äquatorsystems · 316
Additionstheorem · 331
Antennensystem · 377
Apsidensystem · 405, 410
Äquatorsystem · 316
Bewegung bezogenes Bahnsystem · 395
Ekiptiksystem · 329
Fundamentalsystem · 316
galaktisches System · 336
geographisches System · 352
geozentrisches Äquatorsystem · 347
geozentrisches Meridian-bezogenes Äquatorsystem · 341
Hansen-System · 395
Horizontsystem · 370
inertiales System · 316
Knotensystem · 409
Leibniz-System · 383
mitgeführtes Bahnsystem · 383
relativ bewegter Äquatorsysteme · 322
relativer · 319
relativer des Antennensystems · 381
relativer des Äquatorsystems · 316

Satelliten-zentriertes System · 418
Tangentensystem · 416
topozentrisches Äquatorsystem · 356
topozentrisches Meridian-bezogenes System · 360
Systemkorrekturen · 479
Szintillation · 505

T

Tangentiale Koordinaten
Beschleunigung in · 179
Tangentialraum · 44
euklidischer · 44
Tensor
Addition · 247
adjungierter · 261
antisymmetrische = schiefsymmetrisch · 252
äußeres Produkt von Vektoren · 261
Delta- · 259
duale Ergänzung · 261
Einheits- · 244
Einstein- · 290
Epsilon- · 260
erster Stufe · 237
Flächen- · 292, 306
Fundamental- · 244
-Gleichungen · 9
Herauf-, Herunterziehen der Indizes · 234, 238, 242, 249
Komponenten · 243
Kronecker- · 259
Krümmungs- · 286
Levi-Civita · 260
Metrik- · 244
Metriktensor · 249
Quotientenregel · 249
Ricci · 289
Riemann · 289
Riemann-Christoffelscher · 286
Riemannscher · 284, 286
Riemannscher Krümmungs- · 286
schiefsymmetrische · 252
skalare Invariante · 245
skalare Invariante des symmetrischen Tensors 2. Stufe · 246
skalares Produkt · 249, 251
Spur des symmetrischen Tensors 2. Stufe · 246
symmetrische · 251
Tensoranalysis · 263
Tensordichte · 283
tensorielles Produkt · 248
Tensorraum 2. Stufe · 239
Tensorrechnung · 231
Überschiebung · 248
verjüngendes Produkt · 248
Verjüngung · 249
vollständige Schiefsymmetrie · 256
Tensorraum · 239
Tensorrechnung · 231
Test Site · 347
topozentrische · 355
Deklination · 355
Rektaszension · 355
Schrägentfernung · 355
topozentrisches System · 354, 357
Torsion · 66
Trägheitsgesetz · 2
Trägheitssatz · 90
Transformation
der Basen · 10
der Koordinaten · 10
des Beschleunigungsvektors · 195
des Geschwindigkeitsvektors · 192
des Ortsvektors · 192
-gleichungen · 237
ideale · 195
kogredient · 237
kontragredient · 237
kovariante und kontravariante Basen · 236
lineare · 239
Lorentz- · 15
-matrix · 235
orthogonal · 238, 239
orthogonale · 191
Ortsvektor · 192
Transformationsmatrix · 187
Translation · 29
Umkehrabbildung · 235
Vektorkomponenten · 236
von Koordinatensystemen · 186
Transformationsmatrix · 205
Drehungen von Orthonormalsystemen · 205
Transit · 477
Translationsgeschwindigkeit · 227
Translationsrelativität · 2
TSCHEBYSCHEFF, P. L.
-Approximation · 475
Polynome · 4, 475

U

Ungleichung
Dreiecks- · 13
Schwarzsche · 13
Unterdeterminante · 187

V

Variation
eines Vektors · 18
Variation der Parameter · 100, 142
Variationsformeln · 194
des bewegungsbezogenen Bahnsystems · 73
des mitgeführten Bahnsystems · 72
Variationsgleichung · 88, 103, 110, 117
Variationsgleichungen
der räumlichen Bewegung · 202
Variationsmatrix · 49
Variationsparameter · 193
Vektor
absolute Systemeigenbewegungsvektor eines Hansen Systems · 54
absoluter Beschleunigungsvektor · 33
affine Koordinaten · 232

affiner Vektorraum · 23
allgemeiner Darbouxscher · 52, 54, 66, 73
  Variation · 52
äußeres Produkt · 261
Bahnnormalenvektor · 397
Basis- · 22, 26
Bescheunigungs- · 195
Beschleunigungs- · 32, 352
Binormalenvektor · 66
Darbouxscher · 99, 254, 319
Dreh-
  relativer · 194
Dreh- · 52
Dreh- · 319
Eigenbewegungs-
  relativer · 194
Eigenbewegungs- · 52
Eigenbewegungsvektor · 210
Eigenbewegungsvektor des mitgeführten
  Bahnsystems · 73
euklidischer Vektorraum · 23
Exzentrizitäts-, der Relativbewegung · 389
Flächen- · 292
freier · 16
gebundener · 16
Geschwindigkeits- · 26, 225
  absoluter · 193
  relativer · 224
Hermannscher Vektor · 397
Inkinations-, der Relativbewegung · 389
Knoten- · 205, 224, 225
kontravariante Komponenten · 234
kovariante Komponenten · 234
Nabla- · 281
Norm · 11, 235
Norm eines · 18
Normalen- · 68
Orts- · 23
Parametervektor · 397
-Produkt · 254
radialer Richtungs- · 67
relativer Beschleunigungsvektor · 33
relativer Geschwindigkeitsvektor · 27
Richtungs- · 22, 23
skalares Produkt · 249
Skalares Produkt · 23
space motion vector · 451
Spalten- · 23
Spaltenvektoren · 23
Systemeigenbewegungs- · 52, 319
System-Variations- · 73
  Tangentialvektor · 64
  Transformation des Beschleunigungs- · 195
  transversaler Richtungs- · 67
  Variation eines · 18
  Zustandsvektor · 186
Vektorfeld · 20
Vektorraum · 7
  Basis · 10
  eigentlich euklidisch · 12
  euklidischer · 10
  Komponenten · 10
  Links- · 8
  Rechts- · 8
  Transformation der Basen · 10
  über dem Körper der reellen Zahlen · 7
Verschiebung · 199
VOIGT, W. · 434

W

WAHR, J. · 475
Wellenzahl · 489
Winkelgeschwindigkeit · 52
WOOLARD, E. W. · 3, 475

Y

Yaw · 428

Z

Zeit
  absolute · 2
  des Nullmeridians · 444
  des Ortsmeridians · 444
  mittlere · 445
  Revolutionszeit · 441
  Rotationszeit · 440
  scheinbare Sternzeit · 477
  Sekunde · 441
  Sonnenzeit · 441
  Sternzeit · 444
Zenit
  astronomischer · 361
  -distanz · 362
  ellipsoidischer · 362
  Zenitdistanz, geometrische · 503
  Zenitdistanz, scheinbare · 505
  Zenitdistanz, wahre · 502
Zenitdistanz
  scheinbare · 502
Zentrifugalbeschleunigung · 3, 196, 227

Forschungsbericht 2012-13

Satellitenbewegung
Band II: Bewegung in Raum und Zeit

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und
Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

574 Seiten
91 Bilder
9 Tabellen
90 Literaturstellen

DLR Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Mathematische Beschreibung beliebiger Bewegungen, Anpassung beliebiger Bewegungen, Hansensystem, Leibnizsystem, systematische Zusammenstellung grundlegender Koordinatensysteme und ihrer Transformationen, Zeitabhängigkeit der Systeme

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme des DLR, Oberpfaffenhofen

Satellitenbewegung, Band II: Bewegung in Raum und Zeit

DLR-Forschungsbericht 2012-13, 2012, 574 Seiten, 91 Bilder, 9 Tabellen, 90 Literaturstellen, XX,XX € zzgl. MwSt.

Im zweiten Band der Satellitenbewegung werden die mathematischen Basissysteme zur Beschreibung einer Bewegung zusammengestellt. Als zentrales System wird das auf Peter Andreas Hansen zurückgehende ideale System vorgestellt, das zur Beschreibung jedes Bewegungsvorganges geeignet ist. Die enge Verwandtschaft eines Hansen Systems mit inertialen Systemen sowie dem mitbewegten Leibniz System wird herausgearbeitet. Eine Erweiterung dieser Systeme auf krummlinige Koordinatensysteme wird angedeutet. Verschiedene zur Beschreibung einer Satellitenbewegung benötigter Koordinatensysteme werden systematisch mit ihren wechselseitigen Transformationen und den aus der sphärischen Astronomie bekannten Zeitabhängigkeiten zusammengestellt. Der Begriff der Eigenbewegung eines Systems ist hierbei von zentraler Bedeutung.

Mathematical description of any motion, adaptation of any motion, Hansen system, Leibniz system, compilation of basic systems and of their transformations, time relation of systems

(Published in German)

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Microwave and Radar Institut of the German Aerospace Centre (DLR), Oberpfaffenhofen

Satellite Motion, volume II: Motion in Space and Time

DLR-Forschungsbericht 2012-13, 2012, 574 pages, 91 figs., 9 tabs., 90 refs., XX.XX €

In the second part of the satellite motion the mathematical fundamental coordinate systems needed for the description of any motion will be compiled. The Hansen system is established as a system of central importance fro the description of any motion. The close relationship of a Hansen systems with inertial systems as well the comoving Leibniz system will be extracted. Different basic coordinate systems to be used fort he description of satellite motion are compiled inclusive the variation of these systems in time The expansion of these systems is prepared for the use with curvilinear systems. The term of the system proper motion is shown of central importance.