Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen e. V.
Abteilung: J 06

Bericht: B 43/J/25
Auftrag: LA 623
Datum: 13.12.1943

Der Leistungsbedarf des idealen Hubschraubers.

Institut für instationäre Vorgänge

der

Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E.V.

Der Institutsleiter

Küssner

(Küssner)

Der Bearbeiter

Sissingh

(Sissingh)

Der Leistungsbedarf des idealen Hubschraubers.

Mit Hilfe von Impulsbetrachtungen[1] wird der Leistungsbedarf des idealen Hubschraubers im Horizontalflug bei verschiedenen schädlichen Flächen untersucht.

Bezeichnungen:

G	kg	Fluggewicht
F	m^2	Rotorkreisfläche
N	mkg/s	Erforderliche Leistung
V	m/s	Fluggeschwindigkeit
ϱ	$kg\ s^2/m^4$	Luftdichte
V'	m/s	Durchtrittsgeschwindigkeit der Luft durch den Rotorkreis
V''	m/s	Relativgeschwindigkeit der Luft im unendlichen hinter der Schraube in bezug auf den Rotor
$\Delta v_h, \Delta v_v$	m/s	horizontale bezw. vertikale Komponente der Zusatzgeschwindigkeit am Ort der Schraube
Q	kg s/m	sekundliche Masse der an der Impulserzeugung beteiligten Luftmenge
f	–	Beiwert für die Grösse der schädlichen Fläche aller nichttragenden Teile

$$f = \frac{\text{Widerstand}}{F\ V^2 \varrho/2}$$

ε	–	Gleitzahl des idealen Hubschraubers einschliesslich der zusätzlichen Widerstände des Rumpfes usw.
$\varkappa$	–	Beiwert für den mit der Leistungseinheit erzeugten Schub

$$G/N = \varkappa \sqrt{\frac{2\varrho}{G/F}}$$

---

1) s.a. Küssner, Probleme des Hubschraubers. Luft.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 1 .

Im unbeschleunigten Horizontalflug muss die resultierende Luftkraft des Rotors mit dem Fluggewicht und dem Widerstand der schädlichen Fläche im Gleichgewicht stehen, d.h. es ist ein Vertikalschub von der Grösse des Fluggewichtes G und analog dem Propellerschub des normalen Drachenflugzeuges eine Vortriebskraft gleich dem Ausdruck $f\ F\ V^2 \varrho/2$ erforderlich.

Nach dem Impulssatz ergeben sich die innerhalb eines geschlossenen Bereiches auftretenden Kräfte als die geometrische Differenz der in der Zeiteinheit ein- und austretenden Bewegungsgrösse. Wenn wir die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit mit v_e bezw. v_a bezeichnen und annehmen, dass die an der Impulserzeugung beteiligte sekundliche Masse Q sich nicht ändert, so gilt nach Bild 1 für die Kraft ganz allgemein die Beziehung

$$P = Q.v_e \ \hat{+} \ (-Q.v_a) \qquad .....(1)$$

Die erforderliche Leistung beträgt

$$N = \frac{Q}{2} (v_a{}^2 - v_e{}^2) \qquad .....(2)$$

In unserem Falle ist die Eintrittsgeschwindigkeit v_e gleich der Fluggeschwindigkeit V. Bezeichnet man die horizontale und vertikale Komponente der Störgeschwindigkeit mit $2\Delta v_h$ bezw. $2\Delta v_v$, so ist nach Bild 2 die Austrittsgeschwindigkeit

$$V'' = V \ \hat{+} \ 2\,\Delta v_h \ \hat{+} \ 2\,\Delta v_v \qquad .....(3)$$

Mit der Annahme, dass sich am Ort der Schraube gerade die halbe Störgeschwindigkeit ausgebildet hat, ergibt sich für die Geschwindigkeit in der Rotorkreisfläche der Ausdruck

$$V' = V \ \hat{+} \ \Delta v_h \ \hat{+} \ \Delta v_v \qquad ......(4)$$

Nach der Küssnerschen Kugel-Hypothese wird die an der Impulserzeugung beteiligte Luftmasse erhalten als Durchflussmenge durch eine der Hubschraube umschriebene Kugel, d.h. es ist

$$Q = F\, V' \varrho \qquad \ldots\ldots.(5)$$

Damit erhalten wir für die vertikale und horizontale Komponente der Rotorkraft folgende Beziehungen

$$G = F\, V' \varrho \,.\, 2 \Delta v_v \qquad \ldots\ldots.(6)$$

$$fF\, V^2 \varrho/2 = F\, V' \varrho \,.\, 2 \Delta v_h \qquad \ldots\ldots.(7)$$

Die erforderliche Leistung beträgt nach Gl(2)

$$N = F\, V' \varrho \,.\frac{1}{2} \left(V''^2 - V^2 \right) \qquad \ldots\ldots.(8)$$

Mit

$$V''^2 = \left(V + 2\Delta v_h \right)^2 + \left(2\Delta v_v \right)^2 \qquad \ldots\ldots.(9)$$

und

$$\Delta v_v = \frac{G/F}{2\varrho} \cdot \frac{1}{V'} \qquad \ldots\ldots.(6a)$$

$$\Delta v_h = \frac{f\, V^2}{4\, V'} \qquad \ldots\ldots.(7a)$$

geht Gl(8) über in

$$N = 2F\varrho \cdot \left\{ \left(\frac{G/F}{2\varrho} \right)^2 \cdot \frac{1}{V'} + \frac{1}{4} f\, V^3 + \frac{1}{16} f^2 V^4 \cdot \frac{1}{V'} \right\} \quad \ldots.(1o)$$

Bezeichnet man die Gleitzahl des Hubschraubers mit ε , so ist andererseits

$$N = \varepsilon\, G\, V \qquad \ldots\ldots(11)$$

Aus Gl(1o) und Gl(11) folgt

$$1/\varepsilon = \frac{V \cdot \left(\frac{G/F}{2\varrho} \right)}{\left(\frac{G/F}{2\varrho} \right)^2 \cdot \frac{1}{V'} + \frac{1}{4} fV^3 + \frac{1}{16} f^2 \cdot \frac{V^4}{V'}} \qquad \ldots.(12)$$

Die in Gl(12) auftretende Geschwindigkeit V' kann nach Bild 2 bestimmt werden aus der Beziehung

$$V'^2 = (V + \Delta v_h)^2 + \Delta v_v^2 \qquad \ldots.(13)$$

Mit Gl(6a) und Gl(7a) geht diese Gleichung über in den Ausdruck

$$V'^4 - V'^2 . V^2 - V' . \frac{1}{2} fV^3 = \left(\frac{G/F}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{16} f^2 V^4 \qquad \ldots.(14)$$

Wir haben damit eine Gleichung vierten Grades für die Unbekannte V' gewonnen, die in bekannter Weise gelöst wird. Wenn man in Gl(14) die Glieder mit f und f^2 fortlässt – d.h. wir vernachlässigen die Geschwindigkeitskomponente Δv_h – so ist näherungsweise

$$V' = + \sqrt{\frac{1}{2} V^2 + \sqrt{\left(\frac{G/F}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{4} V^4}} \qquad \ldots(15)$$

Aus der Definitionsgleichung

$$G/N = \chi \sqrt{\frac{2\varrho}{G/F}} \qquad \ldots\ldots.(16)$$

folgt

$$\chi = \frac{G}{N} \sqrt{\frac{G/F}{2\varrho}} \qquad \ldots\ldots.(16a)$$

Mit N nach Gl(1o) geht obige Gleichung über in

$$\chi = \frac{\left(\frac{G/F}{2\varrho}\right)^{3/2}}{\left(\frac{G/F}{2\varrho}\right)^2 . \frac{1}{V'} + \frac{1}{4} fV^3 + \frac{1}{16} f^2 V^4 . \frac{1}{V'}} \qquad \ldots\ldots.(17)$$

Die Geschwindigkeit V' kann wieder aus Gl(14) oder näherungsweise aus Gl(15) berechnet werden. Für die heute üblichen Flächenbelastungen und Flughöhen ist für Geschwindigkeiten von $V > 15$ m/s V' praktisch gleich der Fluggeschwindigkeit, sodass sich Gl(12) und Gl(17) weiter vereinfachen. Für Fluggeschwindigkeiten über etwa 54 km/h gehen diese Gleichungen also über in

$$1/\varepsilon = \frac{V^2 \cdot \left(\frac{G/F}{2\rho}\right)}{\left(\frac{G/F}{2\rho}\right)^2 + V^4\left(\frac{1}{4}f + \frac{1}{16}f^2\right)} \qquad \ldots\ldots(12a)$$

und

$$\kappa = \frac{V \cdot \left(\frac{G/F}{2\rho}\right)^{3/2}}{\left(\frac{G/F}{2\rho}\right)^2 + V^4\left(\frac{1}{4}f + \frac{1}{16}f^2\right)} \qquad \ldots\ldots(17a)$$

Um die zu einer gegebenen Flächenbelastung und Luftdichte gehörige Geschwindigkeit der besten Gleitzahl oder des geringsten Leistungsbedarfes zu erhalten, setzen wir die erste Ableitung nach V gleich Null und erhalten:

$$V_{\varepsilon\,opt} = \frac{\left(\frac{G/F}{2\rho}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{4}f + \frac{1}{16}f^2\right)^{1/4}} \qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

$$V_{\kappa opt} = \frac{\left(\frac{G/F}{2\rho}\right)^{1/2}}{\left(\frac{3}{4}f + \frac{3}{16}f^2\right)^{1/4}} \qquad \ldots\ldots\ldots(19)$$

Das Verhältnis dieser beiden Geschwindigkeiten beträgt

$$\frac{V_{\kappa\,opt}}{V_{\varepsilon\,opt}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Es ist also unabhängig von der Flächenbelastung, der Luftdichte und dem Beiwert f der schädlichen Fläche, d.h. bei dem idealen Hubschrauber liegt die Geschwindigkeit des geringsten Leistungsbedarfes stets bei 76 % der Geschwindigkeit der besten Gleitzahl.

Zum Schluss sollen die bei einer gegebenen schädlichen Fläche erreichbaren Bestwerte ε_{opt} und κ_{opt} bestimmt werden. Wir setzen zu diesem Zwecke die zu den Optimalwerten gehörigen Geschwindigkeiten $V_{\varepsilon\,opt}$ und $V_{\kappa\,opt}$ nach Gl(18) und (19) in die Gleichungen (12a) bezw. (17a) ein. Das Ergebnis lautet:

$$\left(1/\varepsilon\right)_{opt} = \frac{1}{\sqrt{f + \frac{1}{4} f^2}} \qquad \text{......(2o)}$$

$$\kappa_{opt} = \frac{o{,}8o7}{\sqrt[4]{f + \frac{1}{4} f^2}} \qquad \text{.......(21)}$$

Diese theoretischen Optimalwerte sind also nur von f abhängig.

Um einen allgemeinen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse der bisherigen Überlegungen zu gewinnen, ist in den Bildern 3 bis 6 der Verlauf von ε und κ über der Fluggeschwindigkeit aufgetragen. Als Parameter wurden die Ausdrücke $\frac{G/F}{2\varrho}$ und f gewählt. Die Flächenbelastungen der bekannten Hubschrauber liegen zurzeit bei $\sim$ 1o - 2o kg/m^2, d.h. in Meereshöhe ist der Parameter $\frac{G/F}{2\varrho}$ = 4o - 8o m^2/s^2. Das Verhältnis der schädlichen Fläche zur Rotorkreisfläche beträgt etwa f = o,oo45 - o,oo6 .

Zu den einzelnen Abbildungen ist folgendes zu bemerken. Bild 3 zeigt den Einfluss der schädlichen Fläche auf die Gleitzahl für $\frac{G/F}{2\varrho} = 40\ m^2/s^2$, also z.B. für 10 kg/m^2 Flächenbelastung in Meereshöhe. Für $f = 0{,}006$ beträgt das Optimum der Gleitzahl des idealen Hubschraubers 1: 13, durch Reduktion der schädlichen Fläche auf $f = 0{,}0045$ verringert sich dieser Wert auf 1 : 15 . Mit zunehmendem Widerstand verschiebt sich die Geschwindigkeit der optimalen Gleitzahl zu etwas kleineren Werten. In Bild 4 ist für $f = 0{,}006$ der Einfluss des Parameters $\frac{G/F}{2\varrho}$ auf die Gleitzahl dargestellt. Mit zunehmender Flächenbelastung und Flughöhe wandert das Optimum der Gleitzahl zu höheren Geschwindigkeiten. Die Grösse des Optimalwertes bleibt dabei nach Gl(20) unverändert. Bild 5 und 6 zeigen die entsprechenden Kurven für den Beiwert κ. Der Einfluss von $\frac{G/F}{2\varrho}$ unf f ist grundsätzlich der gleiche wie bei der Gleitzahl. Zusammenfassend können wir feststellen, dass die Gewschwindigkeit der optimalen Gleitzahl und des geringsten Leistungsbedarfes im wesentlichen von dem Ausdruck $\frac{G/F}{2\varrho}$, also von der Flächenbelastung und der Flughöhe , bestimmt wird, während die Grösse der Bestwerte ε_{opt} und κ_{opt} nur von dem Verhältnis der schädlichen Fläche zur Rotorkreisfläche abhängt. In Bild 7 sind die Geschwindigkeiten $V_{\varepsilon\, opt}$ und $V_{\kappa\, opt}$ nach Gl(18) und (19) über $\frac{G/F}{2\varrho}$ aufgetragen. Bemerkenswert ist, dass die z.Zt. vorhandenen und nach anderen Gesichtspunkten entworfenen Hubschrauber insbesondere hinsichtlich $V_{\varepsilon\, opt}$ - also hinsichtlich der Reisegeschwindigkeit - praktisch mit den theoretischen Werten übereinstimmen.

Um schliesslich einen Maßstab für die Güte der Hubschrauber zu gewinnen, wollen wir die durch Modell- oder Flugversuche tatsächlich gemessenen κ- Werte mit den hier ermittelten theoretischen Werten vergleichen. Da κ nach der Definitionsgleichung (16) einen Beiwert für den mit der Leistungseinheit erzielten Schub darstellt, gibt uns das Verhältnis dieser beiden Zahlen direkt den Gütegrad eines Hubschraubers an.

Wir wollen uns jedoch hier darauf beschränken, nur den Verlauf dieses Gütegrades anzudeuten. Für das Schweben am Ort ist nach Bild 5 und 6 $K = 1$. Die gemessenen Werte sind gleich dem Bendemannschen Gütegrad, der für Hubschrauben etwa 7o % beträgt. Für V = 0 ist also unser neuer Gütegrad identisch mit dem Bendemannschen Gütegrad $\eta = \frac{k_s^{3/2}}{2\ k_d}$. Mit zunehmender Fluggeschwindigkeit steigen die theoretischen K- Werte bis zu einem Optimalwert an, der z.B. für f= o,oo6 nach Bild 5 $K_{opt} = 2{,}9o$ beträgt. Die gemessenen Werte haben ebenfalls ein Maximum, das für f = o,oo6 etwa bei K=1,15 liegt.[2] Beim Übergang vom Schweben am Ort zu der Geschwindigkeit des geringsten Leistungsbedarfes sinkt also der Gütegrad von 7o % auf $\frac{1{,}15}{2{,}9o}$ = 4o % ab. Diese Verschlechterung der Güte mit zunehmender Fluggeschwindigkeit ist durchaus verständlich, da mit wachsendem Fortschrittsgrad die Ungleichförmigkeitsverluste immer stärker in Erscheinung treten.

<u>Zusammenfassung</u>.

Ohne auf die eigentliche Aerodynamik und auf die Kinematik des Systems einzugehen, werden mit Hilfe einer einfachen Impulsbetrachtung Aussagen über die theoretischen Bestwerte der Gleitzahl eines Hubschraubers gemacht. Die Überlegungen zeigen den wichtigen Zusammenhang zwischen der Flächenbelastung, der Flughöhe und der günstigsten Fluggeschwindigkeit und gestatten durch Vergleich mit dem idealen Hubschrauber die Beurteilung der Güte der vorhandenen Baumuster.

---

2) z.B. Hohenemser, Zur Frage der Flugleistungen von Drehflüglern. Ing.Archiv Bd.8 (1937) S. 433 .

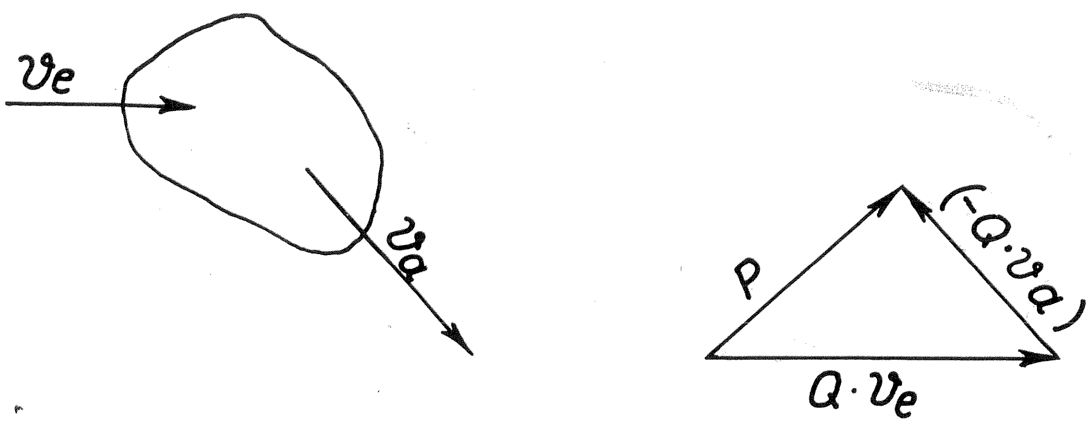

Bild 1

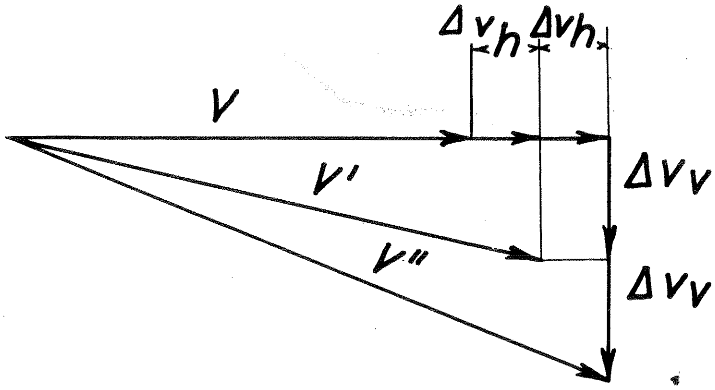

Bild 2

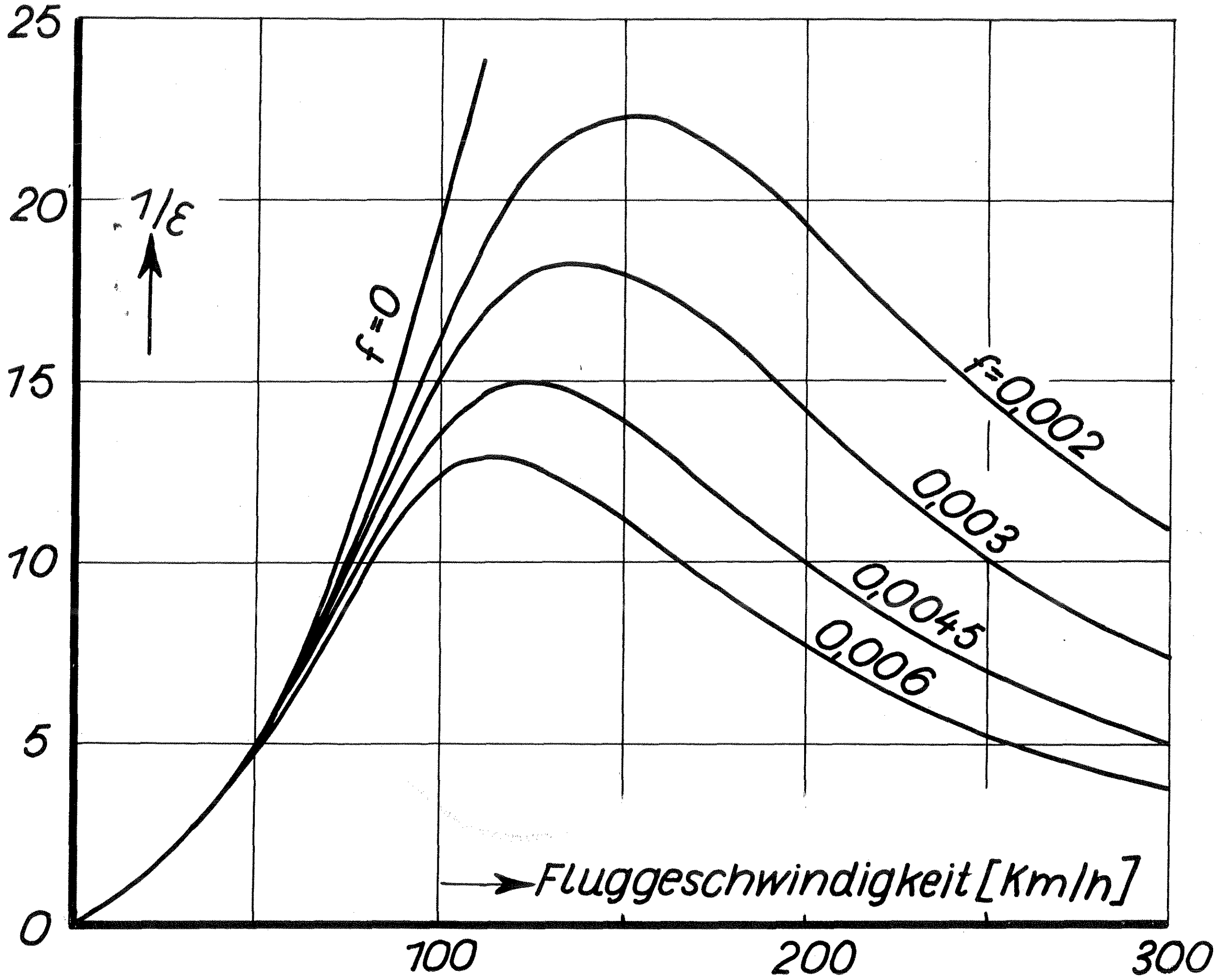

Bild 3. Einfluss der schädlichen Fläche auf die Gleitzahl.

$$\left(\frac{G/F}{2\varrho} = 4o\ m^2/s^2 \right)$$

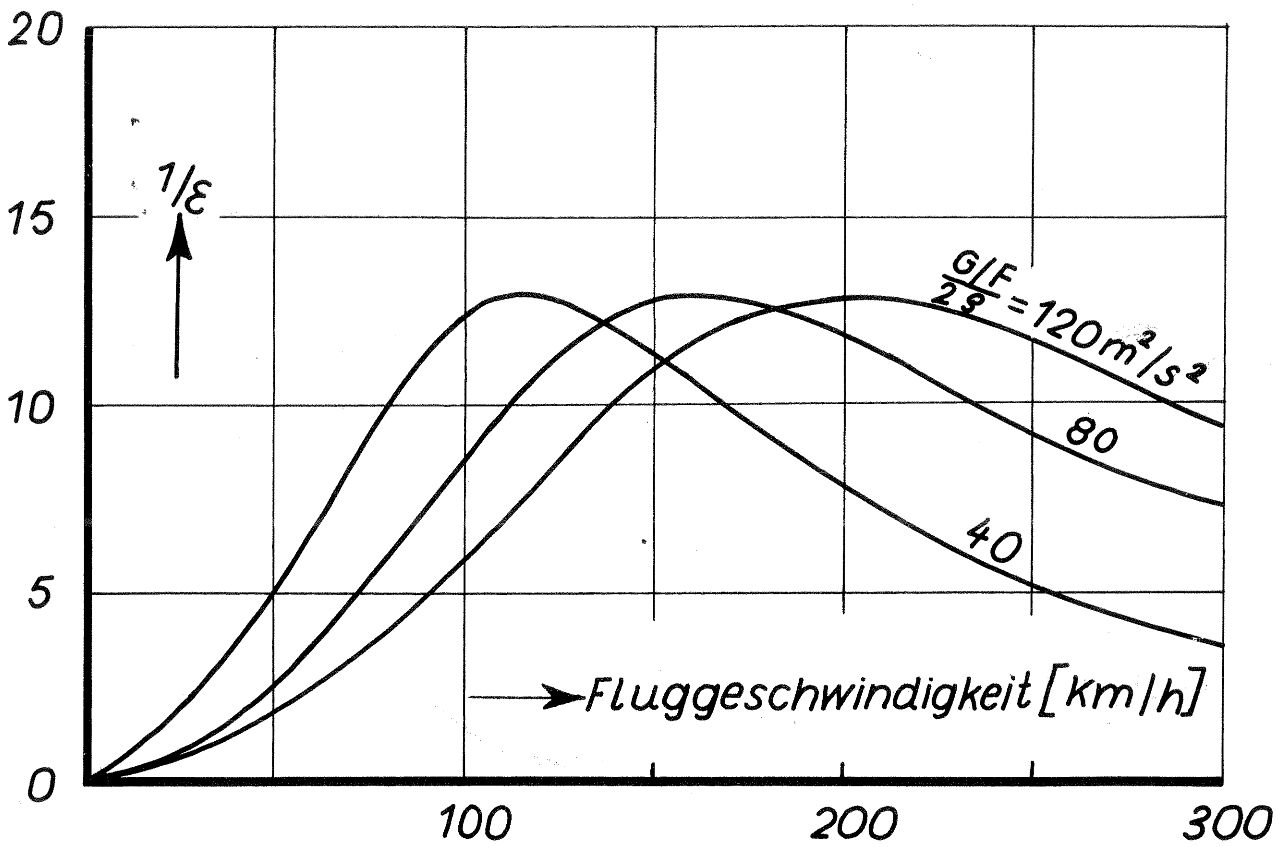

Bild 4. Einfluss der Flächenbelastung und Flughöhe auf die Gleitzahl (f = 0,006) .

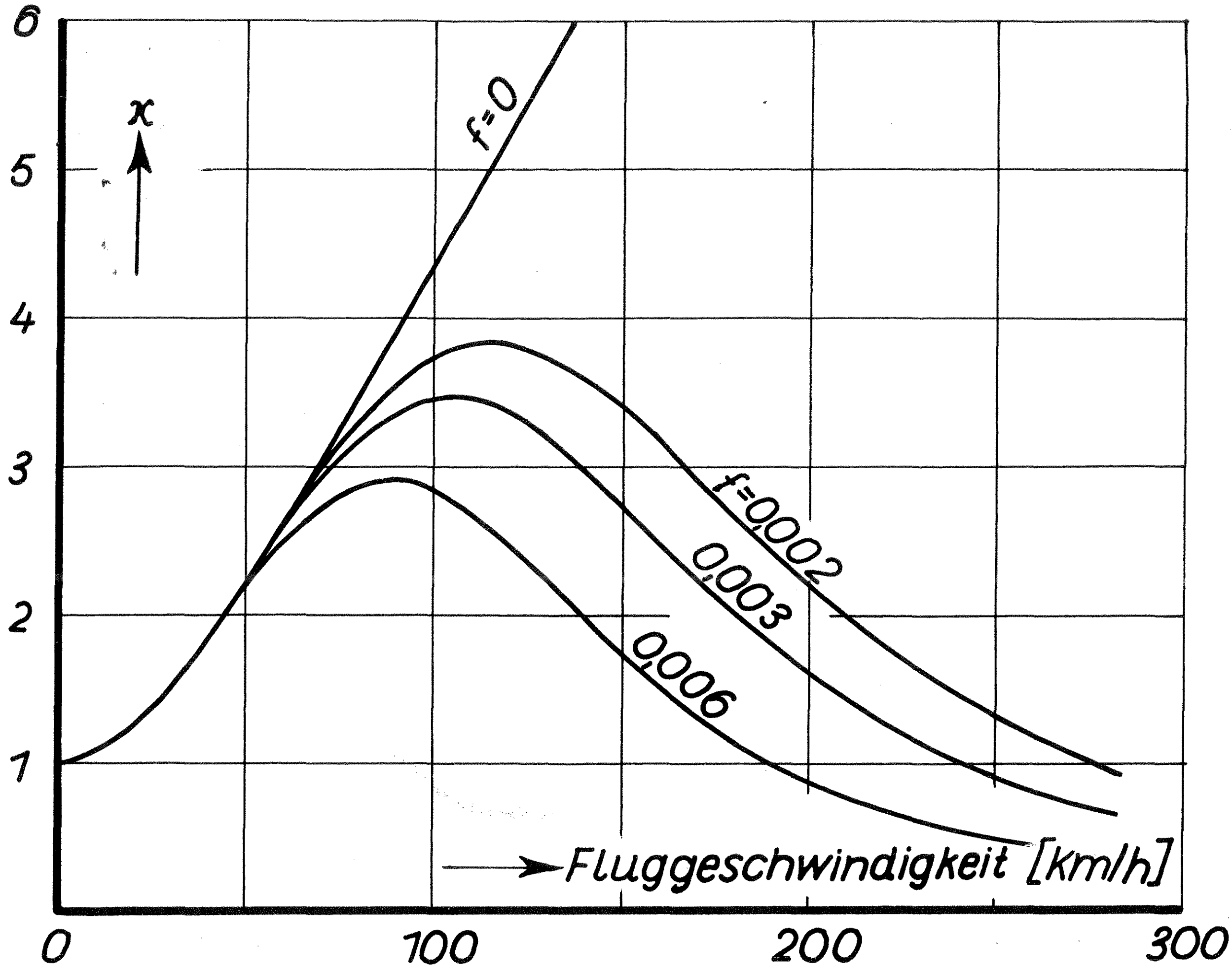

Bild 5. Einfluss der schädlichen Fläche auf $\varkappa$.

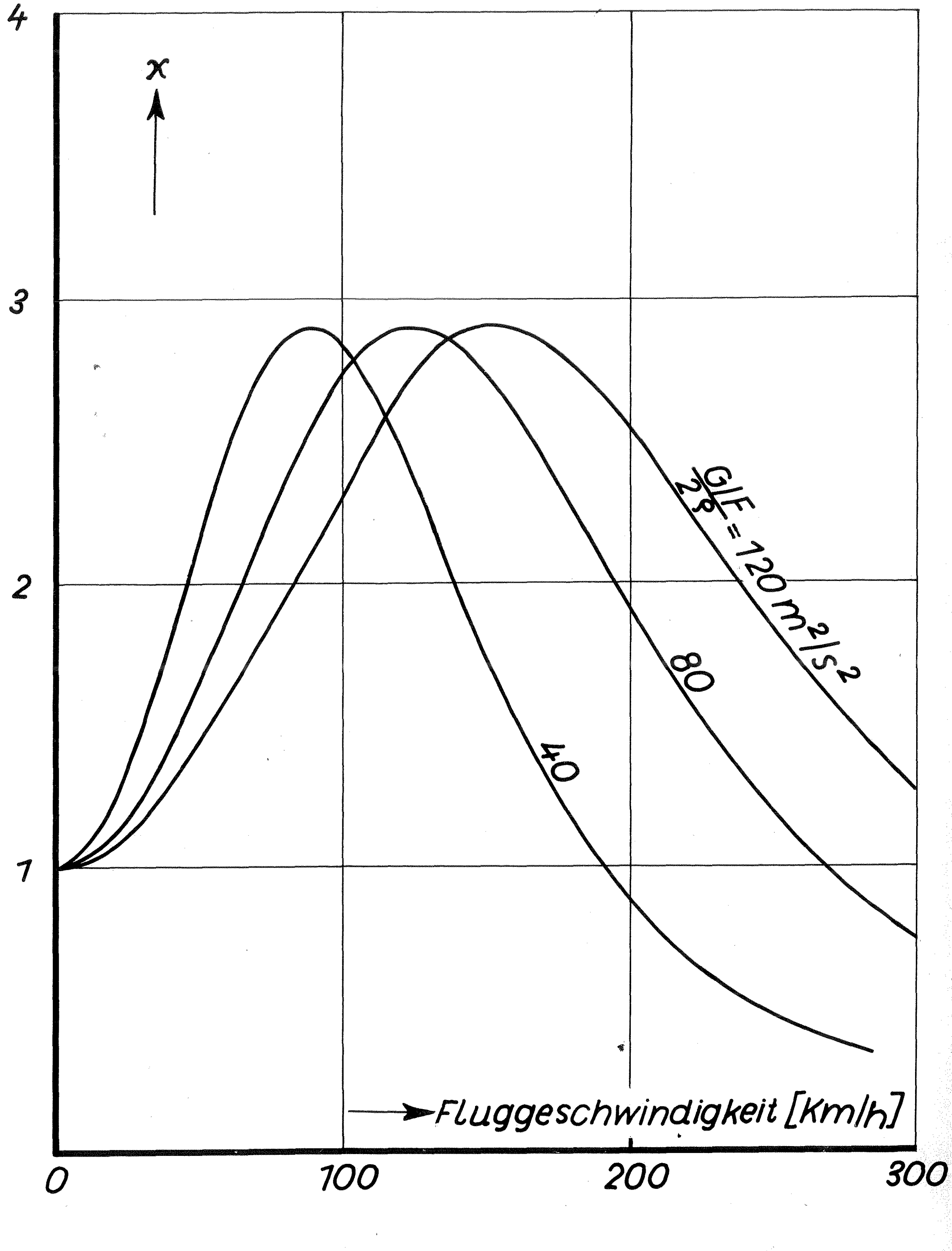

Bild 6. Einfluss der Flächenbelastung und Flughöhe auf κ.
(f = 0,006)

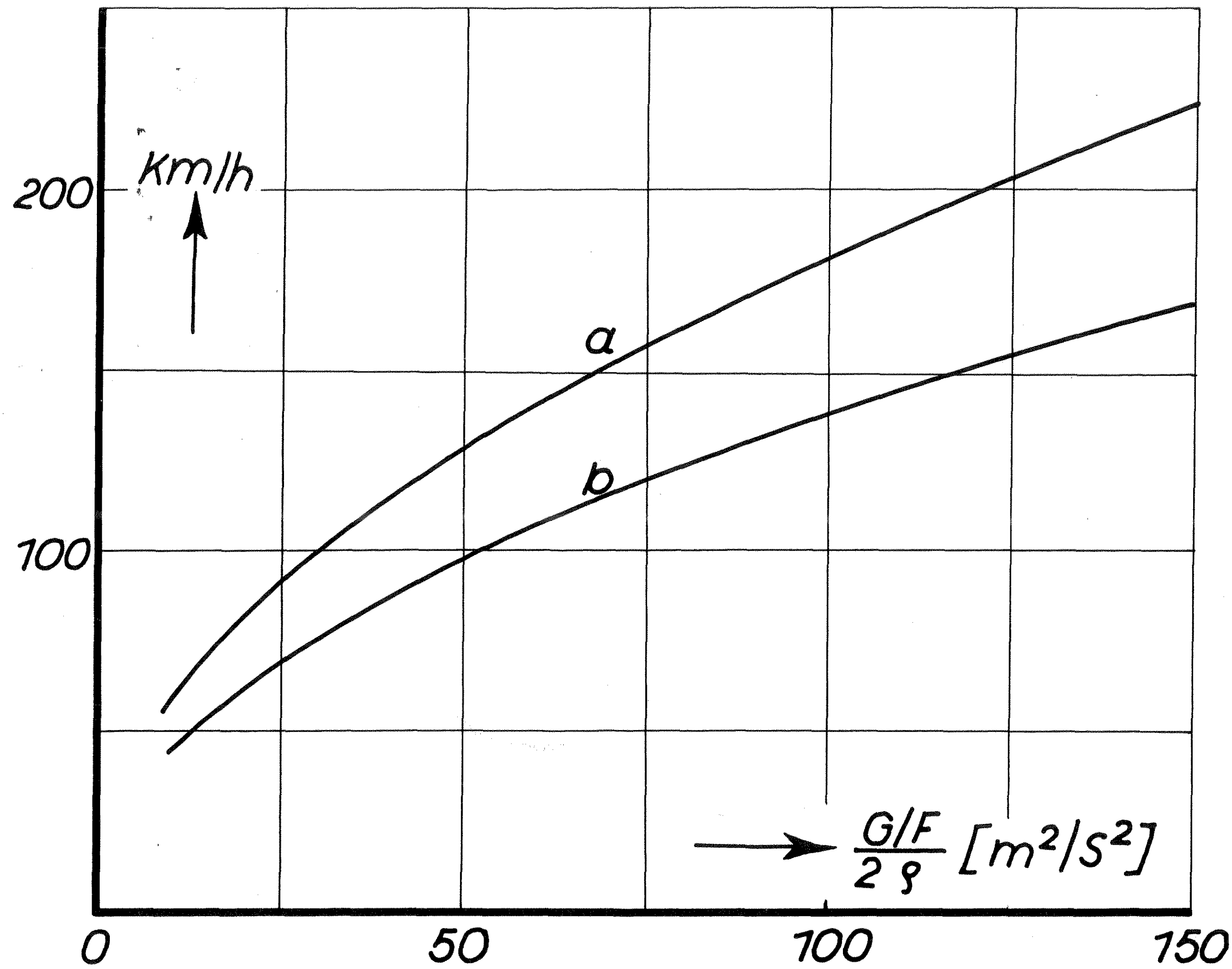

Bild 7. Optimale Fluggeschwindigkeiten für $f = 0{,}006$.
a) beste Gleitzahl,
b) geringster Leistungsbedarf.