

Beiträge zur dynamischen Stabilität der Drehflügelflugzeuge mit gelenkig angeschlossenen Blättern.

I. Teil

Allgemeine Unterlagen.

Übersicht:

Mit dem vorliegenden Bericht beginnt eine Aufsatzfolge mit Beiträgen zu dem bisher im Schrifttum noch wenig behandelten Problem der dynamischen Stabilität, in denen zur Hauptsache der Einfluss der wichtigsten Baugrößen und Konstruktionsdaten auf die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit exzentrisch angelenkten Blättern untersucht werden soll.

Da es ausser der Veröffentlichung von M.L.Mil[1]<sup>1)</sup> - wo aber auch nur Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Flugzeuglängs- und Querachse behandelt werden - nach Wissen des Verfassers kein Schrifttum über die räumliche Bewegung der Steilschrauben gibt, werden im I. Teilbericht als allgemeine Unterlage für derartige Stabilitätsuntersuchungen die Luft- und Massenkräfte eines Rotors bei beliebig beschleunigter, räumlicher Bewegung berechnet.

Gliederung:

- I. Bezeichnungen
- II. Die Berechnung der Steilschrauben mit zentrischen Schlaggelenken bei beliebig beschleunigter, räumlicher Bewegung
  - 1) Berechnung der Luftkräfte aus der Strömung am Blattelement
  - 2) Berechnung des Momentes der Massenkräfte in bezug auf das Schlaggelenk
  - 3) Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Schlagbewegung
- III. Die Berechnung der Trägheitskräfte des exzentrisch angelenkten Blattes
  - 1) Die Massenkräfte bei bekannter Schlagbewegung und gegebenem Beschleunigungszustand ohne Berücksichtigung der Schwenkbewegung
  - 2) Der Einfluss der Schwenkbewegung
- IV. Zusammenfassung
- V. Schrifttum

Der Bericht umfasst 31 Seiten

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GÖTTINGEN E.V.

Institut für instationäre Vorgänge

Institutsleiter

*Küssner*  
(Küssner)

Bearbeiter

*Sissingh*  
(Sissingh)

Gesehen

*M. Betz*  
(Betz)

## I. Bezeichnungen.

### a) Kennzeichnung des Flugzustandes.

XYZ - Rechtwinkliges, flugzeugfestes Koordinatensystem mit dem Ursprung in Rotormitte und den Einheitsvektoren  $i, j, k$ . Die XY-Ebene fällt in die Normalebene des Rotors. Richtung der positiven Achsen entsprechend DIN L 100:

X positiv in Richtung der Flugzeuglängsachse nach vorn,

Y positiv nach rechts bei einem Blick in normaler Flugrichtung,

Z bei normaler Fluglage positiv nach unten.

Die Komponenten der Kräfte, Momente, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden positiv gerechnet, wenn ihr Vektor (Rechtsdrehung in Pfeilrichtung) in die Richtung der positiven Achsen zeigt,

V m/s momentane Bahngeschwindigkeit des Rotormittelpunktes,

$\omega_{x,y,z}$  s<sup>-1</sup> Winkelgeschwindigkeiten des Flugzeuges um Rotormitte,

$\mu_{x,y,z}$  - Fortschrittsgrade des Rotors

$$\text{z.B. } \mu_x = \frac{v_x}{U}$$

$n_{x,y,z}$  - Beiwerte für das Verhältnis der Translationsbeschleunigungen  $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$  zur Erdbeschleunigung

$$\text{z.B. } n_x = \frac{\dot{v}_x}{g}$$

$k_{x,y,z}$  - Beiwerte für die Drehgeschwindigkeiten des Flugzeuges

$$\text{z.B. } k_x = \frac{\omega_x}{\Omega}$$

$\dot{k}_{x,y,z}$  - Beiwerte für die Drehbeschleunigungen des Flugzeuges

$$\text{z.B. } \dot{k}_x = \frac{\dot{\omega}_x}{\Omega^2}$$

1) Siehe das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

2) Wegen der Einführung des flugzeugfesten XYZ-Koordinatensystems wurden zwecks Vermeidung von Irrtümern die bisher beim Verfasser üblichen Bezeichnungen  $x, v_x, v_y$  in  $\xi, \xi_t, \xi_n$  abgeändert.

b) Rotordaten.

|          |          |   |
|----------|----------|---|
| R        | m        | Halbmesser des Rotors,  |
| eR       | m        | Abstand des Schlag- bzw. Schwenkgelenkes von der Drehachse,   |
| $\Omega$ | $s^{-1}$ | konstant angenommene Winkelgeschwindigkeit des Rotors gegenüber dem Rumpf des Flugzeuges,           |
| U        | m/s      | Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitze infolge der Eigendrehung des Rotors,<br>$U = R \cdot \Omega$ |
| z        | -        | Anzahl der Blätter eines Rotors,  |
| t        | m        | Tiefe des Rechteckblattes,  |
| $\beta$  | -        | aerodynamische Anstellung des Blattes, Winkel zwischen der Nullauftriebslinie und der Normalebene.  |

c) Strömung am Blattelement.<sup>2/</sup>

|             |     |   |
|-------------|-----|---|
| r           | m   | Abstand eines Blattelementes von der Drehachse,   |
| $r_0$       | m   | Abstand eines Blattelementes vom Gelenk   |
| $\psi$      | -   | Azimutwinkel des Blattes, Nullage in Richtung der negativen X-Achse,  |
| $\xi$       | -   | dimensionsloser Abstand eines Blattelementes von der Drehachse<br>$\xi = r/R$   |
| v           | m/s | absolute Geschwindigkeit eines Blattelementes mit den Komponenten:<br>$v_t$ parallel zur Normalebene,<br>$v_n$ senkrecht zur Normalebene. |
| $\lambda_d$ | -   | Durchflussgrad<br>$\lambda_d \cdot U = v_z - w$   |
| w           | m/s | Störgeschwindigkeit am Ort der Schraube,  |
| $c_a$       | -   | Auftriebsbeiwert der Strömung am Blattelement<br>$c_a \approx c'_a \cdot \left( \frac{\xi_n}{\xi_t} + \beta \right)$                      |
| $c'_a$      | -   | Auftriebsgradient,  |

- $\xi_n, \xi_t$  - Beiwerte für die Relativgeschwindigkeit am Blattelement,
- $\beta$  - Schlagwinkel, momentaner Winkel zwischen der Blattlängsachse und der Normalebene
- $$\beta = (a_0 + \Delta a_0) - (a_1 + \Delta a_1) \cos \psi - (b_1 + \Delta b_1) \sin \psi$$
- $a_0, a_1, b_1$  - Koeffizienten der quasistationären Schlagbewegung des momentanen Flugzustandes,
- $\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta b_1$  - Störungsglieder der Schlagbewegung,
- $\chi$  - Schwenkwinkel des Blattes,
- $$\chi = \chi_0 - \chi'_1 \cdot \cos \psi - \chi''_1 \cdot \sin \psi$$
- $\chi_0, \chi'_1, \chi''_1$  - Koeffizienten der Schwenkbewegung.

d) Blattdaten.

- $\nu$  kg/m Gewicht der Längeneinheit des Blattes,
- $G_F$  kg Gewicht eines Blattes,
- $M_G$  mkg Gewichtsmoment eines Blattes in bezug auf das Schlaggelenk,
- $K$  - Beiwert für das Verhältnis des Gewichtsmomentes zu dem Moment der Luftkräfte

$$K = \frac{M_G}{R^2 \nu^2 t c' \rho / 2}$$

- $\theta_{A,B,C}$  mkg<sup>2</sup> Massenträgheitsmomente eines Blattes in bezug auf seine Hauptachsen ABC,

- $f$  - Blattmassenkonstante

$$f = \frac{R^4 \rho t c' a}{\theta_B}$$

II. Die Berechnung der Steilschrauben mit zentrischen Schlaggelenken bei beliebig beschleunigter, räumlicher Bewegung.

1) Berechnung der Luftkräfte aus der Strömung am Blattelement.

Bei beliebiger Flugbahn und Schlagschwingung kann die absolute Bewegung des Blattes nach dem Miozzischen Satz so aufgespalten werden, dass die momentane Drehachse immer durch den gleichen Punkt des Blattes hindurchgeht. Wir wählen als ausgezeichneten Kör-

perpunkt zweckmässig die Rotormitte und zerlegen die Bewegung des Blattes in eine Translation mit der Geschwindigkeit  $V$  des Rotormittelpunktes:

$$\mathcal{D} = V_x \cdot i + V_y \cdot j + V_z \cdot k \quad (1)$$

und eine Rotation um diesen Punkt mit der nach Grösse und Richtung veränderlichen Winkelgeschwindigkeit<sup>3)</sup>

$$\omega \mathcal{D} = \omega_x \cdot i + \omega_y \cdot j + (\omega_z \pm \Omega) \cdot k \quad (2)$$

In diesen Gleichungen sind  $\omega_{x,y,z}$  die Winkelgeschwindigkeiten des Flugzeuges um die flugzeugfesten XYZ-Achsen (Koordinatennullpunkt in Rotormitte) und  $i, j, k$  die entsprechenden Einheitsvektoren. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors gegenüber dem Rumpf ist mit  $\Omega$  bezeichnet. Wenn wir von der Schlagbewegung - die später als Relativbewegung berücksichtigt wird - absehen, ist also in Gl.(2)

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + (\omega_z \pm \Omega)^2} \quad (3)$$

der absolute Betrag der resultierenden Winkelgeschwindigkeit des Blattes und  $\mathcal{D}$  der entsprechende Einheitsvektor.

Mit den von Tölke [2]<sup>4)</sup> übernommenen Bezeichnungen sei - s. Bild 2 - im Inertialsystem:

- $\vec{r}_M$  der Ortsvektor des Rotormittelpunktes M,
- $\vec{r}$  der Ortsvektor eines beliebigen Blattelementes,
- $\vec{r}'$  der Differenzvektor ( $\vec{r} - \vec{r}_M$ ).

Aus dem Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_M + \vec{r}' \quad (4)$$

eines Blattelementes erhalten wir durch einfache Differentiation die absolute Geschwindigkeit dieses Elementes:

$$\mathcal{D} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{abs.}} \quad (5)$$

3) Bei doppeltem Vorzeichen bezieht sich das obere stets auf den rechts herum drehenden (von oben gesehen) und das untere auf den links drehenden Rotor. Ist nur ein Vorzeichen vorhanden, so gilt dies für beide Umlaufrichtungen, s.a. Bild 1.

4) Der Leser findet bei Tölke [2] eine sehr anschauliche vektorielle Darstellung der Punkt- und Körpermechanik.

Nach der Vektoranalysis ist

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rel}} + [\omega \mathcal{J} \times \vec{r}] \quad (6)$$

Damit geht Gl.(5) über in

$$\mathcal{V} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rel}} + [\omega \mathcal{J} \times \vec{r}] \quad (7)$$

In dieser Gleichung ist

$\frac{d\vec{r}_M}{dt}$  die Translationsgeschwindigkeit des Rotormittelpunktes nach Gl.(1),

$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rel}}$  die Relativgeschwindigkeit infolge der Schlagbewegung,

$[\omega \mathcal{J} \times \vec{r}]$  die Geschwindigkeit infolge der resultierenden Drehung nach Gl.(2).

Wir fassen den Flügel als eine mit Masse behaftete Linie auf, für dessen Ortsvektor wir nach Bild 1 schreiben können:

$$\begin{aligned} \vec{r} = & -(r \cos\beta \cos\psi) \cdot i \\ & + (r \cos\beta \sin\psi) \cdot j \\ & - (r \sin\beta) \cdot k \end{aligned} \quad (8)$$

Daraus folgt für die Relativgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rel}} = & +(r \cos\psi \sin\beta \cdot \dot{\beta}) \cdot i \\ & + (r \sin\psi \sin\beta \cdot \dot{\beta}) \cdot j \\ & - (r \cos\beta \cdot \dot{\beta}) \cdot k \end{aligned} \quad (9)$$

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  des Flugzeuges um die Hochachse gegenüber der Eigendrehung  $\Omega$  des Rotors vernachlässigt, erhält man nach Gl.(7) für die absolute Geschwindigkeit eines Blattelementes den Ausdruck<sup>5)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & +(V_x + \Omega r \cos\beta \sin\psi - \omega_y r \sin\beta + r\dot{\beta} \cos\psi \sin\beta) \cdot i \\ & +(V_y + \Omega r \cos\beta \cos\psi + \omega_x r \sin\beta + r\dot{\beta} \sin\psi \sin\beta) \cdot j \\ & +(V_z + \omega_x r \cos\beta \sin\psi + \omega_y r \cos\beta \cos\psi - r\dot{\beta} \cos\beta) \cdot k \end{aligned} \quad (10)$$

Mit den dimensionslosen Beiwerten

$$\xi = r/R \quad (11)$$

5) Punkte bedeuten allgemein Ableitungen nach der Zeit.

$$k_{x,y} = \frac{\omega_{x,y}}{\Omega} \quad (12)$$

$$\mu_{x,y,z} = \frac{v_{x,y,z}}{U} \quad (13)$$

geht Gl.(10) über in

$$w = v_x \cdot i + v_y \cdot j + v_z \cdot k \quad (14)$$

mit

$$v_x = U(\mu_x + \{ \cos\beta \sin\psi - k_y \{ \sin\beta + \{ \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \cos\psi \sin\beta \} \} \} \quad (15)$$

$$v_y = U(\mu_y + \{ \cos\beta \cos\psi + k_x \{ \sin\beta + \{ \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \sin\psi \sin\beta \} \} \quad (16)$$

$$v_z = U(\mu_z + \{ k_x \{ \cos\beta \sin\psi + k_y \{ \cos\beta \cos\psi - \{ \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \cos\beta \} \} \} \quad (17)$$

Für die Berechnung der Luftkräfte am Blattelement müssen wir von dem flugzeugfesten XYZ-System auf ein blattfestes System übergehen. Mit Rücksicht auf die später zu behandelnden Massenkräfte wählen wir zweckmässig das in Bild 3 dargestellte ABC-System. ABC seien Hauptsachen, B fällt mit der Achse des Schlaggelenkes zusammen und liegt somit in der Normalebene des Rotors. Es ist

$$v_B = \pm v_x \cdot \sin\psi - v_y \cdot \cos\psi \quad (18)$$

$$v_C = + v_z \cdot \cos\beta - \sin\beta(v_x \cdot \cos\psi + v_y \cdot \sin\psi) \quad (19)$$

Die Geschwindigkeitskomponente  $v_A$  in Richtung der Blattlängsachse interessiert in diesem Zusammenhang nicht, da sie bei der Berechnung der Luftkräfte vernachlässigt wird. Mit Gl.(15-17) gehen Gl.(18,19) über in

$$v_B = U \left\{ \pm \left\{ \cos\beta + \sin\psi \left( \{ k_y \sin\beta - \mu_x \} - \cos\psi \left( \{ k_x \sin\beta + \mu_y \} \right) \right) \right\} \right\} \quad (20)$$

$$v_C = v_z \cdot \cos\beta - U \left\{ \left\{ \frac{\dot{\beta}}{\Omega} + \sin\psi \left( \mu_y \sin\beta + \{ k_x \} \right) + \cos\psi \left( \mu_x \sin\beta - \{ k_y \} \right) \right\} \right\} \quad (21)$$

Die Anströmung des Blattelementes setzt sich zusammen aus der negativen Eigengeschwindigkeit und dem Abwind  $w$ , von dem wir annehmen wollen, dass er gleichmässig über die Rotorkreisfläche verteilt

ist. Mit den Bezeichnungen nach Bild 4 ist

$$U \cdot \xi_t = \frac{1}{\lambda_d} v_B \quad (22)$$

$$U \cdot \xi_n = v_C - w \cdot \cos \beta \quad (23)$$

Setzt man

$$v_z - w = \lambda_d \cdot U \quad (24)$$

so erhält man mit den für kleine Schlagwinkel zulässigen Vernachlässigungen

$$\sin \beta = \beta$$

$$\cos \beta = 1$$

aus Gl.(20 - 24) folgenden Beziehungen für die Beiwerte der Relativgeschwindigkeit<sup>6)</sup> am Blattelement:

$$\xi_t = \left\{ \begin{array}{l} - \sin \psi (\xi \beta k_y - \mu_x) \\ \mp \cos \psi (\xi \beta k_x + \mu_y) \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\xi_n = \lambda_d - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta}{\Omega} \mp \sin \psi (\beta \mu_y + \xi k_x) \\ - \cos \psi (\beta \mu_x - \xi k_y) \end{array} \right. \quad (26)$$

Da  $\xi \beta k_y$  bzw.  $\xi \beta k_x \ll \xi$  ist, können wir diese Glieder in Gl.(25) vernachlässigen<sup>7)</sup>. Damit geht Gl.(25) über in

$$\xi_t = \left\{ \begin{array}{l} + \mu_x \sin \psi \mp \mu_y \cos \psi \end{array} \right. \quad (27)$$

Für die weitere Rechnung werden die Ausdrücke  $\xi_t^2$  und  $\xi_n \cdot \xi_t$  benötigt. Mit  $\xi_n$ ,  $\xi_t$  nach Gl.(26) bzw. Gl.(27) erhalten wir

$$\begin{aligned} \xi_t^2 &= \xi^2 + \frac{1}{2}(\mu_x^2 + \mu_y^2) + \sin \psi \cdot 2\xi \mu_x \\ &\quad \mp \cos \psi \cdot 2\xi \mu_y \\ &\quad \mp \sin 2\psi \cdot \mu_x \mu_y \\ &\quad + \cos 2\psi \cdot \frac{1}{2}(\mu_y^2 - \mu_x^2) \end{aligned} \quad (28)$$

<sup>6)</sup> Der Index  $t$  bzw.  $n$  wurde in Übereinstimmung mit den in den gleichen Richtungen verlaufenden Tangential- und Normalkräften gewählt.

<sup>7)</sup> Bei einem Schlagwinkel von  $\beta = 11^\circ$  und  $k_{x,y} = 0,1$  beträgt der Fehler beispielsweise etwa 2%.

$$\begin{aligned}
 \zeta_t \cdot \zeta_n = & \left\{ \lambda_d - \xi^2 \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \mp \frac{1}{2} \{ (k_x \mu_x + k_y \mu_y) \right. \\
 & + \sin\psi \cdot \left\{ \mp \beta \xi \mu_y - \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \xi \mu_x \mp \xi^2 k_x + \mu_x \lambda_d \right\} \\
 & + \cos\psi \cdot \left\{ -\beta \xi \mu_x \pm \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \xi \mu_y + \xi^2 k_y \mp \mu_y \lambda_d \right\} \\
 & + \sin 2\psi \cdot \left\{ \frac{1}{2} \beta (\mu_y^2 - \mu_x^2) + \frac{1}{2} \{ (k_x \mu_y + k_y \mu_x) \right\} \\
 & \left. + \cos 2\psi \cdot \left\{ \pm \beta \mu_x \mu_y \pm \frac{1}{2} \{ (k_x \mu_x - k_y \mu_y) \right\} \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

Den in diesen Gleichungen vorkommenden Schlagwinkel  $\beta$  ersetzen wir durch eine Fourier-Reihe von der Form

$$\beta = a_0 + \Delta a_0 - (a_1 + 4a_1) \cos\psi - (b_1 + 4b_1) \sin\psi \quad (30)$$

In diesem Ansatz sind  $a_0$ ,  $a_1$  und  $b_1$  die Koeffizienten der quasistationären Schlagbewegung des momentanen Flugzustandes, sie sind also von der Zeit  $t$  abhängig. Die Koeffizienten  $\Delta a_0$ ,  $\Delta a_1$  und  $\Delta b_1$  dagegen sind zeitabhängige Störungsglieder. Durch Differenzieren der Gl. (30) erhalten wir mit  $\frac{d\psi}{dt} = \Omega$  folgende Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Schlagbewegung:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta} = & \Delta \dot{a}_0 + \sin\psi \left\{ \Omega (a_1 + 4a_1) - \Delta \dot{b}_1 \right\} \\
 & + \cos\psi \left\{ -\Omega (b_1 + 4b_1) - \Delta \dot{a}_1 \right\} \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\beta} = & \Delta \ddot{a}_0 + \sin\psi \left\{ \Omega^2 (b_1 + 4b_1) + 2\Delta \dot{a}_1 \Omega - \Delta \ddot{b}_1 \right\} \\
 & + \cos\psi \left\{ \Omega^2 (a_1 + 4a_1) - 2\Delta \dot{b}_1 \Omega - \Delta \ddot{a}_1 \right\} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Damit geht Gl. (29) über in

$$\begin{aligned}
 \zeta_t \cdot \zeta_n = & \left\{ \lambda_d \mp \frac{1}{2} \{ (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi^2 \mp \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} \xi \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} \xi \mu_x \right. \\
 & + \frac{\sin\psi}{\xi} \left\{ \mu_x \lambda_d \mp \xi^2 k_x \mp (a_0 + \Delta a_0) \xi \mu_y - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi \mu_x \right. \\
 & \quad \left. - (a_1 + 4a_1) \left( \xi^2 + \frac{1}{4} \mu_y^2 - \frac{1}{4} \mu_x^2 \right) \pm (b_1 + 4b_1) \cdot \frac{1}{2} \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \xi^2 \right\} \\
 & + \frac{\cos\psi}{\xi} \left\{ \mp \mu_y \lambda_d + \xi^2 k_y - (a_0 + \Delta a_0) \xi \mu_x \pm \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi \mu_y \right. \\
 & \quad \left. + (b_1 + 4b_1) \left( \xi^2 + \frac{1}{4} \mu_x^2 - \frac{1}{4} \mu_y^2 \right) \mp (a_1 + 4a_1) \cdot \frac{1}{2} \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \xi^2 \right\} \\
 & + \dots \quad (33)
 \end{aligned}$$

Axialschub. Nachdem die Relativgeschwindigkeit am Blattelement bekannt ist, können wir zur Berechnung der Luftkräfte übergehen. Der zum Azimutwinkel  $\psi$  gehörige Axialschub  $S_a$  eines unverwundenen Rechteckblattes mit der Tiefe  $t$  beträgt bei den üblichen Vernachlässigungen

$$S_a = RU^2 t c_a \frac{Q}{2} \int_0^B \xi_t^2 \left( \frac{\xi_n}{\xi_t} + \eta \right) d\xi \quad (34)$$

In dieser Gleichung berücksichtigt die obere Integrationsgrenze  $B$  in bekannter Weise den Schubfall an der Blattspitze infolge der endlichen Flügelzahl. Nach Wheatley [3] ist etwa  $B = 1 - \frac{t}{2R}$ .

Die Ausrechnung von Gl. (34) ergibt mit Gl. (28, 33) folgende - nach der ersten Harmonischen abgebrochene - Fourierreihe für den Axialschub:

$$\begin{aligned} \frac{S_a}{RU^2 t c_a \frac{Q}{2}} = & \left[ \begin{aligned} & \eta \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu_x^2 + \frac{1}{2} B \mu_y^2 \right) + \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \\ & + \frac{1}{4} B^2 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{4 \dot{a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{3} B^3 \\ & + \frac{4 \dot{a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^2 \mu_y + \frac{4 b_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^2 \mu_x \\ & + \sin \psi \left\{ \begin{aligned} & \eta B^2 \mu_x + B \mu_x \lambda_d + \frac{1}{3} B^3 k_x \\ & + (a_0 + 4a_0) \frac{1}{2} B^2 \mu_y - \frac{4 \dot{a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_x \\ & - (a_1 + 4a_1) \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_y^2 - \frac{1}{4} B \mu_x^2 \right) \\ & + (b_1 + 4b_1) \frac{1}{2} B \mu_x \mu_y + \frac{4 b_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{3} B^3 \end{aligned} \right\} \\ & + \cos \psi \left\{ \begin{aligned} & \eta B^2 \mu_y + B \mu_y \lambda_d + \frac{1}{3} B^3 k_y \\ & - (a_0 + 4a_0) \frac{1}{2} B^2 \mu_x + \frac{4 \dot{a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_y \\ & + (b_1 + 4b_1) \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_x^2 - \frac{1}{4} B \mu_y^2 \right) \\ & + (a_1 + 4a_1) \frac{1}{2} B \mu_x \mu_y + \frac{4 \dot{a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{3} B^3 \end{aligned} \right\} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right] \quad (35) \end{aligned}$$

Die daraus resultierenden Luftkräfte in der Normalebene (XY-Ebene) betragen pro Blatt

$$P_{Lx} = +S_a \beta \cos \psi \quad (36)$$

$$P_{Ly} = \pm S_a \beta \sin \psi \quad \cdot \quad \sqrt{\text{schreiben}} \quad (37)$$

Wenn wir die Fourier-Reihe Gl.(35) für den Axial Schub in der Form  $S_a = S_{a0} + S'_{a1} \cos \psi + S''_{a1} \sin \psi + \dots$  und bei den Kräften  $P_{Lx,y}$  von den während des Umlaufes periodisch wechselnden Anteilen absehen, gehen Gl.(36,37) über in

$$P_{Lx} = + \frac{1}{2}(a_0 + \Delta a_0) S'_{a1} - \frac{1}{2}(a_1 + \Delta a_1) S_{a0} \quad (38a)$$

$$P_{Ly} = \pm \frac{1}{2}(a_0 + \Delta a_0) S''_{a1} \mp \frac{1}{2}(b_1 + \Delta b_1) S_{a0} \quad (39a)$$

Mit  $S_{a0}$ ,  $S'_{a1}$  und  $S''_{a1}$  nach Gl.(35) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{P_{Lx}}{RU^2 t c_a' \varrho / 2} = & + \frac{1}{2}(a_0 + \Delta a_0) \left\{ \mp \sqrt{3} B^2 \mu_y \mp B \mu_y \lambda_d + \frac{1}{3} B^3 k_y \right. \\ & - (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{2} B^2 \mu_x \pm \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{2} B^2 \mu_y \\ & + (b_1 + \Delta b_1) \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_x^2 - \frac{1}{4} B \mu_y^2 \right) \\ & \left. \mp (a_1 + \Delta a_1) \frac{1}{2} B \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \right\} \\ & - \frac{1}{2}(a_1 + \Delta a_1) \left\{ + \sqrt{3} \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu_x^2 + \frac{1}{2} B \mu_y^2 \right) + \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \right. \\ & + \frac{1}{4} B^2 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \\ & \left. \mp \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^2 \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^2 \mu_x \right\} \quad \dots \quad (38b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{Ly}}{RU^2 t c_a' \varrho / 2} = & + \frac{1}{2}(a_0 + \Delta a_0) \left\{ \pm \sqrt{3} B^2 \mu_x \pm B \mu_x \lambda_d - \frac{1}{3} B^3 k_x \right. \\ & - (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{2} B^2 \mu_y \mp \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{2} B^2 \mu_x \\ & \mp (a_1 + \Delta a_1) \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_y^2 - \frac{1}{4} B \mu_x^2 \right) \\ & \left. + (b_1 + \Delta b_1) \frac{1}{2} B \mu_x \mu_y \pm \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{2}(b_1 + \Delta b_1) \left\{ \pm \int \left( \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu_x^2 + \frac{1}{2} B \mu_y^2 \right) \pm \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} B^2 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) \mp \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \right. \\
 \left. - \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^2 \mu_y \pm \frac{\Delta b_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^2 \mu_x \right\}. \quad (39b)
 \end{aligned}$$

Moment der Luftkräfte. Das Moment der Luftkräfte in bezug auf das Schlaggelenk beträgt analog Gl. (34)

$$M_L = R^2 U^2 t c_a' \frac{Q}{2} \int_0^B \xi_t^2 \left\{ \left( \frac{\xi_n}{\xi_t} + \int \right) d\xi \right\}. \quad (40)$$

Mit Gl. (28, 33) erhalten wir für dieses Integral folgende Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
 \frac{M_L}{R^2 U^2 t c_a' \frac{Q}{2}} = & \int \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu_x^2 + \frac{1}{4} B^2 \mu_y^2 \right) + \frac{1}{3} B^3 \lambda_d \\
 & \mp \frac{1}{6} B^3 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 \\
 & \mp \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_y + \frac{\Delta b_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_x \\
 + \sin \psi \left\{ & \int \frac{2}{3} B^3 \mu_x + \frac{1}{2} B^2 \mu_x \lambda_d \mp \frac{1}{4} B^4 k_x \right. \\
 & \mp (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{3} B^3 \mu_y - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_x \\
 & - (a_1 + \Delta a_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 \right) \\
 & \left. \pm (b_1 + \Delta b_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta b_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 \right\} \\
 + \cos \psi \left\{ & \mp \int \frac{2}{3} B^3 \mu_y \mp \frac{1}{2} B^2 \mu_y \lambda_d + \frac{1}{4} B^4 k_y \right. \\
 & - (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{3} B^3 \mu_x \pm \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_y \\
 & + (b_1 + \Delta b_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 \right) \\
 & \left. \mp (a_1 + \Delta a_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 \right\} \\
 + & \dots \dots \dots \quad (41)
 \end{aligned}$$

2) Berechnung des Momentes der Massenkräfte in bezug auf das Schlaggelenk.

An Massenkräften treten auf:

- a) das Eigengewicht des Blattes,
- b) die Trägheitskräfte der Translationsbeschleunigungen,
- c) die Trägheitskräfte der Drehbeschleunigungen.

Bezeichnet man das auf das Schlaggelenk bezogene Gewichtsmoment eines Blattes mit  $M_G$ , so beträgt bei den Translationsbeschleunigungen

$$\dot{V}_x = n_x \cdot g \quad (42)$$

$$\dot{V}_y = n_y \cdot g \quad (43)$$

$$\dot{V}_z = n_z \cdot g \quad (44)$$

das Moment der oben unter a und b aufgeführten Kräfte in bezug auf das Schlaggelenk bei normaler Fluglage

$$M_{M1} = M_G \left\{ n_z - 1 - \beta(n_x \cdot \cos\psi + n_y \cdot \sin\psi) \right\} \quad (45)$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, dass positive Momente im Sinne einer Schlagwinkel-Vergrößerung wirken.

Mit  $\beta$  nach Gl.(30) und

$$K = \frac{M_G}{R^2 U^2 t c_a' Q / 2} \quad (46)$$

geht Gl.(45) über in

$$\frac{M_{M1}}{R^2 U^2 t c_a' Q / 2} = K \left\{ \begin{aligned} & n_z - 1 + \frac{1}{2} n_x (a_1 + \Delta a_1) \pm \frac{1}{2} n_y (b_1 + \Delta b_1) \\ & - \cos\psi \cdot n_x (a_0 + \Delta a_0) \\ & \mp \sin\psi \cdot n_y (a_0 + \Delta a_0) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Das Moment der infolge der Drehbeschleunigungen auftretenden Trägheitskräfte wird bei einem zentrischen Schlaggelenk am einfachsten mit den Eulerschen Kreiselgleichungen berechnet. Wir haben zu diesem Zwecke die Geschwindigkeitsvektoren der verschiedenen Drehbewegungen:

- 1) Drehung des Flugzeuges um die X-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_x$ ,
- 2) Drehung des Flugzeuges um die Y-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_y$ ,
- 3) Eigendrehung des Rotors mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ ,
- 4) Schlagbewegung des Blattes mit der Winkelgeschwindigkeit  $\beta$

auf das bereits früher erwähnte blattfeste ABC-System umzurechnen. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptachsen (s. Bild 1 und 3) mit  $\omega_{A,B,C}$  und die entsprechenden Hauptträgheitsmomente des Blattes mit  $\Theta_{A,B,C}$ , so können wir schreiben:

$$\omega_A = \mp \Omega \sin\beta - \omega_x \cos\psi \cos\beta \mp \omega_y \cos\beta \sin\psi \quad (48)$$

$$\omega_B = \dot{\beta} \pm \omega_x \sin\psi - \omega_y \cos\psi \quad (49)$$

$$\omega_C = \pm \Omega \cos\beta - \omega_x \cos\psi \sin\beta \mp \omega_y \sin\psi \sin\beta \quad (50)$$

Nach Euler ist das Moment der Massekräfte um das Schlaggelenk (B-Achse)

$$M_{M2} = (\theta_C - \theta_A) \omega_A \omega_C - \theta_B \cdot \dot{\omega}_B \quad (51)$$

Wenn wir das Blatt als einen verlängerten, symmetrischen Kreisel auffassen, dessen Trägheitsmoment um die Figurenachse A gegenüber den beiden anderen Hauptträgheitsmomenten vernachlässigt werden kann, so ist mit  $\theta_B = \theta_C = \theta$

$$M_{M2} = \theta (\omega_A \cdot \omega_C - \dot{\omega}_B) \quad (52)$$

Als Gl. (41-43) folgt mit  $\sin\beta = \beta$  und  $\cos\beta = 1$

$$\begin{aligned} \omega_A \cdot \omega_C = & \beta \left( \frac{1}{2} \omega_x^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 - \Omega^2 \right) \\ & + \sin\psi \left\{ +\Omega \omega_y (\beta^2 - 1) \right\} \\ & + \cos\psi \left\{ \pm \Omega \omega_x (\beta^2 - 1) \right\} \\ & + \sin 2\psi \left\{ \pm \beta \omega_x \omega_y \right\} \\ & + \cos 2\psi \left\{ \frac{1}{2} \beta (\omega_x^2 - \omega_y^2) \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_B = & \ddot{\beta} + \sin\psi \left( \pm \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y \right) \\ & + \cos\psi \left( -\dot{\omega}_y \pm \Omega \omega_x \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Mit diesen Werten geht Gl. (52) über in

$$\begin{aligned} M_{M2} = & \theta \left[ \beta \left( \frac{1}{2} \omega_x^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 - \Omega^2 \right) - \ddot{\beta} \right. \\ & + \sin\psi \cdot \left\{ \Omega \omega_y (\beta^2 - 2) \mp \dot{\omega}_x \right\} \\ & + \cos\psi \cdot \left\{ \pm \Omega \omega_x (\beta^2 - 2) + \dot{\omega}_y \right\} \\ & + \sin 2\psi \left\{ \pm \beta \omega_x \omega_y \right\} \\ & \left. + \cos 2\psi \left\{ \frac{1}{2} \beta (\omega_x^2 - \omega_y^2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Da  $\frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \ll \Omega^2$  und  $\beta^2 \ll 2$  ist, können wir diese Glieder in

Gl.(55) vernachlässigen und wir erhalten mit  $\beta, \ddot{\beta}$  nach Gl.(30 bzw. 32) und den Abkürzungen

$$\dot{k}_{x,y} = \frac{\dot{\omega}_{x,y}}{\Omega^2} \quad (56)$$

schliesslich folgenden Ausdruck für das Moment der Trägheitskräfte aus den Drehbeschleunigungen

$$M_{M2} = - \Theta \Omega^2 \left[ \begin{aligned} & a_0 + \Delta a_0 + \frac{\Delta \ddot{a}_0}{\Omega^2} \\ & + \sin\psi \cdot \left\{ \frac{2\Delta \dot{a}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{b}_1}{\Omega^2} + 2k_y \dot{k}_x \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(a_1 + \Delta a_1)k_x k_y + \frac{1}{4}(b_1 + \Delta b_1)(3k_y^2 + k_x^2) \right\} \\ & + \cos\psi \cdot \left\{ -2\frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{a}_1}{\Omega^2} + 2k_x \dot{k}_y \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(b_1 + \Delta b_1)k_x k_y + \frac{1}{4}(a_1 + \Delta a_1)(3k_x^2 + k_y^2) \right\} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right] \quad (57)$$

3) Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Schlagbewegung.

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$M_L + M_{M1} + M_{M2} = 0 \quad (58)$$

erhalten wir mit

$$\gamma = \frac{R^4 q t c'_a}{\Theta} \quad (59)$$

durch Koeffizientenvergleich aus Gl.(41,47,57) folgende Bewegungsgleichungen für die Schlagbewegung:

$$a_0 + \Delta a_0 + \frac{\Delta \ddot{a}_0}{\Omega^2} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{N} \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu_x^2 + \frac{1}{4} B^2 \mu_y^2 \right) + \frac{1}{3} B^3 \lambda_d + \frac{1}{6} B^3 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^4 + \right. \\ \left. + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_x + K \left\{ n_z - 1 + \frac{1}{2} n_x (a_1 + \Delta a_1) + \frac{1}{2} n_y (b_1 + \Delta b_1) \right\} \right] \dots (60)$$

$$\frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{b}_1}{\Omega^2} + 2k_y + \dot{k}_x + \frac{1}{2} (a_1 + \Delta a_1) k_x k_y + \frac{1}{4} (b_1 + \Delta b_1) (3k_y^2 + k_x^2) \\ = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{N} \cdot \frac{2}{3} B^3 \mu_x + \frac{1}{2} B^2 \mu_x \lambda_d + \frac{1}{4} B^4 k_x + (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{3} B^3 \mu_y - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_x - \right. \\ \left. - (a_1 + \Delta a_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 \right) + (b_1 + \Delta b_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 + K n_y (a_0 + \Delta a_0) \right] \dots (61)$$

$$-2 \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{a}_1}{\Omega^2} + 2k_x - \dot{k}_y + \frac{1}{2} (b_1 + \Delta b_1) k_x k_y + \frac{1}{4} (a_1 + \Delta a_1) (3k_x^2 + k_y^2) \\ = \frac{1}{2} \left[ + \mathcal{N} \frac{2}{3} B^3 \mu_y + \frac{1}{2} B^2 \mu_y \lambda_d + \frac{1}{4} B^4 k_y - (a_0 + \Delta a_0) \frac{1}{3} B^3 \mu_x + \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_y + \right. \\ \left. + (b_1 + \Delta b_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 \right) + (a_1 + \Delta a_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 - K n_x (a_0 + \Delta a_0) \right] \dots (62)$$

III. Die Berechnung der Trägheitskräfte des exzentrisch angelenkten Blattes.

1) Die Massenkräfte bei bekannter Schlagbewegung und gegebenem Beschleunigungszustand ohne Berücksichtigung der Schwenkbewegung.

Translationsbeschleunigungen. Bezeichnet man das Gewicht eines Drehflügels mit  $G_F$ , so greifen bei den Translationsbeschleunigungen  $\dot{V}_{x,y,z}$  am Schlaggelenk folgende Trägheitskräfte an:

$$P_x = - G_F \cdot n_x \quad (63)$$

$$P_y = - G_F \cdot n_y \quad (64)$$

$$P_z = - G_F \cdot n_z \quad (65)$$

Drehbeschleunigungen. Wir wollen nach Bild 5 den Abstand des Schlaggelenkes von der Drehachse mit  $eR$  und die Entfernung eines Blattelementes von diesem Gelenk mit  $r_0$  bezeichnen. Aus dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -(eR+r_0 \cdot \cos\beta) \cos\psi \cdot i \\ &\quad + (eR+r_0 \cdot \cos\beta) \sin\psi \cdot j \\ &\quad - r_0 \cdot \sin\beta \cdot k \end{aligned} \quad (66)$$

erhalten wir die Relativgeschwindigkeit  $v'$  und die Relativbeschleunigung  $a_R$  durch partielle Differentiation. Es ist

$$v' = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rel}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} \quad (67)$$

$$a_R = \left(\frac{dv'}{dt}\right)_{\text{rel}} = \frac{\partial v'}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} \quad (68)$$

Mit Gl.(66) folgt aus Gl.(67) und Gl.(68):

$$\begin{aligned} v' &= + r_0 \dot{\beta} \sin\beta \cos\psi \cdot i \\ &\quad + r_0 \dot{\beta} \sin\beta \sin\psi \cdot j \\ &\quad - r_0 \dot{\beta} \cos\beta \cdot k \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} a_R &= r_0 \left[ + (\dot{\beta}^2 + \beta \ddot{\beta}) \cos\psi \cdot i \right. \\ &\quad + (\dot{\beta}^2 + \beta \ddot{\beta}) \sin\psi \cdot j \\ &\quad \left. + (\beta \dot{\beta}^2 - \ddot{\beta}) \cdot k \right] \quad (70) \end{aligned}$$

Die absolute Beschleunigung eines Blattelementes setzt sich zusammen aus der Führungsbeschleunigung, der Coriolisbeschleunigung und der Relativbeschleunigung. Nach Tölke [2] ist die Führungsbeschleunigung

$$a_F = \dot{\omega} \mathcal{N} \times \vec{r} + \omega^2 \mathcal{N} \times [\mathcal{N} \times \vec{r}] + \omega \frac{d\mathcal{N}}{dt} \times \vec{r} \quad (71)$$

Die Coriolisbeschleunigung beträgt

$$a_C = 2\omega \mathcal{N} \times v' \quad (72)$$

In Gl.(71) stellen das erste und zweite Vektorprodukt die Tangential- bzw. die Normalbeschleunigung für die momentane Kreisbahn der Drehbewegung dar. Der Ausdruck  $\omega \frac{d\mathcal{N}}{dt} \times \vec{r}$  berücksichtigt die ständige Änderung der Lage des resultierenden Drehvektors

$$\omega \mathcal{N} = \omega_x \cdot i + \omega_y \cdot j \pm \Omega \cdot k \quad (73)$$

Mit

$$\dot{\omega} \mathcal{N} = \dot{\omega}_x \cdot i + \dot{\omega}_y \cdot j \quad (74)$$

$$\omega \frac{d\gamma}{dt} = \pm \omega_y \Omega r \mp \omega_x \Omega j \quad (75)$$

ergeben sich im einzelnen die in der Tabelle I zusammengestellten Beschleunigungen, aus denen sodann in bekannter Weise die Trägheitskräfte berechnet werden können:

Bezeichnet  $\nu$  das Gewicht der Längeneinheit, so ist die Trägheitskraft des ganzen Blattes

$$P_{x,y,z} = -\frac{1}{g} \int_0^{R(1-e)} p_{x,y,z} \cdot \nu \cdot dr_0 \quad (76)$$

In dieser Gleichung ist  $p_{x,y,z}$  der absolute Betrag des Beschleunigungsvektors  $\gamma_{x,y,z}$ .

## 2) Der Einfluss der Schwenkbewegung.

Wir wollen nun noch den Fall untersuchen, dass ausser dem bereits behandelten Schlaggelenk ein Schwenkgelenk vorhanden ist, dessen Achse parallel zur Drehachse des Rotors liegt. Dieses Gelenk gestattet dem Blatt also eine - meistens durch Reibungsdämpfer gedämpfte - Schwingung in seiner Umlaufebene. Der Abstand des Schwenkgelenkes von der Drehachse wird analog dem Schlaggelenkabstand mit  $eR$  und die Entfernung eines Blattelementes von diesen Gelenken mit  $r_0$  bezeichnet. Wir haben es also mit einem kardanisch angelenkten Flügel zu tun.

Der Schwenkwinkel  $\chi$  ist nach Bild 6 so definiert, dass bei einer positiven Schwenkung das Blatt gegenüber seiner gestreckten Lage im Umlaufsinn zurückbleibt. Aus der Fourier-Reihe

$$\chi = \chi_0 - \chi_1' \cos\psi - \chi_1'' \sin\psi \quad (77)$$

erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Schwenkbewegung die Ausdrücke

$$\dot{\chi} = \Omega (\chi_1' \sin\psi - \chi_1'' \cos\psi) \quad (78)$$

$$\ddot{\chi} = \Omega^2 (\chi_1' \cos\psi + \chi_1'' \sin\psi) \quad (79)$$

Bei einer Schwenkbewegung nach Gl.(77) schwingt das Blatt mit der Amplitude

$$\chi_1 = \pm \sqrt{\chi_1'^2 + \chi_1''^2} \quad (80)$$

um die Mittellage, die durch  $\chi_0$  bestimmt ist. Für die Kennzeichnung der Grössenordnung dieser Bewegung sei folgendes erwähnt. Im unbeschleunigten Geradeausflug ist nach Sissingh [4] für ein Blatt mit konstanter Massenverteilung ( $\nu = \nu_0$ )

$$\chi_0 \approx \frac{150gN}{\nu_0 U^3 \cdot e(1-2e)} \quad (81)$$

In dieser Gleichung bedeutet N [PS] die von einem Blatt aufgenommene Leistung. Die Schwingung um die Gleichgewichtslage wird zur Hauptsache von den Corioliskräften der Schlagbewegung verursacht. Wenn wir von den Luftkräften absehen, ist für konstante Massenverteilung

$$\chi_1 \approx 2a_0 \left( \frac{1-3e}{1-4,5e} \right) \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (82)$$

Für die etwa dem Reiseflug eines Hubschraubers heutiger Bauart entsprechenden Daten:

$$N = 30 \text{ PS/Blatt}$$

$$U = 120 \text{ m/s}$$

$$\nu_0 = 3,5 \text{ kg/m}$$

$$e = 0,05$$

$$a_0 = 7^\circ$$

$$a_1 = 4^\circ$$

$$b_1 = 1,5^\circ$$

erhalten wir beispielsweise nach Gl.(81,82) einen Schwenkwinkel von

$$\chi \approx 10^\circ \pm 1^\circ$$

Nach diesen Zwischenbemerkungen über die Grössenordnung des Schwenkwinkels wollen wir zur Berechnung der Massenkräfte des kardanisch angelenkten Blattes übergehen. Aus dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \vec{r} &= - \left\{ eR \cos\psi + r_0 \cos\beta \cos(\psi-\kappa) \right\} \cdot \vec{i} \\ &\quad + \left\{ eR \sin\psi + r_0 \cos\beta \sin(\psi-\kappa) \right\} \cdot \vec{j} \\ &\quad - r_0 \sin\beta \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (83)$$

erhalten wir durch partielle Differentiation analog Gl.(67,68) die

Relativgeschwindigkeit und Relativbeschleunigung eines Blattelementes:

$$\mathcal{V}' = \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}}{\partial \chi} \cdot \frac{d\chi}{dt} \quad (84)$$

$$\mathcal{A}_R = \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial \chi} \cdot \frac{d\chi}{dt} \quad (85)$$

Mit  $\bar{\mathcal{V}}$  nach Gl.(83) geht Gl.(84) über in

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' = r_0 [ & + \{ \dot{\beta} \sin\beta \cos(\psi-\chi) - \dot{\chi} \cos\beta \sin(\psi-\chi) \} \cdot i \\ & + \{ \dot{\beta} \sin\beta \sin(\psi-\chi) + \dot{\chi} \cos\beta \cos(\psi-\chi) \} \cdot j \\ & - \dot{\beta} \cos\beta \cdot k ] \quad (86) \end{aligned}$$

Da Schlag- und Schwenkwinkel des Blattes klein sind, können wir setzen:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \beta \\ \cos\beta &= 1 \\ \sin(\psi-\chi) &= \sin\psi - \chi \cos\psi \\ \cos(\psi-\chi) &= \cos\psi + \chi \sin\psi \end{aligned} \quad (87)$$

Wir erhalten mit diesen Vernachlässigungen aus Gl.(86) folgende Gleichung für die Relativgeschwindigkeit  $\mathcal{V}'$ , die wir zur Berechnung der Coriolisbeschleunigung benötigen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' = r_0 [ & + \{ (\chi\dot{\beta}\dot{\beta} - \dot{\chi}) \sin\psi + (\beta\dot{\beta} + \chi\dot{\chi}) \cos\psi \} \cdot i \\ & + \{ (\dot{\chi} - \chi\dot{\beta}\dot{\beta}) \cos\psi + (\beta\dot{\beta} + \chi\dot{\chi}) \sin\psi \} \cdot j \\ & - \dot{\beta} \cdot k ] \quad (88) \end{aligned}$$

Analog wird die Relativbeschleunigung nach Gl.(85) aus Gl.(86) berechnet. Die absolute Beschleunigung setzt sich wieder aus der Führungs-, der Coriolis- und der Relativbeschleunigung nach Gl.(71,72) zusammen. Mit Gl.(73,74,75) und Gl.(83,88) ergeben sich für die verschiedenen, bereits früher diskutierten Beschleunigungen bei einem kardanisch angelenkten Blatt zusätzlich zu den Werten der Tabelle I die in Tabelle II zusammengestellten Beschleunigungen. Die Tabellen enthalten sämtliche bei den untersuchten Bewegungen auftretenden Beschleunigungen. Einige dieser Glieder sind von untergeordneter Bedeutung. Es ist jedoch von Fall zu Fall zu entscheiden, welche

Ausdrücke infolge ihrer Kleinheit vernachlässigt werden können.

#### IV. Zusammenfassung.

Für einen Rotor mit unverwundenem Rechteckblatt werden die Luft- und Massenkräfte bei beliebig beschleunigter, räumlicher Bewegung für beide Drehrichtungen berechnet und die entsprechenden Bewegungsgleichungen der gestörten Schlagschwingung aufgestellt. Bei der Berechnung der Luftkräfte werden die üblichen Ansätze (Berechnung der Kräfte aus der Relativgeschwindigkeit am Blattelement unter der Annahme einer quasistationären Strömung und eines gleichmässig über den Rotorkreis verteilten Abwindes) auf die räumliche Bewegung des Drehflüglers erweitert. Besonderer Wert ist auf die exakte Erfassung der infolge der Relativbewegung des Rotors etwas unübersichtlichen Massankräfte des gelenkig angeschlossenen, sonst aber starr angenommenen Blattes gelegt.

#### V. Schrifttum.

- [1] Mil, Aerodynamik der Tragschraube mit gelenkig befestigten Blättern bei krummliniger Bewegung, ZAHl-Bericht 465, Moskau (1940)
- [2] Tölke, Einführung in die Elemente der Punkt- und Körpermechanik, Sonderabdruck aus dem "Taschenbuch für Bauingenieure", Verlag Springer, Berlin (1937)
- [3] Wheatley, An aerodynamic analysis of the autogiro-rotor with a comparison between calculated and experimental results, NACA-Report 487 (1934)
- [4] Sissingh, Die Berechnung der Rotoren von Drehflügelflugzeugen bei höheren Fortschrittsgraden mit besonderer Berücksichtigung der Probleme des Schnellfluges, Jahrbuch 1941 der deutschen Luftfahrtforschung S. 1/351

Tabelle I (Zusammenstellung der Beschleunigungen bei exzentrischem Schlaggelenk).

| Komponente | Art der Beschleunigung                             | absoluter, Betrag   |
|------------|--|---|
| $p_x$      | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{m}$              | $-r_0 \beta \dot{\omega}_y$   |
|            | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{m}]$ | $+(eR+r_0)(\Omega^2 + \omega_y^2) \cos\psi \mp (eR+r_0)\omega_x \omega_y \sin\psi \mp r_0 \beta \Omega \omega_x$  |
|            | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{m}$        | $\pm r_0 \beta \omega_x \Omega$   |
|            | $2\omega \vec{n} \times \dot{\vec{n}}$             | $-2r_0 \dot{\beta} \omega_y - 2r_0 \beta \dot{\beta} \Omega \sin\psi$   |
|            | $\varphi_R$  | $+r_0(\beta \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2) \cos\psi$   |
| $p_y$      | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{m}$              | $+r_0 \beta \dot{\omega}_x$   |
|            | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{m}]$ | $\pm (eR+r_0)(\Omega^2 + \omega_x^2) \sin\psi - (eR+r_0)\omega_x \omega_y \cos\psi \mp r_0 \beta \Omega \omega_y$ |
|            | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{m}$        | $\pm r_0 \beta \Omega \omega_y$   |
|            | $2\omega \vec{n} \times \dot{\vec{n}}$             | $+2r_0 \dot{\beta} \omega_x \pm 2r_0 \beta \dot{\beta} \Omega \cos\psi$   |
|            | $\varphi_R$  | $\pm r_0(\beta \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2) \sin\psi$  |
| $p_z$      | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{m}$              | $\mp (eR+r_0)\dot{\omega}_x \sin\psi + (eR+r_0)\dot{\omega}_y \cos\psi$   |
|            | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{m}]$ | $+r_0 \beta(\omega_x^2 + \omega_y^2) \mp (eR+r_0)\Omega \omega_x \cos\psi - (eR+r_0)\Omega \omega_y \sin\psi$     |
|            | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{m}$        | $- (eR+r_0)\Omega \omega_y \sin\psi \mp (eR+r_0)\Omega \omega_x \cos\psi$   |
|            | $2\omega \vec{n} \times \dot{\vec{n}}$             | $\pm 2r_0 \beta \dot{\beta} \omega_x \sin\psi - 2r_0 \beta \dot{\beta} \omega_y \cos\psi$                         |
|            | $\varphi_R$  | $+r_0(\beta \dot{\beta}^2 - \ddot{\beta})$  |

Tabelle II (Zusammenstellung der bei einem kardanisch angelenkten Blatt infolge der Schwenkbewegung zusätzlich auftretenden Beschleunigungen).

| Komponente     | Art der Beschleunigung                             | absoluter Betrag   |
|----------------|--|--|
| P <sub>x</sub> | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{r}$              |  |
|                | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{r}]$ | $+r_0 \chi \left\{ \pm \omega_x \omega_y \cos\psi + (\Omega^2 + \omega_y^2) \sin\psi \right\}$   |
|                | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{r}$        |  |
|                | $2\omega \vec{n} \times \dot{\alpha}'$             | $+2r_0 \left\{ \Omega(\chi \beta \dot{\beta} - \dot{\chi}) \cos\psi - \chi \dot{\chi} \Omega \sin\psi \right\}$  |
|                | $\varphi_R$  | $+r_0 \left\{ (\chi \beta \ddot{\beta} + \chi \dot{\beta}^2 + 2\beta \dot{\beta} \dot{\chi} - \ddot{\chi} + \chi \dot{\chi}^2) \sin\psi + (\dot{\chi}^2 - 2\chi \dot{\chi} \beta \dot{\beta} + \chi \ddot{\chi}) \cos\psi \right\}$    |
| P <sub>y</sub> | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{r}$              |  |
|                | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{r}]$ | $+r_0 \chi \left\{ -\omega_x \omega_y \sin\psi \mp (\Omega^2 + \omega_x^2) \cos\psi \right\}$  |
|                | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{r}$        |  |
|                | $2\omega \vec{n} \times \dot{\alpha}'$             | $\pm 2r_0 \left\{ \Omega(\chi \beta \dot{\beta} - \dot{\chi}) \sin\psi + \chi \dot{\chi} \Omega \cos\psi \right\}$   |
|                | $\varphi_R$  | $\mp r_0 \left\{ (\chi \beta \ddot{\beta} + \chi \dot{\beta}^2 + 2\beta \dot{\beta} \dot{\chi} - \ddot{\chi} + \chi \dot{\chi}^2) \cos\psi - (\dot{\chi}^2 - 2\chi \dot{\chi} \beta \dot{\beta} + \chi \ddot{\chi}) \sin\psi \right\}$ |
| P <sub>z</sub> | $\dot{\omega} \vec{n} \times \vec{r}$              | $+r_0 \chi (\pm \dot{\omega}_x \cos\psi + \dot{\omega}_y \sin\psi)$  |
|                | $\omega^2 \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{r}]$ | $+r_0 \chi (\Omega \omega_y \cos\psi \mp \Omega \omega_x \sin\psi)$  |
|                | $\omega \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{r}$        | $+r_0 \chi (\Omega \omega_y \cos\psi \mp \Omega \omega_x \sin\psi)$  |
|                | $2\omega \vec{n} \times \dot{\alpha}'$             | $+2r_0 \left\{ (\pm \omega_x \dot{\chi} - \omega_y \chi \beta \dot{\beta} + \dot{\chi} \omega_y) \sin\psi \pm (\omega_x \dot{\chi} - \omega_x \chi \beta \dot{\beta} + \omega_y \chi \dot{\chi}) \cos\psi \right\}$                    |
|                | $\varphi_R$  |  |

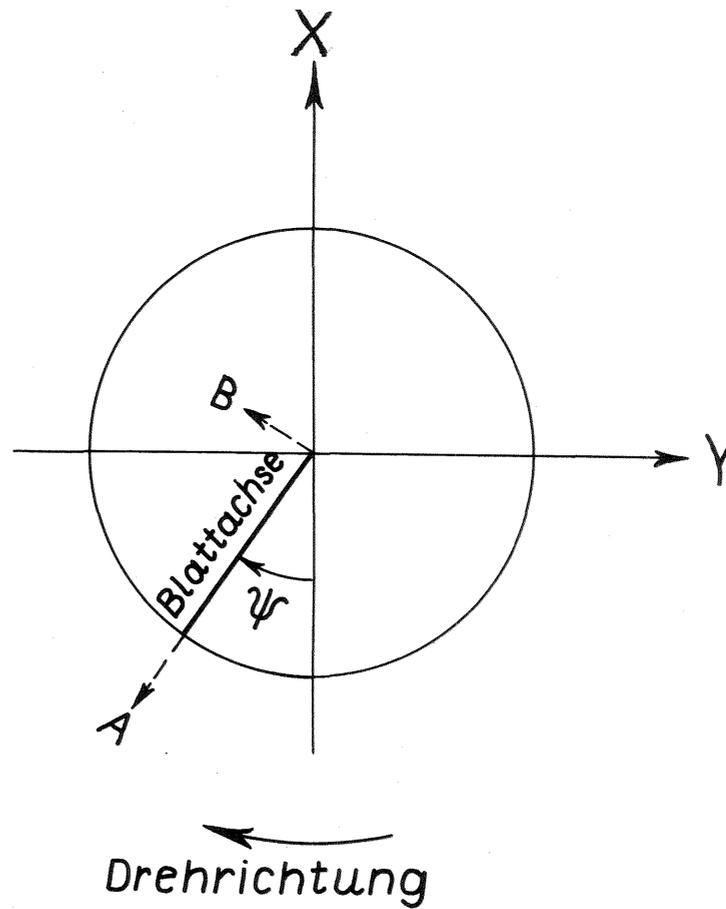
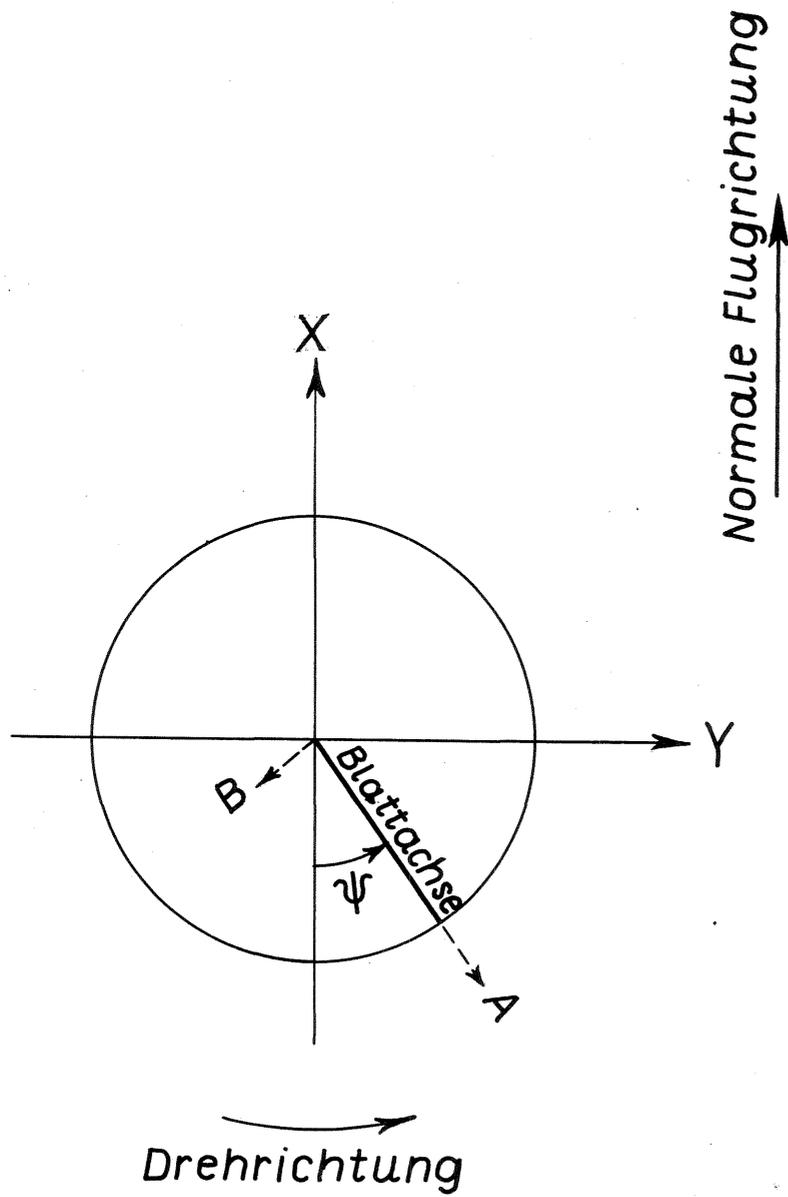
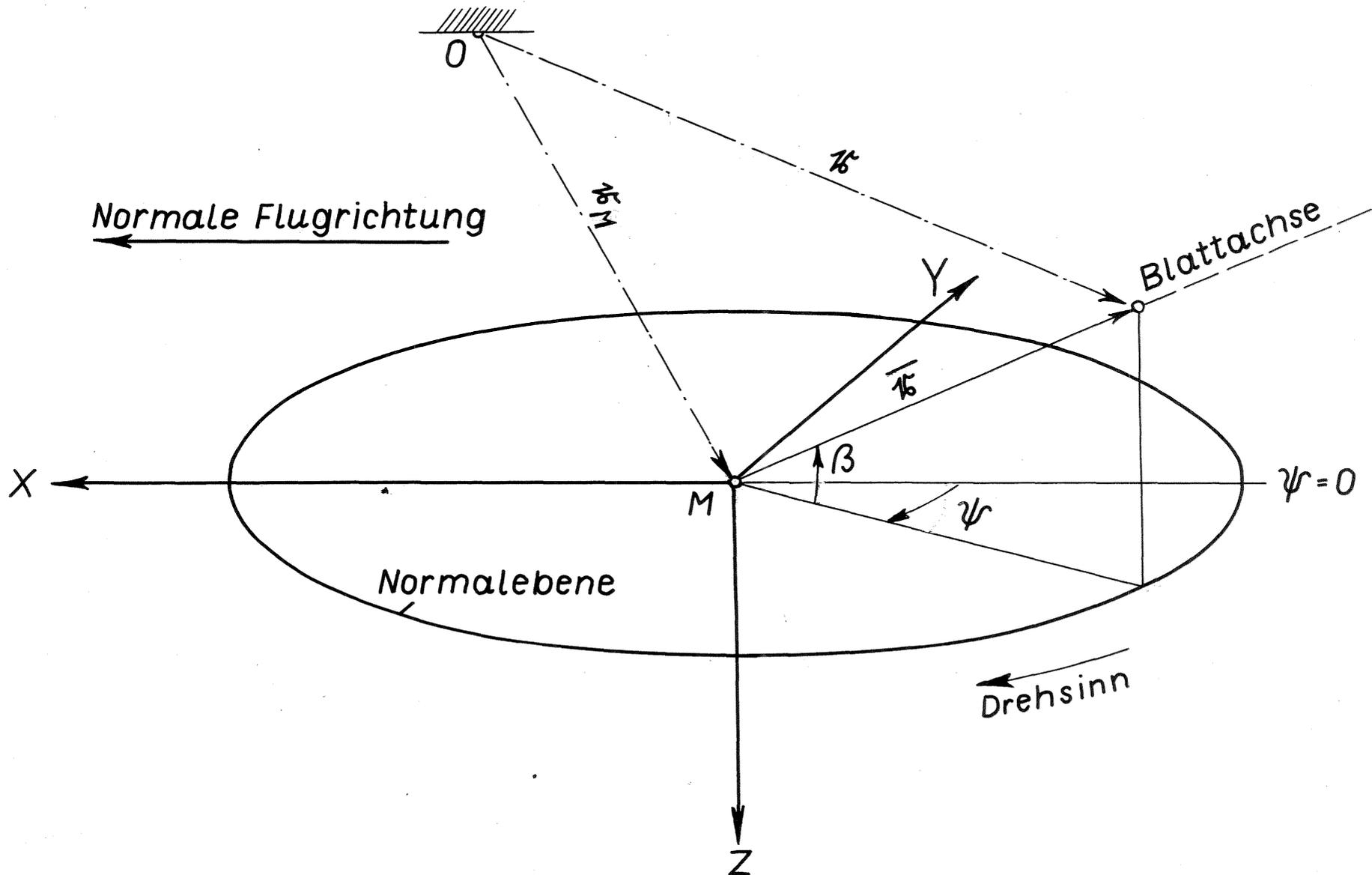


Bild 1. Azimutwinkel und Hauptachsen des Blattes.

Bild 2. Bezeichnung der Ortsvektoren. (gezeichnet für einen rechts drehenden Rotor mit zentrischem Schlaggelenk)





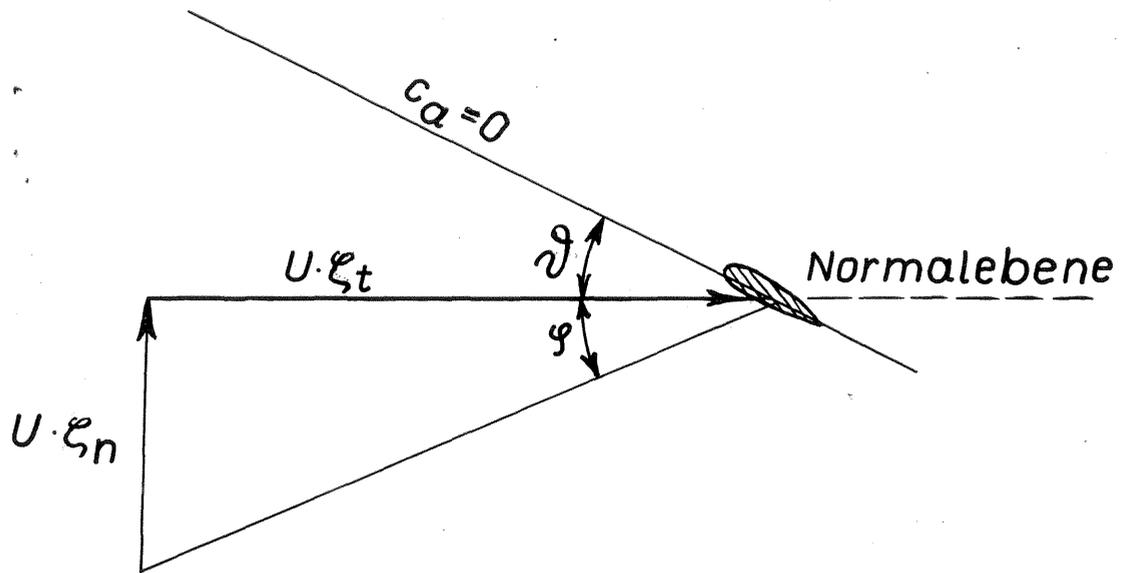


Bild 4. Bezeichnung der Winkel und Geschwindigkeiten am Blattelement.

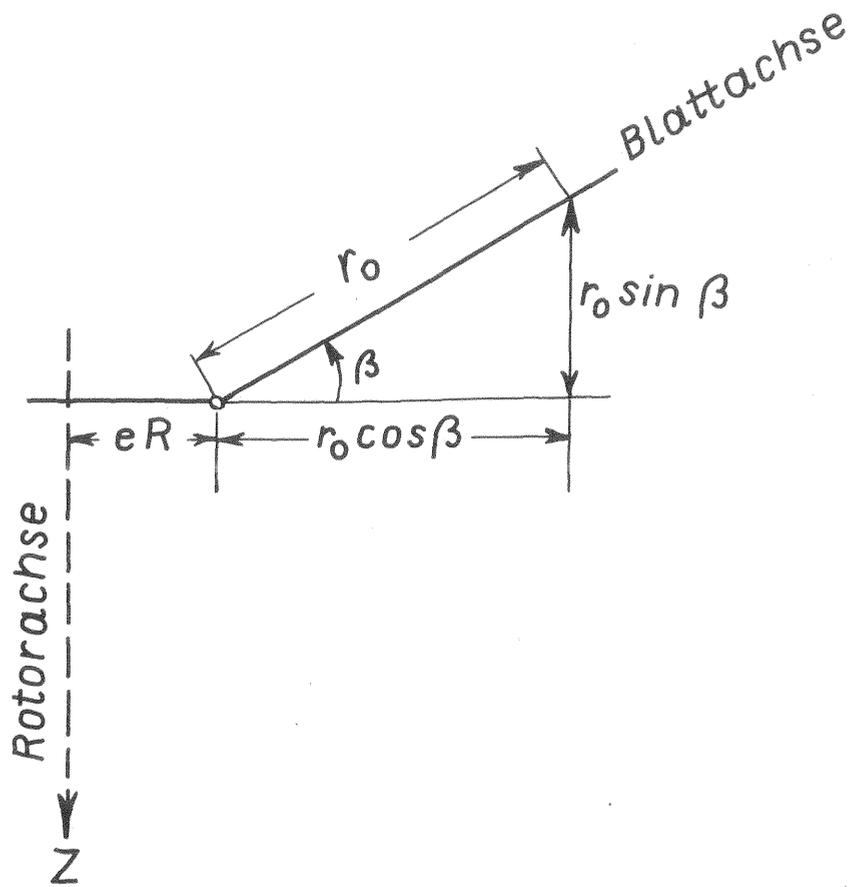


Bild 5. Bezeichnungen bei exzentrischem Schlaggelenk.

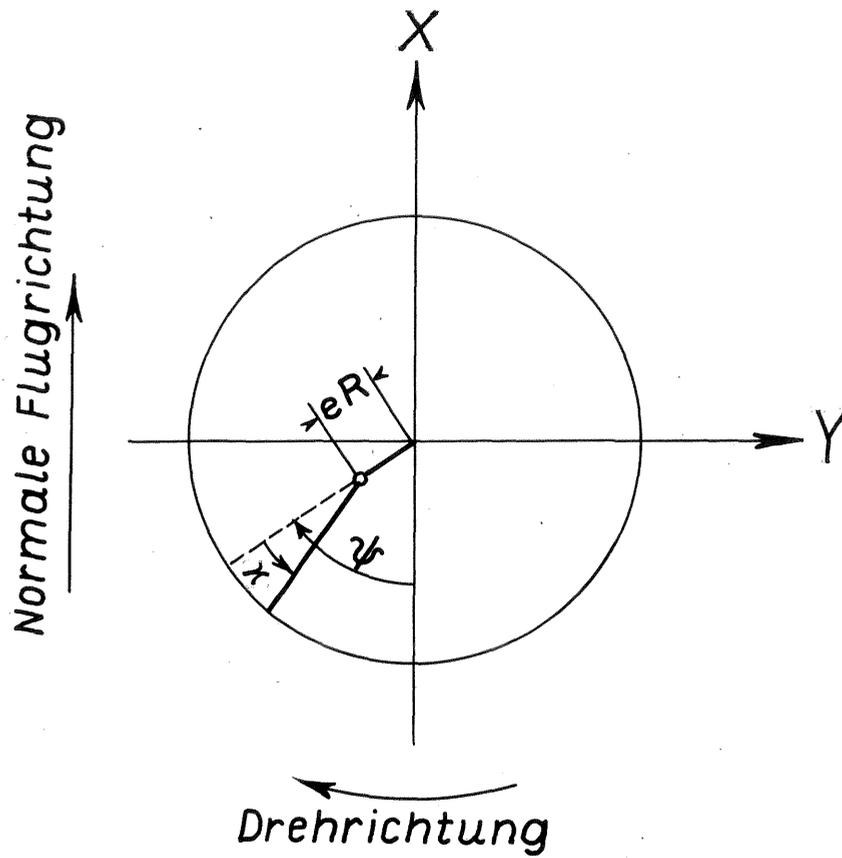


Bild 6. Bezeichnungen bei exzentrischem Schwenkgelenk. (gezeichnet für einen rechts drehenden Rotor)