

Beiträge zur dynamischen Stabilität der Drehflügelflug-
zeuge mit gelenkig angeschlossenen Blättern.

II. Teilbericht

Die Längsstabilität des Hubschraubers mit gegenläufigen
Rotoren beim Schweben am Ort.

Übersicht:

Für einen Hubschrauber mit nebeneinander liegenden, gegenläufigen Rotoren wird ausgehend von dem Zustand des Schwebens am Ort eine Störung der Längsbewegung untersucht. An einem Beispiel wird der zeitliche Verlauf der Bewegung berechnet und das Ergebnis mit Näherungslösungen verglichen.

Gliederung:

- I. Überblick über das Schrifttum
- II. Bezeichnungen
- III. Berechnung der Frequenzgleichung
 - 1) Die Voraussetzungen des mathematischen Ansatzes
 - 2) Aufstellung der Bewegungsgleichungen
- IV. Durchrechnung eines Beispiels
- V. Zusammenfassung
- VI. Schrifttum

Der Bericht umfasst 25 Seiten
mit 2 Abbildungen.

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GÖTTINGEN E.V.

Institut für instationäre Vorgänge

Institutsleiter

Küssner

(Küssner)

Bearbeiter

Sissingh

(Sissingh)

Gesehen

Alb. Betz

(Betz)

I. Überblick über das Schrifttum.

Das Schrifttum über die dynamische Stabilität der Steilschrauben ist nicht sehr umfangreich. Dem Verfasser sind an neueren Untersuchungen nur die Arbeiten von Küssner [5], von Schlippe, Dietrich [6] und Hohenemser [7] bekannt. Die beiden erstgenannten Veröffentlichungen befassen sich mit der Stabilität des Hubschraubers mit starr an die Drehachse angeschlossenen Blättern, während Hohenemser den angelenkten Drehflügel untersucht und die Längsstabilität eines Hubschraubers mit gegenläufigen Rotoren im Schwebезustand behandelt. Der vorliegende Bericht stellt also im wesentlichen eine Verfeinerung und Erweiterung der Untersuchungen von Hohenemser dar.

Über die statische Stabilität der Drehflügler mit gelenkig angeschlossenen Blättern berichten Schrenk [8], Focke [9] und Klemin, Haugen, Sherwin [10]. Die Stabilität der Schlagbewegung ist von Adam [11] und Sissingh [12] untersucht.

II. Bezeichnungen.

Die Bezeichnungen des I. Teilberichtes werden durch folgende Abkürzungen ergänzt:

G	kg	Fluggewicht
I_0	mkgs^2	Massenträgheitsmoment des Flugzeuges um die durch den Schwerpunkt gehende Querachse ohne Berücksichtigung der Drehflügel
ΔI	mkgs^2	Beitrag der Drehflügel zum Trägheitsmoment um die Querachse
		$\Delta I = \frac{G}{g} (hR)^2 + a_0 hR \frac{M_G}{g}$
I	mkgs^2	Gesamtträgheitsmoment um die Querachse
		$I = I_0 + \Delta I$
ΔV_s	m/s	horizontale Störgeschwindigkeit des Flugzeugschwerpunktes

hR	m	Höhendifferenz zwischen Rotormitte und Schwerpunkt. h ist positiv, wenn der Schwerpunkt unter dem Rotor liegt.
α	-	Anstellung der Normalebene des Rotors
$\dot{\alpha}$	s^{-1}	Winkelgeschwindigkeit des Flugzeuges um die Querachse
c_w	-	mittlerer Widerstandsbeiwert des Profiles
c_t	-	Beiwert der Tangentialkraft

Anmerkung: Das Zeichen * deutet an, dass der betr. Wert für alle Blätter des Hubschraubers zu nehmen ist. Bei 2 Rotoren mit je z Blättern ist also beispielsweise $G_P^* = 2zG_P$.

III. Berechnung der Frequenzgleichung.

1) Die Voraussetzungen des mathematischen Ansatzes.

a) Anlenkung der Blätter.

Die Drehflügel des zu untersuchenden Hubschraubers seien kardisch angelenkt. Das Vorhandensein des Schwenkgelenkes wird aber nur insofern berücksichtigt, als dass die am Blatt angreifenden Kräfte im Gelenk momentenfrei auf das Flugzeug übertragen werden. Die eigentliche Schwenkbewegung ist bei der Berechnung der Luft- und Massenkräfte vernachlässigt.

b) Anzahl der Freiheitsgrade.

Bei einem Hubschrauber mit zwei gleichartigen gegenläufigen Rotoren, die symmetrisch zur Flugzeug-Längsachse angeordnet sind, treten bei einer Längsbewegung keine Seitenkräfte und keine Momente um die Längsachse auf, sodass die Längsstabilität getrennt behandelt werden kann. Da bei kleinen Störungen der Gleichgewichtslage (Schweben am Ort) der Vertikalschub praktisch von der Fluggeschwindigkeit und der Rotoranstellung unabhängig ist, wollen wir in Übereinstimmung mit Hohenemser [7] von senkrechten Bewegungen des Flugzeugschwerpunktes absehen.

Die Längsbewegung besteht also ausser der noch zu erwähnenden Störung des Schlagwinkels aus einer waagerechten Bewegung des Schwerpunktes und einer Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Querachse. Da die Massenkräfte der Drehflügel infolge der kardanischen Anlenkung momentenfrei in den Gelenken abgesetzt werden müssen, ist für die Bestimmung der Hochlage des Schwerpunktes die gestreckte Lage der Blätter ($\beta = 0$) massgebend.

Bei einer Störung des Schwebezustandes durch eine Längsbewegung tritt ausser der Rückneigung der beiden Rotorkreisebenen auch eine Seitenneigung auf, deren Einfluss auf die Querstabilität sich wegen der Gegenläufigkeit der beiden Schrauben ausgleicht. Ihr Einfluss auf die Längsstabilität ist von untergeordneter Bedeutung, sodass wir uns darauf beschränken können, von den Störungskoeffizienten der Schlagbewegung nur das Glied Δa_1 zu berücksichtigen. Zusammenfassend lassen wir also folgende Störbewegungen zu:

- a) Horizontalgeschwindigkeit ΔV_s des Schwerpunktes,
- b) Änderung der Rotoranstellung α , d.h. Schwingungen des Flugzeuges mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ um die durch den Schwerpunkt gehende Querachse,
- c) Rückneigung Δa_1 der Rotorkreisebenen.

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen erhalten wir aus der Bedingung, dass einschliesslich der d'Alembertschen Trägheitskräfte die Summe der horizontalen Kräfte sowie das Moment um das Schlaggelenk und die Querachse gleich Null sein müssen.

c) Vereinfachte Annahmen bei der Berechnung der Luftkräfte. Um die Ansätze nicht unnötig zu komplizieren, wird bei der Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Störungen auf den Normal- und Axialschub von den Gleichungen des zentrisch angelenkten Blattes ausgegangen. Wir berechnen also die benötigten Luftkräfte für einen zentrisch angelenkten Drehflügel gleicher Tiefe und Einstellung und setzen diese Kräfte am Gelenk des zu untersuchenden Rotors ab. Da bei den in Betracht kommenden geringen Gelenkabständen die Luftkräfte praktisch von e unabhängig sind, dürfte diese Vernachlässigung auf das Ergebnis der Rechnung keinen Einfluss haben. Nach der Methode der kleinen Schwingungen werden Produkte und Potenzen der Störungsglieder nicht berücksichtigt.

2) Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

a) Momentengleichgewicht um das Schlaggelenk.

Der Unterschied gegenüber den Überlegungen des I. Teilberichts besteht darin, dass

- 1) der Drehflügel exzentrisch angelenkt ist ($e \neq 0$),
- 2) das Flugzeug nicht um die Rotormitte, sondern um seinen Schwerpunkt schwingt.

Wenn der Abstand zwischen der Rotormitte M und dem Schwerpunkt S nach Bild 7 mit hR bezeichnet wird, haben wir also den Einfluss der beiden Parameter e und h auf die Luft- und Massenkraft zu berücksichtigen. Ist das Gewicht der Längeneinheit γ als $f(r_0)$ bekannt, so ist damit auch das Gewicht G_F des Drehflügels sowie das auf das Schlaggelenk bezogene Gewichtsmoment M_G und Trägheitsmoment Θ gegeben:

$$G_F = \int_0^{R(1-e)} \gamma dr_0 \quad \dots (89)$$

$$M_G = \int_0^{R(1-e)} \gamma r_0 dr_0 \quad \dots (90)$$

$$\Theta = \frac{1}{g} \int_0^{R(1-e)} \gamma r_0^2 dr_0 \quad \dots (91)$$

Da für $e=h=0$ die Bewegungsgleichung der Schlagschwingung im ersten Teilbericht bereits berechnet ist, brauchen wir nur die bei e und $h \neq 0$ zusätzlich auftretenden Momente untersuchen. Die Größen e und h gehen nach folgenden Gleichungen in die Beschleunigung eines Blattelementes ein:

$$p_x = + R \Omega^2 (e \cos \psi - h \dot{k}_y) \quad \dots (92)$$

$$p_y = \pm R \Omega^2 e \sin \psi \quad \dots (93)$$

$$p_z = + R \Omega^2 (\dot{k}_y \cos \psi \approx 2k_y \sin \psi) \quad \dots (94)$$

Bezeichnet man die sich aus diesen Beschleunigungen ergeben-

den Trägheitskräfte eines Blattelementes mit

$$dP_{x,y,z} = - \frac{1}{g} v p_{x,y,z} dr_0, \quad \dots(95)$$

so ist also

$$dP_x = - \frac{R \Omega^2 v}{g} (e \cos \psi - h \dot{k}_y) dr_0 \quad \dots(96)$$

$$dP_y = + \frac{R \Omega^2 v}{g} e \sin \psi dr_0 \quad \dots(97)$$

$$dP_z = - \frac{R \Omega^2 v}{g} e (\dot{k}_y \cos \psi - 2k_y \sin \psi) dr_0 \quad \dots(98)$$

Das daraus resultierende Moment in bezug auf das Schlaggelenk beträgt

$$\Delta M_{M2} = \int_0^{R(1-e)} (dP_x r_0 \beta \cos \psi \pm dP_y r_0 \beta \sin \psi - dP_z r_0) \quad \dots(99)$$

Mit $dP_{x,y,z}$ nach Gl(96,97,98) und

$$\beta = a_0 - (a_1 + 4a_1) \cos \psi - b_1 \sin \psi \quad \dots(100)$$

geht Gl(99) über in

$$\Delta M_{M2} = \frac{R \Omega^2 M_G}{g} \left[\begin{aligned} & - e a_0 - \frac{h}{2} \dot{k}_y (a_1 + 4a_1) \\ & + \sin \psi \cdot e (b_1 - 2k_y) \\ & + \cos \psi \{ \dot{k}_y (e + h a_0) + e (a_1 + 4a_1) \} \end{aligned} \right] \quad \dots(101)$$

Das Zeichen Δ vor M_{M2} soll andeuten, dass es sich um ein Zusatzglied handelt. Das gesamte Moment der Massenkräfte in bezug auf das Schlaggelenk ergibt sich als die Summe der nach Gl(57,101) berechneten Anteile. Es sei darauf hingewiesen, dass Gl(101) im Gegensatz zu Gl(57) nicht allgemein gültig ist, sondern nur die für den speziellen Fall zugelassenen Störungslieder berücksichtigt.

Als nächstes ist das Moment der Luftkräfte in bezug auf das Schlaggelenk zu untersuchen. Da nach einem Satz der Mechanik

1) Für den Flugzustand des Schwebens am Ort ist $a_1 = b_1 = 0$

eine beliebige Drehung sich durch eine gleiche Drehung um eine parallele Achse und eine Translation ersetzen lässt, kann der Einfluss von h bei der Berechnung der Luftkräfte dadurch berücksichtigt werden, dass wir in den bisherigen Gleichungen für den Fortschrittsgrad μ_x den Ausdruck $\bar{\mu}_x - hk_y$ schreiben. In der neuen Schreibweise ist dann $\bar{\mu}_x$ als Fortschrittsgrad des Schwerpunktes und k_y als Beiwert für die Drehung um die Querachse zu deuten. Wir führen diese Transformation aber zweckmässig erst später durch und wollen zunächst den Einfluss der Exzentrizität des Schlaggelenkes behandeln. Das Moment der Luftkräfte in bezug auf dieses Gelenk beträgt analog Gl(40)

$$M_L = R^2 U^2 t c'_a \int_e^B \zeta_t^2 \left(\frac{\bar{\zeta}_n}{\zeta_t} + \vartheta \right) (\zeta - e) d\zeta \quad \dots(102)$$

In dieser Gleichung ist

$$\bar{\zeta}_n = l_d - (\zeta - e) \frac{\dot{\beta}}{\Omega} + (\zeta k_y - \beta \mu_x) \cos \psi \quad \dots(103)$$

und nach Gl(26, 103)

$$\bar{\zeta}_n = \zeta_n + 4 \zeta_n \quad \dots(104)$$

$$\text{mit } 4 \zeta_n = e \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \quad \dots(105)$$

Das Glied $4 \zeta_n$ berücksichtigt also die durch die Exzentrizität des Schlaggelenkes veränderte Relativgeschwindigkeit am Blattelement. Da bei den ausgeführten Hubschraubern aus später noch zu behandelnden Gründen normalerweise $e < 0,05$ ist, kann in Gl(102) die untere Integrationsgrenze e mit ausreichender Genauigkeit durch Null ersetzt werden. Mit dieser Vereinfachung und $\bar{\zeta}_n$ nach Gl(104) geht Gl(102) über in

$$M_L = R^2 U^2 t c'_a \int_0^B \left\{ \zeta_t^2 \left(\frac{\zeta_n + \vartheta}{\zeta_t} \right) d\zeta - e \int_0^B \zeta_t^2 \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_t} + \vartheta \right) d\zeta + \int_0^B \zeta_t 4 \zeta_n d\zeta - e \int_0^B \zeta_t 4 \zeta_n d\zeta \right\} \quad \dots(106)$$

In dieser Gleichung ist der erste Summand identisch mit dem Schubmoment bei zentrischem Gelenk. Die übrigen Glieder, die wir zu ΔM_L zusammenfassen wollen, berücksichtigen die Exzentrizität. Das zweite Integral in Gl(106) ist bei der Ermittlung des Axialschubes im ersten Teilbericht bereits berechnet, sodass nur

noch die beiden Integrale $\int_0^B \zeta_t \Delta \zeta_n \xi d\xi$ und $\int_0^B \zeta_t^2 \Delta \zeta_n d\xi$

zu bestimmen sind. Mit β nach Gl(31), ζ_t nach Gl(27) und $\Delta \zeta_n$ nach Gl(105) wird

$$\int_0^B \zeta_t \Delta \zeta_n \xi d\xi = \frac{1}{3} e B^3 (a_1 + \Delta a_1) \sin \psi + \dots \quad \dots(107)$$

$$e \int_0^B \zeta_t^2 \Delta \zeta_n d\xi = \frac{1}{2} e^2 B^2 (a_1 + \Delta a_1) \sin \psi + \dots \quad \dots(108)$$

Da bei dem Schlagwinkel nur das Störungsglied Δa_1 berücksichtigt ist, brauchen wir nur den Koeffizienten-Vergleich für das $\sin \psi$ -Glied der Fourier-Reihe des Schubmomentes durchzuführen. In Gl(107,108) wurden deshalb auch nur die Koeffizienten von $\sin \psi$ berechnet. Zusammenfassend erhalten wir für

$$\Delta M_L = R^2 U^2 t c'_a s/2 \left\{ -e \int_0^B \zeta_t^2 \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_t} + \eta \right) d\xi + \int_0^B \zeta_t \Delta \zeta_n \xi d\xi - e \int_0^B \zeta_t^2 \Delta \zeta_n d\xi \right\} \quad \dots(109)$$

folgende Gleichung:

$$\Delta M_L = R^2 U^2 t c'_a s/2 \left[\sin \psi \cdot e \left\{ (a_1 + \Delta a_1) \left(\frac{2}{3} B^3 - \frac{1}{2} e B^2 \right) - \mu_x (\eta B^2 + B \lambda_d) \right\} + \dots \right] \quad \dots(110)$$

Der mit Berücksichtigung der Zusatzglieder ΔM_{M2} und ΔM_L analog Gl(58) für $\sin \psi$ durchgeführte Koeffizientenvergleich liefert uns die Beziehung

$$\frac{2}{\Omega} \Delta \dot{a}_1 + 2k_y \left(1 + e \frac{RM_G}{g\theta}\right) = \frac{\gamma}{2} \left\{ + \mathcal{J} \mu_x \left(\frac{2}{3} B^3 - e B^2 \right) \right. \\ \left. + \lambda_d \mu_x \left(\frac{1}{2} B^2 - e B \right) \right. \\ \left. - (a_1 + 4 a_1) \left(\frac{1}{4} B^4 - \frac{2}{3} e B^3 + \frac{1}{2} e^2 B^2 \right) \right\} \dots (111)$$

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass bei einer Drehung um den Schwerpunkt statt um Rotormitte der Fortschrittsgrad μ_x durch $\bar{\mu}_x - h k_y$ zu ersetzen ist. In unserem Falle ist

$$\bar{\mu}_x = \frac{\Delta V_s}{U} \dots (112)$$

$$k_y = \frac{\dot{\alpha}}{\Omega} \dots (113)$$

und damit

$$\mu_x = \frac{1}{U} (\Delta V_s - h R \dot{\alpha}) \dots (114)$$

Setzt man diese Werte in Gl(111) ein, so erhält man folgende Bewegungsgleichung der Schlagschwingung:

$$\frac{2}{\Omega} \Delta \dot{a}_1 + \dot{\alpha} \frac{2}{\Omega} \left(1 + \frac{eRM_G}{g\theta}\right) = \frac{\gamma}{2} \left[- \Delta a_1 \left(\frac{1}{4} B^4 - \frac{2}{3} e B^3 + \frac{1}{2} e^2 B^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{\Delta V_s}{U} \left\{ \mathcal{J} \left(\frac{2}{3} B^3 - e B^2 \right) + \lambda_d \left(\frac{1}{2} B^2 - e B \right) \right\} \right. \\ \left. - \dot{\alpha} \frac{hR}{U} \left\{ \mathcal{J} \left(\frac{2}{3} B^3 - e B^2 \right) + \lambda_d \left(\frac{1}{2} B^2 - e B \right) \right\} \right] \dots (115)$$

b) Gleichgewicht der horizontalen Kräfte.

Es muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\Delta P_x - G \alpha - \frac{G}{g} \Delta \dot{V}_s = 0 \dots (116)$$

In dieser Gleichung bedeutet nach Bild 7 ΔP_x die Summe der bei den zugelassenen Störbewegungen auftretenden Kräfte in X-Richtung. Da - abgesehen von periodisch wechselnden Anteilen, die hier nicht interessieren - Massenkräfte nach dem Impuls-

satz nicht auftreten können, ist ΔP_x identisch mit der Änderung des Normalschubes. Wir haben also als nächstes den Normalschub als Funktion der Störungen $\Delta V_s, \alpha, \Delta a_1$ und ihrer Ableitungen nach der Zeit zu berechnen.

Der von den Normalkräften am Blattelement herrührende Anteil wurde bereits behandelt, s. Gl(38a,b). Da beim Schweben am Ort der Axialschub beider Rotoren gleich dem Fluggewicht G gesetzt werden kann, folgt aus Gl(38a,b) mit

$$G = 2z S_{ao} \quad \dots(117)$$

und k_y, μ_x nach Gl(113,114) die Beziehung

$$\Delta P_{xLl} = -\frac{1}{2}\Delta a_1 G + \frac{M_G^*}{RK} \left\{ \frac{B^3 a_o}{6\Omega} (\dot{\alpha} + \Delta \dot{a}_1) - \frac{a_o^2 B^2}{4U} (\Delta V_s - hR\dot{\alpha}) \right\} \quad \dots(118)$$

In dieser Gleichung bedeutet M_G^* , dass das Gewichtsmoment M_G aller Blätter des Hubschraubers zu nehmen ist. Bezeichnet man den Beiwert der Tangentialkraft mit

$$c_t \approx c_w - c_a \frac{\xi_n}{\xi_t} \quad \dots(119)$$

so erzeugt jedes Blattelement in X-Richtung eine Luftkraft von der Grösse

$$dP_x = -RU^2 c_t s/2 \xi_t^2 \sin \psi \, d\zeta \quad \dots(120)$$

Mit c_t nach Gl(119) und

$$c_a = c_a' \left(\mathcal{N} + \frac{\xi_n}{\xi_t} \right) \quad \dots(121)$$

erhalten wir für alle Blätter eine Gesamtkraft von

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \frac{M_G^*}{RK} \left\{ \int_0^B \int_0^{2\pi} (\xi_n^2 + \mathcal{N} \xi_n \xi_t) \sin \psi \, d\zeta \, d\psi - \frac{c_w}{c_a'} \int_0^B \int_0^{2\pi} \xi_t^2 \sin \psi \, d\zeta \, d\psi \right\} \quad \dots(122)$$

Daraus folgt für den Anteil des Widerstandes:

$$\Delta P_{xL2} = \frac{M_0 \dot{c}_a}{2U \lambda_d c_a'} (hR\dot{\alpha} - \Delta V_s) \quad \dots(123)$$

Der von c_a herrührende Anteil beträgt

$$\Delta P_{xL3} = \frac{M_0}{RK} \left\{ \mathcal{J} \left(\frac{1}{2} B \mu_x \lambda_d - \frac{1}{6} \Delta a_1 B^3 \right) - \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \Delta a_1 \right\} \quad \dots(124)$$

Mit Gl(114) geht diese Gleichung über in

$$\Delta P_{xL3} = \frac{M_0}{RK} \left\{ -\Delta a_1 \left(\frac{1}{6} B^3 \mathcal{J} + \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \right) + \frac{B \lambda_d \mathcal{J}}{2U} (\Delta V_s - hR\dot{\alpha}) \right\} \quad \dots(125)$$

Da

$$\frac{M_0}{RK} \left(\frac{1}{3} B^3 \mathcal{J} + \frac{1}{2} B^2 \lambda_d \right) = G \quad \dots(126)$$

ist, kann Gl(125) auch in der Form

$$\Delta P_{xL3} = -\frac{G}{2} \Delta a_1 + \frac{M_0 \lambda_d}{RK} \left\{ \frac{B \mathcal{J}}{2U} (\Delta V_s - hR\dot{\alpha}) - \Delta a_1 \frac{1}{4} B^2 \right\} \quad \dots(127)$$

geschrieben werden. Mit

$$\Delta P_x = \Delta P_{xL1} + \Delta P_{xL2} + \Delta P_{xL3} \quad \dots(128)$$

geht Gl(116) über in :

$$\begin{aligned}
 & + \frac{M_G^*}{RK} \left\{ \frac{B^3 a_0}{6 \Omega} (\dot{\alpha} + 4 \dot{a}_1) - \frac{B^2 a_0^2}{4U} (\Delta v_s - hR\dot{\alpha}) \right\} \\
 & + \frac{M_G^* \lambda_d}{RK} \left\{ \frac{B \mathcal{J}}{2U} (\Delta v_s - hR\dot{\alpha}) - 4 a_1 \cdot \frac{1}{4} B^2 \right\} \\
 & + \frac{M_G^{c_w}}{2URKc'_a} (hR\dot{\alpha} - 4 v_s) - \\
 & - G (\Delta a_1 + \alpha) - \frac{G}{g} \cdot \Delta \dot{v}_s = 0 \quad \dots(129)
 \end{aligned}$$

c) Momentengleichgewicht um die Querachse.

Bevor die Bewegungsgleichung aufgestellt wird, wollen wir den Beitrag der kardanischn angelenkten Blätter zu dem Trägheitsmoment des Flugzeuges um die Querachse untersuchen. Wir wollen diesen Wert mit ΔI und schwanzlastige Momente als positiv bezeichnen. Bei einer Drehung des Flugzeuges um die Querachse beträgt die Beschleunigung eines Blattelementes in X-Richtung

$$p_x = - (hR + r_0 a_0) \ddot{\alpha} \quad \dots(130)$$

Die damit verbundene Trägheitskraft aller Drehflügel

$$P_x = \frac{\ddot{\alpha}}{g} (hRG_F^* + a_0 M_G^*) \quad \dots(131)$$

greift an den Gelenken an und erzeugt also um die Querachse ein Moment von der Grösse

$$M = - P_x hR \quad \dots(132)$$

Mit P_x nach Gl(131) wird

$$M = - \ddot{\alpha} \frac{1}{g} (hRG_F^* + a_0 M_G^*) hR \quad \dots(133)$$

Aus der Bedingung, dass das Moment M gleich dem Ausdruck $-\ddot{\alpha} \Delta I$ sein muss, folgt:

$$\Delta I = (hR)^2 \frac{G_F^*}{g} + a_0 hR \frac{M_G^*}{g} \quad \dots(134)$$

Das Momentengleichgewicht um die durch den Schwerpunkt gehende Querachse wird durch die Gleichung ²⁾

$$- \Delta P_x hR + \frac{1}{2} \Delta \bar{P}_z eR - I \ddot{\alpha} = 0 \quad \dots(135)$$

ausgedrückt. Die Kraft ΔP_x wurde bei der Untersuchung des Kräftegleichgewichtes bereits berechnet, s. Gl(128,118,123,127). Von den Kräften in Z-Richtung rufen nur die mit $\cos \psi$ periodisch wechselnden und in Gl(135) mit $\Delta \bar{P}_z$ bezeichneten Anteile ein während des Umlaufes konstantes Moment um die Querachse hervor. Es sind also die von den Störbewegungen ausgelösten und mit $\cos \psi$ wechselnden Luft- und Massenkräfte zu berechnen: Luftkräfte. Aus Gl(35) für den Axial Schub erhalten wir

$$\Delta \bar{P}_{zL} = - \frac{M_G^*}{RK} \left\{ \left(\frac{1}{3} B^3 k_y - a_0 \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_x + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \right) \right\} \quad \dots(136)$$

Mit Gl(113,114) geht diese Gleichung über in

$$\Delta \bar{P}_{zL} = \frac{M_G^*}{RK} \left\{ \Delta V_s \cdot \frac{B^2 a_0}{2U} - 4 \dot{a}_1 \frac{B^3}{3\Omega} - \dot{\alpha} \left(\frac{B^3}{3\Omega} + h \frac{B^2 a_0}{2\Omega} \right) \right\} \quad \dots(137)$$

Massenkräfte. Für die mit $\cos \psi$ wechselnden Beschleunigungen in Z-Richtung erhalten wir aus der Tabelle I des ersten Teilberichtes:

$$\bar{p}_z = (eR + r_0) \ddot{\alpha} + r_0 (4 \ddot{a}_1 - \Omega^2 \Delta a_1) \quad \dots(138)$$

Die entsprechende Trägheitskraft lautet

$$\Delta \bar{P}_{zM} = \frac{\Omega^2 M_G^*}{g} \left(4 a_1 - \frac{\Delta \ddot{a}_1}{\Omega^2} \right) - \ddot{\alpha} \frac{1}{g} (M_G^* + eRG_F^*) \quad \dots(139)$$

²⁾ In Gl(135) ist das Moment um die Blattlängsachse vernachlässigt worden, da bei modernen Blattkonstruktionen der Schwerpunkt des Blattes mit dem Druckmittel zusammenfällt.

Damit erhalten wir für

$$\Delta \bar{P}_z = \Delta \bar{P}_{zL} + \Delta \bar{P}_{zM} \quad \dots(140)$$

den Ausdruck

$$\Delta \bar{P}_z = M_G \left[\Delta V_G \frac{B^2 a_0}{3UK} + \Delta a_1 \frac{\Omega^2}{g} - \Delta \dot{a}_1 \frac{B^3}{3UK} - \Delta \ddot{a}_1 \cdot \frac{1}{g} - \frac{2B^3 + 3hB^2 a_0}{6UK} - \ddot{\alpha} \frac{1}{g} \left(1 + eR \frac{G_F}{M_G} \right) \right] \quad \dots(141)$$

d) Die charakteristischen Gleichungen.

Die drei homogenen linearen Differentialgleichungen (115,129,135) werden mit dem üblichen Ansatz

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= A \cdot e^{\lambda t} \\ \alpha &= B \cdot e^{\lambda t} \\ \Delta V_G &= C \cdot e^{\lambda t} \end{aligned} \quad \dots(142)$$

gelöst. Dies ist bekanntlich nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Hauptdeterminante verschwindet. Es muss also

$k_1 \lambda$	$\lambda(k_3 + hRk_4)$	$-k_4$	$= 0$
$k_5 \lambda$	$\lambda(k_5 + hRk_7) - k_6$	$-(k_8 \lambda + k_7)$	
$\lambda^2 e_1$ $+ \lambda(hk_9 + k_{10})$ $- (hk_{11} + k_{12})$	$\lambda^2 (ek_{11} + k_{12})$ $+ \lambda(hk_5 + ek_{14} + hRk_{16})$	$-k_{16}$	

... (143)

Die in der vorstehenden Determinante auftretenden Koeffizienten sind nach folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$k_1 = \frac{2}{\Omega}$$

$$k_2 = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{4}B^4 - \frac{2}{3}eB^3 + \frac{1}{2}e^2B^2 \right)$$

$$k_3 = \frac{2}{\Omega} \left(1 + eR \frac{M_G}{g\Theta} \right)$$

$$k_4 = \frac{\gamma}{U} \left\{ \mathcal{N} \left(\frac{1}{3}B^3 - \frac{1}{2}eB^2 \right) + \lambda_d \left(\frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{2}eB \right) \right\}$$

$$k_5 = \frac{B^3 a_o}{6UK}$$

$$k_6 = \frac{G}{M_G^*}$$

$$k_7 = \frac{B^2 a_o^2 c'_a + 2c_w - 2B \mathcal{N} \lambda_d c'_a}{4URKc'_a}$$

$$k_8 = \frac{G}{g M_G^*}$$

$$k_9 = \frac{1}{2g}$$

$$k_{10} = \frac{\Omega^2}{2g}$$

$$k_{11} = \frac{1}{2g} \left(1 + eR \frac{G_F}{M_G} \right)$$

$$k_{12} = \frac{I}{RM_G^*}$$

$$k_{13} = \frac{B^2 a_o}{4URK}$$

$$k_{14} = \frac{B^3}{6UK}$$

$$k_{15} = \frac{G}{M_G^*} + \frac{\lambda_d B^2}{4RK}$$

$$k_{16} = hk_7 + ek_{13}$$

.....(144)

Wenn man die Bewegung der Blätter als eine zeitliche Aufeinanderfolge von stationären Zuständen auffasst, wird $\Delta \dot{a}_1 = \Delta \ddot{a}_1 = 0$.
Setzt man den sich für diesen Fall ergebenden Wert

$$\Delta a_1 = \frac{k_4}{k_2} \Delta V_s = \dot{\alpha} \frac{k_3 + hRk_4}{k_2} \quad \dots(145)$$

in die Bewegungsgleichungen (129,135) ein, so erhält man als Näherungslösung die zweireihige Determinante:

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda(k_5 + hRk_7 + k_{19}) - k_6 & \lambda \cdot k_8 + (k_7 + k_{20}) \\ \lambda^2(e k_{11} + k_{12}) & + (k_{16} + k_{22}) \\ + \lambda(hk_5 + ek_{14} + hRk_{16} + k_{21}) & \end{array} \right| = 0 \quad \dots(146)$$

√exakt

Sie gilt unter der Voraussetzung, dass die Schlagbewegung sich momentan dem Bewegungszustand anpasst und entspricht in dieser Hinsicht den Überlegungen von Hohenemser [7].
Der Einfluss dieser Vernachlässigung wird später an einem Beispiel untersucht werden. Die neu auftretenden Koeffizienten errechnen sich nach den folgenden Gleichungen:

$$k_{17} = k_3 + hRk_4$$

$$k_{18} = hk_{15} + ek_{10}$$

$$k_{19} = \frac{k_{17}}{k_2} \cdot k_{15}$$

$$k_{20} = \frac{k_4}{k_2} \cdot k_{15}$$

$$k_{21} = \frac{k_{17}}{k_2} \cdot k_{18}$$

$$k_{22} = \frac{k_4}{k_2} \cdot k_{18}$$

.....(147)

IV. Durchrechnung eines Beispielles.

Um eine Vergleichsmöglichkeit mit den in [7] durchgeführten Untersuchungen zu haben, wollen wir von den Daten des dort angeführten Hubschraubers ausgehen. Es sei:

Fluggewicht	$G = 900$	kg
Rotorhalbmesser	$R = 6$	m
Umfangsgeschwindigkeit	$U = 120$	m/s
Blatttiefe	$t = 0,28$	m
Blattzahl je Schraube	$z = 2$	
Trägheitsmoment eines Blattes in bezug auf das Schlaggelenk	$\Theta = 20$	mkgs ²
Flugzeugträgheitsmoment um die Querachse	$I_0 = 150$	mkgs ²

Aus dem Gelenkabstand $eR = 0,2$ m und der Entfernung zwischen Rotormitte und Schwerpunkt $hR = 1,20$ m folgt:

$$e = 0,0333$$

$$h = 0,2$$

Für die Blattkonstante γ erhalten wir aus Gl(59):

$$\gamma = 12,7 .$$

Bei einer Fliehkraft von 1880 kg je Blatt ist etwa

$$M_G = 46 \text{ mkg} .$$

Damit wird nach Gl(46)

$$K = 0,000904 . .$$

Das Gewicht eines Drehflügels wird geschätzt mit

$$G_F = 15 \text{ kg} .$$

Falls die beiden Rotoren so dicht zusammen liegen, dass nur ein Schraubenstrahl erzeugt wird, errechnet sich der für das Schweben erforderliche Blattanstellwinkel³⁾ zu

$$\mathcal{V} = 9^\circ .$$

Nach der einfachen Strahltheorie folgt aus der Beziehung $k_{sa} = 4 \lambda_d^2$ für den Durchflussgrad:

$$\lambda_d = - 0,0470$$

Für den Kegelwinkel a_0 erhalten wir aus der Gleichung

$$a_0 \left(1 + eR \frac{M_G}{\Theta g}\right) = \frac{\gamma}{2} \left\{ \mathcal{J} \left(\frac{1}{4} B^4 - \frac{1}{3} e B^3 \right) + \lambda_d \left(\frac{1}{3} B^3 - \frac{1}{2} e B^2 \right) \right\} - \frac{M_G}{e \Omega^2} \quad \dots (148)$$

den Wert

$$a_0 = 6,8^\circ$$

Der Beitrag⁴⁾, den die vier Blätter des Hubschraubers zum Trägheitsmoment um die Querachse liefern, beträgt nach Gl(134)

$$\Delta I = 12 \text{ mkgs}^2$$

Damit wird $I = 162 \text{ mkgs}^2$.

Ferner wurde gesetzt:

$$c'_a = 5,6$$

$$c_w = 0,01$$

$$B = 0,98$$

$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

$$\mathcal{J} = 0,125 \text{ kgs}^2 \text{ m}^{-4}$$

- 3) Die Angaben in [7], wo $\mathcal{J} = 12^\circ$ gesetzt wurde, sind überbestimmt. Der bei diesem Anstellwinkel erzeugte Schub ist bei der vorgeschriebenen Drehzahl wesentlich höher als das Fluggewicht. Falls zwei Rotoren mit getrenntem Schraubenstrahl vorausgesetzt werden, ist nur ein Anstellwinkel von $7,8^\circ$ erforderlich.
- 4) Die betr. Aussage in [7], dass das Trägheitsmoment um die Querachse ohne die Blätter zu nehmen ist, wird nicht den Tatsachen gerecht.

Mit diesen Daten erhalten wir aus Gl(143) als exakte Lösung die Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= - 12,034 \\ \lambda_2 &= - 1,688 \\ \lambda_3 &= + 0,106 + 0,56i \\ \lambda_4 &= + 0,106 - 0,56i\end{aligned}\quad \dots(149)$$

Ausser zwei rasch abklingenden aperiodischen Bewegungen tritt also eine angefachte Schwingung auf, die wir später noch eingehender untersuchen werden. Fasst man die Schlagbewegung der Blätter als eine Aufeinanderfolge von stationären Zuständen auf und setzt $4\dot{a}_1 = 4\ddot{a}_1 = 0$, so ergibt sich aus der zweireihigen Determinante (146) die Näherungslösung

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= - 1,52 \\ \lambda_2 &= + 0,104 + 0,56i \\ \lambda_3 &= + 0,104 - 0,56i\end{aligned}\quad \dots(150)$$

Da die konjugiert komplexen Lösungen in (149,150) praktisch gleich sind, kann also bei den heute üblichen Abmessungen im allgemeinen auf die exakte Lösung verzichtet und mit der Näherung Gl(146) gerechnet werden⁵⁾. Als Schwingungszeit erhalten wir in unserem Falle $T_s = 2\pi/0,56 = 11,2$ s. Dieser Wert stimmt etwa mit dem von Hohenemser [7] angegebenen ($T_s=10,4$ s) überein. In der Anfachung dagegen besteht ein wesentlicher Unterschied. Die sich aus (149) bzw. (150) ergebende Anfachung ist bedeutend kleiner als der in [7] ermittelte Wert ($e^{0,106t}$ gegenüber $e^{0,160t}$), d.h. für $t=20$ s verhalten sich die Anfachungsfaktoren wie 1:3. Diese Unstimmigkeit scheint jedoch nach neueren Flugmessungen zugunsten der vorliegenden Überlegungen entschieden zu sein, da die beobachteten Anfachungen nach einer Mitteilung von Herrn Hohenemser wesentlich kleiner waren als sie nach [7] zu erwarten gewesen wären.

5) Diese Übereinstimmung zwischen der exakten und Näherungslösung wurde durch weitere Untersuchungen bestätigt, die in einem späteren Bericht der Aufsatzfolge veröffentlicht werden.

Zum Schluss soll der zeitliche Verlauf der Längsbewegung für den Fall berechnet werden, dass zur Zeit $t = 0$ durch irgendwelche Einflüsse die Normalebene unter $\alpha = +2^\circ$ ange stellt wird. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ der Drehbewegung um den Schwerpunkt und die Translationsgeschwindigkeit ΔV_s des Schwerpunktes sei zu diesem Zeitpunkt gleich Null. Bei einem Ansatz nach Gl(142) lautet die allgemeine Lösung der untersuchten Differentialgleichungen

$$\alpha = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} \quad \dots(151)$$

$$\Delta V_s = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} \quad \dots(152)$$

Darin sind $\lambda_{1,2,3}$ die bereits bekannten Wurzeln der Frequenzgleichung, s. (150). Mit den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,0349 \\ \dot{\alpha} &= 0 \\ \Delta V_s &= 0 \end{aligned} \quad \dots(153)$$

folgt aus Gl(151,152)

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 + B_3 &= 0,0349 \\ B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + B_3 \lambda_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad \dots(154)$$

In diesen Beziehungen sind die Unbekannten B_i, C_i nicht unabhängig voneinander, sondern durch die nachstehenden Gleichungen - die sich aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ergeben - gekoppelt:

$$\frac{C_i}{B_i} = \frac{\lambda_i (k_5 + hRk_7 + k_{19}) - k_6}{\lambda_i k_8 + (k_7 + k_{20})} \quad \dots(155)$$

Darin ist $i = 1, 2, 3$ zu setzen.

Für unseren Fall folgt aus Gl(154,155):

$$\begin{aligned} B_1 &= + 0,0039 \\ B_2 &= + 0,0155 - 0,00235i \\ B_3 &= + 0,0155 + 0,00235i \\ C_1 &= +0,0290 \\ C_2 &= -0,0145 + 0,264i \\ C_3 &= -0,0145 - 0,264i \end{aligned} \quad \dots(156)$$

Wir können somit die Abhängigkeit des Winkels α und der Geschwindigkeit ΔV_s von der Zeit t nach Gl(151,152) in komplexer Form angeben. Der Übergang zu der reellen Schreibweise vollzieht sich folgendermassen:

Bezeichnet man

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \delta + \omega i \\ \lambda_3 &= \delta - \omega i \end{aligned} \quad \dots(157)$$

so ist nach Gl(151)

$$\alpha = B_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\delta t} (B_2 e^{i\omega t} + B_3 e^{-i\omega t}) \quad \dots(158)$$

Mit den Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned} \quad \dots(159)$$

geht Gl(158) über in

$$\alpha = B_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\delta t} \left\{ (B_2 + B_3) \cos \omega t + i(B_2 - B_3) \sin \omega t \right\} \quad \dots(160)$$

Da die Konstanten B_2, B_3 nach Gl(156) konjugiert komplex

sind, kann Gl(160) mit

$$\begin{aligned} B_2 &= a + bi \\ B_3 &= a - bi \end{aligned} \quad \dots\dots(161)$$

auch in der Form

$$\alpha = B_1 e^{\lambda_1 t} + 2e^{\delta t} (a \cos \omega t - b \sin \omega t) \quad \dots\dots(162)$$

geschrieben werden. Führt man schliesslich noch den Phasenwinkel φ ein, so erhalten wir mit

$$\varphi = \text{arc tg} \left(-\frac{a}{b} \right) \quad \dots\dots(163)$$

die Beziehung:

$$\alpha = B_1 e^{\lambda_1 t} \pm 2\sqrt{a^2 + b^2} e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad \dots\dots(164)$$

Massgebend für das Vorzeichen der Wurzel in Gl(164) ist das Vorzeichen von a in Gl(161). Wendet man dieses Verfahren auf unseren Fall an, so erhalten wir:

$$\alpha = 0,0039 \cdot e^{-1,52t} + e^{0,104t} \cdot 0,0314 \sin(0,56t + 1,40) \quad \dots(165)$$

$$4V_s = 0,029 \cdot e^{-1,52t} - e^{0,104t} \cdot 0,529 \sin(0,56t + 0,055) \quad \dots(166)$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Bild 8 dargestellt. Der Hubschrauber setzt sich zunächst nach rückwärts in Bewegung. Nach etwa 3 sec geht der Anstellwinkel und nach 5,5 sec die Translationsgeschwindigkeit zum ersten Male durch die Nullage. Der Vorgang schaukelt sich dann langsam auf. Wie die Kurven zeigen, sind die in den ersten Sekunden auftretenden Anstellwinkeländerungen und Fortschrittsgrade so klein, dass der Vertikalschub sich praktisch kaum ändern wird. Unsere Voraussetzung, dass senkrechte Bewegungen des Schwerpunktes nicht auftreten, ist also weitgehendst erfüllt.

V. Zusammenfassung.

Für die gestörte Längsbewegung eines Hubschraubers mit gegenläufigen Rotoren wird die Frequenzgleichung aufgestellt und an einem Beispiel der Verlauf der angefachten Schwingungen berechnet. Es zeigt sich, dass bei den heute üblichen Blattgewichten die Schlagbewegung als eine zeitliche Aufeinanderfolge von stationären Zuständen aufgefasst werden kann.

Die berechnete Schwingungszeit stimmt etwa mit den sich nach Hohenemser [7] ergebenden Werten überein, während die Anfachung bedeutend kleiner ist. Dieses Ergebnis wird durch neuere Messungen⁶⁾ bestätigt, bei denen nach einer Aussage der Fa. Flettner wesentlich geringere Anfachungen beobachtet wurden als nach [7] zu erwarten war.

VI. Schrifttum.

- [5] Küssner, Probleme des Hubschraubers, Jahrb. 1937 d. Dt. Luftfahrtforschg S I 241
- [6] von Schlippe, Dietrich, Zur Stabilität der Hubschrauber, Schriften d. Dt. Akademie d. Luftfahrtforschg, Heft 16
- [7] Hohenemser, Über die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit angelenkten Flügeln, Ing.-Archiv Bd 9 (1938) Heft 6 S 419
- [8] Schrenk, Statische Längsstabilität und Höhensteuerung von Tragschrauben, Luftf.-Forschg Bd 15 (1938) Lfg 6 S 283
- [9] Focke, Das Trag- und Hubschrauberproblem, Schriften d. Dt. Akademie d. Luftfahrtforschg, Heft 22
- [10] Klemin, Haugen, Sherwin, Autogiro longitudinal stability, second annual rotating wing aircraft meeting USA 1939
- [11] Adam, Über die Stabilität der Bewegung eines Autogiro-Blattes, Revista de Aeronautica (Aerotecnia) 1934, Nr 30 S 478
- [12] Sissingh, Untersuchungen über die Stabilität der Schlagbewegung von Steilschrauben, TB Bd. 11 (1944) Heft 10 S 359.

⁶⁾ Eine Veröffentlichung dieser Versuche seitens der Fa. Flettner ist beabsichtigt. Nähere Unterlagen, die einen Vergleich der Theorie mit den Messungen gestatten, sind dem Verfasser z. Zt. nicht bekannt.

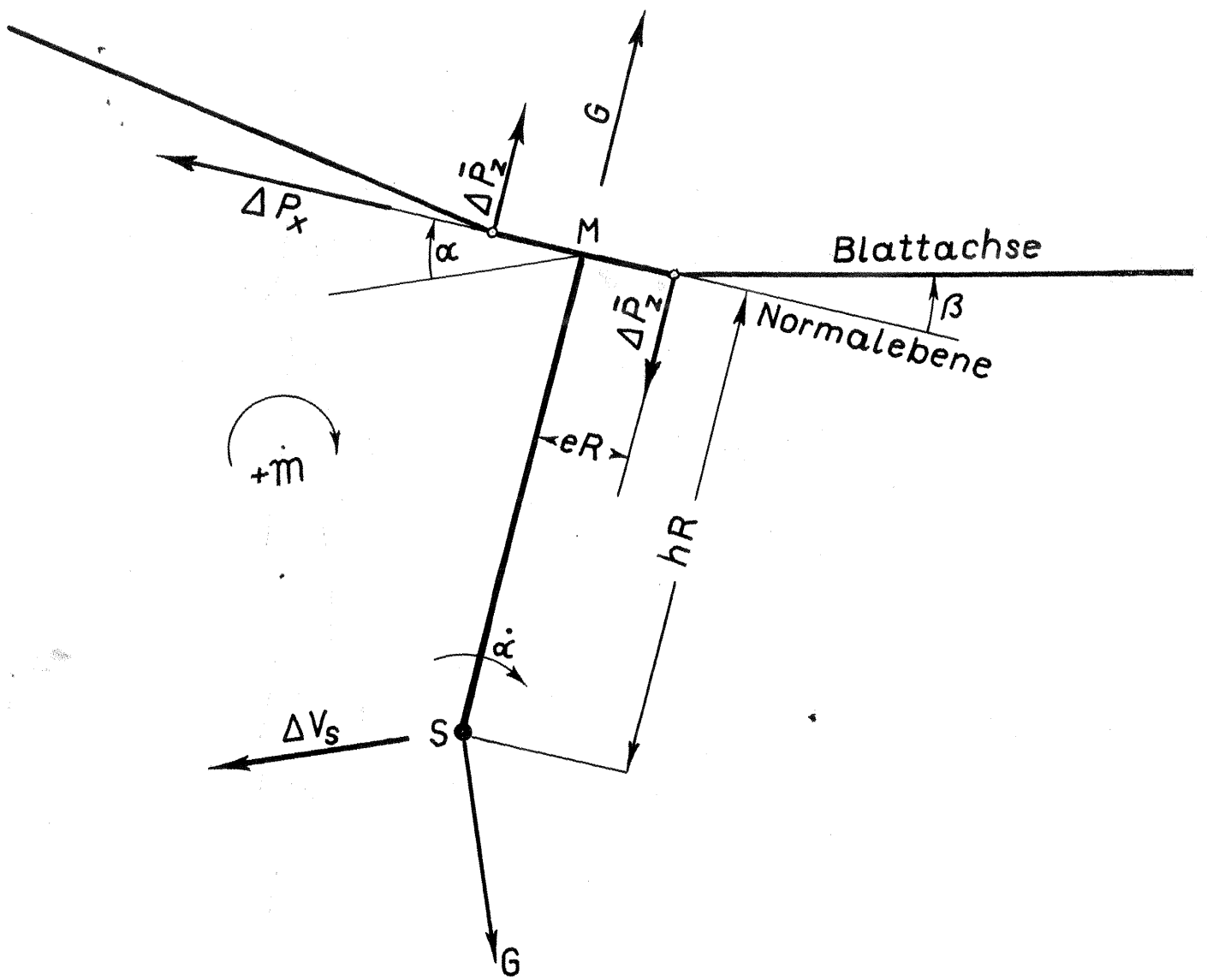


Bild 7

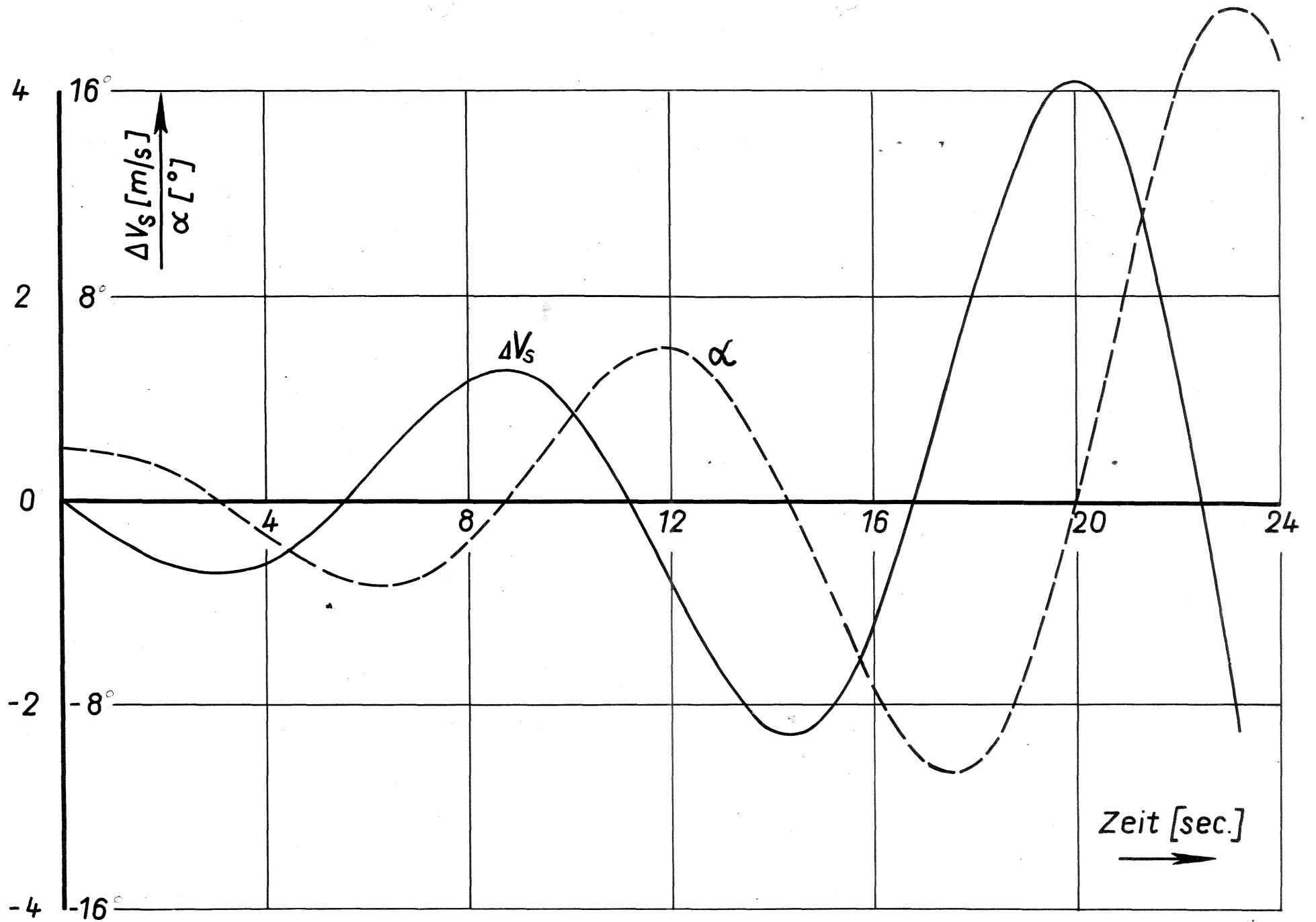


Bild 8. Zeitlicher Verlauf der Längsbewegung.