

Beiträge zur dynamischen Stabilität der Drehflügelflugzeuge
mit gelenkig angeschlossenen Blättern.

IV. Teilbericht

Die Längsstabilität des Hubschraubers im Geradeausflug.

Übersicht: Für die in Deutschland bevorzugte Bauart des Hubschraubers mit zwei nebeneinander liegenden, gegenläufigen Rotoren wird die Frequenzgleichung der gestörten Längsbewegung aufgestellt. Die Überlegungen gehen von der bekannten Glauert'schen Theorie aus, die im ersten Teilbericht dieser Aufsatzfolge auf instationäre Flugzustände erweitert wurde. Da die Untersuchungen gezeigt haben, dass durch Vernachlässigungen beim Ansatz der Bewegungsgleichungen die Ergebnisse unter Umständen grundlegend gefälscht werden, wurde besonderer Wert darauf gelegt, die Luft- und Massenkräfte möglichst exakt zu erfassen.

- Gliederung:
- I. Bezeichnungen
 - II. Kräfte- und Momentengleichgewicht des ungestörten, geraden Fluges
 - III. Die gestörte Längsbewegung
 - 1) Allgemeine Bemerkungen
 - 2) Aufstellung der Bewegungsgleichungen
 - IV. Zusammenfassung
 - V. Schrifttum
 - VI. Nachtrag

Der Bericht umfasst 24 Seiten
mit 4 Abbildungen.

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GÖTTINGEN E.V.

Institut für instationäre Vorgänge

Der Institutsleiter

Der Bearbeiter

Gesehen

Küssner

Sissingh

Alh. Betz

(Küssner)

(Sissingh)

(Betz)

I. Bezeichnungen.

V_S	m/s	Bahngeschwindigkeit des Schwerpunktes mit den Komponenten
		$V_{Sx} = V_S \cos \alpha$
		$V_{Sz} = V_S \sin \alpha$
V	m/s	Translationsgeschwindigkeit des Rotormittelpunktes mit den Komponenten
		$V_x = V_{Sx} - hR\dot{\sigma}$
		$V_z = V_{Sz}$
e_R	m	Abstand des Schlaggelenkes von Rotormitte
h_R	m	Hochlage der Rotoren über dem Schwerpunkt des Flugzeuges
q_R	m	Entfernung des Höhenleitwerkes vom Schwerpunkt
α	-	Rotoranstellwinkel, Winkel zwischen der Flugrichtung und der Normalebene des Rotors
$\dot{\sigma}$	-	Winkel zwischen der Normalebene der Rotoren und der Horizontalen
γ_B	-	Bahnneigungswinkel, positiv beim Steigen
F_H	m ²	Fläche des Höhenleitwerkes
\mathcal{J}_H	-	Auf die Normalebene bezogene aerodynamische Einstellung des Höhenleitwerkes
α_{iH}	-	Abwindwinkel am Ort des Höhenleitwerkes
c_{nH}	-	Normalkraftbeiwert des Höhenleitwerkes
\mathcal{J}_S	-	Dem Anstellwinkel des Blattes überlagerter Steuerwinkel mit abnehmendem Anstellwinkel

Anmerkung: Der Index $_0$ bezieht sich stets auf den ungestörten Gleichgewichtszustand.

II. Kräfte- und Momentengleichgewicht des ungestörten,
geraden Fluges.

Im Gegensatz zu den Stabilitätsbetrachtungen des normalen Drachenflugzeuges, bei denen die Kräfte auf die Richtung der momentanen Bahngeschwindigkeit des Schwerpunktes bezogen werden¹⁾, empfiehlt es sich bei den Drehflüglern, von einem rotorfesten Koordinatensystem auszugehen. Da wir in Übereinstimmung mit modernen Konstruktionen voraussetzen wollen, dass die Steuerung nicht durch Neigen des ganzen Rotors, sondern durch periodische Änderung des Blattanstellwinkels erfolgt, ist dieses rotorfeste Koordinatensystem zugleich flugzeugfest. Wir kommen also auf das im ersten Teilbericht dieser Aufsatzfolge eingeführte XYZ-System mit dem Nullpunkt in Rotormitte zurück: Die in der Normalebene liegende X-Achse wird nach vorn und die mit der Drehachse zusammenfallende Z-Achse nach unten positiv gerechnet, s. Bild 32.

Die allgemeine Längsbewegung des Hubschraubers kann aufgefasst werden als eine Translation seines Schwerpunktes und eine Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Querachse. Der Schwerpunkt habe in bezug auf das XYZ-System die Geschwindigkeiten V_{Sx} und V_{Sz} . Dann beträgt seine Bahngeschwindigkeit:

$$V_S = \sqrt{V_{Sx}^2 + V_{Sz}^2} \quad \dots\dots(167)$$

Die Normalebene der Rotoren wird dabei unter dem Winkel α angeströmt, es ist nach Bild 32

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{Sz}}{V_{Sx}} \quad \dots\dots(168)$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Normalebene und der Horizontalen mit δ , so erhalten wir für die Bahnneigung den Wert

$$\gamma_B = \delta - \alpha \quad \dots\dots(169)$$

¹⁾ s. z. B. Fuchs Hopf Seewald [13] Bd. I S 204.

Wir wollen bei unseren Überlegungen von dem ungestörten Gleichgewichtszustand eines geradlinigen Fluges ausgehen, der durch den Index 0 gekennzeichnet wird. Dieser Flugzustand ist durch die drei Grössen V_{Sx0} , V_{Szo} und σ_0 eindeutig bestimmt. Der zugehörige Fortschritts- und Durchflussgrad errechnen sich nach den Beziehungen:

$$\mu_{x0} = \frac{V_{Sx0}}{U} \quad \dots(170)$$

$$\lambda_{do} = \frac{V_{Szo} - w_0}{U} \quad \dots(171)$$

In Gl(171) ist w der induzierte Abwind am Ort der Schraube. Mit der Küssnerschen Kugelhypothese erhalten wir für diese Störgeschwindigkeit nach Sissingh [14] den Wert

$$w = \frac{\text{Axialschub}}{2FV'\rho} \quad \dots(172)$$

In dieser Gleichung bedeutet V' die resultierende Geschwindigkeit der Luft in der Rotorkreisebene. Sie kann für Flugeschwindigkeiten über etwa 10m/s gleich der Bahngeschwindigkeit V_{S0} des Schwerpunktes gesetzt werden. Für kleinere Geschwindigkeiten ist V' aus der nachstehenden Gleichung zu bestimmen:

$$V'^2 = V_{Sx0}^2 + \left(V_{Szo} - \frac{\text{Axialschub}}{2FV'\rho} \right)^2 \quad \dots(173)$$

Ist μ_{x0} und λ_{do} bekannt, so kann auch der Verlauf der Schlagbewegung berechnet werden. Wir wollen uns dabei auf die erste Harmonische beschränken. Es sei:

$$\beta = a_{00} - a_{10} \cos \psi - b_{10} \sin \psi \quad \dots(174)$$

Für die Koeffizienten a_{00} , a_{10} und b_{10} gelten die bekannten Beziehungen:

$$a_{00} = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{J} (B^4 + B^2 \mu_{x0}^2) + \mathcal{J}_s \cdot \frac{1}{3} B^3 \mu_{x0} + \frac{1}{3} B^3 \lambda_{do} - K \right\} \quad \dots(175)$$

$$a_{10} \left(\frac{1}{4} B^4 - \frac{1}{8} B^2 \mu_{x0}^2 \right) = \frac{2}{3} \mathcal{J} B^3 \mu_{x0} + \mathcal{J}_s \left(\frac{1}{4} B^4 + \frac{3}{8} B^2 \mu_{x0}^2 \right) + \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} \lambda_{do}$$

.....(176)

$$b_{10} \left(\frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_{x0}^2 \right) = a_{00} \frac{1}{3} B^3 \mu_{x0} \quad \dots(177)$$

In diesen Gleichungen ist ϑ_s ein Steuerwinkel, mit welchem dem Anstellwinkel ϑ des Blattes ein periodisch wechselnder Wert vom Betrage $\vartheta_s \sin \psi$ überlagert wird. Der Hubschrauber wird gedrückt, falls $\vartheta_s < 0$ ist, ein positiver ϑ_s -Wert dagegen entspricht dem Ziehen.

Im stationären Gleichgewichtszustand müssen die Summe aller Kräfte in X- und Z-Richtung sowie die Momente um die Flugzeugquerachse gleich Null sein:

$$P_x - G \sin \sigma_0 - W_{\text{Rumpf}} = 0 \quad \dots(178)$$

$$P_z + G \cos \sigma_0 = 0 \quad \dots(179)$$

$$M_{\text{Rotor}} + M_{\text{Leitwerk}} = 0 \quad \dots(180)$$

In diesen Gleichungen sind $P_{x,z}$ die zeitlich konstanten Anteile der von den beiden Rotoren in X- bzw. Z-Richtung erzeugten Luftkräfte und W_{Rumpf} der Widerstand des Hubschraubers ohne Rotoren, im folgenden kurz als "Rumpfwiderstand" bezeichnet. Die Momente M um die Querachse wollen wir positiv rechnen, wenn sie schwanzlastig wirken. Die Gleichungen (178 bis 180) setzen voraus, dass der Rumpfwiderstand in die X-Richtung fällt und dass die Z-Komponente der Luftkraft des Rumpfes und Höhenleitwerkes bei dem Gleichgewicht der Kräfte vernachlässigt werden darf. Da der Rumpfwiderstand nur bei den höheren Fluggeschwindigkeiten - bei denen die Rotoranstellung α gering ist - eine Rolle spielt, ist die erste Annahme ohne weiteres zulässig. Die Vernachlässigung der Rumpf- und Höhenleitwerkskräfte in Gl(179) dürfte ebenfalls berechtigt sein, da die betr. Kräfte klein sind im Verhältnis zu den Luftkräften der beiden Rotoren. Bevor wir auf die Berechnung der Kräfte $P_{x,z}$ übergehen, wollen wir die Gleichung für den Rumpfwiderstand angeben. Dabei höheren Fluggeschwindigkeiten $V_{Sx0}^2 \gg V_{Szo}^2$ ist, können wir setzen:

$$W_{\text{Rumpf}} = f F V_{Sx0}^2 \vartheta/2 \quad \dots(181)$$

In dieser Gleichung ist f ein Beiwert für die schädliche Fläche aller nichttragenden Teile des Hubschraubers.

Die Kraft P_z - sie ist gleich dem negativen Axialschub der beiden Rotoren - wurde im wesentlichen bereits berechnet, s. Gl(35). Mit Berücksichtigung der oben erwähnten Höhensteuerung durch Anstellwinkelveränderung des Blattes wird

$$P_z = - \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \mathcal{J} \left(\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu_{xo}^2 \right) + \frac{1}{2} B^2 \left(\mathcal{J}_s \mu_{xo} + \lambda_{do} \right) \right\} \dots (182)$$

P_x setzt sich aus den von den Normal- und Tangentialkräften am Blattelement herrührenden Anteilen zusammen. Da im Gleichgewichtszustand nach Gl(179) der Axialschub der Rotoren gleich $G \cos \delta_o$ sein muss, folgt aus Gl(38a,b) mit Berücksichtigung des Steuerwinkels \mathcal{J}_s für den Anteil der Normalkraft:

$$P_{x1} = - \frac{1}{2} a_{10} G \cos \delta_o + \frac{M_G^*}{KR} \frac{a_{00}}{2} \left\{ b_{10} \left(\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{xo}^2 \right) - \frac{1}{2} a_{00} B^2 \mu_{xo} \right\} \dots (183)$$

Die Tangentialkräfte liefern analog Gl(122) einen Beitrag von

$$P_{x2} = \frac{1}{2\pi} \frac{M_G^*}{KR} \left[\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \xi_n^2 + \xi_n \xi_t \left(\mathcal{J} + \mathcal{J}_s \sin \psi \right) \right\} \sin \psi \, d\xi \, d\psi - \frac{c_w}{c'_a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t^2 \sin \psi \, d\xi \, d\psi \right] \dots (184)$$

Die Auswertung dieser Integrale ergibt:

$$P_{x2} = \frac{M_G^*}{KR} \left[\frac{1}{2} \mathcal{J} \left\{ B \mu_{xo} \lambda_{do} - a_{10} \left(\frac{1}{3} B^3 - \frac{1}{4} B \mu_{xo}^2 \right) \right\} + \frac{1}{2} \lambda_{do} \left(\frac{1}{2} B^2 \mathcal{J}_s - B^2 a_{10} \right) - \frac{1}{8} B^2 \mu_{xo} \left(a_{10}^2 - b_{10}^2 \right) - \frac{1}{4} B a_{00} b_{10} \mu_{xo}^2 \right] - \frac{M_G^* c_w \mu_{xo}}{2KR c'_a} \dots (185)$$

Damit erhalten wir für $P_x = P_{x1} + P_{x2}$ den Wert:

$$\begin{aligned}
 P_x = & -\frac{1}{2}G a_{10} \cos \delta_0 - \frac{M_G^* c_w \mu_{x0}}{2RKc'_a} \\
 & + \frac{M_G^*}{RK} \left[\frac{1}{2} \lambda_{d0} \left(\mathcal{V} B \mu_{x0} + \frac{1}{2} B^2 \mathcal{V}_s - B^2 a_{10} \right) \right. \\
 & \quad - \mathcal{V} a_{10} \left(\frac{1}{6} B^3 - \frac{1}{8} B \mu_{x0}^2 \right) \\
 & \quad - \frac{1}{8} B^2 \mu_{x0} (a_{10}^2 - b_{10}^2 + 2 a_{00}^2) \\
 & \quad \left. + a_{00} b_{10} \left(\frac{1}{6} B^3 - \frac{1}{8} B \mu_{x0}^2 \right) \right] \dots (186)
 \end{aligned}$$

Berechnung der auftretenden Momente.

Bezeichnet man den Abstand der Gelenke von der Drehachse mit eR und die Koordinaten des Schwerpunktes S im XYZ-System nach Bild 33 mit hR bzw. pR , so setzt sich das von den beiden Rotoren in bezug auf die Flugzeugquerachse ausgeübte Moment aus folgenden Anteilen zusammen:

$$M_{\text{Rotor}} = -P_x \cdot hR + P_z \cdot pR + \frac{1}{2} \bar{P}_z eR \dots (187)$$

Die Kräfte $P_{x,z}$ wurden bereits berechnet. Ausserdem tritt noch die Kraft \bar{P}_z auf, mit der - wie bei den Überlegungen des II. Teilberichtes - die mit $\cos \psi$ veränderlichen Anteile der Luft- und Massenkräfte in Z-Richtung bezeichnet wurden. Nach Gl(35,139) ist

$$\bar{P}_z = \frac{\Omega^2 M_G^*}{g} a_{10} - \frac{M_G^*}{KR} \left\{ -a_{00} \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} + b_{10} \left(\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2 \right) \right\} \quad (188)$$

Zum Schluss unserer Betrachtung des Gleichgewichtszustandes muss noch auf das Moment des Höhenleitwerkes eingegangen werden. Das Leitwerk habe die Fläche F_H und nach Bild 33 vom Schwerpunkt die Entfernung qR . Bezeichnet man die Anstellung in bezug auf die Normalebene mit \mathcal{V}_H und die durch den Abwind der Rotoren verursachte Ablenkung der Strömung am Ort des Leitwerkes mit α_{iH} , so bildet die Anströmgeschwindigkeit V_H des Leitwerkes mit der Nullauftriebslinie den Winkel

$$\alpha_H = \mathcal{V}_H + \alpha - \alpha_{iH} \dots (189)$$

Siehe Bild 34.

Der zugehörige Beiwert der Normalkraft sei c_{nH} , damit wird das ausgeübte Moment:

$$M_{\text{Leitwerk}} = - qR v_{So}^2 c_{nH} F_H \var�/2 \quad \dots(190)$$

III. Die gestörte Längsbewegung.

1) Allgemeine Bemerkungen.

Wenn wir - ausgehend von dem bisher behandelten Gleichgewichtszustand - die als klein anzusehenden Störungsglieder Δv_{Sx} , Δv_{Sz} und $\Delta \var�$ zulassen, wird

$$v_{Sx} = v_{Sxo} + \Delta v_{Sx} \quad \dots(191)$$

$$v_{Sz} = v_{Szo} + \Delta v_{Sz} \quad \dots(192)$$

$$\var� = \var�_o + \Delta \var� \quad \dots(193)$$

und damit $\mu_x = \mu_{xo} + \Delta \mu_x \quad \dots(194)$

$$\lambda_d = \lambda_{do} + \Delta \lambda_d \quad \dots(195)$$

$$a_o = a_{oo} + \Delta a_o \quad \dots(196)$$

$$a_1 = a_{1o} + \Delta a_1 \quad \dots(197)$$

$$b_1 = b_{1o} + \Delta b_1 \quad \dots(198)$$

Die in Gl(194 bis 198) mit Δ bezeichneten Änderungen der für den Flugzustand charakteristischen aerodynamischen Daten eines Rotors sind Funktionen der Störungsglieder Δv_{Sx} , Δv_{Sz} und $\Delta \var�$. Wir werden sie später berechnen.

Bei den oben beschriebenen Störbewegungen ändern sich ebenfalls die Bahngeschwindigkeit v_S und die Rotoranstellung α . Die Gleichungen

$$v_{Sx} = v_S \cos \alpha \quad \dots(199)$$

$$v_{Sz} = v_S \sin \alpha \quad \dots(200)$$

gehen mit Gl(191,192) und

$$V_S = V_{S_0} + \Delta V_S \quad \dots\dots(201)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha \quad \dots\dots(202)$$

über in

$$V_{S_{X_0}} + \Delta V_{S_X} = (V_{S_0} + \Delta V_S) \cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \quad \dots\dots(203)$$

$$V_{S_{Z_0}} + \Delta V_{S_Z} = (V_{S_0} + \Delta V_S) \sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) \quad \dots\dots(204)$$

Da $\Delta \alpha$ ein kleiner Winkel ist, kann

$$\sin \Delta \alpha = \Delta \alpha$$

$$\cos \Delta \alpha = 1$$

gesetzt werden und wir erhalten mit

$$\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) = \cos \alpha_0 - \Delta \alpha \sin \alpha_0 \quad \dots\dots(205)$$

$$\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) = \sin \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0 \quad \dots\dots(206)$$

aus Gl(203,204) die Beziehungen:

$$\Delta V_S = \Delta V_{S_X} \cos \alpha_0 + \Delta V_{S_Z} \sin \alpha_0 \quad \dots\dots(207)$$

$$\Delta \alpha = \frac{1}{V_{S_{Z_0}}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \Delta V_{S_Z} - \sin^2 \alpha_0 \Delta V_{S_X} \right) \quad \dots\dots(208)$$

Für die Berechnung der Luftkräfte des Rotors müssen wir von der bisher behandelten Schwerpunktbewegung (Index S) auf die Geschwindigkeit des Schraubenmittelpunktes (ohne Index) übergehen. Wenn man von der - normalerweise sehr kleinen - Vorlage pR des Schwerpunktes absieht, besteht zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten folgender Zusammenhang:

$$V_x = V_{S_{X_0}} + \Delta V_{S_X} - hR \dot{\delta} \quad \dots\dots(209)$$

$$V_z = V_{S_{Z_0}} + \Delta V_{S_Z} \quad \dots\dots(210)$$

Die Störgeschwindigkeiten der Rotormitte betragen also

$$\Delta V_x = \Delta V_{Sx} - hR \dot{\sigma} \quad \dots(211)$$

$$\Delta V_z = \Delta V_{Sz} \quad \dots(212)$$

Bezeichnet man die durch die Störbewegung verursachte Änderung des induzierten Abwindes mit Δw , so ist also

$$\Delta \mu_x = \frac{1}{U} (\Delta V_{Sx} - hR \dot{\sigma}) \quad \dots(213)$$

$$\Delta \lambda_d = \frac{1}{U} (\Delta V_{Sz} - \Delta w) \quad \dots(214)$$

Die letzte Gleichung ist in der vorliegenden Form nicht brauchbar, da die Abhängigkeit des Abwindes von den Störungsgliedern ΔV_{Sx} , ΔV_{Sz} und $\Delta \dot{\sigma}$ noch nicht bekannt ist. Da angenommen werden darf, dass die resultierende Geschwindigkeit V' der Luft in der Rotorkreisebene sich bei kleinen Störungen der Längsbewegung nicht ändert, folgt aus Gl(172)

$$\Delta w = \frac{\Delta S_a}{2FV'_s} \quad \dots(215)$$

In dieser Gleichung bedeutet ΔS_a die Änderung des Axialschubes eines Rotors infolge der Störbewegungen. Nach Gl(35) bzw. (182) ist

$$\Delta S_a = FU^2 \sigma'_a \left\{ \Delta u_x \left(\frac{1}{2} B^2 \dot{\sigma}_s + B u_{x0} \dot{\sigma} \right) + \Delta \lambda_d \cdot \frac{1}{2} B^2 \right\} \quad \dots(216)$$

Mit Gl(213,214,216) geht Gl(215) über in

$$2FV'_s \cdot \Delta w = FU \sigma'_a \left\{ (\Delta V_{Sz} - \Delta w) \frac{1}{2} B^2 + (\Delta V_{Sx} - hR \dot{\sigma}) \left(\frac{1}{2} B^2 \dot{\sigma}_s + B u_{x0} \dot{\sigma} \right) \right\} \quad \dots(217)$$

Daraus folgt:

$$\Delta w = (\Delta V_{Sx} - hR \dot{\sigma}) \cdot \frac{\dot{\sigma}_s + \frac{2}{B} \dot{\sigma} \mu_{x0}}{1 + \frac{8V'}{B^2 U \sigma'_a}} + \Delta V_{Sz} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8V'}{B^2 U \sigma'_a}} \quad \dots(218)$$

Setzt man diesen Wert in Gl(214) ein, so wird

$$\Delta \lambda_d = \frac{1}{U} \left\{ C_1 \Delta V_{S_z} - C_2 (\Delta V_{S_x} - hR \dot{\delta}) \right\} \quad \dots(219)$$

In dieser Gleichung ist

$$C_1 = \frac{1}{1 + \frac{B^2 U \tilde{c}'_a}{8V'}} \approx \frac{1}{1 + \frac{B^2 \tilde{c}'_a}{8\lambda}} \quad \dots(220)$$

$$C_2 = (1 - C_1) \left(\tilde{v}_s + \frac{2}{B} \tilde{v}_{\mu_{x0}} \right) \quad \dots(221)$$

In Gl(220,221) ist \tilde{v} die Flächendichte eines Rotors, bei einem Doppelrotor (zwei durcheinander laufende Rotoren mit gekreuzten Achsen oder zwei dicht übereinander liegende Rotoren) ist die Gesamtflächendichte anzusetzen. Der Fortschrittsgrad λ ist das Verhältnis der Flug- zur Umfangsgeschwindigkeit.

Da die Schlagbewegung des Blattes nach den Ergebnissen des II. Teilberichtes als eine Aufeinanderfolge von stationären Zuständen aufgefasst werden kann, folgt aus Gl(41,111, 175,176,177) ²⁾:

$$\Delta a_0 = C_3 (\Delta V_{S_x} - hR \dot{\delta}) + C_4 (\Delta \dot{V}_{S_x} - hR \ddot{\delta}) + C_5 \Delta V_{S_z} + C_6 \Delta \dot{V}_{S_z} \quad \dots(222)$$

$$\Delta a_1 = C_{10} (\Delta V_{S_x} - hR \dot{\delta}) + C_{11} \Delta V_{S_z} - C_9 \dot{\delta} \quad \dots(223)$$

$$\begin{aligned} \Delta b_1 = & C_{12} (\Delta V_{S_x} - hR \dot{\delta}) + C_{13} (\Delta \dot{V}_{S_x} - hR \ddot{\delta}) \\ & + C_{14} \Delta V_{S_z} + C_{15} \Delta \dot{V}_{S_z} - C_{16} \dot{\delta} - C_{17} \ddot{\delta} \quad \dots(224) \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist zu setzen:

$$C_3 = \frac{\gamma}{2U} \left(\frac{1}{3} B^3 \tilde{v}_s + \frac{1}{2} B^2 \tilde{v}_{\mu_{x0}} - \frac{1}{3} B^3 C_2 \right) \quad \dots(225)$$

²⁾ Da Δa_1 ausschlaggebend in die Stabilitätsrechnung eingeht, wurde bei Δa_1 im Gegensatz zu Δa_0 und Δb_1 nach Gl(111) die Exzentrizität des Schlaggelenkes berücksichtigt.

$$c_4 = \frac{K\gamma a_{10}}{4g} \dots (226)$$

$$c_5 = \frac{\gamma B^3 c_1}{6U} \dots (227)$$

$$c_6 = \frac{\gamma K}{2g} \dots (228)$$

$$c_7 = \frac{9(8B^3 - 12eB^2) + 6\lambda_{d0}(B^2 - 2eB) + 9\gamma_s \mu_{x0}(B^2 - 2eB)}{3B^4 - 8eB^3 - 1,5 \mu_{x0}^2(B^2 - 2eB)} \dots (229)$$

$$c_8 = \frac{6 \mu_{x0}(B^2 - 2eB)}{3B^4 - 8eB^3 - 1,5 \mu_{x0}^2(B^2 - 2eB)} \dots (230)$$

$$c_9 = \frac{48(1 + eR \frac{M_G}{g\Theta})}{\gamma \Omega \{ (3B^4 - 8eB^3) - 1,5 \mu_{x0}^2(B^2 - 2eB) \}} \dots (231)$$

$$c_{10} = \frac{1}{U} (c_7 - c_2 c_8) \sqrt{+ 6e^2 B^2} \dots (232)$$

$$c_{11} = \frac{c_1 c_8}{U} \dots (233)$$

$$c_{12} = \frac{4B^3(a_{00} + c_3 V_{Sx0}) - 3 B^2 u_{x0} b_{10}}{U(3B^4 + 1,5 B^2 \mu_{x0}^2)} \dots (234)$$

$$c_{13} = \frac{12 a_{00} K + 4B^3 g c_4 \mu_{x0}}{g(3B^4 + 1,5 B^2 \mu_{x0}^2)} \dots (235)$$

$$c_{14} = c_5 \cdot \frac{4B^3 \mu_{x0}}{3B^4 + 1,5 B^2 \mu_{x0}^2} \dots (236)$$

$$c_{15} = \frac{c_6 c_{14}}{c_5} \dots (237)$$

$$c_{16} = \frac{3B^4}{\Omega(3B^4 + 1,5 B^2 \mu_{x0}^2)} \dots (238)$$

$$c_{17} = \frac{24}{\gamma \Omega^2(3B^4 + 1,5 B^2 \mu_{x0}^2)} \dots (239)$$

2) Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Bei der gestörten Längsbewegung sind die Gleichgewichtsbedingungen Gl(178 bis 180) durch die Trägheitskräfte zu ergänzen. Ferner ist zu beachten, dass sich infolge der Störung die Kräfte P_x, P_z, \bar{P}_z um die noch zu berechnenden Beträge $\Delta P_x, \Delta P_z, \Delta \bar{P}_z$ und damit auch das vom Rotor ausgeübte Moment ändern. Nach Gl(187) ist

$$\Delta M_{\text{Rotor}} = R(\Delta P_z p + \frac{1}{2} \Delta \bar{P}_z e - \Delta P_x h) \quad \dots(240)$$

Auf die Änderung des Leitwerksmomentes $\Delta M_{\text{Leitwerk}}$ kommen wir später zurück. Die von der Störung ausgelösten Kräfte und Momente müssen mit den Trägheitskräften im Gleichgewicht stehen, d.h. es müssen folgende Bewegungsgleichungen erfüllt sein:

$$- \omega_y V_{Szo} \frac{G}{g} + \Delta P_x - \Delta \delta G \cos \delta_0 - \Delta W_{\text{Rumpf}} - \frac{G}{g} \Delta \dot{V}_{Sx} = 0 \quad \dots(241)$$

$$+ \omega_y V_{Sxo} \frac{G}{g} + \Delta P_z - \Delta \delta G \sin \delta_0 = \frac{G}{g} \Delta \dot{V}_{Sz} = 0 \quad \dots(242)$$

$$\Delta M_{\text{Leitwerk}} + R(\Delta P_z p + \frac{1}{2} \Delta \bar{P}_z e - \Delta P_x h) - \ddot{\delta} I = 0 \quad \dots(243)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen $\Delta \dot{V}_{Sx}, \Delta \dot{V}_{Sz}$ die Beschleunigungen in X- bzw. Z-Richtung. I ist das Trägheitsmoment des Hubschraubers um die Querachse und $\ddot{\delta}$ die Winkelbeschleunigung um diese Achse. Aus Gl(181) folgt

$$\Delta W_{\text{Rumpf}} = f F V_{Sxo} \rho \cdot \Delta V_{Sx} \quad \dots(244)$$

Die Berechnung der Kräfte $\Delta P_x, \Delta P_z, \Delta \bar{P}_z$ - sie erfolgt unter Berücksichtigung der Störbewegung nach der bei der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes beschriebenen Methode - führt auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta P_x = & C_{18} \Delta \mu_x + C_{19} \Delta \lambda_d + C_{20} \Delta a_0 + C_{21} \Delta a_1 + C_{22} \Delta b_1 \\ & + C_{23} \dot{\delta} + C_{24} (\Delta V_{Sx} - h R \dot{\delta}) \quad \dots(245) \end{aligned}$$

In Gl(245) ist zu setzen:

$$C_{18} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathcal{J}} (B \lambda_{do} + \frac{1}{2} B \mu_{xo} a_{10}) - \frac{1}{2} a_{10} (\dot{\mathcal{J}} B \mu_{xo} + \frac{1}{2} B^2 \dot{\mathcal{J}}_s) - \frac{1}{8} B^2 (a_{10}^2 + 2 a_{00}^2 - b_{10}^2) - \frac{1}{4} B \mu_{xo} a_{00} b_{10} \right\}, (246)$$

$$C_{19} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathcal{J}} B \mu_{xo} + \frac{1}{4} B^2 \dot{\mathcal{J}}_s - \frac{3}{4} B^2 a_{10} \right\} \dots (247)$$

$$C_{20} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ b_{10} \left(\frac{1}{6} B^3 - \frac{1}{8} B \mu_{xo}^2 \right) - \frac{1}{2} B^2 a_{00} \mu_{xo} \right\} \dots (248)$$

$$C_{21} = - \left[\frac{1}{2} G \cos \delta_0 + \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathcal{J}} \left(\frac{1}{3} B^3 - \frac{1}{4} B \mu_{xo}^2 \right) + \frac{1}{2} B^2 \lambda_{do} + \frac{1}{4} B^2 a_{10} \mu_{xo} \right\} \right] \dots (249)$$

$$C_{22} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ a_{00} \left(\frac{1}{6} B^3 - \frac{1}{8} B \mu_{xo}^2 \right) + \frac{1}{4} B^2 b_{10} \mu_{xo} \right\} \dots (250)$$

$$C_{23} = \frac{M_G^*}{UK} \left(\frac{1}{6} B^3 a_{00} + \frac{1}{8} B^2 b_{10} \mu_{xo} \right) \dots (251)$$

$$C_{24} = - \frac{M_G^* c_w}{2URKc'_a} \dots (252)$$

Mit Gl(213, 219, 222, 223, 224) kann Gl(245) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\Delta P_x = C_{25} (\Delta \dot{V}_{Sx} - hR \dot{\delta}) + C_{26} (\Delta \ddot{V}_{Sx} - hR \ddot{\delta}) + C_{27} \Delta V_{Sz} + C_{28} \Delta \dot{V}_{Sz} + C_{29} \dot{\delta} + C_{30} \ddot{\delta} \dots (253)$$

An neuen Koeffizienten treten auf:

$$C_{25} = C_{24} + C_3 C_{20} + C_{10} C_{21} + C_{12} C_{22} + \frac{1}{U} (C_{18} - C_2 C_{19}) \dots (254)$$

$$C_{26} = C_4 C_{20} + C_{13} C_{22} \dots\dots\dots(255)$$

$$C_{27} = C_5 C_{20} + C_{11} C_{21} + C_{14} C_{22} + \frac{1}{U} C_1 C_{19} \dots\dots\dots(256)$$

$$C_{28} = C_6 C_{20} + C_{15} C_{22} \dots\dots\dots(257)$$

$$C_{29} = C_{23} - C_9 C_{21} - C_{16} C_{22} \dots\dots\dots(258)$$

$$C_{30} = - C_{17} C_{22} \dots\dots\dots(259)$$

Für die Kräfte $4P_z$ und $4\bar{P}_z$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$- 4P_z = C_{31} (4V_{Sx} - hR\dot{\delta}) + 4V_{Sz} \cdot C_{32} \dots\dots\dots(260)$$

$$- 4\bar{P}_z = C_{33} (4V_{Sx} - hR\dot{\delta}) + C_{34} (4\dot{V}_{Sx} - hR\ddot{\delta}) + C_{35} 4V_{Sz} + \dots$$

$$+ C_{36} 4\dot{V}_{Sz} + C_{37} \dot{\delta} + C_{38} \ddot{\delta} \dots\dots\dots(261)$$

In diesen Gleichungen ist:

$$C_{31} = \frac{M_G^*}{KR U} \left\{ \frac{1}{2} B \mu_{x0} + \frac{1}{2} B^2 (\frac{\dot{\delta}}{s} - C_2) \right\} \dots\dots\dots(262)$$

$$C_{32} = \frac{M_G^*}{KR U} \frac{1}{2} B^2 C_1 \dots\dots\dots(263)$$

$$C_{33} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \frac{1}{2U} (B b_{10} \mu_{x0} - B^2 a_{00}) - C_3 \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} + C_{12} (\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2) \right\} - C_{10} \frac{\Omega^2 M_G^*}{g} \dots\dots\dots(264)$$

$$C_{34} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ C_{13} (\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2) - C_4 \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} \right\} \dots\dots\dots(265)$$

$$C_{35} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ C_{14} (\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2) - C_5 \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} \right\} - C_{11} \frac{M_G^* \Omega^2}{g} \dots\dots\dots(266)$$

$$C_{36} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ C_{15} (\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2) - C_6 \cdot \frac{1}{2} B^2 \mu_{x0} \right\} \dots\dots\dots(267)$$

$$C_{37} = \frac{M_G^*}{KR} \left\{ \frac{B^3}{3\Omega} - C_{16} (\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2) \right\} + C_9 \frac{\Omega^2 M_G^*}{g} \dots\dots\dots(268)$$

$$c_{38} = - \frac{M_G^*}{KR} \cdot c_{17} \left(\frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{4} B \mu_{x0}^2 \right) + \frac{1}{g} (M_G^* + e R G_F^*) \quad \dots (269)$$

Ferner wollen wir einführen:

$$c_{39} = G \sin \delta_0 \quad \dots (270)$$

$$c_{40} = G \cos \delta_0 \quad \dots (271)$$

$$c_{41} = G/g \quad \dots (272)$$

$$c_{42} = f F V_{Sx0} \varrho \quad \dots (273)$$

$$c_{43} = I/R \quad \dots (274)$$

Zum Schluss wäre noch die Abhängigkeit des Leitwerksmomentes von der Störbewegung des Hubschraubers zu berechnen. Wie bei dem normalen Drachenflugzeug ändert sich die Anströmung des Leitwerkes bei einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\delta}$ um den Winkel $\delta \cdot gR/V_{Sx0}$. Ausserdem spielt beim Hubschrauber die Beeinflussung der Strömung durch den Abwind der Rotoren eine nicht unwesentliche Rolle. Da theoretische Aussagen nicht möglich sind, wollen wir voraussetzen, dass - durch Windkanalversuche oder Flugmessungen - die mit α_{iH} bezeichnete Ablenkung der Strömung am Höhenleitwerk als Funktion der Bahngeschwindigkeit V_S und der Rotoranstellung α bekannt ist. Mit

$$\Delta \alpha_{iH} = \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial V_S} \Delta V_S + \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial \alpha} \Delta \alpha \quad \dots (275)$$

ändert sich die Anströmung des Leitwerkes nach Gl(189) um den Winkel

$$\Delta \alpha_H = \frac{gR \dot{\delta}}{V_{Sx0}} + \Delta \alpha - \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial V_S} \Delta V_S - \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial \alpha} \Delta \alpha \quad \dots (276)$$

Die dadurch verursachte Änderung des Normalkraftbeiwertes c_{nH} beträgt

$$\Delta c_{nH} = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H} \cdot \Delta \alpha_H \quad \dots (277)$$

Wenn wir die Koeffizienten

$$C_{44} = F_H V_{So} c_{nH} \rho \quad \dots (278)$$

$$C_{45} = V_{So}^2 F_H \frac{\rho}{2} \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H} \quad \dots (279)$$

eingeführen, kann die durch die gestörte Längsbewegung verursachte Momentenänderung in folgender Form geschrieben werden:

$$\Delta M_{\text{Leitwerk}} = -qR \left[C_{44} \Delta V_S + C_{45} \left\{ \dot{\delta} \frac{qR}{V_{Sx0}} + 4\alpha \left(1 - \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial \alpha} \right) - \Delta V_S \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial V_S} \right\} \right]; \dots (280)$$

Drückt man ΔV_S und 4α nach Gl(207,208) durch die Störungsglieder ΔV_{Sx} und ΔV_{Sz} aus, so geht Gl(280) über in

$$\Delta M_{\text{Leitwerk}} = -qR (C_{46} \Delta V_{Sx} + C_{47} \Delta V_{Sz} + C_{48} \dot{\delta}) \quad \dots (281)$$

In dieser Gleichung ist

$$C_{46} = + \cos \alpha_0 \left(C_{44} - C_{45} \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial V_S} \right) - \sin^2 \alpha_0 \left(1 - \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial \alpha} \right) \frac{C_{45}}{V_{Szo}} \quad \dots (282)$$

$$C_{47} = + \sin \alpha_0 \left(C_{44} - C_{45} \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial V_S} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(1 - \frac{\partial \alpha_{iH}}{\partial \alpha} \right) \frac{C_{45}}{2V_{Szo}} \quad \dots (283)$$

$$C_{48} = C_{45} \frac{qR}{V_{Sxo}} \quad \dots (284)$$

Liegen Windkanalmessungen vor, so können die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial P_x}{\partial v_{Sx}}, \quad \frac{\partial P_x}{\partial v_{Sz}}, \quad \frac{\partial P_z}{\partial v_{Sx}}, \quad \frac{\partial P_z}{\partial v_{Sz}}$$

aus diesen Versuchen ermittelt werden. Bezeichnet man die auf die Umfangsgeschwindigkeit U und die Rotorkreisfläche F bezogenen Beiwerte des Auftriebes und Widerstandes (siehe Bild 35) mit k_a bzw. k_w , so ergeben sich für die Koeffizienten C_{25} , C_{27} , C_{31} und C_{32} die folgenden Beziehungen:

$$+ C_{25} = \frac{\partial P_x}{\partial v_{Sx}} = FU\zeta/2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \left(+ \frac{\partial k_a}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial k_w}{\partial \alpha} - \frac{k_a}{\lambda} \right) - \cos^2 \alpha_0 \frac{\partial k_w}{\partial \lambda} - \sin^2 \alpha_0 \cdot \frac{1}{\lambda} \left(k_w + \frac{\partial k_a}{\partial \alpha} \right) \right\} \dots (285)$$

$$+ C_{27} = \frac{\partial P_x}{\partial v_{Sz}} = FU\zeta/2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \left(- \frac{\partial k_w}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial k_a}{\partial \alpha} + \frac{k_w}{\lambda} \right) + \sin^2 \alpha_0 \frac{\partial k_a}{\partial \lambda} + \cos^2 \alpha_0 \cdot \frac{1}{\lambda} \left(k_a - \frac{\partial k_w}{\partial \alpha} \right) \right\} \dots (286)$$

$$- C_{31} = \frac{\partial P_z}{\partial v_{Sx}} = FU\zeta/2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \left(- \frac{\partial k_w}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial k_a}{\partial \alpha} + \frac{k_w}{\lambda} \right) - \cos^2 \alpha_0 \frac{\partial k_a}{\partial \lambda} - \sin^2 \alpha_0 \cdot \frac{1}{\lambda} \left(k_a - \frac{\partial k_w}{\partial \alpha} \right) \right\} \dots (287)$$

$$- C_{32} = \frac{\partial P_z}{\partial v_{Sz}} = FU\zeta/2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \left(- \frac{\partial k_a}{\partial \lambda} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial k_w}{\partial \alpha} + \frac{k_a}{\lambda} \right) - \sin^2 \alpha_0 \frac{\partial k_w}{\partial \lambda} - \cos^2 \alpha_0 \cdot \frac{1}{\lambda} \left(k_w + \frac{\partial k_a}{\partial \alpha} \right) \right\} \dots (288)$$

Wir führen weiter ein:

$$c_{49} = v_{Szo} \cdot \frac{G}{g} \dots \dots \dots (289)$$

$$C_{50} = V_{Sx0} \cdot \frac{G}{g} \quad \dots\dots(290)$$

[folgende

Damit errechnen sich die Lösungen der drei homogenen linearen Differentialgleichungen (241,242,243) aus der Bedingung, dass die Hauptdeterminante gleich Null sein muss. Siehe Gleichung (291). Es versteht sich von selbst, dass die darin vorkommende Lösung λ der Frequenzgleichung nichts mit dem Fortschrittsgrad λ der Gl(220,285 - 288) zu tun hat.

IV. Zusammenfassung.

Für einen Hubschrauber mit exzentrischen Schlaggelenken wird die Längsstabilität des Vorwärtsfluges untersucht. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Rotordrehzahl während der Störbewegung konstant bleibt und dass der Drehflügel selbst biegesteif ist. Bei einem korrekten Ansatz der Luft- und Massenkräfte ergeben sich ziemlich umfangreiche und zum Teil auch unübersichtliche Gleichungen. Da die Erfahrung jedoch gezeigt hat, dass durch scheinbar geringfügige Vernachlässigungen das Ergebnis unter Umständen wesentlich gefälscht werden kann, kam es zunächst darauf an, die verschiedenen Einflüsse möglichst exakt zu erfassen. Über die zulässigen Vereinfachungen und den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Längsstabilität des Vorwärtsfluges wird in einem späteren Teilbericht berichtet werden.

V. Schrifttum!

- [13] Fuchs, Hopf, Seewald, Aerodynamik Band I
- [14] Sissingh, Der Leistungsbedarf des idealen Hubschraubers, Techn. Berichte Bd.11(1944) Heft 3
- [15] Hohenemser, Neue Erkenntnisse zur Frage der Schwebeflugstabilität eines Hubschraubers mit zentraler Schraubenanordnung, FB 1989/1
- [16] Hohenemser, Die Längsstabilität des Hubschraubers im Vorwärtsflug, FB 1989/2.

$$c_{25} - c_{42} + \lambda(c_{26} - c_{41})$$

$$c_{27} + \lambda c_{28}$$

$$-c_{40} + \lambda(c_{29} - c_{49} - hrc_{25}) + \lambda^2(c_{30} - hrc_{26})$$

$$c_{31}$$

$$c_{32} + \lambda c_{41}$$

$$c_{39} - \lambda(hrc_{31} + c_{50})$$

$$hc_{25} + pc_{31} + \gamma_2 ec_{33} + qc_{46} + \lambda(hc_{26} + \gamma_2 ec_{34})$$

$$hc_{27} + pc_{32} + \gamma_2 ec_{35} + qc_{47} + \lambda(hc_{28} + \gamma_2 ec_{36})$$

$$\lambda \left\{ hc_{29} + \gamma_2 ec_{37} + qc_{48} - hrc_{25} + pc_{31} + \gamma_2 ec_{33} \right\} + \lambda^2 \left\{ c_{43} + hc_{30} + \gamma_2 ec_{38} - hrc_{26} + \gamma_2 ec_{34} \right\}$$

..... (291)

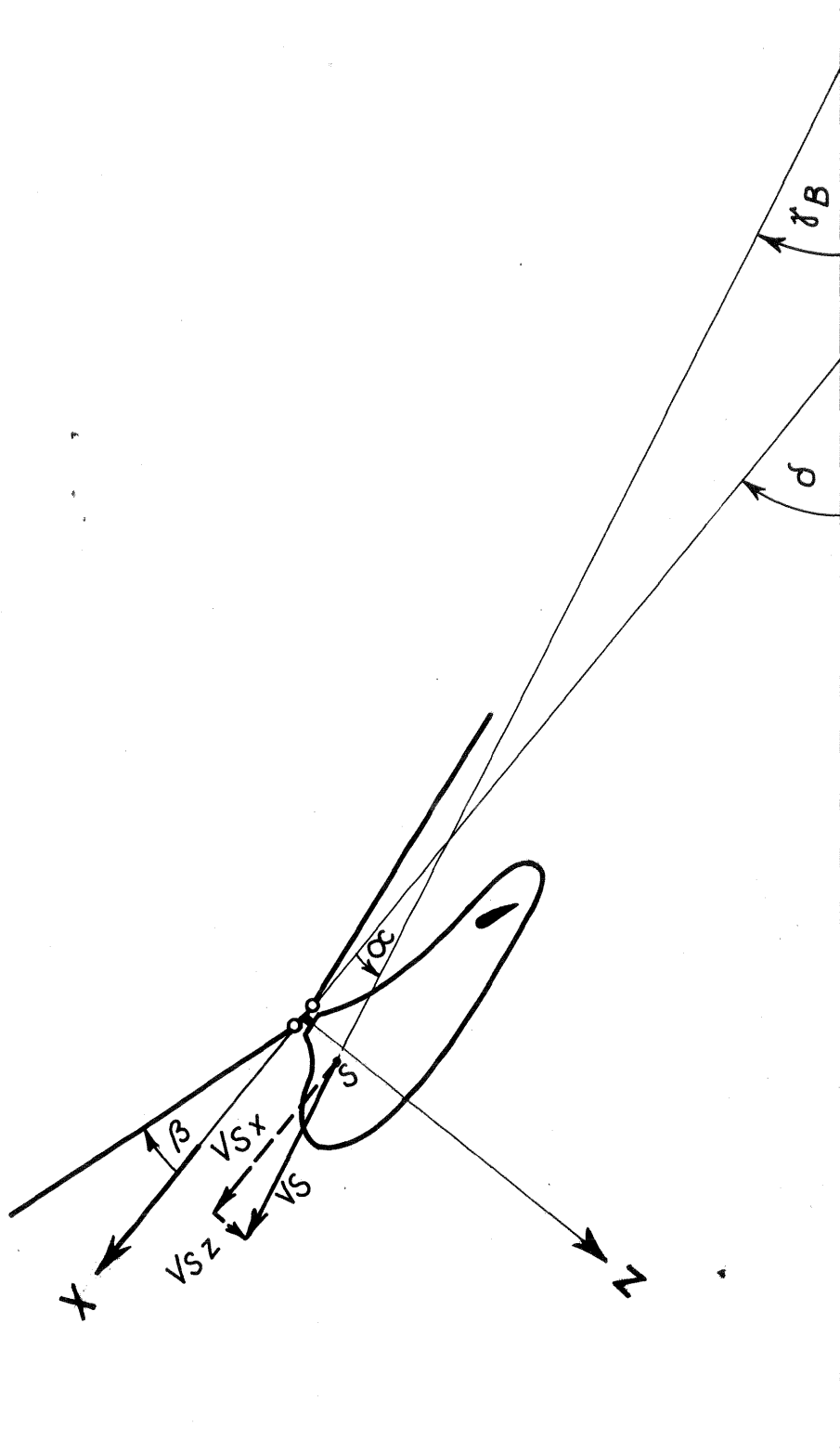


Bild 32

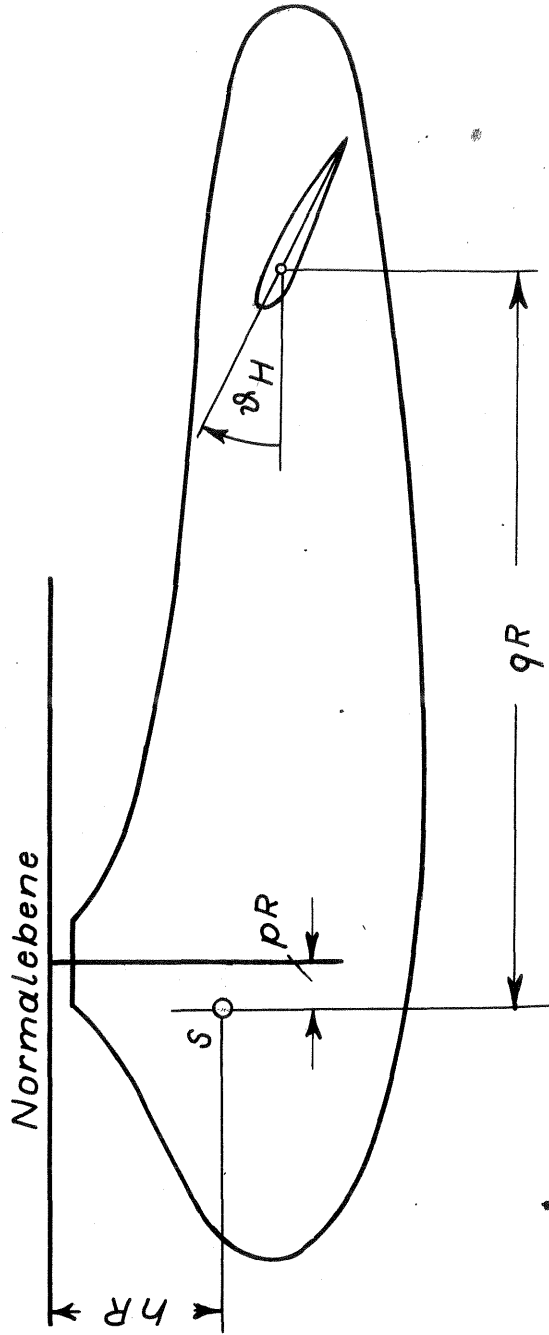


Bild 33

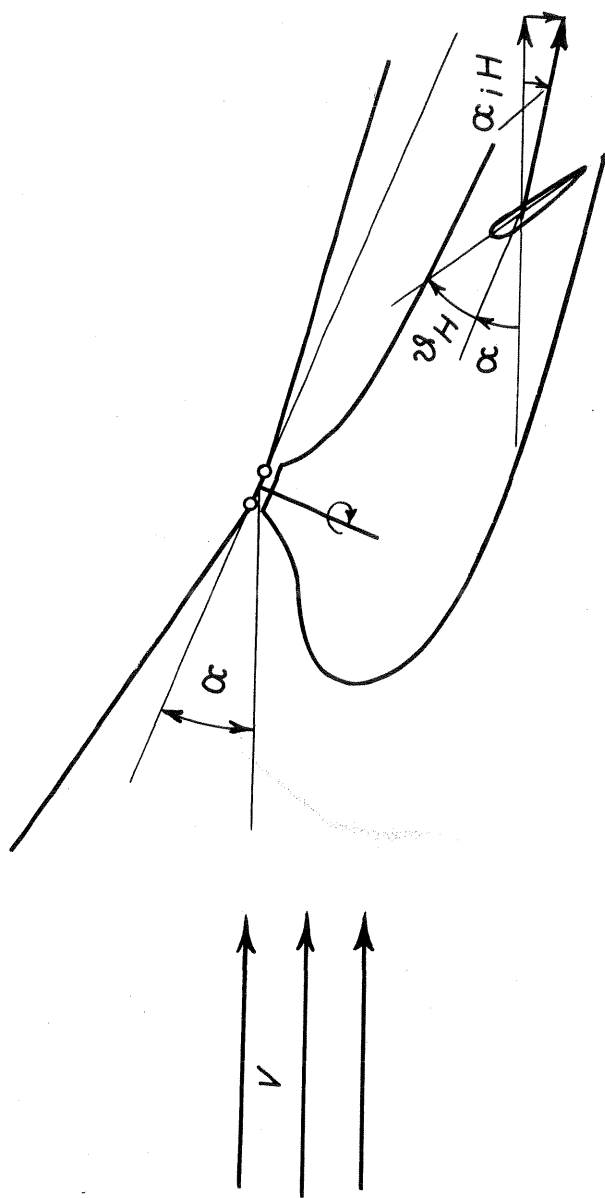
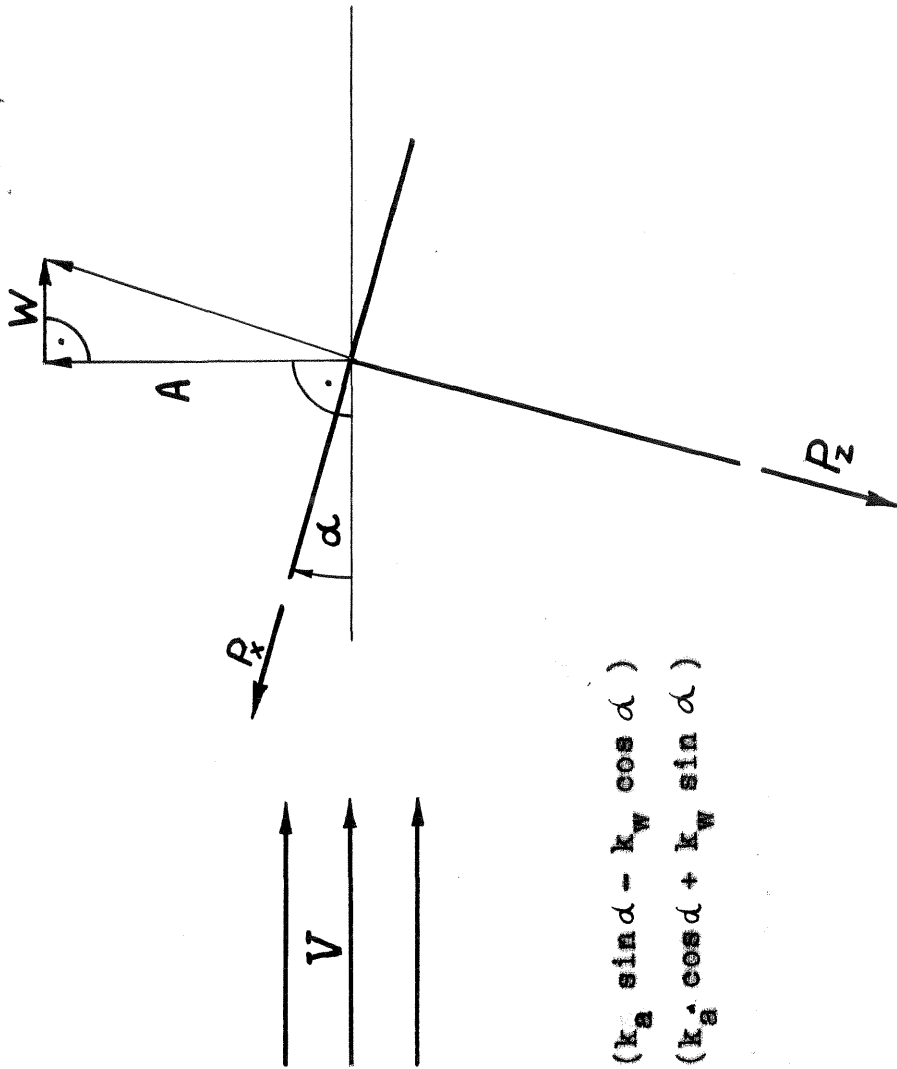


Bild 34



$$P_x = + PU^2 \zeta / 2 (k_a \sin \alpha - k_w \cos \alpha)$$
$$P_z = - PU^2 \zeta / 2 (k_a \cos \alpha + k_w \sin \alpha)$$

Bild 35