

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Antriebstechnik

IB 225 - 2014 A 01

F. Kost

**Ein Verfahren zur Berechnung der
Meridionalströmung von Axialturbinen**

Datum: Juni 2014

Institutsleiter:
Prof. Dr.-Ing. R. Mönig

Vervielfältigung und Weitergabe dieser Unterlagen sowie Mitteilung ihres Inhalts an Dritte, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DLR



Ein Verfahren zur Berechnung der Meridionalströmung von Axialturbinen

Übersicht

Ein Verfahren zur Berechnung der Meridionalströmung von gekühlten Axialturbinen wurde programmiert. Die Strömung wird als axialsymmetrisch betrachtet, d.h. alle Strömungsgrößen sind durch ihren umfangsgemittelten Wert ersetzt. Damit bleiben nur noch Ungleichförmigkeiten der Strömung in axialer und radialer Richtung übrig. Das hier vorgestellte Verfahren beschränkt sich auf Axialturbinen und berechnet Stromlinien mit einem sogenannten Stromlinienkrümmungsverfahren (im Unterschied zu den Finite-Elemente-Verfahren). Das Verfahren wird im folgenden auch mit SLC4T abgekürzt.

Das Gas wird als ideal betrachtet. Einerseits kann man sehr schnell Ergebnisse unter Voraussetzung konstanter Wärmekapazität gewinnen, das 2D-Strömungsfeld kann aber auch mit variabler Wärmekapazität (c_p ist eine Funktion von Temperatur und Gaszusammensetzung) berechnet werden.

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Antriebstechnik
Turbinenabteilung, Göttingen

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	v
1. Einleitung	1
2. Eingabegrößen	1
3. Die eindimensionale Berechnung der Turbinenströmung	7
3.1 Umrechnung von Strömungsgrößen im unbeschaukelten Ringraum	8
3.2 Umrechnung zwischen Absolut- und Relativsystem	9
3.3 Die Berechnung der Strömungsgrößen innerhalb der Schaufelreihe	9
3.4 Station 1	11
3.5 Iteration	11
4. Die zweidimensionale Berechnung der Meridionalströmung in einer Turbine	13
4.1 Die radiale Verteilung der Schaufelverluste	15
4.2 Radiales Gleichgewicht	17
4.3 Radiale Mischung von Totaldruck, Totalenthalpie, Drehimpuls und Gaszusammensetzung	18
4.4 Neuberechnung der Lage der Stromlinien	19
4.5 Ausgabe	19
5. Beispielrechnungen	21
5.1 Die „Hannover-Turbine“	21
5.2 Die „FOX-Turbine“	26
6. Anhang A: Gasdynamik bei variablen Stoffwerten	31
6.1 Basisgleichungen	31
6.2 Gasdynamikgleichungen	33
6.2.1 Isentropiebeziehung	33
6.2.2 Temperaturverhältnis als Funktion der Machzahl	33
6.2.3 Druckverhältnis als Funktion der Machzahl	34
6.2.4 Massenstromdichte als Funktion der Machzahl	36
7. Anhang B: Wirkungsgrad	38
7.1 Grundgleichungen	38
7.2 Ungekühlte Turbine	39
7.3 Turbine mit Kühlluftausblasung	40

7.3.1	Basis	40
7.3.2	Isobare Mischung vor der Expansion auf den Abströmdruck	41
7.3.3	Getrennte Expansion aller Teilströme	43
7.3.4	Gemeinsame Expansion von Hauptströmung und Kühlluft	44
7.4	Beispielrechnung und Diskussion	46
7.5	Gasturbinenprozess	48
7.5.1	Wirkungsgrad des idealen Gasturbinenprozesses	48
7.5.2	Wirkungsgrad des realen gekühlten Gasturbinenprozesses	49
7.5.3	Wirkungsgrad einer Turbine, berechnet aus den Teil-Wirkungsgraden von Hochdruck- und Niederdruckturbine	51
 Literatur		 53

Bezeichnungen

Geometrische Größen

A	Fläche
c	Sehnenlänge
d	Durchmesser
h	Höhe des Strömungskanals
h'	Koordinate in Richtung der Höhe
k	Krümmung der Stromlinie in der x,r-Ebene
m	Meridionalcoordinate
o	engster Schaufelabstand
q	Quasi-orthogonale Koordinate (Quasinormale)
r	Radius
t	Schaufelteilung
x	Koordinate in axialer Richtung
α	Winkel in Umfangsrichtung, $\alpha=0$ in axialer Richtung
γ	Winkel in radialer Richtung, $\gamma=0$ in axialer Richtung
δ	Winkel zwischen Quasinormale und Radius, $\delta=0$ in radialer Richtung
φ	Koordinate in Umfangsrichtung
N	Zahl der Stationen bzw. Quasinormalen
ir	Zahl der radialen Positionen bei der Spezifikation einer Station in der Eingabedatei
$tipcl$	Spalt zwischen Schaufelspitze und Endwand (tip clearance)

Strömungsgrößen

a	Schallgeschwindigkeit
F	Kraft
c_p	Spezifische Wärme bei konstantem Druck
\dot{m}	Massenfluss
H, h_t	Enthalpie aus Totalgrößen
h	Enthalpie (insbesondere statische Enthalpie), s. Gleichung (37)
I	Rothalpie
Ma	Machzahl
mix	Parameter der radialen Mischung
N	Drehzahl [rpm]
p, p_t	statischer Druck, Gesamtdruck der Strömung

P	Leistung
R	spezifische Gaskonstante
R_u	Molare (universelle) Gaskonstante, $R_u = 8.314472 \text{ J}/(\text{mol K})$
$Re = \frac{w \cdot c}{\nu}$	Reynoldszahl
S	Entropie,
s	spezifische Entropie, s. Gleichung (38)
T, T_t	statische Temperatur, Gesamttemperatur
Tq	Drehmoment
v	Geschwindigkeit im Absolutsystem
w	Geschwindigkeit im Relativsystem
X	Zusammensetzung des Gases: Vektor $X = \{x_1, \dots, x_K\}$
x_k	Molenbruch, molarer Anteil der k-ten Komponente des Gases
κ	Isentropenexponent, Verhältnis der spezifischen Wärmen
ω	Drehgeschwindigkeit $\omega = 2\pi N/60$
η	Isentroper Wirkungsgrad berechnet aus Totalgrößen
ρ	Dichte

Indizes

4, 40	Station 4 bzw. 40: Turbineneintritt
41	Station 41: Eintritt des HD-Rotors
45	Station 45: Austritt der Hochdruckturbinen
5	Station 5: Turbinenaustritt
c	Kühlluft
c, j	Kühlluftzuführung j
i	Station i (Stationen sind in axialer Richtung angeordnet)
j	Stromlinie, Stromröhre j (j ist in radialer Richtung aufsteigend nummeriert)
is	isentrop
in	Turbineneintritt (Station 1)
$out, exit$	Turbinenaustritt (letzte Station)
k	Schaufelreihe k
o	Station im engsten Querschnitt
r	radial, Rotor
ref	Referenzzustand
rel	Relativsystem

<i>s</i>	statische Größe
<i>t</i>	Totalgröße
<i>m</i>	meridional, in Meridionalrichtung
<i>u</i>	in Umfangsrichtung
<i>x</i>	axial, in Achsenrichtung
<i>S</i>	Sekundärverluste
<i>Z</i>	Ziel

Hochgestellte Indizes

*	Kritische Strömungsgröße (bei $Ma = 1$)
---	--

1. Einleitung

Ein Verfahren zur Berechnung der Meridionalströmung von gekühlten Axialturbinen wurde programmiert. Die Strömung wird als axialsymmetrisch betrachtet, d.h. alle Strömungsgrößen sind durch ihren umfangsgemittelten Wert ersetzt. Damit bleiben nur noch Ungleichförmigkeiten der Strömung in axialer und radialer Richtung übrig. Das hier vorgestellte Verfahren beschränkt sich auf Axialturbinen und berechnet Stromlinien mit einem sogenannten Stromlinienkrümmungsverfahren (im Unterschied zu den Finite-Elemente-Stromfunktionsverfahren). Die Vorgehensweise folgt Denton [1] und Came [2]. Als Programmiersprache wurde *Fortran 95* verwendet.

Der hier vorliegende Bericht soll eine generelle Verfahrensbeschreibung darstellen, keine Bedienungsanleitung!

2. Eingabegrößen

Im Programmordner selbst befindet sich neben den Fortran-Source-Dateien, die Infodatei `stromlinien_info.txt`, welche insbesondere die Eingabe detailliert beschreibt. Im folgenden soll die Eingabe eher generell beschrieben werden. Alle Eingabegrößen zur Programmsteuerung, zur Geometrie, zu den Turbinenparametern werden in eine Textdatei namens `strom_eingabe.dat` eingegeben. In dieser Datei wird nach globalen Größen und Größen zur Programmsteuerung, die Geometrie des Strömungskanals (Meridionalkanal) und der Schaufelreihen der Turbine vorgegeben. Ein Beispiel eines Meridionalkanals mit vier Schaufelreihen, bestehend aus einer einstufigen Hochdruckturbinenstufe und der ersten Stufe einer Niederdruckturbinenstufe ist in Bild 1 dargestellt.

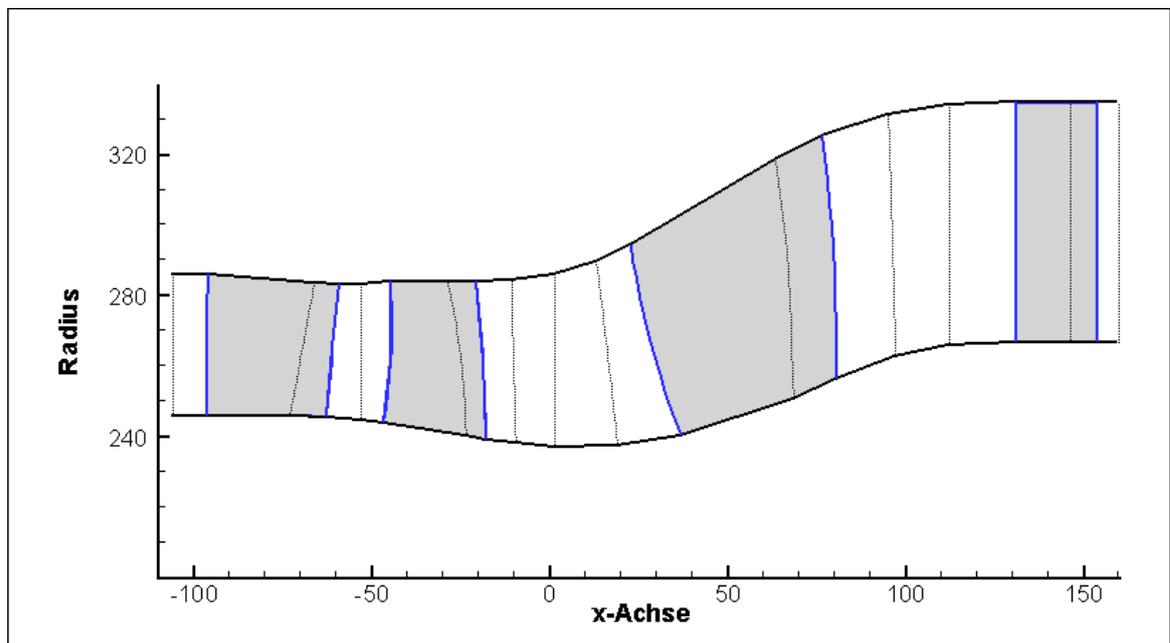


Bild 1: Meridionalkanal, Schaufelreihen und Quasinormale (Stationen)

In axialer Richtung wird der Strömungskanal in einzelne Stationen aufgeteilt. Zunächst sind jeder Schaufeleintritt, jeder Schaufelaustritt und der engste Querschnitt jeder Schaufelreihe jeweils eine Station. Dazu werden nach Belieben weitere Stationen im unbeschaufelten Ringraum angeordnet. Durch jede Station geht eine Quasinormale, so genannt, weil die Quasinormale in

etwa senkrecht zu einer Stromlinie angeordnet ist. Da Schaufelvorder-, -hinterkanten und engste Querschnitte nicht notwendigerweise als Geraden oder gar radial verlaufen, sind auch die entsprechenden Quasinormalen nicht notwendigerweise Geraden. Der Meridionalkanal, d.h. die Naben- und Gehäusekontur ist jeweils nur an den Stationen gegeben, dazwischen wird die Kanalwand durch eine Gerade approximiert. Auch Kühlluft kann nur an Stationen zugegeben werden.

Die Eingabegrößen werden im folgenden einzeln aufgeführt; detaillierte Erklärung siehe `stromlinien_info.txt` :

Globale Größen:

- Zahl der Stromlinien: diese Zahl `M_LINES` wird im Programmkopf selbst und nicht in der Eingabedatei festgelegt und muss eine ungerade Zahl sein! Die Zahl der Stromröhren ist dann gleich `M_LINES-1`.
- Gaszusammensetzung (entweder R, c_p oder molare Anteile der einzelnen Gaskomponenten)
- Eintritts-Totaltemperatur in Kelvin
- Eintritts-Totaldruck in Pa
- Zuströmwinkel in Grad
- Druckverhältnis: Turbineneintritt zu -austritt (total zu statisch, siehe *Turbinenparameter*)

Die Angabe der Gaszusammensetzung als molare Zusammensetzung ist notwendig, wenn optional die spezifische Gaskonstante und die Wärmekapazität als Funktion der lokalen Temperatur und der Gaszusammensetzung berechnet werden.

Drei der globalen Größen befinden sich im Kopf der Eingabedatei `strom_eingabe.dat`, ein Beispiel wird im folgenden gezeigt:

```
# Eingabedatei für das Programm 'stromlinien.f95'
# FOX-Turbine: Verbrennungsgas bei 1736 K und Kuehlluft bei 830 K
#123456789 Bezeichnung  Kommentar
1          jsdim_      0= Mittelschnittrechnung, -1= 1D-Rechnung, >0= 2D-Rechnung
3216000.  pt_in       Mittelwert des Totaldrucks [Pa] im Eintritt der Turbine
1736.    tt_in       Mittelwert der Totaltemperatur [K] im Eintritt
0.00     alfa_in     Mittelwert des Zuströmwinkels [Grad]
# -----
# Steuerung des Rechenablaufs:
#  init_ glaett_ epsm_  relax_r_ relax_p_ mixfactor lossfactors lossroute refstation
r  0      0      1.e-4  0.3      0.3      0.5      1.0  1.0      1      1
# -----
# Gaszusammensetzung (maximal 2 Zeilen mit kenn_ = g):
# (gaszustand_ = 1 -> ideales Gas, cp=const; = 2 -> cp ist Funktion von T)
#  gaszustand_  cp_      rgas_      cp_coolant_  r_coolant_
g      2          1340.   287.36     1105.0      287.1
# Gaszusammensetzung als Stoffmengenanteil (Anteil Mole, Summe muss 1.0 ergeben):
#  x_N2      x_O2      x_Ar      x_CO2      x_CO      x_SO2      x_H2O
g  0.7588    0.1180    0.0090    0.0571     0.0000    0.0000    0.0571
# Kerosinverbrennungsprodukt p=30 bar, T04 = 1750 K; Luftüberschusszahl lambda = 2.3
```

Bis auf die Eingabewerte in den Zeilen 4-7 beginnt jede Zeile im Kopf der Eingabedatei mit einem Kennbuchstaben, wobei Zeilen, die mit dem Zeichen # beginnen eine Kommentarzeile darstellen, von denen beliebig viele in die Eingabedatei eingefügt werden können. Die Zeile beginnend mit dem Buchstaben **r** dient zur Programmsteuerung. Die Zeile beginnend mit dem Buchstaben **g** definiert die Gaszusammensetzung, wobei bei `gaszustand = 1` die Rechnung bei $c_p = const$ durchgeführt wird, unter Benutzung der angegebenen c_p -Werte und der spezifischen Gaskonstanten R . Bei `gaszustand = 2` wird die Rechnung mit variablem c_p durchgeführt, unter Benutzung der Gaszusammensetzung in Form von Stoffmengenanteilen (zweite Zeile mit **g** beginnend).

Anschließend an die globalen Größen werden die geometrischen und sonstigen Größen der Stationen sequentiell aufgeführt, beginnend mit dem Turbineneintritt.

Station im unbeschaufelten Ringraum:

Im Turbineneintritt, d.h. in Station 1, welche immer auch eine unbeschaufelte Station sein sollte, kann eine radiale Zuströmverteilung für den Zuström-Umfangswinkel, Temperatur und Totaldruck vorgegeben werden ($ir \neq 0$). Dabei wird die Temperaturverteilung als Temperaturverhältnis bezogen auf den Mittelwert, der Totaldruck als Staudruck bezogen auf den Wert im Mittelschnitt eingegeben. Die Zuströmwerte werden im Programm so normiert, dass die im Kopf der Eingabedatei angegebenen Mittelwerte (Eintritts-Totaldruck, Eintritts-Temperatur, mittlerer Zuströmwinkel) wieder herauskommen.

Aus Kompatibilitätsgründen ist die Struktur der Eingabezeile für eine Station im unbeschaufelten Ringraum gleich der einer Schaufelreihenstation (siehe unten), allerdings sind Angaben für Schaufelanzahl, Drehzahl, usw. ohne Bedeutung. Normalerweise verläuft eine Quasinormale im unbeschaufelten Ringraum gerade von Nabe zu Gehäuse, d.h. es sind keine weiteren Angaben über den Verlauf der Quasinormale als Funktion des Radius erforderlich ($ir = 0$).

Station außerhalb der Schaufel: Kennbuchstabe am Zeilenanfang = **u**

```
#Beispiel: Station 7 vor dem Rotor 1 mit Ausblasen von Leckageluft an der Nabe
#Station W ir S-anz Drehz. x_nab r_nab x_geh r_geh dhk Kühl. -t. -p Kühl. -t -p
#
#           [rpm]  [mm]   [mm]  [mm]  [mm] [mm] [%] [K] [Pa] [%] [K] [Pa]
u 7      0  0    0    0    45.99 215.55 46.5 259.8 0.0 1.19 830. 0.0 0.0 0.0 0.0
```

Die Kühlluftmenge ist als prozentualer Wert auf den Massenfluss in `refstation` bezogen (siehe Zeile beginnend mit **r**; entweder auf den Turbineneintritt oder auf den Turbinenausritt). Ist als Kühlluftmenge Null angegeben, dann sind die folgenden Temperatur- und Druckwerte irrelevant. An der ersten Station darf keine Kühlluft zugeführt werden, ansonsten können zwei Kühlluftmengen pro Station angegeben werden. Im unbeschaufelten Ringraum kann Kühlluft nur an Nabe und/oder Gehäuse zugeführt werden; da die Spezifikation von zwei Kühlluftströmen möglich ist, wird die erste angegebene Kühlmenge als Leckageluft an der Nabe zugegeben, die zweite angegebene Kühlmenge als Leckageluft am Gehäuse. Zusätzlich sind noch Kühlluft-Temperatur [K] und -Totaldruck [Pa] gegeben. Da der Kühlluft-Totaldruck im Fall einer Turbinen-Auslegung möglicherweise nicht oder nur ungenau bekannt ist, kann man statt den Druck in Pascal auch nur den Kühlluftparameter 0.0 oder 1.0 angeben. Dabei gilt:

- Bei Kühlluft-Totaldruck-Parameter = 0.0 oder < 0 : Zumischung von Kühlluft mit kinetischer Energie Null, d.h. p_t -Kühlluft = p_s -Hauptströmung
- Bei Kühlluft-Totaldruck-Parameter = 1.0: Isobare Zumischung von Kühlluft, d.h. p_t -Kühlluft = p_t -Hauptströmung

Angaben zu den Schaufelreihen:

- Welle (z.B. 1 = Hochdruckturbinenwelle, 2 = Niederdruckturbinenwelle)
- Anzahl der Schaufelblätter
- Drehzahl
- Axiale Schaufeleintrittsposition als Funktion des Radius
- engster Querschnitt als Funktion des Radius
- Strömungswinkel im engsten Querschnitt (optional)
- Axiale Schaufelaustrittsposition als Funktion des Radius
- Zwei Kühlluftströme (Massenstromverhältnis bezogen auf die zu- oder abströmende Masse, Druck, Temperatur)

Drehzahlen sind positiv, wenn das Rad gegen den Uhrzeigersinn rotiert (nach links), in axiale Richtung (Hauptströmungsrichtung) gesehen. Winkel gegen den Uhrzeigersinn sind positiv; Winkel = 0 in axialer Richtung. Der Strömungswinkel im engsten Querschnitt ist für das Verfahren nicht unbedingt nötig, allerdings werden ohne seine Angabe die Strömungsgrößen im engsten Querschnitt selbst nur sehr grob bestimmt.

Die Kühlluft wird an Schaufelvorder- oder -hinterkante gleichverteilt über der Schaufelhöhe zugegeben. Will man Leckageluft z.B. nur an der Nabe am Eintritt oder Austritt einer Schaufelreihe zugeben, so muss man eine „unbeschaufelte“ Station einfügen (siehe oben).

Schafeleintritt: Kennbuchstabe am Zeilenanfang in der Eingabedatei = **i**

```
#Beispiel Rotor-1-Vorderkante: Kühlluftzugabe (zweifach), an Druck- und Saugseite
#Station W ir S-anz Drehz. x_nab r_nab x_geh r_geh dvk Kühl. -t. -p Kühl. -t. -p
#          [rpm] [mm] [mm] [mm] [mm] [mm] [%] [K] [Pa] [%] [K] [Pa]
i  8    1  3  60  14500 49.63 214.7 50.92 259.8 2.49 3.05 830. 0.0 2.5 830. 0.0
#  x[mm]  r[mm]  alfa_des  Sehnenlänge
    49.63   216.21  53.57     34.23
    50.12   237.93  43.81     34.23
    50.92   259.78  31.19     34.23
```

(W = Welle, S-anz = Schaufelanzahl, Drehz. = Drehzahl, nab = Nabe, geh = Gehäuse, dvk = Vorderkantendicke, Kühl = Kühlluftmenge in %, -p = Kühlluftdruckparameter, alfa_des = geometrischer Schaufelwinkel = 'inlet metal angle' gemäß Bild 2)

Die Größe `ir` gibt die Zahl der Radien an, an welchen diese Station definiert ist, im vorliegenden Fall `ir = 3`, d.h. es folgen 3 Zeilen mit x-, r- und alfa-Werten, welche die Station auch radial spezifizieren. Es können maximal sovieler radiale Positionen wie Stromröhren angegeben werden, wobei die Radien beliebig zwischen Nabe und Gehäuse verteilt werden können. Auch die (wahre) Sehnenlänge der Schaufel als Funktion des Radius muss angegeben werden, weil sie für das Schaufelverlustmodell benötigt wird, d.h. `ir` muss > 0 sein.

Engster Querschnitt der Schaufel: Kennbuchstabe am Zeilenanfang = o

```
#Beispiel Rotor 1
#Station W ir S-anz Drehz. x_nab r_nab x_geh r_geh tipcl Kühl. -t. -p Kühl. -t -p
#           [rpm]   [mm]   [mm]   [mm]   [mm] [mm] [%] [K] [Pa] [%] [K] [Pa]
o 9      1  3  60 14500  77.83 211.11 74.72 259.8 0.5  0.0 0.0 0.0 0.0  0.0 0.0
#   x[mm]   r[mm]   alfa_o[°]   o/t
      77.83   211.11  -57.30    0.5201
      76.56   235.50  -59.12    0.4908
      74.72   259.78  -60.85    0.4633
```

(tipcl = Spalt zwischen Rotorspitze und Gehäuse in mm, alfa o = Winkel senkrecht auf engstem Querschnitt (optional), o/t = engster Schaufelabstand in Station o am Radius r, geteilt durch die Schaufelteilung ebenfalls am Radius r)

Schaufelhinterkante: Kennbuchstabe am Zeilenanfang in der Eingabedatei = e

```
#Beispiel Rotorhinterkante mit Kühlluftzugabe
#Station W ir S-anz Drehz. x_nab r_nab x_geh r_geh dhk Kühl. -t. -p Kühl. -t -p
#           [rpm]   [mm]   [mm]   [mm]   [mm] [mm] [%] [K] [Pa] [%] [K] [Pa]
e 10     1  3  60 14500  82.80 210.15 80.23 259.8 1.03 2.4 830. 1.0 0.0  0.0 0.0
#   x[mm]   r[mm]   alfa2_des   t_max/c
      82.80   210.15  -57.30    0.2574
      81.81   234.99  -59.12    0.2442
      80.23   259.78  -60.85    0.2260
```

(dhk = Hinterkantendicke, alfa2_des = geometrischer Schaufelwinkel (Metallwinkel gemäß Bild 2, optional), t_max/c = maximale Schaufeldicke, geteilt durch Sehnenlänge, Definition siehe Bild 2)

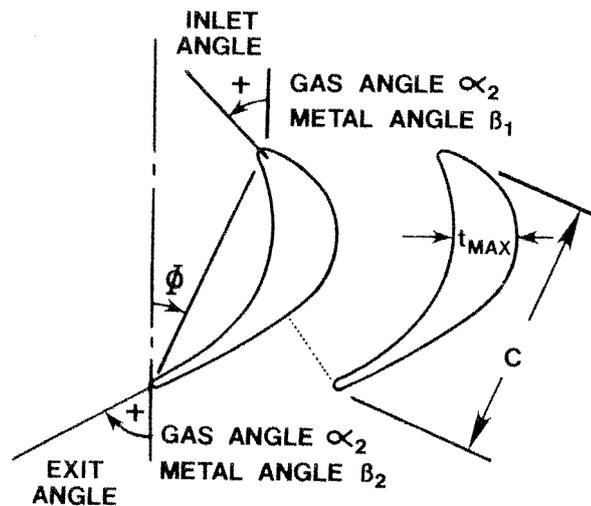


Bild 2: Definition der vom Verlustmodel benötigten Größen, gemäß [6]

Vom Verlustmodell benötigte Angaben:

In die Angaben für die Schaufelreihen integriert sind u.a auch die vom Verlustmodell [4], [5], [6] benötigten Angaben; die Definition der Größen siehe Abbildung 2.

- Metallwinkel von Schaufeleintritt und -austritt
- Vorder-, Hinterkantendicke
- maximale Dicke der Schaufel
- Spalt zwischen Schaufel und Endwand
- Sehnenlänge

Der Metallwinkel am Schaufelaustritt wird im vorliegenden Programm eigentlich nicht benötigt, aber das Vorzeichen muss stimmen, weil die Winkelkorrelation nur den Betrag des Abströmwinkels liefert.

Turbinenparameter: Kennbuchstabe am Zeilenanfang der Eingabedatei = **x**

```
# Zusätzliche Parameter für die Through-Flow-Rechnungen
# (Druckverhältnis ist Eingangs-Totaldruck zu Ausgangs-statischem-Druck):
# Druckverhältnis %-Drehzahl_1 %-Drehzahl_2 %-Drehzahl_3 (Drehz. Wellen 1-3)
x 7.0 100. 100. 100.
x 7.0 80. 100. 100.
```

Die Eingabe geometrischer Größen ist beendet, wenn eine Zeile mit Kennbuchstabe **x** am Zeilenanfang auftritt. Kennbuchstabe **x** bedeutet: Zeile mit Parametern für die Rechnung (Druckverhältnis, relative Drehzahlen für bis zu drei Wellen); es werden so viele Rechnungen durchgeführt, wie Zeilen mit **x** vorhanden sind. Das vorzugebende Druckverhältnis ist das Verhältnis von Totaldruck im Turbineneintritt zu statischem Druck in der Abströmung, $p_{t,in}/p_{out}$. Dieser Parameter wurde auch schon unter 'Globale Größen' aufgeführt.

3. Die eindimensionale Berechnung der Turbinenströmung

Das Rechenverfahren geht nicht von einer Vorgabe des Massenflusses aus, sondern die Drücke an den Schaufelhinterkanten werden vorgegeben [1]. Nach Durchrechnung des Schaufelkanals von Station 1 bis N werden die Drücke an den Schaufelhinterkanten iterativ variiert, wobei der statische Druck am Turbinenausritt, p_{out} , als Randbedingung konstant gehalten wird, bis eine Angleichung der Massenflüsse an den Schaufelhinterkanten erreicht ist. Die Angleichung der Massenflüsse an den übrigen Stationen ergibt sich damit ebenfalls.

Um längs des Strömungskanals voran zu schreiten, sind zwei Basisschritte zu bewältigen, einmal der Schritt von einer Station zur nächsten im unbeschauften Ringraum und zweitens die Berechnung der Strömung durch eine Schaufelreihe. Die betrachtete Kontrollfläche für die Basisschritte ist in Bild 3 skizziert.

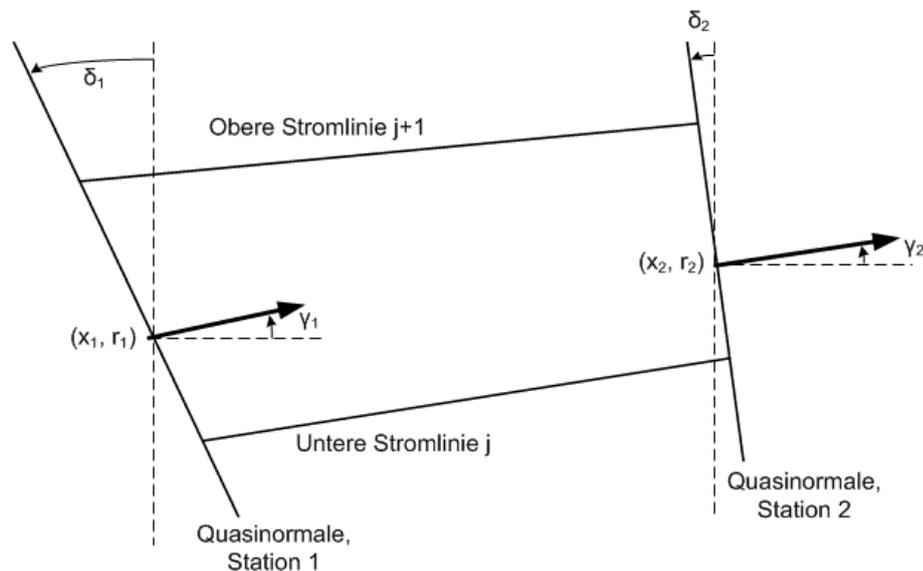


Bild 3: Kontrollfläche

Die untere Stromlinie, j , geht von Punkt $(x_{1,j}, r_{1,j})$ nach Punkt $(x_{2,j}, r_{2,j})$;
 die obere Stromlinie, $j+1$, geht von Punkt $(x_{1,j+1}, r_{1,j+1})$ nach Punkt $(x_{2,j+1}, r_{2,j+1})$.
 Die Quasinormale in Station 1 schließt den Winkel δ_1 mit der radialen Richtung ein.
 Die Quasinormale in Station 2 schließt den Winkel δ_2 mit der radialen Richtung ein.
 Der Eulerradius halbiert eine Ringfläche in zwei gleichgroße Ringflächen. Für Station 1 ist er folgendermaßen definiert: $r_1 = \sqrt{(r_{1,j}^2 + r_{1,j+1}^2)}/2$, dazu gehört die x -Koordinate x_1 ; analog der Punkt (x_2, r_2) .

Als Fläche am Eintritt oder Austritt des Kontrollvolumens wird im Rechenverfahren die axiale Ringfläche (senkrecht zur x -Achse) gebraucht, deshalb $A_1 = \pi (r_{1,j+1}^2 - r_{1,j}^2)$, analog A_2 .

Die Stromröhre hat im Punkt 1 (Station 1) die x -Koordinate x_1 , den mittleren Radius r_1 , den Steigungswinkel γ_1 , die Fläche A_1 , die Meridionalgeschwindigkeit v_{m1} , usw. und analog $x_2, r_2, \gamma_2, A_2, v_{m2}$ im Punkt 2 (Station 2).

3.1 Umrechnung von Strömungsgrößen im unbeschaufelten Ringraum

Auch bei Berücksichtigung variabler Wärmekapazität (c_p als Funktion von T) kann man bei einem Einzelschritt im Ringraum mit konstanten Größen κ, c_p rechnen, weil sich bei einem Schritt die statische Temperatur kaum ändert.

Index 1 bezeichne eine beliebige Station; Index 2 eine Station im unbeschaufelten Ringraum oder vice versa; weiterhin gilt: $v_x = v_m \cdot \cos(\gamma)$

Es gelten folgende Erhaltungsgleichungen:

I) MASSENERHALTUNG

$$\dot{m} = \rho_2 v_{x2} A_2 = \rho_1 v_{x1} A_1 \quad (1)$$

II) IMPULSERHALTUNG IN AXIALER RICHTUNG

$$\dot{m} v_{x2} + A_2 * p_2 = \dot{m} v_{x1} + A_1 * p_1 + F_w \quad (2)$$

wobei F_w die axiale Druckkräftebilanz von oberer und unterer Stromlinie darstellt. Falls eine der Stromlinien eine Wand (Nabe, Gehäuse) darstellt, wird im vorliegenden Verfahren die Wandreibung vernachlässigt. Eine eventuelle Berücksichtigung der Wandreibung müsste in diese Impulsgleichung eingebaut werden.

III) DREHIMPULSERHALTUNG

$$r_2 v_{u2} = r_1 v_{u1} \quad (3)$$

IV) ENERGIEERHALTUNG

$$h_{t2} = h_{t1} \quad (4)$$

und wegen $c_p \approx const$ gilt auch

$$T_{t2} = T_{t1} \quad (5)$$

V) ISENTROPIE

Statt Impulserhaltung (Gleichung (2)) kann auch die Isentropiebeziehung benutzt werden.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \text{ wegen } T_{t2} = T_{t1} \text{ gilt auch } p_{t2} = p_{t1} \quad (6)$$

Benutzt man die Erhaltungsgleichungen I bis IV, so führt dies auf eine quadratische Gleichung. Das bedeutet, dass man zwei Lösungen erhält. Im Fall von Unterschall-Meridionalgeschwindigkeit im Punkt 1, v_{m1} , erhält man erstens auch im Punkt 2 eine Lösung mit Unterschall-Meridionalgeschwindigkeit, v_{m2} , und zweitens eine ungültige Lösung, d.h. eine Lösung welche die Entropie verringert. Ebenfalls erhält man zwei Lösungen, wenn man die Erhaltungsgleichungen I, III bis V benutzt. Die beiden Unterschalllösungen stimmen überein, d.h. auch im ersten Fall (Erhaltungsgleichungen I bis IV) erhält man im Unterschall eine Lösung, welche die Isentropiebeziehung erfüllt; natürlich nur deshalb, weil man in Gleichung II keine Reibung eingebaut hat. Bei expliziter Benutzung der Isentropie erhält man als zweite Lösung eine isentrope Lösung mit unrealistisch hoher Überschallmachzahl. Der Fall einer Überschall-Meridionalgeschwindigkeit im Punkt 2 interessiert im vorliegenden Fall nicht. Wegen des unkomplizierten Lösungsweges bei Benutzung der Erhaltungsgleichungen I, III bis V (explizite Isentropie), wurde im vorliegenden Rechenprogramm die Erhaltungsgleichung II für den axialen Impuls nicht benutzt.

Zusatzbemerkung: Falls tatsächlich einmal der Fall einer Überschall-Meridionalgeschwindigkeit im Punkt 2 von Interesse wäre, müsste man die Erhaltungsgleichungen I bis IV benutzen. Im Fall zweier gültiger Lösungen erhält man dann außer der meist unrealistischen isentropen Überschalllösung auch noch die Lösung stromab eines Verdichtungsstoßes.

3.2 Umrechnung zwischen Absolut- und Relativsystem

Während die Größen im unbeschleunigten Ringraum im Absolutsystem berechnet werden, ist es zweckmäßig innerhalb der Schaufelreihe im mitrotierenden Relativsystem zu rechnen. Sowohl alle statischen Größen, als auch die Meridionalgeschwindigkeit bleiben bei der Umrechnung erhalten, die Totalgrößen müssen umgerechnet werden.

$$\text{Geschwindigkeit im Relativsystem: } w = \sqrt{v_m^2 + w_u^2} ; \quad w_u = v_u - \omega r \quad (7)$$

$$\text{Enthalpie im Absolutsystem: } h_t = h + \frac{v^2}{2} = h + \frac{v_m^2}{2} + \frac{v_u^2}{2} \quad (8)$$

$$\text{Rothalpie, Größe im Relativsystem: } I = h + \frac{w^2}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} = h_{t,rel} - \frac{(\omega r)^2}{2} \quad (9)$$

$$\text{Strömungswinkel im Relativsystem: } \alpha_{rel} = \arctan\left(\frac{w_u}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{v_u - \omega r}{v_x}\right) \quad (10)$$

$$\text{Machzahl im Relativsystem: } Ma_{rel} = \frac{w}{\sqrt{\kappa RT}} \quad (11)$$

Im Fall konstanter Wärmekapazität c_p kann man den Totaldruck im Relativsystem folgendermaßen berechnen:

$$p_{t,rel} = p \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_{rel}^2\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (12)$$

Zur Berechnung mit variablem c_p siehe Abschnitt 6. (Anhang A).

3.3 Die Berechnung der Strömungsgrößen innerhalb der Schaufelreihe

In diesem Teilschritt werden die Größen im engsten Querschnitt und gleichzeitig am Austritt der Schaufelreihe aus dem vorgegebenen statischen Druck am Schaufelaustritt, einer Erhaltungsgleichung und zwei Korrelationen bestimmt. Die Massenerhaltung wird in diesem Schritt nur zwischen engstem Querschnitt und Abströmung benützt.

Bezeichne die Station am Schaufeleintritt mit dem Index 1, die Station am Schaufelaustritt mit dem Index 2 und die Station im engsten Querschnitt mit dem Index o. Die Fläche am Schaufelaustritt wird deshalb mit A_2 bezeichnet und folgendermaßen berechnet: $A_2 = \pi (r_{2,j+1}^2 - r_{2,j}^2)$, während die Fläche im engsten Querschnitt mit A_o bezeichnet und folgendermaßen berechnet wird:

$$A_o = \pi (r_{o,j+1}^2 - r_{o,j}^2) \cdot \frac{o}{t} \quad (13)$$

I) ERHALTUNG DER ROTHALPIE, d.h. Erhaltung der Energie im rotierenden System:

$$h_{t,rel,2} - \frac{1}{2}(\omega r_2)^2 = h_{t,rel,1} - \frac{1}{2}(\omega r_1)^2 \quad (14)$$

Bei Zufuhr von Kühlluft muss die Enthalpie der Kühlluft mit in die Bilanz aufgenommen werden.

II) KORRELATION FÜR DEN SCHAUFELVERLUST

Der Schaufelverlust wurde gemäß den Korrelationen von Ainley-Mathieson [4], Dunham-Came [5], revidiert von Kacker und Okapuu [6] berechnet. Im vorliegenden Programm wurden die Gleichungen aus der Master-Arbeit von Ivan Carlsson [3] übernommen. Die Erstreckung der Sekundärverluste von Schaufelreihen in spannwitiger Richtung wurde gemäß Benner et al. [7] festgesetzt. Diese klassische Verlustkorrelation für Turbinen wird mit `lossroute = 1` (siehe Abschnitt 2.) gewählt. Durch Setzen des Parameters `lossroute` auf 2 wird ein alternatives Verlustmodell gewählt, welches sich bisher gegenüber dem klassischen Verlustmodell nur in der Korrelation für den Sekundärströmungsverlust unterscheidet, nämlich den Sekundärströmungsverlust von Benner et al. [7] benutzt. Durch Setzen von `lossroute` können leicht weitere alternative Verlust-Unterprogramme eingebaut werden.

Ein weiterer Parameter aus dem Abschnitt 2. erlaubt eine mehr globale Modifikation des Schaufelverlustes, nämlich der Parameter `lossfactor`. Es gibt hier die Möglichkeit einen multiplikativen Verlustfaktor für den Gesamtverlust getrennt für Welle 1 und 2 zu setzen, um beispielsweise das Rechenergebnis einem experimentellen Ergebnis anzunähern. Standardmäßig sind diese Verlustfaktoren auf 1 gesetzt.

Die Verlustkorrelationen berechnen den Totaldruckverlust zwischen Schaufeleintritt und Schaufelaustritt. Als Ergebnis erhält man den Totaldruck im Relativsystem, $p_{t,rel,2}$, am Schaufelaustritt. Den zusätzlich benötigten Totaldruck im engsten Querschnitt des Schaufelkanals, $p_{t,rel,o}$, erhält man aus einer mehr oder weniger willkürlichen Aufteilung der Verluste zwischen Vorder- und Hinterkante der Schaufel; im vorliegenden Programm wurde angenommen, dass im engsten Querschnitt 10% des Schaufelverlustes angefallen sind, diese Abschätzung wird durch eigene Erfahrungen mit Gittermessungen gestützt.

III) KORRELATION FÜR DEN ABSTRÖMWINKEL IM RELATIVSYSTEM

Aus der vorhergehenden Erhaltungsgleichung und der Verlustkorrelation sind $T_{t,rel,2}$ und $p_{t,rel,2}$ bekannt. Zusammen mit dem am Schaufelaustritt vorgegebenen statischen Druck p_2 können weitere Abströmgrößen, wie z.B. die Abströmmachzahlen $Ma_{2,rel}$ oder die Stromdichte $\rho_2 w_2$ berechnet werden.

- (a) Bei Abströmmachzahlen $Ma_{2,rel} \geq 1$ wird die Kontinuitätsgleichung zwischen engstem Querschnitt und Hinterkante benutzt (beachte $v_{2,rel}$ sei hier die Projektion von w_2 auf die x, φ -Ebene, d.h. ohne Radialkomponente). Mit Berücksichtigung von Kühlluftausblasung stromab des engsten Querschnitts (Kühlluftmenge \dot{m}_c) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_o + \dot{m}_c \quad (15)$$

$$\rho_2 v_{2,rel} \cos(\alpha_{2,rel}) A_2 = \rho^* a^* A_o + \dot{m}_c \quad (16)$$

wobei ρ^* , a^* die kritische Dichte und die kritische Schallgeschwindigkeit (bei $Ma = 1$) darstellen, welche allein aus $p_{t,rel,o}$ und $T_{t,rel,o}$ berechnet werden können. $T_{t,rel,o}$ wiederum erhält man aus dem Erhaltungssatz der Rothalpie; $p_{t,rel,o}$ aus der Verlustkorrelation (siehe oben).

Im Fall der Abströmmachzahlen $Ma_{2,rel} \geq 1$ (gesperrte Strömung) wird die Machzahl im engsten Querschnitt auf 1 gesetzt. Damit ist auch der Massenstrom im engsten Querschnitt, \dot{m}_o , festgelegt, natürlich immer noch abhängig von $p_{t,rel,o}$ und $T_{t,rel,o}$ und damit den Anströmbedingungen der Schaufelreihe, die sich im Laufe der Iteration noch ändern.

- (b) Bei Abströmmachzahlen $Ma_{2,rel} < 1$ wird eine leicht modifizierte Cosinus-Regel benutzt:

$$\cos(\alpha_{2,rel}) = \frac{p_{t,rel,o}}{p_{t,rel,2}} \sqrt{\frac{T_{t,rel,2}}{T_{t,rel,o}}} \cdot \frac{A_o}{A_2} \cdot \left(1 + \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_o}\right) \quad (17)$$

Die sogenannte Cosinus-Regel nach Gleichung (17) ist nichts anderes als die Lösung der Gleichung (16) für $Ma_{2,rel} = 1$ bei perfektem idealem Gas. Indem man die Cosinus-Regel benutzt, tut man gewissermaßen so, als ob zwischen engstem Querschnitt und Schaufelaustritt bei Unterschall-Abströmmachzahlen die Stromdichteverhältnisse von $Ma_{2,rel} = 1$ eingefroren wären.

Auch wenn es nicht so offensichtlich ist, wie im gesperrten Fall, so folgt aus der Kosinusregel, zusammen mit den weiteren Größen p_2 , $p_{t,rel,2}$ und $T_{t,rel,2}$ der Massenfluss am Schaufelaustritt.

Sowohl im gesperrten Fall, als auch bei Unterschall-Abströmmachzahlen führt die Abströmwinkel-Korrelation zu einer Festlegung des Massenstroms durch die Schaufelreihe, natürlich abhängig vom vorgegebenen statischen Druck, p_2 , der iterativ verändert werden muss.

3.4 Station 1

Bevor man mit Hilfe der Basisschritte in Strömungsrichtung fortschreiten kann, müssen natürlich im allerersten Schritt, die Strömungsgrößen an der ersten Station (Turbineneintritt) bereitgestellt werden. Aus den Randbedingungen sind nur der Totaldruck $p_{t,in}$, die Totaltemperatur $T_{t,in}$ und der Zuströmwinkel bekannt. Die übrigen Größen werden zunächst geschätzt. Wie im vorhergehenden Abschnitt diskutiert, stellt sich in der Schaufelreihe ein Massenfluss ein, der abhängig von den Größen p_2 , $p_{t,rel,2}$ und $T_{t,rel,2}$ ist. Diese wiederum sind entweder für einen Iterationsschritt vorgegeben, wie p_2 , oder ergeben sich im Lauf der Iteration. Insbesondere für die erste Schaufelreihe ergeben sich die Totalgrößen p_t und T_t aus den Zuströmbedingungen. Im unbeschaufelten Ringraum ist der Massenfluss eine Erhaltungsgröße (natürlich müssen Zuflüsse aufgrund von Kühlluftströmen berücksichtigt werden); in der ersten Schaufelreihe wird der Massenfluss durch die Korrelationen festgelegt, wie oben diskutiert, d.h. der Massenfluss in Station 1, \dot{m}_1 , ergibt sich aus dem Massenfluss in der ersten Schaufelreihe. Nach dem ersten Iterationsschritt kann der Massenfluss am Turbineneintritt aus dem Massenfluss am Austritt der ersten Schaufelreihe entnommen werden und damit die fehlenden Strömungsgrößen an Station 1 immer wieder neu berechnet werden.

3.5 Iteration

Die statischen Drücke an den Schaufelhinterkanten werden iterativ verändert, bis alle Massenströme innerhalb der Turbine die jeweiligen Zielmassenströme erreicht haben. Ohne Ausblasen von Kühlluft müssen die Massenströme innerhalb der Turbine an jeder Station gleich sein, d.h. der Zielmassenstrom ist in diesem Fall gleich dem Mittelwert aus allen Massenströmen. Bei Ausblasen von Kühlluft unterscheiden sich die Zielmassenströme an jeder Station i um den Massenstrom des Kühlluftetrages an der vorhergehenden Station:

$$\dot{m}_i = \dot{m}_{i-1} + \dot{m}_{c,i} \quad (18)$$

Sei $\dot{m}_{k,Z}$ der Zielmassenstrom an der Schaufelhinterkante der Schaufelreihe k und Δ_k die Abweichung des tatsächlichen Massenstroms, \dot{m}_k , der Schaufelreihe k vom Zielmassenstrom:

$$\Delta_k = (\dot{m}_{k,Z} - \dot{m}_k) / \dot{m}_{k,Z} \quad (19)$$

Sei rx ein Relaxationsfaktor ($rx = \text{relax_p_}$, siehe Abschnitt 2.). Im vorliegenden Rechenprogramm wird folgende Formel benutzt, um den neuen statischen Druck, $p_{neu,k}$ an der Hinterkante der Schaufelreihe k zu berechnen (bisheriger statischer Druck $p_{alt,k}$):

$$p_{neu,k} = p_{alt,k} - \Delta_k \cdot rx \cdot (p_{t,k} - p_{alt,k}) + rx \cdot p_{alt,k} \cdot \Delta_{k+1} \quad (20)$$

Es werden also die Abweichungen des aktuellen vom Zielmassenstrom an den Schaufelreihen k und $k+1$ benutzt, um den statischen Druck an der Hinterkante der Schaufelreihe k zu korrigieren. Der Index k läuft von der ersten bis zur vorletzten Schaufelreihe, stromab der letzten Schaufelreihe ist der statische Druck durch den Abströmdruck, p_{out} , determiniert. Ein Beispiel für den Iterationsvorgang ist in Bild 4 dargestellt.

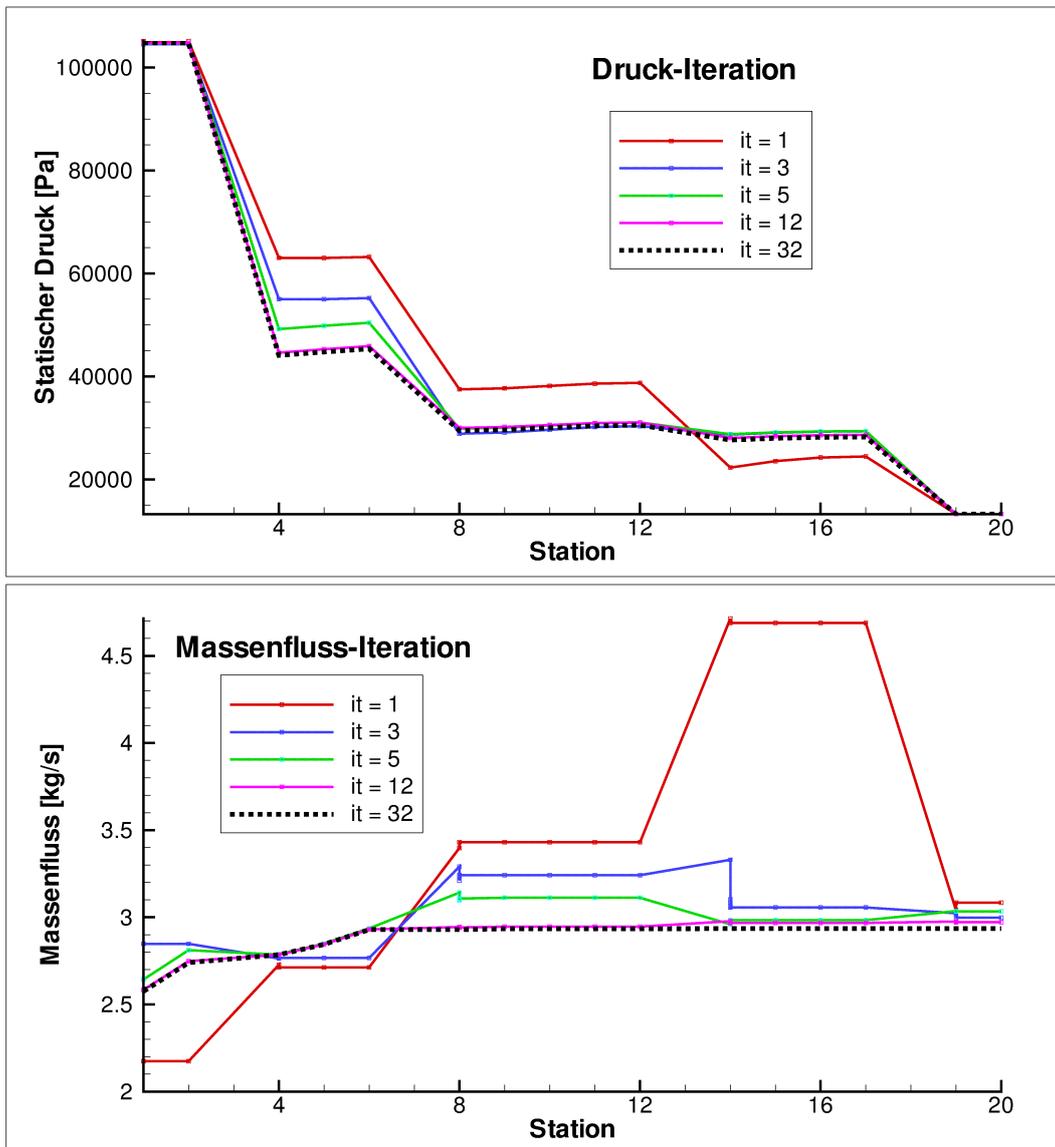


Bild 4: Iteration der Drücke an den Schaufelhinterkanten, um die Zielmassenströme zu erreichen (Kühlluftzufuhr an den Stationen 2,4,5,6,9)

4. Die zweidimensionale Berechnung der Meridionalströmung in einer Turbine

Bei der eindimensionalen Rechnung wird der gesamte Strömungskanal als eine Stromröhre betrachtet. Zur zweidimensionalen Berechnung muss der Strömungskanal in Stromlinien aufgeteilt werden. Zwischen zwei Stromlinien befindet sich jeweils eine Stromröhre. Als allererstes muss in jedem Knotenpunkt (j,i) des zweidimensionalen Feldes ein Näherungswert für die Strömungsgrößen zur Verfügung gestellt werden (Startwerte). Dann muss man, vereinfacht ausgedrückt, folgendes durchführen:

- Eindimensionale Rechnung für eine Stromröhre
- Die Kopplung der Stromlinien über das Druckfeld durch Anwendung der Differentialgleichung für das radiale Gleichgewicht.

Aus Gründen der Konvergenz darf für eine korrekte Kopplung der Stromlinien nur jeweils ein Schritt in meridionaler Richtung durchgeführt werden, dann muss ein Schritt der eindimensionalen Rechnung für die nächste darüber liegende Stromröhre durchgeführt werden, usw. Es sind mehrere geschachtelte Iterationen durchzuführen:

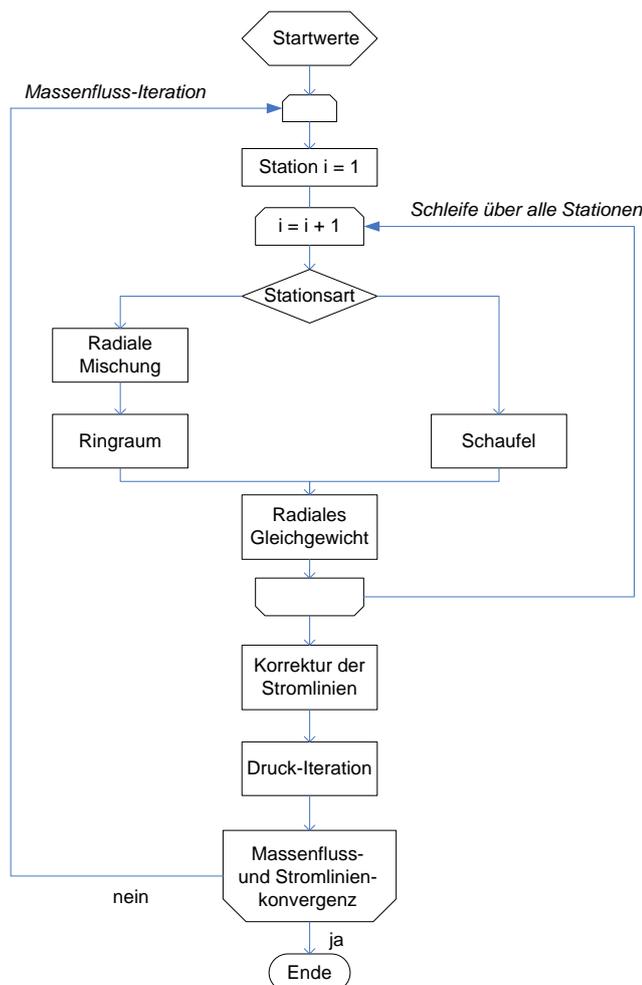


Bild 5: Flussdiagramm des 2D-Berechnungsverfahrens

Im folgenden werden die einzelnen Kästchen des Flussdiagramms ausführlicher erläutert. Man muss allerdings noch erwähnen, dass jedes einzelne Kästchen, von „Startwerte“, über „Station 1“, „Schaufel“, „Ringraum“, „Radiales Gleichgewicht“ usw., selbst wieder eine Schleife über alle Stromröhren j darstellt.

Startwerte: Eine Startgeometrie muss zur Verfügung gestellt werden. Zusätzlich zu den schon bekannten Stationen müssen Stromlinien näherungsweise festgelegt werden. Als Start-Stromlinien werden sogenannte Quasistromlinien durch die flächengleiche Aufteilung der Kanalquerschnitte an jeder Station berechnet. Weiterhin werden die Krümmungswerte der Stromlinien an jedem Knotenpunkt nach Gleichung (28) berechnet. Bild 6 zeigt ein Beispiel für die Startgeometrie. Zusätzlich zur Geometrie sind an jedem Knotenpunkt Näherungswerte der Strömungsgrößen bereit zu stellen. Dazu werden einfach die Ergebnisse der eindimensionalen Rechnung verwendet.

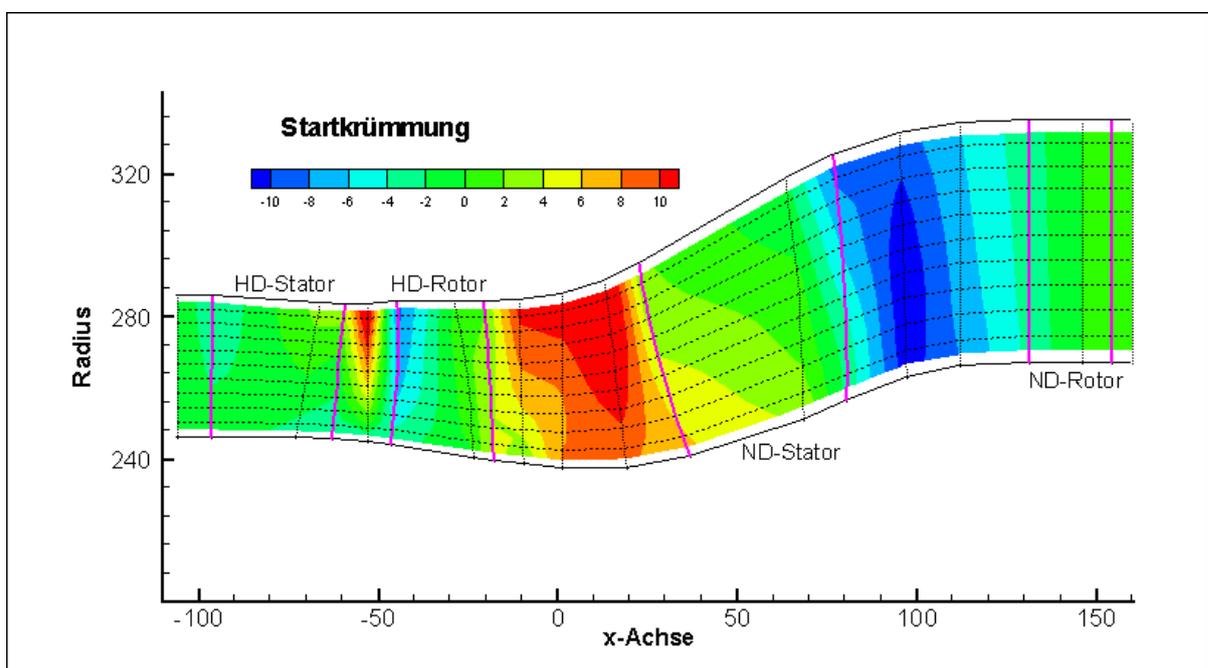


Bild 6: Startgeometrie: Quasinormale, Quasistromlinien und Startkrümmung

Station $i = 1$: Aus den Randbedingungen sind an der ersten Station (Turbineneintritt) nur der Totaldruck $p_{t,in}$, die Totaltemperatur $T_{t,in}$ und der Zuströmwinkel bekannt. Wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, werden die übrigen Größen der Zuströmung für jede Stromröhre aus der zusätzlichen Kenntnis des Massenflusses berechnet, der ab dem zweiten Iterationsschritt zur Verfügung steht. Auch bei Station 1 wird der statische Druck außerhalb des Mittelschnittes so angepasst, dass das radiale Gleichgewicht erfüllt ist.

Stationsart Schaufel: Gemäß Abschnitt 3.3 werden die Größen im engsten Querschnitt und am Austritt der Schaufelreihe aus dem vorgegebenen statischen Druck am Schaufelaustritt, einer Erhaltungsgleichung und zwei Korrelationen bestimmt. Diese Berechnung der Strömung an der Schaufelhinterkante einer Stromröhre ist, wie schon erwähnt, in eine Schleife über alle Stromröhren j eingebettet.

Stationsart Ringraum: Auch dieser Rechenschritt ist in eine Schleife über alle Stromröhren j eingebettet. Gemäß Abschnitt 3.1 werden die Strömungsgrößen im unbeschaukelten Ringraum von Station $i-1$ nach Station i umgerechnet. Ist der Mischungsparameter $mix > 0$ wird gemäß Abschnitt 4.3 vorher eine radiale Mischung konvektiver Strömungsgrößen von Station $i-1$ nach Station i vorgenommen.

Radiales Gleichgewicht: Gemäß Abschnitt 4.2 wird an der Station i das radiale Gleichgewicht erfüllt, indem aus dem statischen Druck des Mittelschnittes die statischen Drücke in allen Stromröhren neu berechnet werden, unter Anwendung der Differentialgleichung (27). Allerdings wird nicht direkt der neu berechnete statische Druck genommen, sondern mit Hilfe des Relaxationsfaktors `relax_p_` ein gewichteter Mittelwert aus altem und neu berechnetem Druck gebildet. Für Stationen im unbeschaukelten Ringraum wird in jeder Stromröhre unter Benutzung des neuen Drucks der Massenfluss neu berechnet, so dass die Größen der nächsten Station schon mit dem neuen Massenfluss berechnet werden können.

Korrektur der Stromlinien: Gemäß Abschnitt 4.4 wird die Lage der Stromlinien neu berechnet (mit Relaxationsfaktor `relax_r_`), um sicherzustellen, dass in allen Stromröhren der gleiche Massenfluss fließt. Diese Prozedur besteht ebenfalls aus einer äußeren Schleife über alle Stationen und einer inneren Schleife über alle Stromlinien. Anschließend werden einige geometrische Größen neu berechnet (u.a. die Krümmung) und die Strömungsgrößen an den neuen Knoten (j,i) werden durch Interpolation aus den alten ermittelt.

Druck-Iteration: Dies ist eine Schleife über alle Stationen k an den Schaufelhinterkanten. Der gesamte Massenfluss im Strömungskanal bei Station k wird aufsummiert. Die statischen Drücke an den Schaufelhinterkanten im Mittelschnitt jeder Station werden iterativ verändert (Schleife „Massenfluss-Iteration“ im Flussdiagramm), bis alle Massenströme innerhalb der Turbine die jeweiligen Zielmassenströme erreicht haben (siehe Abschnitt 3.5 und Bild 4). Der statische Druck am Turbinenausstritt im Mittelschnitt, p_{out} , wird beibehalten. Die Drücke an den Schaufelhinterkanten aller Stromröhren j werden um den gleichen Betrag wie die mittlere Stromlinie verändert. Die genaue radiale Verteilung der Drücke an allen Stationen ergibt sich, wie oben beschrieben, aus dem radialen Gleichgewicht.

4.1 Die radiale Verteilung der Schaufelverluste

Wie oben schon erwähnt, werden die Schaufelverluste gemäß den Korrelationen von AMDC [2, 3] berechnet. Die Schaufelverluste werden im vorliegenden Programm für jede einzelne Stromröhre aus den Korrelationen ermittelt. Allerdings erhält man aus den Korrelationen die einzelnen Verlustanteile getrennt, aber immer als Mittelwert über die gesamte Schaufelhöhe. Für Verlustanteile, die als Profilverluste sowieso über der Schaufelhöhe als konstant angenommen werden, ist das kein Problem: man setzt den ermittelten Profilverlust einfach als lokalen Profilverlust der jeweiligen Stromröhre an. Sekundär- und Spaltverluste sind aber radial ungleichförmig verteilt, es existiert ein Maximum nahe den Endwänden, deshalb muss man den Abstand der jeweiligen Stromröhre zu den Endwänden berücksichtigen.

Die Erstreckung der Sekundärverluste in spannwitiger Richtung (Δh_{sek}) wurde gemäß Benner et al. [7] festgesetzt. Die Kenntnis des Abstandes von der Endwand, bis zu dem Sekundärverluste (einschließlich Spaltverlusten) die Schaufeldurchströmung beeinflussen, genügt jedoch nicht, man muss die Verluste auch irgendwie radial verteilen. Die radiale Verteilung der Sekundärverluste

ist so vorzunehmen, das der Mittelwert über der Schaufelhöhe dem Wert aus der Verlustkorrelation entspricht. Bei einem Spalt zwischen Schaufel und Endwand wird der Spaltverlust nur der betroffenen Endwand zugeordnet, beispielsweise bei einem Rotorspalt wird der Spaltverlust zum Sekundärströmungsverlust am Gehäuse addiert, nicht aber zum Verlust an der Nabe.

Betrachte im folgenden die untere (nabennahe) Hälfte des Strömungskanals, für die obere Hälfte ist das Verfahren analog. Dabei gehe ich weiterhin davon aus, dass sich die Sekundärströmungsbereiche von Nabe und Gehäuse nicht überlappen.

Nenne den globalen Sekundärverlust für die untere Hälfte des Strömungskanals: ζ_{sek}

Nenne den lokalen Sekundärverlust beim Radius r : $\zeta_{loc}(h')$, wobei $h' = r - r_{Nabe}$

Ansatz: $\zeta_{loc}(h') = V(h') \cdot \zeta_{sek}$

wobei $V(h')$ eine Verteilungsfunktion darstellt, die für $h' > \Delta h_{sek}$ den Wert Null hat und für $h' \leq \Delta h_{sek}$ so normiert ist, dass der Mittelwert des lokalen Verlustes gleich dem globalen Sekundärverlust für die untere Hälfte, ζ_{sek} , ist, d.h. es muss gelten:

$$\zeta_{sek} = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} \zeta_{loc}(h') dh' = \frac{2}{h} \int_0^{\Delta h_{sek}} V(h') \cdot \zeta_{sek} dh' \quad (21)$$

Daraus folgt die Normierungsbedingung für $V(h')$:

$$\int_0^{\Delta h_{sek}} V(h') dh' = \frac{h}{2} \quad (22)$$

Innerhalb des Schaufelhöhenbereichs Δh_{sek} , in dem Sekundärverluste anfallen, wurde eine radiale Sekundärverlustverteilung vorgegeben, welche einmal aus einer symmetrischen Dreiecksverteilung ($V_1(h')$) und zum anderen aus einer halben Parabel ($V_2(h')$) besteht. Die halbe Parabel hat Minimum und Nullpunkt bei Δh_{sek} und das Maximum direkt an der Endwand. Die Dreiecksverteilung erstreckt sich von der Endwand (Nullpunkt bei $h' = 0$) bis zum zweiten Nullpunkt bei $h' = \Delta h_{sek}$ und hat ihr Maximum bei $h' = \Delta h_{sek}/2$.

$$V(h') = f_g \cdot V_1(h') + (1 - f_g) \cdot V_2(h') \quad (23)$$

Mit einem Gewichtungsfaktor, f_g kann die Aufteilung der Verluste auf die beiden Verteilungen gesteuert werden. Implementiert wurde zunächst eine Gleichverteilung ($f_g = 0.5$). Damit nimmt die Dreiecksverteilung folgende Form an:

$$V_1(h') = \frac{h}{\Delta h_{sek}} \cdot \frac{h'}{\Delta h_{sek}} \quad \text{für } h' \leq \frac{\Delta h_{sek}}{2} \quad (24)$$

$$V_1(h') = \frac{h}{\Delta h_{sek}} \left(1 - \frac{h'}{\Delta h_{sek}} \right) \quad \text{für } h' \geq \frac{\Delta h_{sek}}{2}$$

Die quadratische Endwandverteilung lautet folgendermaßen:

$$V_2(h') = \frac{3}{4} \frac{h}{(\Delta h_{sek})^3} (h' - \Delta h_{sek})^2 \quad (25)$$

Die Verteilungen sind damit schon so formuliert, dass die Normierungsbedingung, Gleichung (22), erfüllt ist.

4.2 Radiales Gleichgewicht

Lokale Strömungsrichtung genau axial:

In der x,r-Ebene gilt dann für den Druckgradienten in radialer Richtung:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v_u^2}{r} - \frac{v_m^2}{r_c} \quad (26)$$

r_c = Krümmungsradius der Stromlinie in der x,r-Ebene.

Druckgradient längs der Quasinormalen q und Strömungsrichtung mit radialer Komponente:

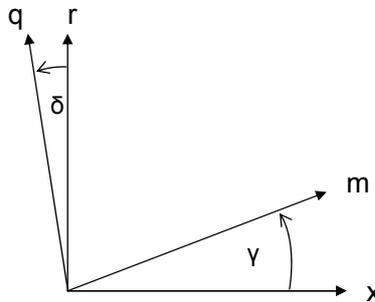


Bild 7: Lokales Koordinatensystem (m,q) für das Stromlinienkrümmungsverfahren

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dq} = \frac{v_u^2}{r} \cos(\delta) - \frac{v_m^2}{r_c} \cos(\gamma - \delta) \quad (27)$$

Dabei vernachlässige ich folgende Terme: $\frac{dv_m}{dm} \sin(\gamma - \delta)$ und $\frac{dp}{dm} \sin(\gamma - \delta)$

Diese Terme sind bei einer Axialturbine nahezu Null und nur fehlerhaft zu berechnen, wenn man den Abstand der Stationen in der Turbine nicht stark verkleinert. Im unbeschauften Ringraum ist man außerdem fast immer in der Lage die Richtung der Quasinormalen frei zu wählen; folglich kann man die Quasinormale so anordnen, dass sie in etwa senkrecht auf der Stromlinie steht, wodurch der Term $\sin(\gamma - \delta)$ gegen Null geht.

Die Berechnung der Krümmung

Bei einer ebenen Kurve ist der Krümmungsradius, r_c , gleich dem Kehrwert der Krümmung k . Ist die Kurve als Funktion $f(x)$ gegeben, so erhält man die Krümmung im Punkt $(x, f(x))$ nach folgender Formel ($f'(x)$ = 1.Ableitung, $f''(x)$ = 2.Ableitung der Funktion im Punkt x):

$$k = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \quad (28)$$

Im Programm werden die Ableitungen an der Station i aus den 3 Punkten mit Stationsindizes $i-1$, i , $i+1$ durch Bildung der Differenzenquotienten bestimmt.

4.3 Radiale Mischung von Totaldruck, Totalenthalpie, Drehimpuls und Gaszusammensetzung

Die radiale Mischung findet zwischen den Stationen $i-1$ und i statt, aber nur im unbeschaukelten Ringraum, weil im Schaufelbereich die Verlustverteilung von den Verlustmodellen geliefert wird. Es wird angenommen, dass die radiale Mischung nur durch die Turbulenz verursacht wird. Die Mischungsfront setzt sich mit dem Radialwinkel θ in Strömungsrichtung fort, d.h. für die lokale Mischungszone mit Ausdehnung ($\Delta x = x_{j,i} - x_{j,i-1}$; Δr) gilt:

$$\Delta r = \tan(\theta) \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad \tan(\theta) \approx Tu_r = v_r'/v_m \quad (29)$$

Da der Turbulenzgrad im Verfahren nicht bekannt ist, wird folgender Ansatz zur Modellierung des Turbulenzgrades benutzt:

$$Tu_r = mix \cdot \frac{s_{j,i-1} - s_{min,i-2}}{s_{min,i-2}} \quad (30)$$

wobei Tu_r = Turbulenzgrad in radialer Richtung;

$s_{j,i-1}$ ist die Entropie an der Station $i-1$ und in der Stromlinie j ;

$s_{min,i-2}$ ist der Minimalwert der Entropie an der davor liegenden Station, d.h. meist der Wert auf der mittleren Stromlinie; mix ist der Proportionalitätsfaktor und wird hier als Mischungsparameter bezeichnet.

Mit diesem Ansatz ist die treibende Kraft der radialen Mischung im allgemeinen die Entropiedifferenz zwischen lokaler Entropie und der minimalen Entropie in der vorhergehenden Station. Der Ansatz geht davon aus, dass sowohl ein Entropiemaximum, wie ein Maximum der Turbulenz durch den gleichen verlusterzeugenden Prozess hervorgerufen wird. Andere Ansätze, wie z.B. eine Modellierung über den lokalen Geschwindigkeitsgradienten sind denkbar.

Aus dem Verhältnis von Δr und lokalem Stromlinienabstand lässt sich ein lokaler Mischungsfaktor $f_{r,j}$ berechnen:

$$f_{r,j} = \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r_{j,i-1} - r_{j-1,i-1}} \quad \text{und} \quad f_{r,j} \leq 0.5 \quad (31)$$

Die Mischung wird massenflussgemittelt durchgeführt; beispielsweise für den Totaldruck lautet dann die Formel:

$$\begin{aligned} p_{t,j,i} &= f_{r,j+1} \cdot \dot{m}_{j+1,i-1} \cdot p_{t,j+1,i-1} \\ &+ f_{r,j-1} \cdot \dot{m}_{j-1,i-1} \cdot p_{t,j-1,i-1} \\ &+ (1 - f_{r,j+1} - f_{r,j-1}) \cdot \dot{m}_{j,i-1} \cdot p_{t,j,i-1} \end{aligned} \quad (32)$$

Wie man an Gleichung (32) erkennt, muss man den lokalen Mischungsfaktor f_r auf Werte ≤ 0.5 beschränken, um zu vermeiden, dass der Faktor vor $p_{t,j,i-1}$ in der 3. Zeile von Gleichung (32) negativ wird. Im Fall $f_r > 0.5$ (was im Programm nicht zugelassen wird) müsste man eigentlich die Mittelung über mehr als 3 Stromröhren durchführen. Stattdessen kann man als Abhilfe die Zahl der Quasinormalen im unbeschaukelten Ringraum erhöhen, um damit Δx und in Folge Δr zu verringern.

Aus der Mischungs-Totalenthalpie wird schließlich wieder die Totaltemperatur nach Mischung berechnet, ebenso wie aus dem Drehimpuls nach Mischung der neue Strömungswinkel in Umfangsrichtung berechnet wird. Zum Schluss wird kontrolliert, ob der Massenfluss im Querschnitt an Station i gleich geblieben ist und es wird eventuell korrigiert.

4.4 Neuberechnung der Lage der Stromlinien

Durch die vorhergehenden Schleifen über alle Stromlinien und Stationen hat sich auch der Massenfluss in den Stromröhren verändert. Die Lage der Stromlinien muss neu berechnet werden, um sicherzustellen, dass in allen Stromröhren der gleiche Massenfluss fließt. Der Zielmassenfluss pro Stromröhre j an der Station i ($\dot{m}_{i,Z}$) ergibt sich aus dem gesamten Massenfluss an der Station i , geteilt durch die Anzahl der Stromröhren. Die neue Querschnittfläche der Stromröhre ($A_{j,i,neu}$) ergibt sich aus der alten nach folgender Gleichung:

$$A_{j,i,neu} = \frac{\dot{m}_{i,Z}}{\dot{m}_{j,i}} \cdot A_{j,i,alt} \quad (33)$$

wobei mit $\dot{m}_{j,i}$ der aktuelle Massenfluss der Stromröhre j an der Station i bezeichnet wird.

Man beginnt mit der Neuberechnung der Stromlinien an der Nabe und korrigiert die Lage der Stromlinien von unten nach oben. Anschließend startet man die Neuberechnung der Stromlinien am Gehäuse und korrigiert die Lage der Stromlinien von oben nach unten. Zum Schluss bildet man einen endgültigen Korrekturwert durch eine gewichtete Mittelung beider Korrekturen.

Die in Abbildung 5 dargestellte äußere Iterationsschleife wird beendet, wenn sowohl Massenflusskonvergenz, als auch die Konvergenz der Stromlinienlagen erfüllt sind.

Die Kühlluftzugabe an Nabe und/oder Gehäuse im unbeschauelten Ringraum erfordert eine spezielle Behandlung, um die Stromlinienkonvergenz zu ermöglichen. Im Fall einer Kühlluftzugabe aus der Gehäuse- oder Nabenwand an Station i , wird zunächst der Massenfluss nur in der wandnächsten Stromröhre erhöht. Dies muss dadurch ausgeglichen werden, dass bereits vor Station i der ankommende Massenstrom zum Teil in die benachbarten Stromröhren umgeleitet wird, weil per definitionem Stromlinien den Strömungskanal in gleiche Teilmassenströme unterteilen.

4.5 Ausgabe

Es werden mehrere Ausgabedateien als Textdateien angelegt. Die Dateien `zwischenwerte.dat` und `strom_protokoll.dat` protokollieren ausführlich den Programmablauf und enthalten auch alle Fehlermeldungen. Bei den übrigen Ausgabedateien ist das Ausgabeformat immer so beschaffen, dass es mit dem Grafikprogramm 'TECPLOT' ohne weitere Bearbeitung geöffnet werden kann. Im vorliegenden Rechenverfahren wird zunächst immer die eindimensionale Lösung berechnet. Folglich werden als erstes die 1D-Ergebnisse ausgegeben. Jeweils im Kopf einer Datei werden einige Eingabegrößen, wie z.B. Eintrittstotaldruck, Eintrittstotaltemperatur, Zuströmwinkel und Kühlluftanteil angegeben. Die Ergebnisse der zweidimensionalen Berechnung werden in vier Dateien abgelegt:

`streamtubes.dat` Strömungsgrößen in den Stromröhren

`knotenwerte.dat` Strömungsgrößen an den Knotenpunkten aus Stationen und Stromlinien

`mittelwerte.dat` Massenflussgemittelte Strömungsgrößen an den Stationen

`kennwert_2d.dat` Kennwerte der Turbine

Insbesondere die Datei `knotenwerte.dat` gibt einen Überblick über sehr viele Größen der Strömung, wie z.B. Machzahl, Geschwindigkeiten, Strömungswinkel, Druck, Temperatur, Entropie an allen Punkten (x,r) des Rechengebietes. Die Ausgabedateien enthalten die Ergebnisse für

alle Operationspunkte; jeder Operationspunkt ist als separate TECPLOT-Zone eindeutig gekennzeichnet, bis auf die in der Kennwertdatei abgespeicherten Ergebnisse, wo jede Zeile die Ergebnisse eines Operationspunktes enthält.

Eine Zeile mit den Turbinen-Kennwerten aus den Dateien `kennwert_1d.dat` oder `kennwert_2d.dat` besteht aus folgenden Größen:

- 1) Druckverhältnis: Eintritts-Totaldruck zu statischem Druck am Austritt (Eingabegröße)
- 2) Druckverhältnis: Eintritts-Totaldruck zu Totaldruck am Austritt
- 3) Eintritts-Massenstrom \dot{m}_{in} in kg/s
- 4) Austritts-Massenstrom \dot{m}_{out} in kg/s
- 5) reduzierter Eintritts-Massenstrom \dot{m}_{red} nach Gleichung (34)
- 6) Gesamtleistung der Turbine P_{act} in kW
- 7) Spezifische Arbeit nach Gleichung (35)
- 8) vier Wirkungsgrade (siehe Anhang B, ohne Kühlluftzufuhr sind alle Wirkungsgrade gleich)
- 9) die Temperatur $T_{t,41}$ vor Rotor 1 bzw. in Ebene 41
- 10) die Austritts-Totaltemperatur $T_{t,out}$
- 11) zwei verschieden definierte isentrope Austrittstemperaturen (siehe Anhang B)
- 12) Gesamt-Entropie im Turbineneintritt einschließlich Entropie der Kühlluft
- 13) relativer Entropieanstieg in der Turbine
- 14) Drehzahlen in rpm und Einzelleistungen der verschiedenen Stufen in kW

Gleichungen:

$$\text{Reduzierter Massenstrom: } \dot{m}_{red} = \frac{\dot{m}_{in} \cdot \sqrt{T_{t,in}}}{p_{t,in}} \cdot 10^6 \quad (34)$$

$$\text{Spezifische Arbeit: } dht = \frac{P_{act}}{\dot{m}_{41} \cdot T_{t,41}} \quad (35)$$

5. Beispielrechnungen

5.1 Die „Hannover-Turbine“

Dies ist eine 4-stufige Turbine, welche als 'Test-case' der AGARD verwendet wurde [8, 10]. Die Messergebnisse waren Teil der Doktorarbeit von Groschup [9].

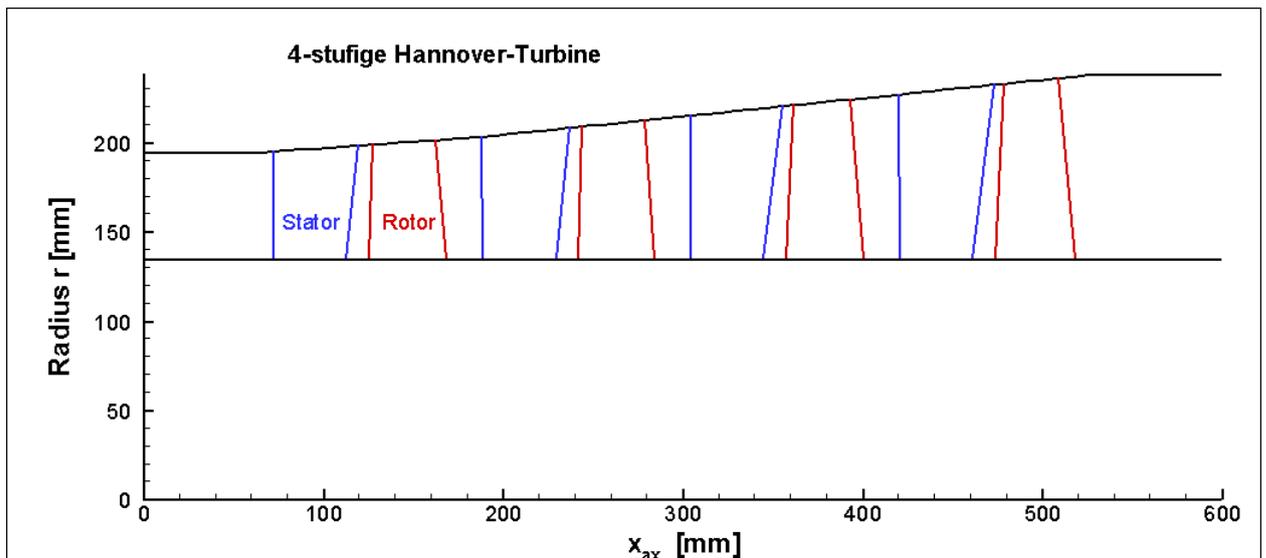


Bild 8: Meridionalschnitt durch die 4-stufige Hannoverturbine

Die Turbine weist pro Stufe 29 Statorschaufeln und 30 Rotorschaufeln auf. Die einzelnen Stator- und Rotorschaufeln der Hannoverturbine bestehen aus gleichen Profilen bei gleichem Radius. Die Profilschnitte unterscheiden sich allerdings von Schnitt zu Schnitt (siehe Abbildungen 9 und 10).

Weil die erste Stufe einen Maximalradius unterhalb 205 mm aufweist, besteht die erste Stufe beim Stator nur aus den Schnitten 1 bis 3, beim Rotor aus den Schnitten 1 bis 4. Die vierte Stufe besteht aus den Schnitten 1 bis 5 bzw. 6. Die Hannoverturbine ist ungekühlt und alle Berechnungen wurden mit konstantem c_p vorgenommen.

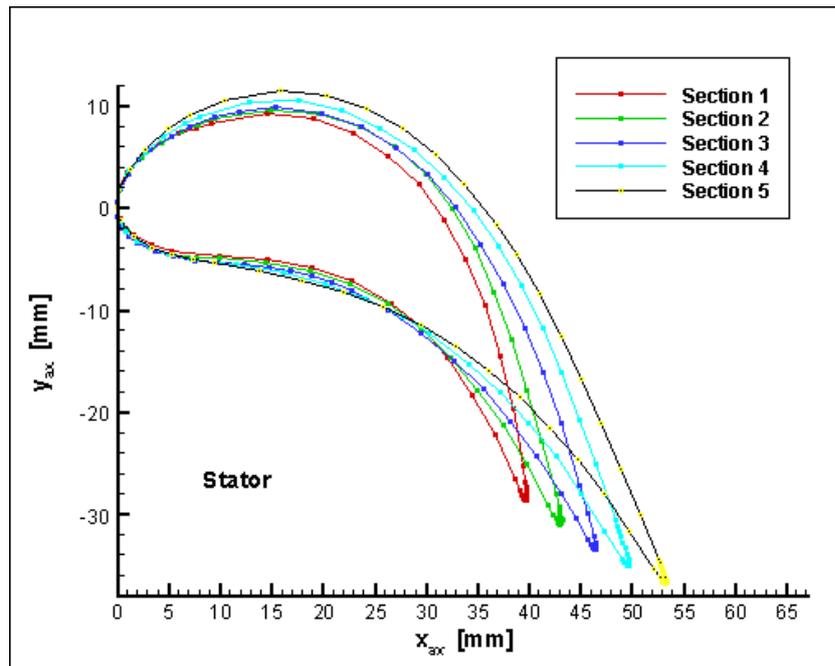


Bild 9: Die 5 Profilschnitte der Statoren der Hannover turbine

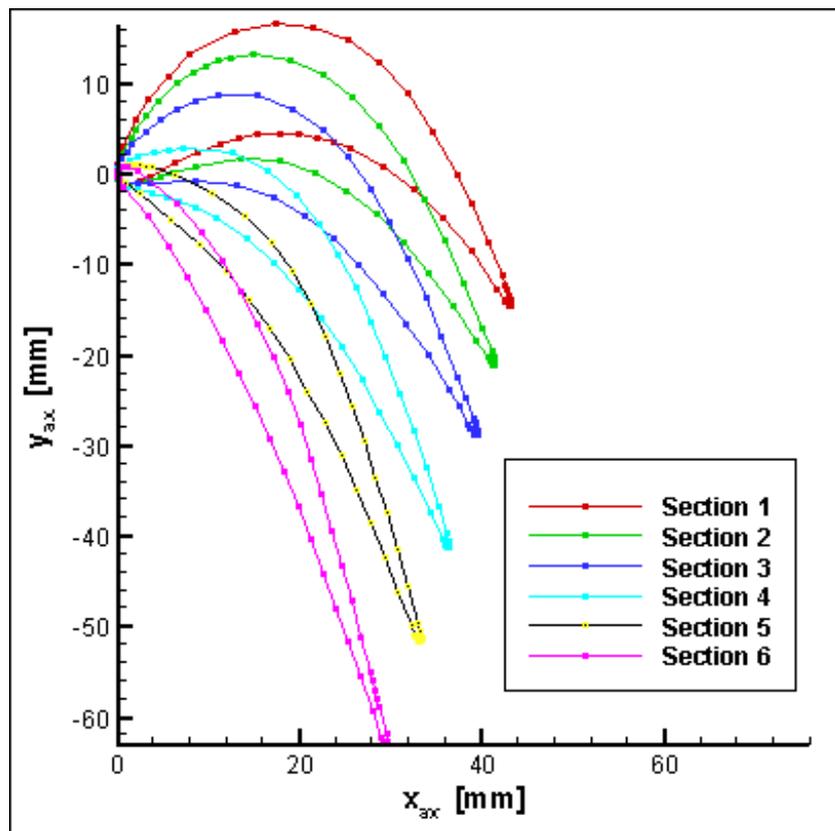


Bild 10: Die 6 Profilschnitte der Rotoren der Hannover turbine

Es liegen neben den eigenen Rechenergebnissen, auch Ergebnisse von Berechnungen mit einem Finite-Elemente-Stromfunktionsverfahren (FEMT) vor [11, 12]. Im Stromfunktionsverfahren werden die Verlustkorrelationen nach Traupel benutzt, im Gegensatz zum vorliegenden Verfahren, wo die AMDC-Korrelationen verwendet wurden. Im folgenden werden die Ergebnisse beider Methoden verglichen. In den folgenden beiden Abbildungen ist das statische Druckfeld bei einem festen Betriebspunkt dargestellt. Man erkennt eine überwiegend gute Übereinstimmung.

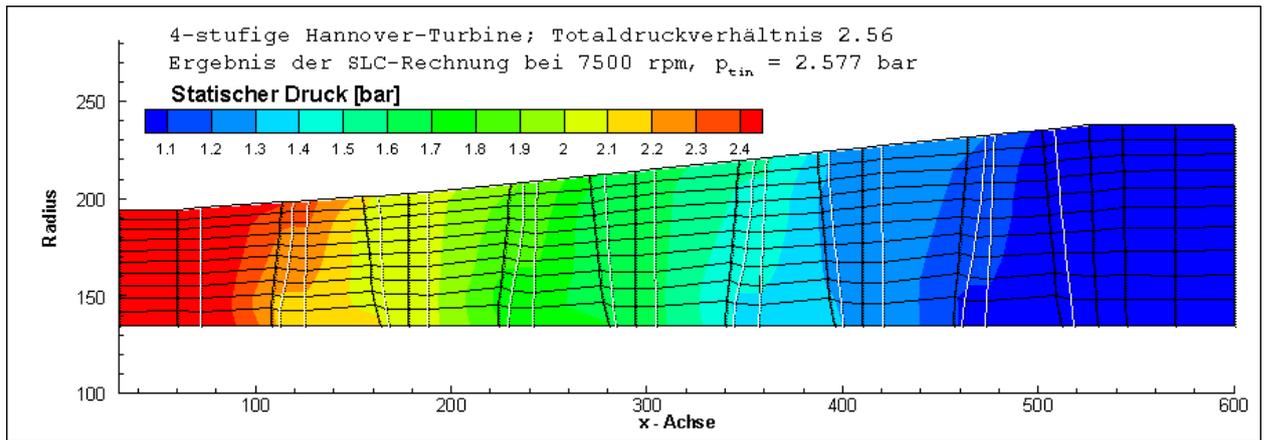


Bild 11: Statisches Druckfeld der Hannover-Turbine berechnet mit dem hier beschriebenen Stromlinienkrümmungsverfahren (SLC4T) bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 2.56

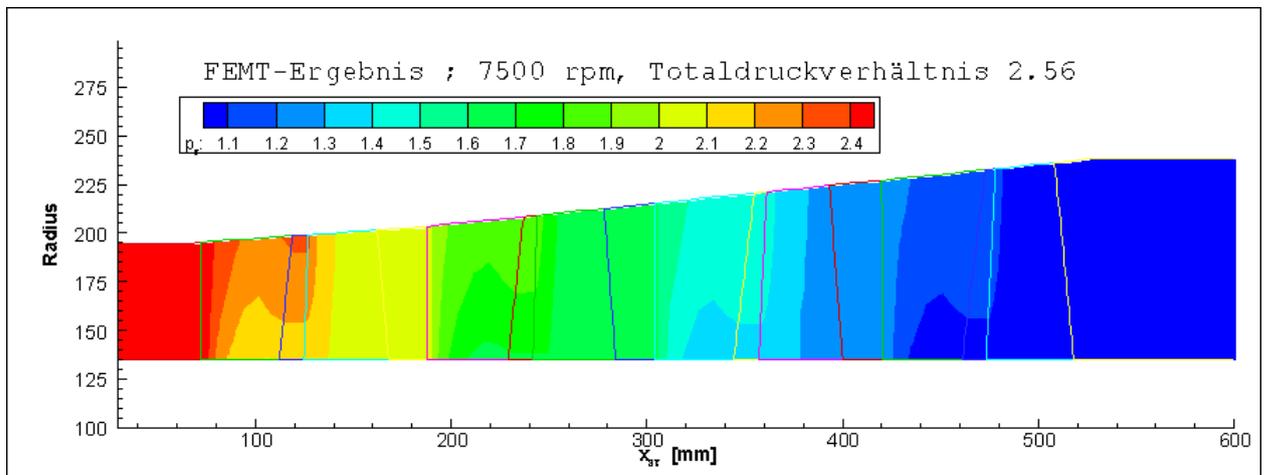


Bild 12: Statisches Druckfeld der Hannover-Turbine berechnet mit der Finite-Element-Methode (FEMT) bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 2.56

Da die Experimente an der Hannover-Turbine bei Abströmung in die Atmosphäre durchgeführt wurden, musste auch in der Rechnung der Abströmdruck konstant gehalten werden, während der Zuströmdruck proportional dem Druckverhältnis erhöht wurde und die Zuströmtemperatur entsprechend. Zum Vergleich mit dem Experiment wurde das Kennfeld bei zwei Drehzahlen und bei einer Reihe von Druckverhältnissen zwischen 1 und 2,6 berechnet. Bild 13 zeigt den Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Ergebnissen der zwei Rechenverfahren bezüglich Massenstrom und Wirkungsgrad. Die Übereinstimmung zwischen den Rechenverfahren und dem Experiment ist befriedigend.

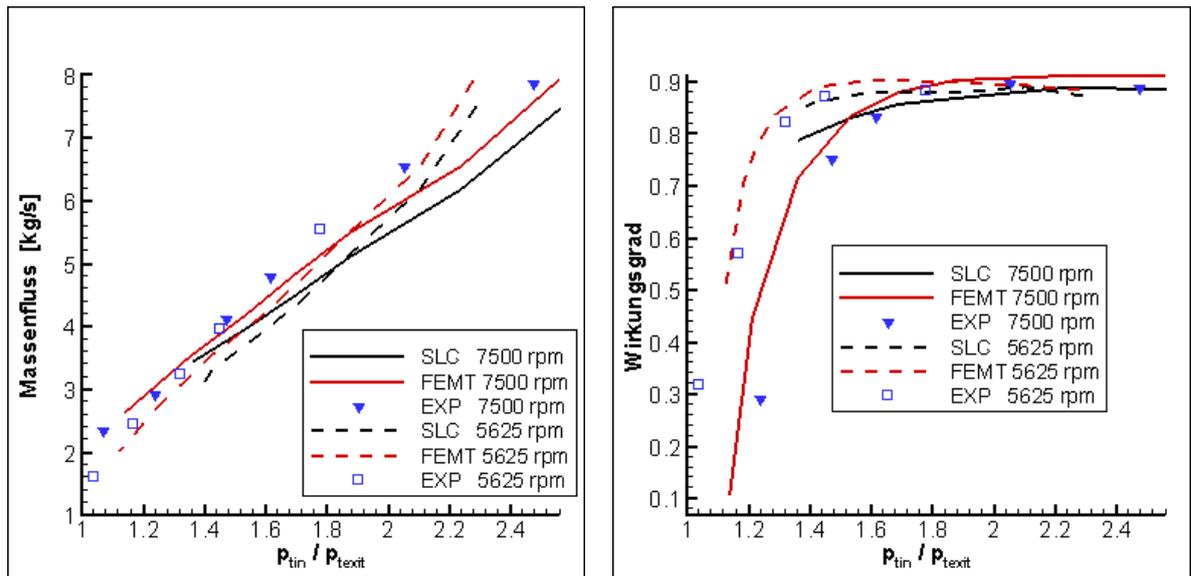


Bild 13: Kennfeld der Hannoverturbine: Vergleich von Massenfluss und Wirkungsgrad bei zwei Drehzahlen und einer Reihe von Druckverhältnissen

Die befriedigende Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den Ergebnissen der zwei Rechenverfahren bezüglich des Wirkungsgrades bedeutet, dass das Verlustmodell von AMDC [4, 5, 6] für diese relativ alte Turbine angemessene Werte liefert, ohne dass ein Korrekturfaktor für den Schaufelverlust eingegeben werden muss. Weitere, hier nicht publizierbare Vergleiche von SLC4T-Rechnung und Experiment zeigten, dass für moderne Turbinen der Schaufelverlust aus AMDC mit einem Faktor von etwa 0,75 multipliziert werden sollte.

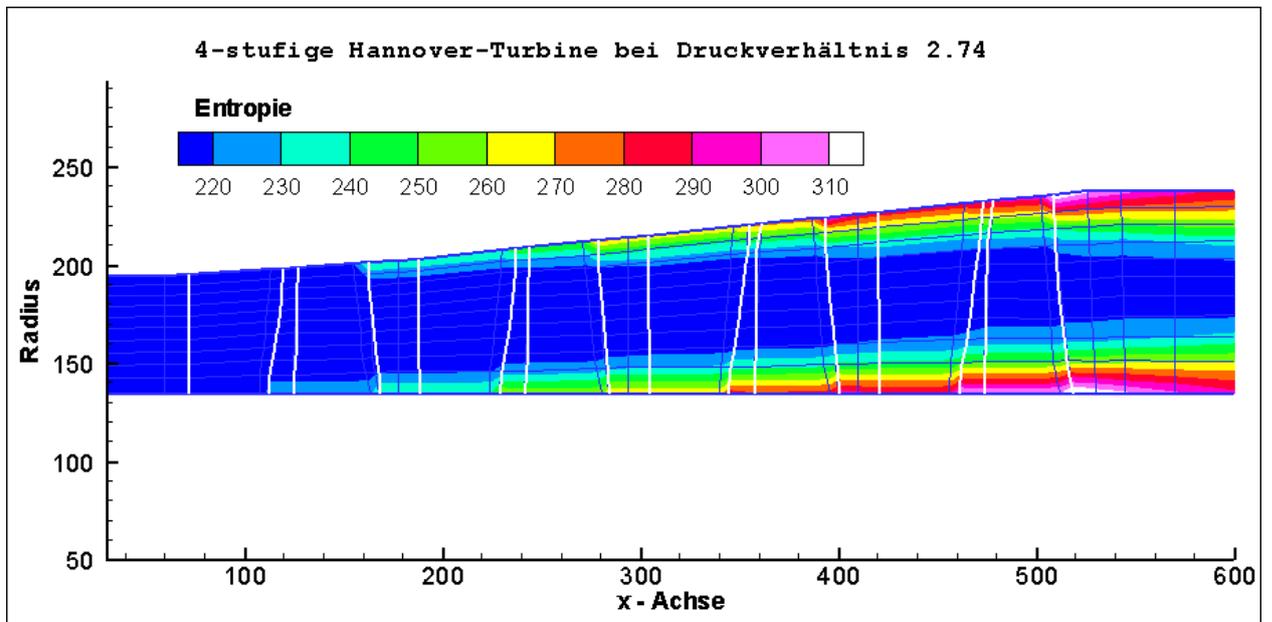


Bild 14: Entropiefeld der Hannoverturbine berechnet mit dem Stromlinienkrümmungsverfahren (SLC4T) bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 2.74

In den Abbildungen 14 bis 16 werden noch einige Ergebnisse des Stromlinienkrümmungsverfahrens (SLC4T) dargestellt. Zunächst zeigt Bild 14 das Entropiefeld der Hannover turbine bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 2,74. Man erkennt wie hauptsächlich an Nabe und Gehäuse im Austritt der Schaufelreihen Entropie aufgrund der hohen Sekundärströmungsverluste erzeugt wird, und durch die radiale Mischung auch allmählich in Richtung Mittelschnitt transportiert wird.

In den Abbildungen 15 und 16 sind die Relativmachzahlen in der Hannover turbine bei zwei Druckverhältnissen dargestellt. Jeweils zwischen engstem Querschnitt und Ende einer Schaufelreihe erhält man die höchsten Relativmachzahlen. Selbstverständlich ist per definitionem beim Sator und im Raum außerhalb der Schaufeln die Relativmachzahl gleich der Absolutmachzahl. Beim Druckverhältnis 2,74 erhält man eine maximale Machzahl von 0,55 und die letzte Stufe ist am stärksten belastet, erkennbar am Maximum der Relativmachzahl. Beim Druckverhältnis 1,57 dagegen (Bild 16), erhält man eine maximale Machzahl von 0,39 und die letzten beiden Stufen sind beträchtlich entlastet.

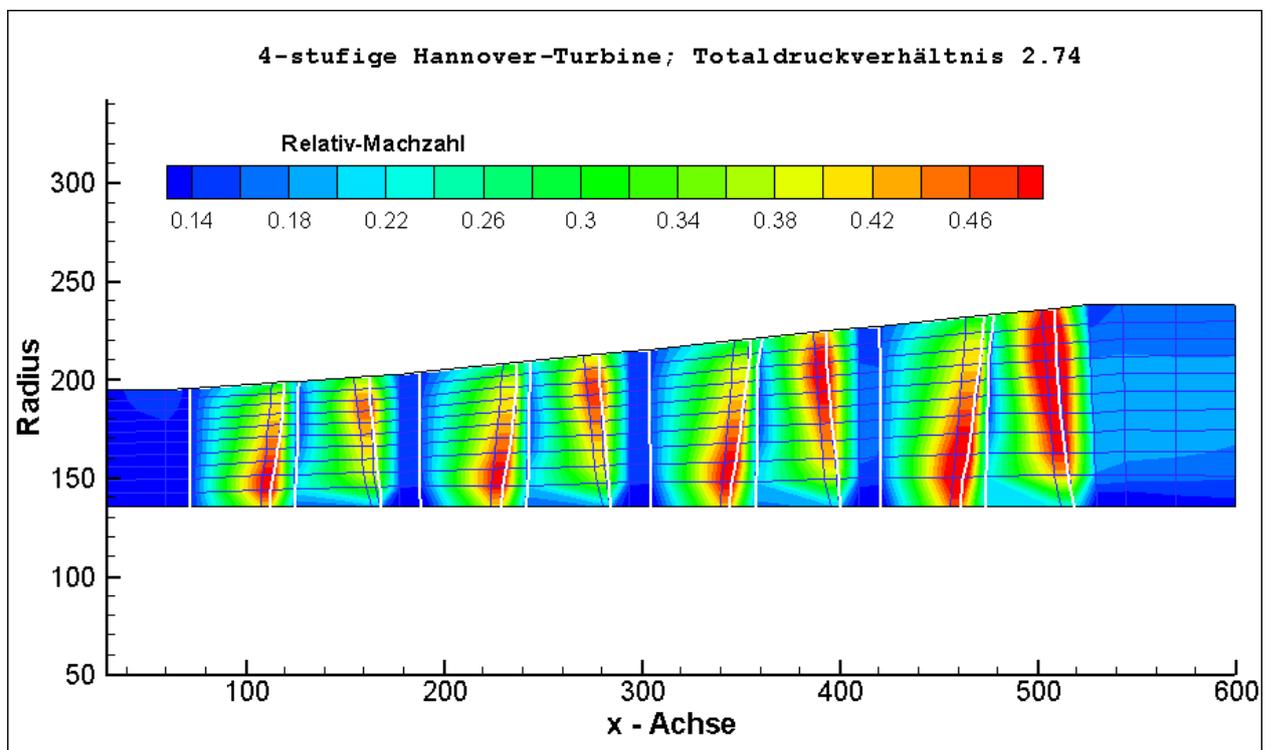


Bild 15: Feld der Relativmachzahlen der Hannover turbine berechnet mit dem Stromlinienkrümmungsverfahren (SLC4T) bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 2.74

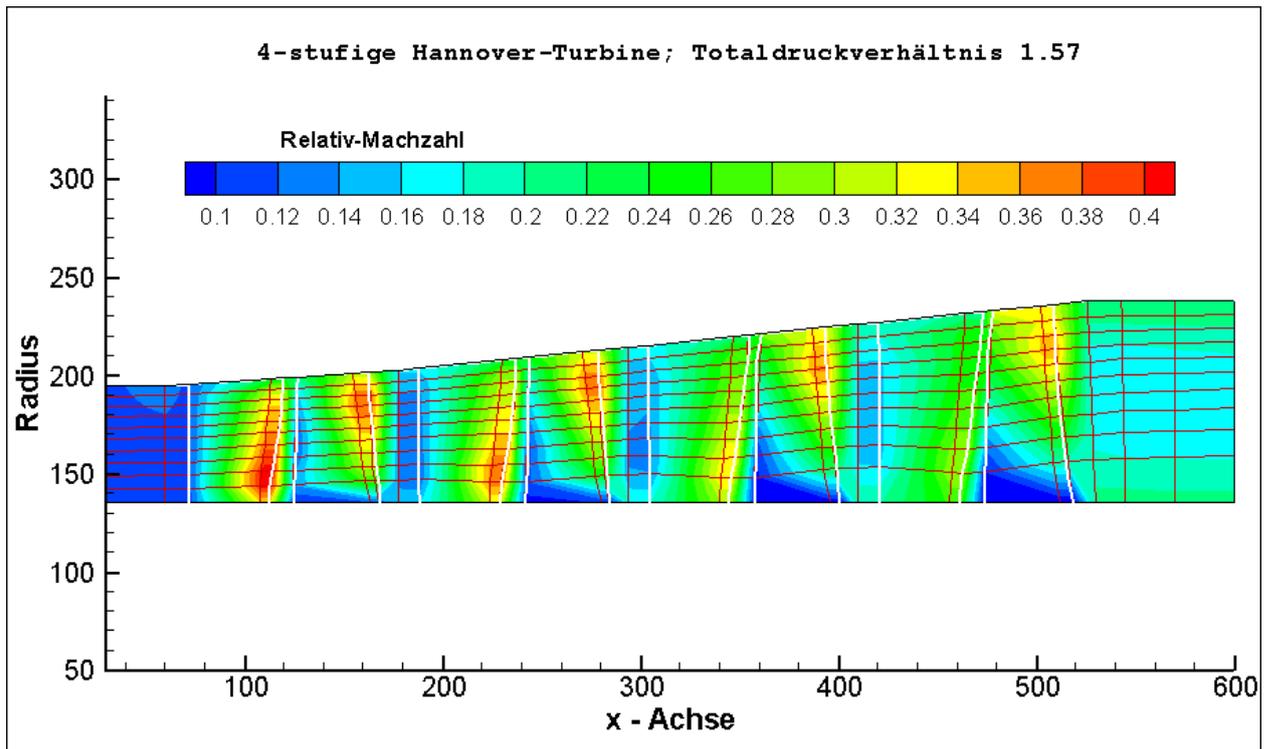


Bild 16: Feld der Relativmachzahlen der Hannoverturbine berechnet mit dem Stromlinienkrümmungsverfahren (SLC4T) bei Drehzahl 7500 rpm und Druckverhältnis 1.57

5.2 Die „FOX-Turbine“

Diese Turbine wurde vom DLR-Institut für Antriebstechnik als Beispiel für die erste Stufe einer massiv gekühlten Hochdruckturbinenstufe entworfen. Die Bilder 17 und 18 zeigen die Mittelschnittprofile der Turbinenstufe.

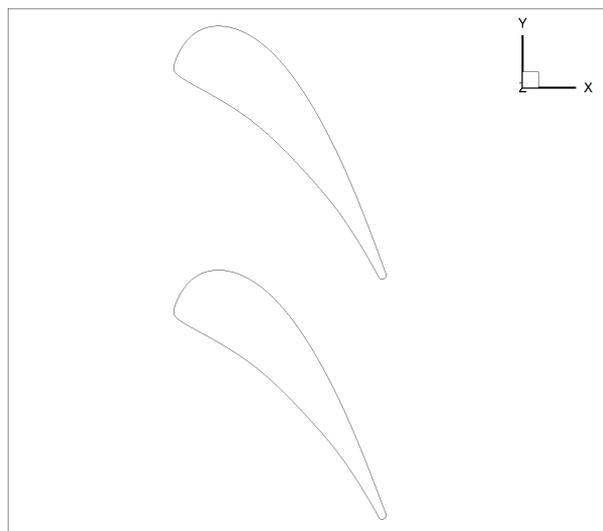


Bild 17: Stator-Mittelschnittprofil der FOX-Turbine

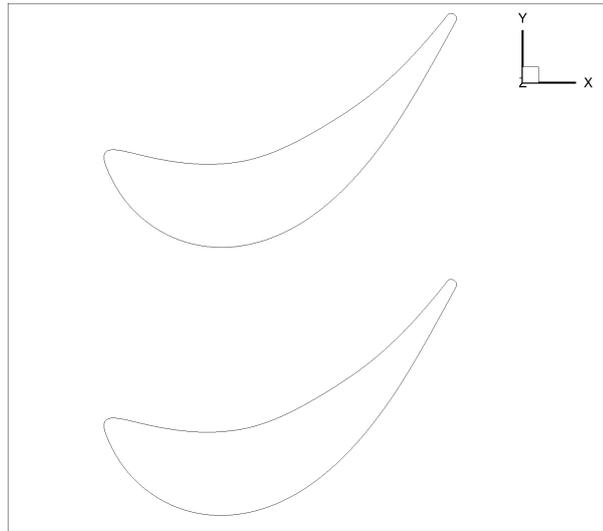


Bild 18: Rotor-Mittelschnittprofil der FOX-Turbine

Bei den Beispielrechnungen für die FOX-Turbine wurden folgende Größen konstant gehalten:

- Eintritts-Totaldruck $p_{t,in} = 3216$ kPa
- Eintritts-Temperatur $T_{t,in} = 1736$ K
- Druckverhältnis $p_{t,in}/p_{s,out} = 2.205$
- Drehzahl 14500 rpm
- Kühllufttemperatur 830 K

Als Gas im Turbineneintritt wurde ein Verbrennungsgas aus Kerosinverbrennung mit 130% Luftüberschuss ($\lambda = 2.30$), $R = 287.4$ J/(kg K), $c_p \approx 1340$ J/(kg K), gewählt. Die Kühlluft besteht aus reiner trockener Luft, $R = 287.1$ J/(kg K), $c_p = 1105$ J/(kg K). Die Kühllufttemperatur beträgt 830 K. Alle Werte wurden einmal bei konstanter Wärmekapazität (c_p wie angegeben) und einmal streng mit variabler Wärmekapazität und unter Berücksichtigung der folgenden Gaszusammensetzung ermittelt.

Tabelle 1: Molare Gaszusammensetzung am Eintritt der FOX-Turbine

N2	O2	Ar	CO2	CO	SO2	H2O
0.7588	0.1180	0.0090	0.0571	0.0000	0.0000	0.0571

Bild 19 zeigt das Entropiefeld der ungekühlten FOX-Turbine. Genauso wie bei der Hannover-turbine wird hauptsächlich an Nabe und Gehäuse im Austritt der Schaufelreihen Entropie aufgrund der hohen Sekundärströmungsverluste erzeugt.

Ein anderes Bild erhält man, wenn man das Entropiefeld der gekühlten FOX-Turbine bei einem Kühlluftanteil von 19% betrachtet (Bild 20). Man erhält einen scheinbar paradoxen globalen Abfall der Entropie in der Turbine. Nur noch lokale Anstiege der Entropie an der Gehäusewand hinter dem Stator und dem Rotor aufgrund der Endwandverluste sind zu erkennen. Das globale Verhalten ist auf die Zufuhr der Kühlluft zurückzuführen, welche wegen ihrer geringeren Temperatur auch eine geringere Entropie in die Turbinenströmung einbringt. Wenn man eine korrekte

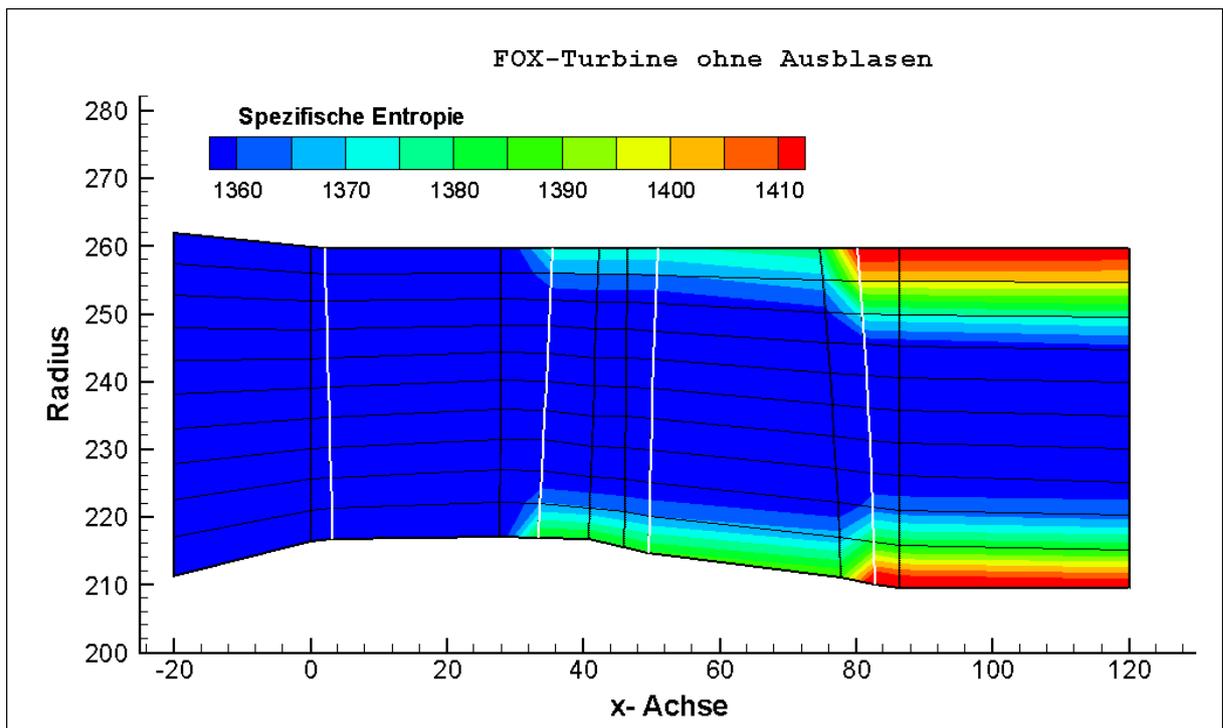


Bild 19: Feld der spezifischen Entropie in der FOX-Turbine ohne Ausblasen

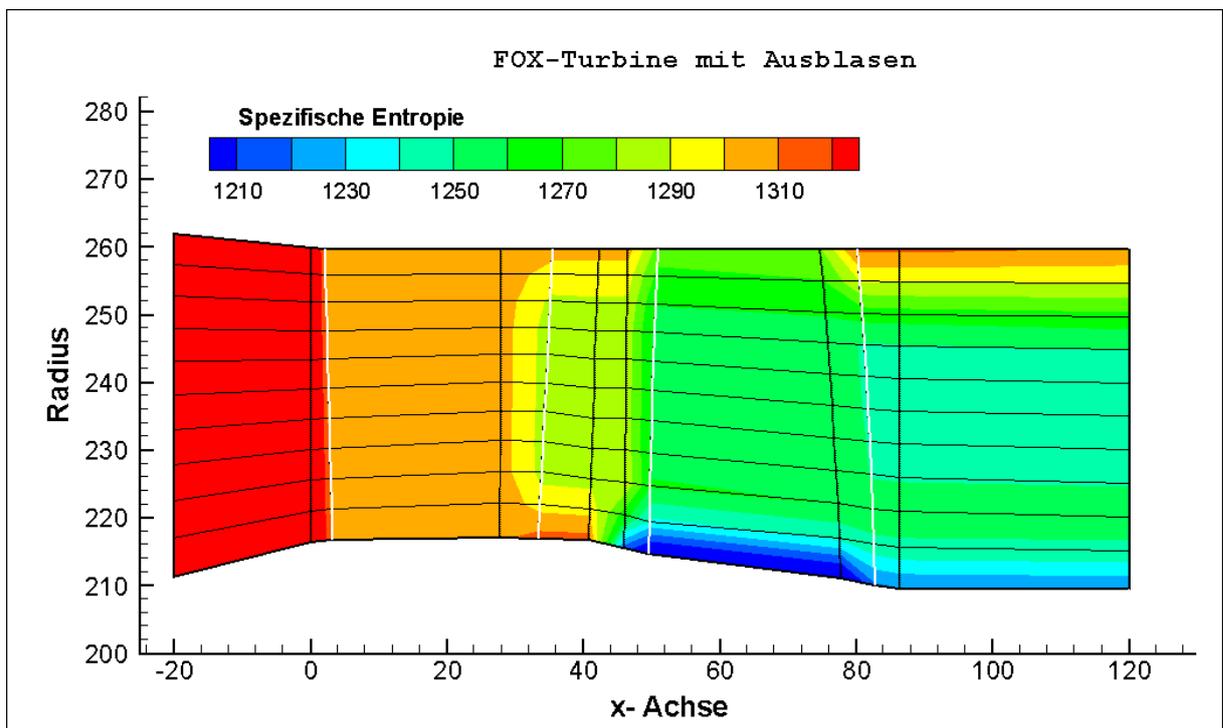


Bild 20: Feld der spezifischen Entropie in der FOX-Turbine mit Ausblasen

Bilanz mit Einschluss der zugeführten Kühlluftentropie vornimmt, erhält man den Wert ΔS , wie er in der Tabelle 2 aufgeführt ist und dieser positive Wert zeigt sehr wohl einen Entropiean-

stieg in der Turbine an. Die lokale Zufuhr von Kühlluft an der Rotornabe (Leckageluft) wird als Entropieabfall im Bild 20 besonders deutlich.

Die folgende Tabelle zeigt die berechneten Kennwerte der FOX-Turbine bei Berechnung mit variabler Wärmekapazität, sowohl mit, als auch ohne Kühlung (Kühlluftanteil siehe letzte Spalte der Tabelle). Zur Definition der Kennwerte siehe Abschnitt 4.5 bzw. Anhang B.

Tabelle 2: Kennwerte der FOX-Turbine bei Berechnung mit variabler Wärmekapazität

T_4 [K]	p_4/p_{45}	\dot{m}_4 [kg/s]	\dot{m}_{45} [kg/s]	T_{45} [K]	P_{act} [kW]	η_{MP}	η_{TH}	η_{FM}	ΔS [W/K]	\dot{m}_c/\dot{m}_4 [%]
1736	1.922	67.49	80.41	1418	18934	0.8575	0.8688	0.7259	4987	19.1
1736	1.953	72.47	72.47	1523	20288	0.8993	0.8991	0.8997	1497	0.0

Ohne Kühlung geht der Wirkungsgrad nach oben und ohne Kühlung ergeben sich gleiche Werte für die verschieden definierten Wirkungsgrade (bis auf numerische Fehler).

Zwei weitere Berechnungen wurden mit konstanter Wärmekapazität c_p vorgenommen, was den Rechenaufwand beträchtlich verringert. Dabei wurde c_p so gewählt, dass es der Gaszusammensetzung und der Temperatur im Turbineneintritt entspricht. Durch Vergleich der obigen Tabelle mit Tabelle 3 sieht man, dass ohne Kühlung die Abweichungen zur Berechnung mit variablem c_p zumindest bei einer einstufigen Turbine vernachlässigbar sind; mit Kühlung erhält man vor allem beim Wirkungsgrad signifikante Abweichungen.

Tabelle 3: Berechnung mit $c_p = const$: $c_p = 1340$ J/(kg K), $c_{p,c} = 1105$ J/(kg K)

T_4 [K]	p_4/p_{45}	\dot{m}_4 [kg/s]	\dot{m}_{45} [kg/s]	T_{45} [K]	P_{act} [kW]	η_{MP}	η_{TH}	η_{FM}	ΔS [W/K]	\dot{m}_c/\dot{m}_4 [%]
1736	1.926	67.56	80.49	1399	18748	0.8706	0.8580	0.7353	7200	19.1
1736	1.953	72.26	72.26	1527	20203	0.8991	0.8991	0.8991	1502	0.0

Bild 21 zeigt die Strömungswinkelverteilung der gekühlten FOX-Turbine. Die Turbinenstufe wird axial angeströmt, im Stator wird die Strömung etwas mehr als 60° umgelenkt, um schließlich ihren Drall im Rotor abzugeben. In der Rotorabströmung bleibt ein Restdrall von etwa -20° übrig.

Die Verteilung der statischen Temperatur in der FOX-Turbine ist im Bild 22 dargestellt. Während im Stator die statische Temperatur durch die Beschleunigung der Strömung und durch die Kühlluftzufuhr verringert wird, kommt im Rotor ein Temperaturabbau durch die Arbeitsleistung des Rotors hinzu. Insgesamt ergibt sich ein Temperaturabbau von etwa 300 K in der Turbinenstufe.

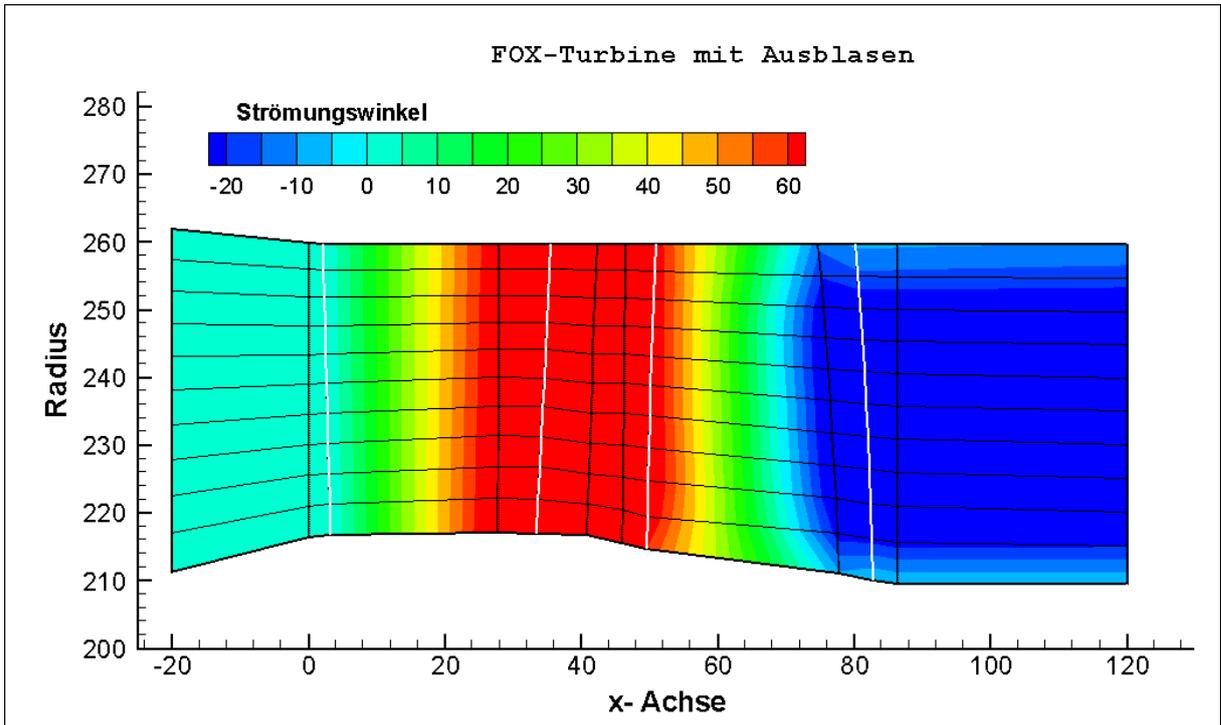


Bild 21: Strömungswinkelverteilung in der FOX-Turbine mit Ausblasen

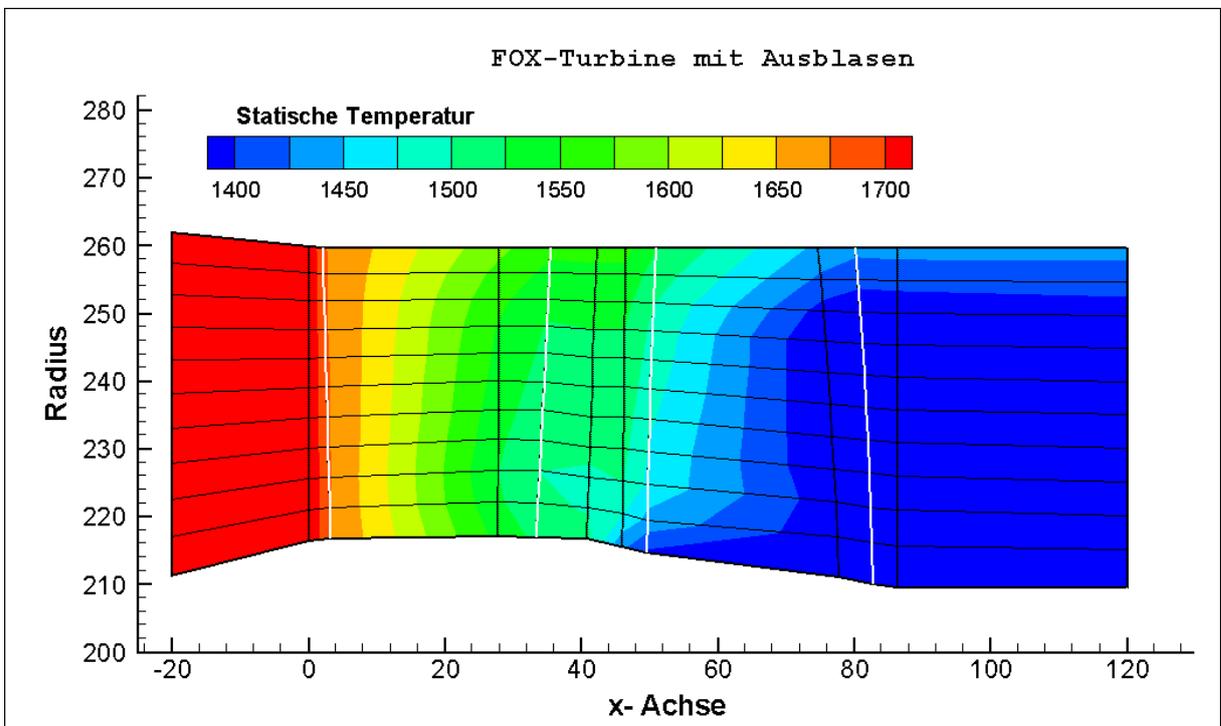


Bild 22: Verteilung der statischen Temperatur in der FOX-Turbine mit Ausblasen

6. Anhang A: Gasdynamik bei variablen Stoffwerten

Zusätzliche Bezeichnungen für diesen Anhang

b, c, d Koeffizienten aus VDI Richtlinie [13] zur Berechnung von Enthalpie und Entropie

Indizes

k Gaskomponente ($x_k =$ molarer Anteil der k -ten Komponente des Gases)

i Indizes der Koeffizienten b, c, d

mix Gasgemisch

Die bekannten Gleichungen der Gasdynamik, wie z.B. der lineare Zusammenhang zwischen Enthalpie und Temperatur oder der Zusammenhang zwischen Druck- und Temperaturverhältnis bei isentroper Strömung ändern sich, wenn man zu variablen Stoffwerten, insbesondere zu variablen Werten der Wärmekapazität c_p übergeht.

6.1 Basisgleichungen

Die spezifische Gaskonstante ist nur eine Funktion der Gaszusammensetzung [13]:

$$R = \frac{R_u}{M_{mix}}, \text{ wobei } M_{mix} \text{ der molaren Masse des Gasgemisches entspricht} \quad (36)$$

Enthalpie:

$$h_1 = \int_{T_{ref}}^{T_1} c_p(T) dT \quad (37)$$

Entropie:

$$s_1 = \int_0^1 ds = \int_{T_{ref}}^{T_1} \frac{c_p(T)}{T} dT - \int_{p_{ref}}^{p_1} \frac{R}{p} dp \quad (38)$$

Berechnungsvorschriften zur Ermittlung thermodynamischer Stoffwerte von Luft und Verbrennungsgasen sind in einer VDI-Richtlinie niedergelegt [13]. Die Berechnung geht davon aus, dass sich feuchte Luft und die üblichen Verbrennungsgase eines Gasturbinenprozesses mit dem Modell des idealen Gases bei variablen Werten der Wärmekapazität und der spezifischen Gaskonstante modellieren lassen [15].

Gemäß der VDI-Richtlinie 4670 werden Enthalpie und Entropie exakt folgendermaßen errechnet:

$$h(T, X) = c_0 + \sum_{i=1}^{10} c_i \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{b_i+1} \quad (39)$$

$$s(T, p, X) = d_0 + \frac{c_1}{T_{ref}} \ln \left(\frac{T}{T_{ref}} \right) - R \ln \left(\frac{p}{p_{ref}} \right) + s_{mix} + \sum_{i=2}^{10} \frac{c_i (b_i + 1)}{T_{ref} \cdot b_i} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{b_i} \quad (40)$$

s_{mix} ist dabei der Entropiezuwachs, welcher allein durch Mischung verschiedener Gaskomponenten entsteht (Beispiel Luft: Allein durch Vorliegen eines Gasgemisches aus den den hauptsächlichen Komponenten Stickstoff, Sauerstoff, Argon und evtl. Wasserdampf entsteht ein Entropieanstieg gegenüber der Entropie der einzelnen Komponenten).

$$s_{mix} = -R \sum_{k=1}^K x_k \ln(x_k) \quad (41)$$

Die Berechnungsvorschrift für c_p ist ähnlich wie Gleichung (39) aufgebaut. Die bisher aufgeführten Gleichungen (37, 38, 39, 40) berücksichtigen allerdings noch keine Dissoziation. Ein Fortran-Programm, welches die Berechnungsgleichungen aus der VDI-Richtlinie codiert, ist in [14] dokumentiert. Dieses Fortran-Programm berücksichtigt auch den Einfluss der Dissoziation (siehe [13]). Die in Bild 23 dargestellten Werte wurden mit dem Fortran-Programm berechnet.

Bei Temperaturen über 1100 K tritt Dissoziation auf, wodurch die Werte auch druckabhängig werden.

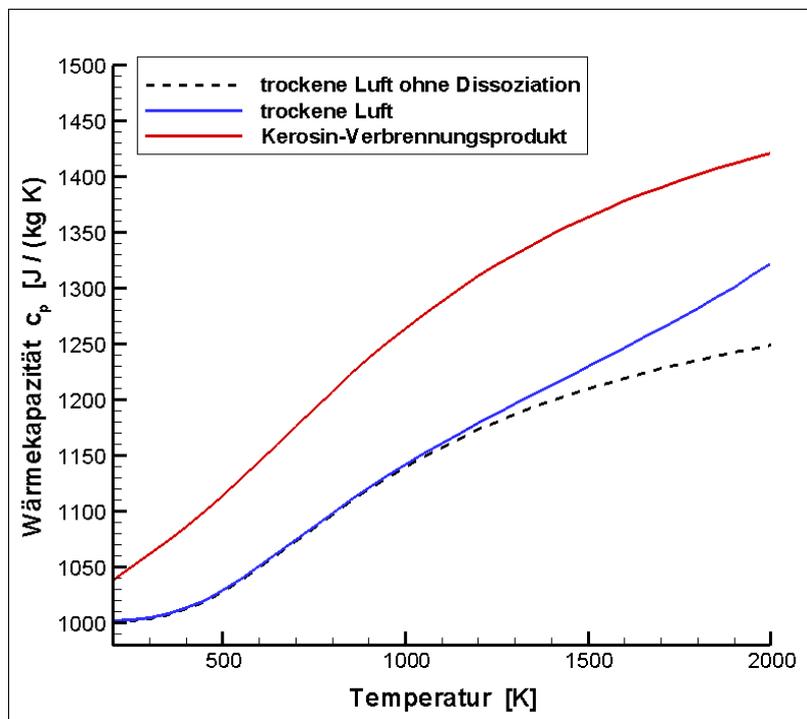


Bild 23: Wärmekapazitätswerte von trockener Luft und Werte eines typischen Verbrennungsgases (Verbrennung von Kerosin mit 10% Luftüberschuss, Druck 1 bar)

Die Gleichungen (39, 40) erlauben die Berechnung von Enthalpie und Entropie aus Temperatur, Druck und Gaszusammensetzung. Umgekehrt ist es auch möglich durch eine numerische Lösung der Gleichung (39) die Temperatur aus der bekannten Enthalpie zu berechnen oder durch eine numerische Lösung der Gleichung (40) den Druck bei bekannter Entropie und Temperatur zu errechnen. Die dazu nötigen numerischen Prozeduren sind in einer Programmsammlung vorhanden. Wenn im folgenden eine exakte Lösung einer gasdynamischen Umrechnung erwähnt wird, dann wurde ein numerisches Verfahren (Iterationsverfahren) aus der Fortran-Programmsammlung [14] benutzt.

Wenn die Wärmekapazität c_p temperatur- und eventuell auch noch druckabhängig ist, dann genügt es meist nicht, ein konstantes c_p , welches einer mittleren Prozesstemperatur entspricht, zu benutzen, da im Turbinenprozess die Temperatur sich stark ändert. Dies gilt insbesondere bei Machzahlen größer 1 (siehe Shapiro [16], Vol. 1, Seite 96,97). Für den Triebwerks-Berechnungsprozess wichtige Größen, wie Enthalpie und Entropie müssen schon ab Temperaturen von 500 K exakt berechnet werden, wenn Wert auf die genaue Bestimmung von Massenfluss, Leistung und Wirkungsgrad gelegt wird. Auch bekannte Gleichungen der Gasdynamik zur Berechnung von Temperatur-, Druck-, Dichteverhältnissen aus der Machzahl (beispielsweise Gleichung (46), welche als zusätzlichen Parameter nur den Isentropenexponenten κ enthalten, müssen genaue genommen durch Iterationsalgorithmen ersetzt werden, weil sie unter der Voraussetzung konstanter Wärmekapazität hergeleitet wurden. Die Berechnungsformel für die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa R T}$ bleibt allerdings gleich, erst bei realen Gasen muss sie abgewandelt werden. Oft ist es allerdings möglich, die bekannten Gleichungen der Gasdynamik beizubehalten, wenn man ein geeignetes stückweise konstantes c_p benutzt. Die Anwendungsgrenzen bekannter gasdynamischer Gleichungen werden im folgenden anhand einiger Beispiele verdeutlicht.

6.2 Gasdynamikgleichungen

6.2.1 Isentropiebeziehung

Will man beispielsweise die Temperatur, T_{2is} ermitteln, die man bei einer isentropen Expansion vom Druck p_1 , Temperatur T_1 auf den Druck p_2 erhält, so benutzt man Gleichung (38) mit $\Delta s = 0$:

$$\int_{T_1}^{T_{2is}} \frac{c_p(T)}{T} dT = \int_{p_1}^{p_2} \frac{R}{p} dp = R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Daraus muss T_{2is} iterativ ermittelt werden, was im Fortran-Programm [14] implementiert ist.

Setzt man dagegen konstante Wärmekapazität voraus ($c_p = const$), so erhält man

$$\int_{T_1}^{T_{2is}} \frac{c_p}{T} dT = c_p \ln \left(\frac{T_{2is}}{T_1} \right) = R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\ln \left(\frac{T_{2is}}{T_1} \right) = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(R/c_p)}$$

schließlich die wohlbekannte Isentropiebeziehung:

$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \quad (42)$$

Wählt man ein stückweise konstantes c_p (und damit auch κ) nach Gleichung (45), so kann man Gleichung (42) für Druckverhältnisse < 2 ohne Bedenken benutzen. Legt man Wert auf hohe Genauigkeit, so sollte man bei höheren Druckverhältnissen die exakte Lösung mit Hilfe eines Iterationsverfahrens bestimmen.

6.2.2 Temperaturverhältnis als Funktion der Machzahl

Man geht von der Erhaltungsgleichung der Enthalpie aus:

$$h_t = h + \frac{v^2}{2} \quad \text{oder} \quad h_t - h = \frac{v^2}{2} \quad (43)$$

Will man daraus bei variabler Wärmekapazität exakt die Temperaturverhältnisse bestimmen, so geht das nur über ein numerisches Verfahren. Eine Näherungslösung, welche bei Machzahlen < 1 befriedigende Ergebnisse liefert, erhält man folgendermaßen:

Nach Gleichung (37) folgt:

$$h_t - h = \int_T^{T_t} c_p(T') dT' = \frac{v^2}{2} = c_{pm} (T_t - T) \quad (44)$$

Die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung (44) gilt dann exakt, wenn man die Konstante c_{pm} so wählt, dass gilt:

$$c_{pm} = \frac{h_t - h}{T_t - T} \quad \text{näherungsweise} \quad c_{pm} \approx \frac{c_p(T_t) + c_p(T)}{2} \quad (45)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} c_{pm} \cdot T_t &= c_{pm} \cdot T + \frac{v^2}{2} \\ \frac{T_t}{T} &= 1 + \frac{v^2}{2c_{pm}T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{v^2}{\kappa RT} \\ \frac{T_t}{T} &= 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2, \quad \text{wobei} \quad \kappa = \frac{c_{pm}}{c_{pm} - R} \end{aligned} \quad (46)$$

Der Fehler, der in den letzten beiden Zeilen steckt, besteht darin, dass die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa RT}$ mit einem κ berechnet werden müsste, welches nicht aus c_{pm} , sondern aus $c_p(T)$, d.h. bei der statischen Temperatur T , berechnet werden müsste. Natürlich gilt die letzte Gleichung exakt, wenn $c_p = const$ ist.

6.2.3 Druckverhältnis als Funktion der Machzahl

Mit Hilfe der Isentropiebeziehung, Gleichung (42), kann man das Temperaturverhältnis in ein Druckverhältnis umformen und erhält damit folgende bekannte Gleichung:

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\kappa/(\kappa-1)}, \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_{pm}}{c_{pm} - R} \quad (47)$$

Da man hierbei Gleichung (42) benutzt, welche für konstante Wärmekapazität hergeleitet wurde, sollte man erwarten, dass Gleichung (47) eine noch schlechtere Näherung als Gleichung (46) darstellt. Dies wurde untersucht, indem man mit Hilfe der Gleichungen (46, 47), nach Umstellung der Gleichungen, die Machzahl aus dem Druckverhältnis p/p_t , bzw. dem Temperaturverhältnis T/T_t berechnet und mit der exakten Lösung verglich. Die Ergebnisse sind in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt.

Bild 24 zeigt die Differenz zwischen exakter und Näherungslösung, wenn man mit stückweise konstantem c_{pm} nach Gleichung (45) rechnet, während für die Ergebnisse in Bild 25 die Wärmekapazität c_p mit der statischen Temperatur T berechnet wurde. Dabei macht es einen Unterschied, ob man Gleichung (46) oder (47) benutzt. Die gestrichelten Kurven in den Bildern sind mit dem Temperaturverhältnis, Gleichung (46), berechnet, die durchgezogenen Linien mit dem Druckverhältnis, Gleichung (47). Generell gilt, dass aus Gleichung (47) die Machzahl mit geringerem Fehler, als aus Gleichung (46) berechnet werden kann, obwohl Gleichung (47) doch aus

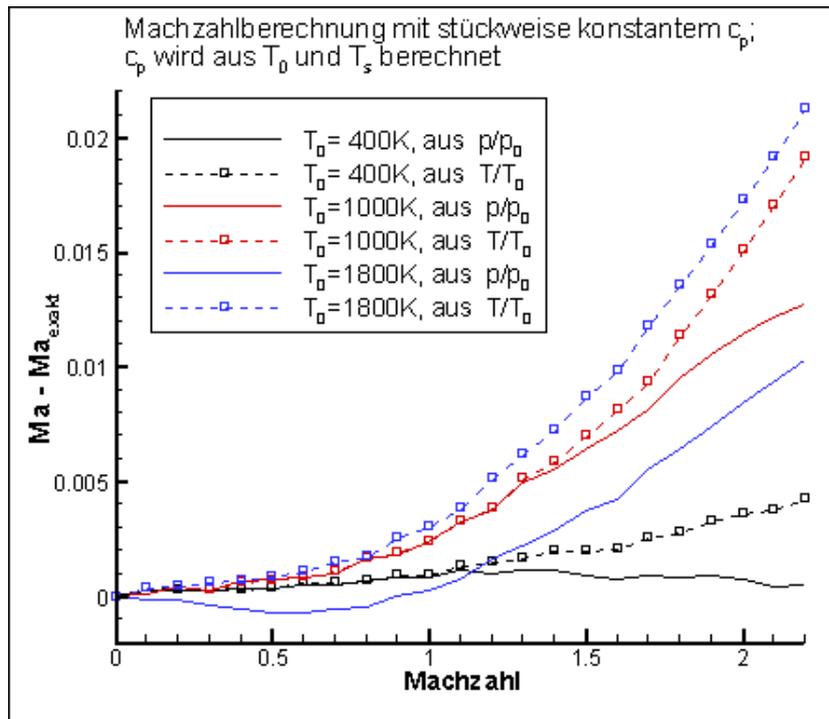


Bild 24: Berechnung der Machzahl aus dem Druck-, bzw. Temperaturverhältnis (Medium: trockene Luft; für jede Machzahl wurde κ mit dem c_{pm} nach Gleichung (45) berechnet)

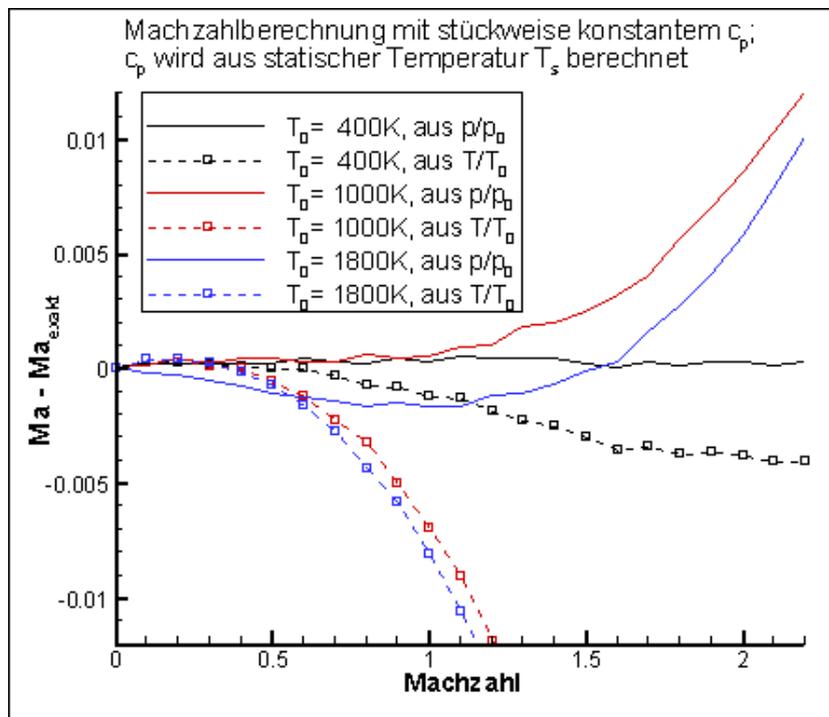


Bild 25: Berechnung der Machzahl aus dem Druck-, bzw. Temperaturverhältnis (Medium: trockene Luft; für alle Machzahlen wurde c_p aus der statischen Temperatur berechnet und daraus dann κ)

(46) hergeleitet wurde, unter Benutzung einer ebenfalls nur näherungsweise gültigen Gleichung. Offensichtlich heben sich hierbei Approximationsfehler gegenseitig auf!

Wählt man ein stückweise konstantes c_p (und damit auch κ), so kann man mit Hilfe der Abbildungen 24, 25 folgende quantitative Fehleraussagen treffen:

- Die Machzahlberechnung aus dem Temperaturverhältnis nach Gleichung (46) sollte man generell vermeiden, außer wenn die Machzahl 0.7 oder die Temperatur $T_t = 500$ K nicht überschritten wird. Dasselbe Argument trifft natürlich auch auf die Umkehrung der Gleichung zu, d.h. auf die Berechnung des Temperaturverhältnisses aus der Machzahl.
- Der *relative* Machzahlfehler bleibt unter 0.5%, sofern man bei der Machzahlberechnung aus dem Druckverhältnis nach Gleichung (47) die Machzahl zwei nicht überschreitet.

6.2.4 Massenstromdichte als Funktion der Machzahl

Die Berechnung des Massenstroms aus der Machzahl kann bei konstantem c_p nach folgender Gleichung vorgenommen werden:

$$\rho v = \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t}} \cdot \frac{p_t \cdot Ma}{\sqrt{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}}} \quad (48)$$

In den Bildern 26, 27 ist der Quotient zwischen exakter und Näherungslösung für die Stromdichte dargestellt, berechnet einmal mit dem näherungsweisen c_p aus Gleichung (45) oder mit der aus der statischen Temperatur berechneten Wärmekapazität. Man kann daraus schließen, dass bei Luft und stückweise konstantem c_p bis zur Machzahl 1.5 die Gleichung (48) eine Bestimmung der Stromdichte auf 0.7% genau zulässt. Bei Temperaturen < 500 K kann nach Gleichung (48) für Machzahlen bis zwei eine Bestimmung der Stromdichte mit einem Fehler $< 0.1\%$ vorgenommen werden.

Im Fall einer gesperrten Strömung ($Ma = 1$) ist die Bestimmung des Massenstroms im engsten Querschnitt einer Schaufelreihe besonders wichtig. In diesem Fall kann man jedoch offensichtlich immer Gleichung (48) benutzen, wenn man einen Fehler bis zu 0.3% tolerieren kann. Auch zur Berechnung einer Unterschall-Machzahl aus der Stromdichte kann man auf Gleichung (48) zurückgreifen und braucht nicht, die mit mehr Rechenaufwand verbundene, exakte Lösung zu suchen.

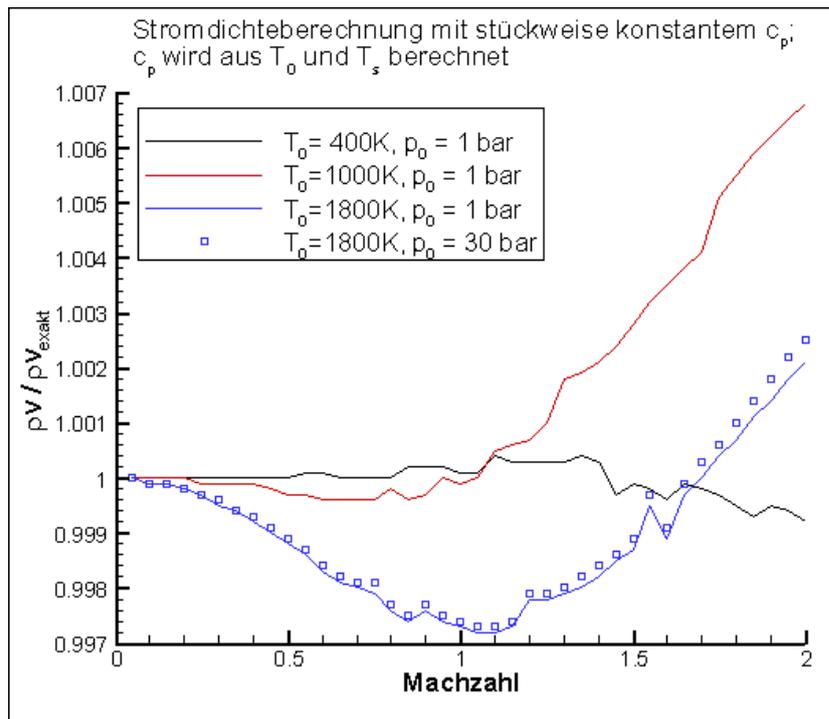


Bild 26: Berechnung der Stromdichte aus der Machzahl nach Gleichung (48); Medium: trockene Luft; für jede Machzahl wurde κ mit dem c_p (Näherungswert) nach Gleichung (45) gebildet.

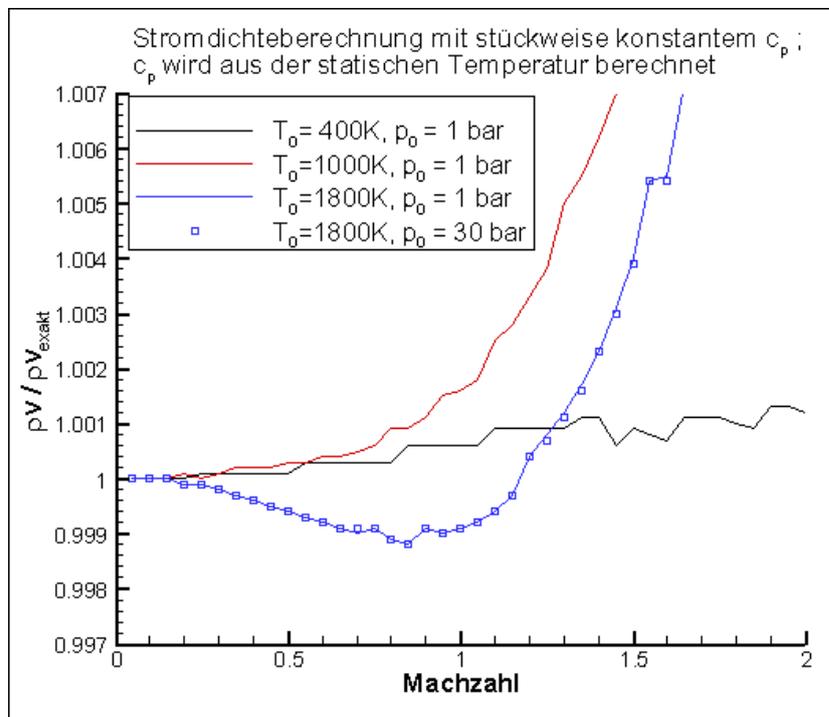


Bild 27: Berechnung der Stromdichte aus der Machzahl nach Gleichung (48); Medium: trockene Luft; für jede Machzahl wurde κ mit dem c_p berechnet, welches aus der statischen Temperatur T abgeleitet wurde.

7. Anhang B: Wirkungsgrad

Während die Definition des Wirkungsgrades einer ungekühlten Turbine unstrittig ist, kann man jede Menge unterschiedlicher Definitionen finden, wenn es um Turbinen mit Kühlluftausblasung geht. Im folgenden halte ich mich hauptsächlich an die Definitionen von Young und Horlock [20], aber für die grundsätzliche Diskussion der Wirkungsgrade bei Kühlluftausblasung und für einzelne Gleichungen sind weitere, im Literaturverzeichnis aufgeführte Autoren [17, 18, 19, 21], wichtig und nützlich. Einzelne Gleichungen wurden umformuliert, so dass sie im Stromlinienkrümmungsverfahren angewendet werden können.

Da hier eine variable Wärmekapazität c_p des Fluids zugelassen ist, muss der funktionelle Zusammenhang von c_p , H , s mit T und p bekannt sein. Dieser funktionelle Zusammenhang wurde einer VDI-Richtlinie [13] entnommen und ist als Fortran-Programm verfügbar [14].

Abweichende Bezeichnungen für diesen Anhang

p	Totaldruck
T	Totaltemperatur

7.1 Grundgleichungen

Das Gas sei semi-perfekt, d.h. das Gas gehorcht den idealen Gasgleichungen, aber die Wärmekapazität des Gases ist variabel (hauptsächlich von der Temperatur und der Gaszusammensetzung abhängig).

Enthalpie:

$$H(T_0) = \int_{T_{ref}}^{T_0} c_p(T) dT \quad (49)$$

Spezifische Entropie bei gleichbleibender chemischer Zusammensetzung:

$$s(T_0, p_0) = \int_{T_{ref}}^{T_0} \frac{c_p(T)}{T} dT - \int_{p_{ref}}^{p_0} \frac{R}{p} dp \quad (50)$$

Leistung:

$$P = \dot{m} \cdot \Delta H \quad (51)$$

Entropieänderung von Station 4 nach 45:

$$\Delta S = \int_4^{45} dS = \dot{m} (s(T_{45}, p_{45}) - s(T_4, p_4)) \quad (52)$$

Aktuelle Leistung des Turbinenrotors:

$$P_{act} = \frac{2\pi N}{60} \cdot Tq = \dot{m} \cdot (H(T_{45}) - H(T_4)) \quad (53)$$

Bei Messungen wird oft das Drehmoment mitgemessen, dann kann mit Hilfe des linken Teils der Gleichung die aktuelle Leistung genau bestimmt werden. Bei nahezu allen Rechenverfahren wird der rechte Teil der Gleichung benutzt, weil nur die Temperaturen bekannt sind. In diesem Fall muss auch die Kühlluftzufuhr genau bilanziert werden, um die aktuelle Leistung zu erhalten.

Ideale Turbinenleistung:

$$P_{ideal} = P_{is} = \dot{m} \cdot \int_{T_4}^{T_{45,is}} c_p(T) dT \quad (54)$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{act}}{P_{ideal}} \quad (55)$$

7.2 Ungekühlte Turbine

Massenflüsse:

$$\dot{m}_c = 0 ; \dot{m}_4 = \dot{m}_{45} \quad (56)$$

Entropieänderung:

$$\Delta S = \int_4^{45} dS = \dot{m}_4 \left(\int_4^{45} \frac{c_p(T)}{T} dT - \int_4^{45} \frac{R}{p} dp \right) \quad (57)$$

Ideale Turbinenarbeit:

$$P_{ideal} = P_{is} = \dot{m}_4 \cdot \int_{T_4}^{T_{45,is}} c_p(T) dT \quad (58)$$

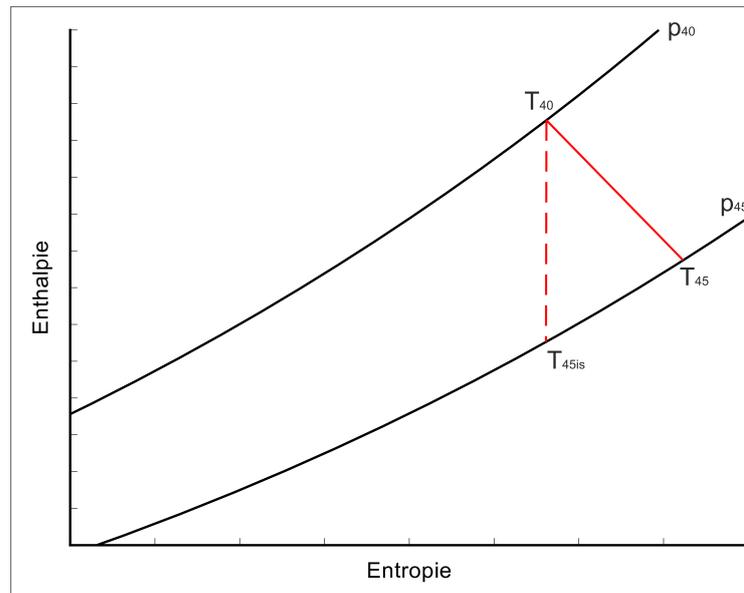


Bild 28: Enthalpie-Entropie-Diagramm für eine ungekühlte Turbine

Die noch unbekannte isentrope Temperatur $T_{45,is}$ kann aus der Bedingung berechnet werden, dass die Expansion von Station 4 nach Station 45 isentrop ist, d.h. $\Delta S = 0$. Aus Gleichung(57) folgt:

$$\int_{T_4}^{T_{45,is}} \frac{c_p(T)}{T} dT = \int_{p_4}^{p_{45}} \frac{R}{p} dp = R \ln \left(\frac{p_{45}}{p_4} \right) \quad (59)$$

Das Integral in der obigen Gleichung kann analytisch berechnet werden, wenn $c_p(T)$ eine rationale Funktion in T ist. Die Unbekannte $T_{45,is}$ kann mit Hilfe dieser Gleichung auf jeden Fall numerisch (Nullstellenbestimmung) berechnet werden.

$T_{45, is}$ wird dann in Gleichung (58) eingesetzt. Dieses Integral kann auch analytisch gelöst werden, wenn $c_p(T)$ eine rationale Funktion ist und schließlich kann η bestimmt werden ohne Gebrauch von κ .

Spezialfall: Spezifische Wärme ist konstant

Im Fall $c_p = const$ können die Integrale wesentlich leichter gelöst werden. Die isentrope Temperatur $T_{45, is}$ kann aus Gleichung (42) berechnet werden.

Enthalpie:

$$H = \int_{T_4}^{T_{45}} c_p dT = c_p (T_{45} - T_4) \quad (60)$$

Ideale Enthalpiedifferenz über der Turbine:

$$H_{ideal} = H_{is} = \int_{T_4}^{T_{45, is}} c_p dT = c_p (T_{45, is} - T_4) \quad (61)$$

7.3 Turbine mit Kühlluftausblasung

Um die ideale Arbeit der Turbine und die Entropieänderung über die Turbine zu bestimmen, muss der Beitrag der Hauptströmung und der Kühlluft berücksichtigt werden.

7.3.1 Basis

Bei einem Rotor wird die eintretende Kühlluft vom Rotor mitgenommen, d.h. sie gewinnt Drehenergie und damit Enthalpie auf Kosten des Rotors. Dieser Anteil wird am Ende, für jeden Rotor getrennt, aufaddiert.

$$\text{Pumpleistung des Rotors } i: P_{p,i} = \sum_j \dot{m}_{c,ij} \cdot \frac{(\omega_i r_j)^2}{2} \quad (62)$$

Dabei wird Summation über alle Kühlluftöffnungen eines Rotors ausgeführt. Im Stromlinienkrümmungsverfahren wird in jedem Rotor die Enthalpie der Rotorkühlluft um die Pumpleistung erhöht [2]. Die Summe aller Pumpleistungen muss am Ende bei der Berechnung der aus Temperaturen bzw. Enthalpien berechneten Rotorleistung wieder abgezogen werden. Eine durch Messung von Drehmoment und Drehzahl ermittelte Rotorleistung ist von vornherein um die Pumpleistung verringert.

Die aktuelle Leistung des Rotors i kann dann folgendermaßen berechnet werden (beachte: Turbinenleistungen haben negatives Vorzeichen):

$$P_i = \dot{m}_{out,i} \cdot H_{out,i} + P_{p,i} - \dot{m}_{in,i} \cdot H_{in,i} - \sum_j (\dot{m}_{c,ij} \cdot H_{c,ij}) \quad (63)$$

Die Indizes in bzw. out bezeichnen hier den Rotoreintritt bzw. -austritt. Der letzte Term in Gleichung (63) ist die Summe der Kühlluftenthalpien, die im Rotor ausgeblasen werden. Die Pumpleistung, welche im Rechenverfahren zur Kühlluftenthalpie $H_{c,ij}$ hinzugefügt wurde, wird in Gleichung (63) durch den Term $P_{p,i}$ wieder kompensiert, insofern würde sich der Wert von

P_i nicht ändern, wenn man im Rechenverfahren und in obiger Gleichung die Pumpleistung ignorieren würde; oder anders ausgedrückt: wenn man die Pumpleistung im Rechenverfahren nicht berücksichtigt, darf man es auch nicht in Gleichung (63).

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{act}}{P_{ideal}} = \frac{\sum_i P_i}{P_{ideal}} \quad (64)$$

Bis hierher herrscht allgemeine Übereinstimmung in der Literatur. Die voneinander abweichenden Definitionen des Wirkungsgrades beruhen auf verschiedenen Definitionen der idealen Leistung bei Kühlluftausblasung.

7.3.2 Isobare Mischung vor der Expansion auf den Abströmdruck

Diese Art der Wirkungsgradberechnung ist die am weitesten verbreitete und wird von Young und Horlock [20] als „Mainstream-Pressure Mixed Efficiency“ (Index MP) bezeichnet. Dieser Wirkungsgrad wird am ausführlichsten von Kurzke [19] beschrieben und die folgende Darstellung folgt seinem Beispiel.

Einstufig gekühlte Turbine

T_{41} sei die Totaltemperatur unmittelbar am Eintritt des ersten Rotors, dem entspricht die Totalenthalpie H_{41} . Die Enthalpie H_{41} geht aus der Mischung der Enthalpie der Zuströmung, H_4 , mit der Kühlluft im HD-Stator hervor.

$$H_{41} = \frac{\dot{m}_4 \cdot H_4 + \sum_j \dot{m}_{c,j} \cdot H_{c,j}}{\dot{m}_4 + \sum_j \dot{m}_{c,j}} \quad (65)$$

Die Summation mit dem Index j erstreckt sich über alle Ausblasestellen im HD-Stator. Folglich gehen bei der Berechnung von T_{41} die Beiträge der Leckageluft vor dem Rotor und die Rotorkühlluft selbst nicht ein! Die Rotorkühlluft und die Leckageluft werden als parasitäre Strömungen angesehen, welche nicht in der Lage sind, Arbeit zu leisten (andere Autoren sind allerdings der Meinung, dass die Rotorkühlluft berücksichtigt werden sollte [20]). Weiterhin soll der durch Gleichung (65) definierte Mischungsprozess isobar ablaufen, so dass der Totaldruck $p_{41} = p_4$ ist.

Vom Druckniveau p_4 und dem Temperaturniveau T_{41} ausgehend wird nun eine isentrope Expansion auf den Austritts-Totaldruck p_{45} gestartet, um die isentrope Temperatur $T_{45,is}$ zu erhalten. Mit Hilfe der Gleichung (59) lässt sich $T_{45,is}$ bestimmen, bzw. bei konstanter Wärmekapazität erhält man $T_{45,is}$ aus:

$$\frac{T_{45,is}}{T_{41}} = \left(\frac{p_{45}}{p_4} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \quad (66)$$

Die ideale Turbinenleistung erhält man wie im ungekühlten Fall aus folgender Gleichung:

$$P_{ideal} = \dot{m}_{41} \cdot \int_{T_{41}}^{T_{45,is}} c_p(T) dT \quad (67)$$

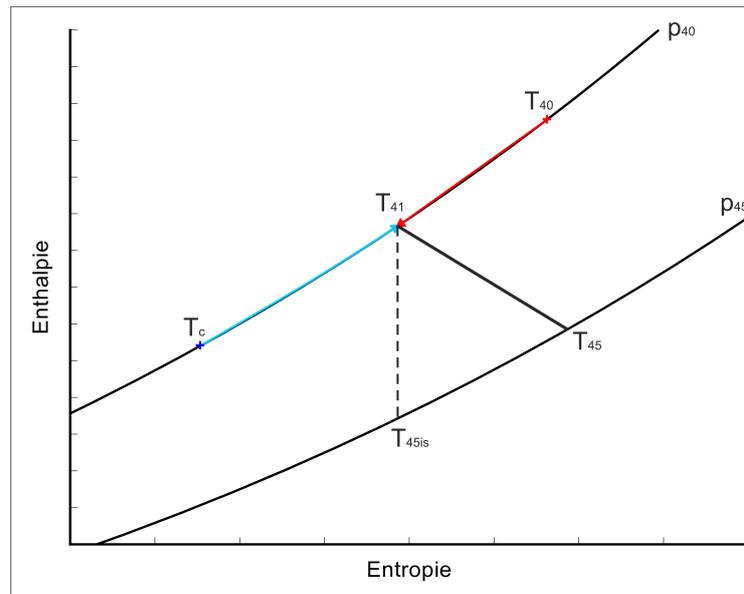


Bild 29: Isobare Mischung von Hauptströmung und Kühlluft am Statoraustritt im Enthalpie-Entropie-Diagramm für eine Turbine mit gekühlter erster Stufe

Zwei- und mehrstufige Turbinen

Bei einer mehrstufigen Turbine wird zunächst die ideale Leistung der ersten Stufe wie im vorhergehenden Abschnitt ermittelt. Ist die Kühlung der mehrstufigen Turbine auf die erste Stufe beschränkt, dann sind die Gleichungen des vorhergehenden Abschnittes zutreffend und es müssen keine weiteren Terme hinzugefügt werden.

Bei Vorhandensein einer zweiten gekühlten Stufe müssen die restlichen Kühlluftströme, die im vorhergehenden Abschnitt nicht in die Berechnung eingeschlossen wurden, ebenfalls berücksichtigt werden.

Wie aus Bild 30 hervorgeht, werden jetzt die Kühlluftströme und -enthalpien von Rotor 1 bis zum Austritt von Stator 2 (Station 421 in Bild 30) aufsummiert und die Kühlluftenthalpien mit dem Hauptmassenstrom vom Rotorausritt vermischt. In einem Rechenverfahren wird die Mischung der Enthalpien üblicherweise schon vom Verfahren selbst geleistet, so dass man nur zur Station 421 gehen muss und die dort vorliegenden Größen nehmen kann. Die Kühlluft von Rotor 2 wird nicht berücksichtigt.

Vom Totaldruckniveau am Eintritt des zweiten Stators, p_{42} , und dem Temperaturniveau T_{421} ausgehend, wird nun eine weitere isentrope Expansion auf den Austritts-Totaldruck p_{45} gestartet, um die isentrope Temperatur für diesen Anteil der Turbinenströmung zu erhalten. Diese zweite isentrope Temperatur wird hier, wie im Bild 30, mit $T_{R2,is}$ bezeichnet.

Die ideale Turbinenleistung erhält man für die Turbine mit zwei gekühlten Stufen aus folgender Gleichung:

$$P_{ideal} = \dot{m}_{41} \cdot \int_{T_{41}}^{T_{45,is}} c_p(T) dT + (\dot{m}_{421} - \dot{m}_{41}) \cdot \int_{T_{421}}^{T_{R2,is}} c_p(T) dT \quad (68)$$

Das erste Integral in Gleichung 68 wird in Bild 30 mit ΔH_{1is} bezeichnet, das zweite Integral wird in Bild 30 mit ΔH_{2is} bezeichnet. Wie man sieht wird nur der über \dot{m}_{41} hinausgehende

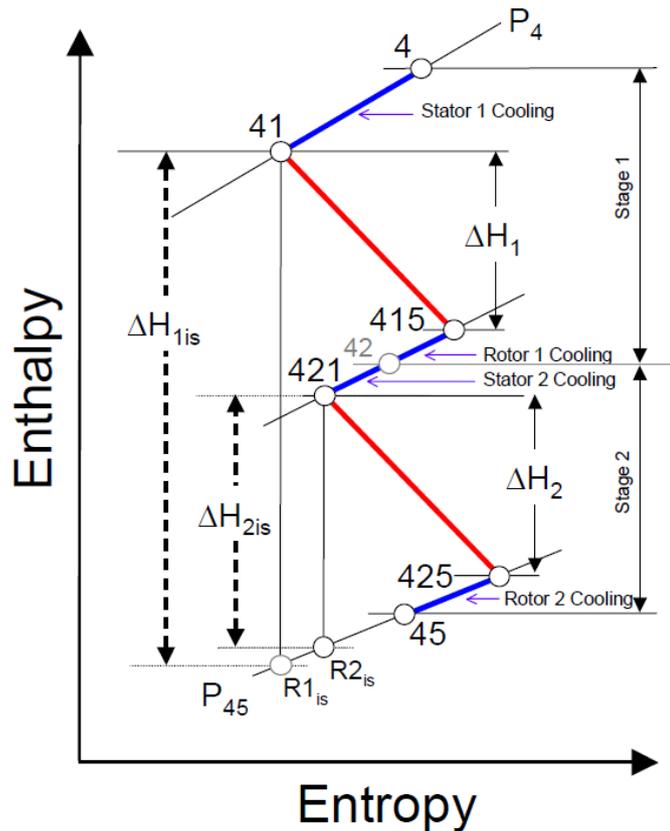


Bild 30: Enthalpie-Entropie-Diagramm für eine zweistufige gekühlte Turbine (aus [19])

Massenstrom multipliziert mit der zugehörigen idealen Enthalpie zu P_{ideal} von Gleichung 67 dazu addiert.

Weitere gekühlte Stufen werden in analoger Weise behandelt.

7.3.3 Getrennte Expansion aller Teilströme

Dabei werden die Hauptströmung und alle Kühlluftströme jeweils getrennt, von ihrem Ausgangszustand (p, T) auf den Enddruck p_{45} entspannt. Man erhält für jeden Teilstrom eine individuelle isentrope Temperatur T_{is} und benutzt diese, um den Anteil jedes Teilstroms an der idealen Turbinenleistung zu berechnen. Diese Art der Wirkungsgradberechnung wird von Young und Horlock [20] als „Hartsel efficiency“ bezeichnet, während Kurzke [19] ihn „Thermodynamic efficiency“ nennt. In Anlehnung an Kurzke kennzeichne ich diesen Wirkungsgrad mit dem Index TH.

Die Berechnung von $T_{45, is}$ für die Hauptströmung wird unter Benutzung von Gleichung (59) vorgenommen.

Die Berechnung von $T_{c, j, is}$ für eine beliebige Kühlluftströmung mit dem Index j wird unter Benutzung der folgenden Gleichung durchgeführt:

$$\int_{T_{c, j}}^{T_{c, j, is}} \frac{c_{p, c}(T)}{T} dT = R_{c, j} \ln \left(\frac{p_{45}}{p_{c, j}} \right) \quad (69)$$

Die Kühllufttemperatur $T_{c, j}$, wie auch der Druck $p_{c, j}$, sind Kühlluftgrößen am Turbineneintritt,

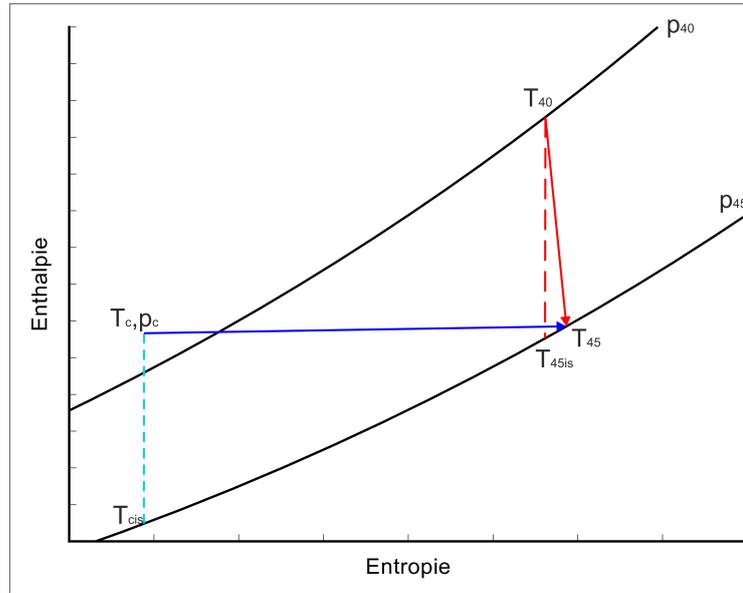


Bild 31: Die Hauptströmung und jeder einzelne Kühlluftstrahl wird isentrop auf den Abströmdruck expandiert

sie beinhalten folglich auch beim Rotor keine Pumparbeit. Deshalb darf die Pumparbeit in der nachfolgenden Gleichung auch nicht berücksichtigt werden.

Als ideale Leistung ergibt sich:

$$P_{ideal} = \dot{m}_4 \cdot \int_{T_4}^{T_{45, is}} c_p(T) dT + \sum_j \left(\dot{m}_{c,j} \cdot \int_{T_{c,j}}^{T_{c,j, is}} c_{p,c}(T) dT \right) \quad (70)$$

7.3.4 Gemeinsame Expansion von Hauptströmung und Kühlluft

Die Hauptströmung und alle Kühlluftströme werden gemeinsam, von ihrem Ausgangszustand (p, T) auf den Enddruck p_{45} entspannt. Man postuliert für die ideale, ausgemischte Strömung am Turbinenausstritt nicht nur einen gemeinsamen Totaldruck, p_{45} , sondern auch eine gemeinsame isentrope Temperatur $T_{45, is}$. Diese Art der Wirkungsgradberechnung wird von Young und Horlock [20], ebenso wie von Lim et al. [21] als „Fully Reversible Mixed Efficiency“ bezeichnet. $T_{45, is}$ wird aus der Entropiebilanz ermittelt: die Summe der zugeführten Entropie ist gleich der Summe der abströmenden Entropie.

Die Entropieänderung aus der gemeinsamen Expansion aller Teilströme wird ganz allgemein durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\Delta S = \dot{m}_{45} s(T_{45}, p_{45}, X_{45}) - \dot{m}_4 s(T_4, p_4, X_4) - \sum_j \dot{m}_{c,j} s(T_{c,j}, p_{c,j}, X_{c,j}) \quad (71)$$

Die Berechnung der Entropie nach VDI-Richtlinie 4670 [13] beinhaltet auch den Entropiezuwachs, welcher allein durch Vermischung verschiedener Gase entsteht; d.h. allein dadurch, dass die Zusammensetzung X_4 von der Zusammensetzung X_c abweicht, wird ein Entropiezuwachs hervorgerufen. Dieser Entropiezuwachs durch Mischung wird hier gemäß Young und Wilcock

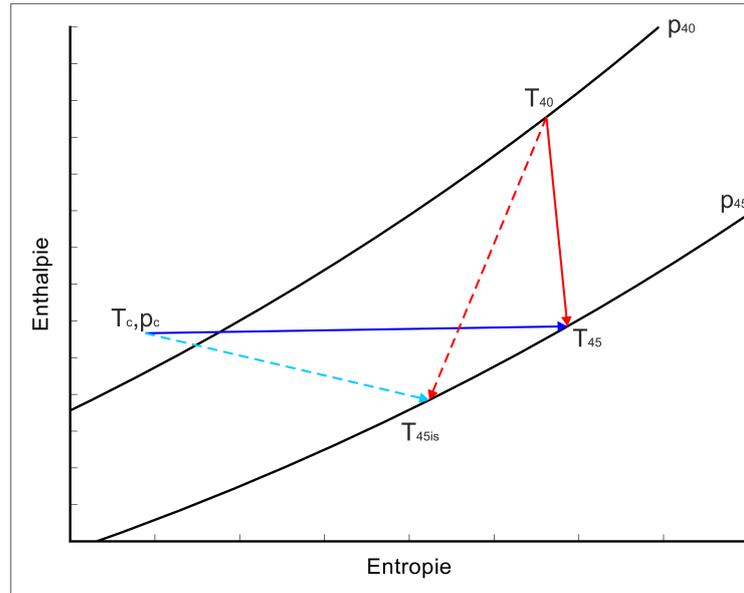


Bild 32: Die Hauptströmung und die Kühlluft werden gemeinsam auf den Abströmdruck und eine gemeinsame isentrope Temperatur am Turbinenausstritt expandiert

[17] mit ΔS_{mix} bezeichnet und nach [13] folgendermaßen berechnet:

$$\Delta S_{mix} = \sum_{k=1}^K \left(\dot{m}_{45} R_{45} x_{k,45} \ln x_{k,45} - \dot{m}_4 R_4 x_{k,4} \ln x_{k,4} - \sum_j \dot{m}_{c,j} R_{c,j} x_{k,c,j} \ln(x_{k,c,j}) \right) \quad (72)$$

Im allgemeinen Fall der variablen Wärmekapazität wird man die unbekannte Temperatur $T_{45,is}$ aus der Gleichung (71) numerisch berechnen. Da die Expansion isentrop verlaufen soll, wird in Gleichung (71) $\Delta S = 0$ gesetzt. Die isentrope Temperatur $T_{45,is}$ kann numerisch ermittelt werden. Nach Einsetzen von $T_{45,is}$ in Gleichung (78), erhält man aus Gleichung (64) einen Wirkungsgrad mit Berücksichtigung der Mischungsentropie, welcher im folgenden den Index FM erhalten soll. Der Wirkungsgrad η_{FM} kann nur bei Berechnung mit variabler Wärmekapazität ermittelt werden.

Vernachlässigt man diese Mischungsentropie, weil sie im Turbinenprozess als unvermeidbar angesehen wird [17, 20], dann bedeutet das, dass der ideale Turbinenprozess nicht mehr exakt isentrop ist, sondern genau diese Mischungsentropie ΔS_{mix} nach Gleichung (72) bleibt als Entropieanstieg im „idealen“ Turbinenprozess übrig, welcher im folgenden den Index FR (wie bei [20]) erhalten soll:

$$0 = \dot{m}_{45} s(T_{45}, p_{45}, X_{45}) - \dot{m}_4 s(T_4, p_4, X_4) - \sum_j \dot{m}_{c,j} s(T_{c,j}, p_{c,j}, X_{c,j}) - \Delta S_{mix} \quad (73)$$

Im Fall der variablen Wärmekapazität wird man die gesuchte Temperatur $T_{45,is}$ aus der Gleichung (73) numerisch berechnen und damit schließlich den Wirkungsgrad η_{FR} .

Die Gleichung (73) ist gemäß [13] äquivalent zu folgender Gleichung:

$$0 = \dot{m}_4 \left(\int_4^{45} \frac{c_p(T)}{T} dT - R \ln \frac{p_{45}}{p_4} \right) + \sum_j \dot{m}_{c,j} \left(\int_{c,j}^{45} \frac{c_{p,c}(T)}{T} dT - \int_{c,j}^{45} \frac{R_{c,j}}{p} dp \right) \quad (74)$$

Da die Expansion isentrop verlaufen soll, muss $\Delta S = 0$ (linke Seite der Gleichung gleich Null) sein. Es wird aber nicht, wie in Abschnitt 7.3.3, gefordert, dass jeder einzelne Summand der Gleichung (74) zu Null werden soll. Im Fall konstanter Wärmekapazität, wobei das c_p der Hauptströmung nicht unbedingt mit dem $c_{p,c}$ der Kühlluft übereinstimmen muss, kann man an Gleichung (74) Vereinfachungen vornehmen, die schließlich zu einer analytischen Lösung führen. Umgestellt ergibt sich als neue Gleichung:

$$\dot{m}_4 \int_{T_4}^{T_{45, is}} \frac{c_p(T)}{T} dT + \sum_j \dot{m}_{c,j} \int_{T_{c,j}}^{T_{45, is}} \frac{c_{p,c}(T)}{T} dT = \dot{m}_4 R \ln \frac{p_{45}}{p_4} + \sum_j \dot{m}_{c,j} R_{c,j} \ln \frac{p_{45}}{p_{c,j}} \quad (75)$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung (75) ist jetzt schon lösbar und bleibt sowieso unverändert, deshalb wird die rechte Seite im folgenden einfach mit RS bezeichnet.

$$\dot{m}_4 c_p \ln \left(\frac{T_{45, is}}{T_{ref}} \cdot \frac{T_{ref}}{T_4} \right) + \sum_j \dot{m}_{c,j} c_{p,c} \ln \left(\frac{T_{45, is}}{T_{ref}} \cdot \frac{T_{ref}}{T_{c,j}} \right) = RS \quad (76)$$

$$\ln \frac{T_{45, is}}{T_{ref}} \cdot \left(\dot{m}_4 c_p + \sum_j \dot{m}_{c,j} c_{p,c} \right) = RS - \left(\dot{m}_4 c_p \ln \frac{T_{ref}}{T_4} + \sum_j \dot{m}_{c,j} c_{p,c} \ln \frac{T_{ref}}{T_{c,j}} \right) \quad (77)$$

Hiermit ist $T_{45, is}$ auf der linken Seite isoliert, alle anderen Größen sind bekannt, somit kann $T_{45, is}$ im Fall konstanter Wärmekapazität analytisch bestimmt werden.

Als ideale Leistung ergibt sich:

$$P_{ideal} = \dot{m}_4 \cdot \int_{T_4}^{T_{45, is}} c_p(T) dT + \sum_j \left(\dot{m}_{c,j} \cdot \int_{T_{c,j}}^{T_{45, is}} c_{p,c}(T) dT \right) \quad (78)$$

7.4 Beispielrechnung und Diskussion

Die angeführten Wirkungsgrade wurden in das Stromlinienkrümmungsverfahren eingebaut und ein paar Beispiele für die „FOX-Turbine“ berechnet. Die Parameter der Berechnung und die hauptsächlichen Ergebnisse sind in Abschnitt 5.2 aufgeführt. Zusätzlich ist hier auch ein Ergebnis bei veränderter Zuströmtemperatur aufgeführt.

Alle Werte wurden streng mit variabler Wärmekapazität und unter Berücksichtigung der Gaszusammensetzung aus Abschnitt 5.2 ermittelt.

Tabelle 4: FOX-Turbine mit Kühlung

T_4 [K]	p_4/p_{45}	\dot{m}_4 [kg/s]	\dot{m}_{45} [kg/s]	T_{45} [K]	P_{act} [kW]	η_{MP}	η_{TH}	η_{FM}	ΔS [W/K]	\dot{m}_c/\dot{m}_4 [%]
1736	1.922	67.49	80.41	1418	18934	0.8575	0.8688	0.7259	4987	19.1

ΔS ist der Entropiezuwachs über der Turbine und wurde gemäß Gleichung (71) berechnet.

Ohne Kühlung (Tabelle 5) geht der Wirkungsgrad nach oben und selbstverständlich ergeben sich ohne Kühlung gleiche Werte für die verschiedenen definierten Wirkungsgrade (bis auf numerische Fehler). Die Zuströmtemperatur der zweiten Zeile in der Tabelle ohne Kühlung wurde so gewählt, dass man die gleiche wahre Leistung der Turbine, P_{act} , und den in etwa gleichen Massenstrom

Tabelle 5: FOX-Turbine ohne Kühlung

T_4 [K]	p_4/p_{45}	\dot{m}_4 [kg/s]	\dot{m}_{45} [kg/s]	T_{45} [K]	P_{act} [kW]	η_{MP}	η_{TH}	η_{FM}	ΔS [W/K]	\dot{m}_c/\dot{m}_4 [%]
1736	1.953	72.47	72.47	1523	20288	0.8993	0.8991	0.8997	1497	0.0
1453	1.975	79.03	79.03	1264	18932	0.9089	0.9087	0.9088	1511	0.0

am Verdichteraustritt, wie im Fall der Kühlung (Tabelle 4) erhält. Man erkennt, dass man ohne Kühlung, bei gleicher Verdichter- und Turbinenleistung, eine wesentlich geringere Brennstoffmenge (Turbineneintrittstemperatur) benötigt; weiterhin ist der Entropiezuwachs, ΔS , mit Kühlung wesentlich größer als ohne. Die hier betrachtete Hochdruckturbinenstufe ist allerdings nur ein Teil der gesamten Turbinenstufe einer Gasturbine und „Die Effekte der Schaufelkühlung können nicht korrekt bewertet werden ohne Betrachtung des Gasturbinen-Kreislaufs als Ganzes“ [17].

Wie man sieht, ergeben sich für η_{FM} die geringsten Werte des Turbinen-Wirkungsgrades, dies erklärt die Unbeliebtheit dieser Definition. Meiner Meinung nach, steht nur der Wirkungsgrad 'FM' aus Abschnitt 7.3.4 auf einer wohldefinierten thermodynamischen Grundlage. Die getrennte Expansion aller Teilströme (Wirkungsgrad η_{TH}) aus Abschnitt 7.3.3 bedeutet, dass die Kühlluft für sich allein auf den Abströmdruck expandiert und dabei notwendigerweise noch kälter werden muss. Das macht keinen Sinn, da die Kühlluft explizit dafür gedacht ist, Wärme aus der Hauptströmung zu übernehmen und auch die Mischung mit der Hauptströmung ist im Endeffekt nicht zu vermeiden. Der Turbinenwirkungsgrad 'FM' ermöglicht einen konsistenten Vergleich von Turbinen mit mehreren gekühlten Stufen und mit Hilfe des so definierten Wirkungsgrades kann man auch Verlustmechanismen identifizieren [20].

Der Unterschied zwischen den Turbinenwirkungsgraden 'FM' und 'FR' liegt in der Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung der Mischungsentropie (Gleichung 72), wie oben erwähnt. Die Turbinenwirkungsgrade 'FM' und 'FR' kann man allerdings nicht so einfach in ein Auslegungsprogramm für die Thermodynamik einer gesamten Gasturbine einbauen, weil man dazu relativ detaillierte Kenntnisse der Kühlluftgrößen braucht.

Der Wirkungsgrad 'MP' aus Abschnitt 7.3.2 ist, wie η_{TH} , thermodynamisch ebenfalls wenig begründet, der Totaldruck und die kinetische Energie der Kühlluftströmung bleiben unberücksichtigt, insbesondere die Vernachlässigung der Rotorkühlluft ist sehr fragwürdig. Man kann allerdings zumindest einen Teil der Rotorkühlluft bei der Berechnung von H_{41} nach Gleichung (65) einbeziehen, so dass dieser Nachteil etwas gemildert wird. Wenn man allerdings einen dieser Wirkungsgrade (z.B. η_{MP}) durch Messung oder einer zuverlässigen numerischen Berechnung ermittelt hat, dann ist er für die jeweilige Turbinenstufe so gültig, wie jeder andere, man muss ihn nur gemäß seiner eingeschränkten Definition verwenden, d.h. der Wert von η_{MP} ist schon bei einer Änderung der Rotorkühl- und -leckageluft nicht mehr gültig, sondern muss bei den geänderten Randbedingungen neu ermittelt werden. Der Wirkungsgrad 'MP' bietet vor allem den Vorteil der Einfachheit, weil die Definition von P_{ideal} sich bei nur einer gekühlten Turbinenstufe nicht von der Definition der ungekühlten Turbinenstufe unterscheidet, mit dem einzigen Unterschied der Eintrittstemperatur. Dieser Wirkungsgrad lässt sich deshalb besonders einfach in ein Thermodynamik-Berechnungsprogramm einer gesamten Gasturbine oder eines Triebwerks einbauen. Im Abschnitt 7.5.2 wird gezeigt, wie eine Turbinen-Wirkungsgraddefinition vom Typ 'MP' bei der vereinfachten Berechnung eines realen gekühlten Gasturbinenprozesses verwendet werden kann und so die Ableitung einer analytischen Gleichung für den thermodynamischen Gasturbinenwirkungsgrad ermöglicht.

7.5 Gasturbinenprozess

7.5.1 Wirkungsgrad des idealen Gasturbinenprozesses

Im folgenden Diagramm ist ein idealer Gasturbinenprozess abgebildet. Dabei stellt der Kreisprozess aus den Punkten 2 → 3 → 4 → 5 einen Prozess mit ungekühlter Turbine dar, der Kreisprozess aus den Punkten 2 → 3 → 4 → 4a → 5a einen Prozess mit gekühlter Turbine.

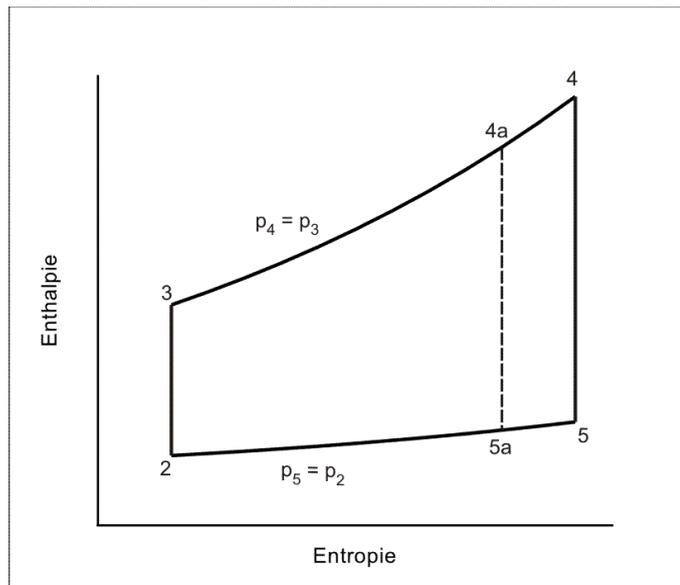


Bild 33: Enthalpie-Entropie-Diagramm für einen idealen Gasturbinenprozess

Im Fall der gekühlten Turbine wird die Kühlluft nach Austritt aus der Brennkammer (Punkt 4) im Turbinenstator isobar zugemischt und deshalb wird die Gastemperatur im Kreisprozess auf den Punkt 4a zurückgesetzt (Mischung nach Gleichung (65)). Bei einem idealen Gasturbinenprozess ist der Wirkungsgrad von gekühltem und ungekühltem Prozess gleich (siehe Young und Wilcock [17]), allerdings wird die Arbeitsleistung des gekühlten Prozesses deutlich verringert. Im folgenden soll dies unter vereinfachenden Voraussetzungen noch einmal abgeleitet werden.

Voraussetzungen:

- Die Verbrennung und der Expansionsprozess sind ideal ($T_{5is} = T_5$, usw.).
- Am Verdichteraustritt bleiben der Massenstrom, \dot{m}_3 , und die Temperatur, T_3 , gleich.
- Die Temperatur am Brennkammeraustritt, T_4 , bleibt gleich.
- Die Wärmekapazität, c_p , und die Gaskonstante, R , sind konstant.
- Die Kühlluft wird im ersten Stator isobar zugemischt.
- Die Massenstromzunahme in der Brennkammer durch den Brennstoff wird vernachlässigt.

Definition: Isentroper Temperaturverhältnis $\tau = \frac{T_5}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$ (79)

Ungekühlte Gasturbine: In diesem Fall wird der Gasturbinenwirkungsgrad bekanntlich durch das Verdichterdruckverhältnis bestimmt.

$$\eta_{th} = 1 - \tau \quad (80)$$

Gekühlte Gasturbine: Es gilt:

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_4 + \dot{m}_c = \dot{m}_{4a} = \dot{m}_{41} \quad (81)$$

$$\text{Verdichterleistung: } \dot{m}_3(H_3 - H_2) = \dot{m}_3 c_p (T_3 - T_2) \quad (82)$$

$$\text{Brennkammerleistung: } \dot{m}_4(H_4 - H_3) = \dot{m}_4 c_p (T_4 - T_3) \quad (83)$$

Die Kühlluft wird im ersten Stator isobar zugemischt:

$$T_{4a} = T_{41} = \frac{\dot{m}_4 T_4 + \dot{m}_c T_3}{\dot{m}_3} \quad (84)$$

Gasturbinenwirkungsgrad:

$$\eta_{th} = \frac{\dot{m}_3 [(H_{4a} - H_{5a}) - (H_3 - H_2)]}{\dot{m}_4 (H_4 - H_3)} = \frac{\dot{m}_3 [(T_{41} - T_{5a}) - (T_3 - T_2)]}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \quad (85)$$

Mit $T_{5a} = T_{5ais} = \tau \cdot T_{41}$ (siehe Gleichung (79)) folgt:

$$\begin{aligned} \eta_{th} &= \frac{\dot{m}_3 [(T_{41} - \tau T_{41}) - (T_3 - T_2)]}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \\ &= \frac{(\dot{m}_4 T_4 + \dot{m}_c T_3)(1 - \tau) - \dot{m}_3 T_3(1 - \tau)}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \\ &= (1 - \tau) \frac{\dot{m}_4 T_4 + \dot{m}_c T_3 - \dot{m}_3 T_3}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \\ &= (1 - \tau) \end{aligned}$$

Durch die Abzweigung von Kühlluft muss in der Brennkammer weniger Luft aufgeheizt werden und durch die Zumischung der Kühlluft vor der Turbine wird die Turbinenleistung im gleichen Maße verringert. Damit ergibt sich der gleiche Wirkungsgrad wie im ungekühlten Fall.

7.5.2 Wirkungsgrad des realen gekühlten Gasturbinenprozesses

Es wird eine Turbinen-Wirkungsgraddefinition vom Typ MP eingeführt:

$$\eta_T = \frac{H_{4a} - H_{5a}}{H_{4a} - H_{5ais}} = \frac{T_{41} - T_{5a}}{T_{41} - T_{5ais}} \quad (86)$$

Verdichterwirkungsgrad:

$$\eta_V = \frac{H_{3is} - H_2}{H_3 - H_2} = \frac{T_{3is} - T_2}{T_3 - T_2} \quad (87)$$

Der Druckverlust in der Brennkammer wird vernachlässigt. Weiterhin gelten die Gleichungen (81–85) und

$$\begin{aligned}
 T_{5ais} &= \tau \cdot T_{41} \quad \text{und} \quad T_2 = \tau \cdot T_{3is} \\
 T_{4a} - T_{5a} &= \eta_T \cdot (T_{4a} - T_{5ais}) = \eta_T T_{41} \cdot (1 - \tau) \\
 T_3 - T_2 &= 1/\eta_V \cdot (T_{3is} - T_2) = T_{3is}/\eta_V \cdot (1 - \tau) \\
 \frac{T_{3is}}{\eta_V} &= T_3 + T_2 \cdot \left(\frac{1}{\eta_V} - 1\right)
 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \eta_{th} &= \frac{(\dot{m}_4 T_4 + \dot{m}_c T_3) \cdot \eta_T \cdot (1 - \tau) - \dot{m}_3 \cdot T_{3is}/\eta_V \cdot (1 - \tau)}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \\
 &= (1 - \tau) \cdot \frac{\dot{m}_4 \eta_T T_4 + \dot{m}_c \eta_T T_3 - \dot{m}_3 T_3 - \dot{m}_3 T_2 (1/\eta_V - 1)}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \\
 &= (1 - \tau) \cdot \left[1 - \frac{(1 - \eta_T)(\dot{m}_4 T_4 + \dot{m}_c T_3) + \dot{m}_3 T_2 (1/\eta_V - 1)}{\dot{m}_4 (T_4 - T_3)} \right] \\
 \eta_{th} &= (1 - \tau) \cdot \left[1 - \frac{(1 - \eta_T)(1 + \frac{\dot{m}_c T_3}{\dot{m}_4 T_4}) + (1 + \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_4}) \frac{T_2}{T_4} (\frac{1}{\eta_V} - 1)}{1 - \frac{T_3}{T_4}} \right] \quad (88)
 \end{aligned}$$

Setzt man in Gleichung (88) die Kühlluftmenge auf Null ($\dot{m}_c/\dot{m}_4 = 0$), dann erhält man den Wirkungsgrad der ungekühlten Gasturbine. Man erkennt allerdings, dass in den Gesamtwirkungsgrad der gekühlten Gasturbine nicht der Turbinenwirkungsgrad, η_T , alleine eingeht, sondern dass der Gasturbinen-Wirkungsgrad mit zunehmender Kühlluftmenge abnimmt, tendenziell in Übereinstimmung mit dem Wirkungsgrad η_{FR} . Außerdem sieht man, dass beim Wirkungsgrad der realen Gasturbine (ob gekühlt oder ungekühlt) eine Erhöhung der Brennkammeraustrittstemperatur T_4 zu einer Erhöhung des Wirkungsgrades beiträgt (im Gegensatz zur idealen Gasturbine).

In der folgenden Abbildung 34 wird eine Berechnung nach Gleichung (88) mit einer exakten Berechnung (c_p variabel) mithilfe eines Thermodynamik-Programms gemäß [14] verglichen. Für die Berechnung mit dem Thermodynamik-Programm wurde Methan als Brennstoff gewählt, es wurde bei zwei Druckverhältnissen (20 und 30) gerechnet, die Turbine wurde nicht gekühlt und der Diffusor am Gasturbinenaustritt wurde als ideal betrachtet. Als isentroper Verdichterwirkungsgrad wurde ein Wert von 0.85 gewählt. Die Turbine selbst bestand aus einer Hochdruck-, einem Niederdruckteil und einer Arbeitsturbine, welche den Wirkungsgrad 0.9 (HDT), bzw. 0.92 (NDT + Nutzturbine) besaßen. Um die Übereinstimmung der Berechnungen zu verbessern, wurde bei Anwendung der Gleichung (88) mit einem Adiabatenexponenten $\kappa = 1.35$ gerechnet (geht nur in Gl. (79) ein).

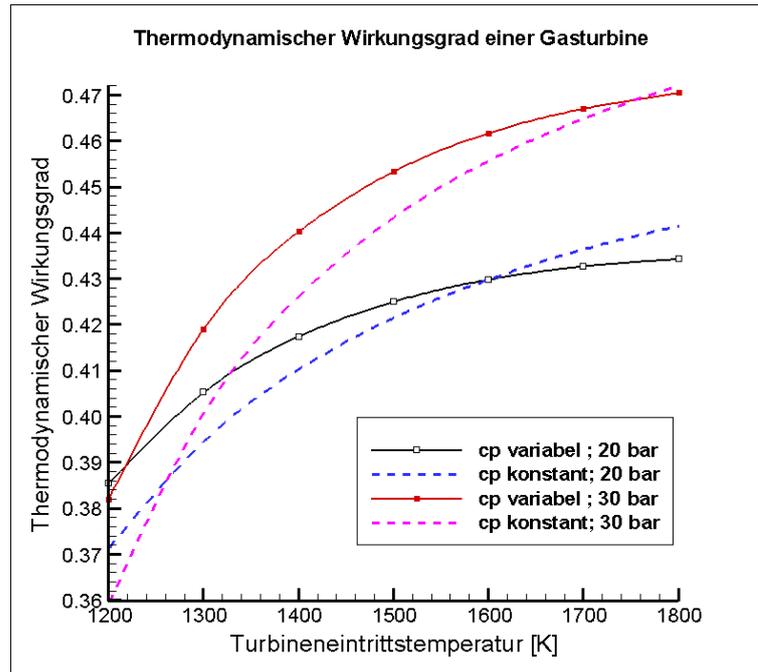


Bild 34: Exakte Wirkungsgradberechnung einer ungekühlten Gasturbine und Vergleich mit der näherungsweise Berechnung (c_p konstant) nach Gleichung (88)

7.5.3 Wirkungsgrad einer Turbine, berechnet aus den Teil-Wirkungsgraden von Hochdruck- und Niederdruckturbine

Da sich schon allein die Turbine aus mehreren Komponenten zusammensetzt, meist aus den Komponenten Hochdruck- und Niederdruckturbine, ist es auch von Interesse, wie sich die Verbesserung eines Teils der Turbine auf die zusammengesetzte Turbine auswirkt. Dies wird im Folgenden unter der Voraussetzung konstanter Wärmekapazität hergeleitet. Es werden Turbinen-Wirkungsgraddefinitionen vom Typ MP benutzt:

$$\text{Gesamte Turbine: } \eta_T = \frac{H_{4a} - H_{5a}}{H_{4a} - H_{5ais}} = \frac{T_{41} - T_{5a}}{T_{41} - T_{5ais}} \quad (89)$$

$$\text{Hochdruckturbine: } \eta_{HDT} = \frac{H_{4a} - H_{45}}{H_{4a} - H_{45is}} = \frac{T_{41} - T_{45}}{T_{41} - T_{45is}} \quad (90)$$

$$\text{Niederdruckturbine: } \eta_{NDT} = \frac{H_{45} - H_{5a}}{H_{45} - H_{5ais}} = \frac{T_{45} - T_{5a}}{T_{45} - T_{5ais}} \quad (91)$$

Das Druckverhältnis über die Turbine setzt sich zusammen aus den Teildruckverhältnissen über die Komponenten:

$$\frac{p_5}{p_4} = \frac{p_{45}}{p_4} \cdot \frac{p_5}{p_{45}} \quad (92)$$

Weiterhin ist:

$$\frac{T_{5ais}}{T_{41}} = \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} ; \quad \frac{T_{45is}}{T_{41}} = \left(\frac{p_{45}}{p_4}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} ; \quad \frac{T_{5ais}}{T_{45}} = \left(\frac{p_5}{p_{45}}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
 T_{41} - T_{5a} &= T_{41} - T_{45} + T_{45} - T_{5a} \\
 &= \eta_{HDT} (T_{41} - T_{45is}) + \eta_{NDT} (T_{45} - T_{5ais}) \\
 &= \eta_{HDT} T_{41} (1 - T_{45is}/T_{41}) + \eta_{NDT} T_{45} (1 - T_{5ais}/T_{45}) \\
 &= \eta_{HDT} T_{41} (1 - (p_{45}/p_4)^{(\kappa-1)/\kappa}) + \eta_{NDT} T_{45} (1 - (p_5/p_{45})^{(\kappa-1)/\kappa}) \\
 \eta_T &= \frac{\eta_{HDT} (1 - (p_{45}/p_4)^{(\kappa-1)/\kappa}) + \eta_{NDT} T_{45}/T_{41} (1 - (p_5/p_{45})^{(\kappa-1)/\kappa})}{1 - (p_5/p_4)^{(\kappa-1)/\kappa}} \quad (94)
 \end{aligned}$$

Das Temperaturverhältnis T_{45}/T_{41} kann auch noch durch ein Druckverhältnis ausgedrückt werden, abgeleitet aus den Gleichungen (90, 93):

$$\frac{T_{45}}{T_{41}} = 1 - \eta_{HDT} \left(1 - \left(\frac{p_{45}}{p_4} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right) \quad (95)$$

In der folgenden Abbildung 35 wird eine Berechnung nach Gleichung (94) mit einer exakten Berechnung (c_p variabel) mithilfe eines Thermodynamik-Programms gemäß [14] verglichen. Die Turbine selbst bestand aus einer Hochdruckturbinen (Turbineneintrittstemperatur 1700 K, Druckverhältnis 3) und einer Niederdruckturbinen (Druckverhältnis 8, Wirkungsgrad 0.9). Der Wirkungsgrad der Hochdruckturbinen wurde variiert (siehe Abszisse) und auf der Ordinate ist der Wirkungsgrad der Gesamtturbinen aufgetragen. Bemerkenswert ist, dass sich bei Wirkungsgrad 0.9 für beide Turbinenteile ein gesamter Wirkungsgrad > 0.9 ergibt. Eine Berechnung nach Gl. (94) bei $\kappa = 1.4$ ergab keine gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung, allerdings bei $\kappa = 1.2$ ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Man besitzt also in κ einen Anpassungsparameter, der von der Temperatur und der Gaszusammensetzung abhängt.

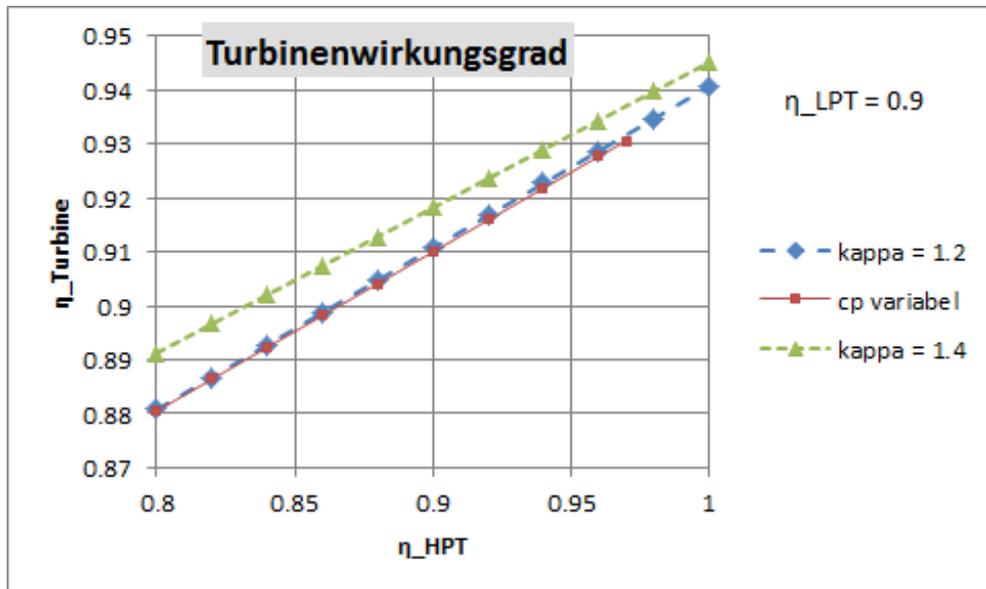


Bild 35: Exakte Wirkungsgradberechnung einer Turbinen, zusammengesetzt aus Hochdruck- und Niederdruckturbinen und Vergleich mit der näherungsweise Berechnung nach Gleichung (94)

Literatur

- [1] Denton, J.D.:
Throughflow Calculations for Transonic Axial Flow Turbines
Journal of Engineering for Power, Vol 100, p.213 (April 1978)
- [2] Came, P.M.:
Streamline Curvature Throughflow Analysis of Axial-Flow Turbines
1st European Conference on TURBOMACHINERY - Fluid Dynamic and Thermodynamic Aspects
Erlangen, March 1995 - published in VDI Berichte Nr. 1185 (1995)
- [3] Carlsson, I.:
A reduced-order through-flow program for choked and cooled axial turbines
Master thesis, Lund University (February 2005)
- [4] Ainley, D.G., Mathieson, G.C.R.:
A method of performance estimation for axial flow turbines
ARC R&M 2974 (1951)
- [5] Dunham, J., Came, P.M.:
Improvements to the Ainley-Mathieson Method of turbine performance prediction
Trans. ASME, J. Eng. Power (July 1970)
- [6] Kacker, C., Okapuu, U.:
A Mean Line Prediction Method for Axial Flow Turbine Efficiency
ASME paper No. 81-GT-58 (1981)
- [7] Benner, M.,W., Sjolander, S.A., Moustapha, S.H.:
An Empirical Prediction Method for Secondary Losses in Turbines — Part I: A New Loss Breakdown Scheme and Penetration Depth Correlation
J. of Turbomachinery, Vol 128, p. 273 (April 2006)
- [8] Hirsch,C., Denton, J.D., editors:
Through Flow Calculations in Axial Turbomachines
AGARD AR No. 175 (Oct 1981)
- [9] Groschup, G.:
Strömungstechnische Untersuchung einer Axialturbinenstufe im Vergleich zum Verhalten der ebenen Gitter ihrer Beschaufelung
Doktor Ingenieur Dissertation, Technische Universität Hannover (1977)
- [10] Fottner, L.:
Test cases for computation of internal flows in aero engine components
AGARD AR 275, p.365, Paris (1990)
- [11] Petrovic, M.:
Berechnung der Meridianströmung in mehrstufigen Axialturbinen bei Nenn- und Teillastbetrieb
VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 7, Nr. 280, Düsseldorf (1995)

- [12] Ling, Tong:
Implementation and Validation of a FEM Throughflow Program Computing the Meridional Flow in Axial Turbines
DLR Interner Bericht IB 225 - 2011 A 01, (2011)
- [13] VDI-Gesellschaft Energietechnik (Herausgeber):
Thermodynamische Stoffwerte von feuchter Luft und Verbrennungsgasen
VDI-Richtlinie VDI 4670 Blatt 1, (2003)
- [14] Stephan, M., Kost, F.:
Überschlägige Berechnung von Triebwerkskenngrößen unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität
DLR Interner Bericht IB 225 - 2008 A 04, (2008)
- [15] Bücken, D., W., Span, R., Wagner, W.:
Thermodynamic property models for moist air and combustion gases
Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol 125, Issue 1, 374 (January 2003)
- [16] Shapiro, A.H.:
The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow
The Ronald Press Company, New York, 1953
- [17] Young, J. B., and Wilcock, R. C.:
Modeling the air-cooled gas turbine: Part 1 – General thermodynamics
ASME J. Turbomachinery, 124, pp. 207 - 213 (Apr. 2002)
- [18] Young, J. B., and Wilcock, R. C.:
Modeling the air-cooled gas turbine: Part 2 – Coolant flows and losses
ASME J. Turbomachinery, 124, pp. 214 - 222 (Apr. 2002)
- [19] Kurzke, J.: Performance modeling methodology: Efficiency definitions for cooled single and multistage turbines.
Proceedings of ASME TURBO EXPO 2002, June 3-6, Amsterdam, No. GT-2002-30497 (2002)
- [20] Young, J. B. and Horlock, J. H.:
Defining the efficiency of a cooled turbine
ASME J. Turbomachinery, 128, pp. 658 - 667 (Oct. 2006)
- [21] Lim, Chia Hui, Pullan, G., Northall, J.:
Estimating the Loss Associated with Film Cooling for a Turbine Stage
Proceedings of ASME TURBO EXPO 2010, June 14-18, Glasgow, UK, No. GT2010-22327 (2010)