Aerodynamische
Versuchsanstalt
Göttingen e. V.
Abteilung: Wiss. 1

Bericht: 42/A/12
Auftrag: LA 117
Datum: 5.8.42.

Der Düseneinfluss auf die Windkanalkorrekturen bei ebener Strömung.

Uebersicht: Die Untersuchungen von L. P o g g i [2] über den Düseneinfluss auf die Windkanalkorrekturen bei ebener Strömung werden durch eine Abänderung der zur Lösung führenden konformen Abbildung erweitert auf den Widerstandseinfluss, ferner wird eine erste Näherung für die Strahlverformung durch Auftrieb und Widerstand berechnet. Einige Ueberlegungen werden angeschlossen über die Eindeutigkeit der Lösung der vorliegenden und ähnlicher Aufgaben mit teils freien, teils festen Grenzen und über den Zusammenhang der Ergebnisse mit denen in den Grenzfällen des ganz geschlossenen Kanals und des reinen Freistrahles.

Gliederung:

Der Bericht umfasst:
29 Seiten Text mit 7 Abbildungen.

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E.V.
Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter
I.V. F. Riegels

Der Bearbeiter
F. Dandorg

I. Aufgabenstellung.

In einer im Jahre 1931 erschienen Arbeit hat L. P o g g i [2] den Einfluss der Windstromgrenzen auf den Strömungszustand in der Umgebung eines Tragflügels unendlicher Spannweite in einem Freistrahl berechnet, der aus einer von zwei parallelen ebenen Wänden gebildeten Düse austritt. Der Tragflügel wurde dabei durch einen geraden Wirbelfaden konstanten Zirkulation ersetzt, die Randbedingung konstanten Druckes auf der Freistrahlgrenze wurde in üblicher Weise angenähert durch die Forderung konstanten Potentials der Zusatzströmung auf der ungestörten Strahlgrenze. Die vorliegende Arbeit, die veranlasst ist durch eine Bearbeitung der räumlichen Aufgabe eines Widerstandskörpers in der Achse eines aus einer Düse austretenden kreiszylindrischen Freistrahles ([4] , [5]) soll die Arbeit von P o g g i ergänzen vor allem im Hinblick auf die physikalische Deutung der bei dieser und ähnlichen Aufgaben mit teils freien, teils festen Grenzen auftretenden mathematischen Fragen. Die Arbeit beschränkt sich ebenso wie die von P o g g i auf die ebene Aufgabe, in der eine Lösung mittels elementarer Funktionen in geschlossener Form möglich ist, ein Teil ihrer Ergebnisse gilt aber qualitativ auch für entsprechende räumliche Aufgaben, insbesondere ist dies bei den grundsätzlichen Ueberlegungen der Abschnitte V bis VIII der Fall. Neben dem von P o g g i behandelten Fall eines Tragflügels soll hier noch der Fall des durch eine Quelle dargestellten Widerstandskörpers mit Totwasser betrachtet werden. Die Lösung dieser Aufgabe würde man auch unmittelbar aus der Lösung für den Wirbel erhalten können, wenn man Potential und Stromfunktion vertauscht, wobei gleichzeitig der feste Teil des Kanals mit dem Freistrahl vertauscht wird. Der Fall eines kurzen Körpers ohne Totwasser, dargestellt durch einen Dipol, wurde schon in einer früheren Arbeit des Verfassers behandelt [5] .

Die zur Lösung der Aufgabe benutzte konforme Abbildung ist in der vorliegenden Arbeit etwas anders als bei P o g g i durchgeführt; hierdurch wurde es möglich, Quelle und Wirbel zu einer Wirbelquelle zusammenzufassen und auch den Fall der ausserhalb der Kanalachse liegenden Singularität unmittelbar zu behandeln, während P o g g i in diesem Falle eine Aufspaltung in zwei gleichsinnige und zwei gegensinnige Wirbel in spiegelbildlicher Lage zur Achse vornehmen musste. Die numerischen Rechnungen beschränken sich in der vorliegenden Arbeit auf den Fall einer in der Kanalachse liegenden Singularität, sie geben über die bei P o g g i gerechneten Fälle hinaus noch eine erste Näherung für die Strahlverformung durch den Tragflügel oder Widerstandskörper. Für den Fall des ausserhalb der Achse liegenden Flügels (und damit auch gleichzeitig für den Fall der Quelle) finden sich für die Zusatzgeschwindigkeit am Orte der Singularität selbst in der Arbeit von P o g g i ausführliche Zahlenangaben, auf welche hier verwiesen werden kann.

II. Die Randbedingungen der Aufgabe.

Wir betrachten die folgende Anordnung (Bild 1): Der feste Teil des Kanals werde gebildet von den beiden Halbgeraden $y = \frac{\pm D}{2}$, $x < 0$ einer z = Ebene, der ungestörte Rand des Freistrahles von den Halbgeraden $y = \frac{\pm D}{2}$, $x > 0$. Im Inneren des festen Kanalstückes (der Düse) oder des Freistrahles befinde sich in der Umgebung des Punktes $z = a$ ein die Strömung störender Körper (Widerstandskörper oder Tragflügel), den wir durch eine Singularität im Punkte $z = a$ ersetzen. Um die beiden wichtigsten Fälle des Tragflügels und des Widerstandskörpers mit Totwasser in einer Rechnung zu erfassen, wollen wir als störende Singularität eine Wirbelquelle von der Zirkulation Γ und der Ergiebigkeit Q im Punkte $z = a$ annehmen, deren komplexes Potential ohne den Einfluss der Kanal- und Freistrahlgrenzen

$$\phi_0(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - a) \tag{1}$$

sein würde. Ausser der Strömung der Wirbelquelle und der von den Kanalgrenzen herrührenden Zusatzströmung, die wir berechnen wollen, haben wir im Kanal noch eine gleichförmige Parallelströmung in Richtung der Kanalachse mit der Geschwindigkeit U. Um die Aufgabe linearisieren zu können, wollen wir voraussetzen, dass auf den ursprünglichen Freistrahlgrenzen gilt

$$\mathrm{Max}\left|\frac{d\phi_0}{dz}\right| \ll U \quad \text{für } y = \pm\frac{D}{2},\ x \geqslant 0 \tag{2}$$

Dann haben wir als Randbedingungen der Aufgabe zu fordern, dass für die aus ϕ_0 und der Zusatzströmung gebildete Strömung die festen Wände der Düse Stromlinien sind und dass die ursprünglichen Freistrahlgrenzen für diese Strömung Potentiallinien sind. Die erste dieser Forderungen ist genau, die zweite dagegen eine Näherung für die eigentlich zu stellende Forderung konstanten Druckes, d.h. konstanten Geschwindigkeitsbetrages auf einer neu zu bestimmenden Strahlgrenze. Diese Näherung ist zulässig, falls die von der Wirbelquelle und der Zusatzströmung herrührende Normalgeschwindigkeit auf der ursprünglichen Freistrahlgrenze überall klein bleibt gegen die Hauptgeschwindigkeit U . Wir werden später sehen, dass wegen des Wechsels der Randbedingung an der Düsenmündung gerade diese Voraussetzung bei der Lösung der Aufgabe besonders beachtet werden muss und dass durch sie die Lösung überhaupt erst eindeutig wird.

III. Konforme Abbildung des Kanals auf die obere Hälfte des Äusseren des Einheitskreises.

Zur Lösung der Aufgabe bilden wir den Kanal konform ab auf einen Bereich, in dem die Methode der Spiegelbilder anwendbar ist (vgl. Bild 2). Zunächst führen wir eine Aehnlichkeitstransformation und eine Verschiebung so aus, dass der Kanal in einen Streifen der Breite π oberhalb der reellen Achse einer z_1 = Ebene übergeht. Dies leistet die Transformation

$$z_1 = \frac{\pi}{D}\left(z + i\frac{D}{2}\right) \tag{3}$$

Diesen Streifen bilden wir dann mit Hilfe der Exponentialfunktion auf die obere Halbebene einer z_2=Ebene ab.

$$z_2 = e^{z_1} \tag{4}$$

Hierbei geht die untere feste Wand in die Strecke von 0 bis 1 , die untere Strahlgrenze in die Strecke von 1 bis + ∞ der reellen Achse über, die obere feste Wand und die obere Strahlgrenze in die entsprechenden Teile der negativen reellen Achse. Schliesslich bilden wir die längs der Strecke von -1 bis +1 aufgeschnittene z_2= Ebene auf das Äussere des Einheitskreises einer z_3= Ebene ab, indem wir setzen

$$z_3 = z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1} \tag{5}$$

Insgesamt erhalten wir als Abbildung des Kanals mit Freistrahl auf die obere Hälfte des Aussenraumes des Einheitskreises die Transformation

$$z_3 = i\left(e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D}+1}\right) \tag{6}$$

Bei dieser Transformation geht die untere feste Wand in den ersten Quadranten des Einheitskreises über, die obere feste Wand in den zweiten. Die untere Freistrahlgrenze geht in den Teil der reellen x_3 = Achse rechts von $x_3 = +1$ über, die obere Freistrahlgrenze in den links von $x_3 = -1$; die beiden Enden der festen Kanalwände schliesslich gehen in die Punkte $z_3 = +1$ und $z_3 = -1$ über .

IV. Spiegelung der Singularitäten in der z_3 = Ebene.

In der z_3 = Ebene lässt sich die Aufgabe nun leicht durch Spiegelung lösen. Der Punkt a der z=Ebene, in dem wir die Wirbelquelle angenommen hatten, geht in der z_3 = Ebene über in einen Punkt

$$a_3 = i\left(e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right) \tag{7}$$

Als Randbedingung haben wir dort die beiden Forderungen, dass der Einheitskreis Stromlinie und die reelle Achse Potentiallinie werden sollen. Der ersten Forderung genügen wir, wenn wir die Wirbelquelle und die zugehörige Wirbelsenke im Unendlichen unter Erhaltung des Vorzeichens der Quellen und Umkehr des Vorzeichens der Wirbel am Einheitskreis spiegeln, der zweiten, indem wir die ganze Anordnung nochmals unter Umkehr des Vorzeichens der Quellen und Erhaltung des Vorzeichens der Wirbel an der reellen Achse spiegeln (vgl. Bild 3). Hierbei fallen die Singularitäten bei $z_3 = 0$ und $z_3 = \infty$ fort, wir behalten also

1. Im Punkte α_3 eine Wirbelquelle der Stärke $Q - i\Gamma$
2. " " $1/\bar{\alpha}_3$ " " " " $Q + i\Gamma$
3. " " $\bar{\alpha}_3$ " " " " $-Q - i\Gamma$
4. " " $1/\alpha_3$ " " " " $-Q + i\Gamma$

Als komplexes Potential dieser Anordnung von Wirbelquellen in der z_3= Ebene erhalten wir demnach

$$\phi_1 = \frac{Q-i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3-\alpha_3}{z_3-1/\alpha_3} - \frac{Q+i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3-\bar{\alpha}_3}{z_3-1/\bar{\alpha}_3} \tag{8}$$

Damit haben wir eine Lösung gefunden, die in der z_3 = Ebene und damit nach Einführung des Ausdruckes für z_3 aus der Transformationsgleichung (6) in der z = Ebene die Bedingung erfüllt, dass die festen Wände des Kanals Stromlinien, die Freistrahlgrenzen Potentiallinien sind.

V. Einführung der Düsenpotentiale.

Trotzdem das durch (8) gegebene Potential die zunächst gestellten Bedingungen erfüllt, können wir es doch noch nicht als endgültige Lösung der Aufgabe ansehen. Bilden wir nämlich die komplexe Geschwindigkeit in der z_3 = Ebene

$$\frac{d\phi_1}{dz_3} = \frac{Q-i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{z_3-\alpha_3} - \frac{1}{z_3-1/\alpha_3}\right) - \frac{Q+i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{z_3-\bar{\alpha}_3} - \frac{1}{z_3-1/\bar{\alpha}_3}\right) , \tag{9}$$

so sehen wir, dass diese in den beiden der Düsenmündung entsprechenden Punkten $z_3 = \pm 1$ im allgemeinen einen endlichen Wert hat[2)]

$$\left(\frac{d\phi_1}{dz_3}\right)_{+1} = \frac{i}{\pi} J\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{1+\alpha_3}{1-\alpha_3}\right]$$

$$\left(\frac{d\phi_1}{dz_3}\right)_{-1} = -\frac{i}{\pi} J\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{1-\alpha_3}{1+\alpha_3}\right] \tag{10}$$

Rechnen wir nun die Geschwindigkeit ~~um~~ in die $z =$ Ebene, so müssen wir mit der Ableitung $\frac{dz_3}{dz}$ multiplizieren.

$$\frac{dz_3}{dz} = \frac{i\pi}{D}\, e^{\pi z/D}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}}\right) \tag{11}$$

An der Düsenmündung, d.h. für $z = \pm \frac{iD}{2}$, wird aber

$$1 + e^{-2\pi z/D} = 1 + e^{\mp\pi i} = 0 \tag{12}$$

und damit $\frac{dz_3}{dz} = \infty$. Wir würden also an der Düsenmündung auf der Freistrahlgrenze eine unendliche Normalgeschwindigkeit erhalten im Gegensatz zu unserer Voraussetzung, dass die Normalgeschwindigkeit auf der Freistrahlgrenze überall klein ist gegen die Geschwindigkeit U der Hauptströmung. Physikalisch würde diese unendliche Zusatzgeschwindigkeit, die in Wirklichkeit garnicht auftritt, eine starke Verformung der Strahlgrenze an der Düsenmündung bedeuten,

---

2) In den Formeln bedeutet J(z) den Imaginärteil (ohne den Faktor i) der komplexen Zahl z , entsprechend bedeutet R(z) ihren Realteil.

die gleichfalls in Wirklichkeit garnicht auftritt. Es gibt nun Aufgaben mit gemischten Randbedingungen, bei denen es im Bereiche einer linearen Theorie grundsätzlich unvermeidbar ist, dass unendliche Geschwindigkeiten an den Stellen auftreten, an denen die Randbedingung wechselt. Ein Beispiel hierzu bietet etwa die Frage, nach der Korrektur des Anstellwinkels eines Flügels, der sich in einem teilweise abgedeckten Kanal befindet. In dem hier vorliegenden Falle lässt sich aber auch theoretisch auf der ganzen Grenze endliche Geschwindigkeit erreichen, wenn wir dem Potential ϕ_1 noch eine geeignete Kombination zweier weiterer Potentiale ϕ_{D1} und ϕ_{D2} hinzufügen, die wir als Düsenpotentiale bezeichnen wollen.

Auf diese Düsenpotentiale werden wir geführt, wenn wir uns die Frage stellen, ob es in der z_3 = Ebene Strömungen gibt, die den Einheitskreis als Stromlinie und die reelle Achse als Potentiallinie haben, also die Randbedingungen erfüllen, die aber in der ganzen oberen Hälfte des Äusseren des Einheitskreises frei von Singularitäten sind. Auf der reellen Achse und auf dem Rande des Einheitskreises selbst dürfen gleichfalls für die gesuchten Strömungen keine Singularitäten liegen mit Ausnahme der Punkte $z_3 = i$ und $z_3 = \infty$, die beim Uebergang zur z = Ebene in das Unendliche fallen, jedoch ist hierbei zu fordern, dass die Geschwindigkeit im Unendlichen der z = Ebene noch endlich (d.h. von der Grössenordnung $Q - i\Gamma$) bleibt.

Von solchen Strömungen gibt es nun genau zwei wesentlich verschiedene, nämlich die Strömung von einer Quelle im Punkte $z_3 = -i$ zu einer Senke im Punkte $z_3 = +i$ und die Strömung eines Wirbels im Punkte $z_3 = 0$.

$$\phi_{D_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \tag{13}$$

$$\phi_{D_2} = \frac{i}{2\pi} \ln z_3 \tag{14}$$

In der z = Ebene entspricht ϕ_{D1} einer Strömung, die senkrecht durch die beiden Freistrahlgrenzen eintritt und im festen Teil des Kanals in eine Parallelströmung in Richtung der Kanalachse übergeht; die beiden Enden der Düsenmündung werden dabei von aussen nach innen umströmt. ϕ_{D2} entspricht einer Strömung, die senkrecht in die eine Strahlgrenze eintritt und durch die andere Strahlgrenze gleichfalls senkrecht wieder austritt, das eine Ende der Düsenmündung wird dabei in der Richtung von aussen nach innen, das andere von innen nach aussen umströmt. Im Freistrahl weit von der Düse entspricht ϕ_{D2} einer einfachen Parallelströmung senkrecht zur Strahlrichtung. Physikalisch lässt sich ϕ_{D1} z.B. deuten als Vorstau in der Düse, der dadurch hervorgebracht wird, dass der durch die Singularität ersetzte Körper die D:üse zum Teil versperrt. ϕ_{D2} entspricht physikalisch einer Ablenkung des Freistrahles, wie sie z.B. durch einen in den Strahl hineingesteckten Flügel hervorgebracht wird.

VI. Vollständige Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Düsenpotentiale.

Die Existenz der beiden Düsenpotentiale ϕ_{D1} und ϕ_{D2} hat zunächst zur Folge, dass die Lösung der gestellten Aufgabe nicht eindeutig ist, da jedes Potential

$$\phi = \phi_1 + \lambda_1 \phi_{D_1} + \lambda_2 \phi_{D_2} \tag{15}$$

mit beliebigem λ_1 und λ_2 den geforderten Randbedingungen genügt. Unter allen diesen Lösungen gibt es aber genau eine, für welche die Geschwindigkeit in der z= Ebene an den Enden der festen Wände endlich bleibt. Da nun an der Düsenmündung ebenso wie an der Hinterkante eines Tragflügels keine Umströmung, sondern Ablösung der Strömung eintritt, ist diese Lösung die gesuchte. Wir finden sie offenbar, wenn wir λ_1 und λ_2 so bestimmen, dass in der z_3 = Ebene die Punkte $z_3 = \pm 1$ Staupunkte werden. Damit erhalten wir für λ_1 und λ_2 unter Berücksichtigung von (10) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} z_3 = +1: \quad & \lambda_1 - \lambda_2 = -2\,\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{a_3+1}{a_3-1}\right] \\ z_3 = -1: \quad & \lambda_1 + \lambda_2 = 2\,\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{a_3-1}{a_3+1}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\,\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{2a_3}{a_3^2-1}\right] \\ \lambda_2 &= 2\,\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\,\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Strömung einer Wirbelquelle im Kanal unter dem Einfluss der Düse das Potential

$$\begin{aligned} \phi = {} & \frac{Q-i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z_3-a_3}{z_3-1/a_3} - \frac{Q+i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z_3-\overline{a}_3}{z_3-1/\overline{a}_3} \\ & -\frac{1}{\pi}\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\frac{2a_3}{a_3^2-1}\right]\ln\frac{z_3+i}{z_3-i} + \frac{i}{\pi}\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right]\ln z_3 \end{aligned} \tag{18}$$

wo für z_3 und a_3 nach Gleichung (6) und (7) einzusetzen ist

$$z_3 = i\left(e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D}+1}\right)$$

$$a_3 = i\left(e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right)$$

Für die komplexe Geschwindigkeit in der = Ebene erhalten wir

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dz_3} \cdot \frac{dz_3}{dz}$$

$$= \frac{1}{2D}\left[(Q-i\Gamma)\left(\frac{1}{z_3-a_3}-\frac{1}{z_3-1/a_3}\right)-(Q+i\Gamma)\left(\frac{1}{z_3-\bar{a}_3}-\frac{1}{z_3-1/\bar{a}_3}\right)\right]\cdot\frac{z_3(z_3^2+1)}{z_3^2-1}$$

$$+\frac{i}{D}\left\{\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\frac{2a_3}{a_3^2-1}\right]\cdot\frac{2z_3}{z_3^2-1}+\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right]\cdot\frac{z_3^2+1}{z_3^2-1}\right\}, \qquad (19)$$

wo $\frac{dz_3}{dz}$ der bequemeren Rechnung halber durch z_3 ausgedrückt ist. Die Gleichungen (18) und (19) geben die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe.

VII. Berechnung des Vorstaues in der Düse, der Strahlablenkung und der Korrektur der Anströmgeschwindigkeit.

Wir berechnen jetzt noch aus Gleichung (19) die Geschwindigkeit $u(-\infty)$ weit im Inneren des festen Kanals bei $z = -\infty$, d.h. den Vorstau in der Düse, weiter die Geschwindigkeit $v(+\infty)$ weit im Freistrahl bei $z = +\infty$, d.h. die Strahlablenkung, und schliesslich die Geschwindigkeit $w(\alpha)$ am Orte der Singularität, die für die Korrektur der Anströmgeschwindigkeit und des Anstellwinkels massgebend ist.

Der Vorstau in der Düse ist

$$u(-\infty) = \lim_{z\to-\infty}\frac{d\phi}{dz} = \lim_{z_3\to i}\frac{d\phi}{dz} \qquad (20)$$

$$u(-\infty) = \frac{1}{D}\,\mathfrak{J}\left[(Q-i\Gamma)\frac{2a_3}{a_3^2-1}\right] \qquad (21)$$

oder nach Einführung des Wertes von a_3 aus (7)

$$\mathfrak{u}(-\infty) = -\frac{1}{D}\,\Re\left(\frac{Q-i\Gamma}{\sqrt{1+e^{2\pi a/D}}}\right) . \tag{22}$$

Die Strahlablenkung wird entsprechend

$$-\frac{i\,v(+\infty)}{U} = \frac{1}{U}\lim_{z\to+\infty}\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{U}\lim_{z_3\to\infty}\frac{d\phi}{dz} \tag{23}$$

$$\frac{v(+\infty)}{U} = -\frac{1}{DU}\,\Im\left[(Q-i\Gamma)\;\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right] \tag{24}$$

$$\frac{v(+\infty)}{U} = -\frac{1}{DU}\,\Im\left(\frac{Q-i\Gamma}{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}}\right) \tag{25}$$

Die Geschwindigkeit am Orte der Singularität $z = a$ (ohne den Einfluß der Wirbelquelle selbst) erhält man durch

$$w(a) = u(a) - i\,v(a) = \lim_{z\to a}\left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{Q-i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{z-a}\right) \tag{26}$$

Durch Reihenentwicklung erhält man nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} w(a) = {} & \frac{Q-i\Gamma}{4D}\left[1-2\left(\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right)\right] - \frac{Q+i\Gamma}{2D}\cdot\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\left(\frac{a_3}{a_3-\bar{a}_3} - \frac{a_3\bar{a}_3}{a_3\bar{a}_3-1}\right) \\ & + \frac{i}{D}\left\{\frac{2a_3}{a_3^2-1}\,\Im\left[(Q-i\Gamma)\frac{2a_3}{a_3^2-1}\right] + \frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\,\Im\left[(Q-i\Gamma)\;\frac{a_3^2+1}{a_3^2-1}\right]\right\} \end{aligned} \tag{27}$$

Für die Anwendungen der Theorie interessiert nun hauptsächlich der Fall, dass die Wirbelquelle in der Kanalachse liegt. In diesem Falle vereinfachen sich die Gleichungen (22) und (25) und (27) bedeutend. a ist dann reell, a_3 rein imaginär. Aus (22) erhalten wir für den Vorstau in der Düse

$$\mathfrak{u}(-\infty) = -\frac{Q}{D}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\pi a/D}}} \tag{28}$$

Aus (25) erhalten wir entsprechend für die Strahlablenkung

$$\frac{v(+\infty)}{U} = + \frac{\Gamma}{DU} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}} \tag{29}$$

Für die Geschwindigkeit im Punkte $z = a$ erhalten wir aus (27) nach Trennung von Realteil und Imaginärteil

$$u(a) = - \frac{Q}{D} \cdot \frac{1}{2(1+e^{2\pi a/D})} \tag{30}$$

$$v(a) = + \frac{\Gamma}{D} \cdot \frac{1}{2(1+e^{-2\pi a/D})} \tag{31}$$

Eine Quelle in der Kanalachse gibt also nur einen Vorstau in der Düse, ein Wirbel nur eine Strahlablenkung; am Orte der Quelle wird nur die Grösse, am Orte des Wirbels nur die Richtung der Anströmung geändert.

Die durch die Gleichungen (22), (25), (27) bis (31) gegebenen Geschwindigkeitskorrekturen beziehen sich auf die ungestörte Parallelströmung von der Geschwindigkeit U [3)]. In der gestörten Strömung herrscht diese nun auf dem Rande des Freistrahles und in grösserer Entfernung von der Düse auch in seinem Inneren, dagegen ist die Geschwindigkeit weit im Inneren des festen Kanals wegen des Vorstaues i.a. von U verschieden. Man pflegt nun die Geschwindigkeit eines Kanals zumeist aus dem Ueberdruck Δp in der Düsenvorkammer zu bestimmen nach der Beziehung

$$\frac{\varrho}{2} U^2 = \frac{\Delta p}{1 - (F_1/F_2)^2} \tag{32}$$

3) Vgl. [6] Gleichung (28) bis (32).

wo F_1 der Düsenquerschnitt, F_2 der Querschnitt der Düsenvorkammer ist. Im Falle ebener Strömung kann man F_1/F_2 durch das Verhältnis der Wandabstände D_1/D_2 ersetzen. Nun hat man in der Düse die mittlere Geschwindigkeit

$$U_1 = U + u(-\infty) , \tag{33}$$

in der Düsenvorkammer ist daher die Geschwindigkeit aus Kontinuitätsgründen

$$U_2 = \left(U + u(-\infty)\right) \cdot D_1/D_2 \tag{34}$$

Der Druck in der Düsenvorkammer ist dann

$$p_2 = -\frac{\varrho}{2} \frac{D_1^2}{D_2^2} \left(U + u(-\infty)\right)^2 + p_0 \tag{35}$$

Der Druck im Freistrahl ist

$$p_1 = -\frac{\varrho}{2} U^2 + p_0 \tag{36}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für die Geschwindigkeit U

$$\frac{\varrho}{2} U^2 = \frac{p_2 - p_1}{1 - \left[\left(1 + u(-\infty)/U\right) \cdot D_1/D_2\right]^2} \tag{37}$$

Dies Ergebnis lässt sich so aussprechen, dass wegen der Versperrung der Düse durch den Körper der Endquerschnitt des Freistrahles (ohne den von der Quellströmung herrührenden Anteil, d.h. ohne die Breite des Totwassers) kleiner wird als der Düsenquerschnitt. Der Betrag dieser Verkleinerung ist durch das Verhältnis $u(-\infty)/U$ gegeben. Da bei der Auswertung von Messungen ein Staudruck zugrundegelegt wird, der einfach nach (32) berechnet ist, so erhält man Beiwerte, die im Verhältnis

$$\frac{1-[(1+u(-\infty)/U)\cdot D_1/D_2]^2}{1-(D_1/D_2)^2} \approx 1-2\frac{D_1^2}{D_2^2}\cdot\frac{u(-\infty)}{U} \tag{38}$$

zu klein sind. Ausser dieser Korrektur ist natürlich noch zu beachten, dass am Orte des zu untersuchenden Körpers die Strömungsgeschwindigkeit nicht U ist, sondern gemäss Gleichung (27) bzw. (30) gestört.

VIII. Zusammenhang der Korrekturformeln mit denen in den Grenzfällen der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal und im Freistrahl.

Die Korrekturformeln (22), (25), (27) bis (31) des vorigen Abschnittes stehen scheinbar im Widerspruch zu den bekannten Korrekturformeln für den geschlossenen Kanal und den Freistrahl, in die sie der Erwartung nach übergehen sollten, wenn die Wirbelquelle sich weit vor oder hinter der Düsenmündung befindet.

Für den geschlossenen Kanal erhält man durchndirekte Anwendung der Methode der Spiegelbilder in der z = Ebene als komplexes Potential einer Wirbelquelle der Stärke $Q-i\Gamma$ im Punkte z = a

$$\phi^* = \frac{Q-i\Gamma}{2\pi}\ln\mathfrak{Sin}\frac{\pi(z-a)}{2D} + \frac{Q+i\Gamma}{2\pi}\ln\mathfrak{Cof}\frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} . \tag{39}$$

Für die komplexe Geschwindigkeit erhält man daraus

$$\frac{d\phi^*}{dz} = \frac{Q-i\Gamma}{4D}\mathfrak{Ctg}\frac{\pi(z-a)}{2D} + \frac{Q+i\Gamma}{4D}\mathfrak{Tg}\frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} . \tag{40}$$

Die Zusatzgeschwindigkeit weit vor der Wirbelquelle wird damit

$$u^*(-\infty) = -\frac{Q}{2D} \quad , \qquad v^*(-\infty) = 0 . \tag{41a}$$

Entsprechend wird die Zusatzgeschwindigkeit weit hinter der Wirbelquelle

$$u^*(+\infty) = +\frac{Q}{2D} \quad , \qquad v^*(+\infty) = 0 , \tag{41b}$$

während die Geschwindigkeit am Orte der Wirbelquelle

$$w^*(a) = \frac{-\Gamma + iQ}{4D}\, \mathrm{tg}\, \mathfrak{J}\left(\frac{\pi a}{D}\right) \tag{41c}$$

wird. Wenn die Wirbelquelle in der Achse des Kanals liegt, so ist a reell, und es wird einfach

$$u(a) = 0 \quad , \qquad v(a) = 0 . \tag{41d}$$

Demgegenüber ergeben die Formeln (28) bis (31) für reelles a in der Grenze $a \to \infty$

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= -\frac{Q}{D} & v(-\infty) &= 0 \\ u(+\infty) &= 0 & v(+\infty) &= 0 \\ u(a) &= -\frac{Q}{2D} & v(a) &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Für das komplexe Potential einer Wirbelquelle im Freistrahl erhält man entsprechend

$$\phi^{**} = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln \mathfrak{Sin} \frac{\pi(z-a)}{2D} - \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \mathfrak{Cof} \frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} \tag{43}$$

und *daraus*

$$\frac{d\phi^{**}}{dz} = \frac{Q - i\Gamma}{4D} \mathfrak{Ctg} \frac{\pi(z-a)}{2D} - \frac{Q + i\Gamma}{4D} \mathfrak{Tg} \frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} \tag{44}$$

mit den Grenzwerten

$$
\begin{aligned}
&u^{**}(-\infty) = 0 \qquad && v^{**}(-\infty) = -\frac{\Gamma}{2D} \\
&u^{**}(+\infty) = 0 \qquad && v^{**}(+\infty) = +\frac{\Gamma}{2D} \\
&w(\alpha) = \frac{\Gamma - iQ}{4D}\,\mathrm{tg}\,\Im\left(\frac{\pi\alpha}{D}\right) && \\
&u^{**}(\alpha) = 0 \qquad && v^{**}(\alpha) = 0 \quad \text{für reelles } \alpha
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Aus (28) bis (31) ergibt sich dagegen für reelles α in der Grenze $\alpha \rightarrow +\infty$

$$
\begin{aligned}
&u(-\infty) = 0 \qquad && v(-\infty) = 0 \\
&u(+\infty) = 0 \qquad && v(+\infty) = +\frac{\Gamma}{D} \\
&u(\alpha) = 0 \qquad && v(\alpha) = +\frac{\Gamma}{2D}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Der scheinbare Widerspruch zwischen (41) und (42) sowie zwischen (45) und (46) löst sich, wenn man beachtet, dass die Strömung der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal und im Freistrahl mathematisch gesprochen nicht eindeutig bestimmt ist. Ohne die Randbedingungen zu verletzen, darf man im ersten Falle eine Parallelströmung beliebiger Grösse in Richtung der Kanalachse hinzufügen und im zweiten eine Parallelströmung senkrecht zur Kanalachse von der Grössenordnung $(Q - i\Gamma)/D$. Ueber diese Freiheit verfügt man dadurch, dass man eine Symmetrie der Strömung zur Wirbelquelle verlangt, wie sie sich bei der Spiegelung an den Grenzen von selbst ergibt. Im Falle des aus einer Düse austretenden Strahles besteht diese Freiheit nicht mehr wegen der Abflussbedingung an der Düsenmündung. Anschaulich gesprochen wählt man im Falle der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal als Bezugsgeschwindigkeit U das arithmetische Mittel zwischen der Geschwindigkeit weit vor und der weit hinter der Wirbelquelle, während man im Falle der Wirbelquelle im Kanal mit anschliessendem Freistrahl als Bezugsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit im Freistrahl, d.h. die weit hinter der Wirbelquelle wählt.

Ebenso wählt man im Falle der Wirbelquelle im reinen Freistrahl als Bezugsrichtung das Mittel zwischen der Richtung des ankommenden und des abgehenden Strahls, im Falle der Wirbelquelle im Freistrahl mit davorliegender Düse dagegen die Richtung des ankommenden Strahls d.h. die der Kanalachse.

IX. Berechnung der Form des Strahlrandes.

Aus der Gleichung (18) für das komplexe Potential der Strömung lässt sich leicht noch eine erste Näherung für die Verformung des Strahlrandes herleiten. Ist nämlich $\psi(x, \pm\frac{iD}{2})$ die Stromfunktion der Zusatzströmung auf den ungestörten Strahlrändern, d.h. der Imaginärteil von $\emptyset$, so hat der Strahl, da seine Geschwindigkeit U ist, an der Stelle x ausserhalb des ursprünglichen Strahlrandes noch die Breite

$$\Delta y = \left[\psi(0, \pm\tfrac{iD}{2}) - \psi(x, \pm\tfrac{iD}{2})\right]/U \qquad (47)$$

Bei der weiteren Rechnung wollen wir uns auf den Fall beschränken, dass die störende Wirbelquelle in der Kanalachse liegt. Wir erhalten dann aus (47) nach einiger Rechnung für den Fall der Quelle

$$\Delta y = \pm\frac{Q}{U}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^{2\pi x/D}-1}{e^{2\pi a/D}+1}} - \frac{2}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}}\operatorname{arctg}\frac{e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}-1}{e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}+1}\right) \qquad (48)$$

Das obere Vorzeichen gilt hier für den oberen, das untere für das unteren Strahlrand. Für den Fall des Wirbels erhalten wir entsprechend

$$\Delta y = \frac{\Gamma}{2\pi U}\left[\ln \frac{\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)^2 + \left(e^{\pi a/D}+\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right)^2}{\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)^2\cdot\left(e^{\pi a/D}+\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right)^2+1} + \frac{2\,e^{\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}}\,\ln\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)\right] \tag{49}$$

Das Vorzeichen ist hier für beide Strahlränder das gleiche.

Wir betrachten nun noch das Verhalten des Strahlrandes an der Düsenmündung und in grosser Entfernung von der Düse. Im Falle der Quelle erhalten wir aus (49) durch Reihenentwicklung für den Strahlrand in der Nähe der Düsenmündung

$$\Delta y \approx \pm \frac{Q}{U}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{3}\cdot\frac{e^{2\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}^{\,3}}\cdot\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \qquad \text{für } \frac{x}{D/2} \ll 1 \tag{50}$$

Der Strahlrand schliesst sich also tangential an die Düsenmündung an, jedoch ist seine Krümmung dort unendlich gross. Die stärkste Verformung des Strahlrandes an der Düsenmündung erhalten wir aus der Bedingung

$$\frac{d}{da}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\cdot\frac{e^{2\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}^{\,3}}\right) = 0 \tag{51}$$

für den Fall, dass die Quelle an der Stelle

$$\frac{a}{D/2} = \frac{1}{\pi}\ln 2 \approx 0{,}221 \tag{52}$$

der Kanalachse liegt, also im Freistrahl etwas vor der Düsenmündung. In disem Falle wird

$$\Delta y \approx \pm \frac{2}{9}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\frac{Q}{U}\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \approx \pm\, 0{,}227\,\frac{Q}{U}\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \tag{53}$$

Für grosse Entfernung von der Düse erhalten wir gleichfalls druch Reihenentwicklung

$$\Delta y \approx \pm\frac{Q}{U}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}}\right)-\frac{1}{\pi\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}}\cdot e^{-\frac{\pi(x-a)}{D}}\right] \quad \text{für } \frac{x}{D/2} \gg \operatorname{Max}\left(1, \frac{a}{D/2}\right). \tag{54}$$

Der Freistrahl wird also im Unendlichen breiter als die Düse um den Betrag

$$2\Delta y(\infty) = \frac{Q}{U}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}}\right). \tag{55}$$

Liegt die Quelle weit vor der Düse im Freistrahl, so erhält man als Verbreiterung einfach Q/U , d.h. die gleiche Strahlverbreiterung, die man auch im reinen Freistrahl erhalten würde. Bei endlicher Entfernung der Quelle von der Düse ist die Verbreiterung kleiner um $Q/U\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}$; dieser Betrag entspricht dem ohne Vorhandensein der Hauptströmung in die Düse eintretenden Teil der Quellflüssigkeit der den Vorstau in der Düse verursacht [vgl. Gleichung (28)] .

Für den Fall des Wirbels erhalten wir in der Nähe der Düsenmündung die Entwicklung

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{3}\cdot\frac{e^{-2\pi a/D}}{\sqrt{e^{-2\pi a/D}+1}^{\,3}}\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \quad \text{für } \frac{x}{D/2} \ll 1 \tag{56}$$

Die stärkste Verformung des Strahlrandes an der Düsenmündung erhalten wir,hier, falls der Wirbel an der Stelle

$$\frac{a}{D/2} = -\frac{1}{\pi}\ln 2 \approx -0{,}221 \tag{57}$$

der Kanalachse liegt, also noch etwas im festen Teil des Kanals; es ist dann

$$\Delta y \approx \frac{2}{9}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\frac{\Gamma}{U}\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \approx 0{,}227\,\frac{\Gamma}{U}\sqrt{\frac{x}{D/2}}^{\,3} \tag{58}$$

Für grosse Entfernung von der Düse ergibt sich die Entwicklung

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U}\left(\frac{x - a\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}}{D\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}} - \frac{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\,\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\right) - \ln 2}{\pi\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}} + \frac{e^{-2\pi a/D}+2}{4\pi\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}}\,e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}}\right) \quad \text{für } \frac{x}{D/2} \gg \mathrm{Max}\left(1, \frac{a}{D/2}\right). \tag{59}$$

Liegt der Wirbel sehr weit vor der Düse, so wird aus (59)

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U}\left(\frac{x-a}{D} + \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}}\right) \text{ für } a \to \infty,\ \frac{x-a}{D} \gg 1 \quad (60)$$

Behandelt man dagegen die Aufgabe des Wirbels im reinen Freistrahl direkt, so erhält man aus Gleichung (43)

$$\Delta y^{**} \approx \frac{\Gamma}{U}\left(\frac{x-a}{2D} - \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}}\right) \text{ für } \frac{x-a}{D} \gg 1 \quad (61)$$

Der Unterschied beider Formeln erklärt sich wiederum aus der Verschiedenheit der Bezugsgrössen. Im ersten Falle ist die Asymptote des ankommenden Strahls als "ungestörte Strahlgrenze" gewählt, im zweiten dagegen die Tangente der Strahlgrenze in dem senkrecht über bzw. unter dem Wirbel liegenden Punkte.

X. Numerische Ergebnisse.

Die folgenden numerischen Rechnungen sollen auf den Fall beschränkt bleiben, dass der störende Tragflügel oder Widerstandskörper in der Kanalachse liegt. Zunächst stellen wir den Zusammenhang zwischen den Grössen Γ und Q der theoretischen Rechnung und der Auftriebsziffer c_a bzw. der Widerstandziffer c_w her. Aus den Gleichungen

$$A = \varrho U \Gamma \quad \text{und} \quad A = c_a \frac{\varrho}{2} U^2 l \quad (62)$$

in denen A den Auftrieb der Spannweiteneinheit des Flügels und l die Flügeltiefe bedeutet, folgt die bekannte Beziehung

$$\Gamma = \frac{c_a}{2} U l \tag{63}$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Anwendung des Impulssatzes auf den Nachlauf eines Widerstandskörpers [4] die Beziehung

$$W = \varrho U Q, \tag{64}$$

in der W den Widerstand der Spannweiteneinheit des Körpers bedeutet, und daraus zusammen mit der Definitionsgleichung der Widerstandsziffer c_w die Beziehung

$$Q = \frac{c_w}{2} U l \tag{65}$$

Bei diesem Ersatz eines Widerstandskörpers durch eine einfache Quelle ist allerdings die Voraussetzung der Kleinheit des Widerstandes noch mehr zu beachten als bei dem Flügel die Voraussetzung der Kleinheit des Auftriebes. Dieses Verfahren setzt nämlich voraus, daß sich die Ausbildung des Totwassers im Strahl ähnlich vollzieht wie im unendlich ausgedehnter Flüssigkeit. Dies ist aber nur bei sehr kleinem Widerstand der Fall, bei grösserem Widerstand wird der Nachlauf eines Körpers im festen Teil des Kanals von den Wänden zusammengehalten, während ein Körper im Freistrahl zu einer Aufspaltung des Strahls mit seitlicher Ablenkung der beiden Teilstrahlen führt, also im Nachlauf ein völlig anderes Strömungsbild ergibt wie ein Körper in unendlich ausgedehnter Strömung [5]. In diesem Fall

---

[4] Vgl.z.B. L. Prandtl und O.Tietjens: Hydro- und Aeromechanik Bd.2 S.139. Berlin 1931

[5] Eine genauere Berechnung des Widerstandes lässt sich z.B. für den Fall einer quer zur Strömung gestellten ebenen Platte im Kanal unter dem Einfluss der Düse nach dem Hodographenverfahren durchführen. Vgl. hierzu die Göttinger Dissertation von V. Vâlcovici [1]

hängt also die Ausbildung des Totwassers stark von der Lage des Körpers zur Düse ab; man kann daher nicht mehr hoffen, durch einfache Hinzufügung einer Korrektur zur Anströmgeschwindigkeit aus dem gemessenen Widerstand im Kanal den Widerstand in freier Strömung zu erhalten, weil das Strömungsbild schon in der Umgebung des Körpers sich wesentlich von dem in unbegrenzter Strömung unterscheidet.

Im Einzelnen erhalten wir mit den Gleichungen (63) und (65) für den von einem Flügel oder Widerstandskörper in der Düse hervorgerufenen Vorstau aus (28)

$$\frac{u(-\infty)}{U} = - c_w \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2\pi a/D}}} \tag{66}$$

Entsprechend erhalten wir für die Strahlablenkung aus (29)

$$\frac{v(+\infty)}{U} = + c_a \frac{l}{D} \frac{1}{2\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}} \tag{67}$$

In Bild 4 sind Vorstau in der Düse und Strahlablenkung für verschiedene Lagen des Flügels zur Düse gezeichnet. Aus ihm kann man die durch (38) gegebene Korrektur der gemessenen Beiwerte wegen des Vorstaus in der Düse entnehmen.

Ebenso wie oben erhalten wir für die Korrektur der Anströmgeschwindigkeit am Orte des störenden Körpers aus (30)

$$\frac{u(a)}{U} = - c_w \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2(1+e^{2\pi a/D})} \tag{68}$$

und für die Aufwärtsgeschwindigkeit am Orte des Körpers aus (31)

$$\frac{v(a)}{U} = + c_a \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2(1+e^{-2\pi a/D})} \tag{69}$$

Um aus (68) die Korrektur des Anstellwinkels zu finden, hat man zu beachten, dass bei unserer Festsetzung der positiven Zirkulation der Flügel, wie das auch bei Messungen üblich ist, mit der Saugseite nach unten im Kanal zu denken ist, die Aufwärtsgeschwindigkeit entspricht also einer Verringerung des Anstellwinkels um den Betrag

$$\Delta\alpha = -c_a \frac{\ell}{D} \cdot \frac{28{,}6^\circ}{1+e^{-2\pi a/D}} \tag{70}$$

In Bild 5 sind die beiden durch (68) und (69) gegebenen Korrekturen der Anströmgeschwindigkeit wegen des Widerstandes und des Anstellwinkels wegen des Auftriebes für verschiedene Lage des Flügels zur Düse gezeichnet. Schliesslich erhalten wir für die Verformung des Strahlrandes infolge des Widerstandes aus (48)

$$\frac{\Delta y}{c_w \ell} = \pm \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^{2\pi x/D}-1}{e^{2\pi a/D}+1}} - \frac{2}{\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}}\operatorname{arctg}\frac{e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}-1}{e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}+1}+1}\right) \tag{71}$$

wo das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Strahlrand gilt. Ebenso wird die Verformung des Strahlrandes infolge des Auftriebes nach (49)

$$\frac{\Delta y}{c_a \ell} = \frac{1}{4\pi}\left[\ln \frac{\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)^2+\left(e^{\pi a/D}+\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right)^2}{\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)^2\left(e^{\pi a/D}+\sqrt{e^{2\pi a/D}+1}\right)^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}}\ln\left(e^{\pi x/D}+\sqrt{e^{2\pi x/D}-1}\right)\right], \tag{72}$$

wo das Vorzeichen für beide Strahlränder das gleiche ist. In Bild 6 ist die durch (71) gegebene Verformung des oberen Strahlrandes infolge des Widerstandes für die Abstände $\frac{a}{D/2}$ = 0; 0,25; 0,5; 0,75; und 1 des Körpers von der Düse gezeichnet, in Bild 7 dann noch die durch (72) gegebene Verformung infolge des Auftriebes für die gleiohen Werte von $\frac{a}{D/2}$. Aus beiden Bildern erkennt man deutlich die gleichrichtende Wirkung der Düse, die mit zunehmendem Abstand des Körpers von der Düse sehr rasch abklingt ($\sim e^{-2\pi a/D}$). Die Verformung des Strahlrandes durch das Zusammenwirken von Auftrieb und Widerstand ergibt sich durch einfache Ueberlagerung der beiden Anteile (71) und (72).

XI. Zusammenfassung.

Die ebene Strömung um einen Tragflügel mit nachfolgendem Totwasser - für die Rechnung dargestellt durch eine Wirbelquelle -, der sich in einem Freistrahl vor einer aus zwei parallelen Wänden gebildeten Düse befindet, wird im Bereiche der linearisierten Strahltheorie berechnet durch konforme Abbildung des aus Düse und Freistrahl gebildeten Strömungsgebietes auf die obere Hälfte des Ausseren des Einheitskreises und nachfolgende Anwendung der Methode der Spiegelbilder. Für die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe ist wesentlich, dass man über die Bedingung verschwindender Normalgeschwindigkeit an den festen, bzw. Tangentialgeschwindigkeit an den freien Grenzen hinaus noch glatten Abfluss der Strömung an den beiden Enden der festen Wände verlangt. Dies wird erreicht durch Hinzufügung zweier im Kanal und im Freistrahl singularitätenfreier

Strömungen, von denen die eine physikalisch einem Vorstau in der Düse entspricht, die andere einer Ablenkung des Freistrahles aus seiner ursprünglichen Richtung.

Als Korrekturen erhält man aus der Rechnung einen Abwind und eine Aenderung der Anströmgeschwindigkeit am Orte des Flügels, ferner eine Korrektur der gemessenen Anströmgeschwindigkeit wegen des Vorstaues in der Düse, wenn man die Kanalgeschwindigkeit in üblicher Weise durch den Ueberdruck in der Düsenvorkammer misst. Falls sich der Flügel in der Kanalachse befindet, hängt die Korrektur des Anstellwinkels nur von seinem Auftrieb ab, die beiden Korrekturen der Anströmgeschwindigkeit nur von seinem Widerstand. Die erhaltenen Korrekturformeln gehen für grosse Entfernung des Flügels von der Düse nicht in die durch Spiegelung in der Strömungsebene zu erhaltenden Korrekturformeln für den Flügel im festen Kanal und im reinen Freistrahl über, da in diesen Fällen die Bezugsgrössen andere sind.

Neben den Korrekturgrössen lässt sich aus dem komplexen Potential der Zusatzströmung leicht noch eine erste Näherung für die Verformung der freien Strahlgrenzen durch Auftrieb und Widerstand gewinnen. Diese Verformung sowie die Korrekturgrössen wurden für den Fall eines in der Kanalachse befindlichen Flügels in Abhängigkeit von der Lage des Flügels zur Düse numerisch berechnet.

XII. Schrifttum.

[1] V. V â l c o v i c i : Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen. Dissertation Göttingen 1913 .

[2] L. P o g g i : Sulla variazione da apportarsi ai resultati delle esperienze eseguite al tunnel aerodinamico su di un modello alare. Aerotecnica XI, (1931) 424-445

[3] L. P r a n d t l u. O. T i e t j e n s : Hydro- und Aeromechanik Bd.2 Berlin 1931.

[4] D. K ü c h e m a n n u. F. V a n d r e y : Ueber den Einfluss der Düse (oder des Auffangtrichters) auf Widerstandsmessungen im Freistrahl. Zeitschr.angew. Math.Mech. Bd. 21 (1941) S.17 - 31 .

[5] D. K ü c h e m a n n u. F. V a n d r e y : Ueber den Einfluss der Düse auf Widerstandsmessungen im Freistrahl II. Zeitschr. angew.Math.Mech. Bd.22 (1942) S.15 - 22 .

Unterschriften der Bilder.

Bild 1: Koordinaten in der Strömungsebene.

Bild 2: Konforme Abbildung des Kanals auf die obere Hälfte des Äusseren des Einheitskreises.

Bild 3: Spiegelung der Wirbelquelle am Einheitskreis und an der reellen Achse.

Bild 4: Vorstau in der Düse und Ablenkung des Freistrahles in Abhängigkeit von der Lage des störenden Körpers.

Bild 5: Horizontale und vertikale Komponente der Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Körpers in Abhängigkeit von seiner Lage.

Bild 6: Verformung des Strahlrandes infolge des Widerstandes für verschiedene Lagen des Körpers zur Düse.

Bild 7: Verformung des Strahlrandes infolge des Auftriebes für verschiedene Lagen des Körpers zur Düse.