

Berichts-Nr.: **DLR-IB 224 - 2012 A 71**

Verfasser: **Christian Froh**

Titel: **Implementierung und Erprobung einer Vortex-  
Methode für skalen-auflösende Simulationen  
mit dem DLR-TAU Code**

Diplomarbeit

Datum: November 2012

Auftraggeber:

Auftrags-Nr.:

Vorgesehen für:

**Der Bericht umfasst:**

89 Seiten  
46 Bilder  
6 Tabellen  
77 Literaturstellen

Vervielfältigung und Weitergabe dieser Unterlagen sowie Mitteilung ihres Inhalts an Dritte,  
auch auszugsweise, nur mit Genehmigung  des DLR  des Auftraggebers.

**DLR**

**Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Abteilung C<sup>2</sup>A<sup>2</sup>S<sup>2</sup>E  
Bunsenstr. 10  
37073 Göttingen  
Germany**



### **Kurzfassung:**

In dieser Arbeit wurde die "Synthetic-Eddy Method" (SEM) nach Jarrin et al. (2009) zur Erzeugung turbulenter Schwankungen für Skalen auflösende Simulationen in den DLR-TAU Code implementiert und an generischen Testfällen erprobt. Basierend auf statistischen Verteilungen aus DNS-Daten werden dabei zeitaufgelöste synthetische Geschwindigkeitsschwankungen generiert und der Grundströmung am Einströmrand aufgeprägt. Nach einer Verifikation der Implementierung und Erweiterungen der kompressiblen Randbedingungen werden Sensitivitätsstudien im Rahmen von Large-Eddy Simulationen sowie hybriden RANS/LES Rechnungen der turbulenten Kanalströmung bei  $Re_\tau = 395$  vorgestellt. Darin kann die grundlegende Wirksamkeit der Implementierung nachgewiesen werden, jedoch weicht die entwickelte Turbulenz aufgrund der nicht optimierten Numerik des Strömungslösers von der Referenz-DNS ab. Die Anwendung der SEM auf die Ablösung an einer abgerundeten Stufe zeigt gegenüber der reinen hybriden RANS/LES Simulation eine verbesserte Wiedergabe des mittleren Strömungsfeldes.

## **DEUTSCHES ZENTRUM FÜR LUFT- UND RAUMFAHRT E.V.**

### **Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik**

Institutsleiter:

Verfasser:

(Prof. Dr. Andreas Dillmann)

(Christian Froh)

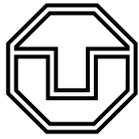
Abteilungsleiter:

(Dr. Dieter Schwamborn)

**Datum:** 15.11.2012  
**Bearbeitet:** Christian Froh

**Abteilung:**  
C<sup>2</sup>A<sup>2</sup>S<sup>2</sup>E

**Bericht:**  
DLR-IB 224 - 2012 A 71



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

Fakultät Maschinenwesen, Institut für Strömungsmechanik, Professur für Strömungsmechanik

---

## Diplomarbeit

# Implementierung und Erprobung einer Vortex-Methode für skalen-auflösende Simulationen mit dem DLR-TAU Code

vorgelegt zur Erlangung des akademischen Grades „Diplomingenieur“

geboren am	<b>Christian Froh</b>
in	26. September 1986
	Hagenow
eingereicht am	27. September 2012
Betreuender Hochschullehrer	Prof. Dr.-Ing. habil. J. Fröhlich
Betreuer	Dr. E. Séverac
Externer Betreuer	Dipl.-Ing. A. Probst, DLR



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>1 Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Grundlagen der Berechnung turbulenter Strömungen</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Grundgleichungen . . . . .	4
2.1.1 Eigenschaften turbulenter Strömungen . . . . .	6
2.2 Large-Eddy Simulation (LES) . . . . .	7
2.2.1 Gefilterte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	9
2.2.2 Feinstruktur-Modellierung . . . . .	10
2.3 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) . . . . .	12
2.3.1 Spalart-Allmaras Turbulenzmodell . . . . .	13
2.4 Hybride RANS / LES Methoden . . . . .	14
2.4.1 Detached-Eddy Simulation (DES) . . . . .	16
2.4.2 Delayed Detached-Eddy Simulation (DDES) . . . . .	18
2.4.3 Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES) . . . . .	19
2.5 Strömungslöser DLR-TAU . . . . .	21
2.5.1 Räumliche Diskretisierung . . . . .	21
2.5.2 Zeitliche Diskretisierung . . . . .	23
2.5.3 Prädiktionierung . . . . .	24
2.5.4 Mehrgitter-Verfahren . . . . .	25
2.6 Randbedingungen . . . . .	25
2.6.1 Einlass-Randbedingungen . . . . .	27
2.6.2 Nicht-reflektierende Auslass-Randbedingungen . . . . .	28
<b>3 Erzeugung turbulenter Einström-Randbedingungen</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1 Synthetic-Eddy Methode (SEM) . . . . .	33
3.2 Divergenzfreie Synthetic-Eddy Methode (DF-SEM) . . . . .	39
3.3 Voruntersuchung SEM / DF-SEM . . . . .	42
3.3.1 Konstantes Geschwindigkeitsprofil . . . . .	43
3.3.2 Variables Geschwindigkeitsprofil - turbulente Kanalströmung $Re_\tau = 395$ . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Skalen-auflösende Simulation einer turbulenten Kanalströmung <math>Re_\tau = 395</math></b>	<b>52</b>
4.1	Numerische Einstellungen	52
4.1.1	Rechengebiet	52
4.1.2	Berechnungsparameter	54
4.1.3	Korrektur der Randbehandlung für skalen-auflösende Simulationen	55
4.1.4	Einfluss der Prädiktionierung	57
4.2	Auswertung	59
4.2.1	Referenzlösung LES	59
4.2.2	Referenzlösung IDDES	64
4.2.3	Sensitivitätsstudie	67
<b>5</b>	<b>Detached-Eddy Simulation einer abgerundeten Stufenströmung</b>	<b>71</b>
5.1	Numerische Einstellungen	71
5.1.1	Rechengebiet	71
5.1.2	Berechnungsparameter	73
5.1.3	Einlass-Randbedingungen	74
5.2	Auswertung	75
5.2.1	Zeitlich gemittelte Strömung	75
5.2.2	Instationäre Strömung	84
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>86</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>90</b>
	<b>Anhang</b>	<b>95</b>
A.1	Vortex-Methode (VM)	95
A.2	Strömungsprofile der LES-WALE-Rechnung	97

# Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole	Einheit	Bedeutung
$a$	m/s	Schallgeschwindigkeit
$a_{ij}$	m/s	Cholesky-Zerlegung
$c_p, c_v$	J/kg/K	Wärmekapazität
$C_{DES}$	-	DES-Modellkonstante
$C_f$	-	Reibungsbeiwert
$C_p$	-	Druckbeiwert
$C_S$	-	Smagorinsky-Konstante
$C_W$	-	WALE-Konstante
$d, d_w$	m	Wandabstand in Normalrichtung
$E$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	spezifische Totalenergie
$F_i$	N/m <sup>3</sup>	volumenspezifische Einzelkraft
$H$	m	Kanalhalbweite
$k, k'$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	turbulente kinetische Energie
$K$	-	<i>cut-off</i> -Parameter
$l, L$	m	Länge
$l_\tau$	m	Wandeinheit
$L_t$	m	integrale Längenskale
$Ma$	-	Machzahl
$n$	-	Normalrichtung
$N$	-	Wirbelanzahl
$p$	N/m <sup>2</sup>	Druck
$Pr$	-	Prandtl-Zahl
$Pr_t$	-	turbulente Prandtl-Zahl
$q_i$	W/m <sup>2</sup>	Wärmestromdichte
$Q$	1/s <sup>2</sup>	Q-Kriterium
$R$	J/kg/K	Gaskonstante
$R_{ij}$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Reynoldsspannungstensor
$R_L^G$	-	Transformationsmatrix
$Re$	-	Reynoldszahl
$s$	-	Gitterstreckung
$Sr$	-	Strouhalzahl
$S_{ij}$	1/s	Scherratenstensor
$t$	s	Zeit
$T$	K	Temperatur
$T_p$	s	Durchströmperiode
$T_m$	s	Mittelungsdauer
$u^+$	-	Geschwindigkeit

Lateinische Symbole	Einheit	Bedeutung
$u_\tau$	m/s	Wandreibungsgeschwindigkeit
$U_m$	m/s	Durchflussgeschwindigkeit
$u, v, w$	m/s	Geschwindigkeitskomponenten
$\langle u'u' \rangle, \langle v'v' \rangle, \langle w'w' \rangle$	$\text{m}^2/\text{s}^2$	Normalkomponenten des RST
$\langle u'v' \rangle$	$\text{m}^2/\text{s}^2$	Scherspannung des RST
$V_B$	$\text{m}^3$	Volumeninhalt der Wirbelbox
$W_E, W_A$	m	Wirkungsweise Dämpfungszone
$\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$		konservative Variablen
$\vec{W}_p = \{\rho, u, v, w, p\}^T$		primitive Variablen
$x, y, z$	m	kartesische Koordinaten
$y^+$	-	Wandabstand in y-Richtung

Griechische Symbole	Einheit	Bedeutung
$\alpha_i$	m/s	Wirbelintensität der DF-SEM
$\gamma$	-	Isentropenexponent
$\delta$	m	Grenzschichtdicke
$\delta_{ij}$	-	Kronecker-Symbol
$\varepsilon$	$\text{m}^2/\text{s}^3$	turbulente Dissipationsrate
$\varepsilon_i$	-	Wirbelintensität
$\theta$	m	Impulsverlustdicke
$\kappa$	-	von Kármán-Konstante
$\kappa^{(2)}, \kappa^{(4)}$	-	Skalierungsparameter der künstlichen Dissipation
$\lambda_i$		Eigenwerte
$\mu$	kg/m/s	dynamische Viskosität
$\mu_t$	kg/m/s	dynamische Wirbelviskosität
$\nu$	$\text{m}^2/\text{s}$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	$\text{m}^2/\text{s}$	Wirbelviskosität
$\tilde{\nu}$	$\text{m}^2/\text{s}$	Spalart-Allmaras Viskosität
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$\sigma$	m	Wirbelradius
$\sigma^d$	1/s	Dämpfungskoeffizient der Dämpfungszone
$\sigma_{ij}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Spannungstensor
$\tau$	s	Pseudo-Zeit
$\tau_w$	$\text{N}/\text{m}^2$	Wandschubspannung
$\tau_{ij}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Feinstruktur-Spannungstensor
$\Psi$	-	<i>low-Reynolds</i> -Korrektur
$\vec{\omega}$	1/s	Wirbelstärke
$\Omega_{ij}$	1/s	Rotationsratentensor

einige Indizes	Bedeutung
$A$	Austritt
$E$	Eintritt
max	Maximum
min	Minimum
$n$	Normal
$ref$	Referenz
$t$	Tangential
$w, W$	Wand

Sonstige Symbole	Bedeutung
$\langle \dots \rangle, \langle \dots \rangle_t$	zeitliche Mittelung
$\langle \dots \rangle_z$	räumliche Mittelung in z-Richtung

Abkürzungen	Bedeutung
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
DDES	Delayed Detached-Eddy Simulation
DES	Detached-Eddy Simulation
DF-SEM	Divergenzfreie Synthetic-Eddy Methode
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DNS	Direkte Numerische Simulation
GIS	Grid Induced Separation
IDDES	Improved Delayed Detached-Eddy Simulation
LES	Large-Eddy Simulation
LLM	Log-Layer Mismatch
LU-SGS	Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel
MSD	Modelled Stress Depletion
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
RB	Randbedingung
RSM	Reynoldsspannungsmodell
RST	Reynoldsspannungstensor
SA	Spalart-Allmaras
SEM	Synthetic-Eddy Methode
SST	Shear Stress Transport
TKE	turbulente kinetische Energie
VM	Vortex-Methode
WALE	Wall Adapting Local Eddy-Viscosity
WMLES	wall-modeled Large-Eddy Simulation
WRLES	wall-resolved Large-Eddy Simulation



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Der übliche Berechnungsansatz mit Reynolds-gemittelten Navier-Stokes bzw. RANS-Gleichungen (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*, RANS) ist für viele Strömungskonfigurationen ein geeignetes Mittel der Analyse und Vorhersage statistisch stationärer Strömungen. Jedoch zeigen reine RANS-Turbulenzmodelle bei stark instationären Anwendungen, wie die turbulente Grenzschichtablösung an stumpfen Körpern, zum Teil deutliche Schwächen.

Beispielsweise kennzeichnet die Genauigkeit der numerischen Berechnung einer Grenzschichtablösung die Güte einer CFD-Anwendung (*computational fluid dynamics*, CFD). Der Ablösepunkt einer Grenzschicht beeinflusst das Strömungsverhalten maßgeblich, wobei ingenieurtechnische Fragestellungen, wie Auftrieb und Widerstand, entscheidend davon anhängen [62].

Aus diesen Gründen gewinnen skalen-auflösende Simulationsmethoden, wie die Large-Eddy Simulation (LES), in der numerischen Strömungsmechanik zunehmend an Bedeutung. Aufgrund des überwiegend turbulenten Charakters zahlreicher natürlicher und technischer Strömungsvorgänge bietet sich ein breites Einsatzspektrum in Forschung und Entwicklung. Als technische Anwendungsbeispiele können hier zum Beispiel die Mischungsprozesse in der Chemieindustrie oder sämtliche aerodynamische Untersuchungen in der Automobil- bzw. Luft- und Raumfahrtindustrie genannt werden. Zudem führen numerische Strömungssimulationen zu einem besseren Verständnis der natürlichen Strömungsvorgänge in Gewässern oder innerhalb von Lebewesen [22].

Die numerische Untersuchung erfolgt dabei mit unterschiedlichen Ansätzen. Skalen-auflösende Methoden mit hohem numerischen Aufwand, wie die Direkte Numerische Simulation (DNS) oder die Large-Eddy Simulation (LES), liefern im Allgemeinen sehr gute Ergebnisse, sind jedoch auf kleine Reynoldszahlen beschränkt. RANS-Simulationen erlauben zwar höhere Reynoldszahlen, haben jedoch zum Teil erhebliche Probleme bei der korrekten Vorhersage des Ablösepunkts.

Aufgrund der jeweiligen Vor- und Nachteile wurden in jüngerer Zeit hybride RANS / LES-Methoden entwickelt, die gerade bei Strömungskonfigurationen mit einer hohen Reynoldszahl, wie häufig in der Luft- und Raumfahrt, einen vielversprechenden Simulationsansatz darstellen [26].

Diese numerisch aufwendigen Simulationsmethoden benötigen jedoch realistische Einströmrandbedingungen, die zudem möglichst physikalische Zeitsignale der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen enthalten. Da im Allgemeinen, insbesondere bei industriellen Anwendungen, keine vollständigen Datensätze der Strömungsprofile vorhanden sind, müssen korrekt abgestimmte, synthetische Turbulenzmethoden verwendet werden. Dabei müssen statistische Eigenschaften einer turbulenten Strömung berücksichtigt werden.

Ein weiteres Einsatzgebiet der synthetischen Turbulenzmethoden ist direkt im Strömungsfeld am RANS / LES-Übergang. Mit dessen Hilfe werden die notwendigen Geschwindigkeitsfluktuationen im LES-Bereich sehr viel schneller angefaht, sodass sich ein kürzerer Übergangsbereich, siehe *grey area* [68], einstellt.

## 1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit soll nach Literaturangaben eine geeignete synthetische Turbulenzmethode implementiert, verifiziert und erprobt werden. Als Strömungslöser wird dabei der am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) verwendete kompressible DLR-TAU-Code [63] genutzt. Die entsprechenden Arbeiten werden am DLR-Standort Göttingen in der Abteilung C<sup>2</sup>A<sup>2</sup>S<sup>2</sup>E (Center for Computer Applications in AeroSpace Science and Engineering) durchgeführt.

Die hier gewählte synthetische Turbulenzmethode Synthetic-Eddy Method (SEM) von JARRIN et al. (2009) [37] stellt einen geeigneten Ansatz zur Erzeugung turbulenter Einströmdaten dar. Die SEM generiert mit Hilfe zufällig verteilter Wirbelkerne räumlich kohärente Geschwindigkeitsfluktuationen. Diese synthetischen Wirbelstrukturen werden über eine beliebig definierte Einströmebene in das eigentliche Strömungsgebiet eingeführt und regen dort den Übergang zu einer physikalischen Turbulenz an. Dabei tritt jedoch ein Entwicklungsbereich mit endlicher Länge auf. Beispielsweise gibt JARRIN [37] bei einer turbulenten Kanalströmung mit  $Re_\tau=395$  eine Länge von 10-12 Kanalhalbwerten an. Auch andere Ansätze weisen einen solchen Übergangsbereich auf.

Im Vorfeld der Implementierung der SEM in den DLR-TAU-Code wird eine Voruntersuchung der reinen Methode mit einem separaten Hilfsprogramm durchgeführt. Grundlegende Eigenschaften der SEM können somit, ohne Kopplung mit einer Strömungssimulation, bestätigt und zusätzliche Modifikationen untersucht werden. Zudem kann der Einfluss der jeweiligen Eingabegrößen abgeschätzt und mögliche Fehler bei der Implementierung frühzeitig erkannt werden.

Als einfacher Testfall einer turbulenten Strömung dient die ebene, turbulente Kanalströmung mit  $Re_\tau=395$ . Da eine Vielzahl an experimentellen und numerischen Vergleichsdaten vorhanden ist, stellt diese Strömung eine geeignete Konfiguration zur Erprobung der synthetischen Turbulenz dar. Analytische Gesetzmäßigkeiten sind ebenfalls bekannt [57].

Die SEM wird direkt an der Eintrittsebene verwendet, wobei die entsprechenden Geschwindigkeitsfluktuationen als Dirichlet-Randbedingung vorgegeben werden. Dabei soll ein lang gestreckter Kanal eine vollständige Entwicklung der Turbulenz ermöglichen.

Neben einer wand aufgelösten LES (WRLES) kommt der hybride RANS / LES-Ansatz Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES) nach TRAVIN et al. (2006) [75] zum Einsatz. Mit den jeweiligen Modifikationen der IDDES ist es möglich, eine wandmodellerte LES (WMLES) durchzuführen, sodass zwischen einem wandnahen RANS-Bereich und einem wandfernen, LES-ähnlichen Bereich unterschieden werden kann. Die entsprechenden Rechnungen der turbulenten Kanalströmung dienen Untersuchungen zur grundlegenden Eignung der instationären Eintrittsrandbedingungen, wobei die weniger rechenintensive IDDES eine gezielte Variation der Modellparameter der synthetischen Turbulenz zur Analyse ihrer Sensitivitäten erlaubt. Zudem stellen die anwendungsnahen RANS / LES-Methoden, neben den reinen RANS-Methoden, den eigentlichen Simulationsansatz des DLR-TAU-Codes dar. Umfassende LES-Erfahrungen wurden mit dem DLR-TAU-Code bisher noch nicht gemacht.

Eine weitere anwendungsorientierte Strömungskonfiguration stellt die Strömung entlang einer abgerundeten Stufe dar. Die leicht gekrümmte Oberfläche der Stufe beeinflusst das Ablöseverhalten der turbulenten Grenzschicht erheblich, sodass im Gegensatz zur bekannten rückspringenden Stufe, die Sensitivitäten der jeweiligen Simulationsansätze sehr viel deutlicher zum Tragen kommen. Als Referenz dienen hier zum einen experimentelle Untersuchungen von ZHANG und ZHONG [77] und zum anderen numerische Untersuchungen von LARDEAU und LESCHZINER [41] bzw. BENTALEB et al. [7] mit fein aufgelösten LES-Rechnungen.

Neben einer stationären 2D-RANS-Rechnung mit dem bekannten Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell kommt die instationäre IDDES als hybride RANS / LES-Methode zum Einsatz. Dabei wird zum einen das synthetisch turbulente Geschwindigkeitsfeld der SEM am Eintritt vorgegeben und zum anderen die IDDES ohne synthetische Turbulenz verwendet. Je nach Eintrittsrandbedingungen und Gitterauflösung ergibt sich eine wandmodellerte LES (WMLES) oder eine klassische DDES.

Beginnend mit den strömungstechnischen Grundlagen erfolgt im zweiten Kapitel eine grundlegende Beschreibung der unterschiedlichen Berechnungsansätze für turbulente Strömungen. Neben der Large-Eddy Simulation (LES) und den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes bzw. RANS-Gleichungen wird ein kurzer Überblick über aktuelle hybride RANS / LES-Methoden gegeben. Dabei wird insbesondere auf die im DLR-TAU-Code verfügbare Detached-Eddy Simulation (DES) und deren Erweiterungen eingegangen. Zudem werden einige technische Details des kompressiblen DLR-TAU-Codes kurz vorgestellt. Die Besonderheiten von Randbedingungen kompressibler Strömungssimulationen werden ebenfalls erläutert, wobei notwendige Erweiterungen für skalen-auflösende Simulationen mit angegeben werden. Im Anschluss dazu wird im dritten Kapitel die eigentliche synthetische Turbulenzmethode Synthetic-Eddy Methode (SEM) von JARRIN et al. (2009) [37] vorgestellt. Die bereits erwähnte Voruntersuchung der SEM mit Hilfe eines separaten Hilfsprogramms ist dort ebenfalls dargestellt. Im darauf folgenden Kapitel wird auf die Strömungssimulation der turbulenten Kanalströmung in Verbindung mit der SEM eingegangen. Die entsprechenden Ergebnisse werden ausgewertet, wobei Auffälligkeiten gezeigt und mögliche Modifikationen vorgestellt werden. Des Weiteren werden die Ergebnisse der Sensitivitätsstudie der synthetischen Turbulenz angegeben. Das fünfte Kapitel beschreibt die Ergebnisse der Strömung entlang der abgerundeten Stufe. Dabei wird neben der zeitlich gemittelten Strömung auch die instationäre Strömung betrachtet. Zudem werden die jeweiligen Unterschiede der IDDES-Rechnungen mit und ohne synthetischer Turbulenz gezeigt. Abschließend werden im sechsten Kapitel die Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und mögliche Einschränkungen bzw. Verbesserungen genannt.

# 2 Grundlagen der Berechnung turbulenter Strömungen

## 2.1 Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik beruhen auf dem Erhaltungsprinzip der Größen Masse, Impuls und Energie [72]. Die Grundgleichungen für Newtonsche Fluide werden auch als Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet. Die Navier-Stokes-Gleichungen umfassen für inkompressible Strömungen zum einen die Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung in einem geschlossenen Kontrollvolumen beschreibt und zum anderen die Gleichungen der Impulserhaltung. Bei kompressiblen Strömungen sind zudem die Informationen der Temperatur für die Berechnung der Dichte  $\rho$  und der dynamischen Viskosität  $\mu$  notwendig. Die untersuchten Größen ändern sich sowohl durch den Strömungstransport über die Grenzen (Konvektion) des ortsfesten Kontrollvolumens (Eulersche Betrachtungsweise) als auch durch den Molekulartransport (Diffusion). Die genannten Erhaltungsgleichungen werden daher auch als Transportgleichungen bezeichnet.

Die folgenden Gleichungen sind für ein kartesisches Koordinatensystem  $x_i = (x_1, x_2, x_3)^T$  mit zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten  $u_i = (u_1, u_2, u_3)^T$  in Index-Schreibweise in ihrer differentiellen Form dargestellt [72] [23]. Die Einsteinsche Summenregel ist zu beachten. Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

### Massenerhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

### Impulserhaltung

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad , \quad (2.2)$$

### Energieerhaltung

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j E)}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i u_i \quad . \quad (2.3)$$

Die gesuchten Größen können als konservative Variablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$  oder als primitive Variablen  $\vec{W}_p = \{\rho, u, v, w, p\}^T$  bezeichnet werden. Dabei ist zu beachten, dass  $E$  die totale spezifische Energie

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (2.4)$$

und  $\sigma_{ij}$  den Spannungstensor bezeichnet:

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.5)$$

Für Luft als ideales Gas kann die dynamische Viskosität  $\mu(T)$  nach Sutherland wie folgt berechnet werden ( $T_0 = 273 \text{ K}$  und  $\mu(T_0) = 1.716 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m/s}$ ) [2]:

$$\mu(T) = \mu(T_0) \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 110.4 \text{ K}}{T + 110.4 \text{ K}} \quad (2.6)$$

Des Weiteren bezeichnet  $q_j$  den Wärmestromdichtevektor

$$q_j = -c_p \frac{\mu(T)}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

wobei die Temperatur  $T$  über das ideale Gasgesetz

$$T = T(p, \rho) = \frac{p}{R\rho} \quad (2.8)$$

mit dem Druck  $p$  und der Dichte  $\rho$  gekoppelt ist. Für Luft gilt: Isentropenexponent  $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ , Prandtl-Zahl  $Pr = 0.72$  und Gaskonstante  $R = c_p - c_v = 287 \text{ J/kg/K}$ .

### Kennzahlen einer Strömung

Bei der Untersuchung verschiedener Strömungskonfigurationen ist es ratsam, gewisse Strömungsphänomene bzw. deren Kenngrößen einheitlich zu beschreiben. Mit z.T. dimensionslosen Referenzgrößen lassen sich physikalisch ähnliche Vorgänge direkt miteinander vergleichen. Als wichtigste strömungsmechanische Kenngröße gilt die Reynoldszahl

$$Re_L = \frac{UL\rho}{\mu} \quad (2.9)$$

Sie dient zur Vergleichbarkeit der auftretenden Kräfte innerhalb der Strömung. Die Reynoldszahl ist über das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften (Reibung) definiert und bezieht sich auf eine charakteristische Länge und Geschwindigkeit. Eine ähnliche Kenngröße ist die Machzahl  $Ma$  mit der Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\gamma RT}$  als Referenzgröße:

$$Ma = \frac{U}{a} \quad (2.10)$$

Wandnahe Strömungen werden durch Reibungskräfte stark beeinflusst und werden meist mit dimensionslosen Größen in Wandeinheiten beschrieben:

$$y^+ = \frac{y}{l_\tau} \quad (2.11)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (2.12)$$

Als Normierungsgrößen dienen die Wandreibungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  und die Wandeinheit  $l_\tau$ , wobei für dessen Berechnung die Wandschubspannung  $\tau_w$  benötigt wird:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \rho\nu \left. \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_W, \quad (2.13)$$

$$l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (2.14)$$

### 2.1.1 Eigenschaften turbulenter Strömungen

Turbulente Strömungen treten in allen Bereichen der Strömungsmechanik auf und sind im Gegensatz zu laminaren Strömungen bzw. Schichtenströmung deutlich häufiger vertreten. Eine turbulente Strömung enthält unregelmäßige, instationäre und dreidimensionale Strömungsschwankungen, die einen erheblichen Einfluss auf die untersuchten physikalischen Vorgänge ausüben [57] [23].

Das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld variiert in Zeit und Raum sehr stark, wobei diese Schwankungen in große und kleine Skalen unterschieden werden können. Als Längenskala kann beispielsweise der maximale Wirbeldurchmesser bezeichnet werden, während die minimale Zeitdauer einer Wirbeldrehung eine Zeitskala definieren kann. Große Wirbelskalen hängen sehr stark von der Geometrie und den Randbedingungen ab. Diese Wirbel sind häufig richtungsabhängig, d.h. anisotrop. Die kleinen Wirbelskalen einer turbulenten Strömung sind deutlich gleichförmiger und können näherungsweise als isotrop bezeichnet werden.

Die Fluidelemente einer turbulenten Strömung können sich unter anderem transversal zur Hauptströmung bewegen und somit einen zusätzlichen Impulsaustausch quer zur Hauptströmungsrichtung erwirken. Es findet eine verstärkte Vermischung statt, wobei im statistischen Mittel turbulente Scheinspannungen erzeugt werden.

Da die Strömungsgeschwindigkeit in Zeit und Raum fluktuiert, ist eine statistische Betrachtungsweise zu empfehlen. Im Allgemeinen kann mit Hilfe der Reynolds-Zerlegung die momentane Geschwindigkeitskomponente durch einen Mittelwert  $\langle u_i \rangle$  und eine Schwankungsgröße  $u'_i$  beschrieben werden. In einigen Strömungskonfigurationen ist es sinnvoll eine weitere Komponente zu berücksichtigen, sodass bestimmte Grundfrequenzen der Strömung mit Hilfe eines Phasenmittels erfasst werden. Im Folgenden wird auf eine Phasenmittelung verzichtet. Die Reynolds-Zerlegung der Geschwindigkeitskomponenten lautet somit:

$$u_i(x_j, t) = \langle u_i \rangle(x_j, t) + u'_i(x_j, t). \quad (2.15)$$

Des Weiteren ergeben sich gewisse statistische Eigenschaften, die als Rechenregeln der Reynolds-Mittelung verstanden werden können [23]:

$$\langle \langle u \rangle v \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle, \quad \langle \langle u \rangle \rangle = \langle u \rangle \quad \text{und} \quad \langle u' \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Die im Mittel auftretenden Scheinsspannungen werden auch als Reynoldsspannungen bezeichnet. Aufgrund mehrdimensionaler Wechselwirkungen ergibt sich ein symmetrischer Reynoldsspannungstensor (RST)  $-\rho\langle u'_i u'_j \rangle$ , wobei in inkompressiblen Strömungen nur  $\langle u'_i u'_j \rangle$  betrachtet wird ( $\rho = \text{const.}$ ). Die Einzelkomponenten werden dabei auch als Momente 2. Ordnung verstanden. Diese spielen bei der Simulation turbulenter Strömungen mittels Large-Eddy Simulation (LES), siehe Abschnitt 2.2, oder Reynolds-gemittelter Navier-Stokes-Gleichungen (RANS), siehe Abschnitt 2.3, eine bedeutende Rolle. Mit der Summe der Normalkomponenten des Reynoldsspannungstensors (RST) lässt sich die turbulente kinetische Energie (TKE) einer Strömung berechnen:

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \quad . \quad (2.17)$$

Aufgrund der Nichtlinearität der turbulenten Vorgänge ergeben sich bei der Modellierung sogenannte Schließungsprobleme. Die jeweiligen Simulationsansätze müssen diese berücksichtigen.

Im Allgemeinen gibt es für die Turbulenz keine eindeutige analytische Beschreibung. Gewisse Eigenschaften können jedoch genannt werden [23].

- Regellosigkeit
- dreidimensionale, instationäre Wirbelbewegung unterschiedlicher Skalen
- Dissipation durch Reibung
- Diffusion durch starken turbulenten Stofftransport
- Mehrskaligkeit

Im Folgenden werden gängige Ansätze der numerischen Berechnung turbulenter Strömungen kurz erläutert. Für einen detaillierteren Einblick wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Beginnend mit der skalen-auflösenden Large-Eddy Simulation erfolgt im Anschluss eine kurze Vorstellung des klassischen RANS-Ansatzes (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*), der insbesondere für statistisch stationäre Strömungen weitreichende Vereinfachungen ermöglicht. Aufgrund der jeweiligen Vor- und Nachteile der beiden Berechnungsmethoden haben sich in jüngerer Zeit hybride RANS / LES-Methoden entwickelt, die gerade für komplexe bzw. industrielle Anwendungen interessant sind.

## 2.2 Large-Eddy Simulation (LES)

Das Ziel einer Large-Eddy-Simulation (LES) ist das direkte Auflösen großer Wirbelskalen. Die zeitlichen und räumlichen Bewegungen der grobskaligen turbulenten Strukturen werden dabei explizit durch die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) berechnet, während die kleinen, nicht aufgelösten Wirbelskalen durch ein Feinstrukturmodell approximiert werden [22].

Aufgrund des annähernd universellen, isotropen Charakters der kleinskaligen Turbulenzstrukturen ist ihre Modellierung im Vergleich zu den großen, anisotropen Wirbeln sehr viel einfacher. Die Hauptaufgabe dieser Feinstrukturmodellierung besteht darin den Dissipationsbereich des Energiespektrums

bzw. der Energiekaskade korrekt abzubilden, siehe beispielsweise POPE [57]. Das Feinstrukturmodell muss somit das korrekte Maß an turbulenter kinetischer Energie dissipieren, wobei dessen modellierter Anteil bei steigender Auflösung der Wirbelskalen sinkt. Der Grenzfall mit verschwindendem Feinstruktur-Anteil stellt eine Direkte Numerische Simulation (DNS) dar.

Da bei einer LES der Großteil der turbulenten kinetischen Energie direkt erfasst wird (rund 80% [22]), können ingenieurtechnische Fragestellungen, wie beispielsweise starke Strömungsablösungen an Konturen, technische Akustik bzw. Verbrennungsvorgänge qualitativ besser behandelt werden.

Die Trennung der großen und kleinen Skalen, die als Grobstruktur (*grid scale*, GS) bzw. Feinstruktur (*sub-grid scale*, SGS) bezeichnet werden, erfolgt mit Hilfe einer räumlichen Filteroperation. Feldgrößen, wie Geschwindigkeit, Druck oder beliebige Skalare können entsprechend ihrer Anteile aufgespalten werden:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad , \quad p = \bar{p} + p' \quad , \quad \phi = \bar{\phi} + \phi' \quad . \quad (2.18)$$

Die räumliche Filterung kann beispielsweise für einen allgemeinen, dreidimensionalen Fall mit Hilfe eines Faltungsintegrals ( $\bar{u} = G * u$ ) wie folgt dargestellt werden [22]:

$$\bar{u}(\vec{x}) = \int_{\Omega} G[\vec{x}, \vec{\xi}, \Delta(\vec{x})] u(\vec{\xi}) d\vec{\xi} \quad . \quad (2.19)$$

Dabei bezeichnet  $G[\vec{x}, \vec{\xi}, \Delta(\vec{x})]$  die Filterfunktion,  $\Delta(\vec{x})$  die ortsabhängige Filterweite und  $\vec{x}$  bzw.  $\vec{\xi}$  die Vektoren des Strömungsgebiets  $\Omega$ . Es gilt: je größer die Filterweite  $\Delta(\vec{x})$ , desto glatter der Funktionsverlauf  $\bar{u}(\vec{x})$ . Wichtige Filterfunktionen sind beispielsweise der Rechteck-Filter, der Fourier-cutoff-Filter und der Gauß-Filter [22].

Zu beachten ist der Unterschied zwischen Filterung und Mittelung, hier beispielsweise das Reynolds-Mittel nach Gl. (2.15). Eine örtlich gemittelte Größe ist unabhängig vom Ort, wohingegen bei einer Filterung die Abhängigkeit bestehen bleibt. Weitere wichtige Eigenschaften der Filterung lauten:

$$\overline{\bar{a} \bar{b}} \neq \bar{a} \bar{b} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\bar{a}} \neq \bar{a} \quad . \quad (2.20)$$

Die explizite Anwendung der Filterung kommt bei LES-Rechnungen lediglich zum Einsatz, wenn beispielsweise die gewählte Filterweite  $\Delta$  größer ist als die Gitterweite  $\Delta_G$  bzw. die dynamische Erweiterung von GERMANO et al. [29] verwendet werden soll. Die eher als Konzept zu verstehende Filterung erfolgt bereits nach dem Schumannschen Ansatz durch die Diskretisierung der Strömungsgleichungen. Das numerische Verfahren, wie die Finite-Volumen-Methode [20], ermöglicht indirekt eine implizite Filterung der Feldgrößen. Als Filtergröße kann somit die Gitterweite  $\Delta = \Delta_G$  bezeichnet werden, wobei demnach kleinskaligere Strukturen durch das gewählte Diskretisierungsschema nicht korrekt aufgelöst werden können. Zu beachten ist außerdem das Nyquist-Kriterium, welches die größte darstellbare Wellenzahl  $\xi_N = 2\pi/(2\Delta)$  definiert. Die bereits erwähnte Filterfunktion  $G[\vec{x}, \vec{\xi}, \Delta(\vec{x})]$  ist somit in ihrer genauen Form nicht bekannt und kann am ehesten als Rechteck-Filter verstanden werden. Eine umfangreiche Darstellung der theoretischen Grundlagen findet sich bei FRÖHLICH [22].

## 2.2.1 Gefilterte Navier-Stokes-Gleichungen

Bei Anwendung der räumlichen Filteroperation nach Gl. (2.19) auf die Strömungsgleichungen (2.1)-(2.3) ergeben sich die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen. Da im kompressiblen Fall meist konservative Variablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$  verwendet werden, hat sich der Einsatz von Favre- bzw. massegemittelten Größen bewährt [76]. Eine Favre-gemittelte Größe ist definiert als  $\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}/\bar{\rho}$ . Die gefilterten, kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \tilde{F}_i \quad , \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \tilde{F}_i u_i \quad . \quad (2.23)$$

Nach weiteren Umformungen und Vereinfachungen, auf die hier nicht eingegangen werden soll (siehe beispielsweise [76] bzw. [42]), ergeben sich die gefilterten Impulsgleichungen

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \tilde{F}_i \quad (2.24)$$

und die gefilterte Energiegleichung

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_j} + \bar{\rho} \tilde{F}_i u_i \quad . \quad (2.25)$$

Die nicht-aufgelösten Wirbelskalen werden in den Gleichungen (2.24) und (2.25) mit Hilfe eines Feinstruktur-Spannungstensors  $\tau_{ij}$  und eines Feinstruktur-Wärmestromvektors  $Q_i$  modelliert. Bei Verwendung des Wirbelviskositätsansatz nach Boussinesq ( $\tau_{ij}^{a,mod} = -2\mu_t S_{ij}$ ) ergibt sich für den zu modellierenden Feinstruktur-Spannungstensor

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \quad (2.26)$$

und bei Beachtung der Spurfreiheit (bei inkompressiblen Strömungen  $\tilde{S}_{kk} = 0$ ) folgender Ansatz:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\mu_t \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (2.27)$$

Hierbei bezeichnet  $\tilde{S}_{ij}$  den Deformationsgeschwindigkeitstensor bzw. Scherrate der gefilterten Geschwindigkeit. Der hier modellierte Term  $\tau_{ij}$  beschreibt ausschließlich den anisotropen Anteil des Feinstruktur-Spannungstensors. Die Spur  $\tau_{kk}$  wird im inkompressiblen Fall meist zum Druck  $p$  hinzuaddiert [22], während sie im vorliegenden kompressiblen Fall vernachlässigt wird [42]. Der Feinstruktur-Wärmestromvektor  $Q_i$  wird mit Hilfe einer turbulenten Diffusion modelliert. Diese ergibt sich bei Verwendung einer turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t \in [0.3, 0.6]$  [76] ebenfalls aus der weiter unten definierten turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$  des Feinstrukturmodells. Der modellierte Feinstruktur-Wärmestrom-

vektor mit der Wärmekapazität  $c_p$  lautet:

$$Q_i = \bar{\rho} c_p \left( \widetilde{T u_i} - \widetilde{T} \widetilde{u_i} \right) = -c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i} \quad . \quad (2.28)$$

Die Verwendung von Favre-gemittelten Größen bietet mehrere Vorteile. Zum einen können bekannte Konzepte inkompressibler LES-Methoden verwendet und zum anderen müssen keine zusätzlichen Korrelationen in den gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden. Ein zusätzlicher Feinstruktur-Massenstrom  $m_i = \overline{\rho u_i} - \bar{\rho} \bar{u}_i$  müsste ebenfalls, u.a. in der Kontinuitätsgleichung (2.21), modelliert werden. Jedoch gehen bei der Favre-Mittelung einige Informationen verloren [9]. Im Folgenden werden inkompressible Strömungen behandelt, sodass auf die Nomenklatur der Favre-Mittelung verzichtet werden kann.

## 2.2.2 Feinstruktur-Modellierung

Wie bereits erwähnt, hat das Feinstrukturmodell die Aufgabe, den Einfluss der nicht-aufgelösten Wirbelskalen nachzubilden. Die notwendige Dissipation der turbulenten kinetischen Energie muss im entsprechenden Spektralbereich korrekt modelliert werden. Hierbei können die bekannten RANS-Ansätze, wie algebraische Modelle, Ein- und Zweigleichungsmodelle bzw. Reynoldsspannungsmodelle genutzt werden [22]. Da die Filterweite  $\Delta$  des Gitters bereits eine geeignete Längenskala darstellt, können relativ einfache Ansätze verwendet werden. Einfache Wirbelviskositätsmodelle, ohne zusätzliche Transportgleichungen, haben sich bei den LES-Anwendungen bewährt.

Die benötigte Filterweite  $\Delta$  ergibt sich dabei direkt aus der verwendeten Gitterschrittweite  $\Delta_G$ . Gleichförmige, isotrope Rechengitter sind jedoch aus geometrischen Gründen nicht immer möglich, sodass bei den üblichen anisotropen Gittern eine geeignete Referenzlänge definiert werden muss. Folgende mögliche Definitionen haben sich bewährt:

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} = (Vol)^{1/3} \quad , \quad (2.29)$$

$$\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \quad . \quad (2.30)$$

### Smagorinsky-Modell

Das bekannteste und älteste Modell ist das Smagorinsky-Modell (SM) [66]. Dieses Modell basiert auf dem Boussinesq-Ansatz  $\tau_{ij}^{a,mod} = -2\mu_t S_{ij}$  und einer turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t = \mu_t/\rho$ . Dabei kann die Wirbelviskosität als Produkt einer charakteristischen Längenskala  $l_{SGS}$  und einer charakteristischen Geschwindigkeitsskala  $q_{SGS}$  der Feinstruktur verstanden werden.

Als Längenskala wird  $l_{SGS} = C_S \Delta$  und für die Geschwindigkeitsskala  $q_{SGS} = l_{SGS} |\bar{\mathbf{S}}|$  verwendet. Dabei wird die Norm des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$  der gefilterten Geschwindigkeit genutzt. Die turbulente Wirbelviskosität berechnet sich somit aus:

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \quad . \quad (2.31)$$

Die Smagorinsky-Konstante  $C_S$  kann für den Fall einer isotropen Turbulenz mit  $C_S = 0.18$  abgeschätzt werden, wobei in der Literatur auch andere Werte verwendet werden [22]. Beispielsweise hat sich eine Konstante von  $C_S = 0.1$  bei turbulenten Kanalströmungen bzw. Scherströmungen bewährt. Aufgrund der zusätzlichen numerischen Dissipation des jeweiligen Strömungslösers werden sogar kleinere Werte verwendet (beispielsweise  $C_S = 0.065$  [35]).

Dieser relativ einfache Ansatz, der sich u.a. auch bei stark verzerrten Gittern sehr robust verhält, enthält jedoch einige Nachteile. Das Smagorinsky-Modell liefert für laminare Strömungen (ebenfalls  $|\bar{S}| > 0$ ) einen unnötigen Feinstruktur-Anteil und ist somit für transitionelle Vorgänge weniger geeignet. Des Weiteren wird das Wandverhalten der statistischen Turbulenzgrößen nicht korrekt wiedergegeben. Die dämpfende Wirkung der Wand muss mit Hilfe einer Dämpfungsfunktion nachgebildet werden. Neben der klassischen von Driestischen Dämpfung wird der Ansatz nach Piomelli bevorzugt [22]:

$$f_D(y^+) = \sqrt{1 - \exp(-y^+/A^+)^3} \quad \text{mit} \quad A^+ = 25 \quad . \quad (2.32)$$

Mit Berücksichtigung der Dämpfungsfunktion in Gl. (2.31) gemäß  $(C_S f_D(y^+) \Delta)^2$  kann das gewünschte Verhalten erreicht werden. Da die Schubspannung  $\tau_{12} \sim y^3$  die wichtigste Komponente in Wandnähe darstellt, ist ein Verhalten der turbulenten Wirbelviskosität von  $\nu_t \sim y^3$  anzustreben [22].

Wie aus der Gl. (2.31) ersichtlich, verhält sich das Smagorinsky-Modell rein dissipativ. Eine grundlegende Verbesserung des Modells bzw. der Modellkonstante  $C_S$  stellt die dynamische Erweiterung nach GERMANO et al. [29] dar. Dabei wird neben der impliziten Filterung eine explizite Filterung der Geschwindigkeitskomponenten durchgeführt und erlaubt damit eine lokale Berechnung der Modellkonstante  $C_S$ . Die nun variable Konstante wird vom Modell selbst berechnet und liefert für die entsprechende Strömungskonfiguration den passenden Wert. Neben dem gewünschten Wandverhalten  $\nu_t \sim y^3$  können nun auch lokal negative Werte der turbulenten Wirbelviskosität auftreten und somit ein lokales „backscatter“ ermöglichen [22]. Da die dynamische Prozedur nicht im DLR-TAU-Code verfügbar ist, wird nicht weiter darauf eingegangen.

### Wall Adapting Local Eddy-Viscosity (WALE) -Modell

Ein weiteres Feinstrukturmodell ist das WALE-Modell (*Wall Adapting Local Eddy-Viscosity*) nach NICOUD et al. [52]. Prinzipiell wird hier ebenfalls der Boussinesq-Ansatz  $\tau_{ij}^{a,mod} = -2\mu_t S_{ij}$  wie beim Smagorinsky-Modell nach Gl. (2.31) genutzt. Lediglich die Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$  erfolgt hier anders. Statt des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $\bar{S}_{ij}$  (auch Scherrate) wird hier der spurfreie, symmetrische Anteil der quadrierten Geschwindigkeitsgradienten  $S_{ij}^d$  verwendet. Unter Berücksichtigung des gewünschten Wandverhaltens  $\nu_t \sim y^3$  ergibt sich die turbulente Wirbelviskosität

$$\nu_t = (C_W \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}} \quad . \quad (2.33)$$

Mit Hilfe des antimetrischen Anteils (auch Rotationsrate)

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.34)$$

des Geschwindigkeitsgradienten ( $\partial \bar{u}_i / \partial x_j = \bar{S}_{ij} + \bar{\Omega}_{ij}$ ) ergibt sich der gesuchte symmetrische Anteil der quadrierten Geschwindigkeitsgradienten:

$$S_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} (\bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn} - \bar{\Omega}_{mn} \bar{\Omega}_{mn}) \quad (2.35)$$

Ein Vorteil gegenüber dem klassischen Smagorinsky-Modell ist das implizite Wandverhalten von  $\nu_t \sim y^3$ . Eine zusätzliche Berechnung des Wandabstandes muss somit nicht erfolgen, was sich gerade bei parallelisierten Anwendungen als vorteilhaft erweisen kann. Aufgrund der Verwendung der Rotationsrate  $\bar{\Omega}_{ij}$  nach Gl. (2.34) können verschiedene Turbulenzstrukturen bzw. -mechanismen detektiert werden, d.h. sowohl Scherung als auch Rotation. Ein weiterer Vorteil gegenüber dem Smagorinsky-Modell ist das Verschwinden der modellierten Wirbelviskosität  $\nu_t$  im Fall einer reinen mittleren Scherung, was insbesondere bei laminaren bzw. transitionellen Strömungen wichtig ist.

Die Modellkonstante  $C_W$  kann wieder mit Hilfe einer Kalibrierung des jeweiligen Strömungslösers gewonnen werden. Für den Fall der isotropen Turbulenz ergibt sich ein Wert von  $C_W = 0.55 \dots 0.6$ . Bei wandgebundenen Strömungen wird meist  $C_W = 0.316$  ( $C_W^2 = 0.1$ ) verwendet [22].

Da nach den Schumannschen Ansatz die implizite Filterung durch die Diskretisierung erfolgt und eher als Konzept zu verstehen ist [22], wird in der weiteren Arbeit auf die Nomenklatur der gefilterten Größen verzichtet. Im Folgenden werden ausschließlich Momentan- und Mittelwerte verwendet.

## 2.3 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS)

Da aus ingenieurtechnischer Sicht vor allem die statistischen Mittelwerte einer Strömung von Bedeutung sind, kann mit Verwendung der Reynolds-Mittelung nach Gl. (2.15) und der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) ein Berechnungsansatz hergeleitet werden, der insbesondere für statistisch stationäre Strömungen gut geeignet ist. Bei Beachtung der Rechenregeln der Reynolds-Zerlegung nach Gl. (2.16) ergeben sich die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes bzw. RANS-Gleichungen (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*). Die Transportgleichungen der Reynolds-gemittelten Geschwindigkeiten lauten beispielsweise für den inkompressiblen Fall wie folgt [23]:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_j} \quad (2.36)$$

Auf eine vollständige Darstellung aller Gleichungen für den kompressiblen Fall wird verzichtet, da bereits im vorherigen Abschnitt die formal äquivalenten Gleichungen der Large-Eddy Simulation (2.21)-(2.25) vorgestellt wurden. Anstatt räumlich gefilterter Strömungsgrößen werden Reynolds-gemittelte Größen verwendet. Da auch hier konservative Variablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$  genutzt werden, muss ebenfalls eine Favre-Mittelung  $\tilde{\phi} = \overline{\rho \phi} / \bar{\rho}$  durchgeführt werden.

Der Reynoldsspannungstensor  $\langle u'_i u'_j \rangle$  in der Impulsgleichung muss mit Hilfe eines Turbulenzmodells  $\tau_{ij}^{RANS}$  approximiert werden. Üblicherweise werden Wirbelviskositätsmodelle genutzt, wobei zwischen Ein- und Zweigleichungsmodelle unterschieden werden kann. Da in der gesamten Arbeit nur das Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell verwendet wird, wird nicht weiter auf die Vielzahl der unterschiedlichen Turbulenzmodelle mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen eingegangen.

Der große Vorteil des RANS-Ansatzes ist der deutlich geringere numerische Aufwand gegenüber LES-Anwendungen. Da die Mittelwerte der Strömungsgrößen direkt berechnet werden, ohne die turbulenten Strukturen explizit aufzulösen, können deutlich gröbere Rechengitter verwendet werden. Der zum Teil langwierige Mittelungsprozess von LES-Rechnungen entfällt hier ebenfalls. Symmetrien innerhalb der Strömung bzw. zweidimensionale Strömungen ermöglichen weitere Vereinfachungen.

Die genannten Vorteile sind insbesondere bei statistisch stationären Strömungskonfigurationen mit geringer Komplexität zu beobachten. Der instationäre Ansatz der RANS-Methode (auch URANS genannt) weist jedoch gerade bei stark instationären Strömungsphänomenen, wie die Strömungsablösung an stumpfen Körpern mit anisotropen Wirbelstrukturen im Nachlauf, deutliche Defizite auf. Ein weiterer Nachteil ist die umfangreiche Modellierung, die bei komplexen Strömungen erhebliche Unsicherheiten hervorrufen kann. Da die jeweiligen Turbulenzmodelle je nach Strömungskonfiguration unterschiedliche Stärken und Schwächen aufweisen, beeinflusst die Wahl des Modells die Qualität der Ergebnisse erheblich.

### 2.3.1 Spalart-Allmaras Turbulenzmodell

Ein sehr bekanntes RANS-Turbulenzmodell ist das Spalart-Allmaras (SA) Eingleichungsmodell [69]. Es beinhaltet eine Transportgleichung der SA-Wirbelviskosität und ist für Plattengrenzschichten bei hohen Reynoldszahlen kalibriert und validiert worden. Es liefert für wandnahe turbulente Strömungen entlang gekrümmter Oberflächen korrekte Ergebnisse. Des Weiteren ist das Modell sehr robust und konvergiert häufig zu einer stationären Lösung [8].

Das SA-Modell stellt somit einen geeigneten Kandidaten für die weiter unten behandelten hybriden RANS / LES-Methoden dar. Im Folgenden wird der vollständige Formelsatz angegeben.

Die Transportgleichung der SA-Wirbelviskosität  $\tilde{\nu}$  lautet:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = P - D + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] . \quad (2.37)$$

Dabei bezeichnen

$$P = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} \quad , \quad D = c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (2.38)$$

den Produktions- bzw. den Destruktionsterm. Da die SA-Viskosität nicht das korrekte asymptotische Verhalten in Wandnähe liefert, wird die turbulente Wirbelviskosität  $\nu_t$  mit Hilfe einer empirischen

Funktion  $f_{v1}$  berechnet [23]:

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu} \quad , \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad , \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad . \quad (2.39)$$

Für die Berechnung des Produktionsterms werden weitere Ansätze benötigt:

$$\tilde{S} = |\Omega| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad , \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad , \quad (2.40)$$

wobei hier die lokale Rotationsrate bzw. der antimetrische Geschwindigkeitsgradiententensor

$$|\Omega| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad \text{mit} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (2.41)$$

verwendet wird. Weitere empirische Funktionen, insbesondere für den Destruktionsterm, lauten:

$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad , \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad , \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad . \quad (2.42)$$

Als Längenskala wird der Wandabstand  $d = d_w$  verwendet. Die Modellkonstanten lauten:

$$c_{b1} = 0.1355 \quad , \quad c_{b2} = 0.622 \quad , \quad c_{v1} = 7.1 \quad , \quad \sigma = 2/3 \quad , \quad \kappa = 0.41 \quad , \\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} = 3.24 \quad , \quad c_{w2} = 0.3 \quad , \quad c_{w3} = 2 \quad .$$

## 2.4 Hybride RANS / LES Methoden

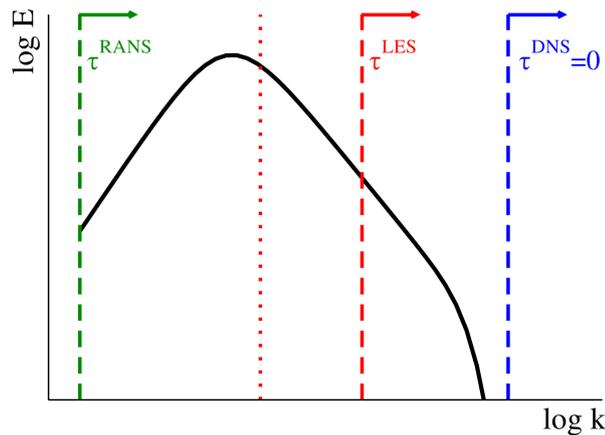
Die bisher vorgestellten Berechnungsmethoden haben ihre Vor- und Nachteile. Das RANS-Konzept, „erst Mitteln - dann Berechnen“ [25], ist für viele instationäre Fragestellungen nicht geeignet bzw. gedacht. Skalen-auflösende Methoden wie die Large-Eddy Simulation mit dem Konzept „erst Berechnen - dann Mitteln“ [25] können zeitlich abhängige Phänomene, wie instationäre Kräfte, Fluid-Struktur-Kopplung, Aero-Akustik usw., hinreichend genau erfassen und berechnen. Aufgrund des jedoch deutlich erhöhten numerischen Aufwands ist die LES auf einfache Strömungskonfigurationen mit relativ kleinen Reynoldszahlen beschränkt.

Es scheint somit sinnvoll, beide Ansätze mit ihren jeweiligen Vorzügen zu kombinieren und je nach Strömung den passenden Berechnungsansatz zu wählen. Beispielsweise ist es ausreichend, die Strömung um einen stumpfen Körper im RANS-Modus und den Nachlaufbereich, mit zum Teil anisotropen Wirbelstrukturen, im LES-Modus zu berechnen.

Ein weiteres Anwendungsgebiet sind wandnahe Strömungen. Da bei einer LES der Großteil der energietragenden Wirbel direkt aufgelöst werden muss und sich gerade in Wandnähe immer kleinere Wirbel ergeben, wird in diesem Bereich eine fast DNS-artige Diskretisierung benötigt. Bei Beachtung der Reynoldszahl-Abhängigkeit wandnaher Wirbelstrukturen sind Rechengitter mit einer mehrheitlichen Konzentration der Gitterpunkte in Wandnähe möglich.

Bislang ist beispielsweise eine wandaufgelöste LES (*wall-resolved LES*, WRLES) der Profilmströmung von Tragflächen bei hohen Reynoldszahlen nicht möglich. Neben der klassischen Nutzung von Wandfunktionen erscheint die Berechnung wandnaher Bereiche im RANS-Modus sinnvoll. Diese Strategie wird als wandmodellerte LES (*wall-modeled LES*, WMLES) bezeichnet und ermöglicht Simulationen mit höheren Reynoldszahlen bei vergleichbarem numerischen Aufwand.

Das geschilderte Grundkonzept ist in Abb. 2.1 schematisch dargestellt. Ein idealisiertes Energiespektrum verdeutlicht den Grundgedanken skalen-auflösender Methoden mit ihrem jeweiligen Modellierungsgrad. Hybride RANS / LES-Methoden stellen somit einen günstigen Kompromiss dar.



**Abb. 2.1:** Idealisiertes Energiespektrum abhängig von der Wellenzahl  $k$  nach [26]. Je nach Berechnungsmethode ergeben sich unterschiedliche Modellierungsgrade. Die vertikal gestrichelten Linien kennzeichnen die Grenze zwischen Auflösung und Modellierung turbulenter Fluktuationen  $\tau^{mod}$ . Die hybride RANS / LES-Methode ist schematisch als gepunktete Linie dargestellt.

Eine Klassifizierung hybrider RANS / LES-Ansätze erfolgt beispielsweise in der Übersichtsarbeit von FRÖHLICH [26]. Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal ist die jeweilige Kopplung von RANS- und LES-Ansatz. Dabei kann zwischen einheitlicher (*unified models*) und separierter Modellierung (*segregated models*) unterschieden werden. Synonyme wie „global“ und „zonal“ können ebenfalls verwendet werden.

Die einheitliche bzw. globale Modellierung nutzt die strukturelle Ähnlichkeit der Navier-Stokes-Gleichungen im RANS- oder LES-Konzept (siehe beispielsweise Abschnitt 2.2.1 und 2.3). Bei Verwendung implizit gefilterter Strömungsgrößen unterscheidet sich lediglich das jeweilige Turbulenzmodell, welches bei beiden Methoden häufig auf dem Wirbelviskositätsansatz beruht.

Dabei hängt das RANS-Modell in der Regel von physikalischen Größen ab, wie der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der zugehörigen Dissipationsrate  $\varepsilon$ . LES-Modelle beruhen hingegen auf geometrische Längenskalen, wie der lokalen Gittergröße des numerischen Rechengitters. Da die Wirkungsweise der LES-Modelle im Grunde auf RANS-Modellen basiert, kann jedes RANS-Modell in einen LES-ähnlichen Modus übergehen [26]. Dieser Wechsel (*blending*) kann mit Hilfe von meist empirischen Umschaltfunktionen kontinuierlich erfolgen.

Eine weitere Möglichkeit der einheitlichen Modellierung ist die Verwendung eines reinen RANS- bzw. LES-Modells und wird im Englischen als *interfacing* bezeichnet. Da weiterhin die gleichen Transportgleichungen verwendet werden, ergibt sich am Übergang ein kontinuierlicher Verlauf der Strömungsgrößen.

Die separierte bzw. zonale Modellierung verwendet hingegen streng getrennte Bereiche im RANS- oder LES-Konzept. Die jeweiligen Bereiche sind dabei über „innere“ Randbedingungen miteinander verbunden, wobei sich ein diskontinuierlicher Verlauf der Strömungsgrößen am Übergang einstellen kann. Mögliche Modellierungsfehler, wie im Übergangsbereich der globalen Modellierung (*grey area*), werden somit vermieden [26].

Die eingeschlossenen LES-Bereiche benötigen jedoch korrekte Randbedingungen. Neben den klassischen Ein- und Ausströmrandbedingungen muss zusätzlich eine mögliche tangential Kopplung zum RANS-Bereich berücksichtigt werden. Da am Eintritt, ähnlich wie bei reinen LES-Anwendungen, realistische turbulente Strömungsgrößen verfügbar sein müssen, sind korrekt abgestimmte synthetische Turbulenz-Methoden (siehe Kapitel 3) erforderlich.

Im Folgenden werden ausschließlich hybride RANS / LES-Ansätze mit einheitlicher Modellierung behandelt. Diese Methoden verwenden ein klassisches RANS-Modell, welches aufgrund physikalischer und/oder gitterspezifischer Abhängigkeiten in einen LES-ähnlichen Zustand übergeht (*blending*).

Die folgenden Ansätze beruhen auf der klassischen Detached-Eddy Simulation (DES). Dabei sind die jeweiligen Modifikationen als Verbesserung der ursprünglichen Methode zu verstehen. Eine zusammenfassende Übersicht findet sich beispielsweise bei GARBARUK et al. [27].

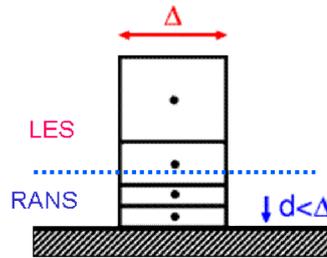
### 2.4.1 Detached-Eddy Simulation (DES)

Die Detached-Eddy Simulation (DES bzw. DES97) wurde erstmalig von SPALART et al. [71] (1997) vorgestellt und stellt einen hybriden RANS / LES-Ansatz für die Berechnung massiv abgelöster Strömungen bei hohen Reynoldszahlen dar. Die anliegende Grenzschicht wird bis zu dessen Ablösung im RANS-Modus berechnet, während die turbulenten Fluktuationen im stromab befindlichen Ablösegebiet in einen LES-ähnlichen Modus erfasst werden [68].

Als Basis-Modell wird in der ursprünglichen DES das SA-Modell nach Gl. (2.37) verwendet. Andere Ansätze, wie das bekannte SST-Modell [49] oder die Reynoldsspannungsmodelle (RSM) [59], können ebenfalls genutzt werden. Der gewünschte Wechsel erfolgt durch ein Umschalten der jeweiligen physikalischen RANS-Längenskale zu einer gitterabhängigen Größe (LES). Die Längenskale des SA-Modells, der Wandabstand  $d = d_w$ , wird durch die variable DES-Längenskale  $d = l_{DES}$  ersetzt:

$$l_{DES} = \min(d_w, \Psi C_{DES} \Delta) \quad , \quad (2.43)$$

Dabei bezeichnet  $\Delta$  die lokal größte Gitterschrittweite  $\Delta_{\max}$  nach Gl. (2.30) und  $C_{DES}$  eine empirische Modellkonstante. Eine *low-Reynolds*-Korrektur  $\Psi$  nach Gl. (2.46) muss ebenfalls genutzt werden.



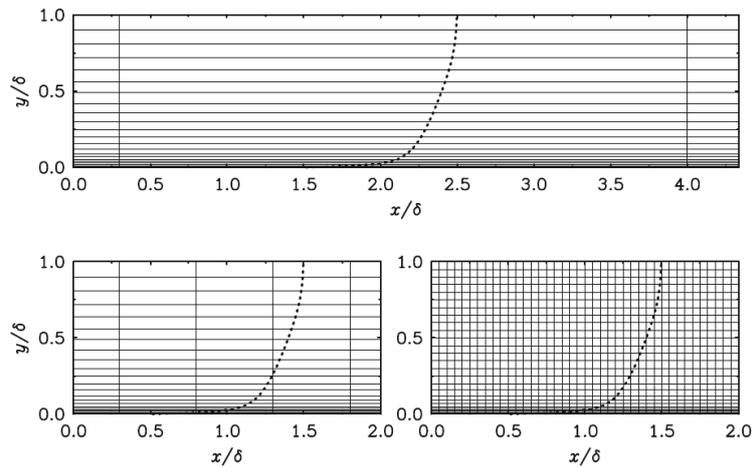
**Abb. 2.2:** Schematische Darstellung der RANS- und LES-Region im Fall einer DES nach [26].

Wie in Abb. 2.3 schematisch dargestellt, ist in Wandnähe das ursprüngliche SA-Modell aktiv, wohingegen in wandfernen Bereichen ein LES-ähnlicher Modus verwendet wird. Aufgrund kleinerer Längenskalen im LES-Bereich ergibt sich ein verstärkter Abbau der SA-Viskosität. Die nun deutlich kleinere Wirbelviskosität  $\nu_t$  ermöglicht ein gitterspezifisches Auflösen turbulenter Fluktuationen.

Unter Annahme eines lokalen Gleichgewichts von Produktion ( $\sim \tilde{S} \tilde{\nu}$ ) und Destruktion ( $\sim (\tilde{\nu}/d)^2$ ) kann eine Ähnlichkeit zum Smagorinsky-Feinstrukturmodell nach Gl. (2.31) im wandfernen LES-Bereich beobachtet werden. Nach BREUER et al. [10] müssen die empirischen SA-Funktionen  $f_{v1} = 1$ , Gl. (2.39),  $f_{v2} = 0$ , Gl. (2.40), und  $f_w = 1$ , Gl. (2.42), konstante Werte annehmen, wobei die unterschiedliche Definition von  $\tilde{S}$  (LES:  $|\bar{S}|$ ; DES:  $|\Omega|$ ) vernachlässigt werden kann. Eine ähnliche Wirkung ermöglicht die *low-Reynolds*-Korrektur  $\Psi$  nach Gl. (2.46). Aufgrund der gewählten Filterlänge (LES:  $\Delta_{Vol}$ , Gl. (2.29); DES:  $\Delta_{max}$ , Gl. (2.30)) ist jedoch die unterschiedliche Skalierung zu beachten. Des Weiteren muss die DES-Modellkonstante  $C_{DES}$  für den jeweiligen Strömungslöser kalibriert werden. Dabei wird häufig ein Wert von  $C_{DES} = 0.65$  für die isotrope Turbulenz verwendet [26].

Aufgrund der einheitlichen Modellierung bildet sich am Übergang  $d = C_{DES} \Delta$  eine Art Transitionszone aus. Die auch als *grey area* bezeichnete Region beinhaltet modellierte als auch aufgelöste Reynoldsspannungen, wobei deren gegenseitige Beeinflussung kritisch zu bewerten ist [26] [68]. Die jeweilige Diskretisierung bzw. tangentielle Gittergröße  $\Delta_{||}$  hat einen großen Einfluss auf das Strömungsverhalten anliegender Grenzschichten. Mögliche Szenarien sind in Abb. 2.3 abgebildet.

Bei einer RANS-ähnlichen Diskretisierung mit  $\Delta_{||} > \delta$  erfolgt der RANS-LES-Übergang, wie gewünscht, außerhalb der Grenzschicht. Eine Art wandmodellerte LES (WMLES) kann hingegen bei LES-ähnlichen Rechengittern ( $\Delta_{||} \ll \delta$ ) beobachtet werden. Die RANS-Schicht ist dabei sehr klein. Problematisch erscheinen Rechengitter mit einer Auflösung feiner als RANS, aber noch zu grob für LES. Diese nicht eindeutigen (engl. *ambiguous*) Gitter ( $\Delta_{||} \leq \delta$ ) rufen einen RANS-LES-Übergang innerhalb der Grenzschicht hervor. Da nur ein sehr kleiner Anteil der turbulenten Fluktuationen im LES-Modus aufgelöst werden kann und die modellierte Wirbelviskosität des RANS-Modells als zu gering abgeschätzt wird, kommt es zu einem Ungleichgewicht der Reynoldsspannungen innerhalb des Grenzschichtprofils [70] [27]. Dieser Vorgang wird auch als *Modelled Stress Depletion* (MSD) bezeichnet. Neben Unstimmigkeiten im mittleren Geschwindigkeitsprofil (*Log-Layer Mismatch*, LLM [68]) ergibt sich eine reduzierte Wandreibung, welche im schlimmsten Fall zu einer Grenzschichtablösung führen kann (*Grid Induced Separation*, GIS [70]). Netz-Konvergenz-Studien können somit zu inkonsistenten Modellierungen führen.



**Abb. 2.3:** Unterschiedliche Gitterauflösungen wandnaher Grenzschichtprofile nach [70]. Die gestrichelte Linie kennzeichnet das Geschwindigkeitsprofil mit der Grenzschichtdicke  $\delta$ . oben: RANS / DES-Gitter; unten links: „Übergangsgitter“; unten rechts: LES-Gitter

Da der Großteil der turbulenten kinetischen Energie in den Ablösegebieten (etwa 70% [68]) erfasst werden soll, muss das Rechengitter gewissen Anforderungen genügen. Das Netz muss, insbesondere in Spannweitenrichtung, ausreichend fein gewählt und der entsprechenden Strömungskonfiguration angepasst werden. Einige Hinweise zur Gittergestaltung gibt beispielsweise SPALART [67]. Das anliegende Grenzschichtprofil muss nach RANS-Anforderungen aufgelöst werden, sodass für den wandnächsten Punkt  $y_1^+ = 1$  gilt. Die tangential Gitterschrittweite ( $\Delta_x \approx \Delta_z$ ) kann im Vergleich zur wandaufgelösten LES (WMLES) deutlich größer gewählt werden. Eine Beschränkung in Wandeinheiten  $l_\tau$  nach Gl. (2.14) entfällt.

## 2.4.2 Delayed Detached-Eddy Simulation (DDES)

Aufgrund des oben beschriebenen Fehlverhaltens der ursprünglichen DES-Methode (DES97) entwickelte SPALART et al. [70] (2006) eine modifizierte Variante. Die Delayed Detached-Eddy Simulation (DDES) verwendet eine zusätzliche Funktion, die ein Detektieren der Grenzschicht erlaubt und das Umschalten vom RANS- in den LES-Modus verzögert. Dabei nutzt der Parameter  $r_d$  den spezifischen Verlauf der Wirbelviskosität  $\nu_t$  bzw. des Geschwindigkeitsgradienten  $\partial u_i / \partial x_j$  entlang einer Grenzschicht:

$$r_d = \frac{\nu + \nu_t}{\sqrt{(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_i / \partial x_j) \kappa^2 d_w^2}} \quad , \quad f_d = 1 - \tanh [(8r_d)^3] \quad , \quad (2.44)$$

wobei  $\kappa = 0.41$  die von Kármán-Konstante und  $d_w$  den Wandabstand bezeichnet. Innerhalb der logarithmischen Schicht ergibt sich ein Wert nahe Eins, der zum Rand der Grenzschicht auf null abfällt. Die empirische Funktion  $f_d$  ermöglicht das Umschalten von RANS ( $f_d = 0$ ) zu LES ( $f_d = 1$  bei  $r_d \ll 1$ ). Die ursprüngliche Längenskale des SA-Modells nach Gl. (2.37), der Wandabstand  $d = d_w$ , wird wiederum durch die variable DDES-Längenskale  $d = l_{DDES}$  ersetzt:

$$l_{DDES} = d_w - f_d \max(0, d_w - \Psi C_{DES} \Delta) \quad . \quad (2.45)$$

Eine *low-Reynolds*-Korrektur  $\Psi$  wird für ein Smagorinsky-ähnliches Verhalten benötigt. Der Term verwendet dieselben Parameter und Funktionen wie das SA-Modell, Gl. (2.37), und ist definiert als:

$$\Psi^2 = \frac{1 - c_{b1} f_{v2} / (c_{w1} k^2 f_w^*)}{f_{v1}} \quad (2.46)$$

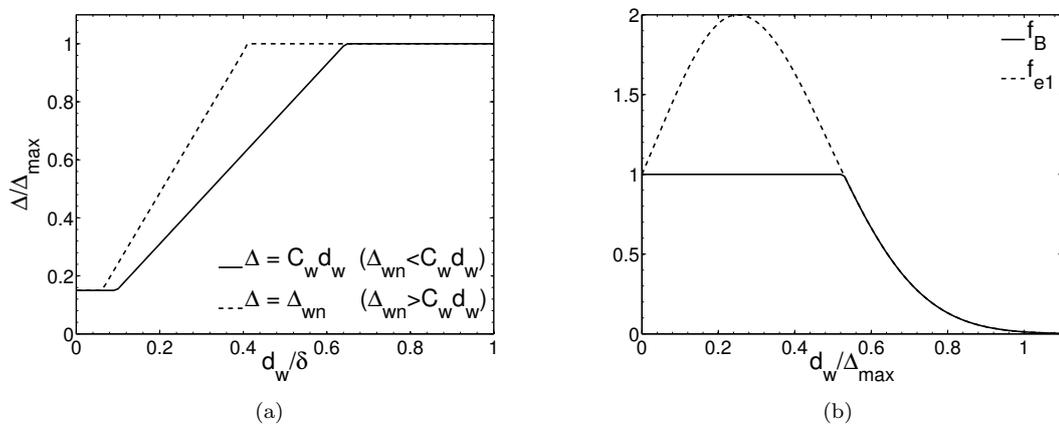
Die ursprüngliche Formulierung von SPALART et al. [70] enthält eine empirische Funktion  $f_{t2}$ , welche die laminar-turbulente Transition berücksichtigt. Dieser Term wird hier vernachlässigt.

### 2.4.3 Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES)

Neben einer reinen gitterspezifischen Abhängigkeit verwendet die DDES einen zusätzlich physikalischen Ansatz und vermeidet damit den frühzeitigen Umschlag von RANS zu LES. Dieser Wechsel erfolgt relativ abrupt, wobei der kritische Übergang von modellierten zu aufgelösten Reynoldsspannungen nicht beeinflusst wird. Der LES-Bereich benötigt jedoch turbulente Fluktuationen, die sich ohne weitere Maßnahmen erst durch Instabilitäten ausbilden können [67]. Aufgrund dieses Defizits bilden sich in der logarithmischen Schicht eines Grenzschichtprofils zwei Bereiche mit unterschiedlichem Anstieg aus. Dieser auch als *Log-Layer Mismatch* (LLM) [68] bezeichnete Fehler ruft einen zu geringen Reibungsbeiwert (15%-20% [75]) hervor.

Eine Verbesserung der DDES wurde von TRAVIN et al. (2006) [75] erstmalig vorgestellt und wurde von SHUR et al. (2008) [65] als Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES) veröffentlicht. Die IDDES enthält zwei Modifikationen: neben einer verbesserten Feinstruktur-Längenskale werden weitere empirische Funktionen definiert. Je nach Eintrittsrandbedingungen und Gitterauflösung schaltet das Modell selbstständig in einen DDES- oder WMLES-Modus um.

Die Wahl der Feinstruktur-Längenskale (LES:  $\Delta_{Vol}$  (2.29); DES:  $\Delta_{max}$  (2.30)) hat in Verbindung mit der jeweiligen Modellkonstante ( $C_S$  bzw.  $C_{DES}$ ) einen großen Einfluss auf die Berechnung turbulenter Strömungen. Je nach Strömungskonfiguration variiert der optimale Wert der Modellkonstante. Bei wandnahen Strömungen, wie die turbulente Kanalströmung, hat sich eine Smagorinsky-Konstante  $C_S = 0.1$  bewährt, während ein fast doppelt so großer Wert bei isotroper Turbulenz zu verwenden ist.



**Abb. 2.4:** (a) Modifizierte Feinstruktur-Längenskale  $\Delta$  mit zwei möglichen Verläufen entlang eines Kanals; (b) geometrische Formfunktionen  $f_B$  und  $f_{e1}$  der IDDES nach [65].

Die modifizierte Feinstruktur-Längenskale  $\Delta$  berücksichtigt unterschiedliche Wirbelskalen:

$$\Delta = \min \{ \max [C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}], \Delta_{\max} \} \quad . \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnet  $C_w = 0.15$  eine empirische Konstante und  $\Delta_{wn}$  die wandnormale Gitterschrittweite. Wie in Abb. 2.4 (a) dargestellt, ergeben sich je nach wandnormaler Streckung  $s = \Delta y_{i+1} / \Delta y_i$  unterschiedliche Verläufe. Bei einer großen Streckung  $s > (1 + C_w) = 1.15$  wird die Längenskale auf  $\Delta = \Delta_{wn}$  begrenzt, andernfalls wächst diese langsam linear an.

Eine weitere Modifikation behandelt den hybriden Übergang von RANS zu LES. Das jeweilige Längenmaß des RANS-Modells (SA-Modell:  $l_{RANS} = d_w$ ) wird durch die hybride Längenskale  $l_{hyb}$  ersetzt. Je nach Eintrittsrandbedingungen und Gitterauflösung schaltet die IDDES in einen DDES- oder WMLES-Modus um. Die WMLES-Längenskale ist mit  $l_{LES} = C_{DES} \Psi \Delta$  wie folgt definiert [65]:

$$l_{WMLES} = f_B (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - f_B) l_{LES} \quad . \quad (2.48)$$

Die Stufenfunktion  $f_B$ , siehe Abb. 2.4 (b), ermöglicht einen schnellen Wechsel von RANS zu LES und wird durch die lokale Gittergröße  $\Delta_{\max}$  und dem Wandabstand  $d_w$  bestimmt:

$$f_B = \min \{ 2 \exp(-9\alpha^2), 1 \} \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.25 - d_w / \Delta_{\max} \quad . \quad (2.49)$$

Der bisher beobachtete Fehler in der logarithmischen Schicht (*Log-Layer Mismatch*, LLM) wird mit Hilfe einer „Anfachungsfunktion“  $f_e$  vermieden:

$$f_e = \max \{ (f_{e1} - 1), 0 \} \Psi f_{e2} \quad . \quad (2.50)$$

Die modellierten Reynoldsspannungen werden am RANS-LES-Übergang lokal erhöht, wobei eine geometrische Hügelfunktion  $f_{e1}$  und eine Verteilungsfunktion der Viskosität  $f_{e2}$  verwendet werden:

$$f_{e1} = \begin{cases} 2 \exp(-11\alpha^2) & \alpha \geq 0 \\ 2 \exp(-9\alpha^2) & \alpha < 0 \end{cases}, \quad f_{e2} = 1 - \max \{ f_t, f_l \} \quad . \quad (2.51)$$

Der von der Lösung abhängige turbulente ( $f_t$ ) bzw. laminare ( $f_l$ ) Anteil lautet:

$$f_t = \tanh[(c_t^2 r_{dt})^3] \quad \text{mit} \quad r_{dt} = \frac{1}{\kappa^2 d_w^2} \frac{\nu_t}{\max \left\{ \sqrt{(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_i / \partial x_j)}, 10^{-10} \right\}} \quad , \quad (2.52)$$

$$f_l = \tanh[(c_l^2 r_{dl})^{10}] \quad \text{mit} \quad r_{dl} = \frac{1}{\kappa^2 d_w^2} \frac{\nu}{\max \left\{ \sqrt{(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_i / \partial x_j)}, 10^{-10} \right\}} \quad . \quad (2.53)$$

Die empirischen Konstanten  $c_t = 1.63$  und  $c_l = 3.55$  sind für das SA-Modell, Gl. (2.37), angepasst. Bei Beachtung von  $l_{WMLES}$ , Gl. (2.48), und  $l_{DDES}$ , Gl. (2.45), ergibt sich die hybride Längenskale:

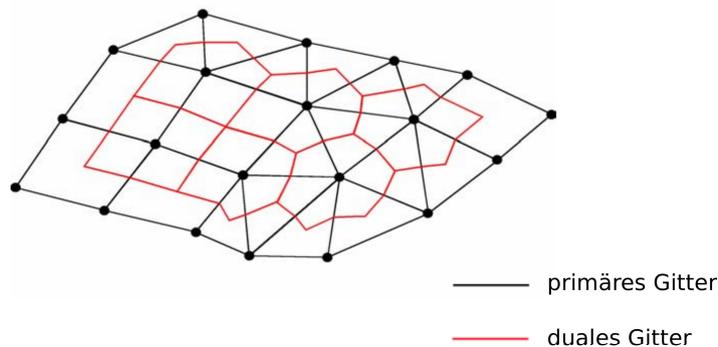
$$l_{hyb} = \tilde{f}_d (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES} \quad \text{mit:} \quad (2.54)$$

$$\tilde{f}_d = \max \{ (1 - f_{dt}), f_B \} \quad \text{und} \quad f_{dt} = 1 - \tanh [(8r_{dt})^3] \quad . \quad (2.55)$$

## 2.5 Strömungslöser DLR-TAU

Der kompressible Strömungslöser DLR-TAU [63] des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) ist ein Software-Paket mit einer Vielzahl an Modulen und Bibliotheken [1] [2]. Reibungsfreie bzw. reibungsbehaftete Strömungen entlang komplexer Geometrien können für den unteren subsonischen ( $Ma < 0.3$ ) bis hypersonischen Bereich ( $Ma > 5$ ) simuliert werden. Neben den Instituten des DLR's und Universitäten wird dieser in der europäischen Luft- und Raumfahrtindustrie eingesetzt.

Der DLR-TAU Code basiert auf der Finite-Volumen-Methode, siehe FERZIGER UND PERIĆ [20], und nutzt unstrukturierte bzw. hybride Rechengitter. Unstrukturierte Gitter bieten Vorteile bei der Vernetzung komplexer Geometrien, wobei die zusätzlichen Informationen der Nachbarschaftsbeziehungen aller Zellen einen erhöhten Speicherbedarf hervorrufen. Als Elementtypen kommen überwiegend Tetraeder, Hexaeder aber auch Prismen und Pyramiden zum Einsatz. Der eigentliche Strömungslöser verwendet den Ansatz der dualen Netze, siehe Abb. 2.5. Ein Preprocessing-Modul verbindet die Zell- und Kantenmittelpunkte des primären Gitters und erzeugt somit ein duales Gitter. Neben einer optimalen kantenbasierter Datenstruktur wird der Strömungslöser dadurch unabhängig von den Zelltypen des primären Gitters [28]. Alle Strömungsvariablen, wie die konservativen Variablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$ , werden nach einer eckenzentrierten Anordnung (engl.: *cell-vertex*) gespeichert. Des Weiteren werden bei diesem Schritt die notwendigen größeren Gitter für das optionale Mehrgitter-Verfahren erzeugt. Mit Hilfe einer *Low Mach number*-Präkonditionierung [60] [32] kann der Strömungslöser auch für inkompressible Strömungen verwendet werden.



**Abb. 2.5:** Duales Gitter: Zellkanten des dualen Gitters verlaufen zwischen Elementzentren und Seitenmittelpunkten des primären Gitters [28].

### 2.5.1 Räumliche Diskretisierung

Für die räumliche Diskretisierung der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) können mehrere Aufwind-Schemata (*upwind differencing scheme*, UDS) und ein zentrales Schema (*central differencing scheme*, CDS) mit künstlicher Dissipation verwendet werden.

Da sich Aufwindverfahren (Verfahren 1. Ordnung [20]) numerisch diffusiv verhalten, jedoch ein starkes Aufschwingen bzw. Oszillieren der Lösung vermeiden, kommen diese Schemata überwiegend bei stark kompressiblen Anwendungen mit Diskontinuitäten, wie Verdichtungsstöße, zum Einsatz.

Skalen-auflösende Simulationen, wie LES (Abschnitt 2.2) und DES (Abschnitt 2.4.1), benötigen eine deutlich geringere numerische Diffusion, sodass häufig ein zentrales Schema genutzt und eine übermäßige Dämpfung turbulenter Fluktuationen vermieden werden kann. Dieses Verfahren 2. Ordnung [20] neigt jedoch zu unphysikalischen Oszillationen, die mit Hilfe einer künstlichen Dissipation unterdrückt werden müssen. Dabei kommt die künstliche Skalar- oder Matrix-Dissipation nach JAMESON et al. [34] und SWANSON und TURKEL [73] (auch als JST-Verfahren bekannt) zum Einsatz. Ein zentrales Schema verwendet die Mittelwerte zweier benachbarter Punkte. Beispielsweise ergibt sich für die eindimensionale Euler-Gleichung mit den konservativen Variablen  $\vec{W}$  und Flüssen  $\vec{F}$ :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

folgende diskretisierte Form:

$$\frac{\Delta \vec{W}_i}{\Delta t} + \frac{\vec{F}_{i+1/2} + \vec{F}_{i-1/2}}{2\Delta x} = 0 \quad . \quad (2.57)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{F}_{i+1/2}$  die diskreten Flüsse an einer Zellwand des finiten Kontrollvolumens. Bei Verwendung der künstlichen Dissipation lautet die diskrete Flussformulierung wie folgt:

$$\vec{F}_{i+1/2} = \vec{F} \left( \frac{\vec{W}_{i+1} + \vec{W}_i}{2} \right) + d_{i+1/2}^{(4)}(\vec{W}) - d_{i+1/2}^{(2)}(\vec{W}) \quad . \quad (2.58)$$

Die zusätzlichen numerischen Dämpfungsterme sollen ein stabiles numerischen Verfahren mit einer schwingungsfreien Lösung ermöglichen. Der Stoß-Dämpfungsterm:

$$d_{i+1/2}^{(2)}(\vec{W}) = \varepsilon_{i+1/2}^{(2)} (\vec{W}_{i+1} - \vec{W}_i) \quad (2.59)$$

unterdrückt mit einer erhöhten Dissipation nichtlineare Schwingungen in der Nähe eines Stoßes, während der Term außerhalb eines Stoßes nicht wirksam ist. Das zentrale Schema 2. Ordnung schaltet lokal auf ein Aufwindverfahren 1. Ordnung um [18]. Als Sensor dient eine Druckänderung:

$$\varepsilon_{i+1/2}^{(2)} = \kappa^{(2)} r_{i+1/2} \max(\nu_i, \nu_{i+1}) \quad \text{mit} \quad \nu_i = \left| \frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{p_{i-1} + 2p_i + p_{i+1}} \right| \quad . \quad (2.60)$$

Mit der Konstante  $\kappa^{(2)} = \mathcal{O}(1)$  wird der Dämpfungsterm angepasst [31]. Ein weiterer Dämpfungsterm berücksichtigt hochfrequente Schwingungen im gesamten Rechengebiet:

$$d_{i+1/2}^{(4)}(\vec{W}) = \varepsilon_{i+1/2}^{(4)} (\vec{W}_{i+2} - 3\vec{W}_{i+1} + 3\vec{W}_i - \vec{W}_{i-1}) \quad , \quad (2.61)$$

wobei dieser in der Nähe eines Stoß nicht wirksam ist. Der entsprechende Sensor lautet:

$$\varepsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max \left( 0, \kappa^{(4)} r_{i+1/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{(2)} \right) \quad . \quad (2.62)$$

Die Dämpfung wird ebenfalls mit der Konstante  $\kappa^{(4)} = \mathcal{O}(10^{-2})$  beeinflusst [31]. Da im Folgenden

ausschließlich subsonische Strömungen behandelt werden, wird eine Stoß-Konstante von  $\kappa^{(2)} = 0$  gewählt. Laut DUCROS et al. [17] ist die Größenordnung der künstlichen Dissipation ähnlich der LES-Feinstruktur-Dissipation. Da das Feinstrukturmodell (Abschnitt 2.2.2) ebenfalls hochfrequente Schwingungen dämpft, sollte die Konstante  $\kappa^{(4)}$  möglichst klein gewählt werden.

Der Unterschied zwischen Skalar- und Matrix-Dissipation besteht in der Berechnung der Skalierungsgröße  $r_{i+1/2}$ , die aus Dimensionsgründen einer Geschwindigkeit entsprechen muss. Bei der Skalar-Dissipation beschreibt  $r_{i+1/2} = |\lambda_{i+1/2}|^{\max}$  den maximalen Eigenwert der Jakobimatrix  $\partial \vec{F} / \partial \vec{W}$  mit  $\lambda_i = u_i + a$ , während die modifizierte Matrix-Dissipation sämtliche Eigenwerte ( $\lambda_i^{(1)} = u_i - a$ ,  $\lambda_i^{(2)} = u_i$ ,  $\lambda_i^{(3)} = u_i + a$ ) individuell berücksichtigt. Der Vorteil gegenüber der Skalar-Dissipation ist eine richtungsabhängige Skalierung der künstlichen Dissipation [8].

Einen bedeutenden Einfluss auf das numerische Verhalten übt außerdem die differentielle Form der nicht-linearen konvektiven Terme aus. Beispielsweise kann der nicht-lineare Term  $H$  einer eindimensionalen skalaren Transportgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + H = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (2.63)$$

unterschiedlich ausgedrückt werden [18]. Es kann eine konservative Form (auch Divergenz-Form):

$$H_{div} = \frac{\partial UV}{\partial x} \quad (2.64)$$

oder eine schief-symmetrische (*skew-symmetric*) verwendet werden

$$H_{skew} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial UV}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} \right) . \quad (2.65)$$

Die zugehörigen diskretisierten Formen besitzen unterschiedliche Eigenschaften bezüglich Stabilität und Erhaltung. Die schief-symmetrische Form nach Gl. (2.65) erhält quadratische Größen, wie die turbulente kinetische Energie und minimiert Aliasing-Fehler aufgrund der Diskretisierung [18]. Die Divergenz-Form nach Gl. (2.64) wird üblicherweise beim TAU-Code verwendet. Bei der LES zeigt diese jedoch in Verbindung mit der Prädiktionierung unnatürlich große Geschwindigkeitsfluktuationen in fein aufgelösten Wandbereichen. Im Folgenden wird ausschließlich die schief-symmetrische Form nach Gl. (2.65) verwendet. Zu beachten ist die deutlich komplexere Implementierung der schief-symmetrischen Form nach Gl. (2.65) bei kompressiblen Strömungen [40].

## 2.5.2 Zeitliche Diskretisierung

Die zeitliche Integration der stationären Rechnungen erfolgt mit einem expliziten Runge-Kutta Zeitschrittverfahren oder einem impliziten LU-SGS-Verfahren (*Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel*). Zusätzlich kann das Konvergenzverhalten durch lokale Zeitschritte, Residuen-Glättung und Mehrgitter-Verfahren beschleunigt werden. Zeitgenaue instationäre Rechnungen werden mit dem dualen Zeitschrittverfahren nach JAMESON [33] [8] durchgeführt.

Die instationären, kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen können mit den konservativen Variablen  $\vec{W}$  und dem jeweiligen Kontrollvolumen  $\Omega$  allgemein als gewöhnliches Differentialgleichungssystem beschrieben werden:

$$\frac{d\Omega\vec{W}}{dt} = -\vec{R}(\vec{W}) \quad . \quad (2.66)$$

Dabei enthält der Raumoperator  $\vec{R}$  alle weiteren Terme der räumlichen Diskretisierung, welcher auch als Residuum bezeichnet wird. Die Zeitableitung der Gl. (2.66) kann beispielsweise mit Hilfe eines impliziten BDF-Verfahrens (engl.: *backward difference formula*, hier 3-Punkt-Euler-Rückwärtschema 2. Ordnung) diskretisiert werden. Es ergibt sich mit dem dualen Zeitschrittverfahren:

$$\frac{\partial\vec{W}^*}{\partial\tau} = - \left\{ \frac{\Omega \left( 3\vec{W}^* - 4\vec{W}^{(n)} + \vec{W}^{(n-1)} \right)}{2\Delta t} + \vec{R}(\vec{W}^*) \right\} = -\vec{R}^*(\vec{W}^*) \quad . \quad (2.67)$$

Mit Hilfe der fiktiven Pseudo-Zeit  $\tau$  wird zu jedem physikalischen Zeitschritt  $\Delta t$  ein pseudo-stationäres Problem gelöst. Die nicht-linearen Gleichungen (2.67) werden mit inneren Iterationsschritten  $N_{Iter}$  iterativ gelöst, sodass sich  $\partial\vec{W}^*/\partial\tau \rightarrow 0$  einstellt und  $\vec{W}^* = \vec{W}^{(n+1)}$  als gesuchte Lösung ergibt.

Idealerweise ist die Lösung eines diskreten physikalischen Zeitschrittes genau dann erreicht, wenn sich das Residuum zu Null ergibt. Aus praktischer Sicht ist dies jedoch nicht möglich, sodass ein geeignetes Abbruchkriterium zu definieren ist. Laut [19] und [46] ist eine Anzahl innerer Iterationsschritten  $N_{Iter} = 50-150$  zu wählen. Da es sich um ein pseudo-stationäres Problem handelt, können entsprechende konvergenzbeschleunigende Verfahren, wie lokale Zeitschritte oder Mehrgitter-Verfahren verwendet werden, ohne zeitliche Ungenauigkeiten hervorzurufen.

Des Weiteren können ebenfalls beliebige Zeitschrittverfahren höherer Ordnung verwendet werden. Der physikalische Zeitschritt  $\Delta t$  kann bei impliziten Zeitschrittverfahren somit deutlich größer gewählt werden, als die CFL-Bedingung einer kompressiblen Strömung mit der Schallgeschwindigkeit  $a$  es verlangt:

$$\Delta t_{CFL} < \frac{\Delta x}{\max(|u| + a)} \quad . \quad (2.68)$$

### 2.5.3 Prädiktionierung

Das Lösungsverhalten kompressibler Strömungslöser verschlechtert sich bei inkompressiblen Strömungen ( $Ma < 0.2$ ) mit abnehmender Mach-Zahl. Es werden zum einen ein verschlechtertes Konvergenzverhalten und zum anderen Genauigkeitseinbußen beobachtet [32] [8].

Aufgrund der kleinen Mach-Zahl steigt das Verhältnis aus Konvektionsgeschwindigkeit  $|U|$  der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) und der Geschwindigkeit akustischer Wellen  $|U \pm a|$ . Mit Hilfe der zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_{2,3,4} = U$  und  $\lambda_{1,5} = U \mp a$  kann eine charakteristische Konditionierungszahl  $C$  berechnet werden.

$$C = \frac{|U| + a}{|U|} = \frac{Ma + 1}{Ma} \quad . \quad (2.69)$$

Das Differentialgleichungssystem verhält sich bei kleinen Mach-Zahlen mit einer großen Konditionierungszahl  $C$  mathematisch steifer [8], wobei kompressible Strömungslöser für solch ein Verhalten nicht geeignet sind. Das Erreichen einer konvergierten stationären Lösung dauert wesentlich länger. Des Weiteren werden die numerische Dissipation der Upwind-Schemata und die künstliche Dissipation zentraler Schemen ungünstig skaliert [32].

Mit Hilfe einer Präkonditionierung des Differentialgleichungssystems kann dieses Fehlverhalten bei kleinen Mach-Zahlen vermindert werden. Die Präkonditionierungsvariante der Zeitableitung von CHOI und MERKLE [14] ist für das zentrale Schema im TAU-Code enthalten. Dabei modifiziert die Präkonditionierungsmatrix  $\Gamma_P^{-1}$  die Zeitableitung und die künstliche Dissipation  $\vec{D}_k$ . Da die Präkonditionierung nur bei der pseudo-stationären Berechnung der inneren Schleifen des dualen Zeitschrittverfahrens verwendet wird, sind weiterhin zeitgenaue Rechnungen möglich.

Als ein einfaches Beispiel dienen hier die zweidimensionalen Euler-Gleichungen mit den primitiven Variablen  $\vec{W}_p = \{\rho, u, v, T\}^T$  und den Flüssen  $\vec{E}$  und  $\vec{F}$  des zentralen Schemas [32]:

$$\Gamma_P^{-1} \frac{\partial \vec{W}_p}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \Gamma_P^{-1} \vec{D}_k \quad \text{mit} \quad \Gamma_P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 Ma_r^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{a^2 Ma_r^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{a^2 Ma_r^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{c_p T + (u^2 + v^2)/2}{a^2 Ma_r^2} & \rho u & \rho v & \frac{\gamma \rho}{\gamma - 1} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Der Parameter  $Ma_r^2$  enthält üblicherweise das Quadrat der lokalen Mach-Zahl  $Ma^2$ . Lediglich am Staupunkt bzw. bei Wänden mit *no-slip*-Bedingung ( $\vec{u} = 0$ ) wird die charakteristische Anström-Mach-Zahl  $Ma_\infty^2$  mit einem freien Parameter  $K \in [1, 4]$  verwendet. Gute Ergebnisse hinsichtlich Genauigkeit und Konvergenz wurden bei  $K = 1$  (reibungsfrei) und  $K = 1.5$  (reibungsbefahet) beobachtet [32]. Bei Überschall-Strömungen wird  $Ma_r^2$  auf 1 gesetzt. Der Term lautet:

$$Ma_r^2 = \min \{1, \max (Ma^2, K Ma_\infty^2)\} \quad . \quad (2.71)$$

## 2.5.4 Mehrgitter-Verfahren

Der DLR-TAU-Code bietet zudem die Möglichkeit ein Mehrgitter-Verfahren zu nutzen. Dabei wird das Konvergenzverhalten mit einer Hierarchie an unterschiedlichen Diskretisierungen zu einer stationären Lösung beschleunigt. Das eigentliche Strömungsproblem wird auf unterschiedlich groben Gittern gelöst, sodass hochfrequente Schwingungen in der stationären Lösung schneller verschwinden [8]. Da bei den instationären Anwendungen in dieser Arbeit keine Verbesserungen bezüglich der Konvergenz zu beobachten sind, wird diese Methode hier nicht verwendet.

## 2.6 Randbedingungen

Jede partielle Differentialgleichung benötigt für dessen Lösung wohl-definierte Randbedingungen. Bei zeitlichen Problemen müssen zusätzlich Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Die Wahl

der jeweiligen Rand- und Anfangsbedingungen definiert das zugehörige Strömungsproblem, welches durch die Lösung der Erhaltungsgleichungen bestimmt werden soll.

Generell können folgende Arten von Randbedingungen unterschieden werden [31]:

- 1. Art: Dirichlet-Randbedingung

$$U = f(x, y, t) \quad \text{Der Wert der Variable wird am Rand fest vorgeschrieben,}$$

z.B.: Haftbedingung an einer Wand mit  $\vec{u} = 0$ .

- 2. Art: Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g(x, y, t) \quad \text{Die Ableitung der Variable in Normalenrichtung wird vorgegeben,}$$

z.B.: Wärmestrom an einer adiabaten Wand mit  $q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$ .

- 3. Art: Robin-Randbedingung (Kombination aus 1. und 2. Art)

$$\alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial n} = h(x, y, t)$$

- 4. Art: Periodische Randbedingung

$$U(x_1, y_1, t) = U(x_2, y_2, t) \quad \text{periodischer Verlauf der Variable an zwei gegenüberliegenden Rändern, z.B.: „unendliche“ Spannweite}$$

Partielle Differentialgleichungen (PDGL) werden außerdem nach ihrem charakteristischen Lösungsverhalten klassifiziert. Dabei können elliptische, parabolische und hyperbolische Typen unterschieden werden [8]. Eine elliptische PDGL beschreibt stationäre Probleme, wie die stationäre Unterschallströmung oder die Verformung einer Membran. Die oben definierten Randbedingungen wirken dabei auf das gesamte Rechengebiet. Ein typischer Vertreter ist die Poisson-Gleichung  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = B$ .

Die parabolische PDGL beschreibt ungerichtete Transportvorgänge, wie Diffusion oder Wärmeleitung. Aufgrund der Zeitabhängigkeit ergibt sich ein Anfangs- / Randwertproblem.

Hyperbolische Differentialgleichungen beschreiben hingegen gerichtete Transportvorgänge, wie Konvektion oder Wellenausbreitung. Die physikalischen Größen bewegen sich dabei mit bestimmten Wellengeschwindigkeiten in unterschiedliche Raumrichtungen, sodass sich Informationen entlang ihrer „Charakteristiken“ bewegen. Der gesamte Ausbreitungsvorgang verhält sich stark nicht-linear. Die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) berücksichtigen mehrere physikalische Vorgänge, sodass sich je nach Strömungskonfiguration eine Mischform einstellt. Die gerichtete zeitliche Entwicklung und Konvektion charakterisieren ein hyperbolisches Verhalten, während der Druckterm ein elliptisches und der Reibungstensor ein parabolisches Verhalten hervorrufen. [8].

Mit Hilfe der Charakteristikentheorie werden bei den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) ein- und austretende Wellen am Ein- und Ausströmrand des Rechengebiets beobachtet. Die zugehörigen Wellengeschwindigkeiten lauten wie folgt [54]:

$$\lambda_1 = u - a \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u \quad , \quad \lambda_5 = u + a \quad . \quad (2.72)$$

Dabei bezeichnen  $\lambda_1$  und  $\lambda_5$  die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Akustik-Wellen in negativer und positiver x-Richtung. Die Konvektionsgeschwindigkeit mit der sich u.a. die Entropie fortbewegt, wird

mit  $\lambda_2$  gekennzeichnet, während  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  die Konvektionsgeschwindigkeiten für  $v$  bzw.  $w$  in die  $x$ -Richtung darstellen.

Die sich unterschiedlich ausbreitenden Informationswellen müssen bei der Wahl von Rand- und Anfangsbedingungen berücksichtigt werden. Bei subsonischen Strömungen ( $Ma < 1$  mit  $u > 0$ ) bewegen sich beispielsweise vier Wellen in das Rechengebiet, während eine Welle austritt. Am Ausströmrand werden hingegen vier austretende Wellen und eine eintretende Welle beobachtet. Bei Überschallströmungen ( $Ma > 1$ ) treten alle fünf Wellen am Eintritt ein bzw. am Austritt aus.

Aufgrund dieser Besonderheit müssen passende physikalische Randbedingungen (RB) der Strömung vorgegeben werden. Um beispielsweise eine gewünschte Strömung zu simulieren, wird an einen subsonischen Auslass ein fester Druckwert vorgegeben, siehe Tab. 2.1. Da das numerische Verfahren an jedem Rand eine spezifische Vorgabe der Lösungsvariablen benötigt, müssen zudem „numerische“ Randbedingungen bekannt sein [54]. Diese werden ausschließlich für den numerischen Lösungsalgorithmus benötigt und werden häufig mittels Extrapolation berechnet.

**Tab. 2.1:** Anzahl der benötigten physikalischen und numerischen Randbedingungen (RB) abhängig vom Strömungsregime.

Typ	physikalische RB (z.B.)	numerische RB (z.B.)
subsonischer Einlass	4 ( $u, v, w, \rho$ )	1 ( $p$ )
subsonischer Auslass	1 ( $p$ )	4 ( $u, v, w, \rho$ )
supersonischer Einlass	5 ( $u, v, w, \rho, p$ )	0 (-)
supersonischer Auslass	0 (-)	5 ( $u, v, w, \rho, p$ )

### 2.6.1 Einlass-Randbedingungen

Neben den physikalischen Randbedingungen, wie Geschwindigkeit  $u, v, w$  (siehe Kapitel 3) und Dichte  $\rho$  muss im subsonischen Fall eine weitere numerische Randbedingung definiert werden. Dabei handelt es sich um den Druck  $p$  oder die Temperatur  $T$ . Laut RUDY und STRIKWERDA [61] kann beispielsweise die verbleibende numerische Druck-Randbedingung wie folgt approximiert werden:

1. mit Hilfe einer einfachen Extrapolation 0. Ordnung des randnächsten Zellpunktes zum nächsten Zeitschritt mit  $p_{1,j,k}^{n+1} = p_{2,j,k}^{n+1}$ ,
2. mittels Extrapolation 0. Ordnung der austretenden charakteristischen Welle oder
3. Überbestimmung der Einströmdaten mit allen fünf Variablen.

In der ursprünglichen TAU-Version ist die mathematisch nicht korrekte Überbestimmung der Einströmdaten (Fall 3) implementiert. Dieser Ansatz verhält sich bei vielen Anwendungen stabil, zeigt jedoch bei unphysikalischen Einström-Randbedingungen starke Druck-Oszillationen direkt am Einlass [61]. Dieser Effekt wurde ebenfalls im Laufe dieser Arbeit bei stationären RANS, wie auch instationären LES-Anwendungen, beobachtet, insbesondere wenn die gewählten Ein- und Ausströmgrößen nicht exakt zum gegebenen Strömungsproblem passen.

Die Extrapolation des randnächsten Druckwertes ermöglicht ein veränderliches Druckfeld, welches stromauf laufende Druckstörungen berücksichtigt. Die austretende charakteristische Welle kann mit

Hilfe einer linearisierten eindimensionalen Euler-Gleichung approximiert werden. Eine stromauf laufende Stör-Amplitude  $A_1 = p' - \rho a u'$ , die aufgrund von Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen entsteht, bewegt sich mit  $\lambda_1 = u - a$  auf der charakteristischen Linie  $x + \lambda_1 t = \text{const.}$  POINSOT und LELE [54] geben u.a. folgende Rechenvorschrift an:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial t} + \mathcal{L}_1 = 0 \quad , \quad (2.73)$$

wobei die Amplituden der charakteristischen Wellen  $\mathcal{L}_i$  verwendet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \lambda_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad , \quad \mathcal{L}_2 = \lambda_2 \left( a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad , \\ \mathcal{L}_3 &= \lambda_3 \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \mathcal{L}_4 = \lambda_4 \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \mathcal{L}_5 = \lambda_5 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Die einfache Methode nach RUDY und STRIKWERDA [61] berücksichtigt dabei die stromab austretende Welle  $\mathcal{L}_1$ . Die diskrete Form dieser Druckextrapolation lautet für den Einlassrand ( $i = 1$ ) im zweidimensionalen Fall:

$$p_{1,j}^{n+1} = p_{2,j}^{n+1} - \rho_{1,j}^{n+1} a_{1,j}^n (u_{2,j}^{n+1} - u_{1,j}^{n+1}) \quad . \quad (2.75)$$

Die deutlich aufwendigere Methode nach POINSOT und LELE [54] berücksichtigt alle auftretenden Wellen  $\mathcal{L}_i$ . Je nach vorgegebenen Variablen werden modifizierte Navier-Stokes-Gleichungen gelöst und somit eine physikalische Kopplung aller Strömungsvariablen ermöglicht. Eine Extrapolation von Variablen wird vermieden. Diese Methode kommt bei turbulenten Einström-Randbedingungen einer kompressiblen Strömung bei einer DNS oder LES zum Einsatz [12].

## 2.6.2 Nicht-reflektierende Auslass-Randbedingungen

Am Ausströmrand einer subsonischen Strömung wird lediglich eine physikalische Randbedingung benötigt. Bei vielen Strömungsanwendungen ist nur der statische Auslassdruck  $p_A$  bekannt, sodass die verbleibenden Variablen als numerische Randbedingungen vorgegeben werden. Es ergeben sich hierbei wieder mehrere Möglichkeiten der Implementierung [61]:

1. konstanter Druck  $p_{N_x,j,k}^{n+1} = p_A$  am gesamten Auslass,
2. nicht-reflektierende Druckrandbedingung mit  $p_{N_x,j,k}^{n+1} \approx p_A$  oder
3. Überbestimmung der Ausströmdaten mit allen fünf Variablen.

Die mathematisch korrekte Variante des konstanten Auslassdruckes (Fall 1) führt in manchen Fällen zu Problemen. Kleine Druckfluktuationen, wie akustische Wellen oder numerische Störungen, werden am Austritt zurück ins Rechengebiet reflektiert und beeinflussen damit die gesamte Strömung. Zusätzlich können diese Störwellen an anderen Randbedingungen, wie bei einem überbestimmten Einströmrand, erneut zurück reflektiert werden. Somit ist ein unphysikalisches „Aufschaukeln“ dieser Störwellen möglich [54].

Als Alternative können nicht-reflektierende Druckrandbedingungen verwendet werden. RUDY und STRIKWERDA [61] nutzen folgenden Ansatz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho a \frac{\partial u}{\partial t} + K^* (p - p_\infty) = 0 \quad . \quad (2.76)$$

Dabei wird die Konstante  $K^* = \sigma^* (1 - Ma^2) a/L$  und als Auslassdruck der statische Umgebungsdruck  $p_\infty$  verwendet.  $L$  bezeichnet die charakteristische Gebietslänge und  $\sigma^*$  eine Konstante. Bei  $\sigma^* = 0$  ergibt sich eine ideale nicht-reflektierende Druckrandbedingung. Da leichte Druckstörungen zu einer realistischen Strömung gehören, wird als optimaler Wert  $\sigma^* = 0.25$  [54] bzw.  $\sigma^* = 0.27$  [61] empfohlen. Die zweidimensionale Diskretisierung der Gl. (2.76) lautet für einen beliebigen Druck  $p_A$  mit  $i = N_x$  am Auslassrand [61]:

$$p_{N_x,j}^{n+1} = \frac{(1 + K^* \Delta t) p_A + \rho_{N_x,j}^n a_{N_x,j}^n (u_{N_x,j}^{n+1} - u_{N_x,j}^n)}{1 + K^* \Delta t} \quad . \quad (2.77)$$

Die Methode von POINSOT und LELE [54] ermöglicht ebenfalls nicht-reflektierende Randbedingungen. Dabei wird für die modifizierten Navier-Stokes-Gleichungen  $\mathcal{L}_1 = K^* (p - p_\infty)$  verwendet.

Eine weitere Variante nicht-reflektierender Druckrandbedingungen stellt die Dämpfung vorhandener Störwellen dar. Mit Hilfe einer allmählichen Gitterstreckung kann beispielsweise am Auslass die numerische Dissipation lokal erhöht werden, sodass stark reduzierte Druckfluktuationen auf den eigentlichen Ausströmrand treffen [15].

Die Dämpfung der Störwellen kann ebenfalls mit lokal definierten Dämpfungstermen in den Navier-Stokes-Gleichungen (auch *sponge layer* genannt) erfolgen [21] [45] [15], siehe Gl. (2.78) - (2.80). Diese unphysikalischen Terme wirken ausschließlich in der Nähe der gewünschten Ränder und dämpfen die Strömungsvariablen auf eine bekannte Referenzlösung. Die eigentliche Dämpfung wird mit dessen Wirkungsweite  $W$  und dem Dämpfungskoeffizienten  $\sigma^d$  bestimmt.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \sigma^d (\rho_{ref} - \rho) \quad , \quad (2.78)$$

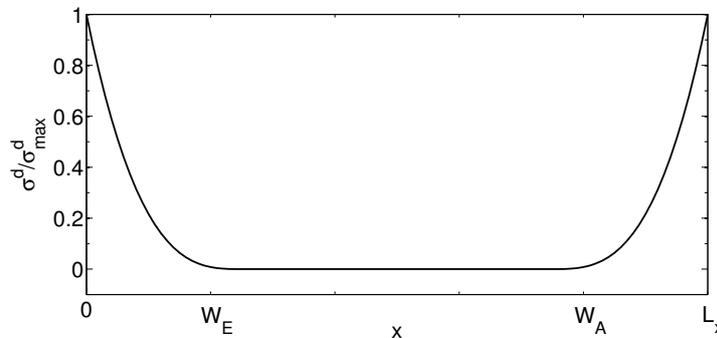
$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) = \sigma^d [(\rho u_i)_{ref} - \rho u_i] \quad , \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p) u_j + q_j - u_k \sigma_{kj}] = \sigma^d [(\rho E)_{ref} - \rho E] \quad . \quad (2.80)$$

Um unnatürliche Reflexionen zu vermeiden, sollte ein kontinuierlicher Abfall der Dämpfungswirkung erfolgen. FREUND [21] empfiehlt für den Ein- (E) bzw. Auslass (A) folgenden Verlauf:

$$\sigma^d(x) = \begin{cases} \sigma_{\max,E}^d \left( \frac{W_E - x}{W_E} \right)^{\beta_E} & 0 \leq x < W_E \\ 0 & W_E < x < L_x - W_A \\ \sigma_{\max,A}^d \left( \frac{x - (L_x - W_A)}{W_A} \right)^{\beta_A} & L_x - W_A \leq x \leq L_x \quad . \end{cases} \quad (2.81)$$

Der exponentielle Verlauf ist mit  $\beta_E = \beta_A = 3$  in der weiteren Arbeit konstant. Die Dämpfung wird am Ein- und Auslass mit der Maximaldämpfung  $\sigma_{\max,E}^d$  bzw.  $\sigma_{\max,A}^d$  und dessen Weite  $W_E$  bzw.  $W_A$  beliebig festgelegt. Dabei bezeichnet  $L_x$  die Gesamtlänge des Rechengebiets. Die Stärke der Maximaldämpfung  $\sigma_{\max}^d$  muss bei instationären Anwendungen ausreichend groß gewählt werden. In Abb. 2.6 ist der Dämpfungsverlauf entlang eines Rechengebiets skizziert.



**Abb. 2.6:** Schematische Darstellung der Dämpfungswirkung am Ein- und Auslass eines Rechengebiets der Länge  $L_x$  ( $\beta_E = \beta_A = 3$ ).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit synthetischen Turbulenz-Methoden für skalen-auflösende Strömungssimulationen. Das synthetisch erzeugte Geschwindigkeitsfeld wird üblicherweise als Dirichlet-Randbedingung am Einströmrand vorgegeben. Aufgrund der instationären Berechnungsweise der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) müssen die beschriebenen Besonderheiten der Randbedingungen berücksichtigt werden. Die Standard-Implementierung der Dirichlet-Randbedingung am Ein- und Auslass des DLR-TAU-Codes wurde mit den Ansätzen von RUDY und STRIKWERDA [61] nach Gl. (2.75) und (2.77) erweitert.

Der Dämpfungsansatz mit den Gleichungen (2.78)-(2.81) von MANI [45] und FREUND [21] wird ebenfalls in Verbindung mit der synthetischen Turbulenzmethode verwendet. Einen ähnlichen Ansatz nutzt beispielsweise PRITZ [58].

# 3 Erzeugung turbulenter Einström-Randbedingungen

Im vorherigen Kapitel wurden einige Berechnungsansätze turbulenter Strömungen vorgestellt. Je nach Methode müssen die jeweiligen Besonderheiten bei der Wahl der Einlass-Randbedingungen berücksichtigt werden.

RANS-Simulationen (Abschnitt 2.3) benötigen relativ einfache Profile gemittelter Strömungsgrößen, wie die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere turbulente kinetische Energie. Diese Profile können analytisch oder experimentell bereitgestellt werden.

Skalen-auflösende Simulationen, wie die LES (Abschnitt 2.2), benötigen am Einlass jedoch realistische Zeitsignale turbulenter Geschwindigkeitsfluktuationen. Da im Allgemeinen, insbesondere bei industriellen Anwendungen, keine vollständigen Datensätze der Strömungsprofile vorhanden sind, müssen Methoden entwickelt werden, die einen möglichst physikalischen Turbulenzzustand erzeugen. Diese Zeitdaten müssen gewisse statistische Eigenschaften einer turbulenten Strömung berücksichtigen. Ein einfaches Hinzufügen zufälliger Fluktuationen liefert kein physikalisches Turbulenzverhalten. Die Störungen werden stromab sehr stark gedämpft, sodass ein langer Entwicklungsbereich benötigt wird [35].

Idealerweise sollte der Einströmrand möglichst nahe am eigentlichen Strömungsphänomen platziert werden, sodass der numerische Aufwand möglichst gering gehalten wird. Daher muss die synthetische Turbulenz nach einem kurzen Übergangsbereich einen physikalischen Zustand annehmen. Gerade bei turbulenten Innenströmungen mit erheblichem Wandeinfluss müssen korrekt abgestimmte Einströmdaten verwendet werden.

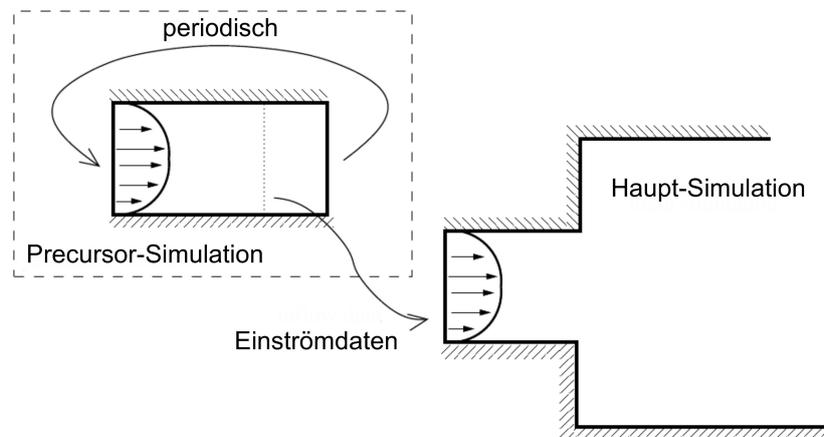
Im Folgenden wird ein kurzer Überblick möglicher Methoden zur Erzeugung turbulenter Einströmdaten gegeben. Die Arbeiten von JARRIN (2008) [35], POLETTI (2011) [55], FRÖHLICH et al. (2008) [26] bzw. TABOR et al. (2010) [74] dienen dabei als Grundlage. Nach JARRIN [35] sollte die ideale Turbulenzmethode folgende Eigenschaften aufweisen:

- der numerische Aufwand zur Erzeugung turbulenter Eintrittsgrößen darf nur einen Bruchteil des Gesamtaufwands betragen,
- die Methode muss allgemein für beliebige Rechengitter, Geometrien und Strömungen ohne spezielle Eingriffe des Anwenders funktionieren und
- die Eingangsinformationen der Methode müssen so einfach wie möglich gehalten werden (mittlere Strömung, Turbulenzgrad, RANS-Statistiken, ...).

### Recycling / Precursor-Methode

Sehr gute Ergebnisse lassen sich mit Hilfe von Zusatzsimulationen erzielen. Dabei liefert eine Precursor-Simulation die genauesten Einströmdaten für die eigentliche Rechnung. Mit periodischen Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung lassen sich voll ausgebildete turbulente Strömungsprofile erzeugen. Die Einlassrandbedingungen der Hauptsimulation ergeben sich somit für jeden Zeitschritt aus dem turbulenten Strömungsfeld einer beliebigen Ebene der Zusatzsimulation, siehe Abb. 3.1. Die so gewonnenen Daten können zusätzlich skaliert und modifiziert werden (Recycling-Methode).

Da dieses Vorgehen einen deutlich erhöhten numerischen Aufwand hervorruft, sind die Precursor-Simulationen auf einfache voll entwickelte Strömungen, wie die periodische turbulente Kanalströmung, beschränkt.



**Abb. 3.1:** Schematische Darstellung der Recycling-Methode nach [35].

### Synthetische Turbulenz

Verfahren, die keine Zusatzsimulationen oder vorhandene Datensätze nutzen, werden als synthetische Turbulenzmethoden bezeichnet. Auf sehr unterschiedliche Weise werden zufällig verteilte Geschwindigkeitsfelder mit Hilfe von stochastischen Modellen erzeugt. Dabei werden statistische Eigenschaften einer turbulenten Strömung, wie die mittlere Geschwindigkeit, die turbulente kinetische Energie, Reynoldsspannungen oder Zwei-Punkt-Korrelationen berücksichtigt. Da keine höheren Terme der Turbulenz-Transportgleichung, wie Dissipation oder turbulente Diffusion, korrekt nachgebildet werden, handelt es sich lediglich um eine Näherung der turbulenten Vorgänge. Je nach Methode variiert der Übergangsbereich bis die turbulente Strömung einen physikalischen Zustand annimmt.

Die Modellierung turbulenter Strukturen erfolgt im physikalischen oder spektralen Raum. Spektralmethoden versuchen ein bekanntes Energiespektrum nachzubilden. Durch eine Überlagerung von einzelnen Fourier-Moden können Geschwindigkeitsfluktuationen erzeugt werden. Bekannte Ansätze stammen von BATTEN et al. (2004) [5], KEATING et al. (2004) [39] oder ADAMIAN et al. (2010) [3]. Da im Folgenden keine Spektralmethoden verwendet werden, wird nicht weiter darauf eingegangen.

Methoden, wie die Synthetic-Eddy Methode (SEM) von JARRIN et al. (2006) [36] (Abschnitt 3.1), die divergenzfreie Erweiterung (DF-SEM) von POLETTI (2011) [55] (Abschnitt 3.2) oder die klassische Vortex-Methode (VM) von SERGENT (2002) [64] (Anhang A.1) stellen eine weitere Möglichkeit dar, physikalisch kohärente Wirbelstrukturen in einer beliebigen Ebene des Rechengebiets zu erzeugen. Die synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen werden dem mittleren Strömungsfeld überlagert und regen einen turbulenten Zustand an. Als Eingabegrößen dienen RANS-Statistiken oder benutzerdefinierte Strömungsprofile.

### 3.1 Synthetic-Eddy Methode (SEM)

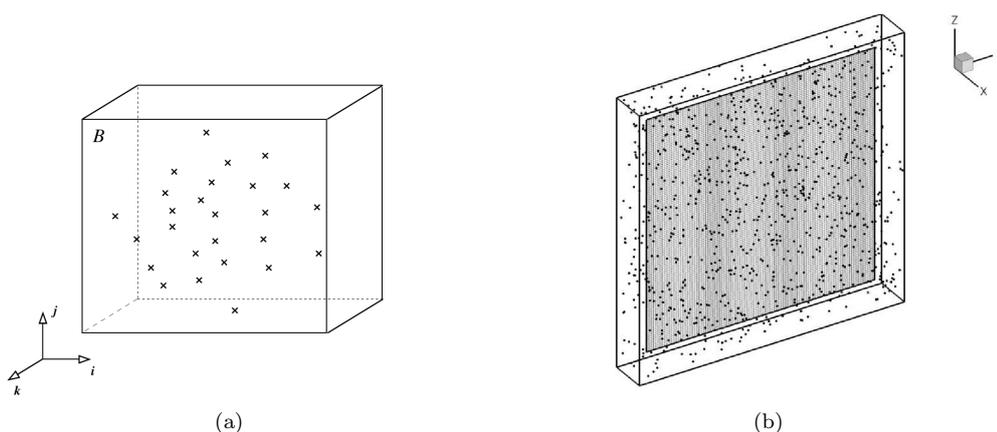
Die Synthetic-Eddy Methode (SEM) wurde erstmalig von JARRIN et al. (2006) [36] vorgestellt. Darin wird ein hexaedrisches Volumen mit einer bestimmten Anzahl von zufällig verteilten Wirbelkernen definiert. Eine Formfunktion beschreibt dabei die Geschwindigkeitsverteilung um einen Wirbel.

Um eine zeitliche Variation der Geschwindigkeitsfluktuationen zu erreichen, werden alle Wirbelkerne mit der Konvektionsgeschwindigkeit der Strömung  $\vec{U}_{konv}$  durch das Volumen fortbewegt. Falls ein Wirbelkern das Gebiet verlässt, wird am gegenüberliegenden Rand ein neuer Wirbel mit neuen zufälligen Eigenschaften, wie Position und Drehrichtung, erzeugt.

Um einen möglichst physikalischen Zustand zu erreichen, sind die jeweiligen Wirbelintensitäten vom lokalen Reynoldsspannungstensor (RST) abhängig. Die turbulente Längenskala eines Wirbels wird ebenfalls beliebig definiert, sodass sich kleinere Wirbelskalen in Wandnähe berücksichtigen lassen. Das turbulente Geschwindigkeitsfeld kann beispielsweise als Dirichlet-Randbedingung am Einlass einer skalen-auflösenden Simulation vorgegeben werden.

Als Grundlage dient ein Quader  $B$  mit dem Volumeninhalt  $V_B$ :

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_{i,\min} < x_i < x_{i,\max}\} \quad . \quad (3.1)$$



**Abb. 3.2:** Der skizzierte Quader  $B$  beinhaltet alle  $N$  Wirbelkerne (a). Die Größe wird durch die Einströmebene  $S$  (grau hinterlegt) und die Wirbelradien  $\sigma(\vec{x})$  bestimmt [35] (b).

Wie in Abb. 3.2 (a) skizziert, beinhaltet der Quader sämtliche Wirbelkerne der Anzahl  $N$ . Die Größe ist abhängig vom Wirbelradius  $\sigma(\vec{x})$  und der Einströmebene  $S$ , siehe Abb. 3.2 (b):

$$x_{i,\min} = \min_{\vec{x} \in S} \{x_i - \sigma(x_j)\} \quad , \quad x_{i,\max} = \max_{\vec{x} \in S} \{x_i + \sigma(x_j)\} \quad . \quad (3.2)$$

Die gleichverteilte Positionierung der Wirbelkerne erfolgt zu Beginn der Rechnung zufällig, wobei die Wirbelkerne auch außerhalb der eigentlichen Einströmebene platziert werden. Physikalische Randbedingungen wie eine Wand oder Periodizität werden von der ursprünglichen SEM nicht berücksichtigt. Die spätere Modifikation beachtet dies jedoch.

Das synthetische Geschwindigkeitsfeld der SEM ergibt sich aus:

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i = U_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_{ij} \varepsilon_j^{(k)} f_\sigma(x_m - x_m^{(k)}) \quad . \quad (3.3)$$

Dabei wird die mittlere Geschwindigkeit  $U_i$  und eine Cholesky-Zerlegung  $a_{ij}$  des Reynoldsspannungstensors  $R_{ij}$  verwendet:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix} \quad . \quad (3.4)$$

Bei Verwendung einer RANS-Lösung mit einem Wirbelviskositätsmodell folgen die Reynoldsspannungen aus dem Boussinesq-Ansatz:

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k' \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad k' = \langle u'_i u'_i \rangle / 2 \quad . \quad (3.5)$$

Die Intensität  $\varepsilon_j^{(k)}$  des  $k$ -ten Wirbels in  $j$ -Richtung stellt eine gleichverteilte Zufallsgröße mit den Werten  $\pm 1$  dar. Die statistischen Eigenschaften der Intensität lauten:

$$\langle \varepsilon_j \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \varepsilon_j^2 \rangle = 1 \quad . \quad (3.6)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung um das Wirbelzentrum  $\vec{x}^{(k)}$  wird mit Hilfe der Formfunktion  $f_\sigma$  beschreiben<sup>1</sup>:

$$f_\sigma(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) = \sqrt{V_B} \sigma^{-3/2} f\left(\frac{x - x^{(k)}}{\sigma}\right) f\left(\frac{y - y^{(k)}}{\sigma}\right) f\left(\frac{z - z^{(k)}}{\sigma}\right) \quad , \quad (3.7)$$

wobei die eindimensionale Formfunktion  $f$  folgende Bedingung erfüllen muss:

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = 1 \quad \text{oder} \quad \int_{-\sigma}^{+\sigma} f^2(x) dx = 1 \quad . \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>Die Größe  $\sigma^{-3}$  bei Jarrin et al. (2006) [36] ist fehlerhaft. Die dimensionslose Formfunktion  $f_\sigma$  wird bei Poletto (2011) [55] korrekt angegeben.

Als mögliche Formfunktion wird mit  $\xi = (x_i - x_i^{(k)})/\sigma$  folgender Verlauf vorgeschlagen:

$$f(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - |\xi|) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9)$$

Eine glattere glockenförmige Formfunktion führt hinsichtlich der Entwicklungslänge zu keiner deutlichen Verbesserung [35]. Der Wirbelradius  $\sigma$  wird mit statistischen Turbulenzgrößen abgeschätzt:

$$\sigma = \max \left( \min \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \kappa\delta \right), \Delta \right) \quad (3.10)$$

Als Grundlage dient die integrale Längenskale  $L_t = k^{3/2}/\varepsilon$ . Bei Turbulenzmodellen mit einer  $\omega$ -Gleichung wird  $\varepsilon = C_\mu k\omega$  und  $C_\mu = 0.09$  genutzt. Zusätzlich wird der maximale Wirbelradius mit einer geometrischen Längenskale, wie die Grenzschichtdicke  $\delta$  und der von Kármán-Konstanten  $\kappa = 0.41$  begrenzt. Die lokale Gittergröße  $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  berücksichtigt außerdem das LES-Konzept. Diese Definition des Wirbelradius  $\sigma$  wird im Folgenden als „isotrop“ bezeichnet.

Laut JARRIN [35] sollte die Wirbelanzahl  $N$  vom Volumen  $V_B$  und der Wirbelgröße  $\sigma$  abhängen, sodass für jede Anwendung  $V_B/(N\sigma^3) = \text{const.}$  gilt. Mit  $C = 1$  wird eine von der Wirbelanzahl unabhängige Lösung erwartet. Die Wirbelanzahl  $N$  wird wie folgt abgeschätzt:

$$N = C \max \left( \frac{V_B}{\sigma^3} \right) \quad (3.11)$$

Aufgrund der Konvektion der Wirbelkerne durch den gesamten Quader wird eine zeitlich veränderliche Wirbelbewegung erreicht. Als Konvektionsgeschwindigkeit  $\vec{U}_{konv}$  wird die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Ebene verwendet, sodass alle Wirbelkerne die gleiche „Lebensdauer“ besitzen:

$$\vec{x}^{(k)}(t + \Delta t) = \vec{x}^{(k)}(t) + \vec{U}_{konv}(t)\Delta t \quad \text{und} \quad \vec{U}_{konv} = \int_S \vec{U}(\vec{x})d\vec{x} \quad (3.12)$$

Wie bereits erwähnt, wird bei Austritt aus dem Gebiet  $B$  ein neuer Wirbel mit neuer Position  $\vec{x}^{(k)}$  und Intensität  $\vec{\varepsilon}^{(k)}$  generiert. Die Wirbelanzahl  $N$  bleibt somit konstant. Nach JARRIN (2008) [35] ergibt sich eine turbulente Zeitskale von  $\tau \sim \sigma/U_{konv}$ . Der Wirbelradius  $\sigma$  definiert daher die turbulente Zeit- und Längenskale eines Wirbels.

Die statistischen Eigenschaften der SEM können wie folgt zusammengefasst werden. Da  $\langle \varepsilon_j \rangle = 0$  gilt, entspricht die mittlere Geschwindigkeit der vorgegebenen Referenz-Lösung:

$$\langle u_i \rangle = U_i \quad \text{und} \quad \langle u'_i \rangle = 0 \quad (3.13)$$

Die Eingabe-Reynoldsspannungen werden mit  $\langle \varepsilon_m^k \varepsilon_n^l \rangle = \delta_{kl}\delta_{mn}$  exakt wiedergegeben:

$$\langle u'_i u'_j \rangle = a_{im} a_{jm} = R_{ij} \quad (3.14)$$

Die Herleitung dieser und weiteren statistischen Kenngrößen sind bei JARRIN (2008) [35] angegeben.

Nach JARRIN [35] ergibt sich folgender Ablauf der SEM:

1. Schätze alle benötigten Eingabedaten ( $U_i, R_{ij}, \sigma$ ) ab
2. Definiere Quader  $B$  mit  $N$  Wirbel
3. Generiere für jeden Wirbel zwei Zufallsvektoren (Position:  $\vec{x}^{(k)}$ , Intensität:  $\vec{\varepsilon}^{(k)}$ )
4. Berechne das synthetische Geschwindigkeitssignal aller Punkte der Ebene  $S$
5. Berechne die Konvektionsbewegung mit  $\vec{U}_{konv}$  aller Wirbelkerne durch das Gebiet  $B$
6. Generiere die neue Position  $\vec{x}^{(k)}$  und Intensität  $\vec{\varepsilon}^{(k)}$  der ausströmenden Wirbel aus dem Quader  $B$ . → Anschließend erfolgt der nächste Zeitschritt. Gehe dabei zu Punkt 4.

Im Laufe der Zeit wurden Modifikationen der ursprünglichen SEM entwickelt. Sie basieren im Wesentlichen auf einer verbesserten physikalischen Modellierung der turbulenten Wirbelskalen.

### Modifikation - Jarrin (2008)

Die modifizierte SEM von JARRIN (2008) [35] bzw. (2009) [37] erlaubt eine Approximation der anisotropen Turbulenz. Mit Hilfe einer dreidimensionalen Längenskale  $\sigma_{ij}$  wird beispielsweise das anisotrope Turbulenzverhalten in Wandnähe berücksichtigt. Die erweiterte Formfunktion  $f_{\sigma_{ij}}$  variiert je nach Geschwindigkeitskomponente  $i$  und Raumrichtung  $j$ . Es ergeben sich folgende Modifikationen:

1. Abmessungen des Quaders  $B$  mit  $N$  Wirbel:

$$x_{i,\min} = \min_{\vec{x} \in S} \{x_i - \sigma_{ij}(x_j)\} \quad , \quad x_{i,\max} = \max_{\vec{x} \in S} \{x_i + \sigma_{ij}(x_j)\} \quad (3.15)$$

2. Synthetische Geschwindigkeitsverteilung:

$$u_i = U_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_{ij} \varepsilon_j^{(k)} f_{\sigma_{ij}} \left( x_m - x_m^{(k)} \right) \quad (3.16)$$

3. Formfunktion  $f_{\sigma_{ij}}$  für die  $u_i$ -Geschwindigkeitskomponente<sup>2</sup>:

$$f_{\sigma_{ij}} \left( \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right) = \sqrt{\frac{V_B}{\sigma_{i1}\sigma_{i2}\sigma_{i3}}} f \left( \frac{x - x^{(k)}}{\sigma_{i1}} \right) f \left( \frac{y - y^{(k)}}{\sigma_{i2}} \right) f \left( \frac{z - z^{(k)}}{\sigma_{i3}} \right) \quad (3.17)$$

Bisher wurde für alle drei Raumrichtungen eine konstante Längenskale  $\sigma$  verwendet, sodass ausschließlich kugelförmige Strukturen nachgebildet werden konnten. Mit der mehrdimensionalen Längenskale  $\sigma_{ij}$  ist es nun möglich ellipsenförmige Strukturen, wie die bekannten *streaks* in Wandnähe, zu erzeugen. Die Erweiterung ermöglicht zudem für jede Geschwindigkeitskomponente  $i$  eine unterschiedliche Längenskale in den Raumrichtungen  $j$ . Laut JARRIN (2008) [35] sollten die wandnormalen und spannweiten Komponenten  $\sigma_{i2} = \sigma_{i3}$  gleich groß sein. Die wandparallele Längenskale

<sup>2</sup>Die Formfunktion  $f_{\sigma_{ij}}$  ist dimensionslos. Die angegebene Gleichung bei Jarrin (2008) [35] ist daher nicht korrekt.

$\sigma_{i1} = U_{konv}/\tau_i$  in Strömungsrichtung kann beispielsweise mit der integralen Zeitskala  $\tau_i$  variabel definiert sein. Eine allgemeine Approximation für ein RANS-Modell wird nicht angegeben.

### Modifikation - Pamiès et al. (2009)

Eine weitere Modifikation der Formfunktion wurde von PAMIÈS et al. (2009) [53] vorgeschlagen. Dabei werden drei separate eindimensionale Formfunktionen ( $\Xi$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ) eingeführt [55]:

$$u'_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \varepsilon^{(k)} \Xi_{jp} \left( \frac{t - t^{(k)} - l^t}{l_p^t} \right) \Phi_{jp} \left( \frac{y - y^{(k)}}{l_p^y} \right) \Psi_{jp} \left( \frac{z - z^{(k)}}{l_p^z} \right) . \quad (3.18)$$

Die Einlassebene wird in einzelne Abschnitte (Moden)  $p$  unterteilt, sodass eine gezielte Skalen- bzw. Funktionsanpassung je nach Wandabstand möglich ist. Dieser Ansatz wurde für eine turbulente Kanalströmung entwickelt, wobei DNS- bzw. LES-Statistiken verwendet wurden. Für beliebige Strömungen muss der Anwender eine Vielzahl an Eingabegrößen vorgeben, was einer einfachen praktikablen synthetischen Turbulenzmethode widerspricht.

### Modifikation - Adamian et al. (2011)

Die Definition der turbulenten Längenskale  $L_t$  wurde von ADAMIAN et al. [4] überarbeitet. Nach ihrer Einschätzung ist der Betrag zu groß, sodass folgender Ansatz verwendet wird ( $\varepsilon = C_\mu k \omega$ )<sup>3</sup>:

$$L_t = \frac{k^{3/2}}{2\varepsilon} = \frac{k^{1/2}}{2C_\mu \omega} . \quad (3.19)$$

Zudem wird die Anisotropie der Wirbelskalen in Wandnähe berücksichtigt (im Folgenden „anisoWand“). Dazu werden die Wirbelradien  $\sigma_{ij}$  der Formfunktion  $f_{\sigma_{ij}}$  nach Gl. (3.17) wie folgt abgeschätzt:

$$\sigma_y = \max \left( \min \left( \frac{k^{3/2}}{2\varepsilon}, \kappa \delta \right), \Delta \right) , \quad \sigma_x = \max_y \{ \sigma_y(y) \} , \quad \sigma_z = \sigma_y . \quad (3.20)$$

Diese sind für alle Geschwindigkeitskomponenten gleich groß, sodass sich in Strömungsrichtung gestreckte Wirbelstrukturen ergeben. Die physikalisch verbesserte Modellierung der Wirbelskalen führt nach [4] zu einer kürzeren Übergangslänge stromab der Einlassebene. Zu beachten ist außerdem die modifizierte Längenskale des LES-Feinstrukturmodells nach Gl. (2.47).

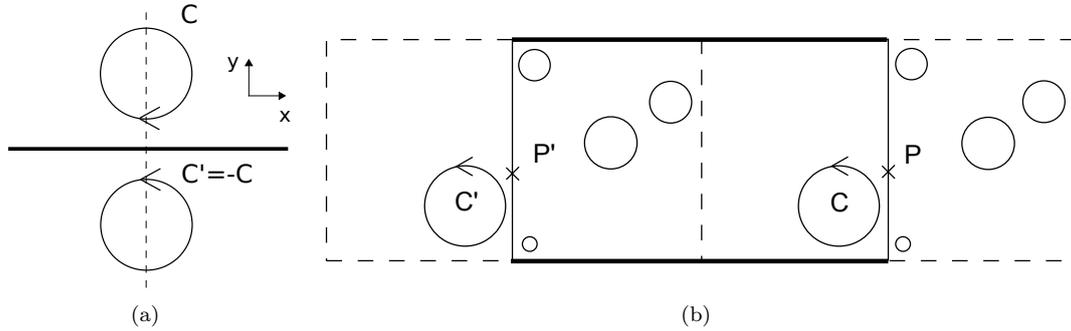
### Weitere Modifikationen

Sofern die einzelnen Reynoldsspannungen  $\langle u'_i u'_i \rangle$  zur Verfügung stehen, kann folgende Definition der anisotropen Wirbelradien verwendet werden (im Folgenden als „anisoRST“ bezeichnet) [16]:

$$\sigma_i = \max \left( \min \left\{ \frac{\left( \frac{3}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \right)^{3/2}}{\varepsilon}, \kappa \delta \right\}, \Delta_i \right) . \quad (3.21)$$

<sup>3</sup>Die turbulente Längenskale  $L_t$  ist aus Dimensionsgründen bei Adamian et al. (2011) [4] nicht korrekt.

Wie bereits erläutert, werden die Wirbelkerne auch außerhalb der eigentlichen Eintrittsebene platziert. Physikalische Randbedingungen, wie feste Wände oder Periodizität, werden dabei nicht berücksichtigt. Mit Hilfe gespiegelter bzw. kopierter Wirbelkerne (Position:  $\vec{x}^{(k)}$ , Intensität:  $\vec{\varepsilon}^{(k)}$ ) lassen sich die gewünschten Randbedingungen jedoch nachbilden, wie in Abb. 3.3 anschaulich dargestellt.



**Abb. 3.3:** Gespiegelte „Geisterwirbel“ mit entgegengesetzter Drehrichtung  $C' = -C$  bilden in der Summe eine Wand ( $v_n = 0$ ) (a). Kopierte Wirbel ermöglichen eine Periodizität (b) [6].

Aufgrund der synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen  $u'$  in Strömungsrichtung nach Gl. (3.3) ergibt sich am Einlass ein nicht-konstanter Massenstrom  $\dot{m}_E$ . Bei inkompressiblen Strömungslösern ruft dies in Verbindung mit der Druckkorrektur starke Druckfluktuationen am Eintritt hervor [56]. Mit Hilfe einer Massenstrom-Korrektur werden die Geschwindigkeitsfluktuationen entsprechend skaliert:

$$\vec{u} = f \vec{u}^* \quad \text{mit} \quad f = \frac{\dot{m}_{ref}}{\dot{m}_E^*}, \quad \dot{m}_E^* = \int_S \rho \vec{u}^*(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (3.22)$$

sodass  $\dot{m}_E = \dot{m}_{ref} = \text{const.}$  gilt. Die Abweichung des modifizierten Geschwindigkeitsfeldes beträgt etwa 1%. Der Einfluss auf die Statistiken ist daher vernachlässigbar klein. Die unphysikalischen Druckfluktuationen werden bei einem inkompressiblen Ansatz deutlich kleiner. Zudem werden weniger innere Iterationen für eine konvergierte Lösung benötigt [56].

Eine weitere Einschränkung stellt das nicht-divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld ( $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ) dar. Der inkompressible Strömungslöser versucht in der ersten Zellschicht nach der Eintrittsebene diesen Fehler zu beheben und die Kontinuität der Strömung zu gewährleisten. Neben dem fluktuierenden Massenstrom  $\dot{m}_E$  führt dies zusätzlich zu starken unphysikalischen Druckfluktuationen am Eintritt des Rechengebiets [56].

Bei Verwendung eines kompressiblen Strömungslösers, wie dem DLR-TAU-Code (Abschnitt 2.5), sind außerdem Auswirkungen auf Dichte  $\rho$ , Druck  $p$  und damit auf die Temperatur  $T$  zu erwarten. Um realistische Einströmdaten für die Temperatur zu gewinnen, kann die *Strong Reynolds analogy* RSA nach Morkovin verwendet werden [11]:

$$\frac{T'}{\langle T \rangle} \approx -(\gamma - 1) \langle Ma \rangle^2 \frac{u'}{\langle u \rangle}. \quad (3.23)$$

Diese Näherung der turbulenten Temperaturfluktuationen basiert auf den Geschwindigkeitsfluktuationen  $u'$  in Strömungsrichtung und ist für adiabate Wände gültig [50].

Die praktische Umsetzung der SEM in Verbindung mit dem DLR-TAU-Code wird im weiteren Verlauf der Arbeit erläutert. Mögliche Einschränkungen bzw. Erweiterungen werden ebenfalls genannt.

### 3.2 Divergenzfreie Synthetic-Eddy Methode (DF-SEM)

Einen aktuellen Ansatz stellt die divergenzfreie Synthetic-Eddy Methode (DF-SEM) von POLETTO et al. (2011) [56] bzw. [55] dar. Diese Methode basiert auf der zuvor beschriebenen SEM von JARRIN et al. (2009) [37] und verwendet dasselbe grundlegende Konzept der zufälligen Wirbelverteilung innerhalb eines virtuellen Quaders. Da der Großteil der synthetischen Turbulenzmethoden, wie auch die SEM, nicht divergenzfrei ( $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ) ist, handelt es sich um eine vielversprechende Erweiterung.

Ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) kann unter Berücksichtigung der Wirbelstärke  $\vec{\omega}$  erzeugt werden. Die synthetischen Fluktuationen der Wirbelstärke  $\vec{\omega}'$  berechnen sich nach:

$$\vec{\omega}'(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N \vec{\alpha}^{(k)}(t) g_{\sigma} \left( \frac{\vec{x} - \vec{x}^{(k)}}{\sigma} \right) , \quad (3.24)$$

wobei  $\vec{\alpha}^{(k)}(t)$  die jeweilige Intensität des  $k$ -ten Wirbels und  $g_{\sigma}$  eine dreidimensionale Formfunktion der Wirbelstärkeverteilung um den Wirbelkern  $\vec{x}^{(k)}$  definiert. Die Rotation der Wirbelstärke vereinfacht sich unter Annahme einer divergenzfreien Strömung ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) wie folgt:

$$\nabla \times \vec{\omega} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u} \quad \text{führt zu:} \quad \nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega} . \quad (3.25)$$

Diese Poisson-Gleichung kann mit Hilfe des Satzes von Biot-Savart [72] gelöst werden:

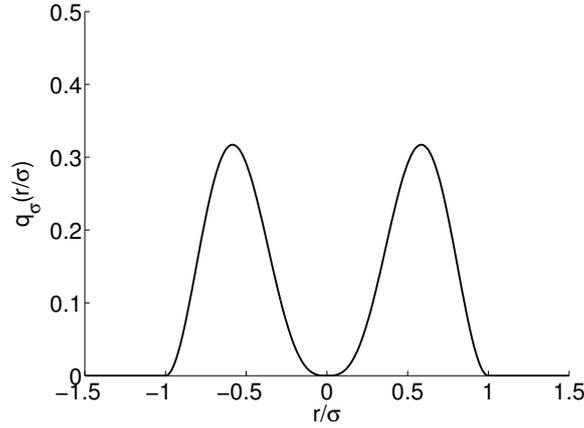
$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N K_{\sigma} \left( \frac{\vec{x} - \vec{x}^{(k)}}{\sigma} \right) \times \vec{\alpha}^{(k)} . \quad (3.26)$$

Der Term  $K_{\sigma}(\vec{y}) = \frac{q_{\sigma}(|\vec{y}|)}{|\vec{y}|^3} \vec{y}$  definiert den Biot-Savart-Anteil, wobei dieser Ansatz auf einen konstanten Wirbelradius  $\sigma$  und einer einfachen eindimensionalen Formfunktion  $q_{\sigma}$  für alle drei Raumrichtungen basiert. Für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N \frac{q_{\sigma} \left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)}{\left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)^3} \frac{1}{\sigma} \left[ (y - y^{(k)}) \alpha_3^{(k)} - (z - z^{(k)}) \alpha_2^{(k)} \right] , \\ v' &= \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N \frac{q_{\sigma} \left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)}{\left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)^3} \frac{1}{\sigma} \left[ (z - z^{(k)}) \alpha_1^{(k)} - (x - x^{(k)}) \alpha_3^{(k)} \right] , \\ w' &= \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N \frac{q_{\sigma} \left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)}{\left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right)^3} \frac{1}{\sigma} \left[ (x - x^{(k)}) \alpha_2^{(k)} - (y - y^{(k)}) \alpha_1^{(k)} \right] . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Formfunktion  $q_{\sigma} \left( \frac{r}{\sigma} \right)$  sollte vom Radius  $r^{(k)} = \sqrt{(x - x^{(k)})^2 + (y - y^{(k)})^2 + (z - z^{(k)})^2}$  abhängen. Folgender Verlauf, siehe Abb. 3.4, wird vorgeschlagen [56]:

$$q_{\sigma} \left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right) = \begin{cases} B \left[ \sin \left( \pi \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right) \right]^2 \left( \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right) & \text{für } \left| \frac{r^{(k)}}{\sigma} \right| < 1 \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases} \quad (3.28)$$



**Abb. 3.4:** Formfunktion  $q_\sigma(r/\sigma)$  der Geschwindigkeitsverteilung für die DF-SEM.

Der Skalierungsfaktor  $B$  ist bei POLETTO [55] definiert als  $B = \sqrt{\frac{16V_B}{15\pi\sigma^3}}$ . Der Wert  $\sqrt{16/15}$  scheint willkürlich gewählt zu sein. Zudem wird in POLETTO et al. (2011) [56] der Wert  $\sqrt{15/16}$  angegeben. Aufgrund dieser Unklarheit wurde in der Voruntersuchung der synthetischen Turbulenzmethoden, siehe Abschnitt 3.3, der Skalierungsfaktor  $B = \sqrt{\frac{V_B}{\pi\sigma^3}}$  bestätigt. Dieser wird im Folgenden verwendet.

Die statistischen Eigenschaften des synthetischen Geschwindigkeitsfeldes der DF-SEM werden in der Arbeit von Poletto hergeleitet [55]. Da  $\langle \alpha_i^{(k)} \rangle = 0$  und  $\langle (\alpha_i^{(k)})^2 \rangle = 1$  gilt, ergibt sich für die isotrope Turbulenz  $\langle u'_i \rangle = 0$  und  $\langle u'_i u'_i \rangle = 1$ .

Aufgrund der divergenzfreien Forderung der Gl. (3.27) ist eine Cholesky-Zerlegung des Reynoldsspannungstensors  $R_{ij}$ , Gl. (3.4), nicht möglich. Jedoch lassen sich die drei Eigenwerte ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ) des symmetrischen Reynoldsspannungstensors (RST) mittels einer Hauptachsen-Transformation berechnen. Die Eigenwerte können ebenfalls mit der Wirbelintensität  $\bar{\alpha}^{(k)}$  ausgedrückt werden:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\langle \alpha_2^2 \rangle + \langle \alpha_3^2 \rangle) \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (\langle \alpha_1^2 \rangle + \langle \alpha_3^2 \rangle) \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} (\langle \alpha_1^2 \rangle + \langle \alpha_2^2 \rangle) \quad . \quad (3.29)$$

Dieses Gleichungssystem liefert folgende Definition der Wirbelintensität:

$$\alpha_i^{(k)} = \sqrt{2(k' - \lambda_i)} \varepsilon_i^{(k)} \quad . \quad (3.30)$$

Dabei beschreibt  $\varepsilon_i^{(k)}$  einen Zufallsvektor mit den gleichverteilten Werten  $\pm 1$  und  $k'$  die turbulente kinetische Energie. Um den entsprechenden Reynoldsspannungstensor des globalen Koordinatensystems zu erhalten, muss eine Rücktransformation  $(\bar{\alpha}^{(k)})^G = R_L^G (\bar{\alpha}^{(k)})^L$  mit Hilfe einer Drehmatrix  $R_L^G$  mit den jeweiligen Eigenvektoren erfolgen. Die Indizes  $G$  und  $L$  bezeichnen dabei das globale bzw. lokale Referenzsystem. Die endgültige Definition der synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen der DF-SEM lautet [55]:

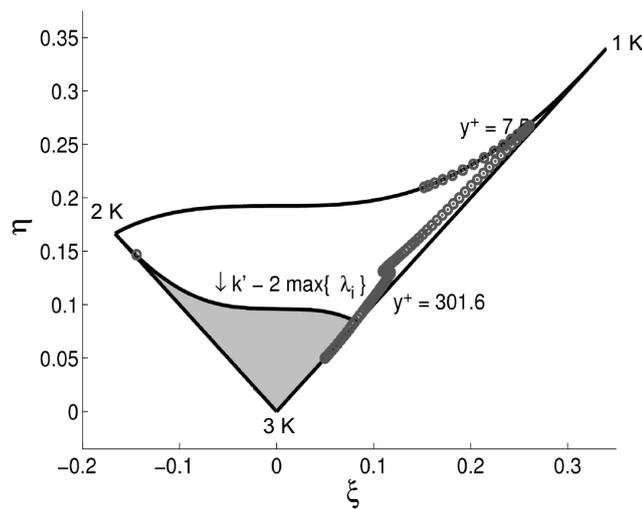
$$\vec{u}' = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=1}^N \frac{q_\sigma\left(\frac{r^{(k)}}{\sigma}\right)}{\left(\frac{r^{(k)}}{\sigma}\right)^3} \frac{\vec{x} - \vec{x}^{(k)}}{\sigma} \times \left[ R_L^G (\bar{\alpha}^{(k)})^L \right] \quad . \quad (3.31)$$

Das Kreuzprodukt in Gl. (3.31) ist der wichtigste Unterschied zur SEM nach Gl. (3.3) und ermöglicht eine näherungsweise divergenzfreie Geschwindigkeit.

Die DF-SEM hat jedoch auch Nachteile. Da Gl. (3.30) gelten muss und die mittlere Größe  $\langle (\alpha_i^{(k)})^2 \rangle$  immer größer Null ist, ist die realisierbare Anisotropie der Reynoldsspannungen beschränkt. Der Wurzelausdruck in Gl. (3.30) muss immer größer Null ergeben, sodass  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k - 2 \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0$  zu fordern ist. Es ist ersichtlich, dass mit Gl. (3.29) alle Eigenwerte und somit die Reynoldsspannungen miteinander gekoppelt sind. Mit Hilfe des Lumley-Diagramms [43], siehe Abb. 3.5, kann die Anisotropie des Reynoldsspannungstensors (RST) dargestellt werden. Das Lumley-Dreieck ist begrenzt durch:

$$6\eta^2 = b_{ii}^2, \quad 6\xi^3 = b_{ii}^3 \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle u'_k u'_k \rangle} - \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (3.32)$$

Alle möglichen Turbulenz-Zustände werden im Lumley-Diagramm mit den drei Extremfällen begrenzt: ein- (1K), zwei- (2K) und dreikomponentige (3K) Turbulenz. Als Komponente wird dabei der betragsmäßig größte Eigenwert des symmetrischen Reynoldsspannungstensors  $R_{ij}$  verstanden. Der grau schraffierte Bereich kennzeichnet die realisierbaren anisotropen Turbulenz-Zustände der DF-SEM. Demnach kann eine ein- bzw. zweikomponentige Turbulenz nicht nachgebildet werden. Als Beispiel dient der jeweilige Turbulenz-Zustand einer turbulenten Kanalströmung mit  $Re_\tau=395$  [51]. In Wandnähe ( $y^+ = 7$ ) ergibt sich eine fast einkomponentige Turbulenz, wobei erst ab  $y^+ = 300$  die gewünschte Anisotropie mit der DF-SEM erzeugen werden kann [55].



**Abb. 3.5:** Das Lumley-Dreieck kennzeichnet die Anisotropie des Reynoldsspannungstensors. Die DF-SEM kann nur eine begrenzte Anisotropie liefern (grau) [55]. (o DNS turbulente Kanalströmung  $Re_\tau=395$  MOSER et al. [51])

Um trotz dieser Einschränkungen möglichst realistische Verläufe zu erzielen, wird zu einer künstlichen Umverteilung der Reynoldsspannungen geraten [55]. Als charakteristische Referenzgröße wird die turbulente kinetische Energie  $k'$  der Eintrittsgrößen verwendet. Da  $k' = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/2$  gilt, wird folgende Verteilung empfohlen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{1}{3}k', \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}k', \quad \lambda_3 = \lambda_2 - \frac{1}{3}k'. \quad (3.33)$$

Dieser anisotrope Turbulenzzustand erfüllt die Bedingung  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k - 2 \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0$ .

Da ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld einen konstanten Wirbelradius  $\sigma$  erfordert, können nur kugelförmige Wirbelstrukturen nachgebildet werden. Die unterschiedlichen Wirbelskalen in Wandnähe werden somit nicht berücksichtigt. Die zuvor beschriebene Massenstrom-Korrektur und die physikalischen Randbedingungen der Wirbelverteilung sollten auch bei der DF-SEM verwendet werden.

### 3.3 Voruntersuchung SEM / DF-SEM

Um die Wirksamkeiten und Sensitivitäten der beiden synthetischen Turbulenzmethoden SEM und DF-SEM besser zu verstehen, wird im Folgenden eine Voruntersuchung durchgeführt. Dabei soll zunächst ein konstantes Geschwindigkeitsfeld mit anisotroper homogener Reynoldsspannungsverteilung untersucht werden. Als Vorlage dient die Arbeit von POLETTO [55]. Zudem werden Wirbelradius  $\sigma$  und -anzahl  $N$  variiert, wobei das instationäre Geschwindigkeitsfeld, die statistischen Kenngrößen und die Divergenz der Geschwindigkeit miteinander verglichen werden.

Als anwendungsnahe Strömungskonfiguration erfolgt im Anschluss eine Untersuchung der turbulenten Kanalströmung. Die vorgegebenen Strömungsprofile entlang der Kanalhöhe  $y/H$ , wie die mittlere Geschwindigkeit und die Reynoldsspannungsverteilung, entstammen der Direkten Numerischen Simulation (DNS) von MOSER et al. [51] mit  $Re_\tau = 395$ . Aufgrund des viskosen Wandeinflusses werden die unterschiedlichen Definitionen der SEM-Wirbelradien hinsichtlich Geschwindigkeitsfeld, Reynoldsspannungen und Divergenz eingehender betrachtet.

Die Simulation der geschilderten Testfälle erfolgt mit einem separaten Hilfsprogramm. Im Vorfeld der Erweiterung des DLR-TAU-Codes (Abschnitt 2.5) wurde der beschriebene Algorithmus der SEM und der DF-SEM in der Programmiersprache C implementiert. Dies ermöglicht eine Untersuchung der synthetischen Randbedingungen der Einlass-Ebene, ohne Kopplung mit einer Strömungssimulation.

Wie bereits erwähnt, ist das von der SEM erzeugte Störgeschwindigkeitsfeld nicht divergenzfrei. Um dies darzustellen und die DF-SEM zu beurteilen, wird zusätzlich die Divergenz des synthetischen Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{u}$  ausgewertet. Diese lautet:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \quad (3.34)$$

Die entsprechenden Ableitungen werden mit Hilfe zentraler Differenzen 2. Ordnung approximiert.

### 3.3.1 Konstantes Geschwindigkeitsprofil

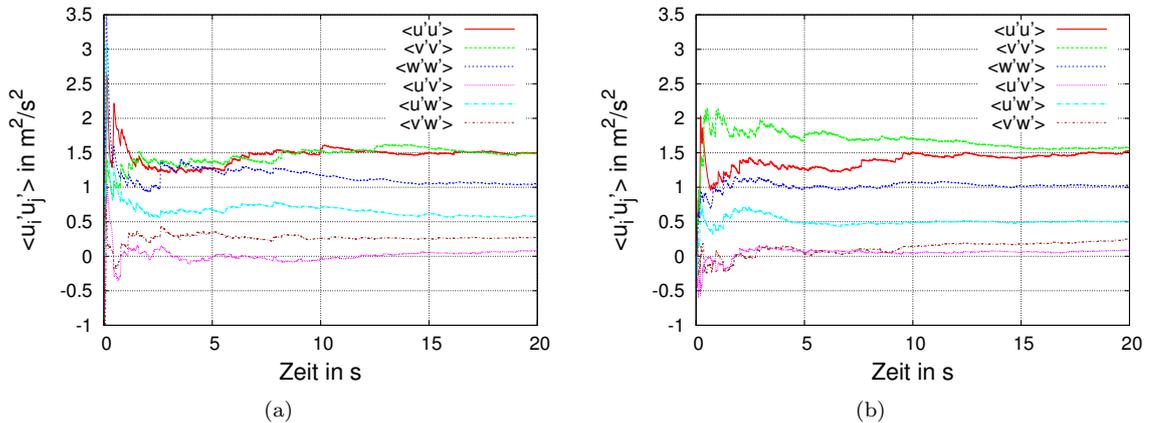
Als einfacher Testfall wird ein konstantes Geschwindigkeitsprofil mit einer anisotropen homogenen Reynoldsspannungsverteilung verwendet [55]. Das Rechengebiet entspricht einer Ebene mit der Größe  $6.4H \times 6.4H$  mit  $H = 1$  m und einer äquidistanten Diskretisierung  $128 \times 128$ . Folgende Eingangsgrößen werden verwendet:

- Geschwindigkeit:  $\vec{u} = [U, 0, 0]$  mit  $U = 10$  m/s
- Zeitschrittweite:  $\Delta t = 0.001$  s (CFL =  $U\Delta t/\Delta x = 0.2$ )
- Zeitschrittzahl:  $N_t = 20000$
- Wirbelradius:  $\sigma = 0.25$  m und  $0.5$  m
- Wirbelanzahl:  $N = 1000$  und  $10000$

Die homogene Verteilung der vorgegebenen Reynoldsspannungen lautet:

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ m}^2/\text{s}^2 . \quad (3.35)$$

In Abb. 3.6 ist die zeitliche Entwicklung der synthetisch modellierten Reynoldsspannungen am Punkt  $y = z = 1.6$  m dargestellt. Die SEM, Abb. 3.6 (a), und die DF-SEM, Abb. 3.6 (b), sind demnach in der Lage den vorgegebenen Reynoldsspannungstensor, Gl. (3.35), hinreichend genau nachzubilden. Der Wirbelradius  $\sigma$  und die Anzahl  $N$  haben keinen Einfluss auf die statistischen Kenngrößen.



**Abb. 3.6:** Zeitliche Entwicklung der Reynoldsspannungen ( $y = z = 1.6$  m): (a) SEM, (b) DF-SEM.

Da die zeitliche Entwicklung der statistisch ausgebildeten Reynoldsspannungen eines beliebigen Punktes eine lange Mittelungsdauer benötigt, werden zusätzlich in Tab. 3.1 die räumlich gemittelten Werte der gesamten Ebene mit angegeben. Die willkürlich erscheinende Skalierung der Formfunktion der DF-SEM, Gl. (3.28), liefert zu große Werte. Der Wert  $f = 16/15$  verursacht die entsprechende Abweichung. Daher wird im Folgenden die Formfunktion nach Gl. (3.28) ohne Skalierung verwendet.

**Tab. 3.1:** Überblick der zeitlich und räumlich gemittelten Reynoldsspannungen.

Methode	$N_t$	$\langle u'u' \rangle$	$\langle v'v' \rangle$	$\langle w'w' \rangle$	$\langle u'v' \rangle$	$\langle u'w' \rangle$	$\langle v'w' \rangle$
SEM	20000	1.502	1.502	0.999	0.100	0.500	0.252
DF-SEM $f=16/15$	20000	1.597	1.601	1.067	0.105	0.540	0.266
DF-SEM $f=1$	80000	1.499	1.497	1.000	0.101	0.500	0.248

Zusätzlich wird der räumlich gemittelte Divergenzbetrag des instationären Geschwindigkeitsfeldes ausgewertet, siehe Tab. 3.2. Wie erwartet, ist das Geschwindigkeitsfeld des SEM nicht divergenzfrei. Jedoch kann eine Abhängigkeit der Divergenz von der Wirbelgröße beobachtet werden. Aufgrund der größeren Wirbelstrukturen wirkt das Geschwindigkeitsfeld gleichförmiger, siehe Abb. 3.7 (b), sodass sich im Mittel kleinere Gradienten ergeben. Ebenfalls wie erwartet, ist die Divergenz der DF-SEM deutlich kleiner. Da sich jedoch Werte größer Null ergeben, wird ein entsprechender Einfluss der endlichen Diskretisierung vermutet. Die Auswirkung der Wirbelgröße kann hier ebenfalls beobachtet werden, wobei der Unterschied der Wirbelanzahl  $N = 1000$  und  $10000$  ( $10K$ ) bei beiden Methoden äußerst gering ist.

**Tab. 3.2:** Überblick der räumlich gemittelten Divergenzbeträge  $\langle |\text{div}| \rangle H/U$  des Geschwindigkeitsfeldes. Dabei variiert der Wirbelradius  $\sigma$ .

SEM-0.25	SEM-0.5	DF-SEM-0.25	DF-SEM-0.5	SEM-0.5-10K	DF-SEM-0.5-10K
0.929	0.613	0.106	0.019	0.608	0.016

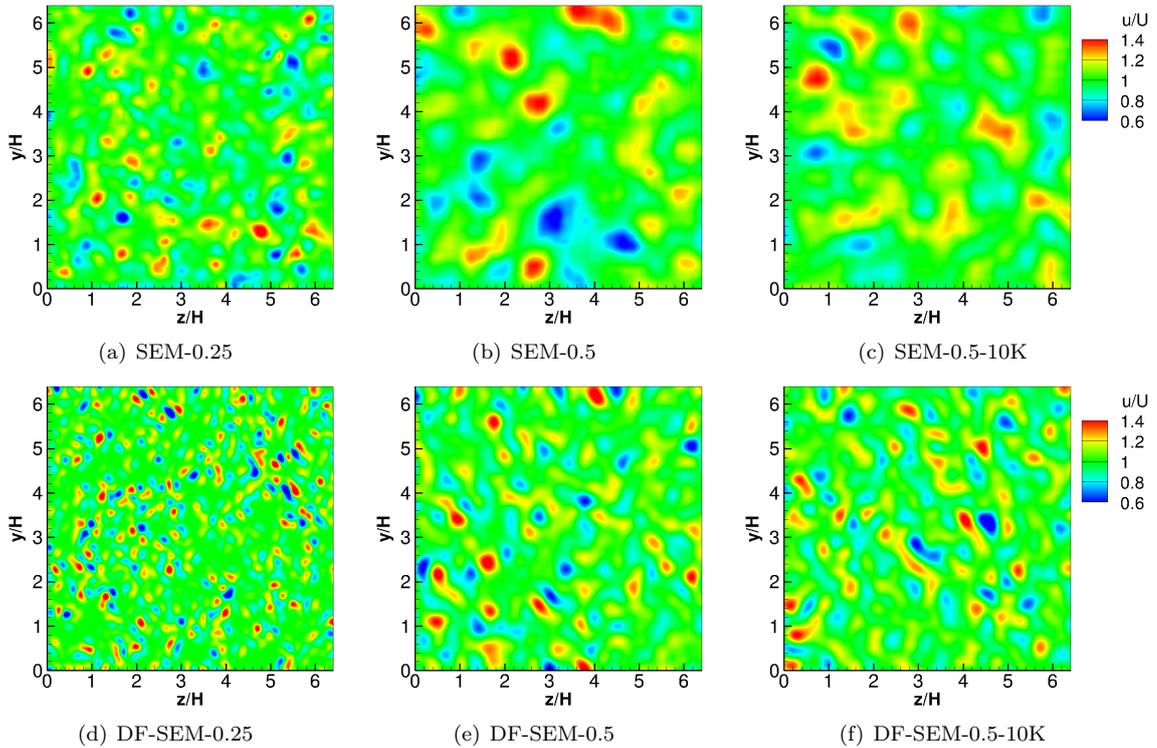
In Abb. 3.7 sind die synthetischen Geschwindigkeitsverteilungen  $u$  in Strömungsrichtung zum Zeitpunkt  $T = 20$  s dargestellt. Aufgrund der starken Ähnlichkeit werden die weiteren Komponenten nicht abgebildet.

Es werden die SEM, Abb. 3.7 (a)-(b), und die DF-SEM, Abb. 3.7 (d)-(e), mit einer Wirbelanzahl  $N = 1000$  verglichen. Zudem stehen sich die Geschwindigkeitsfelder mit einem Wirbelradius  $\sigma = 0.25$  m und  $\sigma = 0.5$  m gegenüber. Die Geschwindigkeitsfelder mit einer Wirbelanzahl  $N = 10000$  sind ebenfalls abgebildet, siehe Abb. 3.7 (c) und (f).

Die Geschwindigkeitsfelder weisen zufällig verteilte Fluktuationen mit variabler Form und Vorzeichen auf. Der Wirbelradius  $\sigma$  beeinflusst die Abmessungen der Wirbelstrukturen maßgeblich, wobei ein Unterschied zwischen SEM und DF-SEM zu beobachten ist. Die SEM, Abb. 3.7 (a)-(b), reagiert auf den größeren Wirbelradius sehr viel stärker als die DF-SEM, Abb. 3.7 (d)-(e). Obwohl der gleiche Wirbelradius  $\sigma$  verwendet wird, ergeben sich mit der DF-SEM kleinere Strukturen mit schärfer abgegrenzten Konturen als die SEM. Die Wirbelstrukturen der SEM wirken stärker verschmiert.

Aufgrund der gleichen Reynoldsspannungsbeträge ergeben sich turbulente Strukturen mit ähnlich starker Intensität. Eine erhöhte Wirbelanzahl  $N$ , Abb. 3.7 (c) und (f), ruft keine deutlichen Unterschiede hervor.

Die geschilderten Ergebnisse deuten auf eine korrekte Implementierung der beiden Turbulenzmethoden. Die theoretischen Herleitungen wurden mit diesem einfachen Testfall grundlegend validiert.



**Abb. 3.7:** Synthetisches Geschwindigkeitsfeld der SEM (a)-(c) und DF-SEM (d)-(f): links:  $\sigma = 0.25$  m Mitte:  $\sigma = 0.5$  m beide  $N = 1000$ ; rechts:  $\sigma = 0.5$  m  $N = 10000$ .

### 3.3.2 Variables Geschwindigkeitsprofil - turbulente Kanalströmung $Re_\tau = 395$

Eine anwendungsnahe Strömungskonfiguration stellt die turbulente Kanalströmung mit  $Re_\tau = 395$  dar. Aufgrund des viskosen Wandeinflusses ergeben sich charakteristische Strömungsprofile. Als Referenz dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51].

Da dieser Anwendungsfall mit einer LES (Abschnitt 2.2) bzw. IDDES (Abschnitt 2.4.3) berechnet werden soll, siehe Kapitel 4, werden turbulente Einström-Randbedingungen benötigt. Als synthetische Turbulenzmethoden werden die SEM (Abschnitt 3.1) und die DF-SEM (Abschnitt 3.2) verwendet. Die damit erzeugten Einlassrandbedingungen werden im Folgenden untersucht.

Die turbulente Kanalströmung mit der Kanalhöhe  $2H$  wird mit den Reynoldszahlen  $Re_m$  und  $Re_\tau$ , bezogen auf die spezifischen Geschwindigkeiten und der halben Kanalhöhe  $H$ , beschrieben:

$$Re_m = \frac{U_m H \rho}{\mu}, \quad Re_\tau = \frac{u_\tau H \rho}{\mu} = \frac{H}{l_\tau}. \quad (3.36)$$

Die mittlere Durchflussgeschwindigkeit  $U_m$  und die Wandreibungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  sind wie folgt definiert:

$$U_m = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} \langle u \rangle dy, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (3.37)$$

Die geometrischen Abmessungen werden mit der Wandeinheit  $l_\tau$  normiert:

$$l_\tau = \frac{\mu}{\rho u_\tau} = \frac{H}{Re_\tau} \quad . \quad (3.38)$$

Die charakteristischen Kenngrößen dieser Strömung lauten  $Re_m = 6875$ ,  $Re_\tau = 395$  und  $u_\tau/U_m = 0.05745$ . Als numerisches Rechengitter wird die diskretisierte Einlassebene der LES-Rechnung mit den Abmessungen  $2H \times 3.2H$  und  $96 \times 80$  Gitterpunkten verwendet, siehe Abschnitt 4.2. Dabei wird eine LES-taugliche Diskretisierung mit dem wandnächsten Punkt  $y_{\min}^+ = 1.05$  und  $y_{\max}^+ = 20.8$  in der Kanalmitte eingehalten. Der geometrische Streckungsfaktor in wandnormaler Richtung beträgt  $s = \Delta y_{i+1}/\Delta y_i = 1.05$ . In Spannweite  $z$  und Strömungsrichtung  $x$  ergibt sich eine äquidistante Gitterschrittweite von  $\Delta z^+ = 15.8$  bzw.  $\Delta x^+ = 31.6$ . Die numerische Voruntersuchung der synthetischen Turbulenzmethoden erfolgt mit der dimensionslosen Zeitschrittweite  $\Delta t^* = \Delta t U_m/H = 0.015$  der LES- bzw. IDDES-Rechnung, wobei über einen Zeitraum von  $T_m = 300H/U_m$  mit  $N_t = 20000$  Zeitschritten zeitlich gemittelt wird.

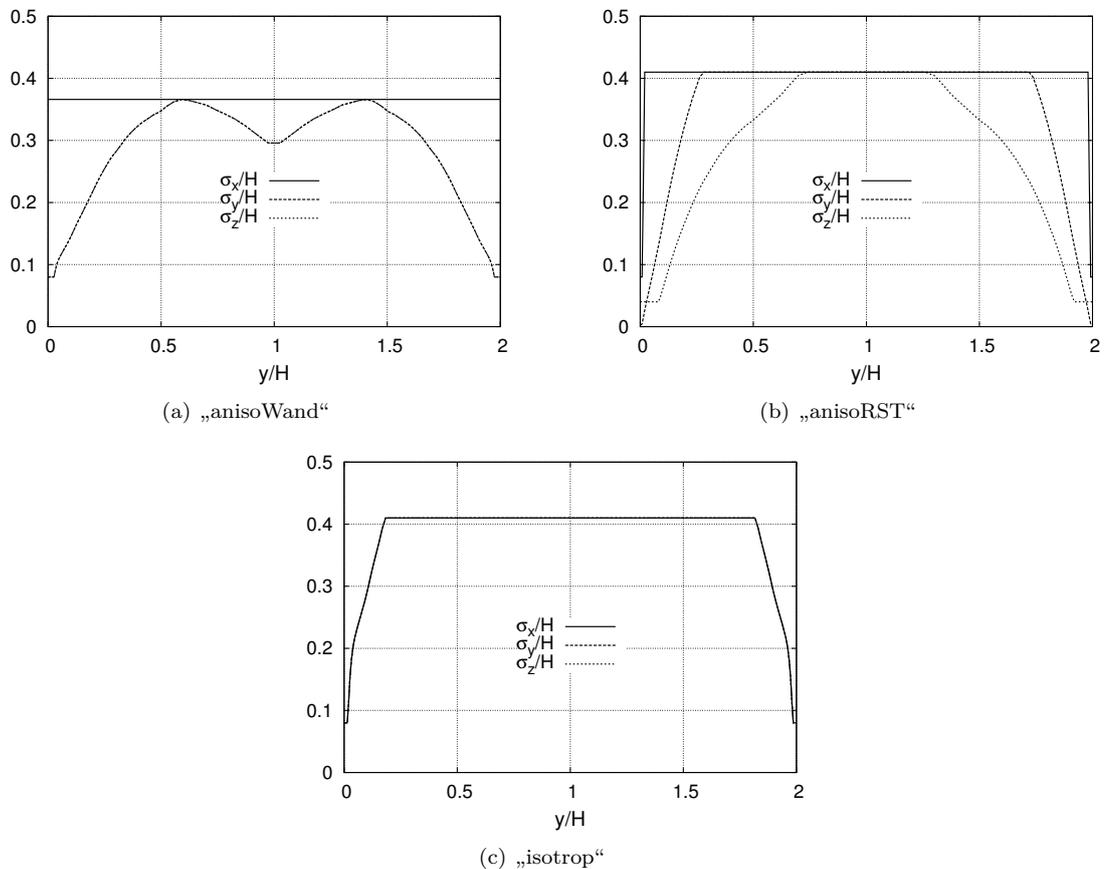
Der Vergleich der synthetischen Turbulenzmethoden erfolgt anhand der momentanen Geschwindigkeitsfelder, der statistischen Mittelwerte und der Divergenz nach Gl. (3.34). Zudem wird der Einfluss des Wirbelradius  $\sigma$  untersucht. Neben einem konstanten Wirbelradius  $\sigma$  werden die unterschiedlichen Definitionen der Wirbelskalen der SEM getestet, die im Folgenden als „isotrop“, Gl. (3.10), „anisoWand“, Gl. (3.20), und „anisoRST“, Gl. (3.21), bezeichnet werden. Dabei ist die Wirbelanzahl mit  $N = 5000$  konstant. Um einen bestmöglichen Vergleich der unterschiedlichen Wirbelskalen zu gewährleisten, werden hierbei die gleichen zufällig verteilten Wirbelkerne mit gleicher Position und Drehrichtung für die Darstellung der instationären Geschwindigkeitsfelder verwendet.

In der folgenden Abb. 3.8 sind die jeweiligen Verläufe der Wirbelradien der SEM dargestellt. Neben den anisotropen Wirbelskalen „anisoWand“, Gl. (3.20), in Abb. 3.8 (a) und „anisoRST“, Gl. (3.21), in Abb. 3.8 (b) ist der ursprüngliche isotrope Ansatz der SEM, Gl. (3.10), in Abb. 3.8 (c) abgebildet. Laut ADAMIAN et al. (2011) [4] sollte der Wirbelradius  $\sigma_x$  in Strömungsrichtung den Maximalwert der wandnormalen Komponente  $\sigma_y$  annehmen. Dieser Wirbelradius wird mit einer turbulenten Längenskale nach Gl. (3.10), basierend auf der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und dessen Dissipation  $\varepsilon$ , definiert. Dabei beschränkt die maximale Gitterschrittweite  $\Delta_{\max}$  nach Gl. (2.30) den unteren Wert. Einen ähnlichen Verlauf liefert der anisotrope Ansatz nach Gl. (3.21) in Abb. 3.8 (b). Zu beachten ist der sehr kleine Wirbelradius  $\sigma_y$  in Wandnähe.

In Abb. 3.9 sind für einen festen Zeitpunkt die momentanen Geschwindigkeitskomponenten einschließlich der synthetischen Fluktuationen dargestellt. Dabei werden die jeweiligen Definitionen der Wirbelradien  $\sigma$  der SEM und DF-SEM unterschieden. Da das mittlere Strömungsprofil nur in  $x$ -Richtung ungleich Null ist, werden mit den Komponenten  $v$  und  $w$  die synthetischen Geschwindigkeitsschwankungen dargestellt. Die Beeinflussung des mittleren Strömungsprofils kann anhand der Komponente  $u$  bewertet werden.

In Abb. 3.9 (a), (f), (k) sind die drei Komponenten bei Verwendung der SEM mit einem konstanten Wirbelradius  $\sigma/H = 0.41$  dargestellt. Alle drei Geschwindigkeitskomponenten besitzen gleich groß ausgeprägte Turbulenzstrukturen. Ein qualitativer Unterschied der Komponenten  $v$  und  $w$  wird nicht

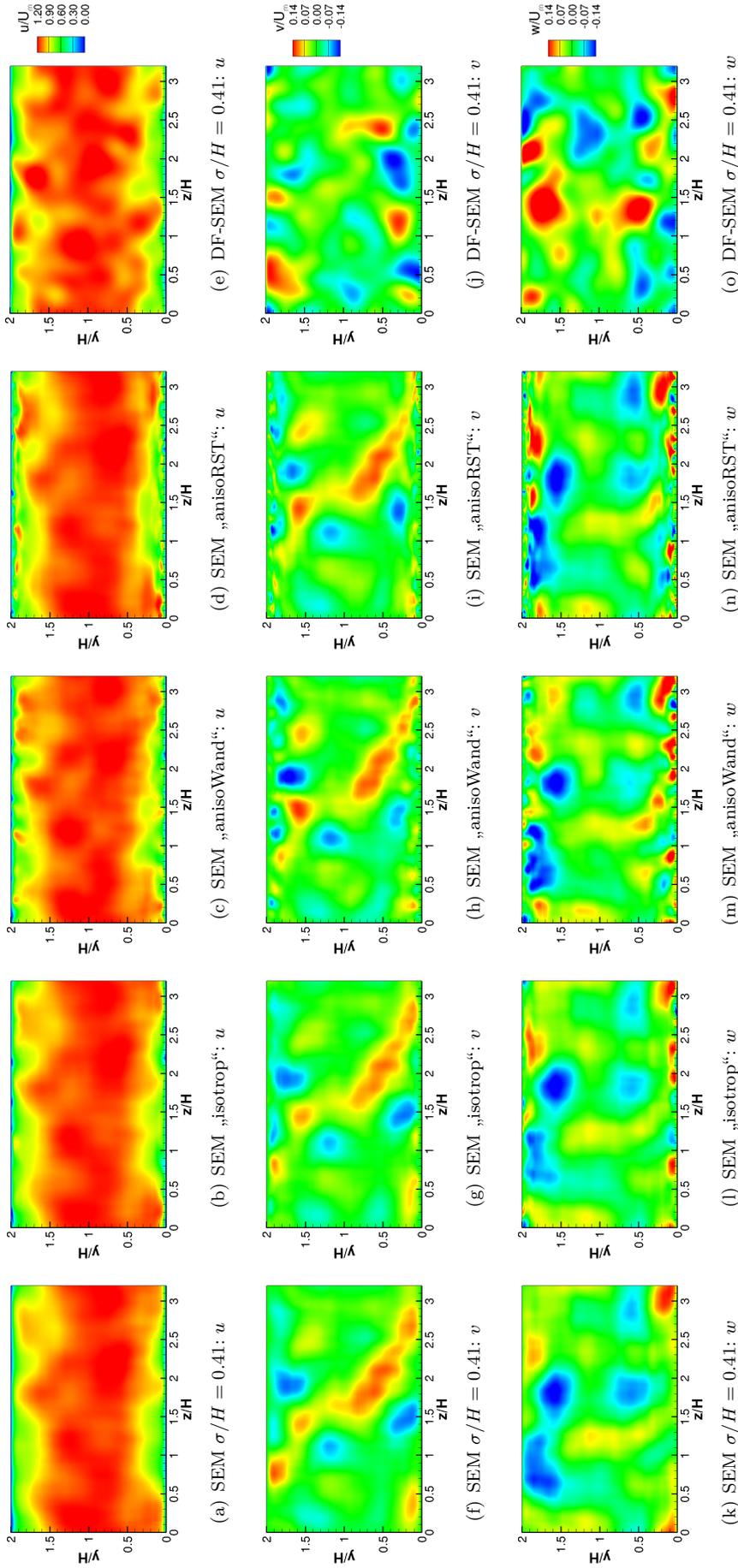
beobachtet. Die Abb. 3.9 (b), (g), (l) zeigen die Geschwindigkeitsfelder unter Verwendung der SEM mit variablen isotropen Wirbelradien nach Gl. (3.10). Da in Kanalmitte die gleiche konstante Wirbelgröße wie im Fall zuvor verwendet wird, ergeben sich identische Strukturen. Lediglich in Wandnähe sind kleinere Turbulenzstrukturen zu beobachten.



**Abb. 3.8:** Räumliche Verteilung der Wirbelradien der SEM entlang der Kanalhöhe  $y/H$ .

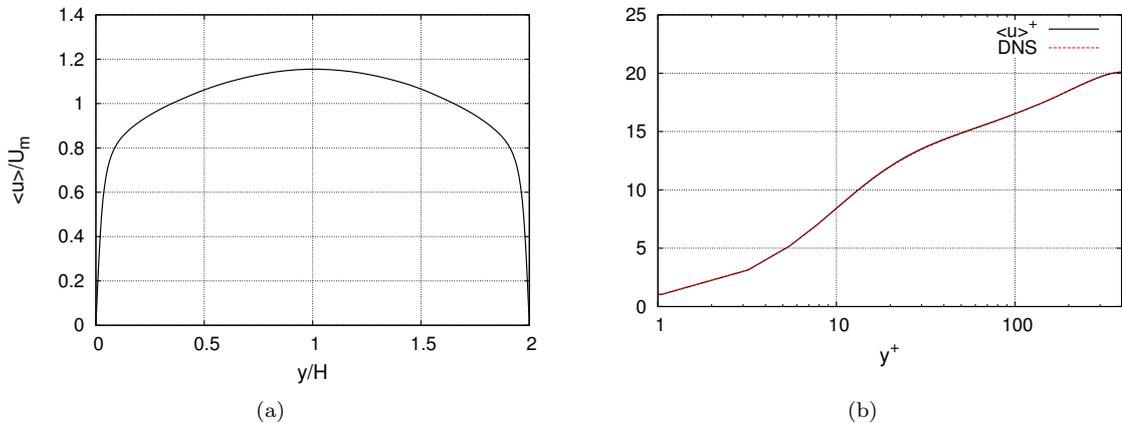
Die anisotropen Wirbelstrukturen „anisoWand“ in Abb. 3.9 (c), (h), (m) verwenden nach Gl. (3.20) jeweils unterschiedliche Definitionen, sodass stärker ausgeprägte Strukturen entstehen. Die in Wandnähe auftretenden und in Strömungsrichtung gestreckten „streaks“ [57] können damit besser nachgebildet werden. Bei Verwendung der jeweiligen Reynoldsspannungskomponenten „anisoRST“ nach Gl. (3.21) werden die turbulenten Geschwindigkeitsfelder in Abb. 3.9 (d), (i), (n) erzeugt. Dabei sind besonders an der Wand kleine Strukturen zu beobachten.

Die Abb. 3.9 (e), (j), (o) zeigen die mit der DF-SEM erzeugten synthetischen Geschwindigkeitsfelder. Der Wirbelradius  $\sigma/H = 0.41$  ist aufgrund der divergenzfreien Forderung ebenfalls konstant, wobei die Einschränkung bzw. Erweiterung der DF-SEM nach Gl. (3.33) zu beachten ist. Die lokale Intensität und die Verteilung der turbulenten Strukturen haben sich deutlich geändert. Insbesondere in Kanalmitte, siehe Abb. 3.9 (e), ergibt sich ein stärker gestörtes Geschwindigkeitsprofil. Wie bereits von POLETTI [55] erwähnt, ähnelt dieses Geschwindigkeitsfeld mehr einer realistischen Turbulenz. Die Geschwindigkeitsfluktuationen besitzen zudem eine stärkere Intensität.



**Abb. 3.9:** Synthetisch instationäre Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  einer turbulenten Kanalströmung  $Re_\tau = 395$  erzeugt mit der SEM und der DF-SEM. Dabei werden immer die gleichen zufällig verteilten Wirbelkerne mit gleicher Position und Drehrichtung verwendet. Es wird der Wirbelradius  $\sigma$  von links nach rechts variiert.

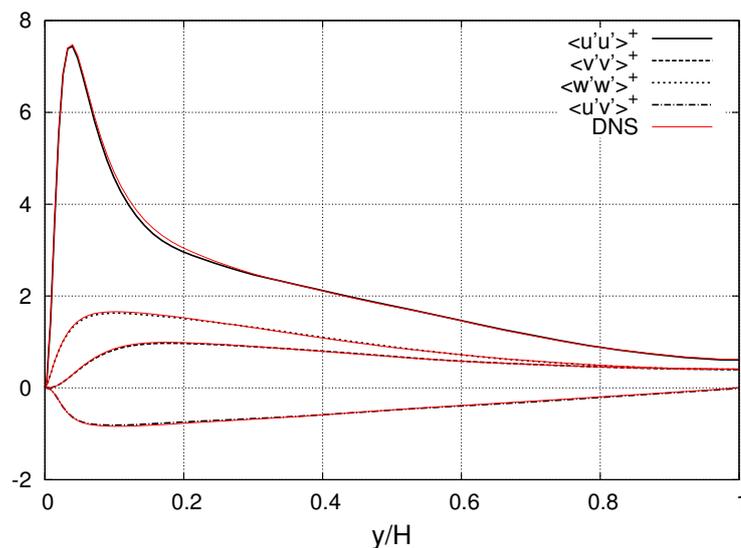
Da die instationären Geschwindigkeitsfelder nur einen qualitativen Vergleich ermöglichen, werden des Weiteren die statistischen Kenngrößen verglichen. In Abb. 3.10 ist das zeitlich gemittelte Strömungsprofil der turbulenten Kanalströmung dargestellt. Demnach liefern alle verwendeten Methoden und Definitionen das exakte Strömungsprofil der DNS-Lösung [51].



**Abb. 3.10:** Zeitlich gemitteltes Strömungsprofil der turbulenten Kanalströmung  $Re_\tau = 395$ . Als Referenz dient die DNS-Lösung von MOSER et al. [51].

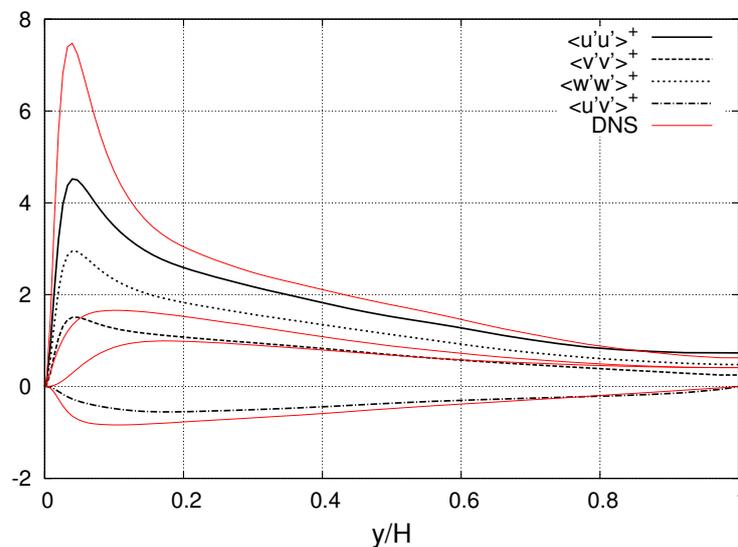
In den Abb. 3.11 und 3.12 sind die zeitlich gemittelten Reynoldsspannungen der turbulenten Kanalströmung dargestellt. Alle Strömungsgrößen sind mit der Wandreibungsgeschwindigkeit  $u_\tau^2$  nach Gl. (3.37) normiert.

Die Abb. 3.11 zeigt das Ergebnis der SEM. Die vorgegebene Reynoldsspannungsverteilung wird bei allen Definitionen der Wirbelradien sehr genau wiedergegeben. Die SEM ist somit in der Lage turbulente Statistiken 1. und 2. Ordnung hinreichend exakt nachzubilden.



**Abb. 3.11:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungen der turbulenten Kanalströmung  $Re_\tau = 395$  unter Verwendung der SEM. Als Referenz dient die DNS-Lösung von MOSER et al. [51]. Die unterschiedlichen Definitionen des Wirbelradius  $\sigma$  haben keinen wesentlichen Einfluss.

In Abb. 3.12 ist das Ergebnis der DF-SEM dargestellt. Aufgrund der eingeschränkten Anisotropie, siehe Abb. 3.5, wird die mögliche Erweiterung nach Gl. (3.33) verwendet. Dabei wird die Einhaltung der turbulenten kinetischen Energie der Referenzlösung gefordert. In Wandnähe kann eine Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  erzeugt werden, die ohne Erweiterung nach Gl. (3.33) nicht möglich wäre. Die synthetisch erzeugte Scherspannung ist jedoch kleiner als die Referenzlösung, was die turbulente Entwicklung stromab der Einlassebene möglicherweise negativ beeinflusst. Die Komponente in Strömungsrichtung  $\langle u'u' \rangle$  wird ebenfalls deutlich kleiner wiedergegeben und entspricht hier der turbulenten kinetischen Energie  $k$  der Referenzlösung. Der abweichende Betrag wird auf die übrigen Komponenten umverteilt. Zu beachten sind jedoch die unphysikalisch starken Fluktuationen in Normalrichtung direkt an der Wand. Der typische Verlauf  $\langle v'v' \rangle \sim y^4$  einer ebenen Strömung [22] wird verletzt. Die vorgegebene Anisotropie wird, wie im Lumley-Diagramm in Abb. 3.5 dargestellt, erst in der Nähe der Kanalmitte bei  $y^+ \approx 300$  bzw.  $y/H \approx 0.76$  erreicht.



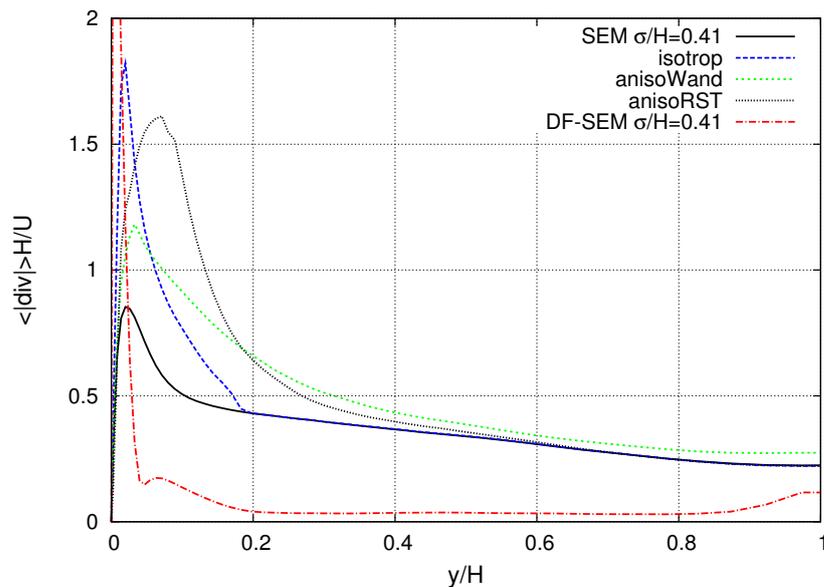
**Abb. 3.12:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungen der turbulenten Kanalströmung  $Re_\tau = 395$  unter Verwendung der DF-SEM. Als Referenz dient die DNS-Lösung von MOSER et al. [51]. Dabei wird die Erweiterung, Gl. (3.33), aufgrund der beschränkten Anisotropie berücksichtigt.

Wie oben bereits erwähnt, stellt die Divergenz ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) nach Gl. (3.34) ein weiteres wichtiges Merkmal einer synthetischen Turbulenzmethode dar. Diese definiert die physikalische Forderung der Massenerhaltung einer inkompressiblen Strömung nach der Kontinuitätsgleichung (2.1). In Abb. 3.13 ist der zeitlich gemittelte Betrag der Divergenz der jeweiligen SEM-Wirbelskalen und der DF-SEM dargestellt.

Wie erwartet, ist die SEM auch in einer anwendungsnahen Grenzschichtströmung nicht divergenzfrei. Zudem kann auch hier der Einfluss der Wirbelgröße beobachtet werden: je größer der Wirbelradius  $\sigma$ , desto kleiner fällt die Divergenz aus. In der Kanalmitte besitzen alle Ansätze, außer „anisoWand“ nach Gl. (3.20) den konstanten Wert  $\sigma/H = 0.41$ , sodass die Divergenz einen bestimmten Wert annimmt. Erst in Wandnähe ergeben sich aufgrund kleinerer Wirbelradien und der starken Anisotropie deutlich größere Beträge. Die Anisotropie und der starke Abfall der Reynoldsspannungen zur Wand rufen im Fall des konstanten Wirbelradius eine höhere Divergenz hervor. Jedoch erhöhen die

deutlich kleineren Wirbelskalen der übrigen Ansätze die Divergenz erheblich. Dabei ist der Einfluss der Wirbelskala  $\sigma_x$  in Strömungsrichtung zu beobachten. Ein großer Wert führt auch hier zu kleineren Divergenzbeträgen, vergleiche „anisoWand“ mit „isotrop“.

Die DF-SEM ist über weite Teile der Kanalhöhe  $y/H$  weitgehend divergenzfrei. Als Ursache der verbleibenden konstanten Beträge wird die endliche Diskretisierung vermutet. Lediglich direkt in Kanalmitte und an der Wand werden größere Werte beobachtet. Der Abfall der vorgegebenen Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  auf null könnte den Grund für den Anstieg darstellen. Aufgrund der unphysikalischen Umverteilung der Reynoldsspannungen nach Gl. (3.33) und der überbewerteten Komponente in Normalrichtung  $\langle v'v' \rangle$  ergibt sich direkt an der Wand ein sehr starker Anstieg der Divergenz.



**Abb. 3.13:** Zeitlich gemittelter Betrag der Divergenz des synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfelds mit der SEM und der DF-SEM.

Dieser starke Anstieg der Divergenz bei der SEM und der DF-SEM direkt in Wandnähe kann eventuell durch Berücksichtigung der Wandrandbedingung minimiert werden. Durch gespiegelte „Geisterwirbel“ wie in Abb. 3.3 (a) dargestellt, kann möglicherweise ein realistischeres Geschwindigkeitsfeld erzeugt werden. In der folgenden Arbeit wird jedoch auf diese spezielle Wirbelverteilung nach Abb. 3.3 (a) verzichtet.

Eine weitere Möglichkeit, das synthetische Turbulenzverhalten in Wandnähe zu beeinflussen, ist die Nutzung der van Driestischen Dämpfungsfunktion nach Gl. (2.32). Dabei werden jedoch die synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen derart gedämpft, dass die gewünschte Reynoldsspannungsverteilung nur eingeschränkt nachgebildet werden kann.

Insgesamt stehen die Ergebnisse dieser Voruntersuchung in guter Übereinstimmung mit Literaturangaben und bestätigen die korrekte Implementierung der synthetischen Turbulenzansätze.

# 4 Skalen-auflösende Simulation einer turbulenten Kanalströmung $Re_\tau = 395$

Die turbulente Kanalströmung, auch als Poiseuille-Strömung bezeichnet, gilt als eine einfache Validierungskonfiguration für Simulationsverfahren turbulenter Strömung. Die ebene Kanalströmung wird durch zwei ebene Platten begrenzt und durch einen Druckgradienten bzw. einer entsprechenden Volumenkraft vorangetrieben. Aufgrund der homogenen Strömung in Strömungsrichtung  $x$  und in Spannweitenrichtung  $z$  können die Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) vereinfacht und analytische Gesetzmäßigkeiten hergeleitet werden, siehe beispielsweise POPE [57]. Die statistischen Strömungsprofile nehmen entlang der Kanalhöhe  $y$  charakteristische Verläufe an, die mit einer Vielzahl an experimentellen und numerischen Untersuchungen validiert sind. Die turbulente Kanalströmung stellt somit eine geeignete Strömungskonfiguration zur Erprobung der synthetischen Turbulenzansätze SEM (Abschnitt 3.1) und DF-SEM (Abschnitt 3.2) dar.

## 4.1 Numerische Einstellungen

Die Strömungskonfiguration stimmt mit dem Testfall der Voruntersuchung der synthetischen Turbulenzmethoden überein, siehe Abschnitt 3.3.2. Die turbulente Kanalströmung mit der Kanalhöhe  $2H$  wird mit den Reynoldszahlen  $Re_m = 6875$  und  $Re_\tau = 395$  nach Gl. (3.36) beschrieben. Die mittlere Durchflussgeschwindigkeit beträgt  $U_m = 50$  m/s, wobei sich eine Wandreibungsgeschwindigkeit von  $u_\tau/U_m = 0.05745$ , Gl. (3.37), und ein dimensionsloser Reibungsbeiwert von  $C_f = 2(u_\tau/U_m)^2 = 0.0066$  einstellt. Als Referenz dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51].

Zur Validierung der synthetischen Turbulenzmethoden werden skalen-auflösende Simulationsansätze verwendet. Neben der deutlich aufwendigeren Large-Eddy Simulation (LES), siehe Abschnitt 2.2, kommt die Detached-Eddy Simulation (DES), siehe Abschnitt 2.4.1, zum Einsatz. Aufgrund eines möglichen Fehlverhaltens der ursprünglichen DES-Methode (DES97) wird die aktuelle DES-Erweiterung Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES) nach TRAVIN et al. (2006) [75] verwendet. Diese bietet neben einer modifizierten Feinstruktur-Längenskale  $\Delta$  nach Gl. (2.47) die Möglichkeit in einem wandmodellierten LES-Modus (WMLES, *wall-modeled LES*) zu operieren. Der Ansatz wurde ursprünglich ebenfalls an einer turbulenten Kanalströmung mit  $Re_\tau = 395$  getestet und validiert.

### 4.1.1 Rechengebiet

Da unterschiedliche Simulationsansätze verwendet werden, müssen die entsprechenden Anforderungen an das Rechengitter berücksichtigt werden. Die wand aufgelöste Large-Eddy Simulation (LES) benötigt eine deutlich feinere Diskretisierung des Rechengebiets, wobei der erhöhte Modellierungsgrad des IDDES größere Gitterschrittweiten erlaubt.

Übliche LES-Rechengitter weisen dimensionslose Gitterschrittweiten von  $\Delta x^+ \leq 50$  und  $\Delta z^+ \leq 15$  mit  $y_1^+ < 1$  auf [22]. Die mit der viskosen Längenskale  $l_\tau = \nu/u_\tau$  normierten Schrittweiten ermöglichen laut Literaturangaben eine hinreichende Auflösung wandnaher turbulenter Strukturen. Da das RANS-Modell der IDDES den Großteil der wichtigen Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  in Wandnähe modelliert, sind entsprechende Grenzwerte in Wandeinheiten  $l_\tau$  hinfällig. In Tab. 4.1 sind die jeweiligen Rechengitter aufgelistet.

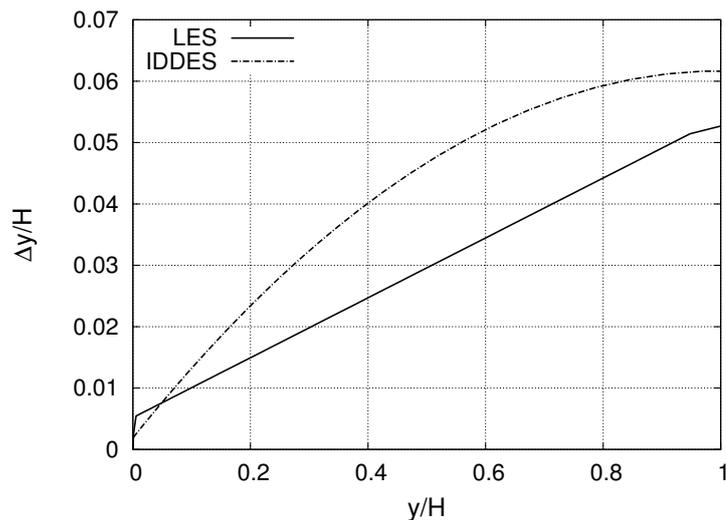
**Tab. 4.1:** Überblick der Rechengitter mit Gitterschrittweiten in Wandeinheiten.

Gitter	$L_x/H$	$L_y/H$	$L_z/H$	$N_x$	$N_y$	$N_z$	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$\Delta y_{\min}^+$	$\Delta y_{\max}^+$
LES	32	2	3.2	400	96	80	31.6	15.8	1.05	20.8
IDDES	32	2	3.2	160	80	40	79.0	31.6	0.79	24.3

Das gewählte Rechengebiet  $32H \times 2H \times 3.2H$  orientiert sich an vergleichbare Simulationen, wie MOSER et al. [51] (DNS) oder JARRIN [35] (LES). Dabei muss die deutlich längere Abmessung in Strömungsrichtung  $L_x$  eine vollständige Entwicklung der synthetischen Turbulenz gewährleisten.

Da ein stark gestrecktes Gitter die implizite Filterung einer LES negativ beeinflusst und Kommutationsfehler verursacht, gilt die Gitterstreckung  $s$  als ein weiteres Qualitätsmerkmal eines LES-Rechengitters, siehe FRÖHLICH [22].

Die homogenen Raumrichtungen  $x$  und  $z$  der Kanalströmung erlauben eine äquidistante Diskretisierung, wobei die Gitterstreckung  $s = \Delta y_{i+1}/\Delta y_i$  in wandnormaler Richtung zu beachten ist. Die wandnormale Diskretisierung des LES-Gitters erfolgt mit 96 Punkten und einer geometrischen Streckung von  $s = 1.05$ , wohingegen eine  $\tanh$ -Verteilung von 80 Punkten mit variabler Streckung  $s < 1.13$  das IDDES-Gitter bestimmt. Da das RANS-Modell der IDDES lediglich eine gitterabhängige Längenskale nutzt, sind die entsprechenden Kriterien bezüglich der LES-Filterung weniger streng. Die jeweilige Gitterschrittweite  $\Delta y$  entlang der Kanalhöhe ist in Abb. 4.1 dargestellt.



**Abb. 4.1:** Wandnormale Gitterschrittweite  $\Delta y$  mit unterschiedlicher Verteilung und Streckung: LES  $s = 1.05$  (geometrisch), IDDES  $s \neq \text{const.}$  ( $\tanh$ -Funktion).

### 4.1.2 Berechnungsparameter

Die skalen-auflösenden Simulationen werden mit dem kompressiblen Strömungslöser DLR-TAU, siehe Abschnitt 2.5, durchgeführt. Neben der Reynoldszahl  $Re_m = 7000$  und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit  $U_{ref} = U_m = 50$  m/s wird die Referenz-Temperatur  $T_{ref} = 298$  K vorgegeben. Die nach Sutherland, Gl. (2.6), berechnete dynamische Viskosität  $\mu(T)$  bestimmt zugleich die Referenz-Dichte  $\rho_{ref} = 2.572 \cdot 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup> als auch den Referenz-Druck  $p_{ref} = 219.98$  Pa am Eintritt. Die inkompressible Kanalströmung wird zudem mit der Mach-Zahl  $Ma = 0.144$  und einem Druckgradient  $\partial p / \partial x = -\rho u_\tau^2 / H$ , siehe POPE [57], charakterisiert. Der Auslassdruck beträgt  $p_A = 219.3$  Pa.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit zentralen Differenzen 2. Ordnung, wobei eine Matrix-basierte künstliche Dissipation 4. Ordnung mit einem Skalierungsfaktor  $\kappa^{(4)} < 1/140$  verwendet wird, siehe Abschnitt 2.5.1. Da die Divergenzform der diskreten konvektiven Terme nach Gl. (2.64) bei der LES-Rechnung Stabilitätsprobleme bereitet, kommt die energieerhaltene, schief-symmetrische Form nach Gl. (2.65) zum Einsatz.

Für die zeitliche Integration wird das duale Zeitschrittverfahren nach JAMESON [33] genutzt. Als physikalische Zeitschrittweite wird  $\Delta t = 0.0003$  s gewählt, die entspricht einer dimensionslosen Zeitschrittweite von  $\Delta t^* = 0.015H/U_m$ . Nach CHOI und MOIN [13] liefert ein zu großer Zeitschritt eine übermäßige Dämpfung der turbulenten Fluktuationen, sodass eine viskose Zeitschrittweite von  $\Delta t^+ = \Delta t u_\tau^2 / \nu < 0.4$  empfohlen wird. Die hier gewählte Zeitschrittweite ergibt  $\Delta t^+ = 0.35$ .

Die zeitliche Integration der Pseudo-Zeit  $\tau$  erfolgt mit dem impliziten LU-SGS-Verfahren und einer Anzahl innerer Iterationsschritte von  $N_{Iter} = 100$ , siehe Abschnitt 2.5.2. Die zeitliche Mittelung der statistisch stationären Kanalströmung erfolgt nach einer Vorlaufzeit von zwei Durchströmperioden mit  $T_P = 0.64$  s bzw.  $T_P^* = 32H/U_m$ . Die Reynoldsspannungen  $\langle u'_i u'_j \rangle$  werden bei der LES über einen Zeitraum von  $T_m = 300H/U_m$  und bei der IDDES von  $T_m = 375H/U_m$  zeitlich gemittelt, wobei die Mittelung der Statistiken 1. Ordnung bereits zwei Perioden  $64H/U_m$  früher beginnt. Um die statistische Konvergenz zu erhöhen, wird zusätzlich in Spannweite  $z$  räumlich gemittelt.

Aufgrund der nahezu inkompressiblen Strömung wird die Präkonditionierung mit dem *cut-off*-Parameter  $K > 2.5$  verwendet, siehe Abschnitt 2.5.3. Auf konvergenzbeschleunigende Verfahren, wie das Mehrgitter-Verfahren, wird verzichtet.

Die synthetischen Turbulenzansätze SEM und DF-SEM wurden bereits in der Voruntersuchung, siehe vorherigen Abschnitt 3.3.2, eingehend analysiert und bewertet. Die entsprechenden Variationen, wie Wirbelradius  $\sigma$  bzw. -anzahl  $N$ , sind in Tab. 4.2 aufgelistet und werden nun in Verbindung mit dem kompressiblen Strömungslöser DLR-TAU erprobt.

Neben der grundlegenden Eignung als LES-Eintrittsrandbedingung werden die jeweiligen Variationen der synthetischen Turbulenz mit der anwendungsnahen IDDES bewertet. Aufgrund der divergenzbehafteten Störgeschwindigkeit ( $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ), siehe Abb. 3.13, sind bei einem kompressiblen Lösungsansatz erhebliche Probleme bezüglich Stabilität und physikalischer Plausibilität zu beobachten. Um diese Einschränkungen zu berücksichtigen, werden im Folgenden mögliche Erweiterungen vorgestellt und deren Einfluss untersucht. Numerische Parameter des Lösungsalgorithmus werden ebenfalls variiert.

**Tab. 4.2:** Überblick der durchgeführten Simulationen bzw. Variationen der synthetischen Turbulenzmethoden SEM und DF-SEM.

Simulation	$\sigma$	$N$	$W_E/H$	$1/\kappa^{(4)}$	$K$	SGS
LES-SM	isotrop	10000	3	140	2.5	Smago., $C_S=0.1$
LES-WALE	isotrop	10000	3	140	2.5	WALE, $C_W=0.316$
I-iso	isotrop	5000	3	256	3.5	-
I-anisoWand	anisoWand	5000	3	256	3.5	-
I-anisoRST	anisoRST	5000	3	256	3.5	-
I-DFSEM	$0.41H$	5000	3	256	3.5	-
I-iso-500	isotrop	500	3	256	3.5	-
I-iso-10000	isotrop	10000	3	256	3.5	-
I-iso-3-160	isotrop	5000	3	160	3.5	-
I-iso-6-160	isotrop	5000	6	160	3.5	-

Die aufgelisteten Definitionen des Wirbelradius  $\sigma$  in Tab. 4.2 werden mit den Abkürzungen „isotrop“ nach Gl. (3.10), „anisoWand“ nach Gl. (3.20) und „anisoRST“ nach Gl. (3.21) bezeichnet.

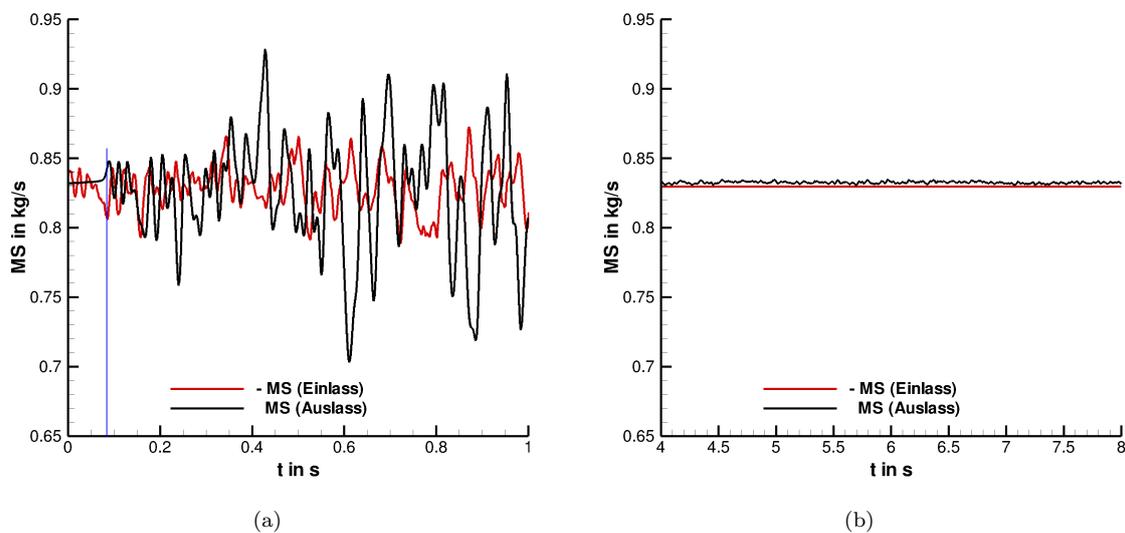
### 4.1.3 Korrektur der Randbehandlung für skalen-auflösende Simulationen

Zu Beginn der Auswertung wird auf die Besonderheit eines kompressiblen Strömungslösers eingegangen. Da die Geschwindigkeitsfelder der synthetischen Turbulenzmethoden SEM und DF-SEM nicht vollständig divergenzfrei sind ( $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ), siehe Abb. 3.13, kommt es zu einer erheblichen Beeinflussung der Strömung. Der Lösungsansatz berechnet die konservativen Strömungsvariablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$  mit Hilfe der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3). Aufgrund der divergenzbehafteten Geschwindigkeit liefert die Kontinuitätsgleichung (2.1) deutliche Dichtestörungen, die besonders stark an der Wand ausgeprägt sind. Die markante Reynoldsspannungsverteilung einer turbulenten wandbehafteten Strömung, siehe Abb. 3.11, weist gerade an der Wand eine nahezu zweikomponentige Anisotropie auf. Das jeweilige Reynoldsspannungsprofil wird zwar von der SEM hinreichend genau nachgebildet, führt jedoch zu einer Verletzung der Divergenzfreiheit. Da die konservativen Variablen  $\vec{W}$  mit der Dichte  $\rho$  gekoppelt sind, wird die gesamte Strömungssimulation erheblich gestört. Die entsprechenden thermodynamischen Größen, wie Temperatur  $T$  und Druck  $p$ , nehmen zudem unphysikalische Werte an.

Die synthetischen Turbulenzmethoden werden in der Regel für inkompressible Strömungen bzw. Lösungsansätze entwickelt und beachten nicht die physikalische Kopplung der Strömungsgrößen. POLETTO [55] berichtete bereits bei einem inkompressiblen Lösungsansatz mit der SEM bzw. DF-SEM von Druckstörungen am Einlass.

Die geschilderten Effekte lassen sich am Massenstrom  $\dot{m}$  gut beobachten. Die zeitliche Entwicklung des Massenstroms (MS) am Ein- und Auslass eines Kanals (Länge  $L_x = 32$  m, Querschnitt  $A = 6.4$  m<sup>2</sup>) ist in Abb. 4.2 dargestellt. Als Testfall wird eine Kanalströmung mit der Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.001$  s und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit  $U_m = 50$  m/s betrachtet. Es ergibt sich ein mittlerer Massenstrom von  $\dot{m} = \rho U_m A = 0.83$  kg/s (Dichte  $\rho = 2.592 \cdot 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup>).

Die ursprüngliche SEM ohne jegliche Erweiterungen führt zu stark fluktuierenden Massenströmen am Ein- und Auslass, siehe Abb. 4.2 (a). Dabei schwankt der Einlass-Massenstrom (rote Linie) bereits zu Beginn der Rechnung deutlich. Da die Dichte  $\rho$  als konstante Dirichlet-Randbedingung vorgegeben wird, kennzeichnet dies die direkte Auswirkung der synthetischen Geschwindigkeitskomponente  $u$ . Aufgrund unphysikalischer Druck- und Dichtestörungen kommt es nach einer Rechenzeit von  $t = L_x/(U_m + a) = 0.0806$  s (Schallgeschwindigkeit  $a = 347$  m/s) ebenfalls zu einer starken Anfachung des Auslass-Massenstroms (schwarze Linie) und verdeutlicht somit den kompressiblen Charakter der Rechnung. Im weiteren Verlauf kann eine Zunahme des fluktuierenden Auslass-Massenstroms beobachtet werden. Aufgrund einer wechselseitigen Reflexion der Druck- und Dichtewellen am Ein- und Auslass werden die Störungen immer weiter angefacht, was letztendlich zu einem unphysikalischen Ergebnis führt. Ohne zusätzliche Erweiterungen können die synthetischen Turbulenzmethoden mit einem kompressiblen Lösungsansatz nicht verwendet werden.



**Abb. 4.2:** Fluktuierender Massenstrom (MS) am Ein- und Auslass: (a) Original-SEM, (b) SEM mit Massenstrom-Korrektur ( $\dot{m}_E = \text{const.}$ ) + Dämpfungszone am Eintritt + dynamischer Auslassdruck, Gl. (2.76) nach RUDY und STRIKWERDA [61].

Das divergenzbehaftete Geschwindigkeitsfeld stellt ein grundlegendes Problem aller synthetischen Turbulenzmethoden dar [55]. Selbst die divergenzfreie Erweiterung DF-SEM verletzt diese physikalische Eigenschaft zumindest in Wandnähe, siehe Abb. 3.13.

Eine Möglichkeit diese Problematik zu umgehen, stellt das lokale Dämpfen der Störungen dar. Beispielsweise verwenden MAGAGNATO et al. [44] oder PRITZ [58] die SEM in Verbindung mit einem kompressiblen Strömungslöser. Strömungskonfigurationen, wie die Profilmströmung einer Turbinenschaufel oder die pulsierende Strömung einer Brennkammer wurden erfolgreich berechnet. Aufgrund unphysikalischer Reflexionen der Störwellen an den übrigen Randbedingungen, insbesondere am Ein- und Auslass, müssen nicht-reflektierende Ränder verwendet werden. Eine ausführliche Beschreibung findet sich bei POINSOT und LELE [54].

MAGAGNATO et al. [44] und PRITZ [58] nutzen beispielsweise am Ein- und Austritt lokal definierte Dämpfungszonen (*sponge layer*, MANI [45]), wobei dessen Ansatz auf den Algorithmus von FREUND [21] basiert. Bei einer Außenströmung werden neben den Dämpfungstermen zusätzliche

Konvektionsterme mit erhöhter Konvektionsgeschwindigkeit  $U_{konv} \sim a$  in den Navier-Stokes-Gleichungen eingeführt.

Da sich die vorliegende Arbeit nur mit Innenströmungen befasst, wird der Dämpfungsansatz nach FREUND [21] ohne Konvektionsterme verwendet, siehe Gl. (2.78)-(2.80). Diese Erweiterung erlaubt eine wirkungsvolle Dämpfung der unphysikalischen Druck- und Dichtewellen am Eintritt, wobei nur die Kontinuitätsgleichung (2.78) und die Energiegleichung (2.80) entsprechende Dämpfungsterme aufweisen. Als Referenzwerte dienen die strömungsspezifischen Werte  $\rho_{ref}$  und  $(\rho E)_{ref}$  mit dem Referenzdruck  $p_{ref}$  nach Gl. (2.4). Das synthetische Geschwindigkeitsfeld am Dirichlet-Eintritt wird dabei nur minimal beeinflusst. Als geeigneter Dämpfungskoeffizient hat sich  $\sigma_{max}^d = 10 \dots 15$  erwiesen, wobei der Einfluss der Wirkungsweite  $W$  in der IDDES-Untersuchung weiter unten gezeigt wird.

Da die Störwellen am Eintritt deutlich reduziert werden und der globale Einfluss der Dämpfungszonen so gering wie möglich gehalten werden muss, wird am Auslass auf eine Dämpfung verzichtet und stattdessen die dynamische Druckrandbedingung, Gl. (2.76), nach RUDY und STRIKWERDA [61] verwendet. Diese erlaubt einen leicht variablen Auslassdruck, der sich der turbulenten Strömung entsprechend anpasst. Da dabei die Charakteristikentheorie, siehe Abschnitt 2.6, berücksichtigt wird, ergibt sich eine nahezu nicht-reflektierende Druckrandbedingung [61].

Die zuvor erwähnte Massenstrom-Korrektur der SEM bzw. DF-SEM nach Gl. (3.22) erwirkt einen konstanten Einlass-Massenstrom und wird in der weiteren Arbeit ebenfalls verwendet. Die Wirksamkeit der beschriebenen Erweiterungen wird mit Abb. 4.2 (b) belegt.

Die hier gewählte, feste Vorgabe der synthetischen Geschwindigkeit als Dirichlet-Randbedingung stellt nur eine Möglichkeit der turbulenten Anfachung dar. Zusätzliche Quellterme in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3), wie PRITZ [58] (SEM, Abschnitt 3.1) oder MATHEY et al. [48] (Vortex-Methode, Anhang A.1) sie verwenden, überlagern das mittlere Strömungsfeld ebenfalls mit synthetischer Turbulenz. Im zeitlich begrenzten Rahmen dieser Arbeit konnte dieser Ansatz nicht erfolgreich umgesetzt werden, wobei dessen Variante eine vermutlich geringere Beeinflussung der konservativen Variablen verspricht. Da der iterative Lösungsalgorithmus nur Näherungswerte ermöglicht, kann die synthetische Turbulenz wahrscheinlich nicht hinreichend genau wiedergegeben werden. Es werden gewisse Abweichungen zur vorgegebenen Reynoldsspannungsverteilung erwartet.

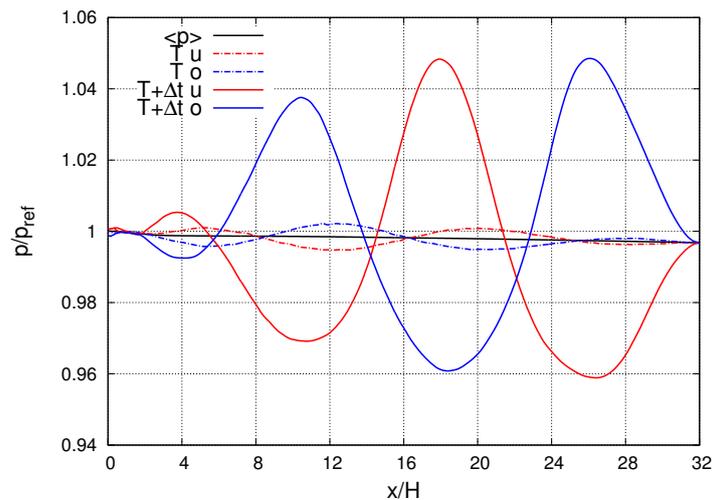
Zudem verwenden PRITZ [58] bzw. MATHEY et al. [48] eher allgemeine Turbulenz-Kenngrößen, die keine charakteristische Anisotropie einer wandbehafteten Turbulenz erlauben. Gerade für eine realistische Turbulenz mit einer kurzen Übergangslänge gilt es diese nachzubilden. Somit muss das Hinzufügen der synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen als ein Kompromiss an Genauigkeit und numerischer Stabilität gesehen werden.

#### 4.1.4 Einfluss der Präkonditionierung

Aufgrund der nahezu inkompressiblen Strömung ( $Ma = 0.144$ ) muss bei einem kompressiblen Lösungsverfahren eine zusätzliche Präkonditionierung gewisser Terme der diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) durchgeführt werden, siehe Abschnitt 2.5.3. Andernfalls verschlechtert sich mit abnehmender Mach-Zahl das Lösungsverhalten des kompressiblen Strömungslösers und eine fehlerhafte Skalierung der numerischen Dissipation führt zu Genauigkeitseinbußen [32].

Im Vorfeld der folgenden Kanaluntersuchung wurde bei skalen-auflösenden Simulationen ein deutlicher Einfluss der Präkonditionierung auf das gesamte Strömungsverhalten beobachtet. Für reibungsbehaftete Strömungen wird ein *cut-off*-Parameter von  $K = 1.5$  empfohlen [32]. Jedoch liefert dieser Wert in Verbindung mit der synthetischen Turbulenz unnatürliche Instabilitäten im Druck- und Dichtefeld. Im Gegensatz zu den bereits geschilderten Druck- und Dichtestörungen der SEM, die zu jedem Zeitschritt neu entstehen, siehe fluktuierende Massenströme in Abb. 4.2 (a), muss hier von einer zeitlichen Instabilität bzw. Anfachung gesprochen werden.

Abb. 4.3 zeigt den Druckverlauf entlang des zuvor untersuchten Kanals. Neben den zeitlich gemittelten Druck  $\langle p \rangle$  (schwarze Linie) werden die Momentangrößen zu unterschiedlichen Zeitpunkten ( $T, T + \Delta t$ ) dargestellt. Dabei wird zwischen oberer (blau) und unterer (rot) Wand unterschieden.



**Abb. 4.3:** Unphysikalische Druckwelle entlang des Kanals ( $K = 1.5$ ). Mit fortschreiten der Zeit wächst die Amplitude der „stehenden“ Welle an. Dabei entsteht ein wechselndes Muster an der oberen (o) und unteren (u) Wand.

Zu Beginn der Rechnung werden keine auffälligen Besonderheiten beobachtet. Jedoch prägen sich mit der Zeit bestimmte Muster im Druck- und Dichtefeld aus, die an den gegenüberliegenden Wänden wechselseitig variieren. Wie in Abb. 4.3 dargestellt, entsteht eine Art „stehende“ Welle, deren Amplitude mit fortschreitender Zeit immer weiter anwächst. Als Größenvergleich dient der zeitlich gemittelte Druck  $\langle p \rangle$  (schwarze Linie). Der analytisch berechnete Druckgradient  $\partial p / \partial x = -\rho u_\tau^2 / H$  [57] ist kaum auszumachen, wobei die Druckdämpfung am Einlass ( $W_E / H = 2$ ) deutlich sichtbar ist. Da die zunehmende Druck- bzw. Dichtewelle das Geschwindigkeitsfeld maßgeblich beeinträchtigt, muss bei der turbulenten Kanalströmung ein *cut-off*-Parameter von  $K > 1.5$  verwendet werden.

Die möglichen Gründe dieses überraschenden Ergebnisses können nur vermutet werden. Neben einer viel zu kleinen künstlichen Dissipation kann die Verwendung einer Dirichlet-Randbedingung ohne Präkonditionierung spekulativ genannt werden. Die hier verwendete Präkonditionierungsvariante nach CHOI und MERKLE [14], siehe Abschnitt 2.5.3, beeinflusst neben der künstlichen Dissipation die Zeitableitung der primitiven Variablen  $\vec{W}_p = \{\rho, u, v, w, p\}^T$ . Da zeitlich variierende Geschwindigkeitsfelder vorgegeben werden, kann eine entsprechende Beeinflussung angenommen werden.

Aufgrund der Erhöhung des *cut-off*-Parameters  $K$  und der einhergehenden höheren künstlichen Dissipation, sollte der Skalierungsterm  $\kappa^{(4)}$  noch kleiner gewählt werden. Die jeweilige Wechsel-

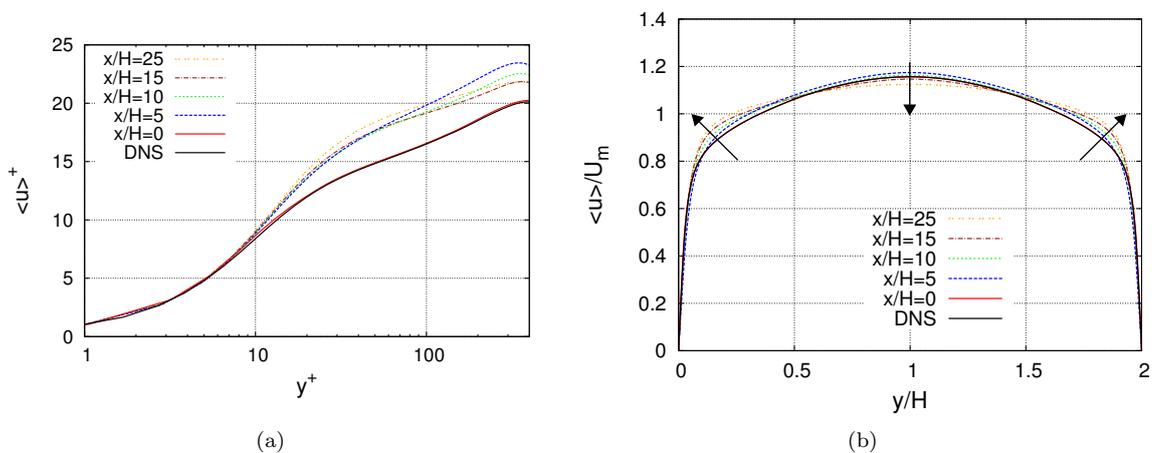
wirkung mit dem Parameter  $K$  ist nicht eindeutig bekannt, sodass in der folgenden Untersuchung der entsprechende Einfluss mit berücksichtigt wird. Generell gilt die Dissipation der turbulenten Fluktuationen als ein entscheidendes Qualitätsmerkmal einer skalen-auflösenden Simulation. Die künstliche Dissipation muss so gering wie möglich gehalten werden, damit der Einfluss der zusätzlich modellierten physikalischen Dissipation des entsprechenden Turbulenzmodells der DES bzw. des Feinstrukturmodells der LES korrekt skaliert. Die Energiekaskade muss richtig wiedergegeben werden [57].

## 4.2 Auswertung

Bevor auf die jeweiligen Wirksamkeiten und Sensitivitäten genauer eingegangen wird, erfolgt die Auswertung der Referenz-Simulationen. Neben zwei LES-Rechnungen mit einem Smagorinsky- (LES-SM) bzw. WALE-Feinstrukturmodell (LES-WALE), siehe Abschnitt 2.2.2, handelt es sich hierbei um eine IDDES (I-iso) mit dem Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell nach Gl. (2.37). Dabei wird die klassische SEM mit isotropen Wirbelradien  $\sigma$  nach JARRIN et al. (2009) [37] verwendet, siehe Abschnitt 3.1. Die Wirbelanzahl  $N$  wird individuell vorgegeben, wobei die jeweiligen Parameter in Tab. 4.2 angegeben sind. Zusätzlich zu den bereits genannten Erweiterungen werden die synthetischen Fluktuationen mit der van Driest'schen Dämpfungsfunktion nach Gl. (2.32) mit  $A^+ = 10$  im wandnahen Bereich gedämpft. Diese Modifikation versucht unphysikalische Effekte der divergenzbehafteten Geschwindigkeit, wie Druck- und Dichtestörungen, direkt an der Wand zu minimieren.

### 4.2.1 Referenzlösung LES

Abb. 4.4 zeigt das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil der LES-SM mit Smagorinsky-Modell. Um die Entwicklung in Strömungsrichtung  $x$  genauer zu beobachten, werden entsprechende Profile abgebildet. Als Referenz dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51].

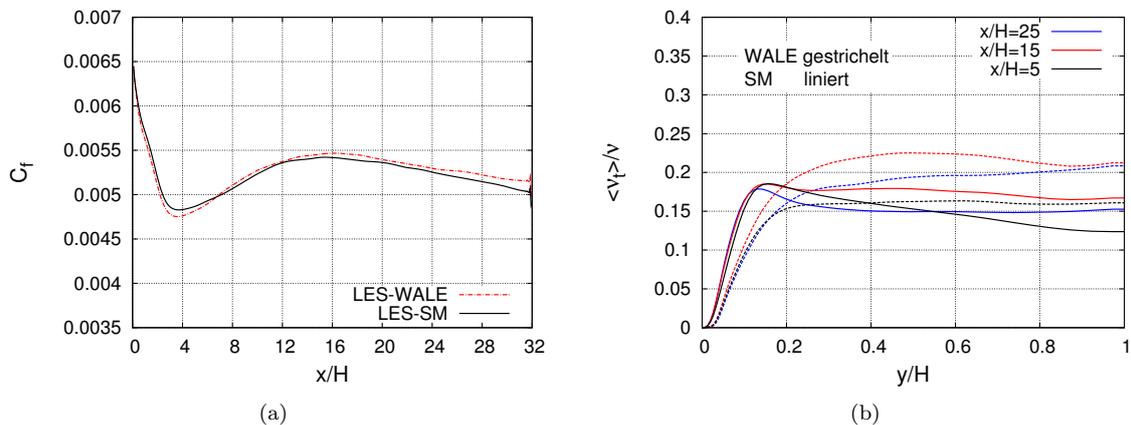


**Abb. 4.4:** Zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile der LES-SM entlang des Kanals. Die Normierungsgrößen in (a) berechnen sich aus der lokalen Wandschubspannung.

Die Dirichlet-Randbedingung am Eintritt gibt das korrekte Geschwindigkeitsprofil vor. Jedoch stellt sich bereits etwas stromab der Eintrittsebene ein abweichendes Geschwindigkeitsprofil ein. Aufgrund der Normierung, basierend auf der lokalen Wandschubspannung mit den Gl. (2.11)-(2.14), stimmt die viskose Unterschicht ( $y^+ < 10$ ) bei allen Positionen mit der DNS überein, siehe Abb. 4.4 (a). Die „Bauchigkeit“ der Geschwindigkeitsprofile nimmt bei einem Wandabstand  $d_w/H = 0.2$  immer weiter zu, wobei sich die Maximalgeschwindigkeit in Kanalmitte reduziert, siehe Abb. 4.4 (b). Da sich die Wandschubspannung in Strömungsrichtung  $x$  jedoch verringert, siehe  $C_f$ -Verlauf in Abb. 4.5 (a), kann von keinem typisch turbulenten Grenzschichtprofil gesprochen werden. Zudem ergeben sich in Abb. 4.4 (a) nahezu identische, normierte Geschwindigkeitsprofile. Diese deutlichen Abweichungen werden auch bei der LES-WALE-Rechnung beobachtet, siehe Anhang Abb. A.1.

Ein weiterer Indikator dieser Unstimmigkeit ist der zeitlich gemittelte Reibungsbeiwert  $C_f$  in Abb. 4.5 (a). Dieser startet mit dem vorgegebenen Referenzwert  $C_{f,395} = 2(u_\tau/U_m)^2 = 0.0066$  und fällt anschließend steil ab. Der Abfall wird durch die nicht vollständig physikalischen Eigenschaften der synthetischen Turbulenz hervorgerufen und tritt bei allen synthetischen Turbulenzansätzen auf, siehe JARRIN [35]. Je nach physikalischer Realisierung der Fluktuationen stellt sich nach einer gewissen Übergangslänge eine vollständig entwickelte Turbulenz mit konstantem  $C_f$ -Wert ein. Beispielsweise gibt JARRIN [35] für die SEM eine Übergangslänge von rund  $10-12H$  an, wogegen rein zufällig erzeugte Geschwindigkeitsfluktuationen zu einer Relaminarisierung der Strömung führen.

In der vorliegenden Simulation steigt der  $C_f$ -Wert zwar wieder leicht an, erreicht jedoch keine konstanten Werte. Zudem ist im weiteren Verlauf ein langsamer Abfall zu beobachten, sodass sich vermutlich bei einem längeren Kanal eine Relaminarisierung der Strömung einstellt. Als mögliche Gründe können die unrealistischen Eigenschaften der synthetischen Turbulenz und/oder eine zu hohe modellierte Dissipation der Geschwindigkeitsfluktuationen vermutet werden.



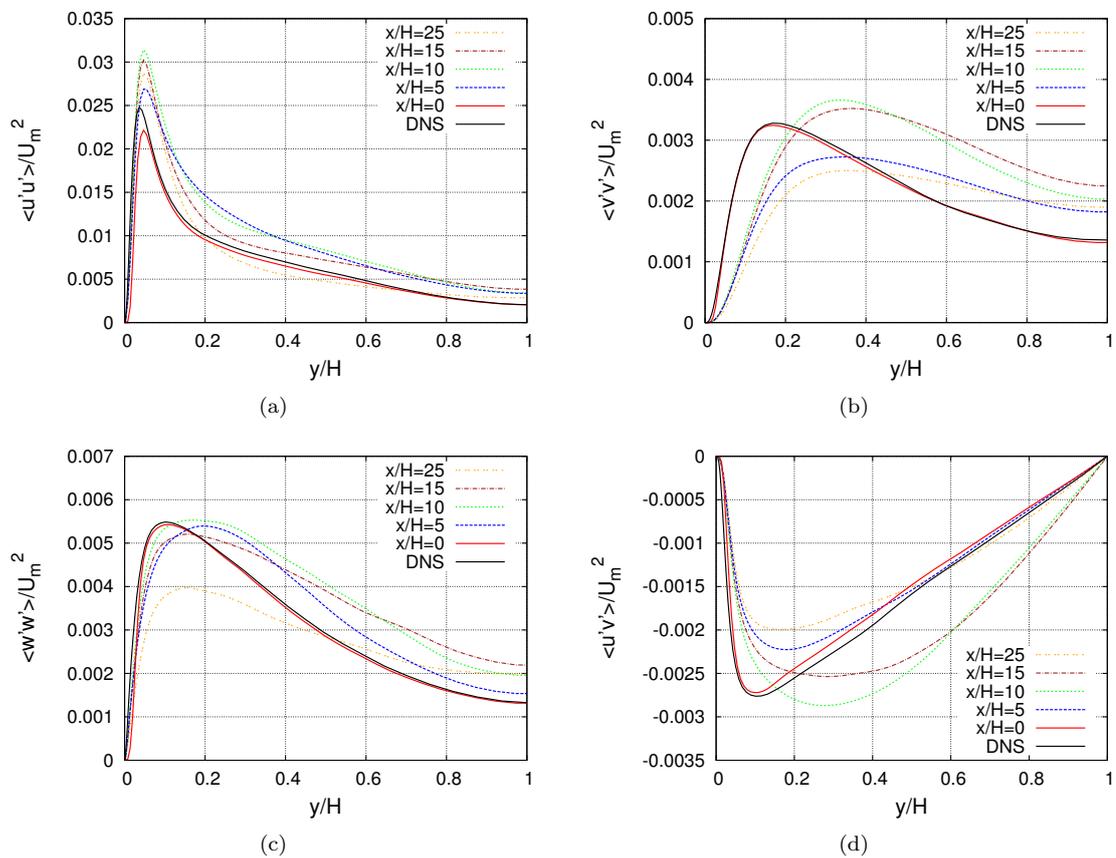
**Abb. 4.5:** Zeitlich gemittelter Reibungsbeiwert  $C_f$  (a) und turbulentes Viskositätsverhältnis  $\nu_t/\nu$  (b) der LES-Rechnungen entlang des Kanals.

Generell dient das Viskositätsverhältnis  $\nu_t/\nu$  zur Beurteilung der räumlichen Diskretisierungsgüte einer LES mit reinen Wirbelviskositätsmodellen [22]. Abb. 4.5 (b) zeigt ein relativ kleines Viskositätsverhältnis  $\nu_t/\nu$  der jeweiligen Feinstrukturmodelle, sodass von einer ausreichend feinen räumlichen Diskretisierung ausgegangen werden kann. Der Großteil der turbulenten Wirbelstrukturen der Kanal-

strömung kann entsprechend aufgelöst werden. Die turbulente Viskosität  $\nu_t$  ist entlang des Kanals und der Kanalmitte nahezu konstant, wobei das Smagorinsky- (SM) und das WALE-Modell sehr ähnliche Werte liefern. In Wandnähe kann das typische Verhalten von  $\nu_t \sim y^3$  beobachtet werden. Aufgrund der zusätzlichen van Driest'schen Dämpfung nach Gl. (2.32) des Smagorinsky-Modells mit  $A^+ = 25$  ergibt sich zum WALE-Modell ein kleiner Versatz.

Da die modellierte Wirbelviskosität qualitativ kleine Werte annimmt, muss von einem deutlichen Einfluss der künstlichen Dissipation ausgegangen werden. Die entsprechende Skalierung mit dem *cut-off*-Parameter  $K$  und dem Skalierungsterm  $\kappa^{(4)}$  ist nicht optimal.

Die Abb. 4.6 zeigt die zeitlich gemittelten Reynoldsspannungskomponenten der turbulenten Kanalströmung der LES-SM-Rechnung entlang der Strömungsrichtung  $x$ . Die entsprechenden Profile der LES-WALE-Rechnung befinden sich im Anhang Abb. A.2. Wie bereits erwähnt, werden die synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen mit der van Driest'schen Dämpfungsfunktion nach Gl. (2.32) mit  $A^+ = 10$  im wandnahen Bereich gedämpft. Die Profile am Eintritt ( $x/H = 0$ ) weisen zur Referenz-DNS in Wandnähe entsprechend kleine Abweichungen auf.



**Abb. 4.6:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungskomponenten der LES-SM. Als Referenz dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51].

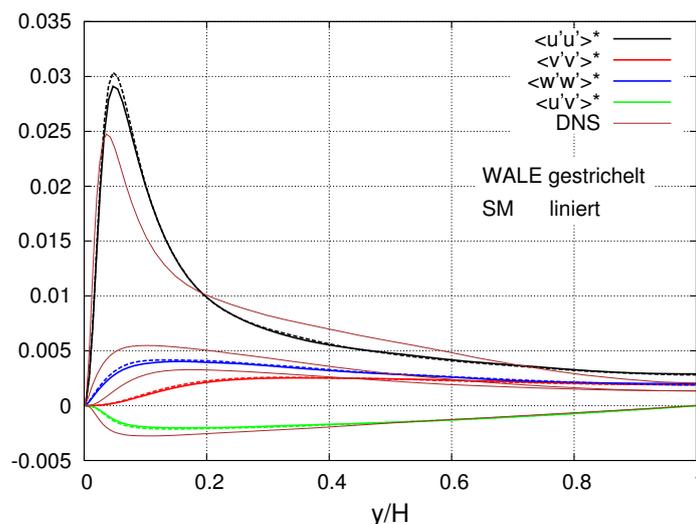
Die  $\langle u'u' \rangle$ -Reynoldskomponente in Strömungsrichtung nimmt entlang des Kanals im Vergleich zur DNS durchgehend große Werte an, siehe Abb. 4.6 (a). Insbesondere im wandnahen Bereich wird eine deutlich stärkere Ausprägung beobachtet. Ähnliche Verläufe ergeben sich bei viel zu groben Rechengittern [22], was hier jedoch auszuschließen ist.

Während die  $\langle u'u' \rangle$ -Komponente zu große Werte liefert, ergeben sich deutliche Defizite der wandnormalen Komponente  $\langle v'v' \rangle$ , siehe Abb. 4.6 (b). Die wandnormalen Fluktuationen werden am Eintritt, trotz zusätzlicher Dämpfung, nahezu korrekt vorgegeben, wobei weiter stromab deutliche Abweichungen zu beobachten sind. Zum einen sind die Korrelationen in der Kanalmitte sehr viel größer, und zum anderen ist der Verlauf weiter in Richtung Kanalmitte verschoben. Direkt an der Wand treten die größten Unterschiede auf. Dabei erfolgt der Anstieg der Korrelationen, im Vergleich zur DNS, weiter entfernt von der Wand und nimmt entlang des gesamten Kanals einen identischen Verlauf an. Die spannweite Komponente  $\langle w'w' \rangle$  weist ein ähnliches Verhalten auf, siehe Abb. 4.6 (c). Die Korrelationen nehmen zum Kanalende stark ab, wobei der Verlauf in Richtung Kanalmitte verschoben ist. Der wandnahe Anstieg der  $\langle u'u' \rangle$ - und  $\langle w'w' \rangle$ -Korrelationen entsprechen jedoch der DNS.

Das oben gezeigte Verhalten der Geschwindigkeitsprofile lässt sich mit der Abweichung der wandnormalen Spannungskomponente  $\langle v'v' \rangle$  in Verbindung bringen. Aufgrund des fehlenden turbulenten Impulsaustauschs kann sich kein realistisches Strömungsprofil im Sinne der vorgegebenen turbulenten Kanalströmung mit  $Re_\tau = 395$  ausbilden. Bei einer sich entwickelten turbulenten Kanalströmung haben die Produktionsterme  $P_{1j} = -\langle u'_j u'_2 \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} - \langle u'_1 u'_2 \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_2}$  bzw.  $P_{i1}$  die größte Wirkung. Da  $\langle u'_2 u'_2 \rangle$  gerade in Wandnähe unterschätzt wird, führt dies zu einer kleineren Produktion  $P_{12} = -\langle u'_2 u'_2 \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2}$  der Scherspannung  $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ . Die Entwicklung der turbulenten Kanalströmung ist entsprechend gestört.

Das Defizit der Scherspannungs-Produktion kann in Abb. 4.6 (d) beobachtet werden. Die Scherspannung ist in der Mitte des länglichen Kanals ( $x/H = 10$  und  $15$ ) deutlich erhöht, was mit dem größeren  $C_f$ -Wert in Abb. 4.5 (a) übereinstimmt. Zum Ende des Kanals nimmt der  $C_f$ -Verlauf wieder ab, sodass eine kleinere Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  beobachtet wird. Die analytische Lösung einer ausgebildeten Kanalströmung wird hier nicht erfüllt [57]:

$$\tau^{ges} = \mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \rho \langle u'v' \rangle = \tau_w \left( 1 - \frac{y}{H} \right) . \quad (4.1)$$

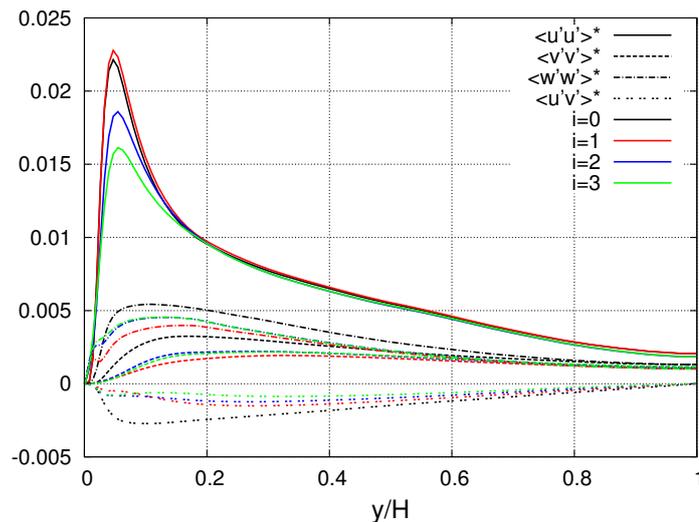


**Abb. 4.7:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungen der LES-Rechnungen bei  $x/H = 25$ . Die mit \* gekennzeichneten Größen sind mit  $U_m^2$  normiert.

Da sich der Verlauf der turbulenten Viskosität  $\nu_t$ , siehe Abb. 4.5 (b), korrekt verhält und der gleiche  $\langle v'v' \rangle$ -Verlauf beim WALE-Modell beobachtet wird, siehe Abb. 4.7, wird ein allgemeines Problem der numerischen Dissipation vermutet. Gerade der wandnahe Bereich weist besonders lang gestreckte Zellen mit einem wandnormalen Wachstum auf, siehe Gitterstreckung in Abb. 4.1. Bei der äquidistanten Streckung in Strömungsrichtung  $x$  bzw. Spannweitenrichtung  $z$  werden keine vergleichbaren Effekte beobachtet.

Aufgrund des ohnehin kleinen Skalierungsterms  $\kappa^{(4)}$  wird ein grundlegendes Problem des DLR-TAU-Codes vermutet. Dieser wurde ursprünglich für reine RANS-Anwendungen konzipiert, wobei die numerische Stabilität im Vordergrund stand. Etwaige Genauigkeitsverluste sind im allgemeinen RANS-Konzept eher weniger dramatisch. Die Einflüsse der deutlich größeren Rechengitter und größeren Viskositätsverhältnisse sind im Vergleich zur numerischen Dissipation sehr viel größer. Die Auswirkungen auf skalen-auflösende Simulationen, wie die LES, sind jedoch nicht vollständig klar.

Weitere Unstimmigkeiten sind in Abb. 4.8 dargestellt. Die gewählte Dirichlet-Randbedingung gibt zwar die korrekte Reynoldsspannungsverteilung vor, jedoch ist nur wenige Gitterpunkte stromab des Eintritts ein starker Abfall der statistisch gemittelten Reynoldsspannungen zu beobachten. Der angegebene Index kennzeichnet mit der Gitterschrittweite  $\Delta x/H = 0.08$  die Position  $x/H = i\Delta x$ .



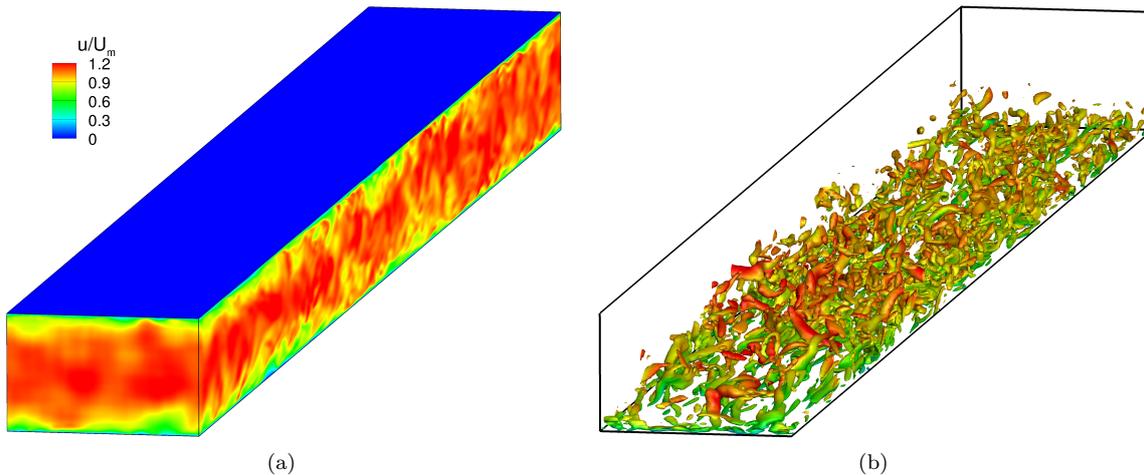
**Abb. 4.8:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungen der LES-SM direkt am Eintritt. Diese sind mit  $U_m^2$  normiert. Der Index  $i$  kennzeichnet die Position  $x/H = i\Delta x$ .

Ein starker Abfall der Reynoldsspannungen ergibt sich bei den Komponenten  $\langle v'v' \rangle$  und  $\langle w'w' \rangle$ . Gleich am zweiten Gitterpunkt fallen die Statistiken deutlich ab, wobei im weiteren Verlauf ein leichter Anstieg zu beobachten ist. Wie die Abb. 4.6 bereits zeigte, ergeben sich mehrere Kanalhalbweiten  $H$  weiter stromab, ähnlich stark ausgeprägte Spannungsverläufe wie die Referenz-DNS.

Das geschilderte Verhalten stellt jedoch ein grundlegendes Problem der SEM dar. Bereits JARRIN [35] berichtete von diesem starken Abfall der Reynoldskomponenten  $\langle v'v' \rangle$ ,  $\langle w'w' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$  und einen leichten Anstieg der  $\langle u'u' \rangle$ -Komponente direkt am Eintritt. Den stärksten Abfall verzeichnete dabei die Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  mit nahezu 50% Verlust des räumlichen Mittelwerts. Einen ähnlichen Effekt beobachtete POLETTO [55] bei der DF-SEM.

Zusätzlich zum  $C_f$ -Abfall können somit die nicht vollständig physikalischen Eigenschaften der synthetischen Turbulenz belegt werden. Erst weiter stromab kann sich eine annähernd physikalische Turbulenz ausbilden. Ähnliche Effekte werden ebenfalls bei einem Hinzufügen der synthetischen Fluktuationen mittels zusätzlicher Quellterme in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) erwartet.

Der Vollständigkeit halber wird das momentane Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Kanalströmung dargestellt. In Abb. 4.9 ist neben der instationären  $u$ -Geschwindigkeitskomponente, Abb. 4.9 (a), das Q-Kriterium  $Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2$  der LES-Rechnung, Abb. 4.9 (b), abgebildet. Die SEM liefert eine qualitativ vollturbulente Strömung, wobei am Eintritt größere Wirbelstrukturen zu beobachten sind. Erst weiter stromab ergeben sich deutlich kleinere Strukturen, die entsprechend der wandnahen *streaks* [57] in Strömungsrichtung gestreckt sind.



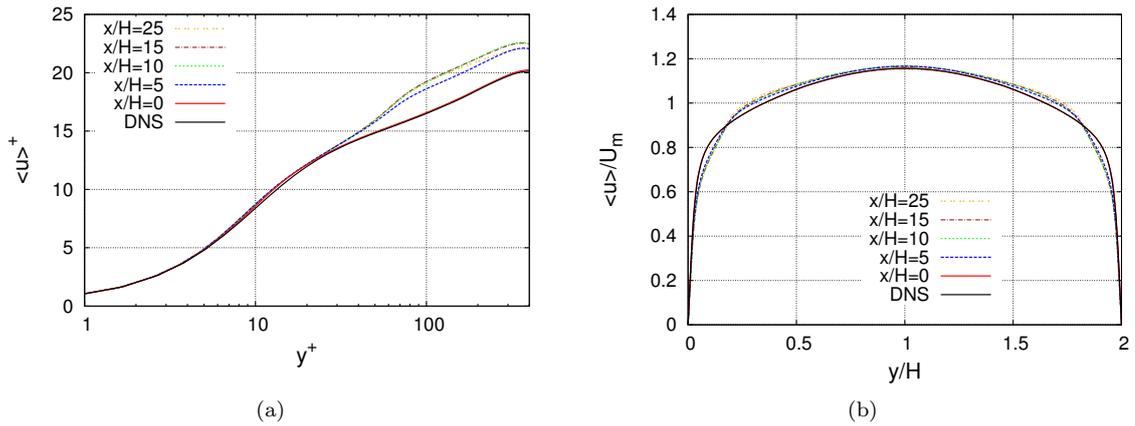
**Abb. 4.9:** Momentane  $u$ -Geschwindigkeitskomponente (a) und kohärente Wirbelstrukturen (b) der turbulenten Kanalströmung mit  $Q = 1450U_m^2/H^2$ . Diese sind mit  $u/U_m$  eingefärbt.

#### 4.2.2 Referenzlösung IDDES

Einen weiteren Ansatz skalen-auflösender Simulationen stellt die IDDES dar. Aufgrund der entsprechenden Modifikation von TRAVIN et al. (2006) [75], siehe Abschnitt 2.4.3, ist es damit möglich eine wandmodellerte LES (WMLES) durchzuführen. Im wandnahen Bereich wird mit Hilfe des Spalart-Allmaras (SA) RANS-Turbulenzmodells nach Gl. (2.37) die Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  approximiert, während das RANS-Modell im wandfernen Bereich nach Gl. (2.48) ein LES-ähnliches Verhalten annimmt.

In Abb. 4.10 ist das Geschwindigkeitsprofil der Referenz-IDDES (I-iso) dargestellt. Ähnlich wie bei der LES, siehe Abb. 4.4, verschiebt sich das Geschwindigkeitsprofil im wandnahen Bereich ( $d_w/H \approx 0.2$ ). Die Profile stimmen weiter stromab überein, wobei ein deutlicher Unterschied zur Referenz-DNS zu beobachten ist. Aufgrund der wandnahen RANS-Schicht, siehe Abb. 4.11 (b), und der Normierung mit lokalen Referenzwerten ergeben sich in Abb. 4.11 (a) bis  $y^+ < 40$  die gleichen Verläufe.

Im Gegensatz zu den LES-Rechnungen stimmt das Geschwindigkeitsprofil in der Kanalmitte mit der Referenz-DNS überein. Die Maximalgeschwindigkeit in Kanalmitte wird korrekt wiedergegeben.



**Abb. 4.10:** Zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile der IDDES (l-iso) entlang des Kanals. Die Normierung in (a) basiert auf der lokalen Wandschubspannung.

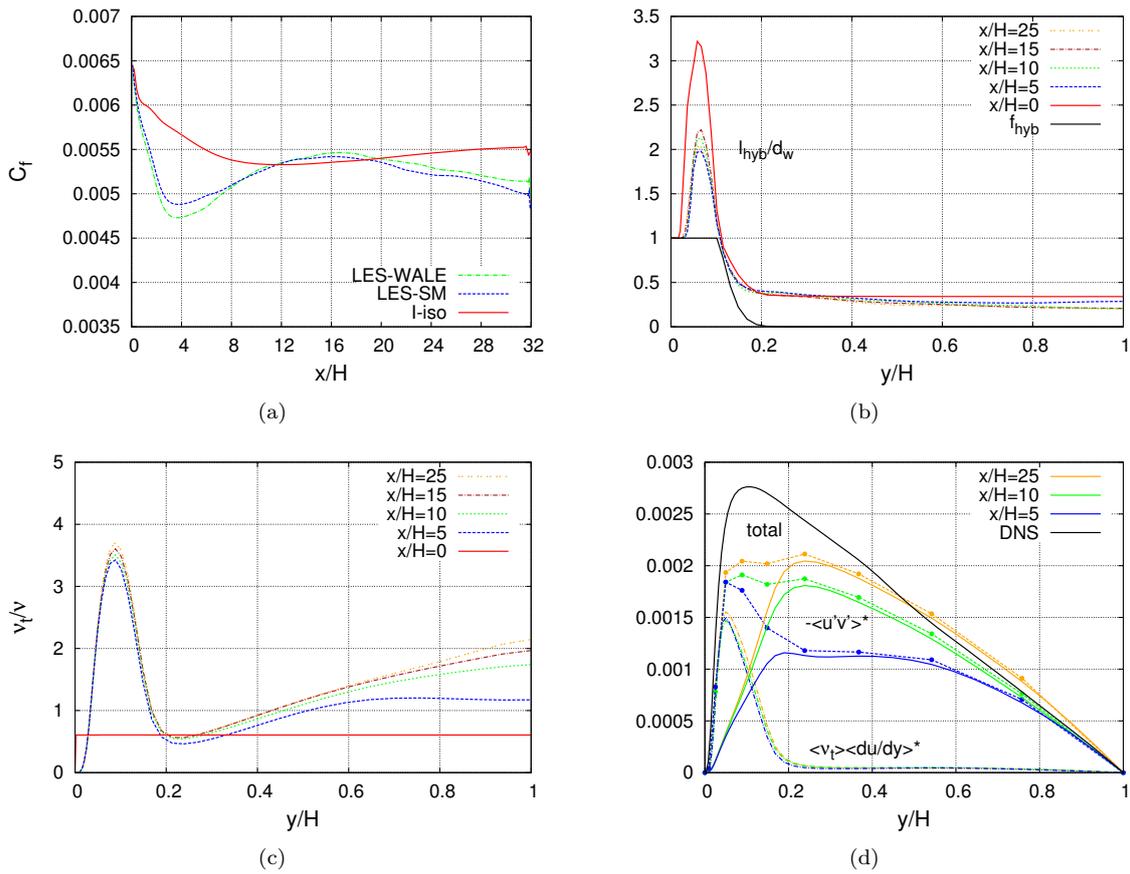
In Abb. 4.11 sind weitere relevante Strömungsprofile der turbulenten IDDES-Kanalströmung abgebildet. Abb. 4.11 (a) zeigt den  $C_f$ -Verlauf der IDDES, wobei die LES-Verläufe zum Vergleich mit eingezeichnet sind. Der typische  $C_f$ -Abfall am Anfang des Kanals fällt nicht so stark wie bei der LES und nimmt im weiteren Verlauf einen nahezu konstanten Wert an. Der vorgegebene Referenzwert  $C_{f,395} = 2(u_\tau/U_m)^2 = 0.0066$  wird jedoch ebenfalls nicht erreicht.

Die RANS-Modellierung übt direkt an der Wand einen deutlichen Einfluss aus. In Abb. 4.11 (b) sind die jeweiligen Kenngrößen des hybriden RANS-LES-Übergangs dargestellt. Dabei kennzeichnet  $f_{hyb} = 1$  den RANS-Bereich und  $f_{hyb} = 0$  den LES-ähnlichen Bereich. Aufgrund der turbulenten Eintrittsrandbedingungen arbeitet die IDDES nach Gl. (2.48) im WMLES-Modus und der Übergang wird durch die Stufenfunktion  $f_B$  nach Gl. (2.49) bestimmt. Zudem ist die wirksame Längenskale des SA-Modells  $l_{hyb}/d_w$  eingezeichnet. Im wandnahen RANS-Bereich wird die klassische Längenskale, der Wandabstand  $d_w$ , und im wandfernen LES-Bereich eine deutlich kleinere Längenskale verwendet. Diese nimmt im gesamten Kanal ähnlich konstante Werte an ( $l_{hyb}/d_w \approx 0.3$ ) und führt dabei zu einer verstärkten Dissipation der SA-Viskosität  $\tilde{\nu}$ , Gl. (2.37).

Direkt am RANS-LES-Übergang ( $d_w/H \approx 0.1$ ) ist eine deutlich größere Längenskale  $l_{hyb}/d_w > 1$  zu beobachten. Die somit gegenüber der RANS-Modellierung lokal reduzierten Dissipation  $D$  des SA-Modells nach Gl. (2.38) verhindert den unerwünscht schnellen Abbau der SA-Viskosität  $\tilde{\nu}$ . Laut TRAVIN et al. [75] soll dies den bekannten *Log-Layer Mismatch* (LLM) [68] der ursprünglichen DDES verhindern, siehe Abschnitt 2.4.2.

Entsprechend der größeren SA-Längenskale ergibt sich am Übergangsbereich eine lokal erhöhte Wirbelviskosität, siehe Abb. 4.11 (c). Diese fällt im LES-Bereich deutlich ab, wobei in Richtung Kanalmitte ein Anstieg zu verzeichnen ist. Die Wirbelviskosität ist entlang des Kanals nahezu konstant, lediglich in Kanalmitte variieren die Werte leicht. Das Niveau der willkürlich festgelegten Einströmbedingung der SA-Viskosität ( $\nu_t/\nu \approx 0.6$ ) scheint ausreichend, wobei der Einfluss der Vorgabewerte als gering eingestuft wird. Etwas stromab ergeben sich bereits nahezu identische Beträge.

Die in Abb. 4.11 (b) und (c) gezeigten Profile der IDDES stimmen qualitativ mit der turbulenten Kanalströmung der Referenz-Arbeit von TRAVIN et al. [75] überein. Die IDDES liefert mit der SEM die typischen Verläufe.



**Abb. 4.11:** Ausgewählte Strömungsprofile der IDDES (I-iso) in Verbindung mit der SEM: (a) Reibungsbeiwert  $C_f$ , (b) hybride RANS-LES-Funktionen, (c) turbulentes Viskositätsverhältnis  $\nu_t/\nu$  und (d) modellierte  $(\langle \nu_t \rangle \partial \langle u \rangle / \partial y)$  und aufgelöste  $(-\langle u'v' \rangle)$  Scherspannungen (mit  $U_m^2$  normiert).

Abb. 4.11 (d) zeigt die Scherspannung entlang der Kanalhöhe. Dabei werden die modellierten  $\langle \nu_t \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$  und aufgelösten  $\langle u'v' \rangle$  Anteile separat dargestellt. Die zusammengesetzte Komponente (total) bestimmt die Wandschubspannung  $\tau_w$  und das Geschwindigkeitsprofil maßgeblich. Zu beachten ist der analytische Verlauf der Gesamtschubspannung  $\tau^{ges}$  einer turbulenten Kanalströmung nach Gl. (4.1). Da sich die Wirbelviskosität  $\nu_t$  in Abb. 4.11 (c) bzw. die Geschwindigkeitsprofile in Abb. 4.10 stromab kaum ändern, ergibt sich entlang des Kanals ein nahezu gleichbleibender Anteil modellierter Scherspannung. In Verbindung mit dem aufgelösten Anteil liefert diese eine zu kleine Gesamt-Scherspannung im wandnahen Bereich, was wiederum mit der deutlichen Abweichung der Geschwindigkeitsprofile in Zusammenhang steht. Der aufgelöste Anteil entwickelt sich zum Ende des Kanals zwar in Richtung Referenzlösung, jedoch wächst der modellierte Anteil kaum.

Als mögliche Ursache wird hier die deutlich zu kleine Wirbelviskosität vermutet. Da die SEM gerade am Anfang des Kanals eine eingeschränkt physikalische Turbulenz generiert, führt dies vermutlich ebenfalls zu einer Fehlabschätzung der modellierten SA-Viskosität. Die Entwicklung der synthetischen Turbulenz verläuft im LES-Bereich zwar deutlich schneller, jedoch wird für eine vollständig entwickelte Kanalströmung ein entwickelter RANS-Bereich verlangt. Da das mittlere Geschwindigkeitsprofil in Abb. 4.10 bereits einen unrealistischen Gradienten in Wandnähe aufweist, ergibt sich

eine zu geringe SA-Viskosität. Der leicht ansteigende  $C_f$ -Wert in Abb. 4.11 (a) bestätigt die langsame Entwicklung der RANS-Region.

Die gewünschten Profile einer voll entwickelten turbulenten Kanalströmung werden vermutlich nur mit einem deutlich längeren Kanal oder einer Periodizität in Strömungsrichtung, was den Sinn der synthetischen Turbulenzmethoden widerspricht, erreicht.

Eine größere RANS-Schicht würde vermutlich zu einer Verbesserung führen und so eine stärker ausgeprägte SA-Viskosität ermöglichen. Jedoch wird im WMLES-Modus der RANS-LES-Übergang mit der geometrischen Stufenfunktion  $f_B$  nach Gl. (2.49) bestimmt, welche die maximale Gitterschrittweite  $\Delta_{\max}$  nach Gl. (2.30) verwendet. Da das Rechengitter die großen turbulenten Wirbelstrukturen auflösen muss, sollte eine entsprechende Anpassung der synthetischen Turbulenzmethoden vorgenommen werden. Ein Ausschalten der synthetischen Turbulenz im wandnahen RANS-Bereich kann beispielsweise mit einem größeren Einfluss der van Driest'schen Dämpfungsfunktion nach Gl. (2.32) oder auf Grundlage der bereits vorhandenen IDDES-Funktionen erfolgen.

### 4.2.3 Sensitivitätsstudie

Um die geschilderten Unstimmigkeiten zu untersuchen, wird im Folgenden auf die Wirksamkeiten und Sensitivitäten der synthetischen Turbulenzmethoden eingegangen. Als Referenz dient die zuvor dargestellte IDDES-Rechnung I-iso und die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51]. Die entsprechenden Variationen sind in Tab. 4.2 aufgelistet.

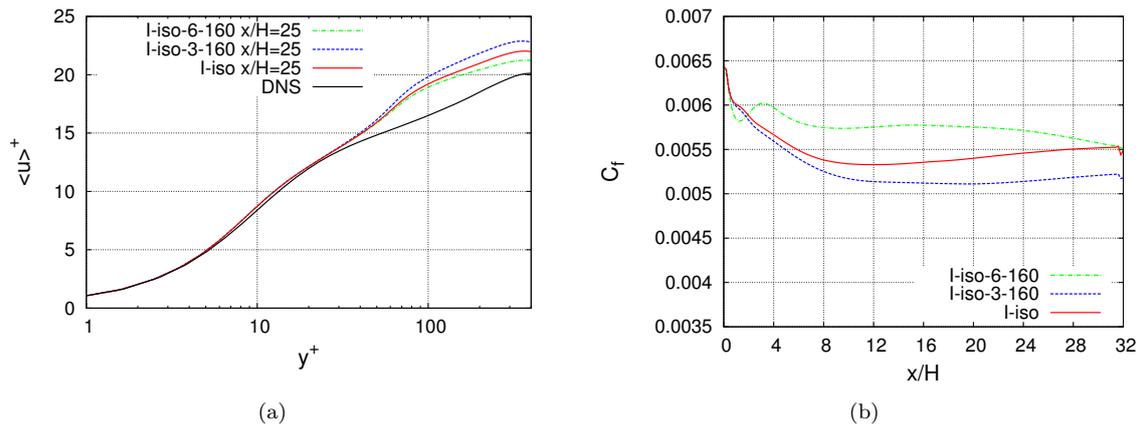
#### Einfluss der Dämpfungszone und der numerischen Dissipation

Wie bereits erwähnt, kann die künstliche Dissipation einen entscheidenden Einfluss auf die Genauigkeit der skalen-auflösenden Simulationen haben. Um dies zu bewerten, werden neben der Referenz-Rechnung I-iso, mit der hier allgemein verwendeten numerischen Dissipation  $\kappa^{(4)} = 1/256$ , zwei weitere Rechnungen mit etwa größerer künstlicher Dissipation ( $\kappa^{(4)} = 1/160$ ) durchgeführt.

Des Weiteren wird die Wirkungsweite  $W_E$  der Dämpfungszone nach Gl. (2.81) am Eintritt variiert. Neben der hier verwendeten Wirkungsweite  $W_E/H = 3$  wird zusätzlich eine größere Wirkungsweite mit  $W_E/H = 6$  vorgegeben. Die entsprechenden Auswirkungen sind in Abb. 4.12 zusammengefasst.

Abb. 4.12 (a) zeigt die Geschwindigkeitsprofile der jeweiligen Rechnungen. Wie zuvor geschildert, ergeben sich deutliche Unterschiede zur DNS, wobei die unterschiedliche Dissipation nur leichte Änderungen bewirkt. Anhand des Reibungsbeiwerts  $C_f$  ist jedoch ein deutlicher Einfluss der numerischen Dissipation zu beobachten, siehe Abb. 4.12 (b). Die etwas größere künstliche Dissipation ( $\kappa^{(4)} = 1/160$ ) ruft einen kleineren  $C_f$ -Wert hervor. Dieser steigt zum Ende des Kanals ebenfalls leicht an, was bei der IDDES auf die langsame Entwicklung der RANS-Schicht hindeutet.

Die größere Dämpfungszone mit  $W_E/H = 6$  bewirkt einen flacheren  $C_f$ -Abfall, wobei der Verlauf innerhalb der Dämpfungszone deutlich schwankt. Die  $C_f$ -Werte sind entlang des Kanals zudem deutlich größer, stimmen am Austritt mit der Referenz-IDDES I-iso jedoch wieder überein.



**Abb. 4.12:** Ausgewählte Strömungsprofile der IDDES-Sensitivitätsstudie Dissipation: (a) zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile und (b) Reibungsbeiwert  $C_f$ .

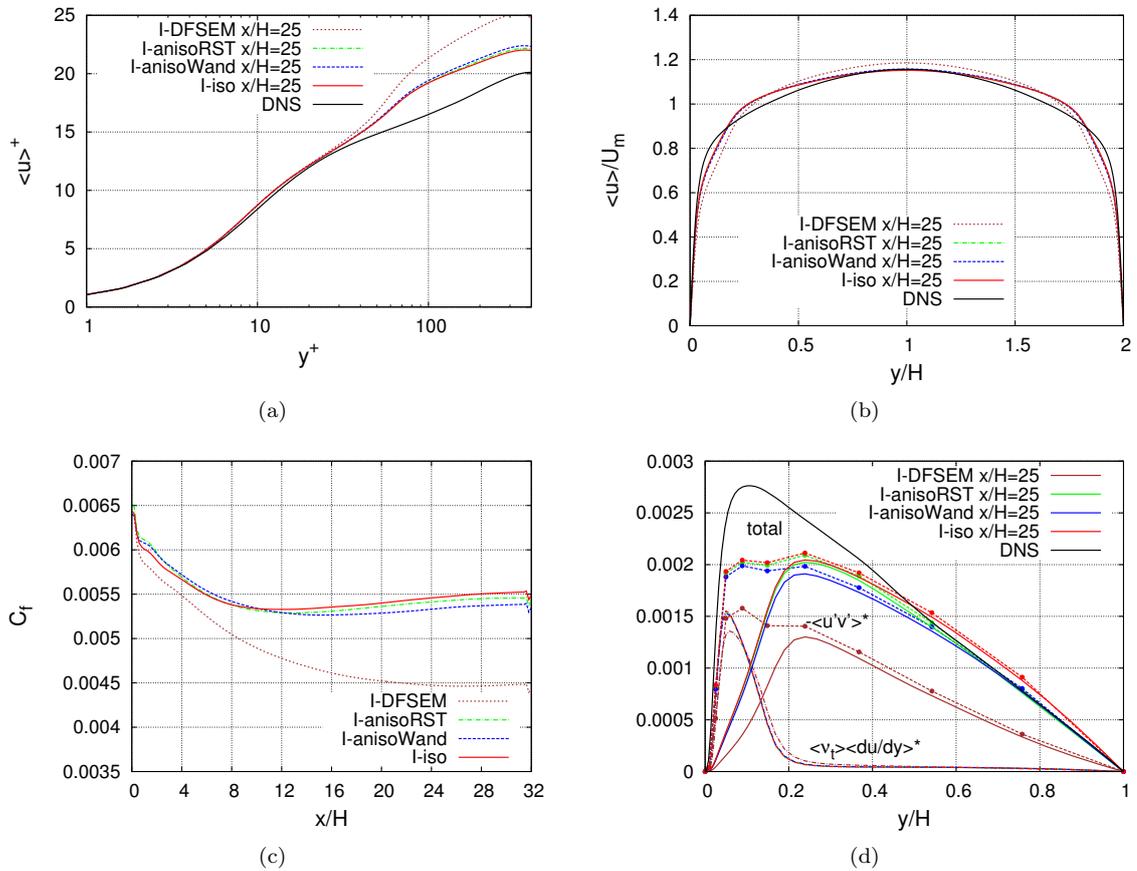
Die entsprechenden Ergebnisse belegen neben dem deutlichen Einfluss der künstlichen Dissipation auch die Notwendigkeit der korrekten Wahl der Dämpfungszone. Da die zusätzliche Dämpfung das Turbulenzverhalten deutlich beeinflusst, muss die Wirkungsweite  $W_E$  der Dämpfungszone so klein wie möglich gewählt werden, ohne die Minimierung der Druck- und Dichtestörungen zu beeinträchtigen. Ein ähnliches Verhalten wurde bei LES-Rechnungen beobachtet (hier nicht gezeigt), wobei eine zu große Wirkungsweite  $W_E$  eine unphysikalische Entwicklung der Turbulenz bewirkt. Neben stark erhöhten Reynoldsspannungen mussten stromab der Dämpfungszone qualitativ unrealistische Wirbelstrukturen beobachtet werden. Die vergrößerte Wirkungsweite  $W_E$  führte zu einem starken Anstieg der turbulenten kinetischen Energie, die zum Ende des Kanals jedoch deutlich abfiel.

### Einfluss des Wirbelradius $\sigma$

Neben der standardmäßigen Definition „isotrop“ nach Gl. (3.10) der SEM [37], siehe Abschnitt 3.1, können weitere Berechnungsvorschriften für den Wirbelradius  $\sigma$  verwendet werden. Da die SEM unterschiedliche Längenskalen je Raumrichtung ermöglicht, können zudem anisotrope Wirbelstrukturen nachgebildet werden. Beispielsweise schlägt ADAMIAN et al. [4] einen anisotropen Wirbelradius  $\sigma$  „anisoWand“ nach Gl. (3.20), der den Wandeinfluss berücksichtigt, vor. Sofern einzelne Reynoldsspannungen zur Verfügung stehen, kann ebenfalls die Definition „anisoRST“ nach Gl. (3.21) verwendet werden. Die zugehörigen Verläufe sind im Abschnitt Voruntersuchung in Abb. 3.8 abgebildet. Zusätzlich zu den möglichen SEM-Variationen wird eine weitere IDDES-Rechnung mit der DF-SEM, siehe Abschnitt 3.2, durchgeführt. Dabei wird ein konstanter Wirbelradius  $\sigma/H = 0.41$  verwendet. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abb. 4.13 dargestellt.

In Abb. 4.13 (a), (b) sind die Geschwindigkeitsprofile der jeweiligen Variationen abgebildet. Abgesehen von der DF-SEM ergeben sich nahezu identische Verläufe. Aufgrund der ausgeprägten RANS-Schicht haben die jeweiligen Modifikationen der wandnahen Turbulenz kaum Auswirkungen auf das mittlere Strömungsfeld, sodass sich eine unterschiedliche Definition des Wirbelradius  $\sigma$  bei der SEM in Verbindung mit einer IDDES kaum auswirkt. Die weiteren Abbildungen bestätigen ein ähnliches

Verhalten. Der Reibungsbeiwert  $C_f$  in Abb. 4.13 (c) bzw. die Gesamt-Scherspannung in Abb. 4.13 (d) zeigen nahezu gleiche Verläufe. Die Unterscheidung der jeweiligen Längskalen ist somit nur bei einer wand aufgelösten LES sinnvoll.



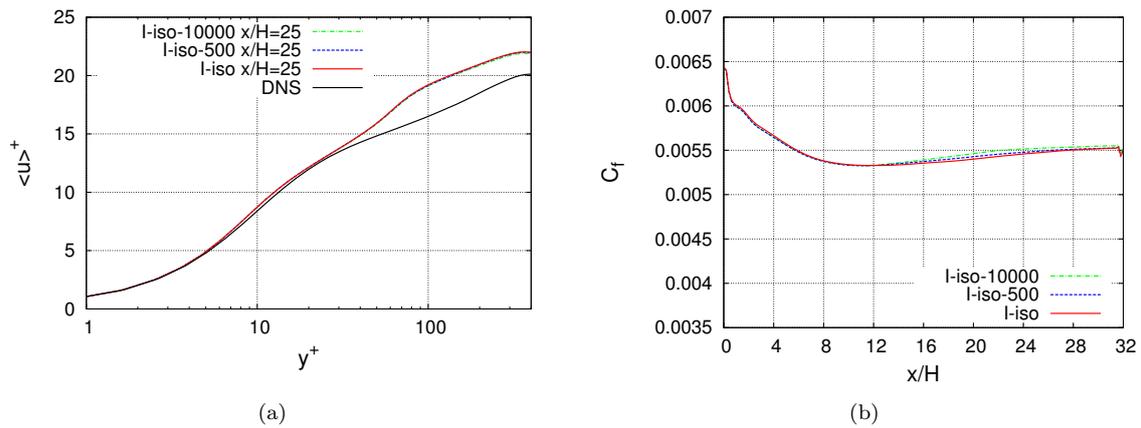
**Abb. 4.13:** Ausgewählte Strömungsprofile der IDDES-Sensitivitätsstudie Wirbelradius  $\sigma$ : (a) und (b) zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile, (c) Reibungsbeiwert  $C_f$  und (d) modellierte  $\langle \nu_t \rangle \partial \langle u \rangle / \partial y$  und aufgelöste  $-\langle u'v' \rangle$  Scherspannungen (mit  $U_m^2$  normiert).

Ein deutlich abweichendes Verhalten zeigt die DF-SEM. Aufgrund der eingeschränkten Anisotropie, siehe Abb. 3.5, wird die notwendige Erweiterung nach Gl. (3.33) verwendet. Jedoch scheint diese Umverteilung sehr unphysikalisch, sodass bei einer IDDES eine Relaminarisierung der turbulenten Strömung einsetzt. Der Reibungsbeiwert  $C_f$  in Abb. 4.13 (c) fällt deutlich ab, was die sehr viel kleinere Scherspannung in Abb. 4.13 (d) bestätigt. Der aufgelöste Anteil ist deutlich kleiner, wobei die modellierte Scherspannung ähnliche Werte wie die entsprechenden SEM-Variationen annimmt. Im Gegensatz zu einer LES, siehe POLETTO [55], ist die DF-SEM in Verbindung mit einer IDDES nicht zu empfehlen. Eine alternative Umverteilung der Spannungskomponenten kann vermutlich zu besseren Ergebnissen führen und eine Relaminarisierung der turbulenten Strömung vermeiden.

### Einfluss der Wirbelanzahl $N$

Eine weitere Variationsmöglichkeit stellt die Wirbelanzahl  $N$  dar. Die bisherigen Rechnungen verwenden eine Wirbelanzahl von  $N = 5000$ , was die Größenordnung der Schätzung nach Gl. (3.11) entspricht. Zusätzlich werden zwei weitere Rechnungen mit  $N = 500$  und  $10000$  durchgeführt. Der Vergleich ist in Abb. 4.14 dargestellt.

Die jeweiligen Darstellungen zeigen keinen Einfluss der unterschiedlichen Wirbelanzahl  $N$ . Es ergeben sich nahezu identische Strömungsverläufe, sodass die Wahl bzw. Schätzung in diesem Intervall offenbar beliebig erfolgen kann. Der Einfluss der Wirbelanzahl  $N$  ist bei einer feiner aufgelösten Simulation vermutlich größer.



**Abb. 4.14:** Ausgewählte Strömungsprofile der IDDES-Sensitivitätsstudie Wirbelanzahl  $N$ :  
(a) zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile und (b) Reibungsbeiwert  $C_f$ .

# 5 Detached-Eddy Simulation einer abgerundeten Stufenströmung

Der Ablösepunkt einer Grenzschicht bestimmt das Strömungsverhalten erheblich. Dabei wird die Grenzschichtablösung insbesondere durch die Reynoldszahl, dem Druckgradient aber auch durch die Oberflächenkrümmung signifikant beeinflusst. Scharfkantige Geometrien, wie eine rückspringende Stufe, geben den Ablösepunkt indirekt vor. Sehr viel schwieriger zu berechnen ist die Strömungsablösung an einer leicht gekrümmten Oberfläche, wie an Tragflächen- oder Turbinenschaufelprofilen. Die Ablösung hängt dort maßgeblich vom lokalen Grenzschichtprofil und dem Druckgradient ab.

Als geeignete Validierungskonfigurationen haben sich beispielsweise die Kanalströmung mit periodisch angeordneten Hügeln, siehe FRÖHLICH et al. [24], oder die Umströmung eines definierten Hindernisses an einer Wand (*wall-mounted hump*), siehe GREENBLATT et al. [30], etabliert. Eine weitere interessante Strömungskonfiguration stellt die abgerundete Stufe dar. Die Geometrie ist sehr einfach, wobei das Ablöseverhalten der Grenzschicht durch die Krümmung der Rampe definiert wird. Dieser Anwendungsfall wurde zum einen von ZHANG und ZHONG [77] experimentell und zum anderen von LARDEAU und LESCHZINER (2011) [41] bzw. BENTALEB et al. (2012) [7] numerisch untersucht.

Im Folgenden wird das Strömungsverhalten entlang dieser Geometrie analysiert. Als Referenz dient die fein aufgelöste LES (LESref) von BENTALEB et al. [7] mit 24 Mio. Gitterpunkten. Diese Arbeit basiert auf der Untersuchung von LARDEAU und LESCHZINER [41], welche mit den experimentellen Daten von ZHANG und ZHONG [77] gut übereinstimmt. Als Berechnungsansatz wird die IDDES-SA als hybride RANS-LES-Methode gewählt, siehe Abschnitt 2.4.3. Durch die Vorgabe instationärer Einlassrandbedingungen, basierend auf der SEM, wird der wand-modellierte LES-Modus (WMLES) aktiviert. Zum Vergleich dienen zudem eine reine IDDES-SA ohne synthetische Turbulenz und eine 2D-RANS-Simulation mit dem Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell, siehe Abschnitt 2.3.1.

## 5.1 Numerische Einstellungen

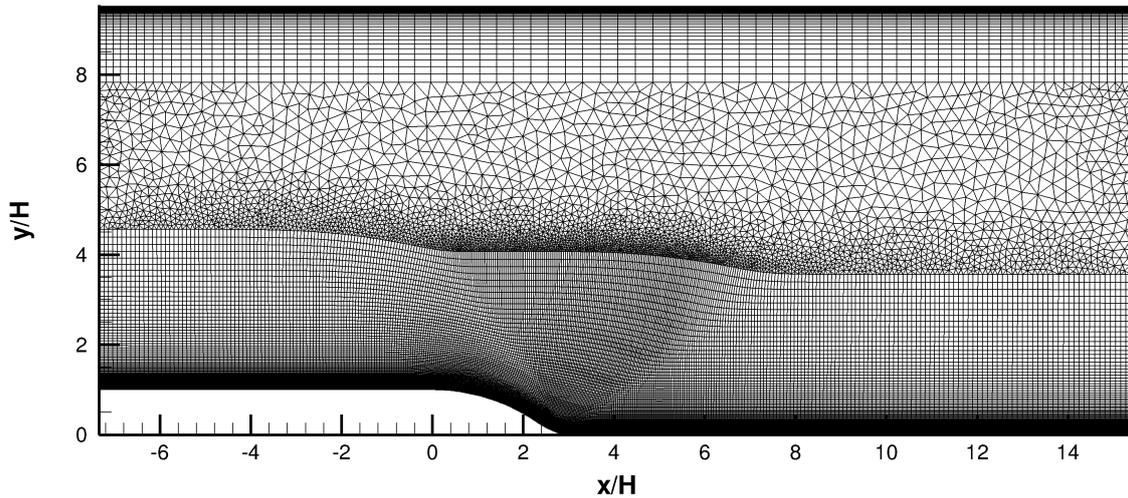
### 5.1.1 Rechengebiet

Die Geometrie der abgerundeten Stufe ist in Abb. 5.1 dargestellt. Die Höhe der Rampe  $H$  wird als Referenzlänge gewählt, sodass die Gesamthöhe des Rechengebiets stromauf der Stufe  $L_y = 8.52H$  beträgt. Die Abmessungen in Spannweite bzw. in Strömungsrichtung werden mit  $L_z = 3H$  und  $L_x = 22.84H$  festgelegt. Bis auf die spannweite Ausdehnung  $L_z$  stimmt das gewählte Rechengebiet mit der Referenz-LES von BENTALEB et al. [7] mit  $L_{z,LES} = 3.17H$  überein.

Am Einlass bei  $x/H = -7.34$  wird eine turbulente Grenzschicht mit der Dicke  $\delta_{99} = 0.8H$  vorgegeben. Die zugehörige Reynoldszahl  $Re = UH/\nu = 13700$  basiert auf der Freistrom-Geschwindigkeit  $U$  am Einlass. Die Reynoldszahl der Impulsverlustdicke des Vorgabeprofils beträgt  $Re_\theta = 1100$ . Der obere und der untere Rand werden als Wand mit Haftbedingung modelliert, wobei in Spannweite periodische Randbedingungen verwendet werden. Am Auslass ( $x/H = 15.5$ ) wird der statische Druck  $p_A = 431.55$  Pa vorgegeben. Hierzu wird die nicht-reflektierende Erweiterung von RUDY und STRIKWERDA [61] nach Gl. (2.77) verwendet. Die Stufengeometrie basiert auf der experimentellen Untersuchung von ZHANG und ZHONG [77] und ist wie folgt definiert:

$$y_S = \begin{cases} (1 - R_1) + \sqrt{R_1^2 - x^2} & 0 \leq x/H < 2.3 \\ y_2 - \sqrt{\frac{R_1^2}{4} - (x_2 - x)^2} & 2.3 \leq x/H < 2.835 \\ R_2 - \sqrt{R_2^2 - (2.937 - x)^2} & 2.835 \leq x/H < 2.937 \end{cases} \quad (5.1)$$

Der Verlauf gliedert sich in drei Bereiche, wobei die Angaben des dritten Abschnitts bei LARDEAU und LESCHZINER [41] bzw. BENTALEB et al. [7] nicht korrekt sind<sup>1</sup>. Die entsprechenden Parameter lauten:  $R_1 = 4.03H$ ,  $R_2 = 0.3176H$ ,  $x_2 = 3.449H$  und  $y_2 = 1.936H$ . Im Folgenden gilt  $y_w = y - y_S$ .



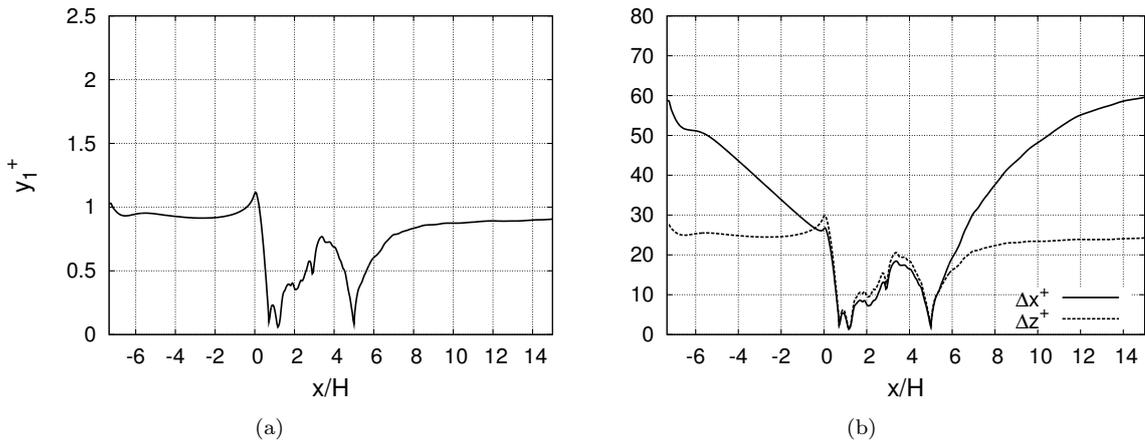
**Abb. 5.1:** Verwendetes Rechengitter mit abgerundeter Stufengeometrie. Der DLR-TAU Code ermöglicht eine hybride Gitterstruktur, sodass an den Wänden ein strukturiertes und als Übergang ein unstrukturiertes Gitter verwendet werden kann.

Das Rechengitter, siehe Abb. 5.1, verwendet eine hybride Gitterstruktur, sodass eine optimale Gitterpunktanzahl ermöglicht wird. Da die Grenzschicht der oberen Wand im reinen URANS-Modus der IDDES berechnet werden soll, kann die Diskretisierung dort deutlich gröber erfolgen. Als Übergang wird ein semistrukturiertes Prismengitter gewählt.

Der untere, feinere Block erstreckt sich über eine Höhe von etwa  $3.6H$  und besitzt mit der Diskretisierung  $350 \times 96 \times 64$  ( $N_x, N_y, N_z$ ) rund 2.1 Mio. Gitterpunkte. Die jeweiligen Gitterschrittweiten sind in Abb. 5.2 dargestellt und werden mit der lokalen Referenzlänge  $l_\tau = \nu/u_\tau$  der IDDES-SEM normiert. Aufgrund der geringen Wandreibung ergeben sich im Ablösebereich sehr kleine Werte. Der wandnächste Gitterpunkt mit  $\Delta y_1/H = 0.00175$  besitzt einen  $y^+$ -Wert kleiner Eins, siehe Abb. 5.2 (a).

<sup>1</sup>Die ursprüngliche Angabe  $y_S = R_2 - \sqrt{R_2^2 - (3 - x)^2}$  mit  $R_2 = 0.334H$  ermöglicht keinen glatten Übergang.

Dieser Wert wird für eine korrekte Berechnung der viskosen Unterschicht benötigt. Die wandnormale Gitterstreckung beträgt  $s = 1.05$ , sodass sich eine Schrittweite  $\Delta y_{end}/H = 0.171$  am oberen Rand des ersten Blockes ergibt. Aufgrund des kleinen Streckungsfaktors  $s < 1.15$  wird der flachere Anstieg der modifizierten Feinstruktur-Längenskale  $\Delta$  der IDDES, Gl. (2.47), verwendet, siehe Abb. 2.4 (a). Im Ablösebereich hinter der Stufe wird eine Art freie Scherströmung erwartet. Aufgrund dessen wird eine isotrope Diskretisierung mit  $\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z$  angestrebt. Im Bereich  $x/H = 0 \dots 5$  wird eine äquidistante Gitterschrittweite  $\Delta x/H = 0.042$  gewählt. Dieser Wert stimmt etwa mit der äquidistanten spannweitigen Schrittweite von  $\Delta z/H = 0.047$  überein. Bis zum Ein- bzw. Auslass mit  $\Delta x_E/H = 0.1$  und  $\Delta x_A/H = 0.115$  erfolgt in Strömungsrichtung ein linearer Übergang der Gitterschrittweite. Die entsprechenden normierten Größen sind in Abb. 5.2 (b) dargestellt.



**Abb. 5.2:** Verlauf der normierten Gitterschrittweiten der ersten Zellschicht entlang der unteren Wand: (a) wandnormale Komponente  $y_1^+$ , (b) Gitterschrittweite in Strömungs- und Spannweitenrichtung  $\Delta x^+$ ,  $\Delta z^+$ . Als lokale Referenzlänge wird  $l_\tau = \nu/u_\tau$  verwendet.

Der obere strukturierte Bereich kann für den reinen URANS-Bereich mit 191808 Gitterpunkten ( $81 \times 37 \times 64$ ) deutlich gröber diskretisiert werden. Als Gitterschrittweiten ergeben sich an der oberen Wand:  $\Delta y_1/H = 0.0035$  und in Strömungsrichtung der Maximalwert  $\Delta x_{max}/H = 0.38$ . Am Ein- und Auslass wird  $\Delta x_E/H = \Delta x_A/H = 0.15$  gewählt, wobei mit einer  $\tanh$ -Funktion ein kontinuierlicher Übergang erfolgt. Der wandnormale Streckungsfaktor beträgt  $s = 1.12$ . Der mittlere unstrukturierte Bereich dient als Übergangsbereich der beiden strukturierten Gitter. Dabei werden Prismen mit der zuvor erwähnten äquidistanten Spannweitendiskretisierung verwendet. Die Gitterpunktanzahl des Blockes beträgt 161319, sodass sich eine Gesamtpunktanzahl von rund 2.5 Mio. ergibt.

### 5.1.2 Berechnungsparameter

Neben der Reynoldszahl  $Re = UH/\nu = 13700$  müssen für die thermodynamische Vollständigkeit weitere Parameter vorgegeben werden. In diesem Fall wird eine Referenz-Geschwindigkeit von  $U = U_{ref} = 50$  m/s und eine Referenz-Temperatur  $T_{ref} = 298$  K des Mediums Luft gewählt. Die dynamische Viskosität  $\mu(T)$  wird nach Sutherland, Gl. (2.6), berechnet, sodass sich die Referenz-Dichte  $\rho_{ref} = 5.034 \cdot 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup> und der Referenz-Druck  $p_{ref} = 430.54$  Pa ergeben. Die entsprechende Machzahl der Strömung beträgt  $Ma = 0.144$ .

Für die räumliche Diskretisierung wird das zentrale Schema mit künstlicher Dissipation gewählt. Dabei wird die Matrix-Dissipation mit einem Dämpfungsterm 4. Ordnung  $\kappa^{(4)} = 1/160$  verwendet, siehe Abschnitt 2.5.1. Die konvektiven Terme werden wieder mit der schief-symmetrischen Form nach Gl. (2.65) diskretisiert. Für die zeitliche Integration wird das duale Zeitschrittverfahren nach JAMESON [33] genutzt. Als physikalische Zeitschrittweite wird  $\Delta t = 0.0003$  s gewählt, sodass sich eine dimensionslose Zeitschrittweite von  $\Delta t^* = 0.015H/U$  ergibt. Die entsprechende konvektive CFL-Zahl beträgt im Ablösebereich etwa  $CFL = 0.35$ . Die zeitliche Integration der Pseudo-Zeit  $\tau$  erfolgt mit einem expliziten dreistufigen Runge-Kutta Verfahren und einer Anzahl innerer Iterationsschritte von  $N_{Iter} = 100$ , siehe Abschnitt 2.5.2.

Die zeitliche Mittelung erfolgt nach zwei Durchströmperioden mit  $T_P = 0.4568$  s bzw.  $T_P^* = 22.84H/U$ . Die Mittelungsdauer der Statistiken 2. Ordnung beträgt  $T_m = 14T_P = 320H/U$ , wobei der Mittelungsbeginn der Statistiken 1. Ordnung bereits  $70H/U$  früher erfolgte.

Aufgrund der nahezu inkompressiblen Strömung wird die Präkonditionierung mit dem *cut-off*-Parameter  $K = 1.5$  verwendet, siehe Abschnitt 2.5.3. Auf konvergenzbeschleunigende Verfahren, wie das Mehrgitter-Verfahren, wird verzichtet.

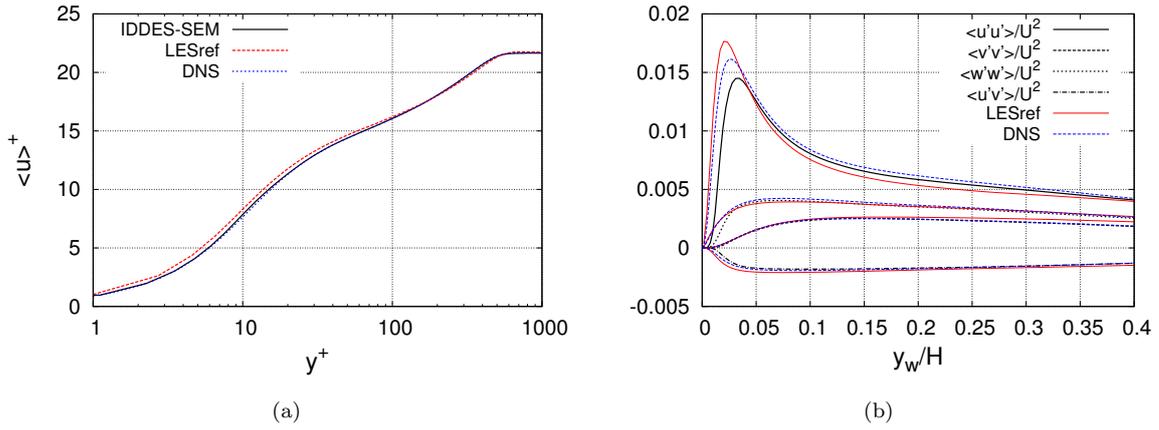
Die IDDES als hybride RANS-LES-Methode, siehe Abschnitt 2.4.3, verwendet als Hintergrund-Turbulenzmodell das Spalart-Allmaras-Modell (SA), siehe Abschnitt 2.3.1. Dabei wird die modifizierte Feinstruktur-Längenskale  $\Delta$  nach Gl. (2.47) mit dem DES-Modellparameter  $C_{DES} = 0.65$  genutzt.

### 5.1.3 Einlass-Randbedingungen

Wie bereits erwähnt, wird am Einlass ( $x/H = -7.34$ ) an der oberen und unteren Wand eine turbulente Grenzschicht mit der Grenzschichtdicke  $\delta_{99} = 0.8H$  vorgegeben. Die Daten des Grenzschichtprofils stammen aus einer Direkten Numerischen Simulation (DNS) einer ebenen turbulenten Plattengrenzschicht von JIMENEZ et al. (2010) [38] mit  $Re_\theta = 1100$ . BENTALEB et al. [7] nutzt für seine LES-Rechnung (LESref) eine Precursor-Simulation, siehe Abb. 3.1, wobei dessen Grenzschichtprofil mit  $Re_\theta = 1190$  gut mit der DNS übereinstimmt. Der entsprechende Vergleich erfolgt in [7] bzw. [41].

Das Geschwindigkeits-Grenzschichtprofil der DNS wird für die folgenden Simulationen als Dirichlet-Randbedingung vorgegeben. Da für die obere Wand der IDDES-SEM, der reinen IDDES-SA und der 2D-RANS-Rechnung ebenfalls die SA-Viskosität  $\tilde{\nu}$ , siehe Abschnitt 2.3.1, benötigt wird, wird eine zusätzliche 2D-RANS-Hilfssimulation einer ebenen Plattenströmung durchgeführt. Das resultierende SA-Viskositätsprofil bei  $Re_\theta = 1100$  wird ebenfalls als Dirichlet-Randbedingung vorgegeben.

Mit Hilfe der SEM, siehe Abschnitt 3.1, werden für die IDDES-SEM instationäre turbulente Einlass-Randbedingungen synthetisch erzeugt. Wie bereits in der Voruntersuchung gezeigt, siehe Abschnitt 3.3, ist die SEM in der Lage die vorgegebene Reynoldsspannungsverteilung nahezu exakt nachzubilden. Aufgrund der zuvor beschriebenen Druckstörungen direkt an der Wand, siehe Abschnitt 4.1.3, wird mit Hilfe einer zusätzlichen van Driest'schen Dämpfungsfunktion mit  $A^+ = 10$  nach Gl. (2.32) versucht, diese unphysikalischen Effekte zu minimieren. Die zeitlich gemittelte Reynoldsspannungsverteilung wird entsprechend beeinflusst. Die zugehörigen Diagramme sind in Abb. 5.3 dargestellt.



**Abb. 5.3:** Grenzschichtprofile am Einlass  $x/H = -7.34$ . Die SEM bildet die Statistiken der DNS [38] nach, wobei die Dämpfungsfunktion mit  $A^+ = 10$ , Gl. (2.32), die Reynoldsspannungen direkt an der Wand leicht beeinflusst.

Die SEM ist bei der IDDES-SEM ausschließlich an der unteren Wand aktiv, wobei die SA-Viskositätsrandbedingung dort deutlich herabgesetzt wird. Der Maximalwert des Profils ( $\nu_t/\nu \approx 1$ ) entspricht etwa dem mittleren Viskositätsverhältnis stromauf der Stufe. Die nach Gl. (3.11) abgeschätzte Wirbelkernanzahl  $N = 9199$  wird in einen Quader mit der Höhe  $3H$  am Eintritt zufällig erzeugt. Dabei wird die Periodizität in Spannweite berücksichtigt, siehe Abb. 3.3 (b). Auf die vorgeschlagene Wandrandbehandlung der Wirbelverteilung, siehe Abb. 3.3 (a), wird verzichtet. Der Wirbelradius  $\sigma$  wird mit der üblichen isotropen Definition nach Gl. (3.10) der SEM abgeschätzt.

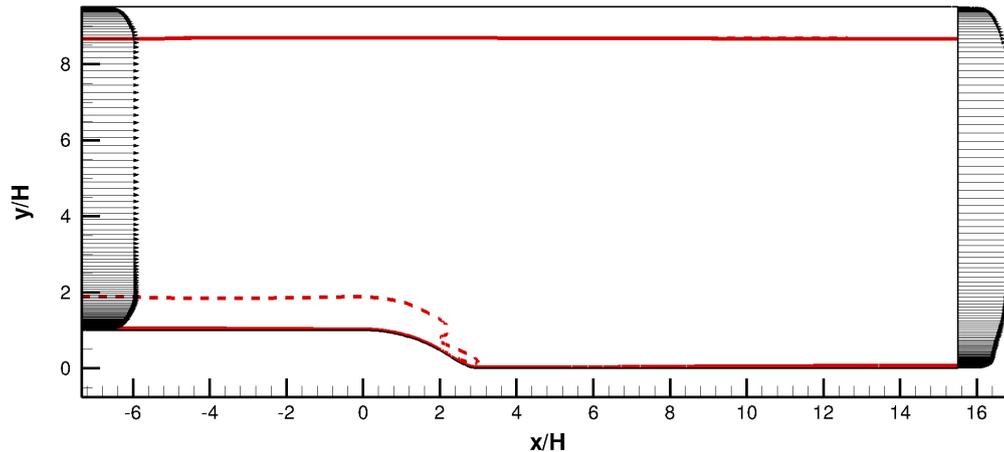
Um den Einfluss der unnatürlichen Druckfluktuationen am Eintritt aufgrund der divergenzbehafteten SEM zu minimieren, wird eine Dämpfungszone mit der Länge  $W_E/H = 2$  und einer maximalen Dämpfung  $\sigma_{\max,E}^d = 10$  eingeführt. Die entsprechenden Dämpfungsterme nach Gl. (2.81) sind ausschließlich in der Kontinuitäts- und Energiegleichung aktiv. Als Referenzwerte werden die Umgebungsgrößen  $\rho_{ref}$  und  $p_{ref}$  verwendet. Auf eine Dämpfungszone am Auslass wird verzichtet.

## 5.2 Auswertung

### 5.2.1 Zeitlich gemittelte Strömung

Die zeitliche Mittelung der statistisch zweidimensionalen Strömung erfolgt über einen Zeitraum von  $T_m = 14T_P = 320H/U$  mit der Durchströmperiode  $T_P = 0.4568$  s bzw.  $T_P^* = 22.84H/U$ . Um die statistische Konvergenz zu beschleunigen, wird zusätzlich in Spannweitenrichtung gemittelt.

In Abb. 5.4 ist das Geschwindigkeitsprofil am Ein- und Austritt des Rechengebiets schematisch dargestellt. Das Geschwindigkeitsprofil am Eintritt entspricht dem DNS-Profil, wobei am Austritt infolge der Stufe eine Aufdickung der Grenzschicht zu beobachten ist. Zusätzlich werden die Isolinien der empirischen Umschaltfunktion  $\tilde{f}_d = 0.5$  der IDDES-SEM (durchgezogen) und des IDDES-SA (gestrichelt) rot dargestellt. Im Wandbereich ist der reine RANS-Modus ( $\tilde{f}_d = 1$ ) und im äußeren Bereich der LES-ähnliche Modus des IDDES ( $\tilde{f}_d = 0$ ) aktiv.



**Abb. 5.4:** Schematische Darstellung der Geschwindigkeitsprofile am Ein- und Auslass des Rechengebiets. Zusätzlich werden die Isolinien (rot) der empirischen Umschaltfunktion  $\tilde{f}_d = 0.5$  des RANS-LES-Übergangs dargestellt: IDDES-SEM (durchgezogen), IDDES-SA (gestrichelt).

Wie erwünscht, wird die obere Grenzschicht beider Simulationen im RANS-Modus berechnet. Der RANS-LES-Übergang erfolgt am Eintritt bei einem Wandabstand  $d_w/H \approx \delta_{99}$ , wobei am Austritt ein typisches Fehlverhalten der DDES-Funktionen zu beobachten ist. Der Druckanstieg wird nicht berücksichtigt, siehe PROBST [59].

An der unteren Wand ist der Einfluss der SEM zu beobachten. Aufgrund der turbulenten Einlass-Randbedingungen der IDDES-SEM wird direkt am Eintritt der wand-modellierte LES-Modus (WMLES) nach Gl. (2.48) aktiviert. Der RANS-LES-Übergang basiert auf der geometrischen Stufenfunktion  $f_B$  nach Gl. (2.49), siehe Abb. 2.4 (b), und ist aufgrund der geringen Gitterweite  $\Delta_{\max} = \Delta_x$  kaum auszumachen. Der RANS-LES-Übergang erfolgt an der unteren Wand bei etwa  $d_w \approx \Delta_x/2 \approx 0.04H$ . Da die IDDES-SA keine turbulenten Fluktuationen am Eintritt aufweist, wird die gesamte Grenzschicht vor dessen Ablösung an der gekrümmten Stufe im ursprünglichen DDES-Modus berechnet. Der RANS-LES-Übergang der IDDES-SA erfolgt bei  $d_w/H \approx \delta_{99}$ . Erst stromab der Grenzschichtablösung schaltet das Modell in den WMLES-Modus um, wobei der lang gestreckte RANS-LES-Übergang in Strömungsrichtung den Großteil der Stufenkontur erfasst. Erst ab dem Fußpunkt der Stufe ( $x/H = 3$ ) ergibt sich der vollständige WMLES-Modus.

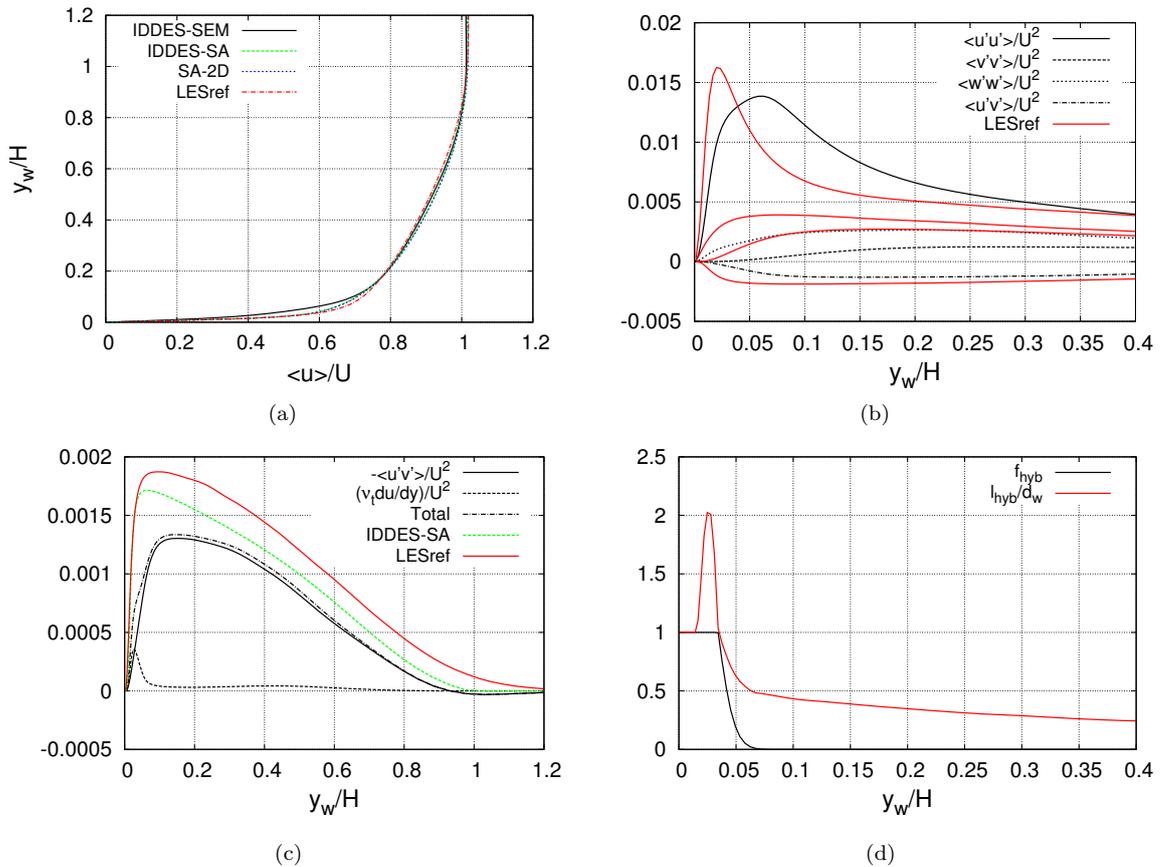
### Grenzschichtprofil stromauf der Stufe

Ausschlaggebend für eine realistische Vorhersage der Strömungsablösung an der gekrümmten Stufenkontur ist das stromauf befindliche Grenzschichtprofil. Die Wandreibung und damit der wandnahe Gradient des Geschwindigkeitsprofils sind für die Ablösung entscheidend. In Abb. 5.5 sind die jeweiligen Grenzschichtprofile der Simulationen stromauf der Stufenkontur bei  $x/H = -2$  dargestellt.

Die Geschwindigkeitsprofile in Abb. 5.5 (a) stimmen mit der Referenz-LES sehr gut überein. Lediglich die IDDES-SEM weist im wandnahen Bereich einen kleineren Anstieg der  $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeitskom-

ponente auf, sodass sich eine geringere Wandreibung ergibt, vergleiche mit  $C_f$ -Verlauf in Abb. 5.8. Des Weiteren sind in Abb. 5.5 (b) die jeweiligen aufgelösten Reynoldsspannungskomponenten der IDDES-SEM abgebildet. Da sich die IDDES-SA noch im RANS-Modus befindet, werden daher keine Geschwindigkeitsfluktuationen aufgelöst.

In den Reynoldsspannungen sind starke Abweichungen zur Referenz-LES sichtbar. Die IDDES-SEM ist nicht in der Lage eine ähnliche Spannungsverteilung zu erzeugen, wobei in Abb. 5.5 (d) die dünne, wandnahe RANS-Schicht mit  $f_{hyb} = \tilde{f}_d = 1$  nach Gl. (2.55) zu beachten ist. Die  $\langle u'v' \rangle$ -Komponente ist oberhalb der RANS-Schicht stark ausgeprägt, während die übrigen Normalkomponenten  $\langle v'v' \rangle$  und  $\langle w'w' \rangle$  deutlich unterschätzt werden. Dieses Verhalten wurde bereits bei der Kanaluntersuchung, siehe Abschnitt 4.2.2, beobachtet. Neben der relativ kurzen Entwicklungslänge wird ein Einfluss der numerischen Dissipation vermutet.



**Abb. 5.5:** Grenzschichtprofile (a) stromauf der Stufe  $x/H = -2$ . Aufgelöste Reynoldsspannungen der IDDES-SEM (b) werden mit der Referenz-LES [7] verglichen. Die wirksame Scherspannung der IDDES (c) setzt sich aus aufgelösten  $-\langle u'v' \rangle$  und modellierten  $\langle \nu_t \rangle \partial \langle u \rangle / \partial y$  Anteilen zusammen, wobei in (d) die IDDES-Funktionen abgebildet sind.

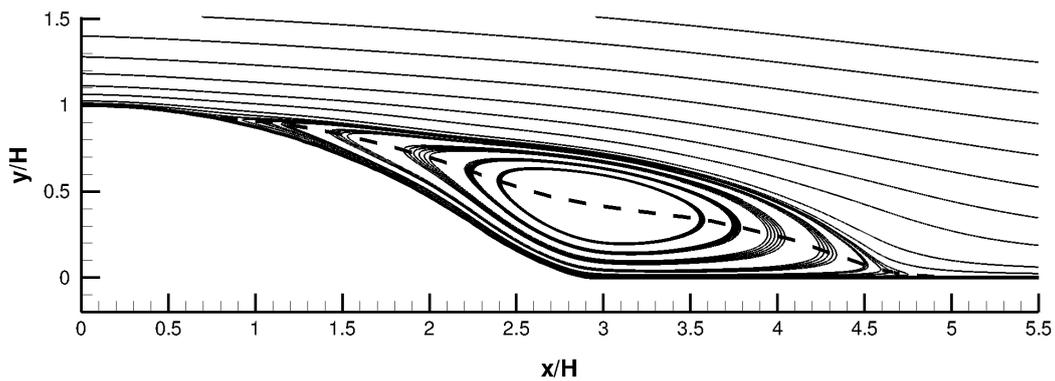
In Abb. 5.5 (c) ist die wichtige Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  der IDDES-SEM vergrößert abgebildet. Da sich die wirksame Scherspannung der IDDES-SEM aus einem aufgelösten und modellierten Anteil zusammensetzt, werden die jeweiligen Komponenten separat dargestellt. Aufgrund der kleinen RANS-Schicht ist der modellierte Anteil  $\langle \nu_t \rangle \partial \langle u \rangle / \partial y$  gegenüber der Gesamtspannung gering. Das wandnahe Defizit der wirksamen Scherspannung stimmt mit dem kleineren Anstieg des Geschwindigkeitsprofils überein. Der Vollständigkeit halber wird die ausschließlich modellierte Scherspannung

der IDDES-SA mit abgebildet. Diese stimmt mit der Referenz-LES qualitativ besser überein.

In Abb. 5.5 (d) ist neben der hybriden RANS-LES-Übergangsfunktion  $f_{hyb} = \tilde{f}_d$  nach Gl. (2.55) die modifizierte Längenskale der IDDES  $l_{hyb}$  nach Gl. (2.54) dargestellt. Aufgrund der turbulenten Anströmung befindet sich die IDDES-SEM im WMLES-Modus, sodass der RANS-LES-Übergang durch die geometrische Stufenfunktion  $f_B$  nach Gl. (2.49) bestimmt wird. Die ursprüngliche turbulente Längenskale des SA-Modells, der Wandabstand  $d_w$ , wird mit der hybriden Längenskale  $l_{hyb}$  ersetzt. Direkt am RANS-LES-Übergang bei  $y_w/H \approx 0.04$  kommt es zu einem starken Anstieg der turbulenten Längenskale. Die somit reduzierte Dissipation  $D$  des SA-RANS-Modells nach Gl. (2.38) verhindert laut TRAVIN et al. [75] den unerwünschten starken Abfall der turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$ . Diese Modifikation soll den bekannten *Log-Layer Mismatch* (LLM) [68] der ursprünglichen DDES, siehe Abschnitt 2.4.2, verhindern.

Die deutlich kleinere Längenskale des LES-ähnlichen Modus  $y_w/H > 0.05$  erwirkt eine höhere Dissipation der turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$  und ermöglicht damit ein Auflösen der Geschwindigkeitsfluktuationen. Die hybride Längenskale nähert sich im wandfernen Bereich den Wert  $l_{hyb}/d_w \approx 0.3$ .

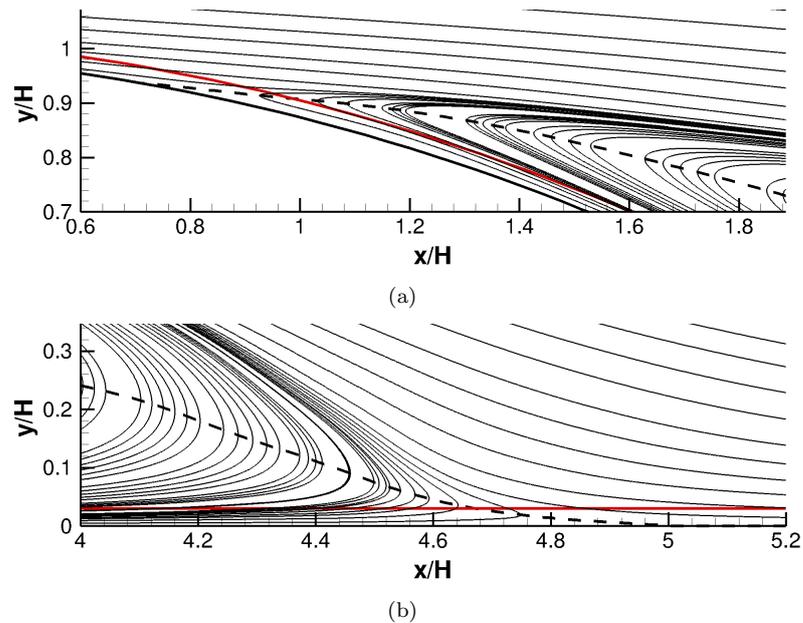
### Stromlinienkontur der Ablöseblase



**Abb. 5.6:** Stromlinien stellen das zeitlich gemittelte Rezirkulationsgebiet der IDDES-SEM dar. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die Isolinie der  $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeit ( $\langle u \rangle = 0$ ).

Mit Hilfe von Stromlinien wird in Abb. 5.6 das zeitlich gemittelte Rezirkulationsgebiet der IDDES-SEM dargestellt. Das mittlere Strömungsfeld passt sich der abgerundeten Stufenkontur an, wobei die Ablösung bzw. das Anlegen der Grenzschicht unter einem sehr flachen Winkel erfolgt, siehe Abb. 5.7. Dabei kennzeichnet die gestrichelte Linie die Kurve der verschwindenden Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung mit  $\langle u \rangle = 0$ . Mit Hilfe des gemittelten Reibungsbeiwerts  $C_f$  kann der Ablösepunkt bei  $x/H = 0.72$  und der Anlegepunkt bei  $x/H = 4.99$  abgelesen werden, siehe Abb. 5.8. Die entsprechenden LES-Referenzwerte lauten  $x/H = 0.83$  und  $x/H = 4.36$ .

Eine vergrößerte Ansicht der markanten Gebiete zeigt Abb. 5.7, wobei zusätzlich der RANS-LES-Übergang ( $\tilde{f}_d = 0.5$ ) eingezeichnet ist. Aufgrund der sehr flachen Rezirkulationszone am Anlegepunkt, siehe Abb. 5.7 (b), wird ein starker Einfluss der Mittelungsdauer vermutet. Eine statistisch konvergente Lösung wird nur mit großem Aufwand erreicht. Ein qualitativer Vergleich der Geschwindigkeitsprofile entlang der Ablöseblase erfolgt weiter unten.



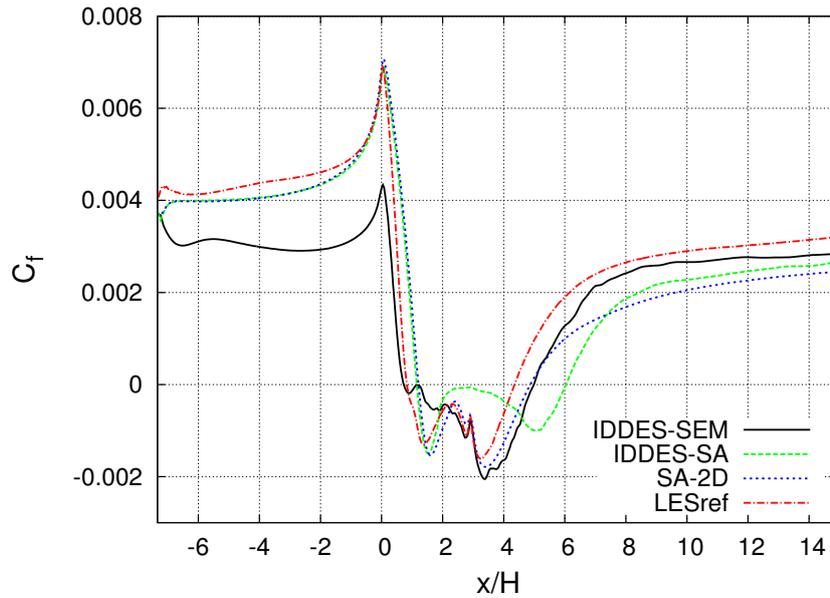
**Abb. 5.7:** Vergrößerte Ansicht der Stromlinienkontur am Ablösepunkt  $x/H = 0.72$  (a) und am Anlegepunkt  $x/H = 4.99$  (b) der IDDES-SEM-Grenzschicht. Die rote Linie ( $\tilde{f}_d = 0.5$ ) kennzeichnet den RANS-LES-Übergang bei  $d_w/H \approx 0.04$ .

### Reibungsbeiwert $C_f$

Der Reibungsbeiwert  $C_f = 2\tau_w/(\rho U^2)$  in Abb. 5.8 zeigt den Einfluss der unterschiedlichen Simulationsansätze. Das vorgegebene Geschwindigkeitsprofil am Einlass liefert einen ähnlichen  $C_f$ -Wert wie die LES. Der Sprung im  $C_f$ -Verlauf direkt am Eintritt ergibt sich vermutlich aufgrund einer Unstimmigkeit zwischen dem DNS-Geschwindigkeitsprofil und der SA-RANS-Viskosität. Stromab behalten die SA-2D-Simulation und die IDDES-SA ohne turbulente Fluktuationen das vorgegebene  $C_f$ -Niveau bei, wobei der Reibungsbeiwert der IDDES-SEM deutlich abfällt. Dieser Effekt wurde bereits bei der turbulenten Kanalströmung, siehe Abschnitt 4.2, beobachtet.

Bei synthetisch erzeugten Fluktuationen und einer sehr dünnen RANS-Schicht ergibt sich stromauf der Stufe ein zu geringes  $C_f$ -Niveau. Eine vollständige physikalische Entwicklung der wandnahen Turbulenz, siehe Abb. 5.5 (b), bzw. ein Anstieg des  $C_f$ -Wertes bleibt infolge der begrenzten Lauflänge aus. Die beginnende Umlenkung der Strömung bei  $x/H = 0$  führt zu einem starken Anstieg des  $C_f$ -Wertes, was auf die Beschleunigung der Strömung bzw. den negativen Druckgradienten  $\partial p/\partial x < 0$  in diesem Bereich, siehe Abb. 5.9, zurückzuführen ist. Die RANS- und LES-Ergebnisse liefern den gleichen Maximalwert. Die divergente Geometrie der abgerundeten Stufenkontur verzögert die Strömungsgeschwindigkeit so sehr, dass sich ein steiler Abfall des Reibungsbeiwerts ergibt. Die Grenzschichtablösung ist mit dem Reibungsbeiwert  $C_f = 0$  gekennzeichnet. Die entsprechenden Werte sind in Tab. 5.1 aufgelistet.

Die IDDES-SEM liefert recht ähnliche Ergebnisse wie die LES. Aufgrund des kleineren Reibungsbeiwerts stromauf der Stufe neigt das Grenzschichtprofil jedoch zur frühzeitigen Ablösung. Die 2D-RANS-Simulation bzw. die IDDES-SA im RANS-Modus lösen erst deutlich später ab, was bei leicht gekrümmten Oberflächen für das SA-RANS-Modell zu erwarten war.



**Abb. 5.8:** Zeitlich gemittelte Verteilung des Reibungsbeiwerts  $C_f$  entlang der unteren Wand.

Das Rezirkulationsgebiet liefert negative  $C_f$ -Werte, die am Ende der Stufenkontur ( $x/H = 3$ ) von den verschiedenen Berechnungsansätzen korrekt wiedergegeben werden. Der späte RANS-LES-Übergang der IDDES-SA verursacht jedoch deutliche Abweichungen. Der anschließende Anstieg des Reibungsbeiwerts signalisiert das Schließen der Ablöseblase mit dem Wiederanlegepunkt bei  $C_f = 0$ . Die deutlich feiner aufgelöste LES liefert einen früheren Anstieg des Reibungsbeiwerts, sodass sich im zeitlichen Mittel die Ablöseblase bereits weiter stromauf schließt. Alle durchgeführten RANS- und IDDES-Simulationen liefern demgegenüber ähnlich stark verzögerte Anlegepositionen, wobei die Grenzschicht der IDDES-SA besonders spät anlegt, siehe Tab. 5.1. Der allmähliche Übergang von modellierter zu aufgelöster Turbulenz ruft deutliche Abweichungen hervor, was bei dieser globalen hybriden RANS / LES-Modellierung jedoch bekannt ist, siehe *grey area* [68].

Aufgrund des sehr flachen Anlegewinkels um  $10^\circ$ , siehe Abb. 5.7 (b), müssen zudem mögliche Ungenauigkeiten, wie Mittelungsdauer oder Turbulenzmodellierung, berücksichtigt werden.

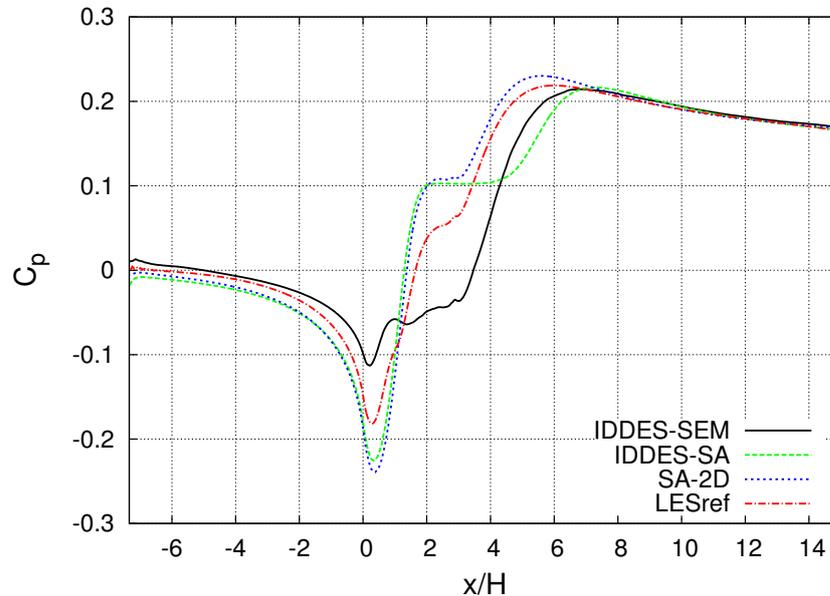
Der nahezu konstante Reibungsbeiwert stromab der Ablöseblase deutet auf ein entwickeltes Geschwindigkeitsprofil hin. Beide IDDES-Rechnungen liefern bessere Übereinstimmung mit der LES als die 2D-RANS-Simulation. Aufgrund der ähnlich ausgeprägten Turbulenz laufen die beiden IDDES-Ergebnisse zum Kanalende hin zusammen.

**Tab. 5.1:** Überblick der jeweiligen Ablöse- bzw. Anlegepunkte der Grenzschicht.

Simulation	Ablösepunkt $x/H$	Anlegepunkt $x/H$
IDDES-SEM	0.72	4.99
IDDES-SA	1.15	6.04
SA-2D	1.21	4.87
LESref	0.83	4.36

### Statischer Druckbeiwert $C_p$

Eine weitere charakteristische Kenngröße ist der statische Druckbeiwert  $C_p = 2(p - p_{ref})/(\rho U^2)$ . In Abb. 5.9 ist der entsprechende Verlauf entlang der unteren Wand dargestellt. Während der Reibungsbeiwert  $C_f$ , siehe Abb. 5.8, das Strömungsverhalten direkt an der Wand beschreibt, kennzeichnet der Druckbeiwert deren Einfluss auf die Strömung außerhalb der Grenzschicht.



**Abb. 5.9:** Zeitlich gemittelte Verteilung des statischen Druckbeiwerts  $C_p$  entlang der unteren Wand.

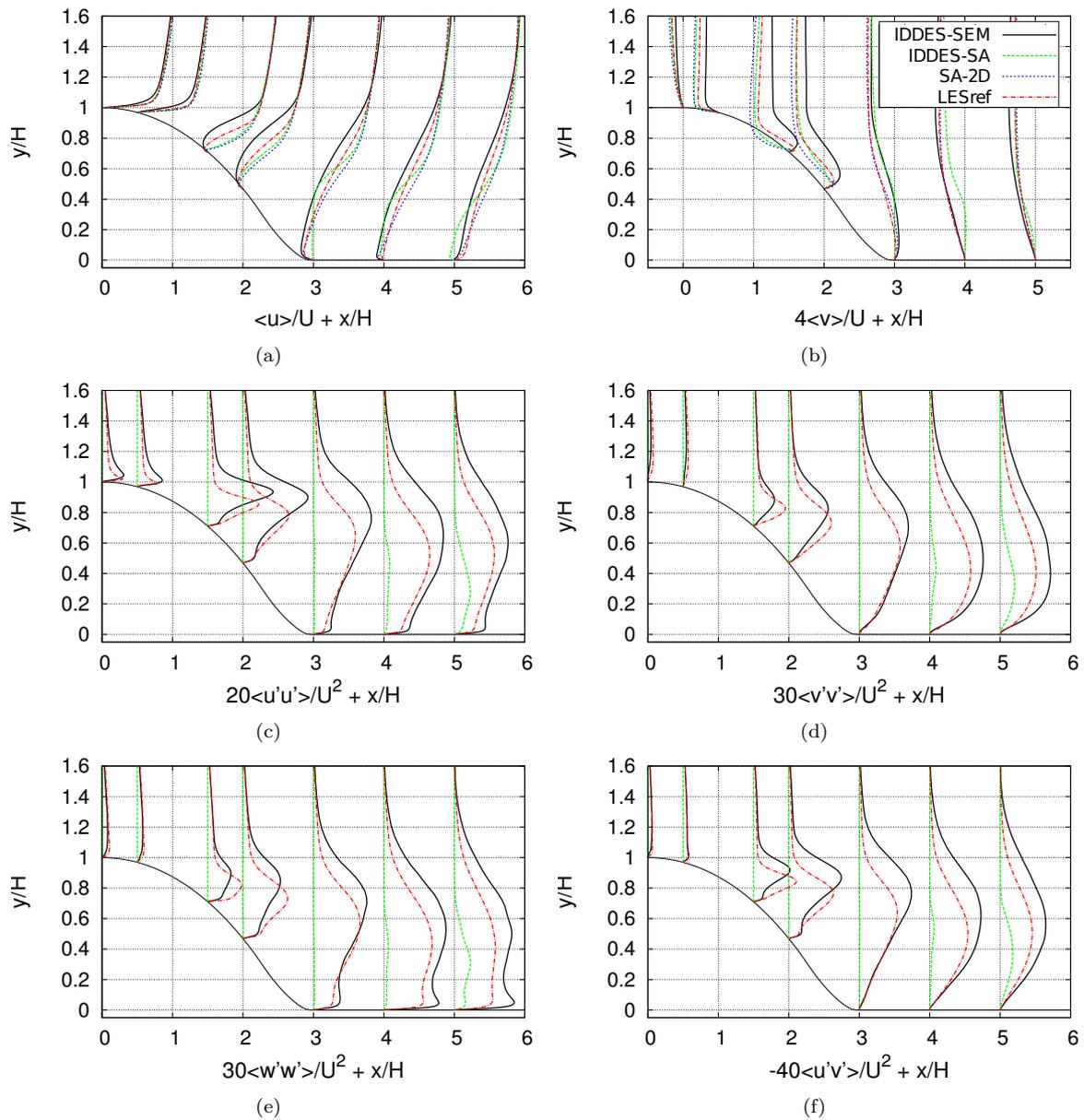
Da am Einlass ( $x/H = -7.34$ ) der Referenz-Druck  $p_{ref}$  anliegt, ergibt sich ein Druckbeiwert nahe Null. Der etwas erhöhte Wert der IDDES-SEM wird durch die unphysikalischen Druckfluktuationen direkt an der Wand und der zusätzlichen Dämpfungszone hervorgerufen, siehe Abschnitt 4.1.3. Die bereits erwähnte Beschleunigung der Strömung ist durch einen Druckabfall gekennzeichnet. Der Minimaldruck wird zu Beginn der Stufenkontur erreicht, fällt jedoch je nach Rechnung unterschiedlich aus. Die anschließende Ablöseblase führt zu einem steilen Druckanstieg, wobei in der Mitte der Blase ein für Ablösungen charakteristisches Druckplateau auszumachen ist. Aufgrund der unterschiedlich ausgeprägten Rezirkulationszone, siehe Abb. 5.10 (a) bzw. Abb. 5.11, ergibt sich je nach Rechnung ein anderes Druckplateau. Je größer die Rezirkulationszone in  $y$ -Richtung, desto niedriger fällt das konstante Druckniveau des Plateaus aus.

Am Wiederanlegepunkt weisen die IDDES-Rechnungen ebenfalls deutliche Unterschiede auf. Ein gemeinsames  $C_p$ -Niveau wird erst weiter stromab erreicht. Dieser Sachverhalt kennzeichnet zudem die korrekt eingestellte Druck-Randbedingung am Auslass ( $x/H = 15.5$ ).

### Geschwindigkeits- und Reynoldsspannungsprofile

Ein detaillierter Vergleich der Simulationsergebnisse wird mit ausgewählten Strömungsprofilen entlang der Ablöseblase ermöglicht. In Abb. 5.10 sind die gemittelten Geschwindigkeits- und Reynolds-

spannungskomponenten dargestellt. Die Positionen zeigen die Grenzschicht im anliegenden ( $x/H = 0$  und  $0.5$ ), im abgelösten ( $x/H = 1.5, 2, 3$  und  $4$ ) und im wieder angelegten Zustand ( $x/H = 5$ ).

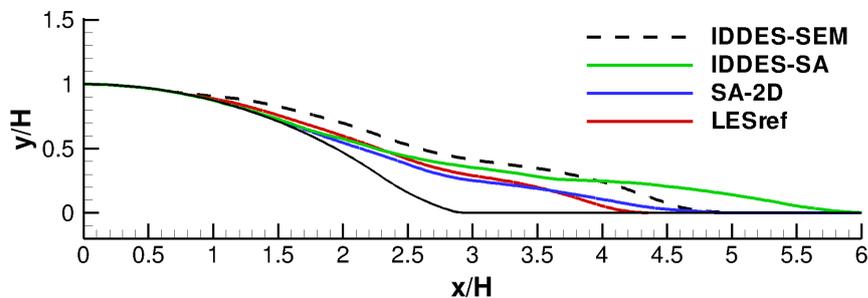


**Abb. 5.10:** Zeitlich gemittelte Geschwindigkeits- und Reynoldsspannungsprofile entlang der Ablöseblase an den Positionen:  $x/H = 0, 0.5, 1.5, 2, 3, 4$  und  $5$ . Die entsprechende Skalierung verdeutlicht den Verlauf der Grenzschichtprofile.

Die Geschwindigkeitsprofile der Hauptströmungskomponente  $\langle u \rangle / U$  sind in Abb. 5.10 (a) abgebildet. Zu Beginn der Stufegeometrie sind sich alle Profile sehr ähnlich. Lediglich die IDDES-SEM weist bereits deutliche Abweichungen im Anstieg, vergleiche mit dem  $C_f$ -Verlauf in Abb. 5.8, und in der „Bauchigkeit“ auf. Direkt in der Konturmitte bei  $x/H = 1.5$  werden die größten Unterschiede beobachtet. Während das 2D-RANS- und das IDDES-SA-Profil noch anliegen, sind die Grenzschichtprofile der LES bzw. IDDES-SEM bereits abgelöst. Die deutlich stärker ausgeprägte Rückströmung in der IDDES-SEM geht jedoch mit einer größeren Rezirkulationszone in  $y$ -Richtung einher.

Im weiteren Verlauf löst die SA-2D- und IDDES-SA-Simulation ebenfalls ab, wobei die Unterschiede zur Referenz-LES für sämtliche Simulationen zum Kanalende hin wieder abnehmen. Ein ähnliches Ergebnis zeigt die  $\langle v \rangle$ -Strömungskomponente in Abb. 5.10 (b). Aufgrund der Strömungsumlenkung und der unterschiedlichen Ablöseposition werden die größten Abweichungen mittig der Stufenkontur bei  $x/H = 1.5$  beobachtet.

Die Geschwindigkeitsabweichungen der jeweiligen Simulationen zur Referenz-LES werden durch die Isolinie der Strömungsgeschwindigkeit ( $\langle u \rangle = 0$ ) deutlich hervorgehoben, siehe Abb. 5.11. Diese Linie beschreibt etwa das Zentrum der zeitlich gemittelten Ablöseblase. Wie bereits geschildert, ergibt sich mit der IDDES-SEM (gestrichelt) ein zu großes Rezirkulationsgebiet. Die 2D-RANS-Simulation (blau) passt erstaunlich gut zur Referenz-LES (rot). Lediglich der Wiederanlegepunkt der Grenzschicht wird nicht getroffen. Die IDDES-SA (grün) stimmt zu Beginn mit der SA-Lösung überein, zeigt jedoch im weiteren Verlauf deutliche Unterschiede. Das Wiederanlegen erfolgt noch weiter stromab.



**Abb. 5.11:** Zeitlich gemittelte Isolinie der Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung mit  $\langle u \rangle = 0$ . Die Kurve kennzeichnet etwa das Zentrum der Ablöseblase.

Die aufgelösten Reynoldsspannungen der IDDES-Rechnungen sind in den weiteren Diagrammen der Abb. 5.10 abgebildet. Die IDDES-SEM befindet sich bereits stromauf der Stufenkontur im WMLES-Modus, sodass turbulente Geschwindigkeitsfluktuationen aufgelöst werden. Der RANS-Bereich bis zum Grenzschichttrand in der IDDES-SA verhindert Entsprechendes. Die jeweiligen Verläufe zeigen deutliche Unterschiede in der Verteilung und Stärke der einzelnen Komponenten.

Die  $\langle u'u' \rangle$ -Komponente der IDDES-SEM, siehe Abb. 5.10 (c), ist entlang der gesamten Ablöseblase stärker ausgeprägt. Das Profil entspricht qualitativ der Referenz-LES und ist aufgrund der größeren Ablöseblase nach oben verschoben.

Die  $\langle v'v' \rangle$ - und  $\langle w'w' \rangle$ -Komponenten zeigen zu Beginn der Stufenkontur ein entsprechendes Defizit. Die SEM und die zugehörige Vorlaufstrecke sind nicht in der Lage ein vollständig entwickeltes Grenzschichtprofil stromauf der Stufe zu erzeugen. Im abgelösten Bereich entlang der Stufe wird diese Abweichung noch verstärkt. Die hohe turbulente Produktion etwas stromab der Ablösung, siehe BENTALEB et al. [7], wird von der Simulation offenbar nicht im entsprechenden Maße wiedergegeben. Direkt am Fußpunkt der Stufe bei  $x/H = 3$  stimmen die  $\langle v'v' \rangle$ - und  $\langle w'w' \rangle$ -Profile mit der Referenz-LES in Wandnähe überein, während sich weiter stromab zu hohe Spannungskomponenten ergeben. Somit wechselt das vorherige Defizit zu einem Überschuss. Zu beachten ist außerdem die vergleichbare Größenordnung der  $\langle v'v' \rangle$ - und  $\langle w'w' \rangle$ -Komponenten. Die wandnormale  $\langle v'v' \rangle$ -Komponente zeigt den typischen Dämpfungseinfluss der Wand, während die  $\langle u'u' \rangle$ - und  $\langle w'w' \rangle$ -Komponenten

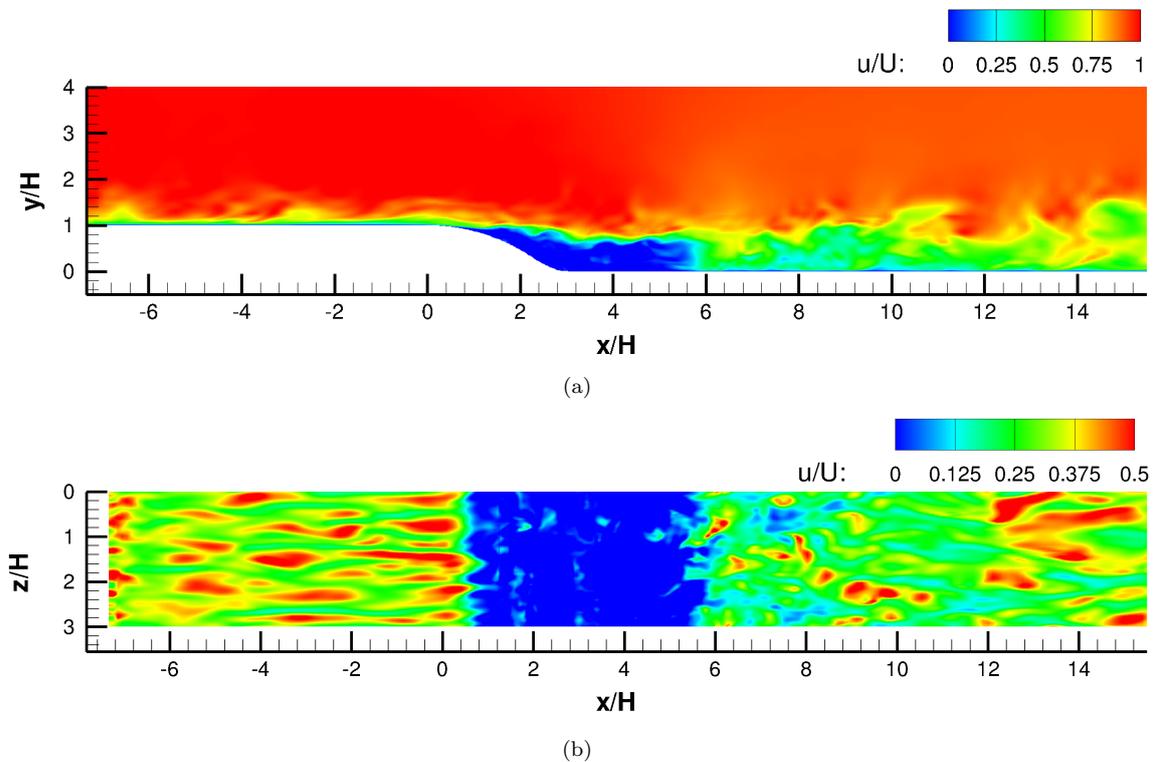
in Wandnähe deutlich größere Werte annehmen. Ein wandnahes zweikomponentiges Turbulenzverhalten deutet sich an. Aufgrund der größeren Ablöseblase sind die Profile hier ebenfalls nach oben verschoben. Eine ausführliche Diskussion der Anisotropie erfolgt bei BENTALEB et al. [7].

Ein ähnliches Verhalten kann in der Scherspannung  $\langle u'v' \rangle$  beobachtet werden. Zu Beginn der Stufe wird die Komponente unterschätzt, während sich weiter stromab zu große Werte ergeben. Aufgrund der sehr dünnen RANS-Schicht hat die modellierte Scherspannungskomponente der IDDES-SEM kaum Einfluss, vergleiche mit Abb. 5.5 (c). Aufgrund des hinter der Ablösung platzierten RANS-LES-Übergangs der IDDES-SA können erst zum Ende der Rezirkulationszone entsprechende Reynolds-spannungen aufgelöst werden. Diese Unstimmigkeit führt zu deutlichen Abweichungen und einen verspäteten Wiederanlegen.

## 5.2.2 Instationäre Strömung

Neben der zeitlich stationären Auswertung erlaubt die instationäre Betrachtung der abgelösten Scherschicht eine qualitative Bewertung der turbulenten Vorgänge.

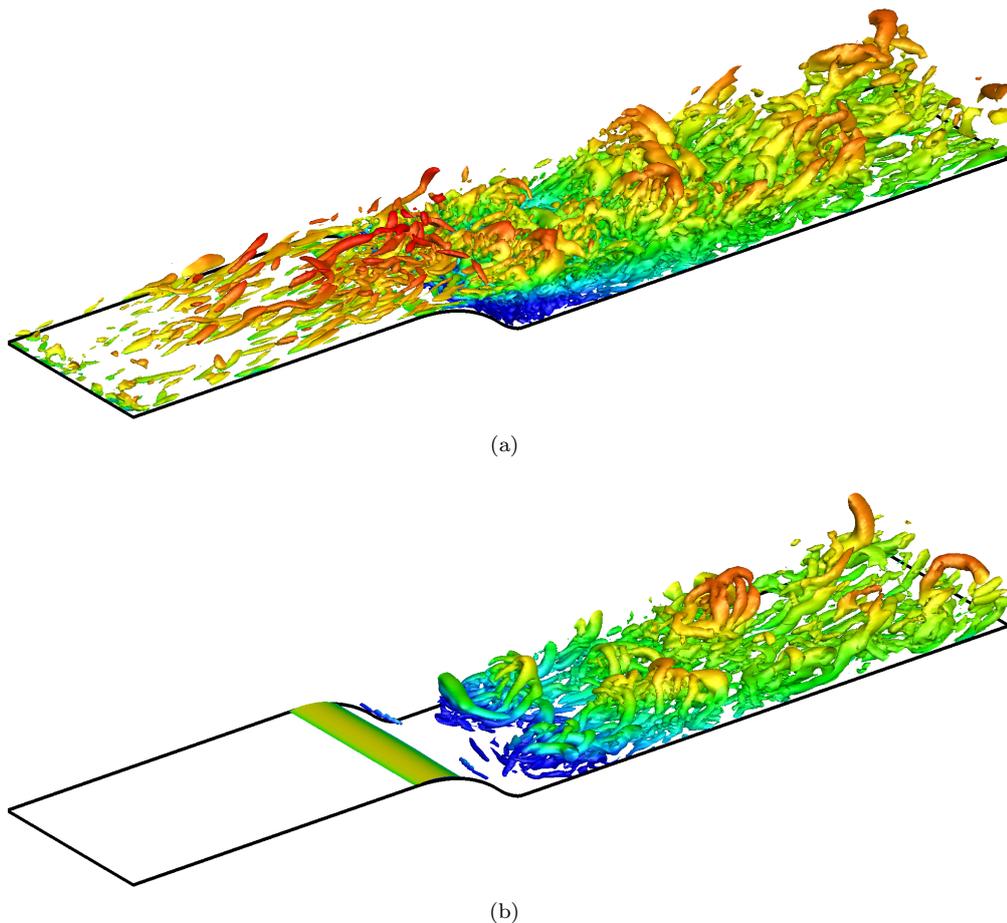
Der Einfluss der synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen am Eintritt der IDDES-SEM ist in der Abb. 5.12 deutlich sichtbar. Die Konturdarstellung in Abb. 5.12 (b) zeigt die  $u$ -Geschwindigkeitskomponente im RANS-Bereich in der Nähe des RANS-LES-Übergangs bei einem Wandabstand von  $d_W/H = 0.02$ . Stromauf der Stufenkontur entwickeln sich turbulente Wirbelstrukturen, die mit ihren länglichen Abmessungen in Strömungsrichtung den erwarteten *streaks* der wandnahen Turbulenz entsprechen [57].



**Abb. 5.12:** Momentane  $u$ -Geschwindigkeitskomponente entlang der Stufenkontur. Untere Konturebene befindet sich im RANS-Bereich bei konstanten  $d_W/H = 0.02$ .

Die synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen zu Beginn entwickeln sich weiter stromab zu realistischen Wirbelstrukturen. Der Einfluss der SEM ist am Eintritt ( $x/H = -7.43$ ) deutlich sichtbar. Die Ablöselinie bei  $x/H \approx 0.8$  ist relativ scharf abgegrenzt, während die Anlegelinie bei  $x/H \approx 5.5$  in Spannweitenrichtung weniger glatt verläuft. Der Anlegepunkt der Grenzschicht variiert zudem in der Zeit deutlich. Dies bestätigt die Beobachtung von BENTALEB et al. [7] und erfordert eine entsprechend lange zeitliche Mittelung der Statistiken.

Mit Hilfe des Q-Kriteriums  $Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2$  können die kohärenten Wirbelstrukturen visualisiert werden, siehe Abb. 5.13. Die bereits erwähnte physikalische Entwicklung der wandnahen Turbulenz der IDDES-SEM ist stromauf der Stufe deutlich sichtbar, siehe Abb. 5.13 (a). Die in Strömungsrichtung gestreckten Strukturen verformen sich in der abgelösten Scherschicht zu spannwitig ausgeprägten Strukturen, sodass eine Kelvin-Helmholtz Instabilität vermutet werden kann. LARDEAU und LESCHZINER [41] berichten von einer charakteristischen Strouhalzahl von  $St_H = fH/U = 0.2$ . Innerhalb der Ablöseblase werden kleine turbulente Strukturen beobachtet, die weiter stromab deutlich anwachsen. Zum Vergleich wird die turbulente Strömung der IDDES-SA in Abb. 5.13 (b) dargestellt. Aufgrund der dominanten RANS-Modellierung ergeben sich erst weiter stromab ähnliche Wirbelstrukturen, vergleiche mit den Reynoldsspannungen in Abb. 5.10. Das Gehalt an turbulenten Strukturen ist dabei jedoch kleiner.



**Abb. 5.13:** Kohärente Wirbelstrukturen der abgelösten Stufenströmung mit  $Q = 850U^2/H^2$ :  
(a) IDDES-SEM, (b) IDDES-SA, eingefärbt mit der  $u$ -Geschwindigkeit.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Synthetic-Eddy Method (SEM) von JARRIN et al. (2009) [37] zur künstlichen Erzeugung turbulenter Schwankungen in den kompressiblen Strömungslöser DLR-TAU-Code implementiert und in Verbindung mit verschiedenen skalen-auflösenden Simulationsansätzen an zwei generischen Testfällen erprobt. Dies sind die turbulente Kanalströmung und die abgelöste Strömung an einer abgerundeten Stufe.

Aufgrund allgemein bekannter Schwächen der reinen RANS-Turbulenzmodelle gewinnen skalen-auflösende Simulationsmethoden, wie die Large-Eddy Simulation (LES) oder die hybriden RANS / LES-Methoden, an Bedeutung. Jedoch werden für diese numerisch aufwendigen Simulationsansätze realistische Einströmrandbedingungen benötigt. Da in der Regel keine vollständigen Datensätze der Strömungsprofile vorhanden sind, müssen korrekt abgestimmte, synthetische Turbulenzmethoden verwendet werden. Das synthetisch erzeugte Geschwindigkeitsfeld muss dabei die statistischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung berücksichtigen. Beispielsweise führt ein einfaches Hinzufügen zufälliger Fluktuationen zu einer Relaminarisierung der Strömung [37].

Im Vorfeld der Implementierung der SEM in den DLR-TAU-Code wurde eine Voruntersuchung der reinen Methode mit einem separaten Hilfsprogramm durchgeführt. Eine grundlegende Untersuchung der SEM, ohne Kopplung mit einer Strömungssimulation, war somit möglich.

Diese bestätigt die in der Literatur angegebenen Eigenschaften der Methode. Statistische Kenngrößen, wie das mittlere Strömungsprofil oder die anisotrope Reynoldsspannungsverteilung einer wandgebundenen Strömung, werden hinreichend genau wiedergegeben. Die Ergebnisse lassen zudem auf eine korrekte Implementierung der SEM schließen.

Jedoch zeigte die SEM bereits hier einige grundlegende Schwächen. Das synthetisch erzeugte Geschwindigkeitsfeld liefert zwar die statistisch korrekten Mittelwerte, ist aber nicht divergenzfrei ( $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ). Obwohl ein inkompressibler Lösungsansatz eine nahezu divergenzfreie Geschwindigkeit voraussetzt, erzielt JARRIN et al. (2009) [37] vielversprechende Ergebnisse. Die unphysikalische Eigenschaft einer inkompressiblen, divergenzbehafteten Geschwindigkeit führt jedoch bei einem kompressiblen Strömungslöser zu erheblichen Problemen. Da sich die Dichte  $\rho$  mit der Kontinuitätsgleichung (2.1) berechnet und damit von der lokalen Geschwindigkeit abhängt, können unrealistische Dichtefluktuationen auftreten. Neben der Verwendung von konservativen Variablen  $\vec{W} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}^T$  sind die Strömungsgrößen durch das ideale Gasgesetz nach Gl. (2.8) mit der Dichte  $\rho$  gekoppelt. Die sich ergebenden Druck- und Temperaturstörungen beeinflussen die gesamte Strömungssimulation erheblich.

Da der Großteil der synthetischen Turbulenzmethoden nicht divergenzfrei ist, entwickelte POLETTO et al. (2011) [56] eine divergenzfreie Erweiterung der SEM. Die DF-SEM basiert auf einer turbulenten Wirbelstärke und liefert mit Hilfe eines Kreuzprodukts divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder. Aufgrund der grundlegenden Übereinstimmung mit der SEM wurde diese Erweiterung ebenfalls in den DLR-TAU-Code implementiert. In einer Voruntersuchung zeigte sich bei einfachen Strömungen das gewünschte Verhalten, jedoch deutliche Abweichungen bei realitätsnahen Strömungskonfigura-

tionen. Beispielsweise kann die DF-SEM die Anisotropie einer wandgebundenen turbulenten Strömung nur sehr eingeschränkt wiedergeben. Im wandnahen Bereich ergibt sich weiterhin eine divergenzbehaftete Geschwindigkeit.

Die praktische Erprobung der synthetischen Turbulenzansätze erfolgt an einer turbulenten Kanalströmung. Als Referenz dieser einfachen Validierungskonfiguration dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) der turbulenten Kanalströmung mit  $Re_\tau=395$  von MOSER et al. [51].

Neben einer wandaufgelösten LES (WRLES) wird die DES-Erweiterung Improved Delayed Detached-Eddy Simulation (IDDES) nach TRAVIN et al. (2006) [75] verwendet. Dabei wird als LES-Feinstrukturmodell das bekannte Smagorinsky- (SM) [66] und das WALE-Modell (*Wall Adapting Local Eddy Viscosity*) nach NICOUD et al. [52] genutzt. Mit den jeweiligen Modifikationen der IDDES ist es zudem möglich eine wandmodellerte LES (WMLES) durchzuführen. Die wandnahe Strömungssimulation erfolgt im RANS-Modus, wobei die wandfernen turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen mit einem LES-ähnlichen Modus erfasst werden.

Da die SEM ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld generiert, werden bei Verwendung des kompressiblen Strömungslösers DLR-TAU die zuvor genannten Probleme beobachtet. Stromab der Eintrittsebene ergeben sich, insbesondere in Wandnähe, deutliche Dichte- und Druckstörungen. Der DLR-TAU-Code wurde ursprünglich für stationäre Strömungssimulationen entwickelt, wobei die Ein- und Auslassrandbedingungen der Standard-Implementierung bei instationär aufgelöster Turbulenz unphysikalische Reflexionen hervorrufen. Ohne geeignete Erweiterungen ist die Verwendung der SEM in Verbindung mit der kompressiblen Formulierung im DLR-TAU-Code nicht möglich.

Mögliche Lösungsansätze bestehen zum einen in lokalen Dämpfungszonen (*sponge layer*) und zum anderen in nicht-reflektierenden Druckrandbedingungen. Bei ersteren bewirken zusätzliche Terme in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.78)-(2.80) eine Dämpfung der Dichte- und Druckschwankungen am Eintritt. Ein modifizierter Ansatz der lokalen Dämpfungszone nach FREUND [21] und die nicht-reflektierenden Druckrandbedingungen nach RUDY und STRIKWERDA [61] wurden daher ebenfalls in den DLR-TAU-Code implementiert und erlauben in Verbindung mit der synthetischen Turbulenz der SEM eine numerisch stabile kompressible Strömungssimulation.

Dennoch lieferte der DLR-TAU-Code bei den skalen-auflösenden Simulationen mit synthetischer Turbulenz erhebliche Abweichungen zur Referenzlösung. So konnte zwar eine vollturbulente Strömung mit qualitativ korrekten Merkmalen, wie die lang gestreckten *streaks* [57] in Wandnähe, erzeugt werden. Jedoch konnte sich bei dem hier gewählten Kanal keine vollständig ausgebildete Turbulenz ausprägen. Zudem zeigen die statistisch gemittelten Strömungsprofile zum Teil deutliche Abweichungen zur Referenz-DNS. Die angegebene Entwicklungslänge der synthetischen Turbulenz nach JARRIN [37] konnte daher nicht reproduziert werden.

Dabei zeigten die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten erhebliche Unterschiede. Beispielsweise wird die wandnormale Reynoldsspannung  $\langle v'v' \rangle$  direkt an der Wand auffällig stark unterschätzt, sodass die weitere turbulente Entwicklung entsprechend stark gestört wird. Da ein relativ feines Rechengitter verwendet wurde, dessen Auflösung für eine LES grundsätzlich geeignet erscheint, muss von einem deutlichen Einfluss des räumlichen Diskretisierungsschemas ausgegangen werden. Neben der modellierten, physikalischen Dissipation der Geschwindigkeitsfluktuationen, die bei den

hier verwendeten Feinstrukturmodellen nahezu identisch ist, spielt die künstliche Dissipation des Diskretisierungsschemas eine entscheidende Rolle. Eine vermutlich nicht geeignete Skalierung der numerischen Dissipation führt in den lang gestreckten Zellen in Wandnähe zu einer übermäßigen Dämpfung der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen. Vergleichbare Effekte konnten bei der äquidistanten Streckung in Strömungs- bzw. Spannweitenrichtung nicht beobachtet werden.

Den erheblichen Einfluss der künstlichen Dissipation bestätigten zwei IDDES-Rechnungen mit unterschiedlichem Skalierungsparameter  $\kappa^{(4)}$ . Die ohnehin kleinen Werte zeigen klare Unterschiede im  $C_f$ -Verlauf. Der kleinere Wert führte zu einer besseren Übereinstimmung mit der Referenz.

Des Weiteren beeinflusst der *cut-off*-Parameter  $K$  der Präkonditionierung die skalen-auflösende Simulation erheblich. Ein zu kleiner Wert führt bei der turbulenten Kanalströmung zu einer Dichte- bzw. Druckwelle, wobei die Amplitude dieser „stehenden“ Welle mit fortschreitender Zeit immer weiter anwächst. Da die Präkonditionierung die künstliche Dissipation bei kleinen Mach-Zahlen skaliert, ist dies ein weiterer Beleg des erheblichen Dissipationseinflusses.

Die eigentliche synthetische Turbulenzmethode wurde mit Hilfe der IDDES allgemeiner untersucht. Dabei wurde neben der Wirbelanzahl der Wirbelradius variiert. In der Literatur finden sich dazu unterschiedliche Definitionen, wobei zwischen isotroper und anisotroper Wirbelstrukturen unterschieden werden kann. Jedoch zeigte sich bei Verwendung der IDDES ein äußerst geringer Einfluss. Da im Wandbereich eine ausgeprägte RANS-Modellierung mit stark erhöhter Wirbelviskosität vorliegt, spielt solch eine Unterscheidung nur eine untergeordnete Rolle. Bei wandaufgelösten LES-Anwendungen ist hingegen ein deutlich größerer Einfluss der unterschiedlichen Wirbelskalen zu erwarten. Die Variation der Wirbelanzahl zeigte für die IDDES ebenfalls keine wesentlichen Auswirkungen.

Die ebenfalls verwendete DF-SEM zeigte bei der IDDES ein überraschendes Ergebnis. Da die realisierbare Anisotropie der synthetischen Turbulenz stark eingeschränkt ist, wurde eine mögliche Umverteilung der jeweiligen Reynoldsspannungskomponenten vorgeschlagen. Jedoch führte dieses willkürliche Vorgehen bei der IDDES zu einer allmählichen Relaminarisierung der Strömung. Dieser Effekt wird bei einer fein aufgelösten LES nach POLETTO et al. (2011) [56] nicht beobachtet. Die entsprechend erhöhte turbulente Dissipation der IDDES hat offenbar einen entscheidenden Einfluss und muss insbesondere bei der DF-SEM beachtet werden.

Des Weiteren wurde die Tauglichkeit der SEM an einer anwendungsnahen Strömungskonfiguration getestet. Die einfache Geometrie einer abgerundeten Stufe beeinflusst das Ablöseverhalten einer Grenzschicht maßgeblich, wobei die leicht gekrümmte Oberfläche den üblichen RANS-Methoden deutliche Probleme bereitet. Der Ablöse- bzw. Anlegepunkt einer Grenzschicht wird häufig falsch wiedergegeben. Abhilfe versprechen hier skalen-auflösende Simulationen, wie die IDDES.

Die experimentell untersuchte Stufenströmung wurde mit Hilfe der IDDES berechnet, dabei wurde sowohl die ursprüngliche Methode (IDDES-SA) als auch die Erweiterung mit der SEM (IDDES-SEM) genutzt. Aufgrund der synthetischen Turbulenz am Eintritt stellt sich bei der IDDES-SEM an der unteren Wand ein vollständiger WMLES-Modus ein. Die IDDES-SA operiert hingegen bis zur Ablösung an der Stufenkontur im RANS-Modus und stellte sich erst weiter stromab allmählich in den LES- bzw. WMLES-Modus um. Dabei wird der bekannte Übergangsbereich mit einer erhöhten Wirbelviskosität beobachtet.

Zudem zeigt die IDDES-SA eine verspätete Ablösung und ein noch späteres Wiederanlegen der Grenzschicht. Im Vergleich zur fein aufgelösten Referenz-LES von BENTALEB et al. (2012) [7] ergeben sich erhebliche Abweichungen. Die reine IDDES-SA ist für solche Strömungen wenig geeignet. Die IDDES-SEM mit synthetischer Turbulenz am Eintritt zeigt hingegen eine bessere Übereinstimmung der Strömung zum Experiment und zur Referenz-Rechnung. Aufgrund der relativ kurzen Lauflänge ist auch hier eine unvollständig ausgebildete Turbulenz zu beobachten. Dieses Defizit führt im Vergleich zur IDDES-SA zu einer früheren Ablösung der Grenzschicht. Da die freie Scherschicht eine bereits stärker ausgeprägte Turbulenz aufweist, kann sich stromab der Stufenkontur das richtige turbulente Strömungsverhalten einstellen.

Das geschilderte Verhalten der IDDES-Rechnungen bestärkt den Einsatz synthetischer Turbulenzmethoden. Aufgrund der gezeigten Defizite des allmählichen RANS / LES-Übergangs ist eine korrekte Grenzschichtberechnung an leicht gekrümmten Oberflächen, beispielsweise an einen Tragflächenprofil, mit der klassischen IDDES nicht möglich. Die synthetische Turbulenz der SEM bietet hingegen vielversprechende Vorteile, wobei die Umsetzung noch einiger Verbesserungen bedarf.

So stellt die hier gewählte Dirichlet-Randbedingung der synthetischen Geschwindigkeit nur eine Möglichkeit der Vorgabe turbulenter Fluktuationen dar. Mit Hilfe zusätzlicher Quellterme in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.1)-(2.3) kann auch eine Überlagerung des mittleren Strömungsfelds durch synthetische Turbulenz erfolgen. Jedoch konnte dieser Ansatz im zeitlich begrenzten Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt werden. Die synthetischen Turbulenzmethoden benötigen zur Berechnung der Fluktuationen korrekte Eingabewerte. Da in vielen Fällen keine vollständigen DNS-Profile vorhanden sind, müssen geeignete Größen ermittelt werden. Neben der allgemeinen Schätzung integraler Größen, beispielsweise mit Hilfe des Turbulenzgrads, können turbulente RANS-Profile verwendet werden. Dieses Vorgehen entspricht den hybriden RANS / LES-Methoden mit synthetischer Turbulenz inmitten des Rechengebiets (*embedded LES* [26]).

Da eine vollständig ausgebildete Turbulenz nur bei großen Übergangslängen zu erreichen ist, erscheint die Vorgabe turbulenter Störungen in der Nähe des Ablösepunkts einer Grenzschicht äußerst vielversprechend. Die SEM-Implementierung muss dementsprechend weiterentwickelt werden. Neben einer beliebigen fest definierten Interaktionsebene kann ein lösungsabhängiger Ansatz mit einem allmählichen Anwachsen turbulenter Fluktuationen verwendet werden. Der beobachtete Übergangsbereich von RANS- zu LES-Modellierung kann vermutlich verkürzt und die turbulente Anfachung einer sich ausbildenden turbulenten Grenzschicht bzw. einer druckinduzierten Ablösung wirkungsvoll unterstützt werden. Als mögliche Indikatoren können der Reibungsbeiwert  $C_f$  der nächstgelegenen Wand oder analytische Funktionen, wie bei der ADDES [59], genutzt werden.

Um in Zukunft mit dem DLR-TAU-Code hochwertige skalen-auflösende Simulationen durchzuführen, sollte das räumliche Diskretisierungsschema grundlegend untersucht werden. Dabei muss auf die korrekte Skalierung der künstlichen Dissipation geachtet werden. Der erhebliche Einfluss der Präkonditionierung im wandnahen Bereich muss ebenso berücksichtigt werden. Zur Validierung eines verbesserten räumlichen Diskretisierungsschemas eignet sich besonders eine in Strömungsrichtung periodische turbulente Kanalströmung. Da der DLR-TAU-Code nur eine Periodizität erlaubt, würde dies eine Erweiterung der Randbedingungen erfordern.

# Literaturverzeichnis

- [1] *TAU-Code User Guide Release 2012.1.0.*
- [2] *Technical Documentation of the DLR TAU-Code Release 2012.1.0.*
- [3] Adamian D., Travin A. An Efficient Generator of Synthetic Turbulence at RANS-LES Interface in Embedded LES of Wall-Bounded and Free Shear Flows. *Computational Fluid Dynamics 2010*, Springer Verlag, pages 739–744.
- [4] Adamian D. Yu., Travin A. K. Improved Version of the Synthetic Eddy Method for Setting Nonstationary Inflow Boundary Conditions in Calculating Turbulent Flows. *High Temperature*, 49 (5):704–711, 2011.
- [5] Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Interfacing statistical turbulence closures with Large-Eddy simulation. *AIAA Journal*, 42 (3):485–492, 2004.
- [6] Benhamadouche S., Jarrin N., Addad Y., Laurence D. Synthetic turbulent inflow conditions based on a vortex method for large-eddy simulation. *Progress in computational fluid dynamics*, 6:50–57, 2006.
- [7] Bentaleb Y., Lardeau S., Leschziner M. A. Large-eddy simulation of turbulent boundary layer separation from a rounded step. *Journal of Turbulence*, 13 (4):1–28, 2012.
- [8] Blazek J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier Verlag, 2. Auflage, 2005.
- [9] Boersma B.J., Lele S.K. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs*, pages 365–377, 1999.
- [10] Breuer M., Jovicic N., Mazaev K. Comparison of DES, RANS and LES for the separated flow around a flat plate at high incidence. *Int. Journal for Num. Meth. in Fluids*, 41:357–388, 2003.
- [11] Brun C., Boiarciuc M.P., Haberkorn M., Comte P. Large eddy simulation of compressible channel flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 22:189–212, 2008.
- [12] Brun C., Boiarciuc M.P., Manhart M. LES of the turbulent compressible flow spatially developing in a plane channel. *C2 LESTAC 09: Large Eddy Simulation in Turbulence, Aeroacoustic and Combustion*, 2011.
- [13] Choi H., Moin P. Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow. *Journal of Computational Physics*, 113:1–4, 1994.
- [14] Choi Y.-H., Merkle C.L. The Application of Preconditioning to Viscous Flows. *Journal of Computational Physics*, 105:207–223, 1993.
- [15] Colonius T. MODELING ARTIFICIAL BOUNDARY CONDITIONS FOR COMPRESSIBLE FLOW. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36:315–345, 2004.

- [16] de Laage de Meux B., Audebert B., Manceau R. RANS/LES coupling with Synthetic-Eddy Method and controlled forcing: application to rotating channel flow. *Code\_Saturne user meeting*, 2010.
- [17] Ducros F., Ferrand V., Nicoud F., Weber C., Darracq D., Gacherieu C., Poinot T. Large-Eddy Simulation of the Shock / Turbulence Interaction. *Journal of Computational Physics*, 152:517–549, 1999.
- [18] Ducros F., Laporte F., Soulères T., Guinot V., Moinat P., Caruelle B. High-Order Fluxes for Conservative Skew-Symmetric-loke Schemes in Structured Meshes: Application to Compressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 161:114–139, 2000.
- [19] Dwight R. Time-Accurate Navier-Stokes Calculations with Approximately Factored Implicit Schemes. *Computational Fluid Dynamics 2004*, Springer Verlag, V:211–217, 2006.
- [20] Ferziger J.H., Perić M. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [21] Freund J.B. Proposed Inflow/Outflow Boundary Condition for Direct Computation of Aerodynamic Sound. *AIAA Journal*, 35-4:740–742, 1997.
- [22] Fröhlich J. *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner Verlag, 2006.
- [23] Fröhlich J. *Turbulente Strömungen; Vorlesungsskript*. TU Dresden, Sommersemester 2010.
- [24] Fröhlich J., Mellen C.P., Rodi W., Temmerman L., Leschziner M.A. Highly resolved large-eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *J. Fluid Mech.*, 526:19–66, 2005.
- [25] Fröhlich J., Rodi W. Introduction to Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, Cambridge University Press, 8:267–298, 2002.
- [26] Fröhlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Prog. Aerospace Sci.*, 44:349–377, 2008.
- [27] Garbaruk A., Shur M., Strelets M., Travin A. DES and its modifications and enhancements. *DESider-A European Effort in Hybrid RANS-LES Modelling*, Notes on Num. Fluid Mech. and Multi. Design, 103:19–23, 2009.
- [28] Gerhold T. Overview of the Hybrid RANS Code TAU. *MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design*, Springer Verlag, 89:81–92, 2005.
- [29] Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physic of Fluids A*, 3 (7):1760–1765, 1991.
- [30] Greenblatt D., Paschal K., Yao C.-S., Harris J., Schaeffler N., Washburn A.E. A Separation Control CFD Validation Test Case Part 1: Baseline & Steady Suction. *AIAA Journal 2004-2220*.
- [31] Hänel D. *Mathematische Strömungslehre I+II; Vorlesungsskript*.
- [32] Heinrich R., Dwight R., Widhalm M., Raichle A. Algorithmic Developments in TAU. *MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design*, Springer Verlag, 89:93–108, 2005.

- [33] Jameson A. Time dependant calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *AIAA Journal*, 91-1596, 1991.
- [34] Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA Journal*, 81-1250:1–19, 1981.
- [35] Jarrin N. *Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence*. PhD thesis, University of Manchester, 2008.
- [36] Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., Prosser R. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 (4):585–593, 2006.
- [37] Jarrin N., Prosser R., Uribe J., Benhamadouche S., Laurence D. Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic-Eddy method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30 (3):435–442, 2009.
- [38] Jimenez J., Hoyas S., Simens M. P., Mizuno Y. Turbulent boundary layers and channels at moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 657:335–360, 2010.
- [39] Keating A., Piomelli U., Balaras E., Kaltenbach H-J. A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 16(12):4696–712, 2004.
- [40] Kok J.C. A high-order low-dispersion symmetry-preserving finite-volume method for compressible flow on curvilinear grids. *Journal of Computational Physics*, 228:6811–6832, 2009.
- [41] Lardeau S., Leschziner M. A. The interaction of round synthetic jets with a turbulent boundary layer separating from a rounded ramp. *Journal of Fluid Mechanics*, 683:172–211, 2011.
- [42] Lessani B. *Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows Application to Low Mach Number and Particle-Laden Flows*. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2004.
- [43] Lumley J. L. Computational modeling of turbulent flows. *Advances in applied mechanics*, 18:123–176, 1978.
- [44] Magagnato F., Pritz B., Gabi M. Comparison of DES and LES on the Transitional Flow of Turbine Blades. *S.-H. Peng and W. Haase (Eds.): Adv. in Hybrid RANS-LES Modelling, NNFM 97*, pages 212–221, 2008.
- [45] Mani A. On the reflectivity of sponge zones in compressible flow simulations. *Center for Turbulence Research: Annual Research Briefs*, pages 117–133, 2010.
- [46] Mannini C., Schewe G. Numerical study on the three-dimensional unsteady flow past a 5:1 rectangular cylinder using the DES approach. *Proceedings ICWE13 - 13th International Conference on Wind Engineering*, 10-15 Juli 2011.
- [47] Mathey F. Aerodynamic noise simulation of the flow past an airfoil trailing-edge using a hybrid zonal RANS-LES. *Computers and Fluids*, 37:836–843, 2008.
- [48] Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.P., Sergent E. Specification of LES inlet boundary condition

- using vortex method. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 4, 2003.
- [49] Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 4, 2003.
- [50] Morinishi Y., Tamano S., Nakabayashi K. Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flow between adiabatic and isothermal walls. *J. of Fluid Mech.*, 502:273–308, 2004.
- [51] Moser R.D., Kim J., Mansour N. N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau=590$ . *Physics of Fluids*, 11 (4):943–945, 1999.
- [52] Nicoud F., Ducros F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion, CERFACS - Centre Européen de Recherche et de Formation Avancées en Calcul Scientifiques*, pages 1–36, 1999.
- [53] Pamiès M., Weiss P.È., Garnier E., Deck S., Sagaut P. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 21 (4):045103, 2009.
- [54] Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129, 1991.
- [55] Poletto R. *Divergence-Free SEM (DF-SEM); Second year report*. University of Manchester, 2011.
- [56] Poletto R., Revell A., Craft T., Jarrin N. Divergence free synthetic eddy method for embedded LES inflow boundary conditions. In *Seventh International Symposium On Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-7)*, Ottawa, 2011.
- [57] Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge Univ. Pr., 2006.
- [58] Pritz B. *Large Eddy Simulation of the Pulsating, Non-Reacting Flow in Combustion Chambers*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2009.
- [59] Probst A., Radespiel R., Knopp T. Detached-Eddy Simulation of Aerodynamic Flows Using a Reynolds-Stress Background Model and Algebraic RANS/LES Sensors. *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2011.
- [60] Radespiel R., Turkel E., Kroll N. Assessment of Preconditioning Methods. *DLR IB*, 95/29, 1995.
- [61] Rudy D.H., Strikwerda J.C. Boundary Conditions for Subsonic Compressible Navier-Stokes Calculations. *Computers and Fluids*, 9:327–338, 1981.
- [62] Schlichting H., Gerste K. *Grenzschicht-Theorie*. Springer Berlin, 2006.
- [63] Schwamborn D., Gerhold T., Heinrich R. THE DLR TAU-CODE: RECENT APPLICATIONS IN RESEARCH AND INDUSTRY. In Wesseling P., Oñate E., Périaux J., editor, *Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2006*.
- [64] Sergent M. E. *Vers une Methodologie de Couplage Entre la Simulation des Grande Echelles et les Modeles Statistiques*. PhD thesis, Ecole Central de Lyon, 2002.

- [65] Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin A. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29:1638–1649, 2008.
- [66] Smagorinsky J. S. General circulation experiments with the primitive equations, i, the basic experiment. *Mon. Weather Rev*, 91:99–164, 1963.
- [67] Spalart P. Young person's guide to detached-eddy simulation grids. *NASA CR-2001-211032*.
- [68] Spalart P. Detached-Eddy Simulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 41:181–202, 2009.
- [69] Spalart P., Allmaras S. One-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Recherche aerospatiale*, 1:5–21, 1994.
- [70] Spalart P., Deck S., Shur M., Squires K., Strelets M., Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 20 (3):181–195, 2006.
- [71] Spalart P., Jou W.-H., Strelets M., Allmaras S. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. In Greyden Press, editor, *Proceedings of first AFOSR international conference on DNS/LES*, Ruston, Louisiana, 4-8 Aug 1997.
- [72] Spurk J.H., Aksel N. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer Berlin, 6. Auflage, 2006.
- [73] Swanson R.C., Turkel E. On Central-Difference and Upwind Schemes. *Journal of Computational Physics*, 101:292–306, 1992.
- [74] Tabor G., Baba-Ahmadi M. Inlet conditions for large eddy simulation: A review. *Computers and Fluids*, 39 (4):553–567, 2010.
- [75] Travin A., Shur M., Spalart P., Strelets M. Improvement of Delayed Detached-Eddy Simulation for LES with wall modelling. In Wesseling P., Oñate E., Périaux J., editor, *Proceedings of of the European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2006*.
- [76] Wagner C., Hüttl T., Sagaut P. *Large Eddy Simulation for Acoustics*. Cambridge University Press, 2007.
- [77] Zhang S., Zhong S. An experimental investigation of turbulent flow separation control by an array of synthetic jets. *AIAA Journal* 2010-4582.

# Anhang

## A.1 Vortex-Methode (VM)

Der Vollständigkeit halber wird die bekannte Vortex-Methode (VM) kurz vorgestellt. Die ursprüngliche Methode basiert auf der Dissertation von SERGENT (2002) [64]. Dabei werden synthetisch erzeugte Fluktuationen dem mittleren Strömungsfeld einer beliebigen Ebene hinzugefügt. Die eigentliche Vortex-Methode generiert mit Hilfe eines Wirbelstärkefelds zweidimensionale Fluktuationen für  $v'$  und  $w'$ . Die  $u'$ -Komponente wird mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung, die Langevin-Gleichung, erzeugt. Je nach Autor werden unterschiedliche Ansätze verwendet. Die Weiterentwicklung von MATHEY et al. (2003) [48] bzw. [47] ist unter anderem im Strömungslöser FLUENT verfügbar. Die Vortex-Methode berücksichtigt ebenfalls Randbedingungen wie eine Wand oder eine Periodizität. BENHAMADOUCHE et al. (2006) [6] verwendet die ursprüngliche Vortex-Methode mit modifizierten Randbedingungen. Die 2D-Vortex-Methode der  $v'$ - und  $w'$ -Fluktuationen basiert auf einer Transportgleichung der Wirbelstärke  $\omega$  [47]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad . \quad (\text{A.1})$$

Die Geschwindigkeit kann mit einer 2D-Strom- bzw. Potentialfunktion ( $\vec{\Psi}, \Phi$ ) beschrieben werden:

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{\Psi} + \nabla \Phi \quad \text{führt zu:} \quad \omega = -\nabla^2 \Psi \quad . \quad (\text{A.2})$$

Zur Lösung der Gl. (A.2) wird eine 2D-Green-Funktion und der Biot-Savart Ansatz [72] genutzt:

$$\vec{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times \omega(\vec{x}') \cdot \vec{z}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d\vec{x}' \quad . \quad (\text{A.3})$$

Mit zufällig verteilten Wirbelkernen, die durch Konvektion transportiert werden, kann das diskrete Wirbelstärkefeld berechnet werden:

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \eta(|\vec{x} - \vec{x}'_i|, t) \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_i(x) = 4 \sqrt{\frac{\pi S k(x)}{3N(2 \ln(3) - 3 \ln(2))}} \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$\eta(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left( 2e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} - 1 \right) e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (\text{A.6})$$

Dabei bezeichnet  $N$  die Wirbelanzahl,  $k$  die turbulente kinetische Energie,  $S$  die Eintrittsfläche der Ebene und  $\Gamma_i$  die Zirkulation des  $i$ -ten Wirbels. Die räumliche Wirbelstärkeverteilung  $\eta$  wird mit dem lokalen Wirbelradius  $\sigma$  bestimmt:

$$\sigma = \frac{ck^{3/2}}{2\varepsilon} \quad \text{mit} \quad c = C_\mu^{3/4} \approx 0.16 \quad . \quad (\text{A.7})$$

Die endgültige 2D-Geschwindigkeitsverteilung mit  $\vec{V} = (v', w')$  ergibt sich mit:

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}) \times \vec{z}}{|\vec{x}_i - \vec{x}|^2} \left( 1 - e^{-\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}|^2}{2\sigma^2}} \right) e^{-\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}|^2}{2\sigma^2}} . \quad (\text{A.8})$$

Um ein realistisches turbulentes Geschwindigkeitsfeld zu erzeugen, wechselt das Vorzeichen der Zirkulation  $\Gamma_i$  zufällig nach einer turbulenten Zeitskala  $\tau = k/\varepsilon$ . MATHEY et al. [47] verwendet für die Berechnung der Geschwindigkeitsfluktuation  $u'$  in Strömungsrichtung ein linear kinematisches Modell:

$$u' = -\vec{V} \cdot \vec{g} \quad \text{mit} \quad \vec{g} = \nabla \vec{U} . \quad (\text{A.9})$$

Dabei bezeichnet  $\vec{g}$  den normierten Einheitsvektor des mittleren Geschwindigkeitsgradienten am Eintritt. Falls  $\vec{g} = 0$  erfolgt eine rein zufällige Verteilung. Diese synthetisch berechneten Fluktuationen werden bei MATHEY et al. [47] mit Hilfe zusätzlicher Quellterme in den Impulsgleichungen dem mittleren Geschwindigkeitsfeld hinzugefügt. Der Quellterm ist nur in der ersten Zellschicht aktiv:

$$(U_n + u'_n) \cdot \vec{u}' \cdot S_n + u'_n \cdot \vec{U} \cdot S_n \quad \text{mit} \quad U_n = \vec{U} \cdot \vec{n} , \quad u'_n = \vec{u}' \cdot \vec{n} . \quad (\text{A.10})$$

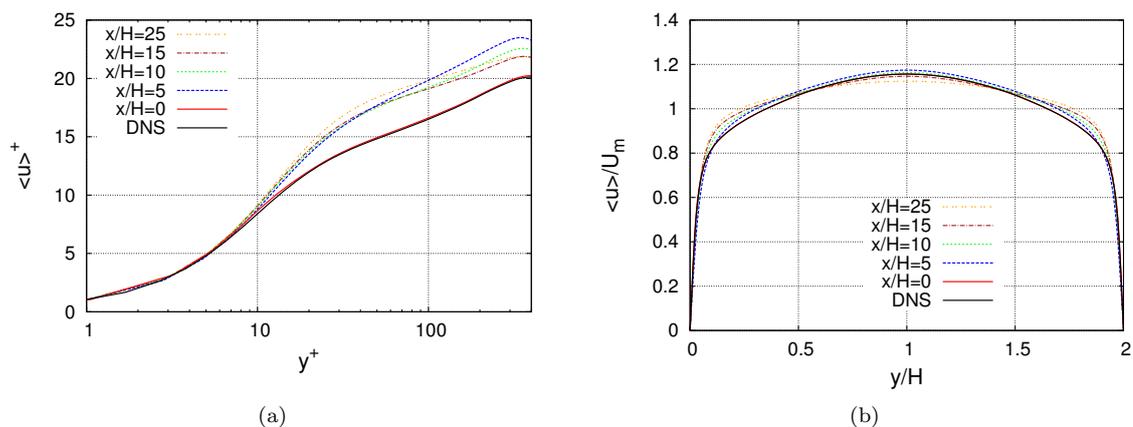
Die ursprünglich verwendete Langevin-Gleichung für die  $u'$ -Fluktuationen von SERGENT [64] lautet:

$$\frac{du'}{dt} = -\frac{c_1}{2T} u' + \left( \frac{2}{3} c_2 - 1 \right) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} v' + (c_0 \varepsilon)^{1/2} \frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{A.11})$$

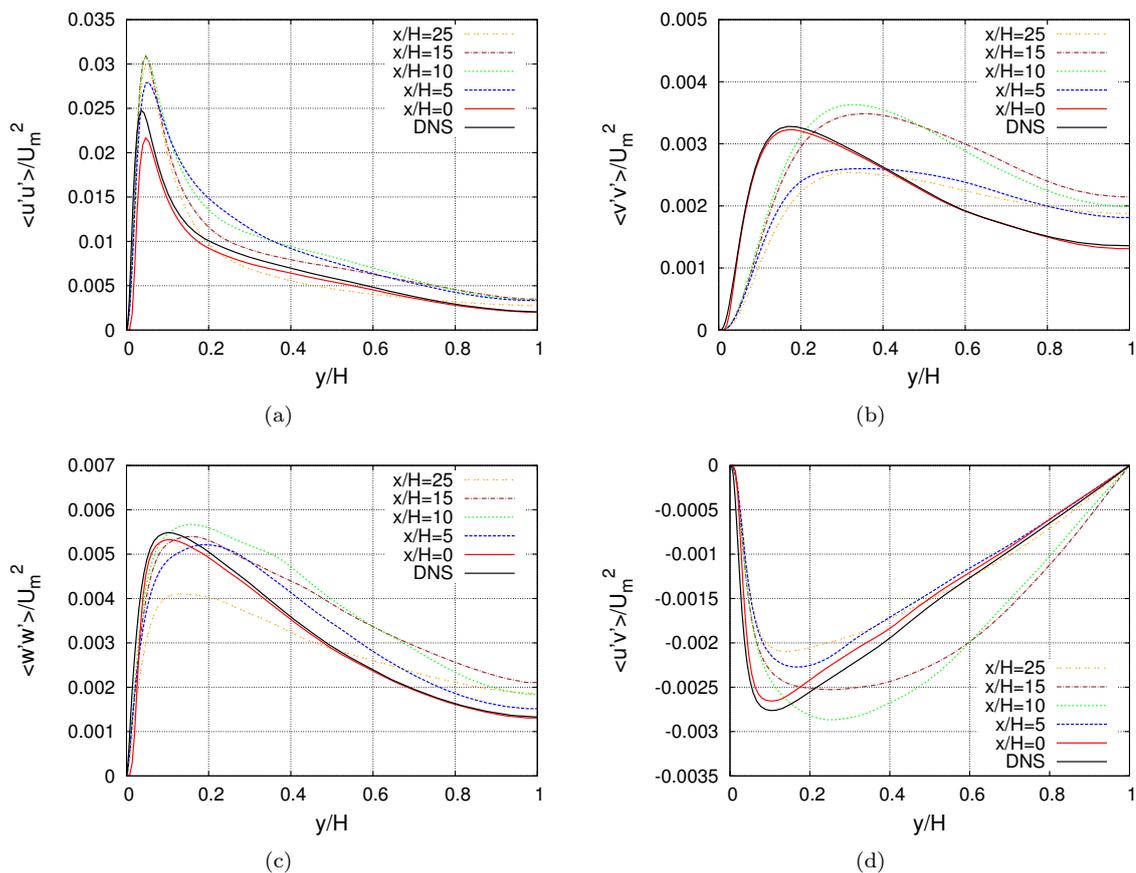
Die stochastische Differentialgleichung verwendet folgende Parameter  $T = k/\varepsilon$ ,  $c_0 = 14/15$ ,  $c_1 = 1.8$  und  $c_2 = 0.6$ . Die praktische Umsetzung dieser Gleichung ist somit deutlich komplizierter.

Da die Richtung des Wirbelradius  $\sigma$  nicht weiter unterschieden wird, sind daher nur kugelförmige Strukturen möglich. Hinweise zur Zufallsverteilung bzw. zum allgemeinen Vorgehen werden nicht gegeben. Zudem werden keine Angaben zur bestmöglichen Anzahl  $N$  der Wirbelkerne genannt.

## A.2 Strömungsprofile der LES-WALE-Rechnung



**Abb. A.1:** Zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile der LES-WALE entlang des Kanals. Die Normierungsgrößen in (a) berechnen sich aus der lokalen Wandschubspannung.



**Abb. A.2:** Zeitlich gemittelte Reynoldsspannungskomponenten der LES-WALE. Als Referenz dient die Direkte Numerische Simulation (DNS) von MOSER et al. [51].

