



Diplomarbeit

Identifikation der Impedanzparameter
des menschlichen Arms mit dem
sieben-Achs DLR Leichtbauroboter

Diplomand:	Dominic Lakatos
Fakultät:	Maschinenbau
Betreuer an der Hochschule:	Prof. Dr.-Ing. Uwe Hollburg
Aufgabensteller am DLR:	Dr. Patrick van der Smagt
Abgabedatum:	17. Mai 2011

Erklärung

Hiermit wird erklärt, dass die Arbeit mit obigem Thema selbständig verfasst und noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt wurde. Weiterhin sind keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel verwendet und wörtliche sowie sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet worden.

München, den 17.05.2011

Zusammenfassung

Moderne Robotersysteme interagieren dynamisch mit ihrer Umgebung. Um diese Interaktionen erfolgreich durchführen zu können geht der Trend in der Forschung in Richtung nachgiebige Roboter- und Regelungsstrukturen. Dabei stellt sich die Frage, wie die Impedanz, d.h. die Steifigkeit und Dämpfung dieser Strukturen einzustellen ist. Neben heuristischen Methoden ist das Nachahmen der menschlichen Eigenschaften ein vielversprechendes Forschungsfeld. Daher werden in dieser Arbeit Methoden zur Messung der Impedanzparameter des menschlichen Arms untersucht. Auf der Basis klassischer Methoden der Mechanik, werden Modelle des menschlichen Arms abgeleitet. Diese Modelle sind nichtlinear bezüglich der Massendynamik und linear bezüglich der unbekanntenen Modellparameter und werden mit Methoden der linearen Optimierung bestimmt. Die experimentelle Parameteridentifikation wird mit dem drehmoment- und positionsgeregelten sieben-Achs DLR Leichtbauroboter durchgeführt, wobei die Konfiguration des Roboters bezüglich Beweglichkeit und Eigenschaft als Positionssensor optimiert wird. Das Ergebnis dieser Arbeit ist eine praktisch verifizierte Methode zur Bestimmung der Impedanz des menschlichen Arms. Anhand von Simulationen und Messungen wird gezeigt, dass zur Identifikation der Trägheits-, Steifigkeits- und Dämpfungsparameter eine Anregungszeit von mindestens 300 ms benötigt wird. Die experimentell bestimmten Modellparameter sind bezüglich mechanischer Grundgesetze konsistent.

Vorwort

Diese Arbeit entstand während der Tätigkeit als Diplomand im Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt. Dafür danke ich Dr. Patrick van der Smagt (Koordinator der Bionik-Gruppe) für die interessante Aufgabenstellung, Betreuung der Arbeit und Durchsicht der schriftlichen Arbeit. Ebenfalls danke ich Dr. Alin Albu-Schäffer (Abteilungsleiter Mechatronische Komponenten und Systeme) für die fachliche Betreuung. Des Weiteren danke ich Hannes Höppner, der mich gerade in der Anfangsphase sehr unterstützte und stets für rege fachliche Diskussionen sorgte. Mein besonderer Dank gilt Florian Petit, der sich regelmäßig viel Zeit nahm um mich sowohl in fachlichen, als auch strategischen Fragen zu betreuen und die schriftliche Arbeit ausführlich durchzusehen. Schließlich danke ich noch Prof. Dr. Uwe Hollburg (Betreuer von seitens der Hochschule München) für das außergewöhnliche Interesse an dem Thema.

Anmerkungen zur Notation

In dieser Arbeit wird die symbolische Matrixnotation verwendet. Dabei wird eine Matrix durch *fett gedruckte lateinische* oder *griechische* Buchstaben ausgedrückt. Grundsätzlich werden $a \times b$ -Matrizen mit $a, b > 1$ mit *Großbuchstaben* und $a \times 1$ -Spaltenmatrizen mit *Kleinbuchstaben* bezeichnet. Auf die Elemente der Matrizen wird über die *nachgestellten* und *tiefgestellten* Indizes zugegriffen, dabei werden die Buchstaben *normal* gedruckt.

Beispiele zur Matrixnotation

- \mathbf{A} ist eine Matrix, z.B. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ mit drei Zeilen und zwei Spalten.
- A_{ij} ist das i -te Element in der j -ten Spalte.

-
- \mathbf{A} ist eine Matrix, z.B. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit drei Zeilen und drei Spalten (quadratisch).
 - \mathbf{a} ist eine Spaltenmatrix, z.B. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ mit zwei Zeilen und einer Spalte.
 - a_i ist das i -te Element der Spaltenmatrix.
 - $\boldsymbol{\alpha}$ ist eine Spaltenmatrix, z.B. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ mit drei Zeilen und einer Spalte.

Typische Ausnahmen sind die Spaltenmatrix der generalisierten kartesischen Kräfte $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$ und die kartesische Coriolismatrix $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Operationen für Matrizen

- $\mathbf{A}\mathbf{B}$ bezeichnet die *Matrixmultiplikation* der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$ mit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{b \times d}$, wobei $b = c$ gelten muss.
- \mathbf{A}^T ist die *transponierte* Matrix von \mathbf{A} und
- \mathbf{A}^{-1} ist die *inverse* Matrix von \mathbf{A} .
- \mathbf{A}^{-T} ist die *inverse* und *transponierte* Matrix von \mathbf{A} .
- \mathbf{A}^\dagger ist die Moore-Penrose *pseudoinverse* Matrix von \mathbf{A} .

Des Weiteren werden in dieser Arbeit Vektoren des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums verwendet. Diese Vektoren werden mit *normal* gedruckten *lateinischen* und *griechischen* Buchstaben benannt und durch einen Pfeil gekennzeichnet. Die Koordinaten der Vektoren sind Spaltenmatrizen.

Beispiele für Vektoren

- \vec{v} ist ein Vektor des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums.
- $\vec{v} = \vec{\mathbf{e}}^T \mathbf{v}$ kennzeichnet die Projektion des Vektors \vec{v} bezüglich der orthogonalen Basis $\vec{\mathbf{e}}$. $\vec{\mathbf{e}} = [\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z]^T$ ist eine Spaltenmatrix mit Einheitsvektoren als Elemente und für die Koordinaten \mathbf{v} gilt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird immer als Matrixmultiplikation der Koordinaten $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ durchgeführt.

-
- Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist über die Matrixmultiplikation $\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ definiert. Dabei wird die schiefsymmetrische Matrix $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aus den Koordinaten \mathbf{a} wie folgt gebildet:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Anmerkung zur Formulierung Im Wortlaut dieser Arbeit wird zwischen Kräften und Momenten nur dann unterschieden, wenn der Kontext es erfordert. Wenn von Kräften die Rede ist, sind meistens generalisierte Kräfte gemeint.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Angewandte Methoden der Impedanzmessung	2
1.3	Ziel der Arbeit	5
1.4	Zusammenfassung der folgenden Kapitel	6
2	Modellbildung starrer Mehrkörpersysteme	7
2.1	Kinematik der starren Körper	7
2.1.1	Lage des Körpers im Raum	8
2.1.2	Koordinatentransformation	13
2.1.3	Inverse Kinematik	16
2.1.4	Geschwindigkeiten des Körpers	21
2.1.5	Relativkinematik und Zwangsgleichungen	23
2.2	Dynamik der starren Körper	26
2.2.1	Impuls, Drall und Massenverteilung starrer Körper	27
2.2.2	Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems	28
2.3	Mechanische Impedanz	31
2.3.1	Impedanz der Muskeln	32
2.3.2	Lokal linearisierte Steifigkeit und Dämpfung	34
3	Parameteridentifikation	37
3.1	Problemstellung	37
3.2	Parameteridentifikation mittels linearer Optimierung	38
3.2.1	Gütefunktional des linearen Optimierungsproblems	38
3.2.2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	40
4	Aufbau zur Messung der Impedanzparameter	44
4.1	Komponenten des Messaufbaus	44

4.1.1	Gesamtübersicht der Anlage	44
4.1.2	Der DLR Leichtbauroboter	45
4.1.3	Koppelstelle und Kraftmomentensensor	47
4.2	Regelung und Steuerung des Leichtbauroboters	48
4.2.1	Dynamisches Modell	49
4.2.2	Der Zustandsregler	53
4.2.3	Kartesische Positionsregelung	54
4.2.4	Kartesische Impedanzregelung und Manipulierbarkeit . . .	56
5	Experimentelle Identifikation der Impedanzparameter	66
5.1	Problemstellung	66
5.2	Identifikation in kartesischen Koordinaten	68
5.2.1	Modell in kartesischen Koordinaten	68
5.2.2	Identifikationsmethode und Ablauf der Messung	72
5.2.3	Interpretation der Ergebnisse	72
5.3	Identifikation im Gelenkraum	75
5.3.1	Armmodell mit Koppelstelle	75
5.3.2	Zustandsgrößen im Gelenkraum	79
5.3.3	Optimale Anregungstrajektorie	82
5.3.4	Näherung zur Schätzung der Trägheitsparameter	87
5.3.5	Bestimmung der Steifigkeit und Dämpfung	90
5.4	Eigenschaften der Impedanz für eine Kraftaufgabe	95
5.4.1	Ablauf des Experiments	96
5.4.2	Auswertung und Interpretation der Ergebnisse	97
6	Schlussfolgerung und Ausblick	102
	Literaturverzeichnis	104
A	Armmodelle	108
A.1	Erweitertes Modell des Arms mit Koppelstelle	108
A.1.1	Vorwärtskinematik	108
A.1.2	Massenmatrix und Coriolisvektor	109
A.1.3	Regressormatrix und Ausgangsvektor	109
A.2	Planares Armmodell mit zwei Freiheitsgraden	111
A.2.1	Massenmatrix und Coriolisvektor	111
A.2.2	Regressormatrix und Ausgangsvektor	111

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Eine grundlegende Anforderung an moderne Robotersysteme ist die dynamische Interaktion mit der Umgebung. Typische Beispiele sind Greifen, Fangen, Schleppen, Stoßen, Laufen, oder „nur“ das Positionieren in menschlicher Gesellschaft. Alle genannten Aufgaben haben eine Gemeinsamkeit: es entsteht ein mechanischer Kontakt. D.h. neben den durch die Starrkörperbewegung definierten Trägheits-, Zentripetal-, Coriolis- und Gewichtskräften wirken auf Roboter und Umgebung Kontaktkräfte, die bekanntlich stark von der Art des Kontakts (elastisch, plastisch, dissipativ usw.) abhängen. Um Aufgaben erfolgreich durchzuführen und zur Prävention vor Materialschäden muss der mechanische Kontakt bei der Regelung des Roboters berücksichtigt werden. Dies kann durch modellgestützte Kraftregelung oder durch „Aufweichung“ der Zwangsbedingungen in Form von Nachgiebigkeiten erfolgen. Die zuletzt genannte Methode hat sich in der Robotik etabliert und wird als mechanische Impedanz-Regelung bezeichnet.

Ein mechanisches System verhält sich in elektrischer Analogie wie eine Impedanz: Bewegung (Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung) als Ursache, ruft Kraft als Wirkung hervor. Das Konzept der Impedanz findet u.a. im DLR Leichtbauroboter (LBR) und im DLR Handarmsystem (HASy) Anwendung. Im LBR wird aktiv in Abhängigkeit der Bewegungsgrößen eine Kraft in den Antrieben der Gelenke gestellt. Das HASy besitzt Gelenke mit passiver variabler Steifigkeit (VS). Im Gegensatz zu herkömmlichen Positionier-Robotern werden beide Sys-

teme durch mindestens einen zusätzlichen freien Parameter determiniert. Somit kann z.B. dem Endeffektor (EE) eines Roboters eine aufgabenbezogene Steifigkeit vorgegeben werden. Folglich stellt sich die Frage nach einer Strategie, die Impedanz-Parameter (Steifigkeit und Dämpfung) sinnvoll einzustellen.

Entscheidend für die Einstellung der Impedanz-Parameter sind Kriterien wie Stabilität und Robustheit des geregelten Systems, Festigkeit der Roboterstruktur und der manipulierten Umgebung, sowie das fehlerfreie Folgen einer vorgegebenen Bahnkurve. Eine gängige Ingenieursmethode ist das Nachahmen eines bestehenden Systems und ein bewährtes biologisches System der Mensch. Ob der Mensch ein derartiges Regelungskonzept verwendet, konnte bisher nicht belegt werden. Aber er interagiert dynamisch mit seiner Umgebung ohne dabei sich und die manipulierten Objekte zu zerstören. Die Messung mechanischer Parameter (wie Steifigkeit, Dämpfung und Trägheit) am menschlichen Arm soll einen Einblick geben, wie das zentrale Nervensystem (ZNS) das motorische Verhalten des Menschen regelt.

1.2 Angewandte Methoden der Impedanzmessung

Das Messen der Impedanz des menschlichen Arms erfordert ein Modell und die Identifikation der beschreibenden Parameter. Das Modell muss aus mechanischer und neurophysiologischer Sicht den menschlichen Arm beschreiben.

In [20] wurde ein Modell vorgestellt, das bis heute fast ausschließlich Armsteifigkeitsmessungen zu Grunde liegt. Es beschreibt den menschlichen Arm als zwei verkoppelte Teilsysteme, bestehend aus Skelett und neuromuskulärem System. Neben der Analyse systembeschreibender Eigenschaften wurde hier die Gleichgewichtspunkt-Hypothese (GPH) aufgestellt. Die GPH besagt, dass Körperhaltung und Bewegung durch eine virtuelle Trajektorie von Punkten an denen Kräftegleichgewicht herrscht, realisiert und durch das neuromuskuläre System gesteuert wird.

Bisherige Methoden zur Identifikation der Impedanzparameter [24, 36, 27, 28, 14, 15, 5] stützen sich auf ein planares Armmodell mit zwei kinematischen Freiheitsgraden. Das starrkörpermechanische und neuromuskuläre Teilsystem wird

bezüglich eines Arbeitspunktes linearisiert (Taylor Approximation 1. Ordnung). Dadurch erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem (DGL) 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welches nur zeitinvariante Parameterschätzungen zulässt.

Die direkteste Identifikationsmethode ist in [24] beschrieben. Hier wurde der Endpunkt des Arms durch einen serielkinematischen Roboter ausgelenkt und während des stationären Zustands (0.6 s bis 1.1 s nach der Perturbation¹) die Rückstellkraft gemessen. Nach Auslenkungen in acht zufällig geordnete Richtungen und Amplituden von 5 mm oder 8 mm wurde dann mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Steifigkeitsmatrix bestimmt. Das Verfahren ist auf die Identifikation der intrinsischen² Steifigkeitsmatrix in einer Gleichgewichtslage des Arms beschränkt.

Um alle Parameter (d.h. Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix) des linearen Impedanzmodells bestimmen zu können, muss der Zeitverlauf der Verschiebungen und Rückstellkräfte in die Parameteridentifikation mit eingehen. Aufbauend auf [24] wurde z.B. in [36] der instationäre Teil der Transiente bei der linearen Regression berücksichtigt. Zur Umgehung der numerischen Differentiation wurde das DGLn zweifach zeitlich integriert. Eine weitere Möglichkeit sind Verfahren zur nichtparametrischen Systemidentifikation [27, 28]. Die sog. MIMO³ Identifikationsverfahren erfordern minimale Annahmen bezüglich der Systemstruktur. Zur Bestimmung der Impedanzparameter wird der Arm mit der Verschiebungstrajektorie in Form eines bandbegrenzten weißen Rauschens angeregt und der Zeitverlauf der Zwangskräfte an der Koppelstelle gemessen. Über die FFT⁴ der Kraft- und Verschiebungsverläufe werden die auto- und kreuzspektralen Dichtefunktionen berechnet. Aus den Dichtefunktionen können dann über eine Matrixinversion die Übertragungsfunktionen zwischen den Aus- und Eingängen des Systems bestimmt werden. Die Parametrisierung der Übertragungsfunktionen kann über Optimierungsalgorithmen wie z.B. der Nelder-Mead Simplex Methode [23] erfolgen. Ein Vorteil dieser Methode ist die Determinierung der Linearität des gemessenen Systems (partielle Kohärenzfunktionen). In der Praxis jedoch benötigt

¹Als Perturbation bezeichnet man das Stören eines Systems, hier Auslenkung.

²intrinsisch bedeutet ohne äußeres Einwirken, d.h. hier ohne Reaktion des zentralen Nervensystems

³MIMO, engl. Abk. für Mehrgrößensysteme

⁴FFT, Fast Fourier Transformation

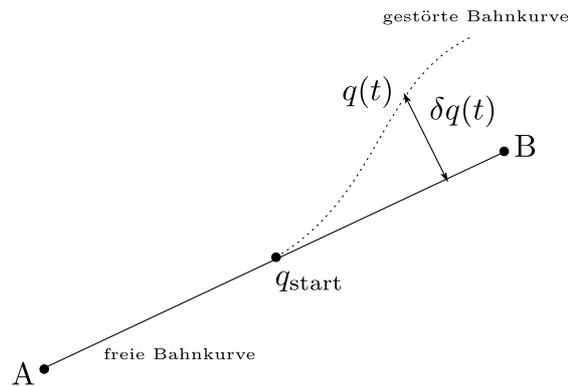


Abb. 1.1: Impedanzmessung während der Bewegung

man Anregungszeiten von 30 s [28], d.h. während der Anregung können kognitive (bewusste) Reaktionen der Versuchsperson das Messergebnis verfälschen.

Die in [24, 36, 27, 28] beschriebenen Methoden beschränken sich auf die Identifikation der Impedanzparameter während einer statischen Gleichgewichtslage. Messverfahren die auch Untersuchungen während der Bewegung ermöglichen sind auf [14, 15, 5, 10] zurückzuführen.

Bei der in [14] angewandten Methode wird der Arm während einer Punkt zu Punkt Bewegung durch kleine Kraftperturbationen von seiner ursprünglichen Bahnkurve abgelenkt (siehe Abbildung 1.1). Aus den Änderungen der Bewegungsgrößen, d.h. der Abweichung bezüglich der ungestörten Bewegung und den dafür notwendigen externen Kräften, werden lokale Steifigkeits- und Dämpfungsparameter sowie konstante Trägheitsparameter bestimmt. Dem Algorithmus zur Parameteridentifikation liegt die Variationsgleichung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines planaren Armmodells (Doppelpendel) zu Grunde. Als Variationskomponenten sind die Differenzen der Bewegungszustände (z.B. $\delta q(t) = q(t) - q_{\text{start}}$) und analog dazu die Differenzen der externen Kräfte definiert. Durch Linearisierung der Variationsgleichung bezüglich der unbekannt Parameter wird die Regressorgleichung berechnet. Drei der unbekannt Parameter determinieren die Massenverteilung des Modells und sind unabhängig von den Bewegungszuständen konstant. Das Verfahren ermöglicht somit die Schätzung der Impedanzparameter an einem Punkt der Bewegungstrajektorie. Dennoch werden Steifigkeit und Dämpfung gemeinsam identifiziert, was eine große Anzahl an Durchläufen pro Arbeitspunkt erfordert [5].

Eine Verbesserung bezüglich der erforderlichen Durchläufe ist die Methode nach [5]. Hier wird ähnlich wie bei [14] der Endpunkt des Arms während der Bewegung durch eine Positionsperturbation von seiner ursprünglichen Trajektorie abgelenkt. Die erzwungene Trajektorie ist so geformt, dass ein Zeitintervall entsteht, in dem die Differenzgeschwindigkeit zwischen ungestörter und gestörter Bahnkurve verschwindet. In diesem Zeitintervall ist die Änderung der externen Kraft proportional zur perturbationsbedingten Positionsabweichung, wobei der Proportionalitätsfaktor die lokale Steifigkeitsmatrix darstellt. Das Verfahren erfordert einen mechanischen Aktuator, der die Positionsabweichung in kurzer Zeit schwingungsfrei erzwingen kann und einen Prediktor der die ungestörte Bahnkurve schätzt. Die Positionsabweichung wird durch den bereits in [14, 15] verwendeten parallelkinematischen Manipulator und der Kommandierung eines ruckfreien Polynoms sechsten Grades erreicht. Der Prediktor greift auf einen Vorrat von Geschwindigkeitsprofilen zurück, welche während freier Bewegungen aufgezeichnet und amplituden- und zeitskaliert abgespeichert werden. Die Auswahl erfolgt über die Minimierung einer quadratischen Kostenfunktion mit Vergessensfaktor. Unter der Voraussetzung, dass die Inversedynamik der Massen bekannt ist, kann mit dieser Methode die lokale Steifigkeitsmatrix bestimmt werden.

Die genannten Methoden stellen praktisch verifizierte Werkzeuge zur Bestimmung der lokalen Impedanzparameter bereit. Da die verwendeten Manipulatoren mit zwei aktuierten Freiheitsgraden ausgestattet sind und auf Grund der wachsenden Modellkomplexität, wurden nur Untersuchungen in der Frontalebene des Menschen angestellt. Des Weiteren wurde in den genannten Publikationen die Koppelstelle zwischen menschlichem Handgelenk und Manipulator als ideal starr angenommen.

1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Messaufbaus zur Untersuchung des mechanischen Verhaltens des menschlichen Arms sowohl während einer statischen Gleichgewichtslage, als auch während der Bewegung. Der Messaufbau soll so konzipiert sein, dass räumliche Bewegungen untersucht werden können. Aufbauend auf den Verfahren aus Abschnitt 1.2 sollen Identifikationsmethoden zur Bestimmung der lokalen Impedanzparameter entwickelt und in physiologischen

Experimenten kalibriert werden. Ein ferneres Ziel dieser Arbeit ist die Schätzung zeitvarianter Impedanzparameter während der Bewegung.

1.4 Zusammenfassung der folgenden Kapitel

In Kapitel 2 und 3 werden die Grundlagen zur Modellierung und Parameteridentifikation von biomechanischen und robotischen Mehrkörpersystemen beschrieben. Dabei ist der Detaillierungsgrad der Beschreibung so gewählt, dass ein Leser ohne „robotischen“ Hintergrund die darauf folgenden Kapitel verstehen kann. Kapitel 4 ist in zwei Hauptabschnitte unterteilt. Der erste Hauptabschnitt beschreibt den Aufbau des Versuchsstandes und der zweite Hauptabschnitt die Regelung- und Steuerung des für die Messungen in Kapitel 5 bedeutenden DLR Leichtbauroboters. Kapitel 5 beschreibt im Detail die experimentelle Identifikation der Parameter von dynamischen Armmodellen. In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der Arbeit diskutiert und ein weiterführender Ausblick gegeben.

Kapitel 2

Modellbildung starrer Mehrkörpersysteme

In diesem Abschnitt wird die Modellierung starrer Mehrkörpersysteme untersucht. Die hier beschriebenen Methoden zielen auf die formalisierte Berechnung der symbolischen Bewegungsgleichungen biomechanischer und robotischer Systeme. Dabei werden die für die Beschreibung seriellkinematischer Roboter üblichen Konventionen [7, 42] weitestgehend eingehalten. Um die Modellierung komplexer Systeme mit geschlossenen kinematischen Schleifen nicht auszuschließen, wird parallel ein Formalismus auf der Basis von [31, 32] beschrieben.

2.1 Kinematik der starren Körper

Die Kinematik ist die Lehre der Bewegung. In der Kinematik erfolgt die Analyse der Bewegung ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte [7]. Allgemein untersucht man die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung und alle höheren Ableitungen bezüglich der Zeit (und anderer Variablen) von Objekten. Da man für die Formalismen aus Abschnitt 2.2 lediglich Position und Geschwindigkeit der Körper benötigt, erfolgt hier die Beschreibung nur bis in diese Ableitungsebene.

2.1.1 Lage des Körpers im Raum

Die Lage eines Körpers im Raum ist durch Position und Orientierung vollständig definiert und wird hier durch den räumlichen Abstand und der relativen Rotation zweier Koordinatensysteme ausgedrückt.

2.1.1.1 Koordinatensysteme

Ein kartesisches Koordinatensystem besteht aus einem Ursprung O und drei orthogonalen Basisvektoren $\vec{\mathbf{e}} = [\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z]^T$ und wird kurz $\mathcal{K} := \{O, \vec{\mathbf{e}}\}$ geschrieben. Zur Beschreibung der absoluten Lage eines Körpers im Raum wird ein inertiales Bezugssystem $\mathcal{K}^I := \{O^I, \vec{\mathbf{e}}^I\}$ und ein körperfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}^B := \{O^B, \vec{\mathbf{e}}^B\}$ eingeführt. Vereinfachend gilt $\mathcal{K}^B := \{O^B, \vec{\mathbf{e}}^B\} \equiv \{B\}$.

2.1.1.2 Position

Die absolute Position \vec{p} ist eine vektorielle Größe. Im Fall der absoluten Position des Körpers B zeigt der Vektor von O^I nach O^B . Den Abstand des Körpers relativ zur inertialen Basis erhält man durch Projektion von \vec{p}^B auf die Achsen $\vec{\mathbf{e}}$ eines Bezugssystems, d.h.

$$\vec{p}^B = \vec{\mathbf{e}}^{iT} \mathbf{p}^B \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}. \quad (2.1)$$

Somit ist ${}^i\mathbf{p}^B$ die absolute Position des körperfesten Bezugspunkts O^B relativ zum Ursprung O^I , ausgedrückt in Komponenten von \mathcal{K}^i .

2.1.1.3 Orientierung

Die Orientierung eines Körpers kann als relative Rotation von Koordinatensystemen gesehen werden. Anschaulich dreht man das Bezugssystem solange bis seine Achsen parallel zu den Achsen des körperfesten Koordinatensystems sind. Zur formalen Beschreibung der Rotation gibt es diverse Ansätze, die im Folgenden erläutert werden.

Rotationsmatrix Die Rotationsmatrix \mathbf{R} basiert auf der sequentiellen Drehung des Koordinatensystems um seine orthogonalen Achsen. Für die Rotation

von \mathcal{K}^2 bezüglich \mathcal{K}^1 gilt:

$$\vec{e}^1 = \mathbf{R}^{12} \vec{e}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (2.2)$$

$\mathbf{R}^{12} = [{}^1\mathbf{e}_x^2 \ {}^1\mathbf{e}_y^2 \ {}^1\mathbf{e}_z^2]$ enthält die Komponenten der Basisvektoren von \mathcal{K}^2 spaltenweise, d.h. sie projiziert $\vec{e}^1 \mapsto \vec{e}^2$. Der zweite hochgestellte Index der Rotationsmatrix (hier 2) bezeichnet das Koordinatensystem nach der Drehung und der erste hochgestellte Index (hier 1) bezeichnet das Koordinatensystem vor der Drehung.

Da $\mathbf{R} \in SO(3) := \{\mathbf{R} \in O(3) : \det \mathbf{R} = 1\}$, d.h. die Menge der Rotationsmatrizen in der speziellen orthogonalen Gruppe enthalten ist [8], gilt:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T. \quad (2.3)$$

Die absolute Orientierung eines Körpers im Raum hängt von drei unabhängigen Variablen ab, d.h. unter Verwendung von Rotationsmatrizen benötigt man Drehungen um drei orthogonale Basisvektoren. Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, muss stets die Reihenfolge der Drehungen beachtet werden. Eine anschauliche Darstellung sind die sog. Kardan-Winkel [31] mit der Drehreihenfolge X-Y-Z. Die gesamte Rotationsmatrix resultiert aus den Rotationen:

$$\vec{e}^1 = \mathbf{R}_X(\alpha_1) \mathbf{R}_Y(\alpha_2) \mathbf{R}_Z(\alpha_3) \vec{e}^2 = \mathbf{R}^{12} \vec{e}^2 \quad (2.4)$$

mit

$$\mathbf{R}^{12} = \begin{bmatrix} c\alpha_2 c\alpha_3 & -c\alpha_2 s\alpha_3 & s\alpha_2 \\ c\alpha_1 s\alpha_3 + s\alpha_3 s\alpha_2 c\alpha_3 & c\alpha_1 c\alpha_3 - s\alpha_1 s\alpha_2 s\alpha_3 & -s\alpha_1 c\alpha_2 \\ s\alpha_1 s\alpha_3 - c\alpha_3 s\alpha_2 c\alpha_3 & s\alpha_1 c\alpha_3 + c\alpha_1 s\alpha_2 s\alpha_3 & c\alpha_1 c\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

In (2.4) gilt: $c\alpha_i = \cos \alpha_i$ und $s\alpha_i = \sin \alpha_i$.

Ein Nachteil der Darstellung nach (2.4) ist die Singularität für $\alpha_2 = \pm\pi/2$. In dieser Orientierung ist es nicht möglich, die Winkel α_1 und α_3 aus den Komponenten R_{ij} zu berechnen. Abhilfe leistet in diesem Fall die Wahl einer anderen Darstellungsform wie die Euler-Winkel in der Reihenfolge Z-X-Z, oder eine singularitätsfreie, redundante Darstellung wie z.B. die Euler Parameter.

Achse-Winkel Darstellung Die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_X(\alpha)$ ist eine äquivalente Beschreibung der Drehung um \vec{e}_x mit dem Winkel α . Wählt man eine beliebige

Drehachse $\mathbf{k} = [k_x \ k_y \ k_z]^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\mathbf{k}\| = 1$ und dreht um den Winkel θ , so kann eine beliebige relative Orientierung zweier Koordinatensysteme dargestellt werden [7]. Diese Darstellung der Orientierung wird als Achse-Winkel Darstellung bezeichnet.

Formal ist \mathbf{k} ein Eigenvektor von $\mathbf{R}_K(\theta)$ (siehe [31]), d.h.

$$\mathbf{R}_K(\theta) = \mathbf{k} \mathbf{k}^T + (\mathbf{I} - \mathbf{k} \mathbf{k}^T) \cos \theta + \tilde{\mathbf{k}} \sin \theta. \quad (2.5)$$

Dabei bildet der Tildeoperator

$$\tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

die schiefsymmetrische Matrix aus den Komponenten \mathbf{k} . Aus (2.5) erhält man somit die äquivalente Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v \theta + c \theta & k_x k_y v \theta - k_z s \theta & k_x k_z v \theta + k_y s \theta \\ k_x k_y v \theta + k_z s \theta & k_y k_y v \theta + c \theta & k_y k_z v \theta - k_x s \theta \\ k_x k_z v \theta - k_y s \theta & k_y k_z v \theta + k_x s \theta & k_z k_z v \theta + c \theta \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

wobei $c\theta = \cos \theta$, $s\theta = \sin \theta$ und $v\theta = 1 - \cos \theta$.

Ausgehend von einer gegebenen Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

gilt für den Drehwinkel

$$\theta = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (2.9)$$

und für die Drehachse

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Da der Wertebereich des arccos zwischen 0 und π liegt, ist die Abbildung der Rotationsmatrix auf ein Achse-Winkel Paar nicht eindeutig. Für die Winkel $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$ existiert für (2.8) bis (2.10) keine Lösung.

Quaternionen Die Quaternionen beschreiben die Orientierung durch eine singularitätsfreie Darstellung. In der Hamilton Form [35, Teil A, Kapitel 1] besteht ein Quaternion ϵ aus einer reellen und drei imaginären Komponenten und ist wie folgt definiert:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 i + \epsilon_2 j + \epsilon_3 k. \quad (2.11)$$

Dabei sind ϵ_0 , ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 Skalare und i , j und k Operatoren, die den Regeln

- $ii = jj = kk = -1$,
- $ij = k, jk = i, ki = j$,
- $ji = -k, kj = -i, ik = -j$,

genügen. Zwei Quaternionen werden addiert, indem man die einzelnen Komponenten addiert. Unter Berücksichtigung der Regeln für Operatoren und Addition hat die Multiplikation die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b} = & a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ & + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i \\ & + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3) j \\ & + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das zu ϵ konjugierte Quaternion $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - \epsilon_1 i - \epsilon_2 j - \epsilon_3 k$ ist so definiert, dass

$$\epsilon \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} \epsilon = \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \quad (2.13)$$

gilt.

Zur Beschreibung der Orientierung verwendet man das so genannte Einheitsquaternion, das die Bedingung $\epsilon \bar{\epsilon} = 1$ erfüllt. Die Komponenten eines Vektors $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ können durch das Quaternion $\mathbf{p} = p_x i + p_y j + p_z k$ beschrieben werden, dabei ist $\epsilon_0 = 0$. Eine Rotation in Richtung $[\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]$ erfolgt dann durch die Operation $\epsilon \mathbf{p} \bar{\epsilon}$. Aus diesem Zusammenhang folgt die dem Quaternion ϵ äquivalente Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 - 2(\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) & 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_0 \epsilon_3) & 2(\epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_0 \epsilon_2) \\ 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_0 \epsilon_3) & 1 - 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2) & 2(\epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_0 \epsilon_1) \\ 2(\epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_0 \epsilon_2) & 2(\epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_0 \epsilon_1) & 1 - 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

bzw. das der Rotationsmatrix äquivalente Quaternion

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\
 \epsilon_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{4\epsilon_0} \\
 \epsilon_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{4\epsilon_0} \\
 \epsilon_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_0}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Darstellung der Orientierung durch Quaternionen ist eng verwandt mit dem Achse-Winkel Paar aus Abs. 2.1.1.3. Da in dieser Arbeit die Beschreibung der Quaternionen nur der Vollständigkeit wegen erfolgt, sei für diesen Zusammenhang auf [7, 35] verwiesen.

Beispiel zu Quaternionen Gegeben sei die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{R} beschreibt die Endeffektororientierung eines Roboters. Gesucht sind die Winkel der Rotationsmatrix. Aus (2.4) folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \arctan -\frac{R_{23}}{R_{33}} \\
 \alpha_2 &= \arcsin R_{13} \\
 \alpha_3 &= \arctan -\frac{R_{12}}{R_{11}}
 \end{aligned}$$

Wie an der Lösung für α_1 und α_3 zu erkennen ist, sind jeweils die Argumente des arctan für die gegebene Rotationsmatrix „schlecht“ definiert (Division durch Null). D.h. die Darstellung der Orientierung durch Kardan-Winkel ist für diese Konfiguration singulär. Eine Lösung erhält man jedoch für das Einheitsquaternion nach (2.15):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}} = 0.354 \\
 \epsilon_1 &= \frac{R_{32} - R_{23}}{4\epsilon_0} = 0.612 \\
 \epsilon_2 &= \frac{R_{13} - R_{31}}{4\epsilon_0} = 0.354 \\
 \epsilon_3 &= \frac{R_{21} - R_{12}}{4\epsilon_0} = 0.612
 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle kann die Nebenbedingung (2.13):

$$\epsilon \bar{\epsilon} = \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = 0.125 + 0.375 + 0.125 + 0.375 = 1$$

geprüft werden.

2.1.2 Koordinatentransformation

In diesem Abschnitt erfolgt die Beschreibung der absoluten sowie der relativen Lage der Körper des gesamten Mehrkörpersystems. Ein Mehrkörpersystem besteht aus N_B Körpern, dessen absolute Lage durch $N_B + 1$ Koordinatensysteme vollständig beschrieben werden kann. In der Regel ist die relative Lage der benachbarten Koordinatensysteme bekannt (siehe Abs. 2.1.5) und die absolute Position und Orientierung muss durch Wechsel des Bezugssystems berechnet werden. Hierfür benötigt man sog. Koordinatentransformationen.

2.1.2.1 Homogene Koordinatentransformation

Die Position des Punktes C im Raum wird durch den Vektor¹ ${}^B\mathbf{r}^C$ bezüglich \mathcal{K}^B beschrieben. \mathcal{K}^B ist ein Koordinatensystem mit dem Abstand ${}^A\mathbf{p}^B$ und der Orientierung \mathbf{R}^{AB} bezüglich \mathcal{K}^A . Die Position von C bezüglich \mathcal{K}^A erhält man durch die Vektoraddition

$${}^A\mathbf{r}^C = \mathbf{R}^{AB} {}^B\mathbf{r}^C + {}^A\mathbf{p}^B. \quad (2.16)$$

Durch geeignete Umformung [42] kann (2.16) kompakt

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}^C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{AB} & | & {}^A\mathbf{p}^B \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}^C \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A_B\mathbf{T} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}^C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

geschrieben werden. Dabei ist die homogene Transformationsmatrix ${}^A_B\mathbf{T} \in SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$, in der speziellen Euklidischen Gruppe enthalten. (2.17) transformiert die homogenen Koordinaten $[({}^B\mathbf{r}^C)^T \ 1]^T$ von ${}^B\mathbf{r}^C \in \mathbb{R}^3$.

Die $SE(3)$ ist die Gruppe der der Starrkörperbewegungen im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 und kann durch sechs unabhängige Transformationen beschrieben werden [4].

¹Vereinfachend wird sprachlich nicht zwischen einem Vektor und dessen Komponenten unterschieden.

Drei der Transformationen beschreiben die Translation in Richtung der Koordinatenachsen,

$$\mathbf{D}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

und drei die Rotation um die Koordinatenachsen

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_Y = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die $SE(3)$ ist keine orthogonale Gruppe und demzufolge ist $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}^{-1}$. Eine allgemein gültige Formel zur Berechnung der inversen Transformationmatrix ist

$${}^A_B\mathbf{T}^{-1} = {}^B_A\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} (\mathbf{R}^{AB})^T & & & -(\mathbf{R}^{AB})^T \mathbf{A} \mathbf{p}^B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.19)$$

2.1.2.2 Denavit-Hartenberg Parameter

In der Robotik hat sich ein Satz von Minimalparametern zur Beschreibung der Kinematik von Mehrkörpersystemen etabliert. Die sog. Denavit-Hartenberg (DH) Parameter eignen sich zur Beschreibung von offenen kinematischen Ketten, deren Körper durch Gelenke mit lediglich einem Freiheitsgrad verbunden sind. Dies gilt für ein Drehgelenk mit einem rotatorischen Freiheitsgrad und für sog. prismatische Gelenke mit einem translatorischen Freiheitsgrad.

Nach der Konvention der DH-Parameter erhält jeder Körper ein Koordinatensystem, das nach den Regeln aus [7, 42] festzulegen ist:

1. Gelenkachsen werden durch eine unendlich lange Linien identifiziert. Für die Schritte 2. bis 5. betrachtet man jeweils zwei benachbarte Achsen i und $i + 1$.
2. Das gemeinsame Lot oder der Schnittpunkt der betrachteten Achsen wird identifiziert. Am Schnittpunkt der Achsen oder am Schnittpunkt des Lotes mit der i ten Achse liegt dann O^i von \mathcal{K}^i .

3. \vec{e}_z^i zeigt in Richtung der Gelenkachse.
4. \vec{e}_x^i zeigt entlang des gemeinsamen Lotes oder normal zur Ebene die durch sich schneidende Gelenkachsen aufgespannt wird.
5. \vec{e}_y^i vervollständigt das Rechtssystem.
6. \mathcal{K}^0 wird so gewählt das es auf \mathcal{K}^1 zu Liegen kommt, wenn die erste Gelenkvariable Null ist.

Durch die Festlegung der Koordinatensysteme ergeben sich vier Parameter pro Körper. Dabei beschreibt

- a_i den Abstand von \vec{e}_z^i nach \vec{e}_z^{i+1} entlang \vec{e}_x^i ,
- α_i den Winkel von \vec{e}_z^i nach \vec{e}_z^{i+1} um \vec{e}_x^i ,
- d_i den Abstand von \vec{e}_x^{i-1} nach \vec{e}_x^i entlang \vec{e}_z^i und
- θ_i den Winkel von \vec{e}_x^{i-1} nach \vec{e}_x^i um \vec{e}_z^i .

Die homogene Transformationsmatrix vom \mathcal{K}^i nach \mathcal{K}^{i-1} resultiert dann aus vier Einzeltransformationen nach (2.18) zu

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{T} &= \mathbf{R}_X(\alpha_{i-1}) \mathbf{D}_X(a_{i-1}) \mathbf{R}_Z(\theta_i) \mathbf{D}_Z(d_i) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

2.1.2.3 Vorwärtskinematik des planaren Arms

Hier erfolgt die beispielhafte Beschreibung der sog. Vorwärtskinematik eines planaren Arms mit drei kinematischen FG's, auf der Basis der DH-Parameter. Die ermittelten Transformationsmatrizen dienen als Grundlage für die Berechnung der Bewegungsgleichungen.

Wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, besteht das kinematische System aus drei Körpern die miteinander und mit der inertialen Basis über Drehgelenke verbunden sind. An jedem Körper ist ein Bezugssystem fixiert. In Tabelle 2.1 sind

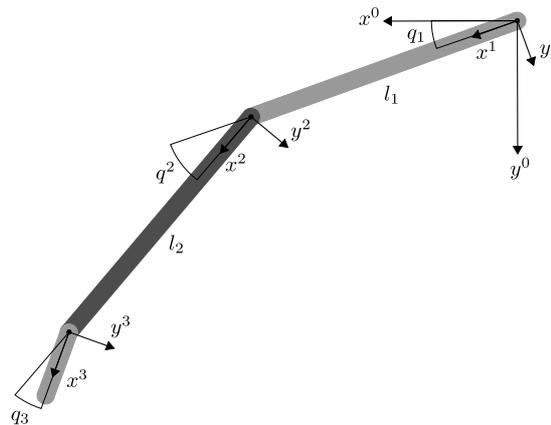


Abb. 2.1: Kinematik des planaren Arms mit 3 Freiheitsgraden

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2
2	0	l_2	0	q_2

Tab. 2.1: DH-Parameter des planaren Armmodells

die zugehörigen DH-Parameter aufgelistet. Dabei sind $q_i = q_i(t)$ die implizit zeitabhängigen Gelenkvariablen und l_1, l_2 geometrische Konstanten. Die Komponenten der Transformationsmatrizen nach (2.20) sind im Anhang A zusammengefasst.

2.1.3 Inverse Kinematik

Im letzten Abschnitt 2.1.2 wurde die sog. Vorwärtskinematik beschrieben. Sie stellt eine Abbildung zwischen der Menge der Gelenkkoordinaten $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ und der speziellen euklidischen Gruppe $SE(3)$ dar, d.h. $\mathbf{f} : \mathbf{Q} \mapsto \mathbb{R}^m$ bzw.

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (2.21)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, den sog. aufgabenbezogenen Koordinaten. Dabei ist n die Anzahl der Gelenkkoordinaten und m die Anzahl der kartesischen Koordinaten (allg. gilt $m \leq 6$). In vielen Anwendungen der Robotik und auch Biomechanik sind die aufgabenbezogenen Koordinaten bekannt und die Gelenkkoordinaten gesucht.

Demzufolge muss (2.21) nach \mathbf{q} aufgelöst werden, d.h.

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

Die Lösung für \mathbf{q} nach (2.22) bezeichnet man als inverse Kinematik.

Im nichtredundanten Fall $n = m$ ist die Vorwärtskinematik eine eindeutige Abbildung. Die inverse Kinematik hingegen besitzt abgesehen von einigen trivialen Fällen immer mehrere Lösungen, die durch Kriterien wie z.B. Gelenkwinkelbeschränkungen selektiert werden müssen. Zur Berechnung der Lösung nach (2.22) findet man in der Literatur [7, 22, 42] drei grundlegende Prinzipien: die algebraische-, geometrische- und numerische Lösung. Eine numerische Lösung wird in dieser Arbeit für den redundanten Fall (siehe Abs. 4.2.3) angewandt. Einige algebraische Lösungsansätze werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

2.1.3.1 Algebraische Lösungsansätze

Für offene kinematische Ketten bestehend aus Körpern die nur durch Gelenke mit einem FG verbunden sind, existiert eine endliche Anzahl an Lösungen, wenn $n \leq m$ [7]. Dabei geht man von dem algebraischen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^A_B \mathbf{T} \quad (2.23)$$

aus. Die linke Seite von (2.23) ist die gegebene Lage von \mathcal{K}^B bezüglich \mathcal{K}^A und die rechte Seite beschreibt die Vorwärtskinematik in Abhängigkeit der Gelenkkoordinaten \mathbf{q} . Durch (2.23) erhält man ein System von zwölf algebraischen Gleichungen, von denen aber höchstens sechs unabhängig sind (siehe Definition $SE(3)$ z.B. in [4]). Zur expliziten Lösung bezüglich \mathbf{q} existiert kein allgemeingültiger Formalismus, deswegen werden im Folgenden nur einige Formeln zur Lösung von Teilproblemen aus [7] beschrieben.

Vierquadrantenlösung für Sinus und Kosinus Die einzelne Gleichung

$$\sin \theta = a, \quad (2.24)$$

besitzt die zwei Lösungen

$$\theta = \operatorname{atan2}(a, \pm\sqrt{1-a^2}) \quad (2.25)$$

und analog dazu

$$\cos \theta = b, \quad (2.26)$$

$$\theta = \operatorname{atan2}(\pm\sqrt{1-b^2}, b). \quad (2.27)$$

Da die Arkustangensfunktion nur einen Wertebereich von $\pm\pi/2$ abdeckt, wird hier zur Berechnung der Winkel die $\operatorname{atan2}$ -Funktion verwendet. $\operatorname{atan2}$ ist die Arkustangensfunktion mit zwei Argumenten, deren Wertebereich sich über die vier Quadranten des Einheitskreises erstreckt.

Nullstellen der Linearkombination aus Sinus und Kosinus Die transzendente Gleichung

$$a \cos \theta + b \sin \theta = 0 \quad (2.28)$$

besitzt die zwei Lösungen

$$\theta = \operatorname{atan2}(a, -b) \quad \text{und} \quad \theta = \operatorname{atan2}(-a, b). \quad (2.29)$$

Polynomüberführung Ein weiteres wichtiges Werkzeug für Problemstellungen der inversen Kinematik ist die sog. „Tangens des halben Winkels“ Substitution:

$$u = \tan \frac{\theta}{2}, \quad (2.30)$$

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}.$$

(2.30) überführt eine transzendente Gleichung in ein Polynom, dessen Nullstellen wieder rücksubstituiert werden können und somit die Lösung für den Winkel θ repräsentieren. Ein Beispiel hierfür ist die Gleichung

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \quad (2.31)$$

und deren Lösungen

$$\theta = \operatorname{atan2}(a, b) \pm \operatorname{atan2}(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c). \quad (2.32)$$

Tausch der Variablen Das transzendente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= c, \\ a \sin \theta + b \cos \theta &= d, \end{aligned} \quad (2.33)$$

kann durch einen Tausch der Variablen gelöst werden. Dabei ersetzt man a und b in (2.33) durch

$$\begin{aligned} r &= +\sqrt{a^2 + b^2}, \\ \gamma &= \text{atan2}(b, a), \\ a &= r \cos \gamma, \\ b &= r \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Das umgeformte Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{c}{r} &= \cos \gamma \cos \theta - \sin \gamma \sin \theta = \cos(\gamma + \theta), \\ \frac{d}{r} &= \cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta = \sin(\gamma + \theta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

und kann mit der atan2-Funktion bezüglich der Winkelsumme

$$\gamma + \theta = \text{atan2}(d, c) \quad (2.36)$$

umgestellt werden. Somit folgt für (2.33) die Lösung

$$\theta = \text{atan2}(d, c) - \text{atan2}(b, a). \quad (2.37)$$

Ein weiterer wichtiger Ansatz zur Lösung der inversen Kinematik ist die Methode nach Piper [30]. Sie kann dann angewendet werden, wenn sich die letzten drei Gelenkachsen einer nicht-redundanten kinematischen Kette in einem Punkt schneiden. Da diese Methode in dieser Arbeit nicht verwendet wird, sei an dieser Stelle nur auf die genannte Literatur verwiesen.

2.1.3.2 Inverse Kinematik des planaren Arms

Unter Verwendung der Formeln aus dem letzten Abschnitt wird hier für (A.4) des planaren Arms (siehe Abschnitt 2.1.2.3) die inverse Kinematik beispielhaft abgeleitet. Ausgehend von (A.4) i.V.m. (2.23) erhält man vier nichtlineare Gleichungen:

$$\cos \varphi = \cos(q_1 + q_2 + q_3), \quad (2.38)$$

$$\sin \varphi = \sin(q_1 + q_2 + q_3), \quad (2.39)$$

$$p_x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2), \quad (2.40)$$

$$p_y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2). \quad (2.41)$$

Dabei beschreibt der Winkel φ die bekannte Orientierung und p_x , p_y die bekannte Position von \mathcal{K}^3 bezüglich \mathcal{K}^0 (siehe Abbildung 2.1 aus Abschnitt 2.1.2.3). Aus der Summe der quadrierten Gleichung (2.40) und (2.41) resultiert der Ausdruck

$$p_x^2 + p_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2, \quad (2.42)$$

der dann nach $\cos q_2$ aufgelöst werden kann:

$$\cos q_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (2.43)$$

(2.43) hat die Form (2.26) und somit erhält man nach (2.27) die Lösungen für den Winkel

$$q_2 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}, \cos q_2 \right) \quad (2.44)$$

Eine Lösung für q_2 erfordert $-1 \leq \cos q_2 \leq 1$. Anschaulich bedeutet dies, dass der Ursprung O^3 des Endeffektorkoordinatensystems \mathcal{K}^3 innerhalb eines durch l_1 und l_2 beschränkten Arbeitsraums liegen muss. Des Weiteren existieren für q_2 zwei Lösungen, die aber im Fall des menschlichen Arms durch die Winkelbegrenzung² $0 < q_2 \leq 3\pi/4$ selektiert werden können. Steht die Lösung für q_2 fest, können (2.40) und (2.41) durch die Substitution

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 \cos q_2 &= k_1 \\ l_2 \sin q_2 &= k_2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

auf die Form nach (2.33)

$$\begin{aligned} p_x &= k_1 \cos q_1 - k_2 \sin q_1, \\ p_y &= k_1 \sin q_1 + k_2 \cos q_1, \end{aligned} \quad (2.46)$$

gebracht werden und somit lautet die Lösung für q_1 nach (2.37):

$$q_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}(k_2, k_1). \quad (2.47)$$

Aus (2.38) und (2.39) erhält man für die Summe der Winkel

$$q_1 + q_2 + q_3 = \text{atan2}(\sin \varphi, \cos \varphi), \quad (2.48)$$

und somit lautet die Lösung für den letzten gesuchten Winkel:

$$q_3 = \text{atan2}(\sin \varphi, \cos \varphi) - q_1 - q_2. \quad (2.49)$$

² q_2 ist die Variable des Ellbogengelenks. Der Unterarm kann aufgrund des Ellbogengelenks nur gebeugt, aber nicht überstreckt werden.

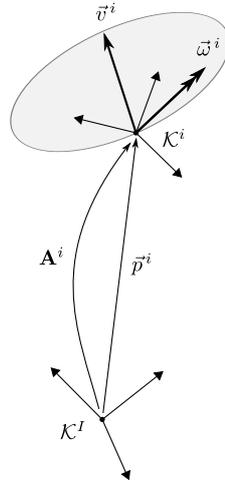


Abb. 2.2: Absolute Geschwindigkeiten des Körpers i

2.1.4 Geschwindigkeiten des Körpers

In diesem Abschnitt werden die absoluten Geschwindigkeiten des starren Körpers bezüglich eines ortsfesten inertialen Koordinatensystems beschrieben. Dafür wird ein Koordinatensystem \mathcal{K}^i auf dem Körper fixiert (siehe Abbildung 2.2). Zur Vereinfachung der Darstellung in Hinblick auf die Beschreibung des gesamten Mehrkörpersystems wird hier eine Rotationsmatrix $\mathbf{A}^{iI} \equiv \mathbf{R}^{iI}$ zur Beschreibung der absoluten Orientierung eines Körpers eingeführt. \mathbf{A}^{iI} bezieht sich auf den Körper und beschreibt somit die absolute Orientierung des inertialen Koordinatensystems \mathcal{K}^I bezüglich \mathcal{K}^i . Des Weiteren wird im Folgenden der Index I weggelassen, d.h. $\mathbf{A}^i \equiv \mathbf{A}^{iI}$.

2.1.4.1 Winkelgeschwindigkeit

Die zeitvariante Rotation von \mathcal{K}^i bezüglich \mathcal{K}^I wird als absolute Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}^i \equiv \vec{\omega}^{iI}$ bezeichnet. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit erhält man durch die Projektion

$$\vec{\omega}^i = \vec{e}^{iT} {}^i\boldsymbol{\omega}^{iI}. \quad (2.50)$$

Im Folgenden werden auch für die Winkelgeschwindigkeit die überflüssigen Indizes weggelassen, d.h. $\boldsymbol{\omega}^i \equiv {}^i\boldsymbol{\omega}^{iI}$ beschreibt die Winkelgeschwindigkeit von \mathcal{K}^i bezüglich \mathcal{K}^I ausgedrückt in Koordinaten von \mathcal{K}^i .

Die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers kann durch sukzessive zeitvariante Ro-

tationen um die Basisvektoren \mathbf{e}_i berechnet werden (siehe z.B. [21]). Für Kardan-Winkel mit der Drehreihenfolge X-Y-Z lautet der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{J}_\alpha(\boldsymbol{\alpha}^i) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i \quad (2.51)$$

mit

$$\mathbf{J}_\alpha(\boldsymbol{\alpha}^i) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

als sog. Jacobimatrix der Kardan-Winkel-Darstellung.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit basiert auf der orthogonalen Eigenschaft

$$\mathbf{A}^i \mathbf{A}^{iT} = \mathbf{I} \quad (2.53)$$

der Rotationsmatrizen. Dabei kann aus der zeitlichen Ableitung

$$\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} + \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{A}}^{iT} = 0 \quad (2.54)$$

von (2.53) die allgemein bekannte Poisson-Gleichung

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} \quad (2.55)$$

abgeleitet werden.

2.1.4.2 Translatorische Geschwindigkeit

Die absolute translatorische Geschwindigkeit des Körpers i erhält man durch die zeitliche Ableitung des Positionsvektors (siehe Abbildung 2.2)

$$\vec{v}^i = \dot{\vec{p}}^i = \mathbf{e}^{iT} \frac{d}{dt} (\mathbf{A}^{iT} {}^i \mathbf{p}^i) = \mathbf{e}^{iT} {}^i \mathbf{v}^i \quad (2.56)$$

bezüglich der inertialen Basis \mathcal{K}^I . Durch geeignete Umformung von (2.56) und unter Verwendung von (2.55) folgt für die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{A}^i \left(\dot{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{p}^i + \mathbf{A}^{iT} \dot{\mathbf{p}}^i \right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{p}^i + \dot{\mathbf{p}}^i. \quad (2.57)$$

In (2.57) und im Folgenden wird jeweils von der vereinfachten Schreibweise $\mathbf{v}^i \equiv {}^i \mathbf{v}^i$ und $\mathbf{p}^i \equiv {}^i \mathbf{p}^i$ Gebrauch gemacht.

2.1.4.3 Differentielle Jacobimatrix

Die differentielle Jacobimatrix ist eine mehrdimensionale Form von Ableitungen [7]. In der Robotik verwendet man die Jacobimatrix vorwiegend zur Transformation von Geschwindigkeiten. Definiert man den Vektor der generalisierten absoluten Geschwindigkeiten des Körpers i

$$\boldsymbol{\nu}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^i \\ \boldsymbol{\omega}^i \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

so gilt

$$\boldsymbol{\nu}^i = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.59)$$

mit der differentiellen Jacobimatrix

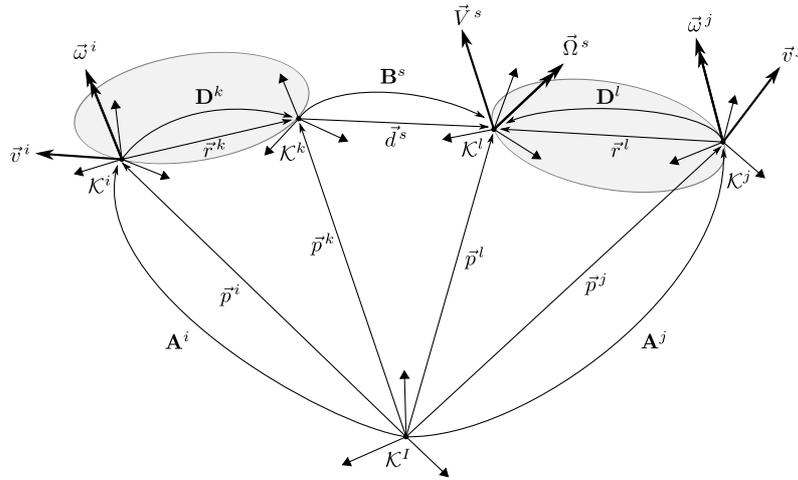
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (2.60)$$

Nach der Konvention der vorhergehenden Abschnitte wurde auch hier die formale Abkürzung $\boldsymbol{\nu}^i \equiv {}^i\boldsymbol{\nu}^i$ verwendet. Demzufolge bezieht sich die Jacobimatrix aus (2.60) auf das körperfeste Bezugssystem \mathcal{K}^i . Eine Vorschrift für den Wechsel des Bezugssystems der Jacobimatrix ist

$${}^A\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{AB} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{R}^{AB} \end{array} \right] {}^B\mathbf{J}(\mathbf{q}). \quad (2.61)$$

2.1.5 Relativkinematik und Zwangsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die kinematischen Beziehungen zweier benachbarter Körper nach [38] beschrieben. Dabei wird die Interaktion der Körper i und j durch das Gelenk s festgelegt. Als Angriffspunkt der Gelenke werden körperfeste Marker-Koordinatensysteme \mathcal{K}^k eingeführt. Die relative Position des k -ten Markers bezüglich \mathcal{K}^i wird durch den Ortsvektor $\vec{r}^k = \vec{\mathbf{e}}^{iT} \mathbf{r}^k$ und die relative Orientierung \mathcal{K}^k bezüglich \mathcal{K}^i wird durch die Rotationsmatrix $\mathbf{D}^k \equiv \mathbf{D}^{ki} \equiv \mathbf{R}^{ki}$ determiniert. Analoges gilt für den l -ten Marker des j -ten Körpers (siehe Abbildung 2.3). Für starre Körper gilt $\mathbf{r}^k = \text{konst.}$ und $\mathbf{D}^k = \text{konst.}$.


 Abb. 2.3: Relativkinematik zweier benachbarter Körper i und j

2.1.5.1 Kinematik der Marker

Die absolute Position des k -ten Markers erhält man aus der Beziehung

$$\vec{p}^k = \vec{p}^i + \vec{r}^k = \vec{e}^{iT} (\mathbf{p}^i + \mathbf{r}^k) = \vec{e}^{iT} {}^i \mathbf{p}^k \rightsquigarrow \mathbf{p}^k = {}^i \mathbf{p}^i + \mathbf{r}^k \quad (2.62)$$

und die absolute Geschwindigkeit aus

$$\vec{v}^k = \dot{\vec{p}}^k = \vec{e}^{iT} \frac{d}{dt} (\mathbf{A}^{iT} (\mathbf{p}^i + \mathbf{r}^k)) = \vec{e}^{iT} {}^i \mathbf{v}^k. \quad (2.63)$$

Da $\mathbf{r}^k = \text{konst.}$ und somit $\dot{\mathbf{r}}^k = 0$, lauten die Komponenten der absoluten Markergeschwindigkeit mit \mathbf{v}^i aus (2.57):

$${}^i \mathbf{v}^k = \mathbf{v}^i + \tilde{\omega}^i \mathbf{r}^k. \quad (2.64)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit eines Markers gilt

$$\omega^k = \omega^i. \quad (2.65)$$

2.1.5.2 Relativkinematik der Interaktion zweier Körper

Zur Beschreibung der relativen Orientierung zweier benachbarter Körper wird die Rotationsmatrix

$$\mathbf{B}^s \equiv \mathbf{R}^{lk} = \mathbf{D}^l \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{D}^{kT} \quad (2.66)$$

eingeführt. Die Rotationsmatrix \mathbf{B}^s wird im allgemeinen durch die Winkel $\boldsymbol{\beta}^s \in \mathbb{R}^3$ determiniert, wobei hier die Darstellung der Rotation (z.B. Kardan-Winkel) zu beachten ist. Der Abstand von O^k nach O^l wird durch den Abstandsvektor

$$\vec{d}^s = \vec{p}^l - \vec{p}^s \quad (2.67)$$

beschrieben, wobei die Komponenten von \vec{d}^s durch

$${}^k \mathbf{d}^s = \mathbf{B}^{sT} \mathbf{D}^l (\mathbf{p}^j + \mathbf{r}^l) - \mathbf{D}^k (\mathbf{p}^i + \mathbf{r}^k) \quad (2.68)$$

ausgedrückt werden können.

Die Relativgeschwindigkeiten werden zur Ableitung der Dynamikgleichungen in Abschnitt 2.2 nicht in expliziter Form benötigt und daher nur in vektorieller Schreibweise angegeben. Somit lautet die Beziehung für die relative Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\Omega}^s = \vec{\omega}^j - \vec{\omega}^i = \mathbf{e}^{kT} {}^k \Omega^s \quad (2.69)$$

und für die relative translatorische Geschwindigkeit

$$\vec{V}^s = \dot{\vec{p}}^l - \dot{\vec{p}}^k - \vec{\omega}^k \times \vec{d}^s = \mathbf{e}^{kT} {}^k \mathbf{V}^s \quad (2.70)$$

Der Term $\vec{\omega}^k \times \vec{d}^s$ entfällt in (2.70) aufgrund der zeitlichen Ableitung $\vec{V}^s = \frac{\partial \vec{d}^s}{\partial t}$ im bewegten System \mathcal{K}^k .

Aus den Beziehungen (2.66) bis (2.70) kann ein Algorithmus zur iterativen Berechnung der Vorwärtskinematik für offene kinematischen Ketten abgeleitet werden. Dabei werden die konstanten Größen \mathbf{r}^k und \mathbf{D}^k als bekannt vorausgesetzt. Durch die relativen Größen ${}^k \mathbf{d}^s(\mathbf{q})$, $\mathbf{B}^s(\mathbf{q})$, ${}^k \Omega^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und ${}^k \mathbf{V}^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ werden die Gelenkvariablen \mathbf{q} und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\mathbf{q}}$ eingeführt. Zur Berechnung der Vorwärtskinematik wird der Algorithmus

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^j &= \mathbf{D}^l \mathbf{B}^s \mathbf{D}^k \mathbf{A}^i \\ \mathbf{p}^j &= \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{p}^i + \mathbf{r}^k + \mathbf{D}^{kT} {}^k \mathbf{d}^s) - \mathbf{r}^l \\ \boldsymbol{\omega}^j &= \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} (\boldsymbol{\omega}^i + \mathbf{D}^{kT} {}^k \Omega^s) \\ \mathbf{v}^j &= \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \left(\mathbf{D}^{kT} \left({}^k \mathbf{V}^s - \tilde{\mathbf{d}}^s \mathbf{D}^k \boldsymbol{\omega}^i \right) + \mathbf{v}^i - \tilde{\mathbf{r}}^k \boldsymbol{\omega}^i \right) + \tilde{\mathbf{r}}^l \boldsymbol{\omega}^j \end{aligned} \quad (2.71)$$

von $j = 1 \dots N_b$ mit N_b als Anzahl der Körper durchlaufen. Dabei gilt für die Indizierung der iterativen Schleife $i = j - 1$, $k = j - 1$, $l = j$ und $s = j$. Für $j = 1$ und $i = 0$ sind die lagebeschreibenden Größen der inertialen Basis $\mathcal{K}^{i=0}$ konstant, d.h. $\mathbf{A}^0 = \text{konst.}$ und $\mathbf{p}^0 = \text{konst.}$ und die Geschwindigkeiten gleich Null, d.h. $\boldsymbol{\omega}^0 = 0$ und $\mathbf{v}^0 = 0$.

2.1.5.3 Implizite Zwangsgleichungen

Die Beschreibung der Kinematik von sog. geschlossenen Schleifen kann durch die Verwendung von Zwangsbedingungen erfolgen. Dafür beschreibt man z.B. die Vorwärtskinematik zweier offener Ketten (siehe 2.1.5.2) und schließt die „freien Enden“ der Ketten durch die Einführung von Bedingungen. Die impliziten Zwangsbedingungen auf Positionsebene haben die Form der algebraischen Gleichung

$$\mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}^c \in \mathbb{R}^{N_c} \quad (2.72)$$

und schränken die relative Verschiebung/Verdrehung (z.B. $\mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t) = \mathbf{d}^s = 0$) der „freien Kettenenden“ ein. N_c ist dabei die Anzahl der skalaren Bedingungen.

Die impliziten Zwangsgleichungen auf Geschwindigkeitsebene erhält man durch die zeitliche Ableitung von (2.72). Sie haben die Form

$$\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.73)$$

mit der Jacobimatrix der gesperrten Bewegung

$$\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.74)$$

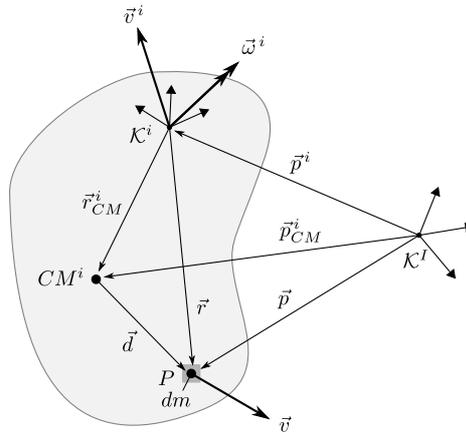
Durch die Einschränkung der relativen Verschiebung/Verdrehung aufgrund der Bedingung nach (2.72) wirken sog. Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}^c \in \mathbb{R}^{N_c}$ die unter Verwendung von (2.74) mit

$$\boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t)^T \boldsymbol{\lambda}^c \quad (2.75)$$

in den Gelenkraum des Mehrkörpersystems projiziert werden können.

2.2 Dynamik der starren Körper

In diesem Abschnitt wird die Starrkörperdynamik von Mehrkörpersystemen beschrieben. Aufbauend auf den Definitionen der Massenverteilung in Abschnitt 2.2.1 folgt in Abschnitt 2.2.2 unter Verwendung des Lagrange-Formalismus 2. Art die Ableitung der Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems. Der Formalismus wird in Abschnitt 2.2.2.2 zur Beschreibung von geschlossenen Systemen durch die Lagrange-Multiplikator Methode erweitert.


 Abb. 2.4: Massenverteilung des starren Körpers i

2.2.1 Impuls, Drall und Massenverteilung starrer Körper

Zur Beschreibung der Massenverteilung eines starren Körpers wird hier das allgemein bekannte Kontinuumsmodell angenommen. Dies beruht auf der Annahme, dass der i -te Körper B^i aus einer Aneinanderreihung von infinitesimal kleinen Massenelementen $dm = \text{konst.}$ besteht [38]. Das Massenelement dm sitzt im Punkt P des Körpers mit einem Abstand \vec{r} zu \mathcal{K}^i und besitzt somit eine absolute Position \vec{p} aber keine Orientierung (siehe Abbildung 2.4).

Die Masse des i -ten Körpers ist über das Integral

$$m^i = \int_{B_i} dm = \text{konst.} \quad (2.76)$$

festgelegt. Da der Ortsvektor \vec{r} nicht von der Massenvariable m abhängt, d.h. $\int_{B_i} \vec{r} dm = m^i \vec{r}_{CM}^i$, lauten die Komponenten des Schwerpunktsabstands³ bezüglich des körperfesten Bezugssystems \mathcal{K}^i

$$\mathbf{r}_{CM}^i = \frac{1}{m^i} \int_{B_i} \mathbf{r} dm = \text{konst.} \quad (2.77)$$

Wie aus Abbildung 2.4 ersichtlich gilt dann mit (2.77) für die absolute Schwerpunktsposition

$$\vec{p}_{CM}^i = \vec{p} + \vec{r}_{CM}^i \quad (2.78)$$

³der Index CM Kennzeichnet den Massenschwerpunkt (engl. *center of mass*)

und für das Massenmoment 1. Ordnung bezüglich des Schwerpunktes CM^i

$$\int_{B_i} \vec{d} dm = 0. \quad (2.79)$$

Der translatorische Impuls des Körpers i ist eine vektorielle Größe und durch

$$\vec{P}^i = \int_{B_i} d\vec{P}^i = \int_{B_i} \vec{v} dm = m^i \vec{v}_{CM}^i, \quad (2.80)$$

mit der Schwerpunktschwindigkeit $\vec{v}_{CM}^i = \vec{v}^i - \vec{r}_{CM}^i \times \vec{\omega}^i$, definiert.

Der Drall (Drehimpuls) des Körpers i steht senkrecht auf der durch \vec{r} und \vec{P}^i aufgespannten Ebene und kann somit durch das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \vec{D}_O^i &= \int_{B_i} \vec{r} \times d\vec{P}^i = \int_{B_i} \vec{r} \times \vec{v} dm \\ &= \int_{B_i} \vec{r} dm \times \vec{v}^i - \int_{B_i} \vec{r} \times \vec{r} dm \times \vec{\omega}^i \\ &= m^i \vec{r}_{CM}^i \times \vec{v}^i - \int_{B_i} \vec{r} \times \vec{r} dm \times \vec{\omega}^i \end{aligned} \quad (2.81)$$

ausgedrückt werden. In (2.81) wurde die Geschwindigkeit des Punktes P , d.h. $\vec{v} = \vec{v}^i - \vec{r} \times \vec{\omega}^i$ substituiert. Die Koordinaten des Dralls erhält man durch die Projektion bezüglich \mathcal{K}^i :

$$\mathbf{D}_O^i = m^i \tilde{\mathbf{r}}_{CM}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{I}_O^i \boldsymbol{\omega}^i. \quad (2.82)$$

Dabei ist

$$\mathbf{I}_O^i = - \int_{B_i} \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} dm = \begin{bmatrix} I_{O,xx}^i & -I_{O,xy}^i & -I_{O,xz}^i \\ & I_{O,yy}^i & -I_{O,yz}^i \\ sym. & & I_{O,zz}^i \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

der symmetrisch und positiv definite Trägheitstensor des Körpers i bezüglich \mathcal{K}^i .

2.2.2 Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems

2.2.2.1 Lagrange-Formalismus 2. Art

Sind die Geschwindigkeiten (siehe Abschnitt 2.1.4 und 2.1.5) und Massenverteilungen (siehe Abschnitt 2.2.1) der Körper bekannt, so können mit dem Lagrange-

Formalismus die Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems für die generalisierten Koordinaten⁴ $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ abgeleitet werden [21, 22].

Dafür definiert man die sog. Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \quad (2.84)$$

als Differenz der kinetischen Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und potentiellen Energie $V(\mathbf{q})$ und erhält dann die Lagrange-Bewegungsgleichungen durch die Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad \text{für } i = 1 \dots n, \quad (2.85)$$

mit den generalisierten Kräften/Momenten $\boldsymbol{\tau}$. Nichtkonservative Kräfte z.B. aufgrund Reibung oder Dämpfung können in (2.85) durch einen Koeffizientenvergleich im virtuellen Arbeitsausdruck

$$\delta A^e = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 + \dots + \tau_n \delta q_n \quad (2.86)$$

berücksichtigt werden [21].

Um die Bewegungsgleichungen (2.85) auf die allgemeine Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.87)$$

zu bringen, wird die kinetische Energie durch die Beziehung

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_b} (\boldsymbol{\omega}^{iT} \mathbf{I}_O^i + m^i \mathbf{v}^{iT} \mathbf{v}^i + 2 m^i \mathbf{r}_{CM}^{iT} (\tilde{\mathbf{v}}^i \boldsymbol{\omega}^i)) \quad (2.88)$$

und die potentielle Energie durch die Beziehung

$$V(\mathbf{q}) = -g \mathbf{e}_g^T \sum_{i=1}^{N_b} (m^i \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{p}^i + \mathbf{r}_{CM}^i)) \quad (2.89)$$

berechnet. Dabei ist $\mathbf{e}_g \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor, der in Richtung der Gravitation zeigt und g ist die Gravitationskonstante.

Die Darstellung des Coriolis- und Zentripetalvektors $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ ist nicht eindeutig. Unter Verwendung der sog. Christoffel Symbole $c_{i,jk}$ lauten die Elemente der Matrix \mathbf{C} [22]:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \\ c_{i,jk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

⁴In der Robotik bezeichnet man die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} meist als Gelenkkoordinaten

Die Elemente des Gravitationsvektors $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ können mit

$$g_i = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1 \dots n, \quad (2.91)$$

abgeleitet werden. Somit kann man die Vorschriften zur Berechnung der Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{C} und des Vektors \mathbf{g} wie folgt zusammenfassen:

- die Diagonalelemente der Massenmatrix M_{ii} sind gleich der Koeffizienten von $\dot{q}_i^2/2$ und die Nebendiagonalelemente M_{ij} für $i \neq j$ sind gleich der Koeffizienten von $\dot{q}_i \dot{q}_j$, jeweils des Ausdrucks der kinetischen Energie aus (2.88);
- die Elemente von \mathbf{C} berechnen sich nach (2.90)
- und die Elemente von \mathbf{g} nach (2.91).

2.2.2.2 DAE und ODE geschlossener Systeme

Eine Möglichkeit zur Berechnung der symbolischen Bewegungsgleichungen eines sog. geschlossenen Mehrkörpersystems (d.h. ein System mit geschlossenen kinematischen Schleifen) ist die sog. Lagrange-Multiplikator Methode. Dabei berechnet man erst die Bewegungsgleichungen der Körper mit serieller kinematischer Struktur nach dem Formalismus aus Abschnitt 2.2.2.1 und schließt dann das System durch die Zwangsbedingungen aus Abschnitt 2.1.5.3. Die resultierenden Bewegungsgleichungen haben dann die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t)^T \boldsymbol{\lambda}^c \\ \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

wobei in (2.92) die Kräfte/Momente

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau} \quad (2.93)$$

zusammengefasst wurden. Neben der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.92)₁ enthält das System (2.92) eine sog. algebraische Nebenbedingung (2.92)₂. Um diese Nebenbedingung stets zu erfüllen, wird zur gewöhnlichen Differentialgleichung der Form (2.87) aus Abschnitt 2.2.2.1 ein Term von generalisierten Zwangskräften nach (2.75) zugefügt. $\boldsymbol{\lambda}^c$ wird dabei als Lagrange-Multiplikator bezeichnet.

Das geschlossene System (2.92) wird in der Literatur (siehe z.B. [29]) als differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE) mit dem Differentiationsindex 3 bezeichnet. Dabei gibt der Differentiationsindex die Anzahl der Differentiationen (der Nebenbedingung (2.92)₂) an, die zur Elimination der unbekanntes Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}^c$ nötig sind.

Das Index 3 Problem (2.92) kann nur mit speziellen numerischen Algorithmen gelöst werden, die z.B. nicht in den Standardmodulen von MATLAB enthalten sind. Des Weiteren ist die Form (2.92) für regelungstechnische Anwendungen ungeeignet, da (2.92) keinen expliziten Ausdruck für die inverse Dynamik liefert. Durch Einsetzen von (2.92)₁ in die zweifache zeitliche Ableitung der Zwangsgleichung (2.92)₂

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{g}}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\partial \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\
 &= \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = 0 \\
 \ddot{\mathbf{g}}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \\
 \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q} \partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}^c(\mathbf{q}, t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

erhält man einen expliziten Ausdruck für die unbekanntes Zwangskraft

$$\boldsymbol{\lambda} = - \left(\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t)^T \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right), \tag{2.95}$$

der eingesetzt in (2.92) das DAE in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem (ODE) überführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{P}^c(\mathbf{q}, t) \left(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \\
 \mathbf{P}^c(\mathbf{q}, t) &= -\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t)^T \left(\mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{G}^c(\mathbf{q}, t)^T \right)^{-1} \\
 \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Im Fall einer numerischen Integration des ODE's (2.96) müssen konsistente Anfangsbedingungen gewählt werden, die $\mathbf{g}^c(\mathbf{q}, 0) = 0$ genügen.

2.3 Mechanische Impedanz

In diesem Abschnitt wird der Begriff der mechanischen Impedanz am Beispiel des neuromuskulären Systems eingeführt. Ausgehend von der nichtlinearen Dynamik

der Muskeln (siehe Abschnitt 2.3.1) werden dann die aus der klassischen Mechanik bekannten Begriffe der linearen Steifigkeit und viskosen Dämpfung abgeleitet (siehe Abschnitt 2.3.2) und einige grundlegende Eigenschaften angegeben.

2.3.1 Impedanz der Muskeln

Als mechanische Impedanz der Muskeln bezeichnet man ein Systemverhalten mit den Bewegungsgrößen (d.h. Längen und Änderungsgeschwindigkeiten der Längen) sowie einem neuralen Eingang als Eingangsgrößen und Kräften (d.h. Muskelkräften) als Ausgangsgrößen. Dabei werden die Eingangsgrößen durch eine im allgemeinen nichtlineare Funktion auf den Ausgang abgebildet. Die Funktion muss somit in expliziter Form⁵ für die Kräfte als Ausgang vorliegen.

Das Modell eines Muskels kann durch die allgemeine Zustandsraumdarstellung für nichtlineare Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= g(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.97}$$

beschrieben werden. Dabei beschreibt die algebraische Funktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ die Dynamik der Zustände \mathbf{x} des Muskels in Abhängigkeit der Eingangsgrößen \mathbf{u} und $g(\mathbf{x})$ die Ausgangskräfte \mathbf{y} des Muskels. In der Literatur werden diverse Ansätze zur Beschreibung des Systems (2.97) (siehe z.B. [40, 41]) meist basierend auf der Pionierarbeit von [16] vorgeschlagen. Diese Modelle eignen sich meist nur für spezielle Anwendungen. Da eine detaillierte Analyse bezüglich des passenden Modells nicht Kernthema dieser Arbeit ist, wird die Struktur von (2.97) hier nicht weiter untersucht.

Im Folgenden wird angenommen das $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ integrierbar ist und eine explizite, allgemein nichtlineare Funktion für die Kraft eines Muskels

$$h^m = h^m(l_m, l_0, v_m, a_m),\tag{2.98}$$

mit der gesamten Muskellänge l_m , der Muskellänge im entspannten Zustand l_0 , der Änderungsgeschwindigkeit der Muskellänge v_m und der neuralen Aktivierung a_m formuliert werden kann. Das Modell (2.98) kann als Kraftelement gesehen werden, das über die starren Körper des Skelettes Momente in den Gelenken des

⁵Der Beweis für die Notwendigkeit der expliziten Funktion für die Kraft kann in [20] nachvollzogen werden.

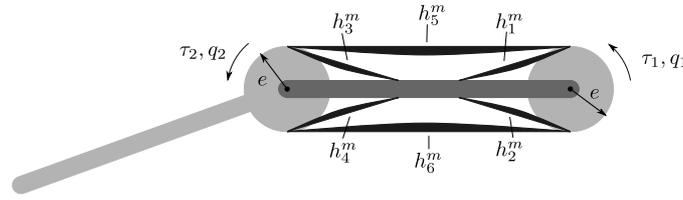


Abb. 2.5: Theoretisches Beispiel eines planaren Arms mit Muskeln als Kraftelemente. h_m^i für $i = 1 \dots 4$ sind monoartikuläre Muskeln und h_m^i für $i = 5, 6$ sind biartikuläre Muskeln. Die Hebelarmlängen e sind hier vereinfachend als konstant und für alle Angriffspunkte als gleich dargestellt.

Arms einprägt und somit eine Bewegung der starren Körper hervorruft⁶ (siehe Abschnitt 2.2). Diese Bewegung wird wiederum auf den Muskel rückgekoppelt und verursacht dort eine Änderung der Muskellänge l_m .

Die Einprägung der Gelenkmomente sowie die Rückkopplung der Muskelbewegung wird über mechanische Hebelarme umgesetzt (siehe Abbildung 2.5). Dabei greifen die sog. monoartikulären Muskeln an den Hebelarmen eines Gelenks und die sog. biartikulären Muskeln an den Hebelarmen zweier Gelenke an. Die Umsetzung der Muskelkräfte auf die Gelenkmomente kann durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{L} \mathbf{h}^m(\mathbf{l}_m, \mathbf{l}_0, \mathbf{v}_m, \mathbf{a}_m) \quad (2.99)$$

und umgekehrt die Rückkopplung der Gelenkbewegung auf die Muskelelemente durch

$$\Delta \mathbf{l}_m = -\mathbf{L}^T \Delta \mathbf{q} \quad (2.100)$$

bzw.

$$\mathbf{v}_m = -\mathbf{L}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (2.101)$$

beschrieben werden. Dabei ist $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times N_m}$ eine mögliche Hebelarmmatrix, $\Delta \mathbf{l}_m = \mathbf{l}_m - \mathbf{l}_0$ und $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ mit n der Anzahl der Gelenkfreiheitsgrade und N_m der Anzahl der Muskeln. Die N_m skalaren Muskeln nach (2.98) wurden in (2.99) zur Vektorfunktion $\mathbf{h}^m(\mathbf{l}_m, \mathbf{l}_0, \mathbf{v}_m, \mathbf{a}_m)$ zusammengefasst. Für das theoretische Beispiel aus Abbildung 2.5 hat die Hebelarmmatrix die Struktur:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -e & e & 0 & 0 & -e & e \\ 0 & 0 & -e & e & -e & e \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

⁶Ein System das aus der Ursache der Kraft eine Bewegung als Wirkung zeigt, kann als mechanische Admittanz bezeichnet werden.

Substituiert man (2.100), (2.101) und $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_m$ in (2.99) so folgt die Definition der Impedanz des neuromuskulären Systems für die Gelenkmomente des Arms

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) = \mathbf{L} \mathbf{h}^m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}), \quad (2.103)$$

die den folgenden Untersuchungen dieser Arbeit zugrunde gelegt wird⁷.

2.3.2 Lokal linearisierte Steifigkeit und Dämpfung

Aus der allgemeinen Definition der Impedanz des menschlichen Arms (2.103) kann ein lokal linearisiertes Modell mit konstanten Parametern abgeleitet werden. Die Taylorreihenentwicklung für den Arbeitspunkt $\mathbf{q}_0 \equiv \mathbf{q}(t_0)$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = 0$ und $\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{a}(t_0)$, abgebrochen nach den Termen 1. Ordnung, lautet:

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{h}|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} \Delta \mathbf{q} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} \Delta \mathbf{a} \quad (2.104)$$

Dabei gilt $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ und $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$. Die Summanden der rechten Seite von (2.104) haben folgende Bedeutung: Der konstante Summand $\mathbf{h}|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0}$ beschreibt die Kraft in der Ausgangskonfiguration \mathbf{q}_0 . Der Koeffizient der Verschiebung $\Delta \mathbf{q}$

$$\mathbf{K}_q = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} \quad (2.105)$$

ist die konstante und positiv definite Steifigkeitsmatrix und der Koeffizient der Verschiebungsgeschwindigkeit $\Delta \dot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{D}_q = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0} \quad (2.106)$$

die konstante Dämpfungsmatrix. In dieser Arbeit wird die Aktivierung stets als konstant angenommen (siehe Abschnitt 5.1), d.h. $\Delta \mathbf{a} = 0$ und somit ist der letzte Summand aus (2.104) gleich Null. Schließlich folgt durch Substitution von (2.105), (2.106) und $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{h}^* - \mathbf{h}|_{\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_0}$ in (2.104) das lokal linearisierte Impedanzmodell

$$\Delta \mathbf{h} = \mathbf{K}_q \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_q \Delta \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.107)$$

das den folgenden Untersuchungen zugrunde liegt.

⁷In (2.103) ist nur die Abhängigkeit der zeitvarianten Variablen angegeben.

Aus dem Kraftfeld

$$\Delta \boldsymbol{\tau}_K(\Delta \mathbf{q}) = \mathbf{K}_q \Delta \mathbf{q} \quad (2.108)$$

können folgende Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix abgeleitet werden:

- das Kraftfeld (2.108) besitzt „elastische“ Eigenschaften, wenn es konservativ ist.

Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend mit den Aussagen:

- aus dem Kraftfeld lässt sich eine koordinatensysteminvariante Potentialfunktion $V_K = \int (\Delta \boldsymbol{\tau}_K(\Delta \mathbf{q})) d\mathbf{q}$ ableiten;
- die Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt bzw. das Kraftfeld ist Wirbelfrei, d.h. $\text{rot}(\Delta \boldsymbol{\tau}_K(\Delta \mathbf{q})) = 0$;
- die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch, d.h. $\mathbf{K}_q - \mathbf{K}_q^T = 0$.

Existiert eine Bijektion $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ zwischen den generalisierten Gelenkkkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, d.h. $n = m$ und ist die Jacobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ invertierbar, dann gelten die Beziehungen

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{q}, \quad (2.109)$$

sowie

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \Delta \mathbf{F}, \quad (2.110)$$

die eingesetzt in (2.108) den Ausdruck

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{K}_q \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{K}_x \Delta \mathbf{x} \quad (2.111)$$

für das Vektorfeld der kartesischen generalisierten Kräfte $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^m$ liefern. Somit lautet die Transformationsvorschrift für die Steifigkeitsmatrix zwischen Gelenkkkoordinaten und kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{K}_q \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}. \quad (2.112)$$

Ist das Kraftfeld der Gelenksteifigkeiten (2.108) konservativ, so treffen die gleichen Aussagen (siehe oben) auf das kartesische Kraftfeld (2.111) zu.

Für die Dämpfung aus (2.106) kann analog zu (2.108) das geschwindigkeitsabhängige Kraftfeld

$$\Delta \boldsymbol{\tau}_D(\Delta \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{D}_q \Delta \dot{\mathbf{q}} \quad (2.113)$$

definiert werden. Existiert für (2.113) die skalare und koordinatensysteminvariante Integralfunktion $V_D = \int (\Delta \boldsymbol{\tau}_D(\Delta \dot{\mathbf{q}})) d\dot{\mathbf{q}}$, so kann man für (2.113) zu (2.108) analoge Aussagen für die Dämpfung treffen. Anders als bei der Steifigkeit besitzt die Integralfunktion V_D keine sinnvolle physikalische Bedeutung.

Die Koordinatentransformation der Dämpfungsmatrix (die Herleitung ist analog zu (2.111), wobei die Beziehung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ verwendet wird) lautet:

$$\mathbf{D}_x = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{D}_q \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}. \quad (2.114)$$

Kapitel 3

Parameteridentifikation

3.1 Problemstellung

Mit den Methoden aus Kapitel 2 können dynamische Modelle des menschlichen Arms beschrieben werden. Im Allgemeinen bestehen diese Modelle aus Funktionen, welche die Bewegungsgrößen in Abhängigkeit der sog. (konstanten) Modellparameter auf Kräfte/Momente abbilden. Die Modellparameter sind zunächst unbekannt und müssen anhand von Messungen bestimmt werden. Eine derartige Fragestellung wird als experimentelle System- oder Parameteridentifikation bezeichnet.

Den prinzipiellen Ablauf der experimentellen Parameteridentifikation zeigt Abbildung 3.1. Dabei beschreibt der Block „Prozess“ den „realen“ menschlichen Arm und der Block „Modell“ das mathematische Modell des menschlichen Arms. Die Eingangsgrößen \mathbf{u} (d.h. die Bewegungsgrößen) und Ausgangsgrößen \mathbf{y} des Pro-

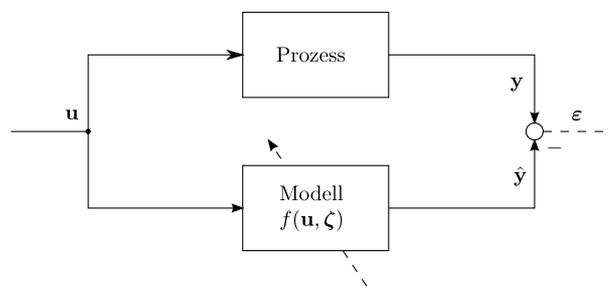


Abb. 3.1: Wirkungsplan der experimentellen Parameteridentifikation

zesses werden als zugänglich und somit messbar vorausgesetzt. Bildet man die Eingangsgrößen \mathbf{u} über das Modell auf die geschätzten Ausgangsgrößen $\hat{\mathbf{y}}$ ab, so entsteht eine Differenz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (3.1)$$

zwischen den realen und geschätzten Ausgangsgrößen. Die Differenz $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird als Residuum bezeichnet und ist ein Maß dafür, wie genau das Modell den realen Prozess approximiert. Das Ziel der Parameteridentifikation ist es, die Modellparameter/Struktur so einzustellen, dass das Residuum verschwindet. Eine derartige Problemstellung bezeichnet man als Optimierung.

3.2 Parameteridentifikation mittels linearer Optimierung

Kommen die unbekannt Parameter linear im Residuum $\boldsymbol{\varepsilon}$ vor und setzt man als Gütefunktional (d.h. als zu minimierende Funktion) das Quadrat der euklidischen Norm $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ an, so erhält man ein lineares Optimierungsproblem [25]. Das lineare Optimierungsproblem, das in der Statistik auch als lineare Regression bezeichnet wird, besitzt die folgenden wichtigen Eigenschaften:

- es existiert ein einheitliches Optimum, d.h. ein globales Minimum;
- die Lösung des Problems kann analytisch bestimmt werden;
- es existieren stabile und schnelle numerische Algorithmen zur Berechnung der Lösung;
- das Problem kann rekursiv formuliert werden.

3.2.1 Gütefunktional des linearen Optimierungsproblems

Das bezüglich der unbekannt Parameter lineare Modell kann in der allgemeinen Form

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Y} \quad (3.2)$$

geschrieben werden. Dabei enthält die Regressormatrix $\mathbf{W}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{r \times c}$, mit r der Anzahl der Zeilen des linearen Gleichungssystems (3.2) und c der Anzahl der

Zeilen der unbekannt Parametermatrix $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{c \times d}$, als Komponenten die sog. unabhängigen Variablen $\mathbf{X} = f(\mathbf{u})$. Für den Fall der Bewegungsgleichungen aus Kapitel 2, wie auch beim dynamischen Modell des menschlichen Arms, können als Eingangsgrößen die Bewegungsgrößen d.h. z.B. $\mathbf{u} = [\ddot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q}^T]^T$ gewählt werden. Die Ausgangsmatrix hat die Dimension $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{r \times d}$ und beinhaltet als Komponenten die sog. abhängigen Variablen \mathbf{y} .

Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Fall $d = 1$ beschrieben und somit lautet das Residuum der linearen Regression

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{W} \boldsymbol{\zeta}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^r. \quad (3.3)$$

Das quadratische Gütefunktional kann somit mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus (3.3) wie folgt als Summe dargestellt werden:

$$I(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\zeta} + h_0, \quad (3.4)$$

wobei der Faktor $1/2$ nur als Normierung dient. Die Hessematrix

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 I(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}^2} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{c \times c} \quad (3.5)$$

in (3.4) stellt die zweite Ableitung bezüglich der Parametermatrix dar und kann durch die quadratische Form der Regressormatrix berechnet werden. Weitere Abkürzungen in (3.4) sind der lineare Term

$$\mathbf{h} = -\mathbf{W}^T \mathbf{Y}, \quad (3.6)$$

sowie der konstante und skalare Term

$$h_0 = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}. \quad (3.7)$$

Die Hessematrix aus (3.5) ist konstant und positiv definit. Dies liefert den allgemein bekannten Beweis der Existenz eines globalen Optimums für lineare Optimierungsprobleme mit quadratischem Gütefunktional nach (3.4). Für den Fall $c = 2$ kann das Gütefunktional aus (3.4) graphisch als Fläche dargestellt (siehe Abbildung 3.2) werden. Die Fläche besitzt die geometrische Form eines Paraboloids und zeigt anschaulich die konvexe Eigenschaft des linearen Optimierungsproblems.

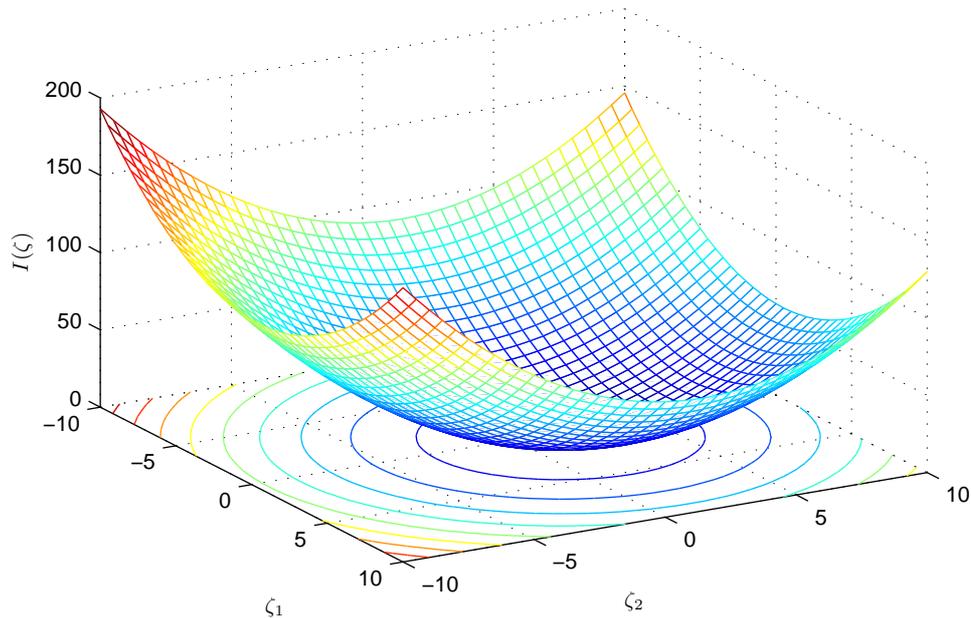


Abb. 3.2: Gütefunktional für ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Parametern.

3.2.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

3.2.2.1 Minimierung des Gütefunktionals

Das Problem

$$\min_{\zeta} I(\zeta) \quad (3.8)$$

mit $I(\zeta)$ nach (3.4) aus Abschnitt 3.2.1 führt auf die allgemein bekannte Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die erstmals von GAUSS im Jahre 1795 entwickelt wurde. Da in den meisten Lehrbüchern (wie z.B. [25]) auf die Herleitung der Lösung von (3.8) verzichtet wird, erfolgt hier eine kurze Erklärung.

Zur Berechnung des Minimums von (3.4) wird die erste Ableitung bezüglich des Parametervektors ζ gebildet, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{H}^T + \frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{H} + \mathbf{h}^T \\ &= \frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + \mathbf{h}^T \\ &= \zeta^T \mathbf{H} + \mathbf{h}^T. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dabei wurde in (3.9) zur Ableitung der quadratischen Form von den Identitäten $\zeta^T \mathbf{H} \zeta = \zeta \mathbf{H}^T \zeta^T$ (die quadratische Form ist ein Skalar) und $\mathbf{H}^T + \mathbf{H} = 2\mathbf{H}$ (die Hessematrix ist symmetrisch) Gebrauch gemacht. Durch Nullsetzen der letzten Zeile von (3.9) und mit der Substitution (3.6) folgt die Lösung von (3.8)

$$\hat{\zeta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y}. \quad (3.10)$$

Der Koeffizient von \mathbf{Y} ist die pseudoinverse Matrix \mathbf{W}^\dagger der Regressormatrix.

3.2.2.2 Standardabweichung der Parameterschätzung

Die Parameterschätzung nach (3.10) ist fehlerbehaftet, da die Regressormatrix \mathbf{W} Messdaten enthält. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Standardabweichung der Parameterschätzung wird in [22] vorgeschlagen. Dabei wird davon ausgegangen, dass \mathbf{W} deterministisch ist und das Residuum $\boldsymbol{\varepsilon}$ sich aus einem mittelwertfreien weißen Rauschen mit der Standardabweichung σ_ε zusammensetzt. Die Kovarianzmatrix des Residuums kann dann mit der Beziehung

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I} \quad (3.11)$$

berechnet werden. Dabei bildet $\mathbf{E}(\cdot)$ den Erwartungswert, \mathbf{I} die $r \times r$ -Einheitsmatrix und

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{W} \hat{\zeta}\|^2}{r - c} \quad (3.12)$$

die unverfälschte Varianz. Mit der Kovarianzmatrix der Parameterschätzung

$$\mathbf{C}_\zeta = \mathbf{E}((\zeta - \hat{\zeta})(\zeta - \hat{\zeta})^T) = \sigma_\varepsilon^2 (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \quad (3.13)$$

kann nun die Standardabweichung des i -ten Parameters aus

$$\sigma_{\zeta_i} = \sqrt{C_{\zeta_i,ii}} \quad (3.14)$$

berechnet werden.

3.2.2.3 Konditionierungszahl

Um mit (3.10) eine genaue Parameterschätzung zu erhalten, muss die Hessematrix \mathbf{H} gut konditioniert sein. Nach der Definition von [22] wird ein Maß zur Quantifizierung der Konditionierung über die Singulärwertzerlegung der Regressormatrix

$$\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{r \times c}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (3.15)$$

beschrieben. Dabei sind $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{c \times c}$ orthogonale Matrizen. Die Matrix $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times c}$ enthält die Singulärwerte σ_i von \mathbf{W} in absteigender Reihenfolge auf der Diagonalen, wobei das Verhältnis des größten und kleinsten Singulärwertes die sog. Konditionierungszahl

$$\text{cond}(\mathbf{W}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (3.16)$$

bestimmt. Die bestmögliche Konditionierung erhält man für $\text{cond}(\mathbf{W}) = 1$. Da die Singulärwerte der Regressormatrix identisch mit den Wurzeln der Eigenwerten der Hessematrix sind, d.h. $\sigma_i(\mathbf{W}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{H})}$, müssen für $\text{cond}(\mathbf{W}) = 1$ die Hessematrix diagonal und die einzelnen Diagonalelemente identisch sein. Dies bedeutet anschaulich, dass die Isohöhenlinien des Gütefunktionsals aus Abbildung 3.2 exakte Kreise darstellen. Für schlechtere Konditionierungen $\text{cond}(\mathbf{W}) > 1$ werden die Isohöhenlinien zu Ellipsen und dies bedeutet, dass die Parameterschätzung immer sensibler auf Schwankungen in \mathbf{Y} reagiert. Der Grenzwert $\text{cond}(\mathbf{W}) \rightarrow \infty$ stellt sich ein, wenn die Regressormatrix an Rang verliert, d.h. $\text{rank}(\mathbf{W}) < c$. In diesem Fall sind mindestens zwei Spalten der Regressormatrix \mathbf{W} linear abhängig und die Hessematrix singulär. Folglich kann der Parametersatz ζ nicht mehr nach (3.10) bestimmt werden.

Aus praktischer Sicht haben hohe Konditionierungszahlen, die im Grenzfall zu Rangdefiziten führen u.a. folgende Ursachen:

1. die unbekannt Parameter sind linear abhängig, d.h. $\forall \alpha_i \neq 0, \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \dots + \alpha_c \zeta_c = 0$;
2. die Parameter ζ_i wurden nicht ausreichend angeregt und somit ist die Norm der zugehörigen Regressorspalten kleiner als die numerische Genauigkeit, d.h. $\|\mathbf{w}_i\| < \epsilon$;
3. die Anregungen wurden so gewählt, dass sich die Größenordnungen von mindestens zwei Regressorspalten wertemäßig stark unterscheiden, d.h. z.B. $\|\mathbf{w}_i\| \ll \|\mathbf{w}_j\|$.

Im Fall 1. muss ein Satz von linear unabhängigen Parametern ζ gefunden werden. Dies kann mit numerischen Algorithmen auf der Basis der Singulärwertzerlegung oder QR-Zerlegung (siehe z.B. [11]) oder auf analytischem Wege (siehe z.B.

[12]) erfolgen. Für die Fälle 2. und 3. kann theoretisch eine Anregungstrajektorie gefunden werden, so dass $\min_{\mathbf{u}} \text{cond}(\mathbf{W})$ (siehe Abschnitt 5.3.3) und somit alle unbekannt Parameter ausreichend angeregt werden.

Kapitel 4

Aufbau zur Messung der Impedanzparameter

4.1 Komponenten des Messaufbaus

4.1.1 Gesamtübersicht der Anlage

Der Aufbau zur experimentellen Identifikation der Impedanzparameter des menschlichen Arms besteht aus den Komponenten:

1. Grundrahmen,
2. Aufbaurahmen mit Vollschalensitz,
3. Hubsäule,
4. Leichtbauroboter,
5. Koppelstelle mit Kraftmomentensensor und
6. Monitor,

die in Abbildung 4.1 dargestellt sind. Der Grundrahmen sowie der Aufbaurahmen besteht aus dickwandigen Stahlprofilen und ist als Schweißkonstruktion gefertigt. Um bezüglich der Konfiguration von Roboter und Arm variable zu sein, kann



Abb. 4.1: Gesamtaufbau: (1) Grundrahmen, (2) Aufbaurahmen mit Vollschalensitz, (3) Hubsäule, (4) Leichtbauroboter, (5) Koppelstelle mit Kraftmomentensensor und (6) Monitor.

der Aufbaurahmen über ein Bohrungs raster in der horizontalen Ebene verstellt werden. Zur Fixierung des Oberkörpers der Versuchsperson im Vollschalensitz, ist am Aufbaurahmen ein sog. Vierpunktgurt befestigt. Der Leichtbauroboter ist über eine Winkelkonsole (60°) auf der elektrisch verstellbaren Hubsäule montiert. Im Sichtbereich der Versuchsperson ist ein Monitor zur Visualisierung der Versuchsrandbedingungen befestigt.

Eine Beschreibung des Leichtbauroboters und der Koppelstelle erfolgt in den folgenden Abschnitten.

4.1.2 Der DLR Leichtbauroboter

Der DLR Leichtbauroboter (LBR) ist ein kinematisch redundanter Manipulator mit sieben rotatorischen Achsen in Leichtbauweise. Die technischen Daten des Leichtbauroboters sind in Tabelle 4.1 und 4.2 zusammengefasst.

Der LBR wird als Positions- und Kraftquelle zur Anregung des Arms und zur Messung der Endeffektorlage für die experimentellen Untersuchungen (siehe Abschnitt 5) verwendet. Daher werden im folgenden einige technische Eigenschaften

Gesamtgewicht	14 kg
Max. Nutzlast	14 kg
Max. Gelenkgeschwindigkeit	120 °/s
Anzahl der Achsen	7
Max. Reichweite	936 mm
Antriebe	DLR-RoboDrive
Getriebe	Harmonic Drive
Sensoren (pro Gelenk)	1 Positionssensor (antriebsseitig), 1 Drehmomentsensor (abtriebsseitig)
Bremsen	Elektromagnetische Sicherheitsbremsen
Spannungsversorgung	48 V DC
Regelung	Positions-, Momenten- und Impedanzregelung
Reglertakte	Stromregelung: 40 kHz, Gelenkregelung 3 kHz, Kartesisch 1 kHz
Elektronik	Integrierte Elektronik, interne Verkabelung, Kommunikation über den optischen SERCOS-Bus

Tab. 4.1: Technische Daten des DLR Leichtbauroboters

Achse	1	2	3	4	5	6	7
Gelenkgrenzen	±170°	±120°	±170°	±120°	±170°	+80°, -45°	+60°, -30°
Max. Momente (Nm)	165	165	100	100	70	35	35

Tab. 4.2: Gelenkgrenzen und maximale Drehmomente

des LBR's diskutiert. Die Winkelstellung der Gelenke wird antriebsseitig vor dem Getriebe gemessen. Da das Getriebe und der darauf folgende Drehmomentsensor nachgiebig sind, weicht der relative Winkel zweier benachbarter Verbindungsglieder (unter Berücksichtigung der Getriebeübersetzung) von der antriebsseitig gemessenen Winkelstellung ab. Berechnet man die Endeffektorlage über die antriebsseitig gemessenen Winkelstellungen (Vorwärtskinematik), so pflanzt sich dieser Messfehler fort. Eine bessere Schätzung der Endeffektorlage erhält man über die abtriebsseitigen Winkelstellungen. Diese können bei bekannter Nachgiebigkeit der Antriebsstränge über die antriebsseitigen Winkel und die abtriebsseitigen Drehmomenten berechnet werden (siehe (4.15) in Abschnitt 4.2.1). Die Bestimmung der abtriebsseitigen Winkellage basiert auf der Annahme, dass die Reibung und Trägheit des Getriebes vernachlässigbar ist. Eine weitere Fehlerquelle bei der Messung der Endeffektorlage sind die nachgiebigen Verbindungsglieder des LBR's. Dieser systematische Messfehler ist schwer zu quantifizieren (komplexes FEM-Modell) und wird bei den folgenden Messungen nur präventiv minimiert (siehe Abschnitt 4.2.4.4).

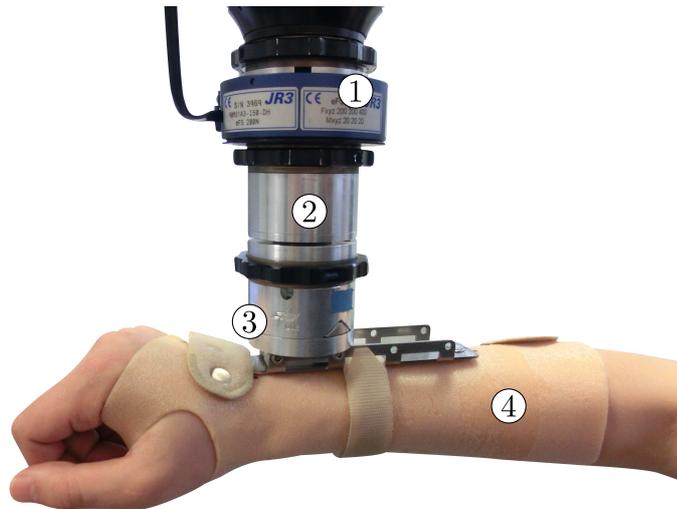


Abb. 4.2: Koppelstelle: (1) Kraftmomentensensor, (2) Drehgelenk, (3) Magnetkupplung und (4) Unterarmbandage.

4.1.3 Koppelstelle und Kraftmomentensensor

Die Schnittstelle zwischen Roboter und (menschlichem) Unterarm besteht aus vier Hauptkomponenten:

1. Kraftmomentensensor,
2. Drehgelenk,
3. Magnetkupplung und
4. Unterarmbandage,

die in Abbildung 4.2 im Verbund dargestellt sind.

Der Kraftmomentensensor misst die Reaktionskräfte und Momente zwischen Roboter und Unterarm. Der verwendete Sensor ist ein Produkt der Firma JR3 und erfasst die Kräfte und Momente in jeweils drei orthogonalen Koordinatenrichtungen. Der Messbereich für die Kräfte beträgt $F_x, F_y = \pm 200 \text{ N}$, $F_z = \pm 400 \text{ N}$ und für die Momente $M_x, M_y, M_z = \pm 20 \text{ Nm}$. Die Messdaten des Sensors werden über eine PCI-Karte der gleichen Firma an einen Echtzeit-Rechner übertragen und

können dort synchron mit den Positionsdaten des LBR's aufgezeichnet werden. Die Datenübertragung erfolgt über die RS-485 Schnittstelle mit einer Übertragungsrates bis 8kHz . In der PCI-Karte erfolgt die Entkopplung der Kräfte und Momente mit der im Sensor gespeicherten Kalibriermatrix.

Zwischen Kraftmomentensensor und Magnetkupplung kann ein Drehgelenk mit einem rotatorischen Freiheitsgrad (Rotations- und Verbindungsachse sind identisch) eingesetzt werden. Das Drehgelenk gleicht die Rotation bei planaren Armkonfigurationen aus und verhindert somit die Einleitung eines Moments in Richtung der Rotationsachse.

Die Verbindung zwischen Kraftmomentensensor bzw. Drehgelenk und Unterarmbandage wird über eine im DLR entwickelte Magnetkupplung hergestellt. Sie besteht aus einer ferromagnetischen dreiseitigen Eisenpyramide mit Permanentmagneten als Gegenstück und öffnet bei einer Momentenbelastung von ca. 25Nm . Die Eisenpyramide der Magnetkupplung ist über ein Frästeil aus Aluminium mit der Blechkonsole der Unterarmbandage verschraubt.

Die Unterarmbandage besteht aus thermisch verformbarem Kunststoff, wurde durch eine Orthopädietechniker individuell an die jeweilige Versuchsperson angepasst und ist somit eine kraft- und formschlüssige Verbindung zwischen Unterarm und Messanlage. Die durch Nieten am Kunststoff befestigte Blechkonsole kann den Unterarm entgegen der Gravitationswirkung in der gewünschten Orientierung halten.

Die Beschriebenen Komponenten werden mit dem flachen Handwechselsystem (FWS) der Firma SCHUNK untereinander und mit dem Roboterflansch verbunden.

4.2 Regelung und Steuerung des Leichtbauroboters

In diesem Abschnitt wird die Steuerung und Regelung des Leichtbauroboters beschrieben. Die Modellierung des Roboters, die Auslegung des Zustandsreglers und die kartesische Impedanzregelung gehörten nicht zur zentralen Aufgabenstellung und waren bereits zu Beginn dieser Arbeit implementiert. Dennoch sind

das dynamische Modell und der Zustandsregler die Grundlage für die kartesische Positionsregelung und der kartesische Impedanzregler die Basis für die Manipulierbarkeitsoptimierung und werden deshalb der Vollständigkeit wegen in den folgenden Abschnitten beschrieben. Die Beschreibungen des dynamischen Modells (Abschnitt 4.2.1), des Zustandsreglers (Abschnitt 4.2.2) und der kartesischen Impedanzregelung (Abschnitt 4.2.4) basieren auf den Arbeiten [1, 26].

4.2.1 Dynamisches Modell

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Bewegungsgleichungen des DLR Leichtbauroboters stützen sich auf die Modellannahmen und Formulierungen aus [1, 26], wobei die Notationen aus Abschnitt 2.1.5 zur Beschreibung der Relativkinematik verwendet werden.

Die Verbindungsglieder des Roboters werden als starre Körper modelliert und die Elastizitäten der Verbindungsglieder, Getriebe und Drehmomentsensoren auf die Gelenke reduziert. Dabei werden die in [26] getroffenen Annahmen übernommen:

- Die Rotoren der Antriebe sind rotationssymmetrisch und starr und deren Rotationsachsen sind kollinear zu den Achsen der jeweiligen Gelenke.
- Die Elastizitäten der Getriebe und Drehmomentsensoren wirken zwischen den Rotoren und den jeweils darauf folgenden Verbindungsgliedern (siehe Abbildung 4.3).
- Die Dynamik des Stromregelkreises der Antriebe ist vernachlässigbar.

Die symbolischen Gleichungen des Robotermodells können unter Verwendung des Lagrange-Formalismus aus Abschnitt 2.2.2.1 hergeleitet werden. Hierfür benötigt man die kinetische und potentielle Energie der $2n$ Körper des gesamten Systems. Der DLR Leichtbauroboter besteht aus jeweils sieben Verbindungselementen und Antriebsrotoren (d.h. $n = 7$).

Die kinetische Energie der Verbindungselemente kann in der Form

$$T^l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{l,i} \\ \boldsymbol{\omega}^{l,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m^{l,i} \mathbf{I} & -m^{l,i} \tilde{\mathbf{r}}_{CM}^{l,i} \\ m^{l,i} \tilde{\mathbf{r}}_{CM}^{l,i} & \mathbf{I}_O^{l,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{l,i} \\ \boldsymbol{\omega}^{l,i} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

- Die Geschwindigkeiten der Rotoren $\mathbf{v}^{m,i}$ und $\boldsymbol{\omega}^{m,i}$ werden in Koordinaten von $\mathcal{K}^{k,i-1}$ ausgedrückt.

Somit vereinfacht sich der Ausdruck für die kinetische Energie der Rotoren zu

$$T^m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{m,i} \\ \boldsymbol{\omega}^{m,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m^{m,i} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_O^{m,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{m,i} \\ \boldsymbol{\omega}^{m,i} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

mit den Geschwindigkeiten der Rotoren

$$\mathbf{v}^{m,i} = \mathbf{D}^{k,i-1} (\mathbf{v}^{l,i-1} - \tilde{\mathbf{r}}^{k,i-1} \boldsymbol{\omega}^{l,i-1}), \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{m,i} = \mathbf{D}^{k,i-1} \boldsymbol{\omega}^{l,i-1} + \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Der Trägheitstensor der Rotoren $\mathbf{I}_O^{m,i}$ ist unter der Annahme der Rotationssymmetrie nur noch diagonal besetzt.

Die gesamte kinetische Energie des Systems kann durch die Beziehungen aus [26] auf die Form

$$\begin{aligned} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= T^l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T^m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}^l(\mathbf{q}) + \mathbf{M}^m(\mathbf{q}) & \mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q})^T & \mathbf{I}_O^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

gebracht werden. Dabei ist $\mathbf{M}^l(\mathbf{q})$ die Massenmatrix der Verbindungsglieder, $\mathbf{M}^m(\mathbf{q})$ die Massenmatrix der Rotoren. $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ beschreibt die Massenkopplung zwischen den Verbindungsgliedern und Rotoren. \mathbf{I}_O^m ist der konstante Trägheitstensor aller Rotoren und ist nur diagonal besetzt.

Die potentielle Energie des Roboters besteht aus dem Anteil der Steifigkeitspotentiale der Gelenke (siehe Abbildung 4.3) und dem Gravitationspotential der Massen $m^{l,i}$ und $m^{m,i}$. Die potentielle Energie der linearen Federn in den Gelenken lautet

$$V_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}), \quad (4.8)$$

wobei die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nur diagonal besetzt ist und K_{ii} die Steifigkeit des i -ten Gelenks repräsentiert. Der Gravitationsanteil der potentiellen Energie lautet

$$V_g(\mathbf{q}) = -g \mathbf{e}_g^T \left(\sum_{i=1}^n m^{l,i} \mathbf{p}_{CM}^{l,i}(\mathbf{q}) + m^{m,i} \mathbf{p}_{CM}^{m,i}(\mathbf{q}) \right). \quad (4.9)$$

Dabei ist \mathbf{e}_g ein Einheitsvektor, der in die Richtung der Erdfallbeschleunigung zeigt. Der Ortsvektor

$${}^0\mathbf{p}_{CM}^{l,i}(\mathbf{q}) = (\mathbf{A}^{l,i-1})^T \left(\mathbf{p}^{l,i-1} + \mathbf{r}^{k,i-1} + (\mathbf{D}^{k,i-1})^T \left(\mathbf{d}^{l,i} + (\mathbf{B}^{l,i})^T \mathbf{r}_{CM}^{l,i} \right) \right) \quad (4.10)$$

zeigt zum Massenschwerpunkt des i -ten Verbindungsgliedes und

$${}^0\mathbf{p}_{CM}^{m,i}(\mathbf{q}) = (\mathbf{A}^{l,i-1})^T \left(\mathbf{p}^{l,i-1} + \mathbf{r}^{k,i-1} \right) \quad (4.11)$$

zum Massenschwerpunkt des i -ten Rotors. Beide Ortsvektoren werden in Komponenten der Inertialkoordinaten \mathcal{K}^0 beschrieben. Die gesamte potentielle Energie des Roboters ist somit

$$V_{pot}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) = V_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) + V_g(\mathbf{q}). \quad (4.12)$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - V_{pot}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) \quad (4.13)$$

kann somit unter Anwendung des Formalismus aus Abschnitt 2.2.2.1 das dynamische Modell des DLR Leichtbauroboters

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_{ext} \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

abgeleitet werden. Dabei ist

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^l(\mathbf{q}) + \mathbf{M}^m(\mathbf{q}) & \mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q})^T & \mathbf{I}_O^m \end{bmatrix}$$

die Massenmatrix des gesamten Roboters (vgl. (4.7)) und

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial V_g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

der Vektor der Gravitationsmomente. $\mathbf{C}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ist die Coriolis- und Zentripetalmatrix des Roboters und $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ die externen Momente.

Unter der Annahme:

- die kinetische Energie der Rotoren ist dominierend durch die Winkelgeschwindigkeit der Motoren verursacht [1],

kann das dynamische Modell (4.14) auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext} \\ \mathbf{I}_O^m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_m \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^l(\mathbf{q}) + \mathbf{M}^m(\mathbf{q})$ reduziert werden.

Das Modell (4.15) ist konservativ und berücksichtigt keine Reibungs-, bzw. Dämpfungseffekte. Eine sinnvolle Vervollständigung des Modells (4.15) ist die Berücksichtigung der motorseitigen Reibung $\boldsymbol{\tau}_F$ und eine viskose Dämpfung $\mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\mathbf{q}})$ parallel zu den Gelenksteifigkeiten \mathbf{K} . Das dynamische Modell mit dissipativen Termen hat dann die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_{ext} \\ \mathbf{I}_O^m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_F &= \boldsymbol{\tau}_m \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2.2 Der Zustandsregler

In diesem Abschnitt wird der im DLR Leichtbauroboter implementierte Zustandsregler erläutert. Die Beschreibung dient als Grundlage für die folgenden Abschnitte und beschränkt sich auf eine vereinfachte Form des derzeit im Roboter verwendeten Reglers. Auch erfolgt hier keine Auslegung der Reglerparameter und keine Stabilitätsanalyse. Für eine ausführliche Synthese und Analyse des Reglers sei auf [1] verwiesen.

Zur Beschreibung des Reglergesetzes wird das Modell (4.16) für das i -te Gelenk in einen quasilinearen und nichtlinearen Anteil zerlegt:

$$\begin{aligned} \tau_{m,i} &= I_{O,ii}^m \ddot{\theta}_i + \tau_i + D_{ii} K_{ii}^{-1} \dot{\tau}_i + \{\tau_{F,i}\} \\ \tau_i + D_{ii} K_{ii}^{-1} \dot{\tau}_i &= M_{ii}(q_{i+1} \dots q_n) \ddot{q}_i + \\ &\quad \left\{ \sum_{j \neq i} M_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \mathbf{c}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dabei ist der nichtlineare Anteil durch $\{\cdot\}$ gekennzeichnet.

Für den linearen Anteil aus (4.17) kann das Gesetz eines Zustandsreglers 4. Ordnung formuliert werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_m &= \mathbf{K}_P (\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_T \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{K}_S \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}} \\ &\quad + \{\boldsymbol{\tau}_{vorst} + \mathbf{K}_T \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_F\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit den Reglerverstärkungen der Zustandsrückführung \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_T und \mathbf{K}_S . Durch $\boldsymbol{\tau}_{\text{vorst}}$, $\boldsymbol{\tau}_d$ und $\boldsymbol{\tau}_F$ in (4.18) können die nichtlinearen Terme wie Schwerkraft und Reibung (siehe (4.17)) kompensiert werden. Im einfachsten Fall kann $\boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_{\text{vorst}} = \mathbf{g}(\mathbf{q})$ gewählt werden.

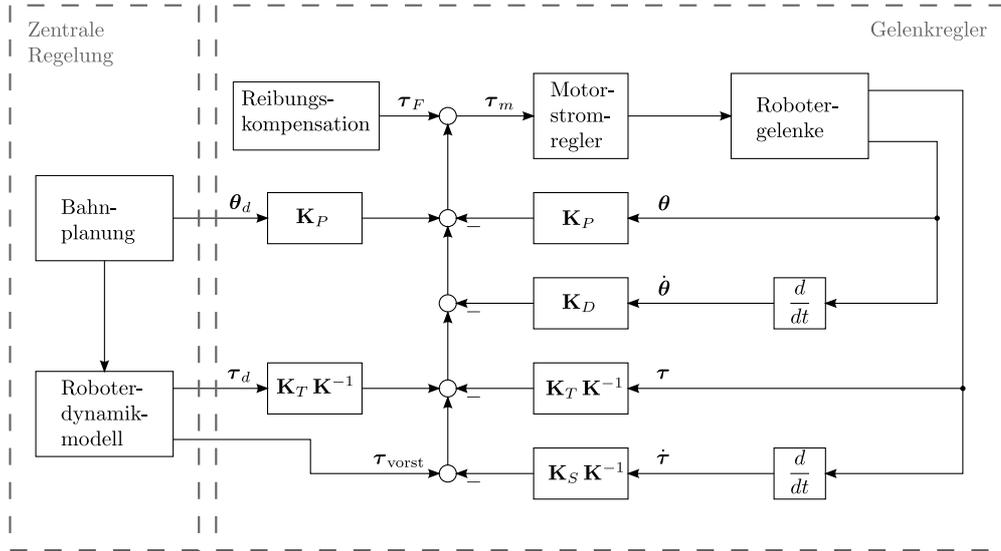


Abb. 4.4: Blockschaltbild des vereinfachten Zustandsreglers (in Anlehnung an Abbildung 4.3 aus [1])

Abbildung 4.4 zeigt das Blockschaltbild des vereinfachten Zustandsreglers nach (4.18). Der Regler wirkt wie ein PD-Regler für die Regelgrößen Antriebsposition und Abtriebsmoment und kann sowohl als Positionsregler sowie Kraftregler verwendet werden. Der Referenzwerteingang $\boldsymbol{\theta}_d$ wird in Abschnitt 4.2.3 für die kartesische Positionsregelung und $\boldsymbol{\tau}_d$ verwendet.

4.2.3 Kartesische Positionsregelung

Durch den Gelenkregler (Abbildung 4.4 aus Abschnitt 4.2.2) kann der Roboter einer Trajektorie in Gelenkwinkeln $\boldsymbol{\theta}_d(t)$ folgen. Um jedoch dem positionsgeregelten Roboter eine aufgabenbezogene Trajektorie $\mathbf{x}_d(t)$ in kartesischen Endeffektorkoordinaten vorgeben zu können, benötigt man die inversen Kinematik $\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{x})$. Für den kinematisch redundanten Fall des DLR Leichtbauroboters (d.h. $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n=7}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m=6}$) existieren für die inverse Kinematik unendlich viele Lösungen.

Eine einfache und gleichzeitig intuitive Methode zur Lösung der inverse Kine-

matik von redundanten Manipulatoren basiert auf der Endeffektor-Jacobimatrix (siehe z.B. [34])

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \text{mit } \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (4.19)$$

Dabei kann (4.19) als lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen für die n unbekanntes Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ gesehen werden. Eine Lösung dieses Gleichungssystems lautet

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.20)$$

mit der Moore-Penrose Pseudoinversen $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$. Die Lösung (4.20) minimiert den quadratischen Fehler $\|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\|$ und somit auch die Norm der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\|\dot{\mathbf{q}}\|$. Dabei sei anzumerken, dass die Minimierung der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten nicht zu einer Singularitätsvermeidung führt (siehe [3]). D.h. in der Nähe von Singularitäten ($\text{rank}(\mathbf{J}(\mathbf{q})) < n$) werden die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten beliebig groß.

Die numerische Implementierung der inversen Kinematik erfolgt über die diskrete Form von (4.20):

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Mit $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}$ als Differenz der Gelenkwinkel zum Zeitpunkt k und $k-1$, kann (4.21) nach

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}_{k-1}) \Delta \mathbf{x} \quad (4.22)$$

umgestellt werden. $\Delta \mathbf{x}$ beschreibt die Differenz der Lage (Position und Orientierung) in $SE(3)$ -Koordinaten zum Zeitpunkt k und $k-1$.

Der in der Steuerung des DLR Leichtbauroboters implementierte kartesische Interpolator¹ liefert zu jedem Zeitpunkt k die kartesische Solllage als homogene Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{p}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Da die Beschreibung der Rotation durch $\mathbf{R} \in SO(3)$ nichtlinear² ist, muss zur Berechnung des Rotationsanteil $\Delta \mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^3$ auf eine lineare Beschreibungsform der Orientierung gewechselt werden. Eine Möglichkeit hierfür ist die sog. Achswinkel-Darstellung aus Abschnitt 2.1.1.3. Unter Anwendung von (2.8) bis (2.10)

¹In dieser Arbeit wurde ein Rampeninterpolator mit parabolischen Blenden (siehe [7]) verwendet

² $d\boldsymbol{\alpha}/dt \neq \boldsymbol{\omega}$ wenn $\boldsymbol{\alpha}$ z.B. Kardan-Winkel nach (2.4) aus Abschnitt 2.1.1.3 sind.

auf die Rotationsmatrizen \mathbf{R}_k und \mathbf{R}_{k-1} erhält man die Achs-Winkel-Paare $[\varphi_k \mathbf{k}_k]$ und $[\varphi_{k-1} \mathbf{k}_{k-1}]$ und somit lautet die Differenz der Orientierung

$$\Delta \mathbf{x}_r = \mathbf{J}_\varphi(\varphi_{k-1}, \mathbf{k}_{k-1}) \begin{bmatrix} \varphi_k - \varphi_{k-1} \\ \mathbf{k}_k - \mathbf{k}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Dabei ist

$$\mathbf{J}_\varphi(\varphi, \mathbf{k}) = \left[\mathbf{k} \sin(\varphi)(\mathbf{I} - \mathbf{k} \mathbf{k}^T) + (1 - \cos(\varphi)) \tilde{\mathbf{k}} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}, \quad (4.25)$$

die Jacobimatrix des Achs-Winkel-Paars (siehe z.B. [6]). Der Positionsanteil $\Delta \mathbf{x}_t = (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) \in \mathbb{R}^3$ ist linear und kann direkt aus (4.23) berechnet werden. Schließlich gilt für die Differenz der Lage

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_t \\ \Delta \mathbf{x}_r \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Die sog. inkrementelle inverse Kinematik (4.22) liefert einen Referenzwert für die abtriebseitigen Gelenkwinkel \mathbf{q}_d . Unter Vernachlässigung der Gelenknachgiebigkeiten (d.h. $\mathbf{q} \approx \boldsymbol{\theta}$) kann \mathbf{q}_d dem Gelenkregler (siehe Abbildung 4.4 aus Abschnitt 4.2.2) kommandiert werden.

4.2.4 Kartesische Impedanzregelung und Manipulierbarkeit

In diesem Abschnitt wird das für die Robotik bedeutende Konzept der Impedanzregelung skizziert (Abschnitt 4.2.4.1). Für den kinematisch redundanten Fall des DLR Leichtbauroboters (d.h. Anzahl der Gelenkkoordinaten $n = 7$ und Anzahl der kartesischen Koordinaten $m = 6$) entfällt dabei ein Regleranteil für die kartesische Bewegung des Endeffektors sowie ein Regleranteil für die Nullraumbewegung (Abschnitte 4.2.4.2) und 4.2.4.3). Durch die kartesische Impedanz kann der Endeffektor in einer gewünschten Lage gehalten und die Konfiguration mittels der Nullraumimpedanz entlang eines steigenden Manipulierbarkeitsgradienten (Abschnitt 4.2.4.4) optimiert werden.

4.2.4.1 Konzept der kartesischen Impedanzregelung

Die Theorie der Impedanzregelung [17, 18, 19] geht von einer Trajektorie virtueller Gleichgewichtszustände aus. Der Regler wirkt zwischen einem instantanen

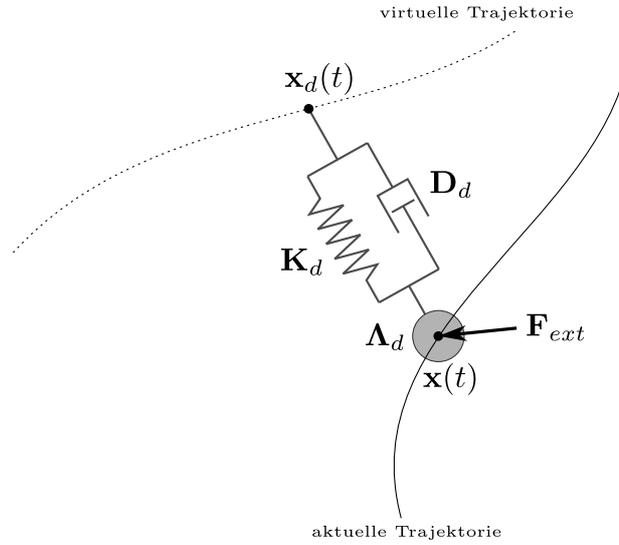


Abb. 4.5: Prinzip der Impedanzregelung

Gleichgewichtszustand und dem aktuellen Bewegungszustand eines Körpers wie ein Masse-Feder-Dämpfer-System. Anschaulich zeigt dies Abbildung 4.5.

Im folgenden wird das Prinzip der kartesischen Impedanzregelung für das Starrkörpermodell eines nichtredundanten Manipulators (d.h. $n = m = 6$, mit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (4.27)$$

kurz erläutert. Eine ausführliche Herleitung mit den notwendigen Beweisen ist z.B. in [26] beschrieben.

Das Ziel der kartesischen Impedanzregelung ist die Kompensation der externen generalisierten Kraft $\mathbf{F}_{ext} \in \mathbb{R}^m$ mit der Dynamik

$$\Lambda_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_d \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{ext}. \quad (4.28)$$

Dabei ist der Lagefehler $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \in \mathbb{R}^m$ die Differenz zwischen der aktuellen Lage \mathbf{x} und einem virtuellen Gleichgewichtspunkt \mathbf{x}_d . Λ_d , \mathbf{D}_d und \mathbf{K}_d sind die symmetrischen und positiv definiten Matrizen der gewünschten Trägheit, Dämpfung und Steifigkeit.

Zur Formulierung des Reglergesetzes wird das Starrkörpermodell (4.27) für kartesische Koordinaten \mathbf{x} formuliert. Dabei wird die Existenz der Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ angenommen. Dabei sei anzumerken, dass die Wahl von \mathbf{x} ist nicht eindeutig ist³.

³ $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_t^T \mathbf{x}_r^T]^T$ sind Koordinaten der Lage und beschreiben die Position \mathbf{x}_t und die Orien-

Aus der Definition der Jacobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ folgen die zeitlichen Ableitungen der Lagekoordinaten

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.29)$$

und

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad (4.30)$$

die wiederum bezüglich der Gelenkgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (4.31)$$

und Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.32)$$

umgestellt werden können.

Durch Substitution von (4.31) und (4.32) in (4.33) und anschließender Multiplikation der resultierenden Gleichung v.l. mit $\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$ erhält man die Modellgleichungen des Manipulators in der Form

$$\Lambda(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_{ext}, \quad (4.33)$$

mit der kartesischen Massenmatrix

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{q}), \quad (4.34)$$

und der kartesischen Coriolis- und Zentripedalmatrix

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}. \quad (4.35)$$

Die externen Momente $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ in (4.33) wurden durch die allgemeine Vorschrift $\mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \boldsymbol{\tau}$ auf die Koordinaten des generalisierten Kraftvektors \mathbf{F}_{ext} projiziert.

Das Reglergesetz des kartesischen Impedanzreglers erhält man durch Einsetzen der Positionsfehlerdynamik (4.28) in die Modellgleichungen (4.33). Es lautet für die Gelenkmomente als Stellgrößen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T (\Lambda(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}}_d + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{x}}) \\ & - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \Lambda(\mathbf{q}) \Lambda_d^{-1} (\mathbf{D}_d \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{x}}) \\ & \mathbf{J}(\mathbf{q})^T (\Lambda(\mathbf{q}) \Lambda_d^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (4.36)$$

tierung \mathbf{x}_r und können aus der Transformationsmatrix ((2.17) aus Abschnitt 2.1.2.1 berechnet werden. Dabei ist der Translationsanteil $\mathbf{x}_t = \mathbf{p}$ eindeutig. Der Rotationsanteil z.B. $\mathbf{x}_r = \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ hängt von der Darstellung (z.B. Kardan-Winkel siehe Abschnitt 2.1.1.3) ab

Wie an (4.36) (dritte Zeile) zu erkennen ist, erfordert die Vorgabe einer Trägheit Λ_d die Messung der externen Kräfte \mathbf{F}_{ext} . Dies ist am realen Roboter nicht immer zu realisieren, gerade wenn die Lasten nicht am Endeffektor angreifen. Vermeidet man die Vorgabe der Trägheit (d.h. $\Lambda_d = \Lambda(\mathbf{q})$), so vereinfacht sich der Regler zu

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T (\Lambda(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}}_d + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{x}}). \quad (4.37)$$

4.2.4.2 Gelenkraumzerlegung für Nullraumgeschwindigkeiten

Der DLR Leichtbauroboter besitzt im Gegensatz zu dem im vorhergehenden Abschnitt verwendeten Modell $n = 7$ Gelenke, wobei wiederum $m = 6$ die Anzahl der Endeffektorfreiheitsgrade ist. Dem zufolge ist die Konfiguration⁴ des Manipulators nicht mehr alleine durch die Endeffektorlage determiniert und es entfällt ein Freiheitsgrad $r = n - m = 1$, der die sog. Nullraumbewegung beschreibt. In diesem Abschnitt wird basierend auf der Beschreibung aus [26] die Methode der Gelenkraumzerlegung des Robotermodells in einen kartesischen Anteil und einen Nullraumanteil beschrieben.

Als Grundlage dient das aus (4.15) (Abschnitt 4.2.1) abgeleitete Starrkörpermodell (d.h. $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext}. \quad (4.38)$$

Die Vorwärtskinematik dieses Modells ist eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ zwischen den n Gelenkwinkeln \mathbf{q} und den m kartesischen Koordinaten \mathbf{x} (es gilt weiterhin $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ und $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$), folglich ist die Jacobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = (\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rechteckig.

Um die Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ bezüglich kartesischer bzw. Nullraumkoordinaten zu projizieren, benötigt man eine Matrix der Form

$$\mathbf{J}_z(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

wobei $\mathbf{z}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ den Nullraum der Jacobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ mit der Bedingung $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T = 0$ aufspannt. Die Nullraumbasis $\mathbf{z}(\mathbf{q})$ muss so gewählt sein, dass

⁴Als Konfiguration wird hier die Stellung aller Gelenke bezeichnet

$\mathbf{J}_z(\mathbf{q})$ invertierbar ist. Eine mögliche Vorschrift⁵ zur symbolischen Berechnung der Nullraumbasis ist

$$z_i(\mathbf{q}) = (-1)^{n+1} \det(\mathbf{J}_i(\mathbf{q})), \quad \text{für } i = 1 \dots n, \quad (4.40)$$

dabei erhält man die Matrix $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ durch Streichen der i -ten Spalte von $\mathbf{J}(\mathbf{q})$.

Die Projektion der Gelenkbewegung über die Nullraumbasis $\mathbf{z}(\mathbf{q})$ würde im Fall einer „reinen“ Nullraumbewegung eine Beschleunigung am Endeffektor verursachen. Dies wird durch die Verwendung einer dynamisch konsistenten Nullraumprojektionsmatrix

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}) = (\mathbf{z}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T)^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \quad (4.41)$$

vermieden und somit erhält man die Nullraumprojektion der Geschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_N(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{N}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.42)$$

Dabei ist $\mathbf{v}_n = (\mathbf{N}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^r$ die Nullraumgeschwindigkeit und $\mathbf{J}_N(\mathbf{q})$ die aufgrund der Wahl von $\mathbf{N}(\mathbf{q})$ invertierbare erweiterte Jacobimatrix. Die inverse Matrix der erweiterten Jacobimatrix

$$\mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{M\dagger}(\mathbf{q}) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

kann mit der gewichteten Pseudoinversen

$$\mathbf{J}^{M\dagger}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T)^{-1} \quad (4.44)$$

gebildet werden und somit erhält man die explizite Beziehung für die Gelenkgeschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{M\dagger}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{z}(\mathbf{q})^T \mathbf{v}_n, \quad (4.45)$$

durch Multiplikation der $\mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-1}$ v.l. mit (4.42). Die Beziehung zwischen den Gelenkmomenten $\boldsymbol{\tau}$ und den generalisierten kartesischen bzw. Nullraumkräften \mathbf{F}_x und \mathbf{F}_n lautet analog zum nichtredundanten Fall

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_N(\mathbf{q})^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

⁵Die Herleitung basiert auf $\mathbf{J}_z(\mathbf{q})^{-1} = \text{adj}(\mathbf{J}_z(\mathbf{q})) / \det(\mathbf{J}_z(\mathbf{q}))$ und kann in [26] nachvollzogen werden

Schließlich folgt das dynamische Modell in kartesischen und Nullraumkoordinaten durch Substitution von (4.45) sowie der zeitlichen Ableitung von (4.45) und (4.46) in (4.38) in der Form

$$\Lambda_N(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mu}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} + \mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_{ext,x} \\ \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{ext,n} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \Lambda_N(\mathbf{q}) &= \mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda_x(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & \Lambda_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \\ \Lambda_x(\mathbf{q}) &= (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T)^{-1} \\ \Lambda_n(\mathbf{q}) &= \mathbf{z}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T \end{aligned} \quad (4.48)$$

die blockdiagonale Massenmatrix und

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ -\boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T & \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \Lambda_x(\mathbf{q}) \left(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{J}^{M\dagger}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \Lambda_n(\mathbf{q}) \mathbf{z}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T + \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{q})^T \right) \\ \boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \Lambda_x(\mathbf{q}) \left(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{z}(\mathbf{q})^T \end{aligned} \quad (4.49)$$

die schiefsymmetrische⁶ Coriolis- und Zentripedalmatrix.

4.2.4.3 Nullraumimpedanzregler

Im Hinblick auf die Manipulierbarkeitsoptimierung (Abschnitt 4.2.4.4) wird nun für das Modell (4.47) das Gesetz des kartesischen bzw. Nullraumimpedanzreglers nach [26] formuliert. Dabei kann zur Kompensation der Gravitationsterme und zur Entkopplung der Coriolis- und Zentripedalmatrix (siehe (4.49)) das Rückkopplungsgesetz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix} &= \mathbf{J}_N(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_x \\ \bar{\mathbf{F}}_n \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ -\boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

⁶Der Beweis für $\boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$ kann in [26] nachgeschlagen werden

mit den neuen Systemeingängen $\bar{\mathbf{F}}_x$ und $\bar{\mathbf{F}}_n$ verwendet werden. Der kartesische Regleranteil nur zur Kompensation der externen Kraft (d.h. $\mathbf{x}_d = konst.$) hat dann die Form

$$\bar{\mathbf{F}}_x = -\mathbf{K}_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) - \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.51)$$

mit den positiv definiten und symmetrischen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen \mathbf{K}_d und \mathbf{D}_d . Eine Möglichkeit für das Reglergesetz des Nullraumanteils ist

$$\bar{\mathbf{F}}_n = \Lambda_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}}_n + \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{v}_{n,d} - \mathbf{D}_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n,d}). \quad (4.52)$$

Dabei kann als Referenznullraumgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{n,d} = -\mathbf{z}(\mathbf{q})^T \left(\frac{\partial V_n(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$ der Gradient eines Gütefunktional⁷ $V_n(\mathbf{q})$ in den Nullraum projiziert und somit die Funktion $V_n(\mathbf{q})$ minimiert werden.

Die entkoppelte Fehler- bzw. Kompensationsdynamik des geregelten Systems erhält man durch Substitution von (4.51) und (4.52) in (4.50) i.V.m. (4.47). Sie lautet für den kartesischen Anteil

$$\Lambda_x(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}} + (\boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}_d) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \mathbf{F}_{ext,x} \quad (4.53)$$

und für den Nullraumanteil

$$\Lambda_n(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{v}}_n - \dot{\mathbf{v}}_{n,d}) + (\boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}_n) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n,d}) = \mathbf{F}_{ext,n}. \quad (4.54)$$

Das explizite Reglergesetz für die Gelenkmomente $\boldsymbol{\tau}$ als Stellgrößen und dem Fall der freien Bewegung (d.h. $\mathbf{F}_{ext,x} = 0$ und $\mathbf{F}_{ext,n} = 0$) hat die Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \hat{\mathbf{F}}_x + \mathbf{N}(\mathbf{q})^T \hat{\mathbf{F}}_n \\ \hat{\mathbf{F}}_x &= -\mathbf{K}_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) - \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{v}_n \\ \hat{\mathbf{F}}_n &= \Lambda_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}}_n - \boldsymbol{\mu}_{xn}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{v}_{n,d} - \mathbf{D}_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n,d}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.2.4.4 Manipulierbarkeitsoptimierung

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit zur lokalen Optimierung der Manipulierbarkeit des DLR Leichtbauroboters durch eine Nullraumbewegung beschrieben. Dabei wird das Manipulierbarkeitsmaß

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} \quad (4.56)$$

⁷In Abschnitt 4.2.4.4 wird als Gütefunktional das reziproke Manipulierbarkeitsmaß verwendet.

nach der Definition von [42] (lokal) maximiert. Lokal bedeutet in diesem Fall, dass der Endeffektor an einer Position und in einer Orientierung fixiert bleibt.

Das Manipulierbarkeitsmaß ist proportional dem Volumen des durch die Endeffektorgeschwindigkeiten $\mathbf{v} = (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^m$ aufgespannten Manipulierbarkeitsellipsoides. Wobei \mathbf{v} die Gleichung

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}))^T \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}) \mathbf{v} \leq \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq 1, \quad (4.57)$$

mit $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ der Euklidischen Norm der realisierbaren Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, erfüllt⁸. \mathbf{J}^\dagger ist die pseudoinverse Matrix von \mathbf{J} . Die Hauptachsen des Manipulierbarkeitsellipsoides erhält man durch die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}. \quad (4.58)$$

Dabei sind $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale Matrizen und

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_m & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.59)$$

enthält die Singulärwerte σ_i der Jacobimatrix \mathbf{J} in absteigender Reihenfolge (d.h. $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$) auf der Hauptdiagonalen. Mit \mathbf{u}_i als i -te Spalte von \mathbf{U} haben die Hauptachsen des Ellipsoides die Form $\sigma_i \mathbf{u}_i$.

In Richtung der größten Hauptachse $\sigma_1 \mathbf{u}_1$ besitzt der Endeffektor die größte Beweglichkeit, d.h. anschaulich, dass die Bewegung in dieser Richtung durch die Überlagerung der Bewegungen vieler Achsen realisiert wird. Das Manipulierbarkeitsmaß ist ebenfalls durch das Produkt der Singulärwerte

$$w = \prod_{i=1}^m \sigma_i \equiv \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} \quad (4.60)$$

definiert. Dem zufolge bedeutet ein hohes Manipulierbarkeitsmaß w hohe Beweglichkeit des Endeffektors. Im Umkehrschluss hat ein hohes w auch Vorteile für die Positionsmessung durch den Roboter, da eine Verschiebung am Endeffektor durch die Verformung der Gelenke und nicht durch die Verbindungsglieder erfolgt und somit von der Gelenksensorik erfasst wird. Allgemein gilt $w \geq 0$. Ist $w = 0$

⁸Der Beweis kann [42] entnommen werden

so besitzt die Jacobimatrix nicht mehr vollen Rang (d.h. $\text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}) < m$) und der Roboter befindet sich in einer singulären Konfiguration.

Zur Optimierung der Manipulierbarkeit des DLR Leichtbauroboters wird die Potentialfunktion

$$V_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} \quad (4.61)$$

definiert und aus dieser die Soll-Nullraumgeschwindigkeit⁹

$$v_{n,d} = -\mathbf{z}(\mathbf{q})^T \left(\frac{\partial V_n(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.62)$$

abgeleitet. Unter Berücksichtigung von (4.62) in (4.55) aus Abschnitt 4.2.4.3 kann nun das vereinfachte¹⁰ Reglergesetz

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{g}(\mathbf{q})\mathbf{N}(\mathbf{q})^T (\boldsymbol{\Lambda}_n(\mathbf{q})\dot{v}_n - D_n(v_n - v_{n,d})) \quad (4.63)$$

formuliert und dem kartesischen Impedanzregler überlagert werden. Ein negativer Gradient des Manipulierbarkeitspotentials führt somit zu einer Nullraumbewegung in Richtung steigender Manipulierbarkeit.

Die Optimierung erfolgte für 60 fixierte Endeffektorlagen (siehe Abbildung 4.6) in der Echtzeit-Simulation des DLR Leichtbauroboters. Dabei wurde der Endeffektor mit dem kartesischen Impedanzregler in jeweils eine Endeffektorlage „gezogen“ und dann der Nullraumimpedanzregler zugeschaltet. Sobald die Regeldifferenz kleiner als eine festgelegte numerische untere Schranke war (d.h. $|v_n - v_{n,d}| < \epsilon$), wurden die Nullraumanteile der Gelenkmomente $\boldsymbol{\tau}_n$ zu Null gesetzt. Einen typischen Zeitverlauf der Optimierung zeigt Abbildung 4.7.

⁹Im Fall des DLR Leichtbauroboters ist der Nullraum eindimensional

¹⁰Die Anteile zur Kompensation der Coriolis- und Zentripetalterme werden hier vernachlässigt

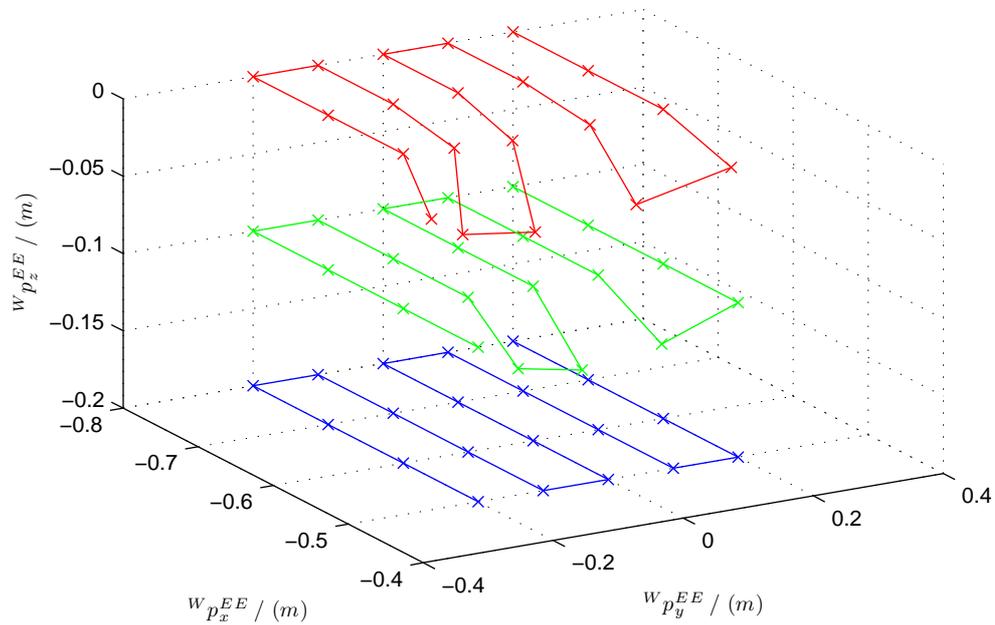


Abb. 4.6: Diskrete Endeffektorpositionen der Manipulierbarkeitsoptimierung. Die Verbindungslinien dienen lediglich der räumlichen Darstellung.

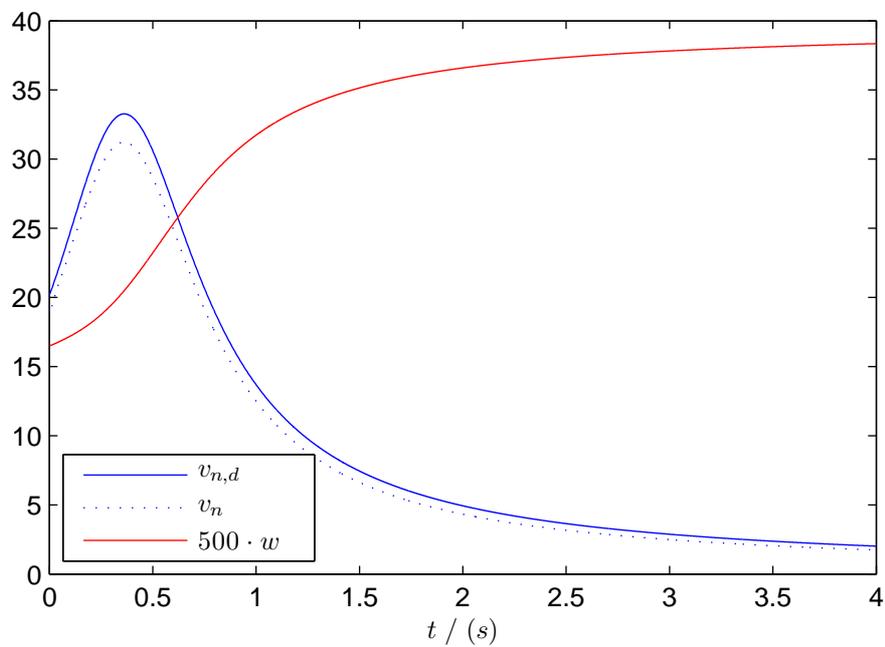


Abb. 4.7: Typischer Verlauf einer Manipulierbarkeitsoptimierung mittels Nullraumimpedanz

Kapitel 5

Experimentelle Identifikation der Impedanzparameter

5.1 Problemstellung

In diesem Kapitel werden Methoden zur Identifikation der Parameter dynamischer Modelle des menschlichen Arms beschrieben und anhand von Messungen verifiziert. Die verwendeten Modelle des menschlichen Arms basieren auf den Annahmen, dass das Skelett aus starren Körpern (siehe Abschnitt 2.2) besteht, an denen die Muskeln als viskoelastische Krafterelemente (siehe Abschnitt 2.3) angreifen und somit Kräfte bzw. Momente in den Gelenken des Skelettes wirken. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Muskeln über das zentrale Nervensystem angesteuert werden und somit die Eigenschaften (d.h. die Steifigkeit, Dämpfung und Lage des Kräftegleichgewichtspunktes) der viskoelastischen Krafterelemente variieren.

Zur Identifikation der Modellparameter muss das System von außen mechanisch angeregt werden. Dies geschieht durch die Einprägung von Kräften bzw. Verschiebungen über das Skelett. Im Gegensatz zur Parameteridentifikation an einem passiven mechanischen System (z.B. Feder-Masse-Dämpfer-System) muss bei der Identifikation des neuromuskuloskelettalen Systems jedoch von einem geschlossenen Regelkreis ausgegangen werden (siehe Abbildung 5.1). D.h. eine äußere Störung wird über die Sensorik des Systems detektiert und zeitverzögert über die Nervenbahnen an das zentrale Nervensystem weitergeleitet. Das zentrale Nerven-

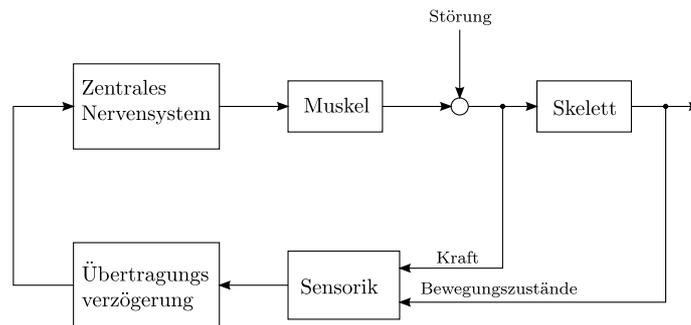


Abb. 5.1: Regelkreis des neuromuskuloskelettalen Systems mit dem zentralen Nervensystem als Regler, den Muskeln und dem Skelett als Regelstrecke. Als Sensorik wird hier die visuelle Wahrnehmung, der Gleichgewichtssinn, die taktile Wahrnehmung und die Sensorik der Muskelspindeln und Sehnen bezeichnet.

system reagiert dann wie ein Regler und ändert die Aktivierung der Muskeln und somit die Steifigkeits- und Dämpfungsparameter des Systems. Neben der Funktion als Festwertregler agiert das zentrale Nervensystem auch als Folgeregler zur Erreichung intern generierter Referenzzustände.

In der Literatur (z.B. [37]) werden drei für die Steifigkeitsmessung bedeutende Regelschleifen unterschieden, die im Folgenden als Reflexe bezeichnet werden:

- Der Dehnreflex wird durch eine Längenänderung des Muskels ausgelöst und besitzt eine Totzeit¹ von ca. 25 *ms* bis 50 *ms*.
- Der spinale Reflex reagiert auf Gelenkebene. D.h. z.B. die Beugung des Unterarms durch den Muskel Bizeps aktiviert den Muskel Trizeps zur Wiederherstellung des Momentengleichgewichts. Die Totzeit dieser Regelschleife beträgt ca. 70 *ms* bis 110 *ms*.
- Die kognitiven Reflexe wirken auf einer dem Menschen bewussten Ebene und besitzen eine Totzeit von mehr als 110 *ms*.

Die kognitiven Reflexe spielen bei der Festlegung der Versuchsrandbedingungen eine wichtige Rolle, d.h. die Randbedingungen einer Messung sollten so gewählt werden, dass der Mensch nicht schon vor Beginn der äußeren Anregung seine

¹Als Totzeit wird hier die Zeit zwischen der sensorischen Erfassung einer Änderung und der Änderung der Muskelaktivierung bezeichnet

Steifigkeit verändert. Dehnreflex und spinaler Reflex sollten bei der Länge des Bestimmungsintervalls (d.h. das Zeitintervall das für die Parameteridentifikation berücksichtigt wird) berücksichtigt werden. Ist die Länge des Bestimmungsintervalls größer als die Totzeit dieser Reflexe, so wird ein Mittelwert der geregelten Steifigkeits- und Dämpfungsparameter identifiziert. Bei kürzeren Intervalllängen als 25 *ms* kann von intrinsischen Systemeigenschaften gesprochen werden.

5.2 Identifikation in kartesischen Koordinaten

Die direkteste Methode zur Untersuchung der Impedanz (Steifigkeit und Dämpfung) des menschlichen Arms basiert auf einem linearisierten dynamischen Modell in kartesischen Koordinaten. Eine Formulierung in kartesischen Koordinaten ist anschaulich, da die Basisvektoren dieses Koordinatensystems einen dreidimensionalen flachen Raum aufspannen. Des weiteren kann ein sog. Blackboxsystem betrachtet werden, dessen Steifigkeiten, Trägheiten und Dämpfungen bezüglich kartesischer Koordinaten konzentriert sind und die Kenntnis der dahinter stehenden z.B. kinematischen Struktur nicht erforderlich ist.

5.2.1 Modell in kartesischen Koordinaten

5.2.1.1 Dynamisches Modell des Arms in kartesischen Koordinaten

Der Lagrange-Formalismus aus Abschnitt 2.2.2.1 liefert die Bewegungsgleichungen in Minimal- bzw. Gelenkkoordinaten

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (5.1)$$

die hier nochmal der Übersicht wegen erwähnt werden. Dabei ist $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ die Massenmatrix, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die Coriolis- und Zentripedalmatrix, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ der Gravitationskraftvektor und $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die mechanische Impedanz (siehe Abschnitt 2.3).

Die Bewegungsgleichungen in Gelenkkoordinaten (5.1) können mit der in Abschnitt 4.2.4.1 beschriebenen Methode für aufgabenbezogene kartesische Koordinaten \mathbf{x} formuliert werden. Dafür substituiert man (4.31), (4.32) und die Beziehung $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}$ in (5.1) und multipliziert die resultierende Gleichung v.l. mit

$\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T}$ und erhält somit die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten²

$$\mathbf{M}_x(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_x(\mathbf{q}) + \mathbf{h}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}, \quad (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x(\mathbf{q}) &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{C}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \\ \mathbf{g}_x(\mathbf{q}) &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{h}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-T} \mathbf{h}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Matrix bzw. die Vektoren in (5.2) mit dem Index x hängen noch von den Gelenkkoordinaten \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ ab. Dies ist für eine Linearisierung bezüglich eines kartesischen Arbeitspunktes nicht geeignet. Ausgehend von der Existenz einer eindeutigen Abbildung $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}$ und mit der Beziehung $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}$ kann (5.2) in der Form

$$\mathbf{M}_x(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}) + \mathbf{h}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

geschrieben werden.

Die Wahl des Bezugskoordinatensystems für \mathbf{F} hängt von der Jacobimatrix ab. Im Fall der Identifikation der Impedanzparameter des Arms ist es sinnvoll ein ortsfestes Bezugssystem (z.B. in der Schulter des Arms) zu wählen, da man sonst die Reaktionskräfte zwischen Roboter und Arm in einem von der Konfiguration abhängigen Koordinatensystem messen müsste. Beschreibt man die Lage des Armendeffektors durch die homogene Transformation ${}^0_{EE}\mathbf{T}(\mathbf{q})$ als Element der $SE(3)$ und wählt als Rotationsdarstellung die Kardan-Winkel $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ (siehe (2.4) in Abschnitt 2.1.1.3), so haben die kartesischen Koordinaten der Lage die Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}^{EE}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Die Basis-Jacobimatrix kann somit durch

$${}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.6)$$

für \mathcal{K}^{EE} als Endeffektor-Koordinatensystem berechnet und den Bewegungsgleichungen (5.4) in kartesischen Koordinaten zugrunde gelegt werden.

²Zur Verdeutlichung der Darstellung weichen hier die Bezeichnungen der Massen- bzw. Coriolis- und Zentripedalmatrix \mathbf{M}_x bzw. \mathbf{C}_x von Abschnitt 4.2.4 ab.

5.2.1.2 Linearisierung des Armmodells

Unter der Annahme kleiner Variationen $\Delta \mathbf{x}$ und $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ kann das dynamische Modell (5.4) bezüglich eines Referenzzustandes \mathbf{x}^* und $\dot{\mathbf{x}}^* = 0$ zum Zeitpunkt t^* linearisiert werden. Die Bewegungsgrößen werden dann wie folgt ersetzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}^*(t^*) + \Delta \mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \Delta \dot{\mathbf{x}}, \quad \text{da } \dot{\mathbf{x}}^* = 0 \quad \text{und} \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \Delta \ddot{\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Entwickelt man die Taylorreihe von (5.4) mit Abbruch nach dem Termen 1. Ordnung, so erhält man für Massenmatrix, Coriolis- und Zetripedalmatrix, Gravitationsvektor und Impedanzvektor die Näherungen

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_x(\mathbf{x}) &= \mathbf{M}_x|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x}, \\ \mathbf{C}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{C}_x|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \dot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{g}_x(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_x|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x}, \\ \mathbf{h}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{h}_x|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \dot{\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Durch Einsetzen von (5.7) und (5.8) in (5.4) folgt unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung (d.h. $\Delta \mathbf{x} \Delta \ddot{\mathbf{x}} \approx 0$, $\Delta \mathbf{x} \Delta \dot{\mathbf{x}} \approx 0$ und $\Delta \dot{\mathbf{x}} \Delta \dot{\mathbf{x}} \approx 0$) die lokal linearisierte Dynamikgleichung des Arms

$$\mathbf{M}_x^* \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_x^* \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_x^* \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{F},\tag{5.9}$$

mit den konstanten Matrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_x^* &= \mathbf{M}_x|_{\mathbf{x}^*}, \\ \mathbf{D}_x^* &= \mathbf{C}_x|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^*}, \\ \mathbf{K}_x^* &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (5.9) (mit konstanten Koeffizienten) beschreibt die lokale Dynamik in der Umgebung der Gleichgewichtslage $\mathbf{x}^*(t^*)$, daher entfällt in (5.9) der statische Anteil

$$\mathbf{g}_x|_{\mathbf{x}^*} + \mathbf{h}_x|_{\mathbf{x}^*} + \mathbf{K}_x^* \mathbf{x}^* = \mathbf{F}^*.\tag{5.11}$$

Für systemtheoretische Untersuchungen kann (5.9) in der allgemeinen Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (5.12)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix},$$

der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{M}_x^*)^{-1} \mathbf{K}_x^* & -(\mathbf{M}_x^*)^{-1} \mathbf{D}_x^* \end{bmatrix},$$

der Eingangsmatrix und dem Systemeingang

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{M}_x^*)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden.

5.2.1.3 Regressormatrix und Ausgangsvektor

Die Regressionsgleichung

$$\mathbf{W} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Y}, \quad (5.13)$$

zur Bestimmung der konstanten Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix erhält man durch Transponieren und anschließendem Umsortieren der linearen Differentialgleichung (5.9). Dabei hat die Regressormatrix für r Samples die Form

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{x}}^T(1) & \Delta \dot{\mathbf{x}}^T(1) & \Delta \mathbf{x}^T(1) \\ \Delta \ddot{\mathbf{x}}^T(2) & \Delta \dot{\mathbf{x}}^T(2) & \Delta \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta \ddot{\mathbf{x}}^T(r) & \Delta \dot{\mathbf{x}}^T(r) & \Delta \mathbf{x}^T(r) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

und die Ausgangsmatrix die Form

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}^T(1) \\ \Delta \mathbf{F}^T(2) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{F}^T(r) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Die Parametermatrix lautet

$$\zeta = \begin{bmatrix} (\mathbf{M}_x^*)^T \\ (\mathbf{D}_x^*)^T \\ (\mathbf{K}_x^*)^T \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

5.2.2 Identifikationsmethode und Ablauf der Messung

Im folgenden werden die Parameter des linearisierten Dynamikmodells (5.9) mit drei translatorischen Freiheitsgraden experimentell bestimmt. Folglich ist $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{r \times 9}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{r \times 3}$ und $\zeta \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$.

Zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten der linearen Differentialgleichung wurde folgendes Experiment durchgeführt. Der Endeffektor des Arms wurde durch den Roboter in einer planaren Ausgangslage gehalten (siehe Abbildung 4.1 aus Abschnitt 4.1.1). Um kein Moment bezüglich einer zur Transversalebene senkrechten Drehachse in den Arm einzuleiten, wurde das in Abschnitt 4.1.3 beschriebene Drehgelenk verwendet. Nach dem die Versuchsperson alle Muskeln ihres Arms angespannt hatte und gleichzeitig keine Reaktionskraft auf den Roboter ausübte, lenkte der Roboter den Arm aus. Die Auslenkung erfolgte in eine von sechs orthogonalen Richtungen, wobei die Reihenfolge zur Vermeidung von kognitiven Reflexreaktionen (vor Beginn der Perturbation) zufällig bestimmte wurde. Während der Auslenkung folgte der Roboter einer rampenförmigen kartesischen Trajektorie mit parabolischen Blenden, wobei der Zielpunkt $\pm 0.04 \text{ m}$ entfernt lag. Die Dauer für das erstmalige Erreichen des Zielpunkts betrug ca. 0.1 s . Der beschriebene Ablauf wurde 30 mal wiederholt. Aufgezeichnet wurden die Reaktionskräfte zwischen Roboter und Arm durch den Kraftmomentensensor und die absolute Lage des Armendeffektors über die Vorwärtskinematik des Roboters. Eine typische Perturbation zeigt Abbildung 5.2.

5.2.3 Interpretation der Ergebnisse

Zur Bestimmung der Parametermatrix (5.16) wurden jeweils die Messdaten der 30 Perturbationen im Zeitintervall $t_{est} = 0 \dots 0.5 \text{ s}$ (siehe Abbildung 5.2) berücksichtigt. Tabelle 5.1 zeigt die experimentell bestimmte Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix.

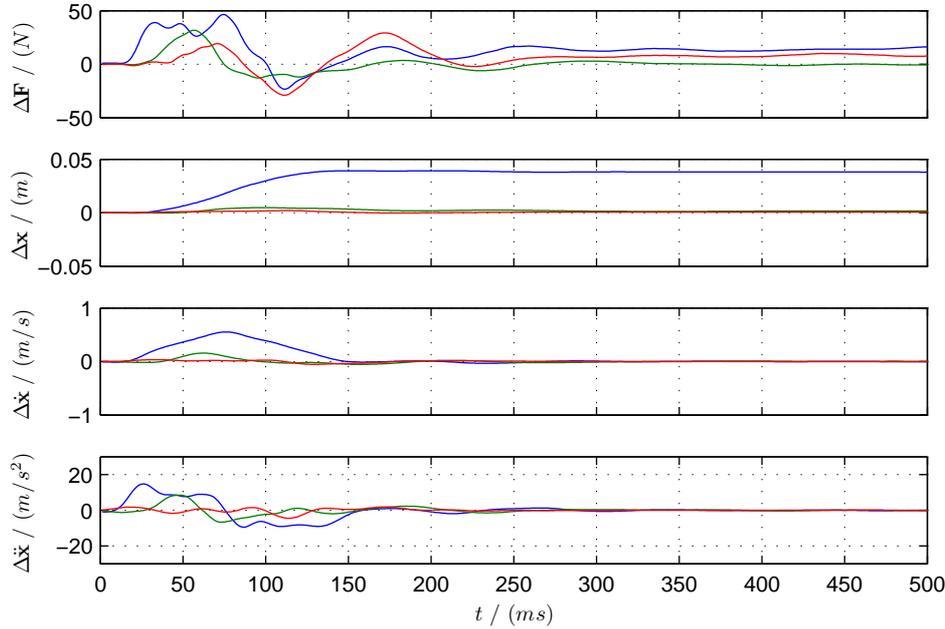


Abb. 5.2: Reaktionskraft $\Delta \mathbf{F}$ am Endeffektor (siehe Abschnitt 4.1.3), Endeffektor-Verschiebung $\Delta \mathbf{x}$, Geschwindigkeit $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ und Beschleunigung $\Delta \ddot{\mathbf{x}}$ (Die Geschwindigkeit und Beschleunigung wurde jeweils durch numerische Differentiation aus den gefilterten Daten $\Delta \mathbf{x}$ berechnet), beispielhaft für eine Perturbation in x -Richtung.

In der folgenden Diskussion werden vereinfachend die Indizes x und \star weggelassen. Die Ergebnisse des Experiments sind kritisch zu beurteilen. Die Diagonalelemente repräsentieren die im Endeffektor konzentrierte Masse des Arms. Dabei sind M_{11} und M_{22} wertemäßig zu klein geschätzt, da bereits die Anbindungsstelle eine Masse von ca. 1.3 kg besitzt. Des Weiteren sind die Massen- und Steifigkeitsmatrix unsymmetrisch, dadurch sind in beiden Fällen die Integrabilitätsbedingungen für die Integration der Energiefunktionen aus den Kraftfeldern $\mathbf{F}_M(\Delta \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{F}_K(\Delta \mathbf{x}) = \mathbf{K} \Delta \mathbf{x}$ verletzt.

$\mathbf{M}_x^* \text{ (kg)}$			$\mathbf{D}_x^* \text{ (Ns/m)}$			$\mathbf{K}_x^* \text{ (N/m)}$		
1.588	0.210	0.811	42.772	9.384	-1.942	453.749	-94.272	146.074
0.581	1.431	0.652	19.423	31.652	6.962	-89.246	122.144	-48.041
0.833	0.522	2.541	33.402	-6.845	52.144	157.926	-25.792	194.122

Tab. 5.1: Experimentell bestimmte Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix

k	$\lambda_k (1/s)$
1	-2.72
2	-5.37
3	-6.93
4	$-14.75 + j18.08$
5	$-14.75 - j18.08$
6	-28.54

Tab. 5.2: Eigenwerte der Systemmatrix in ansteigender Ordnung für die Werte aus Tabelle 5.1

k	$\lambda_k (1/s)$
1	$-3.15 + j7.48$
2	$-3.15 - j7.48$
3	$-14.65 + j16.53$
4	$-14.65 - j16.53$

Tab. 5.3: Eigenwerte der Systemmatrix in ansteigender Ordnung für Daten aus [36]. Hier wurden die Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ einer planaren Armkonfiguration identifiziert

Die zu gering geschätzten Massen und die Asymmetrien der Matrizen motivieren eine systemtheoretische Analyse. Im ersten Schritt wurde mit den Werten aus Tabelle 5.1 die Systemmatrix nach (5.12) und anschließend die in Tabelle 5.2 aufgelisteten Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ berechnet. Die Eigenwerte der Systemmatrix eines Systems linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung beschreiben das Einschwingverhalten des Systems (homogene Lösung) und sind für schwach gedämpfte Systeme konjugiert komplex:

$$\lambda_k = \sigma \pm j\omega_D. \quad (5.17)$$

Dabei kann σ als Abklingkonstante und ω_D als gedämpfte Eigenkreisfrequenz interpretiert werden [21]. Für stabile Systeme gilt $\forall \lambda, \sigma < 0$. Das identifizierte System ist stabil und stark gedämpft, da die Systemmatrix nur ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar besitzt. Der Vergleich mit Daten aus [36] (siehe Tabelle 5.3) zeigt, dass die Eigenwerte des linearisierten Armmodells für jede Eigenform konjugiert komplex sein sollten. Die Eigenwertanalyse lässt die Schlussfolgerung zu, dass die hohe Dämpfung für das identifizierte System (Tabelle 5.1) durch Modellungenauigkeiten entsteht. Ein möglicher Fehler könnte die Vernachlässigung eines Energiespeichers (Elastizität) zwischen Roboteranbindung und Unterarm (siehe Abbildung 4.2 aus Abschnitt 4.1.3) sein.

5.3 Identifikation im Gelenkraum

5.3.1 Armmodell mit Koppelstelle

Bei dem in Abschnitt 5.2 verwendeten Modell wurde die Nachgiebigkeit der Anbindung (Koppelstelle) zwischen Roboter-Endeffektor und menschlichem Unterarm vernachlässigt. Wie in Abschnitt 5.2.3 diskutiert, könnte dieser zusätzliche Energiespeicher/Dissipator jedoch einen nicht zu vernachlässigenden Anteil am gesamten Systemverhalten haben und wird daher im Folgenden durch eine Modellerweiterung berücksichtigt.

5.3.1.1 Modellierung der Steifigkeit und Dämpfung

Die Anbindung kann als viskoelastisches Kraffelement zwischen Unterarm und Kupplung (siehe Abschnitt 4.1.3) modelliert werden. Da die Gelenke der Anbindungsstelle und des Ellbogens nur durch den starren Körper des Unterarms verbunden sind, führt dies im erweiterten Identifikationsmodell zu der blockdiagonalen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{q,\text{arm}} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{q,\text{anbindung}} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

und Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{q,\text{arm}} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{q,\text{anbindung}} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_q ist der Koeffizient des Verschiebungsvektors $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$. Analoges gilt für die Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_q und die Verschiebungsgeschwindigkeit $\delta\dot{\mathbf{q}}$. Dabei beschreiben die Untermatrizen $\mathbf{K}_{q,\text{arm}}$ bzw. $\mathbf{D}_{q,\text{arm}}$ das viskoelastische Verhalten der Armgelenke und $\mathbf{K}_{q,\text{anbindung}}$ bzw. $\mathbf{D}_{q,\text{anbindung}}$ das viskoelastische Verhalten der Anbindung. Wie aus der blockdiagonalen Struktur von \mathbf{K}_q und \mathbf{D}_q zu erkennen ist, sind die Kraffelemente der Armgelenke und Anbindung nicht miteinander verkoppelt, d.h. im Gegensatz zu einer Formulierung in kartesischen Koordinaten (d.h. $\mathbf{K}_x = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_q \mathbf{J}^{-1}$ und $\mathbf{D}_x = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_q \mathbf{J}^{-1}$) können die eigentlich interessierenden Anteile $\mathbf{K}_{q,\text{arm}}$ bzw. $\mathbf{D}_{q,\text{arm}}$ des Arms direkt aus \mathbf{K}_q und \mathbf{D}_q abgelesen werden. Um diesen Vorteil zu nutzen, wird das Identifikationsmodell in Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ formuliert.

Bekanntlich steigt die Modellkomplexität quadratisch mit der Anzahl der kinematischen Freiheitsgrade. Um noch anschauliche Plausibilitätsanalysen durchführen zu können, wird erstmal auf ein planares Armmodell mit zwei kinematischen Freiheitsgraden zurückgegriffen. Demzufolge gilt $\mathbf{K}_{q,\text{arm}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ bzw. $\mathbf{D}_{q,\text{arm}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Für die Bestimmung der Freiheitsgrade der Anbindung werden folgende Annahmen getroffen:

- die Steifigkeit der Armgelenke ist wesentlich kleiner als die Steifigkeit der Anbindung,
- die Anbindung verschiebt sich nur unwesentlich quer und längs zur Unterarmachse.

Somit verbleibt als ebener Freiheitsgrad nur noch die Rotation um eine zur Bewegungsebene senkrechte Achse, d.h. $\mathbf{K}_{q,\text{anbindung}}, \mathbf{D}_{q,\text{anbindung}} \in \mathbb{R}$. Ob die genannten Annahmen zutreffend sind, muss experimentell verifiziert werden.

5.3.1.2 Variationsgleichung der nichtlinearen Dynamik

Die Bewegungsgleichungen des erweiterten Modells für die Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]$ können durch

$$\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \boldsymbol{\tau}_{ext}(t), \quad \text{mit} \quad \Gamma, \boldsymbol{\tau}_{in}, \boldsymbol{\tau}_{ext} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.20)$$

beschrieben werden. Dabei ist

$$\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.21)$$

die inverse Dynamik der Massen. Die Komponenten der Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \xi)$ und des Zentripetal- und Coriolisvektors $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi)$ (siehe Anhang) sind neben den Zustandsgrößen \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ von sog. konstanten Basisträgheitsparametern $\xi \in \mathbb{R}^6$ abhängig. Die Wahl der Basisträgheitsparameter ist für ihre Identifizierbarkeit entscheidend und wird bei der Regressorbildung noch diskutiert. $\boldsymbol{\tau}_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ berücksichtigt die durch Krafterelemente auf die starren Körper wirkenden inneren Momente und $\boldsymbol{\tau}_{ext}(t)$ die äußere Anregung.

Wie bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben, ist die mechanische Impedanz im Allgemeinen eine zeitabhängige, nichtlineare Abbildung, d.h. $f : \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \mapsto \boldsymbol{\tau}_{in}$. Um

die nichtlineare Massendynamik und ein lokal gültiges Impedanzmodell zu identifizieren, kann aus (5.20) die Variationsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \\ \frac{\partial \tau_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \tau_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \delta \tau_{ext}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

mit der Variationskomponente $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ abgeleitet werden [14]. $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ ist der Zustand zu Beginn der äußeren Störung $\delta \tau_{ext}$ und demzufolge ist

$$-\left. \frac{\partial \tau_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} = \mathbf{D}_q \quad (5.23)$$

bzw.

$$-\left. \frac{\partial \tau_{in}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} = \mathbf{K}_q$$

die in \mathbf{q}_0 linearisierte Dämpfungs bzw. Steifigkeitsmatrix. Unter Berücksichtigung von (5.21) und (5.23) in (5.22) folgt:

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{q}) \delta \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \mathbf{q}}_{\Psi(\xi, \mathbf{D}_q, \mathbf{K}_q, \text{Bewegungsgrößen}} + \mathbf{D}_q \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \delta \mathbf{q} = \delta \tau_{ext}. \quad (5.24)$$

In (5.24) werden die allgemein zeitvarianten Impedanzparameter $\mathbf{D}_q(t)$ und $\mathbf{K}_q(t)$ in einem Punkt \mathbf{q}_0 der Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ lokal approximiert. Die Trägheitsparameter ξ_i hingegen sind unabhängig von der Konfiguration \mathbf{q} des Arms im Rahmen der Modellgenauigkeit konstant. Das Modell (5.24) ist nur für die Steifigkeit und Dämpfung linearisiert, da die Jacobimatrizen (Koeffizienten der Variationskomponenten $\delta \mathbf{q}$, $\delta \dot{\mathbf{q}}$ und $\delta \ddot{\mathbf{q}}$) noch von den Bewegungsgrößen \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ abhängen. Die ersten drei Summanden der linken Seite von (5.24) beschreiben die nichtlineare Dynamik der Massen für den Fall einer äußeren Störung $\delta \tau_{ext}$, d.h. die Gleichung ist auch im ungestörten Fall $\delta \tau_{ext} = 0$ während der Bewegung $\dot{\mathbf{q}}(t) \neq 0$ erfüllt.

Somit eignet sich das Modell (5.24) sowohl zur Identifikation der lokalen Impedanzparameter in einer statischen Ausgangslage, als auch während der Bewegung. In den folgenden Abschnitten werden zwar erstmal nur die konstanten Modellparameter während einer statischen Ausgangslage identifiziert und hierfür ist die Teillinearisation bzw. Variation nicht notwendig (siehe Abschnitt 5.2). Dennoch können mit dem nichtlinearen Anteil aus (5.24) konstante Trägheitsparameter ξ bestimmt und im Hinblick auf die Beobachtung zeitvarianter Impedanzparameter festgesetzt werden.

5.3.1.3 Regressormatrix und Ausgangsvektor

Um die unbekannt Parameter aus den Messdaten $\mathbf{q}(t)$ und $\boldsymbol{\tau}_{ext}(t)$ zu bestimmen, kann (5.24) bezüglich der unbekannt Parameter linearisiert werden und somit auf die Form (3.2) (siehe Abschnitt 3.2.1) gebracht werden. Für die ersten Untersuchungen werden die Trägheitsparameter der Verbindungsstelle ξ_i für $i = 4 \dots 6$ als bekannt vorausgesetzt, da diese bereits aus CAD-Modellen zur Verfügung stehen und somit lautet der Parametervektor

$$\boldsymbol{\zeta} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ B_{11} \ B_{12} \ B_{21} \ B_{22} \ B_{33} \ K_{11} \ K_{12} \ K_{21} \ K_{22} \ K_{33}]^T, \quad \text{mit } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{13}. \quad (5.25)$$

Durch die partielle Ableitung der linken Seite von (5.24) $\boldsymbol{\Psi}$ bezüglich des Parametervektors $\boldsymbol{\zeta}$ erhält man die Regressormatrix

$$\mathbf{X}(k) = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{D}_q, \mathbf{K}_q, \text{Bewegungsgrößen})}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad \text{mit } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 13}, \quad (5.26)$$

für das k -te Sample. Der Ausgangsvektor für das k -te Sample

$$\mathbf{y}(k) = \delta \boldsymbol{\tau}_{ext} - (\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{X} \boldsymbol{\zeta}), \quad \text{mit } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.27)$$

ist die Differenz der externen Momente $\delta \boldsymbol{\tau}_{ext}$ und der bekannten Massendynamik $\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{X} \boldsymbol{\zeta}$. Die Komponenten von $\mathbf{X}(k)$ und $\mathbf{y}(k)$ sind im Anhang A.1.3 aufgelistet. Das zur Bestimmung der Parameter $\boldsymbol{\zeta}$ zu lösende überbestimmte Gleichungssystem mit $3r$ linearen Gleichungen hat die Form

$$\mathbf{W} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Y} \quad (5.28)$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) \\ \mathbf{X}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(r) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(r) \end{bmatrix}.$$

Wie aus (A.9) ersichtlich, sind die Spalten von \mathbf{W} linear unabhängig, d.h. $\text{rank}(\mathbf{W}) = 13$. Dies ist nur gesichert, wenn die Basisträgheitsparameter ξ in der Massendynamik linear vorkommen. Besitzt \mathbf{W} nicht vollen Rang so wird die Hesse-Matrix $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ singulär und (5.28) kann nicht mehr mit der Methode nach Abschnitt 3.2 gelöst werden. Im Fall des erweiterten Armmodells mit drei Freiheitsgraden können die Basisträgheitsparameter noch durch Anschauung bestimmt werden, bei komplexeren Modellen hingegen sind analytische oder numerische Methoden (siehe z.B. [22]) notwendig.

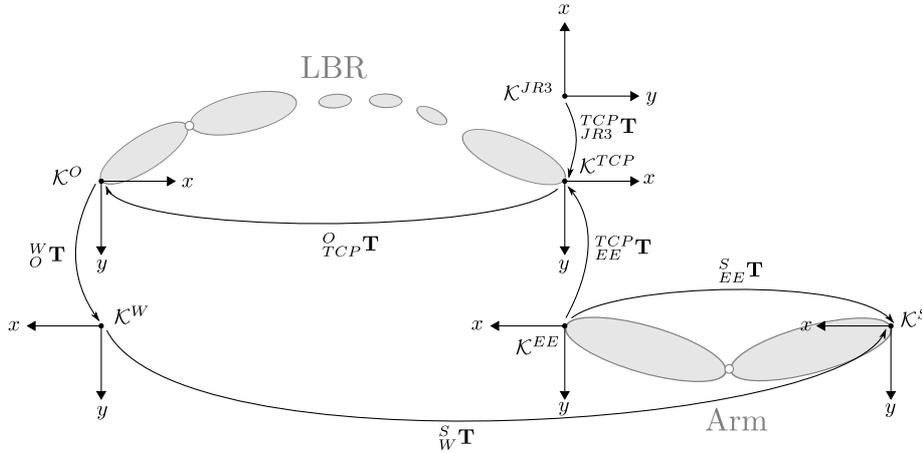


Abb. 5.3: Schematische Darstellung der Kinematik des Gesamtsystems: Leichtbauroboter und Arm

5.3.2 Zustandsgrößen im Gelenkraum

Zur Bestimmung der Parameter ζ des Modells nach Abschnitt 5.3.1 benötigt man den Zeitverlauf der Gelenkwinkel $\mathbf{q}(t)$ und deren Ableitungen $\dot{\mathbf{q}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ sowie die Variationskomponenten $\delta\mathbf{q}$, $\delta\dot{\mathbf{q}}$, $\delta\ddot{\mathbf{q}}$ und die Variation der Gelenkmomente $\delta\boldsymbol{\tau}_{ext}$. Die roboterseitige absolute Lage der Anbindungsstelle kann durch die Sensoren des Leichtbauroboters und die Reaktionskräfte zwischen Roboter-Endeffektor und Anbindungsstelle können durch den Kraftmomentensensor erfasst werden. Im Folgenden wird beschrieben, wie aus den Sensordaten die genannten Größen im Gelenkraum des menschlichen Arms bestimmt werden.

5.3.2.1 Bewegungsgrößen im Gelenkraum

Zur Bestimmung der Gelenkwinkel $\mathbf{q}(t)$ des Arms aus den Sensordaten des Leichtbauroboters wird die Vorwärtskinematik des Arms ${}^S_{EE}\mathbf{T}$ benötigt. Diese kann aus den in Abbildung 5.3 dargestellten kinematischen Zusammenhängen des Gesamtsystems (Roboter und Arm) nach der Beziehung

$${}^S_{EE}\mathbf{T} = {}^S_W\mathbf{T} {}^W_O\mathbf{T} {}^O_{TCP}\mathbf{T} {}^{TCP}_{EE}\mathbf{T} \quad (5.29)$$

berechnet werden. Dabei sind die homogenen Transformationsmatrizen ${}^S_W\mathbf{T}$, ${}^W_O\mathbf{T}$ und ${}^{TCP}_{EE}\mathbf{T}$ konstant. ${}^O_{TCP}\mathbf{T}(\mathbf{q}_{LBR})$ ist von den abtriebsseitig gemessenen Gelenkwinkeln \mathbf{q}_{LBR} des Leichtbauroboters (siehe Abschnitt 4.1.2) abhängig. Mit ${}^S_{EE}\mathbf{T}$

aus (5.29) ist lediglich die Lage des Endeffektors \mathcal{K}^{EE} (nach der Anbindungsstelle) bezüglich des Koordinatensystems in der Schulter \mathcal{K}^S bekannt, deswegen müssen die Gelenkwinkel $\mathbf{q}(t)$ des Arms anhand eines Modells geschätzt werden. Für den allgemeinen (d.h. den kinematisch redundanten) Fall $n > m$ bedeutet dies, dass die Gelenkzustände über einen Beobachter geschätzt werden müssten, dessen Modellparameter nicht bekannt sind. Da im Falle des planaren Arms $n = m$ gilt, sind die Gelenkwinkel \mathbf{q} über die Kinematik bestimmt und können mittels der inversen Kinematik nach Abschnitt 2.1.3.2 berechnet werden. Ausgehend von dem kartesischen Positionszustand

$${}^S\mathbf{x}^{EE} = \begin{bmatrix} {}^S_{EE}T_{14} \\ {}^S_{EE}T_{24} \\ \text{atan2}(-{}^S_{EE}T_{12}, {}^S_{EE}T_{11}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (5.30)$$

gilt unter Verwendung von (2.43) bis (2.49):

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}({}^S\mathbf{x}^{EE}). \quad (5.31)$$

Die Variation der Gelenkwinkel $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ kann für einen definierten Anfangszustand $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ aus $\mathbf{q}(t)$ berechnet werden.

Für die Berechnung der lokalen zeitlichen Ableitungen wird folgende numerische Differentiationsregel angewandt:

$$\dot{\mathbf{q}}(k) = \frac{\mathbf{q}(k-1) - \mathbf{q}(k+1)}{2T}. \quad (5.32)$$

Dabei ist $\mathbf{q}(k)$ der Gelenkwinkel des k -ten Sample und T die Periodendauer der Abtastung, d.h. $t = kT$.

5.3.2.2 Momente im Gelenkraum

Zur Berechnung der Momente $\boldsymbol{\tau}(t)$ im Gelenkraum des Arms aus den Messdaten des Kraftmomentensensors (JR3, siehe Abschnitt 4.1.3) werden die im folgenden beschriebenen differentialgeometrischen Beziehungen [2] herangezogen. Die Zwangskräfte zwischen dem Roboter- und Armeneffektor werden in kartesischen Koordinaten von \mathcal{K}^{JR3} gemessen und lassen sich im Kovektor der verallgemeinerten Kraft

$${}^{JR3}\mathbf{F}^{JR3} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & L_x & L_y & L_z \end{bmatrix}^T \quad (5.33)$$

zusammenfassen. Dabei sind F_i kartesische Kräfte und L_i Momente. Eine Transformationvorschrift zwischen der verallgemeinerten Kraft \mathbf{F} und den Gelenkmomenten $\boldsymbol{\tau}$ kann z.B. anhand des virtuellen Arbeitsausdrucks (siehe z.B. [7])

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q}, \quad (5.34)$$

mit den infinitesimalen kartesischen und Gelenkverschiebungen $\delta \mathbf{x}$ und $\delta \mathbf{q}$, abgeleitet werden. Setzt man die Beziehung

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (5.35)$$

aus Abschnitt 2.1.4.3 in (5.34) ein und transponiert die gesamte Gleichung, so erhält man die Transformationvorschrift

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}. \quad (5.36)$$

Die Verteilung der Endeffektorkräfte auf die Gelenkmomente ist somit durch eine rein kinematische Beziehung bestimmt. Zu Beachten sei das Bezugssystem der differentiellen Jacobimatrix.

Im Fall des Gesamtsystems nach Abbildung 5.3 wird die Kraft ${}^{JR3}\mathbf{F}{}^{JR3}$ gemessen, d.h. der Angriffspunkt $O{}^{JR3}$ und das Bezugssystem $K{}^{JR3}$ sind identisch. Zur Berechnung der Gelenkmomente kann ${}^{JR3}\mathbf{F}{}^{JR3}$ in das für spätere Analysen relevantere Koordinatensystem $\mathcal{K}{}^{EE}$ transformiert und in einem weiteren Schritt dann mit

$$\boldsymbol{\tau} = ({}^{EE}\mathbf{J})^T {}^{EE}\mathbf{F}{}^{EE}, \quad \text{wobei} \quad {}^{EE}\mathbf{J} = \frac{\partial ({}^{EE}\dot{\mathbf{x}}{}^{EE})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.37)$$

in den Gelenkraum projiziert werden.

Eine allgemeine Beziehung für die Transformation des verallgemeinerten Kraftvektors \mathbf{F} zwischen $SE(3)$ -Koordinaten lautet nach [7]:

$${}^A\mathbf{F}{}^A = {}^A\mathbf{T}_f {}^B\mathbf{F}{}^B, \quad (5.38)$$

mit

$${}^A\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R}{}^{AB} & 0 \\ {}^A\tilde{\mathbf{p}}{}^B \mathbf{R}{}^{AB} & \mathbf{R}{}^{AB} \end{bmatrix}.$$

5.3.3 Optimale Anregungstrajektorie

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 angesprochen, ist die Parameteridentifikation mittels linearer Regression umso empfindlicher gegenüber Modell- und Messungenauigkeiten, je schlechter die Konditionierung (siehe (3.16) aus Abschnitt 3.2.2.3) des Regressors ist. Das Problem von hohen Konditionierungszahlen tritt immer dann auf, wenn die Parameter eines dynamischen Modells unter Berücksichtigung der Trägheit, Steifigkeit und Dämpfung geschätzt werden und dabei die Perturbationszeiten (Dauer von Beginn der Perturbation bis zum Erreichen der Sollamplitude) möglichst gering sein sollen. Beispielhaft wurde dieser Effekt bereits bei der Parameteridentifikation des linearisierten kartesischen Impedanzmodells in Abschnitt 5.2 beobachtet. Um jedoch den Einfluss von Reflexen bei der Bestimmung der Identifikation des dynamischen Modells gering zu halten, besteht immer der Konflikt zwischen geringen Perturbationszeiten und guten Konditionierungen. Daher soll in diesem Abschnitt anhand von Simulationen eine bezüglich der Konditionierungszahl optimale Anregungstrajektorie ermittelt werden, um für die darauf folgenden Messungen eine Referenz zu erhalten.

5.3.3.1 Formulierung des Optimierungsproblems

In der Literatur werden diverse Gütekriterien zur Optimierung der Anregungstrajektorie vorgeschlagen, die z.B. in [22] zusammengefasst sind. In dieser Arbeit wird das einfachste Gütemaß, d.h. die Konditionierungszahl aus Abschnitt 3.2.2.3

$$\text{cond}(\mathbf{W}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (5.39)$$

verwendet. Dabei ist σ_{\max} bzw. σ_{\min} der größte und kleinste Singulärwert von $\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$. Nimmt man \mathbf{q}_0 als konstant an, d.h. $\delta \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}$ so ist der Regressor $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ nur eine Funktion der Bewegungsgrößen. Die Trajektorie kann für k Samples $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_k$ definiert werden und man erhält die optimale Anregungstrajektorie wie z.B. in [13] beschrieben, durch die Vorschrift

$$\min_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})} \text{cond}(\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})). \quad (5.40)$$

Die Optimierungsvariablen des Gütefunktional sind Argumente nichtlinearer Funktionen³ und unterliegen physikalischen Beschränkungen. Die Gelenkwinkel

³Für (5.39) existiert kein symbolischer Ausdruck, da die Singulärwertzerlegung nur numerisch berechnet werden kann.

i	$q_{\min,i}$	$q_{\max,i}$	(rad)	$\dot{q}_{\min,i}$	$\dot{q}_{\max,i}$	(rad/s)	$\ddot{q}_{\min,i}$	$\ddot{q}_{\max,i}$	(rad/s ²)
1	-1.83	-0.26		-1.00	1.00		-10.00	10.00	
2	1.05	2.23		-1.00	1.00		-10.00	10.00	
3	-0.25	0.25		-1.00	1.00		-10.00	10.00	

Tab. 5.4: Schranken der optimalen Trajektorie

δq_1 (rad)	δq_2 (rad)	δq_3 (rad)
$-\pi/3$	$\pi/3$	0

Tab. 5.5: Ausgangskonfiguration des Arms

\mathbf{q} sind durch die natürlichen Gelenkansschläge \mathbf{q}_{\min} sowie \mathbf{q}_{\max} und wegen der lokalen Gültigkeit der Linearisierung (siehe Abschnitt 5.3.1.2) $|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0| \leq |\delta \mathbf{q}|_{\max}$ begrenzt. Einschränkungen bezüglich der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{q}}$ bestehen aufgrund der endlichen Leistung des Roboters. Somit ist (5.40) ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen.

5.3.3.2 Numerisches Experiment

Zur Lösung des Problems (5.40) wurde ein numerisches Experiment durchgeführt. Als Optimierer wurde die Funktion „fmincon“ des Softwarepakets MATLAB verwendet. Der Optimierungsalgorithmus basiert auf dem Innere-Punkte-Verfahren (siehe z.B. [39]). Ausgehend von zufällig generierten Anfangswerten, innerhalb der festen Schranken nach Tabelle 5.4, wurde der Algorithmus zehn mal durchlaufen, um jeweils eine optimale Trajektorie (\mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$) mit 20 Samples zu berechnen. Die konstante Ausgangskonfiguration \mathbf{q}_0 zur Berechnung der Variationsvariablen ist in Tabelle 5.5 aufgelistet.

Tabelle 5.6 zeigt die Werte des Gütefunktionalen bei Abbruch der Optimierung für zehn Optimierungsdurchläufe. Der (minimale) Funktionswert ist in vier Fällen um ca. 20% größer als das absolute Minimum (siehe Definition der Konditionierungs-

Durchlauf	1	2	3	4	5
f_{\min}	1.213	1.211	1.003	1.004	1.003
Durchlauf	6	7	8	9	10
f_{\min}	1.211	1.195	1.003	1.003	1.003

Tab. 5.6: Wert des Gütefunktionalen bei Abbruch der Optimierung, für zehn Durchläufe

k	$\delta\mathbf{q}$ (rad)			$\dot{\mathbf{q}}$ (rad/s)			$\ddot{\mathbf{q}}$ (rad/s ²)		
1	-0.25	0.12	0.20	0.00	-0.01	-0.24	-0.06	0.01	0.20
2	0.31	0.12	-0.20	-0.00	0.00	-0.21	0.02	0.01	0.12
3	-0.29	0.12	-0.20	-0.01	0.01	-0.21	0.03	0.01	-0.08
4	0.00	0.00	-0.20	0.32	0.52	0.27	0.01	-0.00	0.16
5	-0.01	0.01	-0.20	-0.52	0.32	-0.29	-0.00	-0.00	-0.05
6	0.13	0.12	-0.20	0.00	-0.00	0.18	0.00	0.01	-0.17
7	0.31	0.13	-0.19	-0.00	0.00	0.11	-0.01	0.01	0.25
8	-0.01	0.52	-0.20	0.00	-0.00	0.05	0.62	-0.02	-0.24
9	-0.15	0.13	-0.20	-0.00	0.00	0.26	-0.01	0.01	0.09
10	-0.25	0.12	0.20	-0.00	0.00	0.05	0.00	0.01	0.01
11	0.30	0.12	-0.20	0.00	-0.00	0.17	-0.02	0.01	0.00
12	0.00	0.00	0.20	-0.32	-0.52	-0.24	0.01	-0.00	-0.09
13	-0.02	0.12	-0.20	0.00	-0.01	-0.20	-0.04	0.01	-0.04
14	0.16	0.12	0.20	0.01	-0.00	0.24	-0.00	0.01	-0.06
15	-0.22	0.12	0.20	-0.00	0.00	0.27	-0.00	0.01	-0.03
16	-0.09	0.12	0.20	-0.00	0.00	-0.13	-0.00	0.01	0.08
17	-0.26	0.12	0.20	-0.00	0.00	-0.07	-0.01	0.01	-0.00
18	0.26	0.12	-0.04	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.01	0.00
19	0.01	0.52	0.19	-0.00	0.00	0.22	-0.59	-0.02	-0.05
20	-0.01	0.01	0.20	0.52	-0.32	0.02	-0.01	-0.00	-0.00

Tab. 5.7: Samples der optimale Anregungstrajektorie, beispielhaft für den dritten Optimierungsdurchlauf, in den ersten drei Spalten ist die Verschiebung $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ dargestellt

zahl in (5.39)). In den restlichen Durchläufen wird das absolute Minimum erreicht. Tabelle 5.7 zeigt die 20 Samples beispielhaft für eine optimale Trajektorie. Der Vergleich von $\delta\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ zeigt eine Übereinstimmung der Größenordnungen.

5.3.3.3 Ruckminimale Interpolation der Samples

Die Optimierung des vorhergehenden Abschnitts liefert eine unstetige Trajektorie, die in dieser Form nicht dem Roboter kommandiert werden kann. Um eine realistische Einschätzung möglicher Konditionierungen zu erhalten, müssen Sollwerte zwischen den Samples interpoliert werden. Ausgehend von der Theorie des minimalen Rucks nach [9] wird hier angenommen, dass eine Minimierung des Rucks gleichzeitig zu einer Minimierung der Größenordnungen zwischen Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung führt. Wie in [33] gezeigt wird, ist die analytische Lösung des Problems

$$\min_{q(t)} \frac{1}{2} \int_{t=0}^{0.5} \ddot{q}(t)^2 dt \quad (5.41)$$

ein Polynom 5. Ordnung und bietet somit eine optimale Möglichkeit zur Interpolation der Samples aus Abschnitt 5.3.3.2.

Der allgemeine Ansatz des Polynoms 5. Ordnung in indizistischer Schreibweise lautet

$$q_i(t) = a_{0,i} + a_{1,i}t + a_{2,i}t^2 + a_{3,i}t^3 + a_{4,i}t^4 + a_{5,i}t^5, \quad (5.42)$$

mit den zeitlichen Ableitungen bis in die Beschleunigungsebene

$$\dot{q}_i(t) = a_{1,i} + 2a_{2,i}t + 3a_{3,i}t^2 + 4a_{4,i}t^3 + 5a_{5,i}t^4,$$

$$\ddot{q}_i(t) = 2a_{2,i} + 6a_{3,i}t + 12a_{4,i}t^2 + 20a_{5,i}t^3.$$

Setzt man folgende Randbedingungen in (5.42) ein:

- $q_i(0) = q_{s,i}, q_i(t_f) = q_{f,i},$
- $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{s,i}, \dot{q}_i(t_f) = \dot{q}_{f,i},$
- $\ddot{q}_i(0) = \ddot{q}_{s,i}, \ddot{q}_i(t_f) = \ddot{q}_{f,i},$

so erhält man die Koeffizienten

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} q_{s,i} \\ \dot{q}_{s,i} \\ \ddot{q}_{s,i} \\ \frac{-20q_{s,i} + 20q_{f,i} - 12\dot{q}_{s,i}t_f - 8\dot{q}_{f,i}t_f - 6\ddot{q}_{s,i}t_f^2 + \ddot{q}_{f,i}t_f^2}{2t_f^3} \\ \frac{-15q_{s,i} + 15q_{f,i} - 8\dot{q}_{s,i}t_f - 7\dot{q}_{f,i}t_f - 3\ddot{q}_{s,i}t_f^2 + \ddot{q}_{f,i}t_f^2}{t_f^4} \\ \frac{-12q_{s,i} + 12q_{f,i} - 6\dot{q}_{s,i}t_f - 6\dot{q}_{f,i}t_f - 2\ddot{q}_{s,i}t_f^2 + \ddot{q}_{f,i}t_f^2}{2t_f^5} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

des Polynoms $q_i(t)$ mit einem Gültigkeitsbereich von $t = 0 \dots t_f$.

Um eine Trajektorie mit mehr als einem Übergangspunkt (wie aus Abschnitt 5.3.3.2) zu interpolieren, muss ein zustandsabhängiger Ablauf programmiert werden. Im ersten Zustand erfolgt die Initialisierung, d.h. die Berechnung der Koeffizienten nach (5.43) für das Start- und Zielsample $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_s$ und $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_f$ des ersten Interpolationintervalls der Länge t_f . Gleichzeitig wird die Zeit auf Null gesetzt. Der darauf folgende Zustand muss als Schleife realisiert werden. Bei jeder Wiederholung wird erst die Zeit mit einer festgelegten Periodendauer inkrementiert

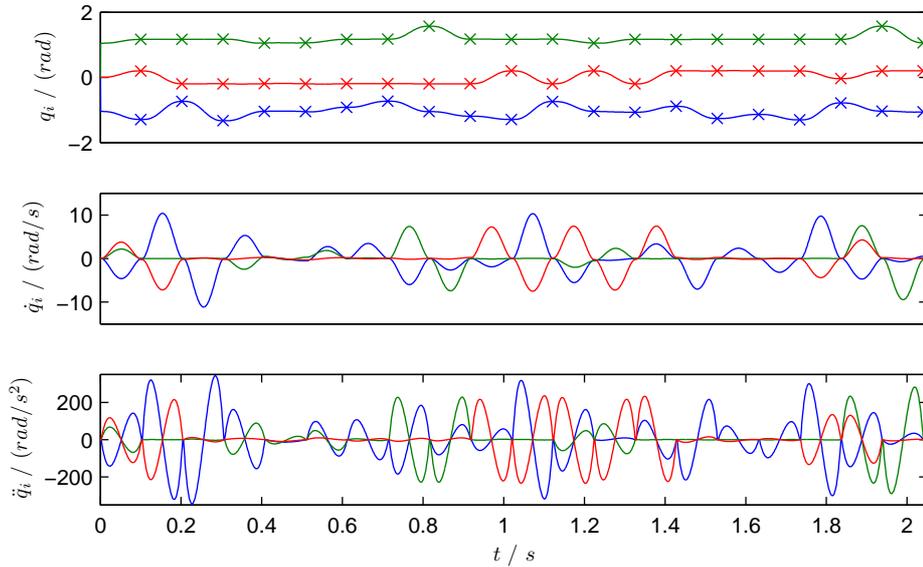


Abb. 5.4: Interpolierte optimale Anregungstrajektorie mit $t_f = 0.1$ s. $i = 1$ (blau), $i = 2$ (grün) und $i = 3$ (rot).

und dann der Interpolationswert nach (5.42) berechnet. Die Abbruchbedingung der Schleife lautet $t = t_f$ und leitet die Initialisierung des nächsten Übergangspunktes ein. Dabei gilt dann $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_s(k) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_f(k-1)$. Der Interpolator läuft solange bis $k = n$ und $t(k) = t_f(k)$.

Mit den in Abschnitt 5.3.3.2 ermittelten Samples als Übergangswerte, kann unter Verwendung des Polynoms 5. Ordnung eine weiche und stetige Trajektorie interpoliert werden. Abbildung 5.4 und 5.5 zeigt die Zeitserien für die zwei Intervalllängen $t_f = 0.1$ s und $t_f = 0.3$ s. Dabei ist ein typisches Ergebnis der zehn Optimierungsdurchläufe dargestellt.

Im Folgenden werden die beiden interpolierten Trajektorien verglichen und die Auswirkung auf die Parameteridentifikation diskutiert. Die maximalen Beschleunigungswerte für $t_f = 0.1$ s liegen im Bereich von $|\ddot{\mathbf{q}}_{\max}| \approx 3.5 \cdot 10^2$ rad/s². Im Vergleich zu den Maximalwerten für $t_f = 0.3$ s ergibt sich ein Verhältnis $|\ddot{\mathbf{q}}_{\max}(t_f = 0.1)|/|\ddot{\mathbf{q}}_{\max}(t_f = 0.3)| \approx 10^1$. Der Einfluss der Intervalllänge ist somit nicht zu vernachlässigen und eine Auswirkung auf die Konditionierungszahl zu erwarten. Quantitative Ergebnisse bezüglich des Einflusses der Intervalllänge auf die „Qualität“ der Parameteridentifikation erhält man durch die numerische Auswertung des Regressors. Wertet man den Regressor mit weichen Trajektorien gleich

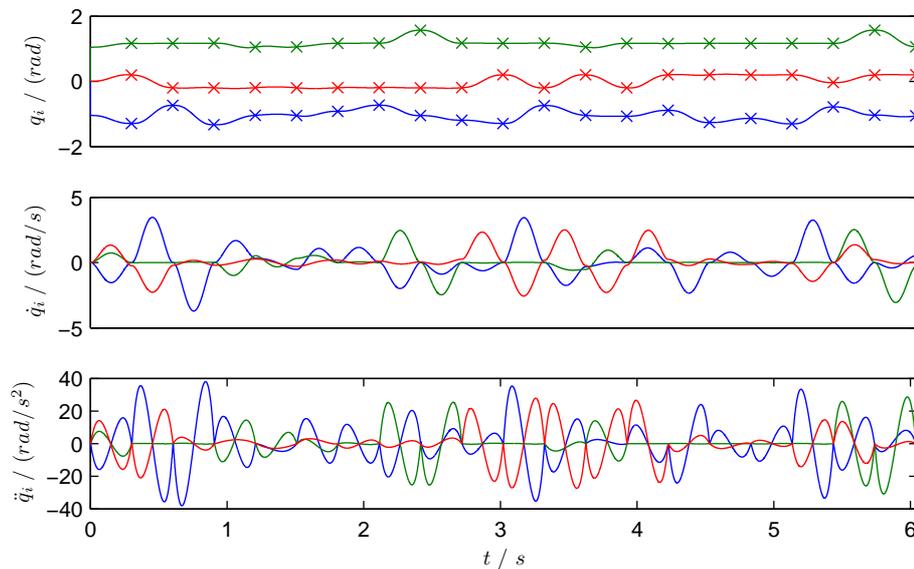


Abb. 5.5: Interpolierte optimale Anregungstrajektorie mit $t_f = 0.3$ s. $i = 1$ (blau), $i = 2$ (grün) und $i = 3$ (rot).

cher Übergangspunkte aber variabler Intervalllänge aus und berechnet anschließend jeweils die Konditionierungszahlen, so erhält man den in Abbildung 5.6 dargestellten Zusammenhang. Dieser zeigt eine exponentielle Verschlechterung der Konditionierung mit sinkender Intervalllänge. Eine absolute obere Schranke für die Konditionierungszahl ist schwer zu definieren, da diese von der Genauigkeit des zu identifizierenden Modells abhängt. Dennoch zeigt Abbildung 5.6, dass für eine bezüglich der Reaktionszeit vertretbaren Intervalllänge $\text{cond}(t_f = 0.3) > 100$ ist. In [35] wird eine obere Schranke $\text{cond} < 100$ für die Identifikation von Robotermodellen vorgeschlagen. Bei der Identifikation von biomechanischen Systemen sollte man aber (im Vergleich zu mechatronischen Systemen) von einer geringen Modellgenauigkeit ausgehen und daher konservativere Konditionierungen ansetzen.

5.3.4 Näherung zur Schätzung der Trägheitsparameter

Die Untersuchungen des letzten Abschnitt zeigen, dass selbst für eine ruckminimierte optimierte Trajektorie eine robuste Parameteridentifikation des gesamten dynamischen Modells (5.27) nicht gesichert ist. Wie die Simulationen zeigen,

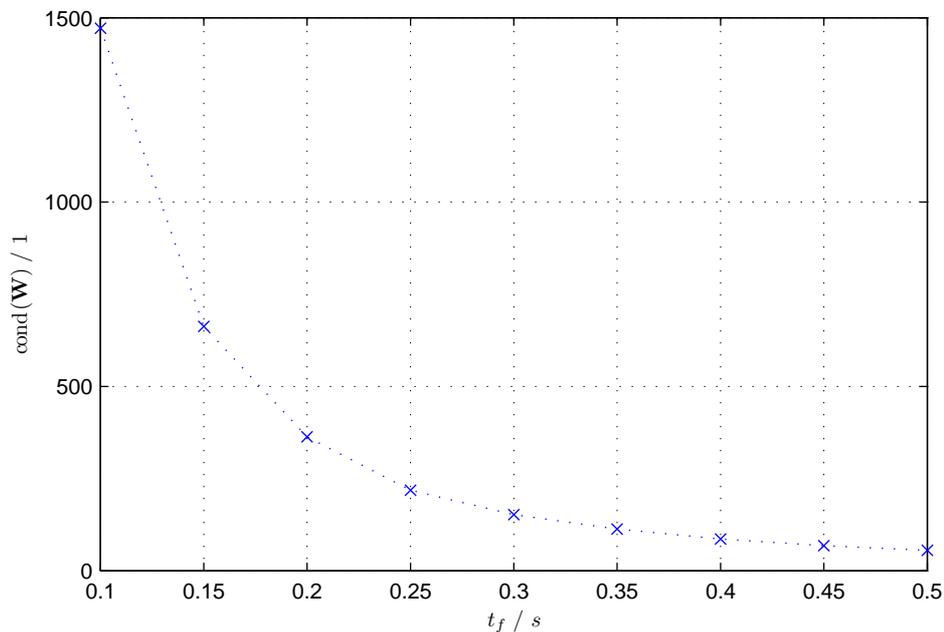


Abb. 5.6: Konditionierungszahl in Abhängigkeit der Intervalllänge t_f

führen die Beschleunigungsterme im Regressor zu nicht vertrauenswürdigen Parameterschätzungen. Um dieses Problem zu übergehen, wird in diesem Abschnitt eine Möglichkeit zur isolierten Identifikation der Trägheitsparameter untersucht.

Anders als bei der isolierten Schätzung der Steifigkeit aus Abschnitt 5.2.2 existiert keine Trajektorie mit einem stationären Zustand für die Beschleunigung, bei dem gleichzeitig die Verschiebung $\delta \mathbf{q}$ und die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$ Null ist. Daher kann die getrennte Schätzung der Trägheitsparameter nur durch eine Näherung erfolgen. Die Näherung basiert im Wesentlichen auf zwei Annahmen: Wählt man als Anregung eine Trajektorie mit geringen Verschiebungen $\delta \mathbf{q} \ll \ddot{\mathbf{q}}$ und niedrigen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} \ll \ddot{\mathbf{q}}$ so sind im Modell (5.24) die Momentenanteile verursacht durch

- die Steifigkeit
- und Dämpfung

vernachlässigbar klein. Ob diese Annahmen zutreffend sind, kann bei einer separaten Bestimmung (unter Voraussetzung bekannter Trägheitsparameter) der Steifigkeits- und Dämpfungsparameter zumindest qualitativ gezeigt werden.

Für das reduzierte inverse Dynamikmodell ist die Variationsgleichung (5.22) nicht mehr notwendig, da die Linearisierung der Steifigkeits- und Dämpfungsanteile wegfällt. Somit kann der Regressor für die Schätzung der Trägheitsparameter

$$\boldsymbol{\zeta}_{red} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T, \quad (5.44)$$

unter Verwendung von (5.21) mit

$$\mathbf{W}_{red} = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{red}} \quad (5.45)$$

gebildet werden. Setzt man wie in (5.27) die Trägheitsparameter der Anbindungsstelle als bekannt voraus, so lautet der Ausgangsvektor

$$\mathbf{Y}_{red} = \boldsymbol{\tau}_{ext} - (\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{W}_{red} \boldsymbol{\zeta}_{red}) \quad (5.46)$$

und ist abgesehen von der Variation des externen Moments identisch⁴ mit (5.27).

Zur Bestimmung der Trägheitsparameter wurde folgendes Experiment durchgeführt. Der Endeffektor des Arms der Versuchsperson wurde durch den Roboter in einer von vier Ausgangspositionen gehalten. Nach vollständiger Entspannung des Arms, gemessen durch Null Reaktionskräfte in der Transversalebene, fuhr der Roboter eine stochastische Trajektorie ab. Der Ablauf wurde 30 mal pro Ausgangsposition wiederholt. Die Planung der Trajektorie erfolgte durch die Generierung von Zufallszahlen und anschließende Interpolation mit dem Polynom 5. Ordnung. Die Grenzen der Zufallswerte betragen $\pm 0.05 \text{ rad}$ für alle Gelenkwinkel des Arms und die Intervalllänge für die Interpolation $t_f = 0.05 \text{ s}$. Mit den instantanen Werten für die Gelenkwinkel des Arms erfolgte die Berechnung der Vorwärtskinematik ${}^O_{TCP} \mathbf{T}(\mathbf{q}_{d,Arm})$ (siehe Abbildung 5.3) und im gleichen Zeitschritt die Generierung der Sollwerte für die Gelenkwinkel des Roboters $\mathbf{q}_{d,LBR}$ (siehe Abschnitt 4.2.3).

Die Messdaten wurden unter Verwendung der Zusammenhänge aus Abschnitt 5.3.2 offline, d.h. nach Abschluss aller Messungen ausgewertet. Abbildung 5.7 zeigt die geschätzten Trägheitsparameter an vier Ausgangspositionen für jeweils 30 Durchläufe. In Tabelle 5.8 sind die Mittelwerte und Standardabweichungen über alle 120 Durchläufe aufgelistet. Die Robustheit der Parameteridentifikation zeigt Mittelwert und Standardabweichung der Konditionierungszahl $\text{cond} = 5.8 \pm 1.7$ über die 120 Durchläufe.

⁴Der Index k wurde hier als Vereinfachung weggelassen. Die Bildung der gesamten Regressionsgleichung wird analog zu Abschnitt 5.3.1.3 durchgeführt.

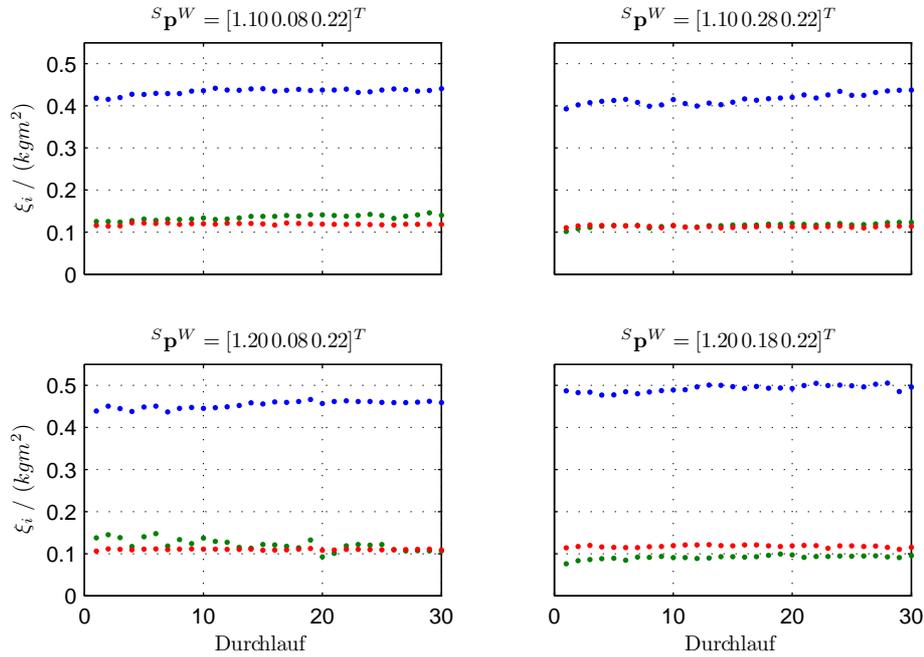


Abb. 5.7: Experimentell bestimmte Trägheitsparameter des Arms. ξ_1 (blau), ξ_2 (grün) und ξ_3 (rot).

ξ_1 (kgm ²)	ξ_2 (kgm ²)	ξ_3 (kgm ²)
0.449 ± 0.030	0.116 ± 0.018	0.115 ± 0.004

Tab. 5.8: Experimentell bestimmte Trägheitsparameter: Mittelwerte und Standardabweichungen

Da das inverse Dynamikmodell nach (5.21) linear bezüglich der Basisträgheitsparameter ist, sollte $\xi = \text{konst.}$ gelten. Der Wert für ξ_1 über die jeweils 30 Durchläufe, steigt jedoch leicht an. Auch schwanken die Mittelwerte der einzelnen Ausgangspositionen. Dies lässt vermuten, dass die Annahmen zur Vernachlässigung der Steifigkeits- und Dämpfungsanteile nicht zutreffen und somit das reale Verhalten selbst für $\delta\mathbf{q} \ll \ddot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\mathbf{q}} \ll \ddot{\mathbf{q}}$ nicht ausreichend approximiert wird.

5.3.5 Bestimmung der Steifigkeit und Dämpfung

Sind die Trägheitsparameter des Arms einmal bekannt, so können die zugehörigen Spalten des Regressors gestrichen werden und der Parametervektor zur Identifi-

zierung der Steifigkeit und Dämpfung lautet

$$\zeta_{\text{imp}} = [B_{11} \ B_{12} \ B_{21} \ B_{22} \ B_{33} \ K_{11} \ K_{12} \ K_{21} \ K_{22} \ K_{33}]^T. \quad (5.47)$$

Die Regressorgleichung kann mit dem reduzierten Parametervektor analog zu (5.26) bis (5.28) berechnet werden. Da in den Spalten des Regressors jetzt nur noch Geschwindigkeits- und Positionsterme auftreten, ist eine wesentlich verbesserte Konditionierung zu erwarten.

Dennoch wird die Intervalllänge t_f der interpolierten Anregungstrajektorie (siehe Abschnitt 5.3.3.3) das Ergebnis der Parameteridentifikation beeinflussen. Dabei stellen sich folgende Frage: Für welche Intervalllänge t_f repräsentieren die identifizierten Parameter das physikalische System? Mit der Konditionierungszahl kann lediglich die Robustheit der Regression quantifiziert werden. D.h. wie empfindlich ist die Schätzung gegenüber Mess- und Modellierungsfehler? Aufgrund der Komplexität des neuromuskulären Systems ist die Modellgenauigkeit schwer zu bewerten und sollte erstmal als „ungenau“ angenommen werden. Demzufolge wird hier als obere Schranke $\text{cond} < 20$ für robuste Parameterschätzungen angenommen.

Ein weiteres Bewertungskriterium für die Qualität der Parameterschätzung kann aus allgemeingültigen Eigenschaften mechanischer Systeme abgeleitet werden. Die Definitheit der Steifigkeitsmatrix eines mechanisch gefesselten Systems ist stets positiv [21] und durch die quadratische Form

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \text{für } \mathbf{x} \neq 0 \quad (5.48)$$

definiert. Dies bedeutet für den Fall der Gelenksteifigkeitsmatrix, dass die Formänderungsenergie $1/2 \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}$ für endliche Verschiebungen $\delta \mathbf{q} \neq 0$ stets positiv sein muss. Ist die identifizierte Steifigkeitsmatrix positiv definit, so kann der Schätzung vertraut werden.

Zur Bestimmung der Mindestintervalllänge $t_{f,\text{min}}$ unter Berücksichtigung der genannten Kriterien führte man folgendes Experiment durch. Der Endeffektor des menschlichen Arms wurde durch den Roboter in einer Ausgangsposition gehalten. Nach dem die Versuchsperson eine definierte Kraft von 10 N proximal gehalten hatte, lenkte der Roboter den Arm positionsgesteuert aus. Um bewusste Reaktionen der Versuchsperson vor Beginn der Perturbation zu vermeiden war die Haltezeit der Kraft, sowie die Auslenkungsrichtung zufällig gewählt. Die Anregungstrajektorie wurde wie in Abschnitt 5.3.4 durch ein Polynom 5. Ordnung für

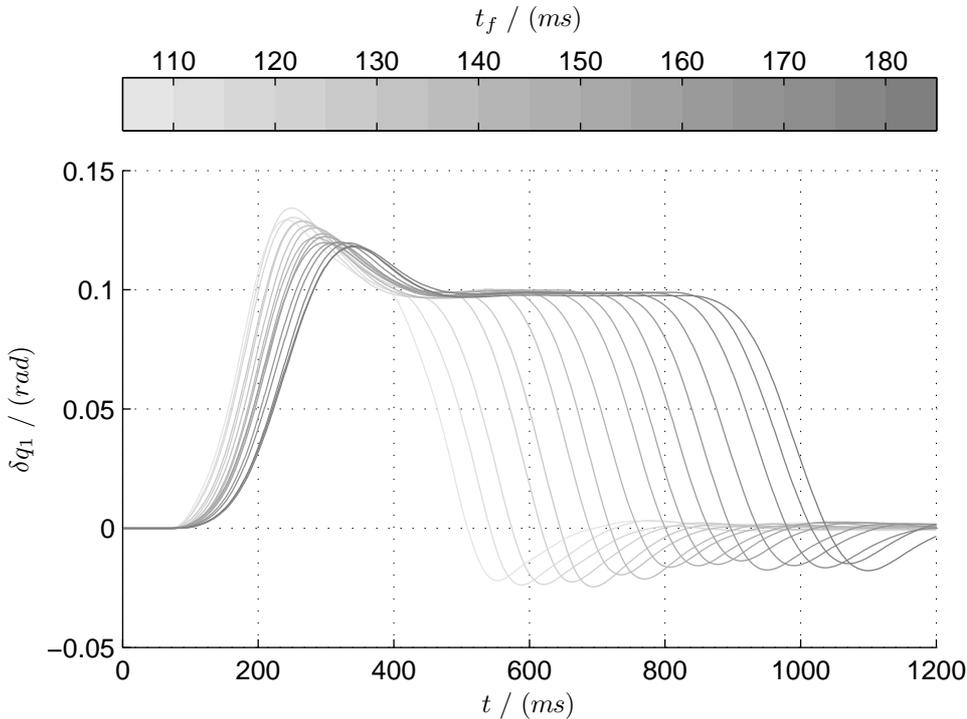


Abb. 5.8: Anregungstrajektorien für 16 Intervalllängen t_f , beispielhaft für eine Perturbation in δq_1

Gelenkwinkel des Arms interpoliert. Um einen Parametervektor zu identifizieren setzte man eine Intervalllänge aus $t_f = 0.1 \dots 0.25$ s fest und perturbierte in Richtung einer der sechs Zielpunkte. Dieser Ablauf wiederholte sich so lange, bis jeder der Zielpunkte fünf mal angefahren wurde (d.h. insgesamt 30 Durchläufe). Nach der Datenerfassung für einen Parametervektor erhöhte man die Intervalllänge und wiederholte die 30 Durchläufe solange, bis Daten zur Bestimmung von 16 Parametersätzen $\hat{\zeta}_{\text{imp}}(t_f)$ erfasst waren. Abbildung 5.8 zeigt typische Anregungstrajektorien in Abhängigkeit der 16 Intervalllängen.

Für die Auswertung der Messdaten berücksichtigte man jeweils nur einen Teil der Zeitschriebe im Regressor. Bezeichnet man den Zeitpunkt zu Beginn der Perturbation mit t_s , so gingen für jeden der 30 Durchläufe die Daten der Zeitintervalle $t_{\text{est}} = t_s \dots (t_s + t_f + 0.1 \text{ s})$ in die Bestimmung von $\hat{\zeta}_{\text{imp}}(t_f)$ ein.

Tabelle 5.9 zeigt die Steifigkeitsmatrizen für variierende Bestimmungintervalllängen t_{est} . Für den Test auf positiv definite Steifigkeitsmatrizen wurden die Eigenwerte $((\mathbf{K}_s - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0)$ des symmetrischen Anteils $\mathbf{K}_s = 1/2(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)$ berechnet

t_{est} (ms)	200			210			220			230		
\mathbf{K} ($\frac{Nm}{rad}$)	-102.7	-44.4	0.0	-82.8	-27.5	0.0	-63.5	-21.2	0.0	-43.7	-8.5	0.0
	-50.1	-22.6	0.0	-34.6	-9.4	0.0	-28.6	-10.8	0.0	-19.8	-2.5	0.0
	0.0	0.0	40.1	0.0	0.0	39.6	0.0	0.0	31.9	0.0	0.0	30.6
t_{est} (ms)	240			250			260			270		
\mathbf{K} ($\frac{Nm}{rad}$)	-16.4	-1.1	0.0	-15.1	4.8	0.0	-9.2	5.0	0.0	0.5	9.4	0.0
	-6.7	1.9	0.0	-9.9	2.2	0.0	-7.7	2.9	0.0	-3.4	4.8	0.0
	0.0	0.0	30.9	0.0	0.0	28.9	0.0	0.0	28.5	0.0	0.0	28.9
t_{est} (ms)	280			290			300			310		
\mathbf{K} ($\frac{Nm}{rad}$)	3.2	10.1	0.0	4.4	11.2	0.0	5.1	12.5	0.0	6.0	11.0	0.0
	-3.3	4.9	0.0	-2.7	6.5	0.0	-3.0	7.1	0.0	-3.1	6.2	0.0
	0.0	0.0	27.9	0.0	0.0	28.4	0.0	0.0	26.2	0.0	0.0	28.3
t_{est} (ms)	320			330			340			350		
\mathbf{K} ($\frac{Nm}{rad}$)	7.8	14.1	0.0	8.9	14.1	0.0	8.0	13.0	0.0	9.6	13.6	0.0
	-2.3	8.5	0.0	-0.9	8.6	0.0	-1.9	6.6	0.0	-0.2	8.6	0.0
	0.0	0.0	25.4	0.0	0.0	24.2	0.0	0.0	22.4	0.0	0.0	25.7

Tab. 5.9: Steifigkeitsmatrizen für variierende Intervalllängen

und in Abbildung 5.9 über der Bestimmungsintervalllänge t_{est} aufgetragen. Alle Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix sind für $t_{est} > 0.28$ s positiv und somit ist nach [4] das Kriterium der Definitheit erfüllt. Die Konditionierungszahl unterschreitet für $t_{est} > 0.30$ s die obere Schranke von 20.

Die Struktur der Steifigkeitsmatrizen aus Tabelle 5.9 weist für alle Bestimmungsintervalle nicht zu vernachlässigende Asymmetrien auf. Sie verletzen die Integritätsbedingungen bei der Ableitung einer Potentialfunktion aus dem Kraftfeld der Elastizitäten (siehe Abschnitt 2.3.2) und lassen Modellfehler vermuten. Dies motiviert dazu, die Zeitserien der Gelenkwinkel, deren zeitliche Ableitungen und den Verlauf der externen Momente auf Plausibilität zu untersuchen, um so Widersprüche bezüglich mechanischer und systemtheoretischer Gesetze zu lokalisieren.

Für die Plausibilitätsanalyse wurde die geschätzte inverse Dynamik

$$\delta\boldsymbol{\tau}_{\text{pred}} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) + \mathbf{W}_{\text{imp}}(\delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\text{imp}} \quad (5.49)$$

berechnet und mit den real gemessenen externen Momenten $\delta\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ verglichen. In der sog. Funktionsapproximation nach (5.49) wurden die gemessenen Bewegungsgrößen, die geschätzten Trägheitsparameter nach Tabelle 5.8 und die geschätzten Impedanzparameter für $t_{est} = 0.31$ s nach Tabelle 5.9 berücksichtigt. Um ein Systemverhalten zu sehen, welches aus Sicht der Steifigkeit den Integritätsbedingungen genügt, wurde nur der symmetrische Anteil $\mathbf{K}_s = 1/2(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)$ im Parametervektor $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\text{imp}}$ verwendet.

Abbildung 5.10 zeigt den Verlauf der Verschiebungen und stellt die gemessenen und approximierten Verläufe der Gelenkmomente gegenüber. Der Anstieg des geschätzten Moment $\delta\tau_{\text{pred},1}$ eilt dem gemessenen Moment voraus und besitzt ein

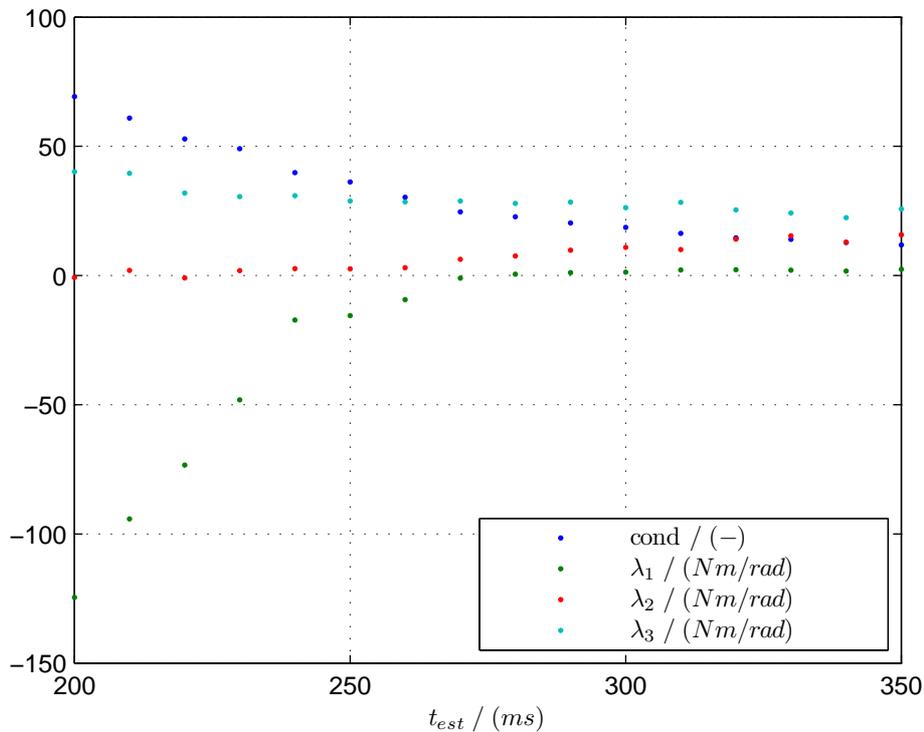


Abb. 5.9: Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix und Konditionierungszahl über der Länge des Bestimmungsintervalls t_{est}

höheres Maximum. Dies zeigt eindeutig (siehe (A.5) im Anhang A.1.2), dass die Trägheitsparameter wertemäßig zu hoch bestimmt wurden und die Annahmen aus Abschnitt 5.3.4 nicht zutreffend sind. Zu große Trägheiten initiieren jedoch keine scheinbar asymmetrischen Steifigkeitsmatrizen. Hierfür ist ein Modellierungsfehler verantwortlich. Betrachtet man den quasistationären Zustand im Bereich von $t = 0.4 \dots 0.6 s$, so erzeugt eine Auslenkung δq_3 ein Moment $\delta \tau_{ext,3}$. Dies wäre nur für eine Steifigkeitsverkopplung $K_{32} \neq 0$ zwischen dem Freiheitsgrad der Anbindungsstelle und des Ellbogengelenks kausal. Aufnahmen mit einer Hochgeschwindigkeitskamera zeigen eine nicht modellierte Verschiebung der Schulter. Folglich wirkt ein Moment $\delta \tau_{ext,3}$, obwohl die Auslenkungen $\delta q_1 = \delta q_2 \approx 0$ und $K_{32} = 0$ (siehe Abbildung 5.10).

Die Plausibilitätsuntersuchungen des letzten Absatzes zeigen, dass die Annahmen für die Modellierung der Anbindungsstelle aus Abschnitt 5.3.1.1 nicht zutreffen. Durch die Berücksichtigung der Anbindungsstelle mit einem Freiheitsgrad (für ei-

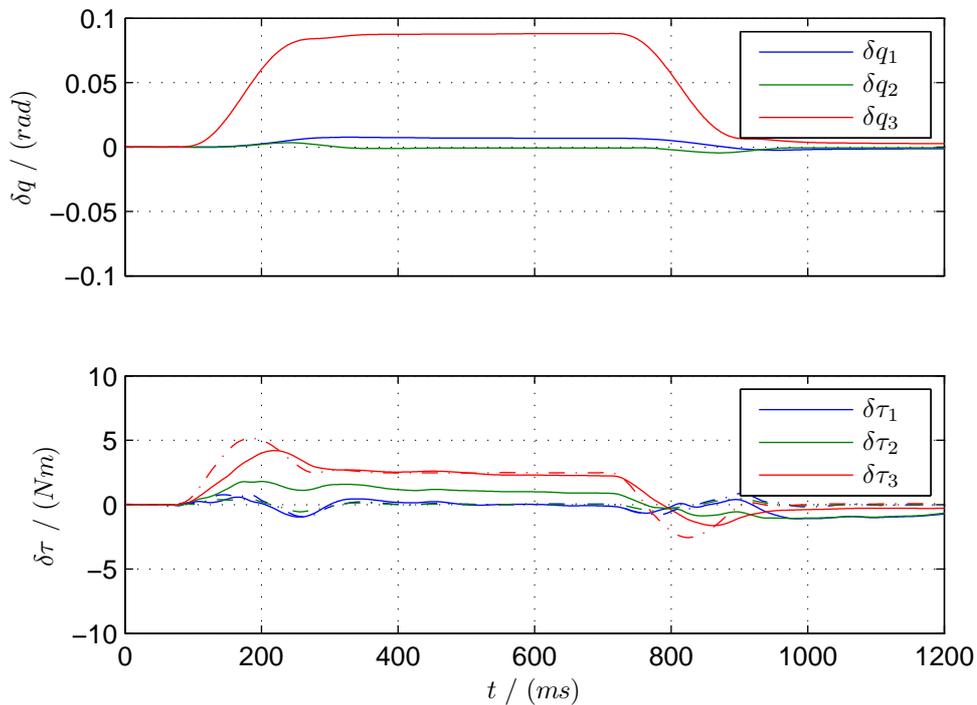


Abb. 5.10: Vergleich der gemessenen externen Momente $\delta\tau_{ext}$ (durchgezogene Linien) mit der geschätzten Inversedynamik $\delta\tau_{pred}$ (strichpunktierte Linien), beispielhaft für eine Perturbation in δq_3

ne nicht redundante Kinematik) treten nicht modellierte Effekte auf, welche die Parameteridentifikation negativ beeinflussen.

5.4 Eigenschaften der Impedanz für eine Kraftaufgabe

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der mechanischen Impedanz bei der Bewältigung einer so genannten Kraftaufgabe (*engl. force task*) untersucht. Die Ergebnisse dieses Experiments sollen einerseits zeigen, welche Steifigkeiten und Dämpfungen das neuromuskuläre System zur Applizierung von Kräften einstellt. Andererseits erhofft man sich eine Verifizierung der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Methoden.

Unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus Abschnitt 5.3.5 wird der Freiheitsgrad für die Anbindungsstelle durch das Drehgelenk (siehe Abschnitt 4.1.3) entlastet und die Masse der Anbindungsstelle inklusiv Drehgelenk dem Unterarm zugerechnet. Somit reduziert sich das gesamte dynamische Modell aus Abschnitt 5.3.1 auf zwei Freiheitsgrade für Schulter- und Ellbogengelenk. Die symbolischen Ausdrücke der Bewegungs- und Regressionsgleichungen sind im Anhang A.2 aufgelistet.

5.4.1 Ablauf des Experiments

Getestet wurde eine gesunde Versuchsperson. Die Reaktionskräfte zwischen Roboter-Endeffektor und menschlichem Arm wurden in Schulterkoordinaten auf dem Monitor des Versuchsaufbaus dargestellt. Eine Graphik zeigte die Kräfte in der Transversalebene $F_{x/y}$ und eine weitere Graphik die Kraft in Richtung des Gravitationsfeldes F_z . Der Bereich der Sollkräfte war jeweils durch Markierungen mit einer Toleranz von $\pm 1 N$ gekennzeichnet (siehe Abbildung 4.1 in Abschnitt 4.1.1). Den Referenzbereich für F_z wählte man so, dass das Eigengewicht des Arms kompensiert wurde. Der Referenzbereich F_x variierte im Verlauf des Experiments und F_y war stets Null. Die Randbedingungen des Experiments legte man durch die Ausgangsposition des Armendeffektors und der durch den Arm ausgeübten Kraft fest. Als Ausgangsposition definierte man: P1 $[1.10\ 0.08\ 0.28]^T$, P2 $[1.20\ 0.08\ 0.28]^T$, P3 $[1.20\ 0.18\ 0.22]^T$ und P4 $[1.20\ 0.28\ 0.28]^T$ in Schulterkoordinaten ${}^S\mathbf{p}^W$ (Einheit m). Die Referenzkräfte waren: F0 $[0\ 0\ -20]^T$, F1 $[5\ 0\ -20]^T$, F2 $[10\ 0\ -20]^T$, F3 $[15\ 0\ -20]^T$ und F4 $[20\ 0\ -20]^T$ in Schulterkoordinaten ${}^S\mathbf{F}^{EE}$ (Einheit N).

Zur Identifikation eines Parametersatzes hielt der Roboter den Arm in einer der Ausgangsposition. Nach dem die Versuchsperson eine der Referenzkräfte gehalten hatte, lenkte der Roboter den Arm positionsgesteuert aus. Um kognitive Reaktionen der Versuchsperson noch vor Beginn der Perturbation (d.h. z.B. Erhöhung der Steifigkeit in Richtung der Perturbation) zu vermeiden, wurde die Haltezeit der Kraft sowie die Perturbationsrichtung zufällig gewählt. Die Auslenkung folgte einer weichen Trajektorie (siehe Abschnitt 5.3.3.3) mit den Zielpunkten: Q1 $[0.05\ 0]^T$, Q2 $[-0.05\ 0]^T$, Q3 $[0\ 0.05]^T$, Q4 $[0\ -0.05]^T$, Q5 $[0.05\ -0.05]^T$ und Q6 $[-0.05\ 0.05]^T$ in Gelenkkoordinaten $\delta\mathbf{q}$ des Arms (Einheit rad) und einer Intervalllänge von $t_f = 0.3\ s$. Nach fünf Auslenkungen pro Zielpunkt (d.h. nach 30

5.4 Eigenschaften der Impedanz für eine Kraftaufgabe

	P1		P2		P3		P4	
F0	6.96	1.35	4.90	2.22	3.98	3.68	6.25	4.62
	3.97	6.72	5.15	8.58	5.29	8.11	4.78	4.69
F1	10.28	3.81	5.02	3.72	3.44	3.78	7.33	7.31
	4.49	11.63	4.99	10.41	4.58	8.58	5.65	8.51
F2	10.17	5.77	7.19	4.30	7.30	7.44	10.35	5.97
	6.55	17.01	8.68	15.16	8.05	14.24	7.21	7.40
F3	12.85	7.71	9.77	8.54	8.10	8.16	15.61	8.75
	10.48	21.95	12.45	20.72	7.91	14.78	9.80	9.04
F4	16.44	10.29	10.87	8.89	11.97	10.61	18.43	11.42
	13.33	27.96	11.40	22.16	11.24	18.13	11.63	11.22

Tab. 5.10: Gelenksteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_q (Nm/rad) für vier Ausgangspositionen und fünf Referenzkraftbereiche

	P1		P2		P3		P4	
F0	0.57	-0.03	0.53	0.16	0.64	0.34	0.92	0.51
	-0.23	0.30	-0.06	0.47	0.13	0.54	0.36	0.38
F1	0.82	0.14	0.96	0.38	0.90	0.52	1.08	0.60
	-0.08	0.52	0.29	0.68	0.42	0.73	0.73	0.67
F2	0.85	0.28	0.64	0.39	0.98	0.65	0.81	0.69
	0.11	0.79	0.25	1.02	0.74	1.12	0.52	0.63
F3	0.84	0.30	1.08	0.87	1.31	1.02	1.29	0.87
	0.13	0.99	0.95	1.68	1.11	1.45	0.94	0.87
F4	1.12	0.49	1.07	0.79	1.45	1.24	1.44	1.11
	0.37	1.30	0.97	1.72	1.27	1.64	0.98	0.91

Tab. 5.11: Gelenkdämpfungsmatrizen \mathbf{K}_q (Nm/rad) für vier Ausgangspositionen und fünf Referenzkraftbereiche

Durchläufen) wurde die Datenerfassung zur Identifizierung eines Parametersatzes abgeschlossen und die Randbedingungen geändert. Diesen Ablauf wiederholte man bis Daten für alle 20 Kombinationen der Randbedingungen erfasst wurden.

5.4.2 Auswertung und Interpretation der Ergebnisse

Für die Auswertung der Messdaten berücksichtigte man jeweils nur einen Teil der Zeitschriebe im Regressor. Bezeichnet man den Zeitpunkt zu Beginn der Perturbation mit t_s , so gehen für jeden der 30 Durchläufe die Daten der Zeitintervalle $t_{est} = t_s \dots (t_s + 0.3 s)$ in die Bestimmung der Parameter für eine Ausgangsposition und eine Referenzkraft ein.

Tabelle 5.10 zeigt die Gelenksteifigkeitsmatrizen und Tabelle 5.11 die Gelenkdämpfungsmatrizen für die vier Ausgangspositionen und fünf Referenzkraftbereiche.

	P1	P2	P3	P4
ξ_1 (kgm^2)	0.410 ± 0.011	0.376 ± 0.013	0.370 ± 0.006	0.347 ± 0.011
ξ_2 (kgm^2)	0.284 ± 0.012	0.141 ± 0.029	0.154 ± 0.012	0.168 ± 0.008
ξ_3 (kgm^2)	0.140 ± 0.005	0.130 ± 0.012	0.134 ± 0.006	0.130 ± 0.007

Tab. 5.12: Trägheitsparameter für vier Ausgangspositionen: Mittelwerte und Standardabweichungen über fünf Referenzkraftbereiche

	P1	P2	P3	P4
F0	0.4930	0.3976	0.1796	0.0170
F1	0.0814	0.1457	0.0956	0.1283
F2	0.0632	0.3380	0.0391	0.0943
F3	0.1524	0.1862	0.0154	0.0565
F4	0.1288	0.1236	0.0291	0.0093

Tab. 5.13: Asymmetrie der Steifigkeitsmatrix Z (–) für vier Ausgangspositionen und fünf Referenzkraftbereiche

Tabelle 5.12 zeigt die Mittelwerte und Standardabweichungen der Trägheitsparameter für die vier Ausgangspositionen. Gemittelt wurden jeweils die Komponenten ξ der fünf Referenzkräfte für eine Ausgangsposition.

Um die Asymmetrien der Steifigkeitsmatrizen (siehe Tabelle 5.10) zu quantifizieren, wird folgendes Maß definiert. Ausgehend von der allgemein gültigen Zerlegung von Matrizen in symmetrische Anteile $\mathbf{K}_s = 1/2(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)$ und antisymmetrische (schiefsymmetrische) Anteile $\mathbf{K}_a = 1/2(\mathbf{K} - \mathbf{K}^T)$ wird hier das Maß

$$Z = \left| \frac{K_{a,12}}{K_{s,12}} \right| \quad (5.50)$$

definiert. Diese Definition weicht von [24] ab und ist von der Verschiebung $\delta\mathbf{q}$ unabhängig. Die zu den Steifigkeitsmatrizen aus Tabelle 5.10 zugehörigen Werte für Z sind in Tabelle 5.13 aufgelistet.

Einen quasilinearen Zusammenhang zwischen der Referenzkraft und den Eigenwerten des symmetrischen Anteils der Gelenksteifigkeiten aus Tabelle 5.10 zeigen die Graphen in Abbildung 5.11. Die Eigenwerte sind hier ansteigend abgebildet und nicht eindeutig dem Schulter- oder Ellbogengelenk zuzuordnen. Zu den Ausgleichsgeraden in Abbildung 5.11 ist jeweils der Determinationskoeffizient R^2 angegeben. Für $R^2 = 1$ werden die Datenpunkte ideal durch eine lineare Abbildung dargestellt und $R^2 = 0$ determiniert keinen linearen Zusammenhang.

Eine anschauliche Darstellung der Steifigkeit und Dämpfung erhält man durch

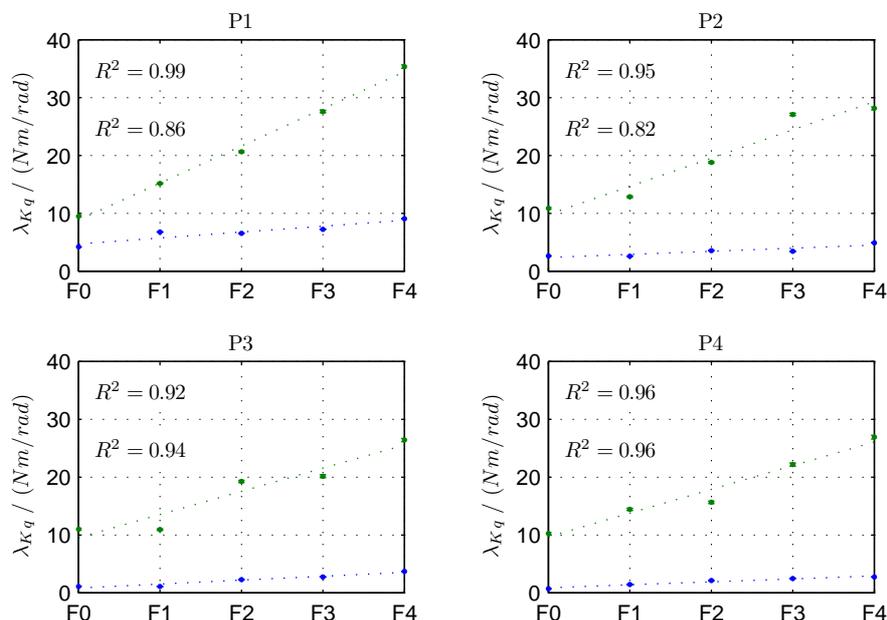


Abb. 5.11: Eigenwerte der Steifigkeitsmatrizen über der Referenzkraft für vier Ausgangspositionen

Transformation in den flachen euklidischen Raum der kartesischen Koordinaten (siehe Abschnitt 2.3.2). Das durch die kartesische Steifigkeitsmatrix aufgespannte Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\delta\mathbf{x}) = \mathbf{K}_x \delta\mathbf{x} \quad (5.51)$$

kann dann als parametrisierte Kurve dargestellt werden. Für den symmetrischen Anteil und $\mathbf{K}_x \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist die parametrisierte Kurve eine Ellipse, wobei die Hauptachsen der Ellipse in Richtung der minimalen und maximalen Rückstellkraft zeigen. In Abbildung 5.12 sind die Ellipsen der kartesischen Steifigkeitsmatrizen für vier Ausgangspositionen und jeweils fünf Referenzkräfte dargestellt. Analog zu (5.51) kann für die viskose Dämpfung das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\delta\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}_x \delta\dot{\mathbf{x}} \quad (5.52)$$

definiert werden. Die kartesischen Dämpfungsellipsen sind in Abbildung 5.13 dargestellt.

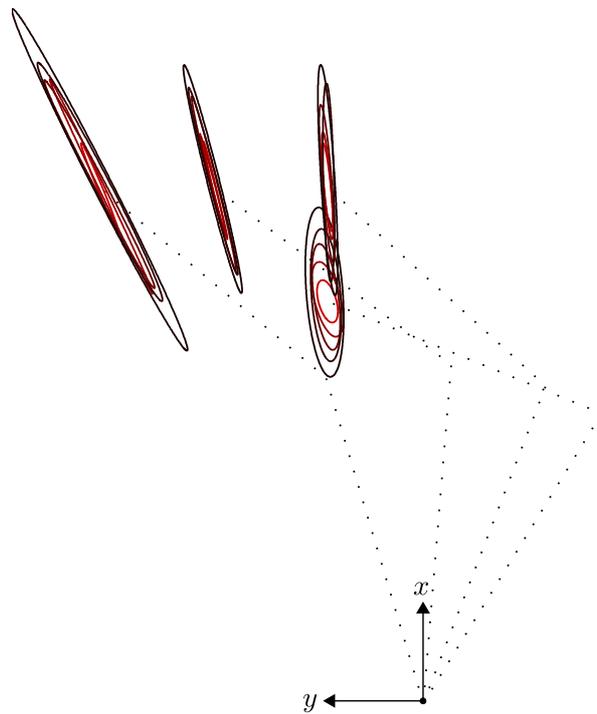


Abb. 5.12: Kartesische Steifigkeitsellipsen

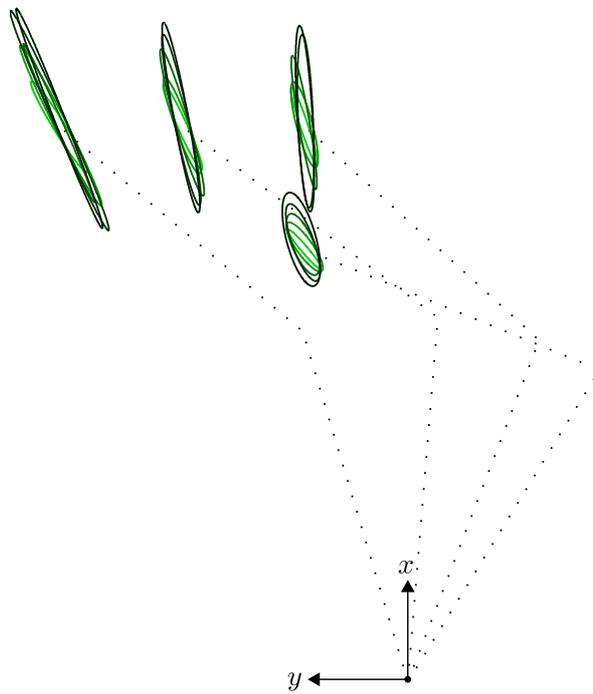


Abb. 5.13: Kartesische Dämpfungsellipsen

Kapitel 6

Schlussfolgerung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden anhand von Methoden aus der Robotik und Mehrkörperdynamik Starrkörpermodelle des menschlichen Arms abgeleitet. Diese Starrkörpermodelle dienten zur Beschreibung des Skelettes, wobei die Muskelmasse den starren Körpern des Skelettes zugerechnet wurde. Zur Berücksichtigung des neuromuskulären Systems wurden die Starrkörpermodelle durch lokal linearisierte Kraftelemente ergänzt. Zusammenfassend erhielt man ein Modell mit einem nichtlinearen Teil zur Beschreibung der Massendynamik und einem linearen Teil zur Berücksichtigung der mechanischen Impedanz, d.h. der Steifigkeit und Dämpfung, wobei das gesamte Modell linear bezüglich der Modellparameter war. Diese wichtige Eigenschaft ermöglichte die Parameteridentifikation unter Verwendung der lang bewährten Methode der linearen Regression. Aus theoretischer Sicht sind somit die verwendeten Methoden einfach nachvollziehbar und direkt, d.h. ohne Umwege über Frequenzbereichsanalysen oder nichtlineare Optimierung, im Zeitbereich durchführbar.

Wie sich anhand der ersten Experimente herausstellte, liegt jedoch die Schwierigkeit der Impedanzmessung am menschlichen Arm in der praktischen Umsetzung. Denn der menschliche Arm ist ein aktiv geregeltes System und daher muss der zeitliche Gültigkeitsbereich der lokalen Linearisierung beachtet werden. Einerseits benötigt man extrem kurze Anregungszeiten und Bestimmungszeitintervalle, die andererseits jedoch zu schlechten Konditionierungen der linearen Regression führen und somit die Identifikation sehr anfällig gegenüber Modellierungsfehler macht. Da Analysen zur Optimierung der Anregungszeiten in der Literatur fast

ausnahmslos fehlen, war dies einer der Kernthemen dieser Arbeit. Das Ergebnis der Optimierung zeigt, dass zur Bestimmung der Parameter des gesamten dynamischen Modells eine Anregungszeit von mindestens 300 ms benötigt wird. Derart „lange“ Anregungszeiten wurden zwar für die in der Literatur beschriebenen Messmethoden verwendet, jedoch nicht aus Sicht der Konditionierung gerechtfertigt.

Die Ergebnisse des abschließenden Experiments dieser Arbeit stimmen qualitativ und von der Größenordnung der Werte mit den Ergebnissen aus der Literatur überein und verifizieren somit die Methode. Des Weiteren wurden quasikonstante Trägheitsparameter bestimmt, welche als Grundlage für die Bestimmung zeitvarianter Steifigkeits- und Dämpfungsparameter verwendet werden können. Die angewandte Identifikationsmethode benötigt jedoch Anregungszeiten (300 ms), die länger andauern als die Übertragungsverzögerungen des geregelten neuromuskulären Systems. Somit muss davon ausgegangen werden, dass die ermittelten Größen einen Mittelwert der geregelten Steifigkeits- und Dämpfungsparameter darstellen.

Um ein tieferes Verständnis zu erlangen, wie das zentrale Nervensystem die Impedanz des neuromuskuloskelettalen Systems für gezielte Aufgaben moduliert, sollten sich weiterführende Arbeiten auf die intrinsischen Werte der Steifigkeit konzentrieren. Dabei gilt es besonders die Fragestellung zu klären, inwiefern und ob sich die intrinsischen von den geregelten Werten der Steifigkeit unterscheiden. Als Fazit der experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit kann eine Methode zur Bestimmung der intrinsischen Steifigkeit vorgeschlagen werden. Diese basiert auf der Annahme, dass sich die Dämpfung durch die Wirkung der Streck- und spinalen Reflexe nicht wesentlich ändert und somit in einem Vorversuch mit „langer“ Anregungszeit die Trägheits- und Dämpfungsparameter bestimmt werden können. Im Hauptversuch sind diese Parameter dann konstant, was zu einer Entkopplung der Identifikation der Steifigkeit von den Anregungsgeschwindigkeiten und Beschleunigungen führt und somit kurze Anregungszeiten ermöglicht.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Albu-Schäffer. *Regelung von Robotern mit elastischen Gelenken am Beispiel der DLR-Leichtbauarme*. PhD thesis, Technische Universität München, 2002.
- [2] A. Albu-Schäffer. *Regelungstechnische Methoden in der Robotik*. Vorlesungsunterlagen, 2010.
- [3] J. Baillieul, J. Hollerbach, and R. Brockett. Programming and control of kinematically redundant manipulators. In *Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 768–774, 1984.
- [4] I. N. Bronstein and K. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, 2008.
- [5] E. Burdet, R. Osu, D. W. Franklin, T. Yoshioka, T. E. Milner, and M. Kawato. A method for measuring endpoint stiffness during multi-joint arm movements. *Journal of Biomechanics*, 33:1705–1709, 2000.
- [6] R. Campa and H. de la torre. Pose control of robot manipulators using different orientation representations. In *American Control Conference*, 2009.
- [7] J. J. Craig. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Person Prentice Hall, 2005.
- [8] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg+Teubner, 2008.
- [9] T. Flash and N. Hogan. The coordination of arm movements: an experimentally confirmed mathematical model. *Journal of Neuroscience*, 5:1688–1703, 1985.

- [10] D. W. Franklin, E. Burdet, R. Osu, M. Kawato, and T. E. Milner. Functional significance of stiffness in adaptation of multijoint arm movements to stable and unstable dynamics. *Experimental Brain Research*, 151:145–157, 2003.
- [11] M. Gautier. Numerical calculation of the base inertial parameters of robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990.
- [12] M. Gautier and W. Khalil. Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots. In *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990.
- [13] M. Gautier and W. Khalil. Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots. In *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 494–499, 1991.
- [14] H. Gomi and M. Kawato. Human arm stiffness and equilibrium-point trajectory during multi-joint movement. *Biological Cybernetics*, 76:163–171, 1997. 10.1007/s004220050329.
- [15] H. Gomi and R. Osu. Task-dependent viscoelasticity of human multijoint arm and its spatial characteristics for interaction with environments. *The Journal of Neuroscience*, 18:8965–8978, 1998.
- [16] A. V. Hill. The heat of shortening and the dynamic constants of muscle. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 1938.
- [17] N. Hogan. Impedance control: An approach to manipulation, part i - the theory. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107:1–7, 1985.
- [18] N. Hogan. Impedance control: An approach to manipulation, part ii - implementation. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107:8–16, 1985.
- [19] N. Hogan. Impedance control: An approach to manipulation, part iii - applications. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107:17–24, 1985.
- [20] N. Hogan. The mechanics of multi-joint posture and movement control. *Biological Cybernetics*, 52:315–331, 1985.

- [21] U. Hollburg. *Maschinendynamik*. Oldenburg, 2007.
- [22] W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Hermes Penton Ltd, 2002.
- [23] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright. Convergence properties of the nelder-meade simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9:112–147, 1998.
- [24] F. A. Mussa-Ivaldi, N. Hogan, and E. Bizzi. Neural, mechanical, and geometric factors subserving arm posture in humans. *The Journal of Neuroscience*, 5:2732–2743, 1985.
- [25] O. Nelles. *Nonlinear System Identification*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [26] C. Ott. *Cartesian Impedance Control of Redundant and Flexible-Joint Robots*. Springer, 2008.
- [27] E. J. Perreault, R. F. Kirsch, and A. M. Acosta. Multiple-input, multiple-output system identification for characterization of limb stiffness dynamics. *Biological Cybernetics*, 80:327–337, 1999.
- [28] E. J. Perreault, R. F. Kirsch, and P. E. Crago. Effects of voluntary force generation on the elastic components of endpoint stiffness. *Experimental Brain Research*, 141:312–323, 2001.
- [29] W. D. Pietruszka. *MATLAB und Simulink in der Ingenieurpraxis*. B. G. Teubner Verlag, 2006.
- [30] D. Piper. *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. PhD thesis, Stanford University, 1968.
- [31] R. E. Roberson and R. Schwertassek. *Dynamics of Multibody Systems*. Springer Berlin, 1988.
- [32] R. Schwertassek and O. Wallrapp. *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Friedr Vieweg Verlag, 1999.
- [33] R. Shadmehr and S. P. Wise. *The computational neurobiology of reaching and pointing*. MIT Press, 2005.

- [34] B. Siciliano. Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 3:201–212, 1990.
- [35] B. Siciliano and O. Khatib, editors. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008.
- [36] T. Tsuji, P. G. Morasso, K. Goto, and K. Ito. Human hand impedance characteristics during maintained posture. *Biological Cybernetics*, 72:475–485, 1995.
- [37] H. van der Kooij, B. Koopman, and F. C. van der Helm. Human motion control. Reader for Delft University course, 2008.
- [38] O. Wallrapp. Multibody dynamics. Lecture Notes, 01 2010.
- [39] R. A. Walz, J. L. Morales, J. Nocedal, and D. Orban. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, 107:391–408, 2006.
- [40] J. M. Winters and L. Stark. Analysis of fundamental human movement patterns through the use of in-depth antagonistic muscle models. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, 32:826–839, 1985.
- [41] J. M. Winters and L. Stark. Muscle models: What is gained and what is lost by varying model complexity. *Biological Cybernetics*, 55:403–420, 1987.
- [42] T. Yoshikawa. *Foundations of Robotics Analysis and Control*. MIT Press, 1990.

Anhang A

Armmodelle

A.1 Erweitertes Modell des Arms mit Koppelstelle

A.1.1 Vorwärtskinematik

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
{}^0_3\mathbf{T} &= {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2 + q_3) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) & 0 & l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2 + q_3) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) & 0 & l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.1.2 Massenmatrix und Coriolisvektor

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_4 + 2(\xi_2 + \xi_5) \cos q_2 & \xi_3 + \xi_4 + (\xi_2 + \xi_5) \cos(q_2) & \xi_6 \\ & \xi_3 + \xi_4 & \xi_6 \\ \text{sym.} & & \xi_6 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} -(\xi_2 + \xi_5)(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) \sin q_2 \\ (\xi_2 + \xi_5)\dot{q}_2^2 \sin q_2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Dabei wurden folgende linear unabhängige Trägheitsparameter abgekürzt:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= J_1 + J_2 + m_1 l_{s1}^2 + m_2 l_{s2}^2 + m_3 l_1^2, \\
\xi_2 &= m_2 l_1 l_{s2}, \\
\xi_3 &= J_2 + m_2 l_{s2}^2, \\
\xi_4 &= J_3 + m_3 l_2^2, \\
\xi_5 &= m_3 l_1 l_2, \\
\xi_6 &= J_3.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A.1.3 Regressormatrix und Ausgangsvektor

$$\boldsymbol{\zeta} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ B_{11} \ B_{12} \ B_{21} \ B_{22} \ B_{33} \ K_{11} \ K_{12} \ K_{21} \ K_{22} \ K_{33}]^T, \quad \text{mit } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{13} \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}_q, \mathbf{K}_q) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\delta\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta\mathbf{q} + \mathbf{D}_q \delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \delta\mathbf{q} \tag{A.8}$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}_q, \mathbf{K}_q)}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad \text{mit } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 13}, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= \delta \ddot{q}_1 \\ X_{1,2} &= -((2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\delta q_2 + 2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\delta \dot{q}_2 + 2\dot{q}_2\delta \dot{q}_1) \cos q_2 \\ &\quad + (2\delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\delta q_2) \sin q_2 \\ X_{1,3} &= \delta \ddot{q}_2 \\ X_{2,2} &= (\delta \ddot{q}_1 + \dot{q}_1^2\delta q_2) \cos q_2 + (-\ddot{q}_1\delta q_2 + 2\dot{q}_1\delta \dot{q}_1) \sin q_2 \\ X_{2,3} &= \delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2 \\ X_{1,4} &= X_{2,6} = \delta \dot{q}_1 \\ X_{1,5} &= X_{2,7} = \delta \dot{q}_2 \\ X_{1,5} &= X_{2,7} = \delta \dot{q}_2 \\ X_{1,9} &= X_{2,11} = \delta q_1 \\ X_{1,10} &= X_{2,12} = \delta q_2 \\ X_{3,8} &= \delta \dot{q}_3 \\ X_{3,13} &= \delta q_3 \\ X_{1,6} &= X_{1,7} = X_{1,8} = X_{1,11} = X_{1,12} = X_{1,13} = 0 \\ X_{2,1} &= X_{2,4} = X_{2,5} = X_{2,8} = X_{2,9} = X_{2,10} = X_{2,13} = 0 \\ X_{3,1} &= X_{3,2} = X_{3,3} = X_{3,4} = X_{3,5} = X_{3,6} = X_{3,7} \\ &= X_{3,9} = X_{3,10} = X_{3,11} = X_{3,12} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \delta \boldsymbol{\tau}_{ext} - \underbrace{(\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{X} \boldsymbol{\zeta})}_{\mathbf{y}_{dyn}}, \quad \text{mit } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} y_{dyn,1} &= \xi_4(\delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2) + \xi_6\delta \ddot{q}_3 \\ &\quad + \xi_5((2\delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2)\delta q_2) \cos q_2 \\ &\quad - ((2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\delta q_2 + 2\dot{q}_2\delta \dot{q}_1 + 2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\delta \dot{q}_2) \sin q_2) \\ y_{dyn,2} &= \xi_4(\delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2) + \xi_6\delta \ddot{q}_3 \\ &\quad + \xi_5((\delta \ddot{q}_1 + \dot{q}_1^2\delta q_2) \cos q_2 - (\ddot{q}_1\delta q_2 - 2\dot{q}_1\delta \dot{q}_1) \sin q_2) \\ y_{dyn,3} &= \xi_6(\delta \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2 + \delta \ddot{q}_3) \end{aligned}$$

A.2 Planares Armmodell mit zwei Freiheitsgraden

A.2.1 Massenmatrix und Coriolisvektor

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \xi_1 + 2\xi_2 \cos q_2 & \xi_3 + \xi_2 \cos(q_2) \\ \xi_3 + \xi_2 \cos(q_2) & \xi_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -\xi_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ \xi_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

Dabei wurden folgende linear unabhängige Trägheitsparameter abgekürzt:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= J_1 + J_2 + m_1 l_{s1}^2 + m_2 l_{s2}^2 + m_2 l_1^2, \\ \xi_2 &= m_2 l_1 l_{s2}, \\ \xi_3 &= J_2 + m_2 l_{s2}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 Regressormatrix und Ausgangsvektor

$$\boldsymbol{\zeta} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ B_{11} \ B_{12} \ B_{21} \ B_{22} \ K_{11} \ K_{12} \ K_{21} \ K_{22}]^T, \quad \text{mit } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{11} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \delta \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad \text{mit } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 11}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
 X_{1,1} &= \ddot{q}_1 \\
 X_{1,2} &= (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 \\
 X_{1,3} &= \ddot{q}_2 \\
 X_{2,2} &= \ddot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 \\
 X_{2,3} &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\
 X_{1,4} &= X_{2,6} = \dot{q}_1 \\
 X_{1,5} &= X_{2,7} = \dot{q}_2 \\
 X_{1,8} &= X_{2,10} = \delta q_1 \\
 X_{1,9} &= X_{2,11} = \delta q_2 \\
 X_{1,6} &= X_{1,7} = X_{1,10} = X_{1,11} = X_{2,1} = X_{2,4} = X_{2,5} = X_{2,8} = X_{2,9} = 0
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \delta \boldsymbol{\tau}_{ext} \in \mathbb{R}^2 \tag{A.15}$$