



## **Praktikumsbericht**

### **AUSFALLRATEN**

**18.07.2008**

Claudia Hallau

Tel.: 0531-295-3401

E-Mail: [verkehrssystemtechnik@dlr.de](mailto:verkehrssystemtechnik@dlr.de)>

Copyright nach DIN 34 beachten.

Weitergabe sowie Vervielfältigung dieses Dokuments, Verwertung und Mitteilung seines Inhaltes sind verboten, soweit nicht ausdrücklich gestattet. Zuwiderhandlungen verpflichten zu Schadenersatz. Alle Rechte für den Fall der Patent-, Gebrauchsmuster- oder Geschmacksmustereintragung vorbehalten.

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Beschreibung .....</b>	<b>4</b>
2.1	Grundlagen .....	4
2.2	Ausfallraten .....	4
2.3	Weitere Begriffe .....	5
<b>3</b>	<b>Zuverlässigkeitsanalyse von logischen Systemen .....</b>	<b>7</b>
3.1	Einfache Systemstrukturen.....	7
3.1.1	Das n-Seriensystem .....	7
3.1.2	Das n-Parallelsystem.....	11
3.2	Gemischte Systemstrukturen, „m aus n“-Systeme.....	17
3.2.1	Das „2 aus 3“-System .....	19
3.2.2	Das „3 aus 4“-System .....	25
3.2.3	Das „8 aus 10“-System .....	27
<b>4</b>	<b>Hinweise zu den genutzten Programmen.....</b>	<b>32</b>
4.1	Arbeit mit Relex.....	32
4.2	Programmierung in Maple.....	35
	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>40</b>
	<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>41</b>
	<b>Anhangverzeichnis .....</b>	<b>42</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>47</b>
	<b>Quellen-/Literaturverzeichnis .....</b>	<b>48</b>

# 1 Einleitung

## Was sind Ausfallraten und wozu benötigt man sie?

Bei sicherheitsrelevanten Systemen spielt die Zuverlässigkeit eine entscheidende Rolle und ist enorm wichtig, um die Gefährdung von Mensch und Umwelt auf ein Minimum zu reduzieren. Für die Bestimmung dieser Größe werden die einzelnen Bauteile des Systems betrachtet, da die Systemzuverlässigkeit stark von den Komponenten beeinflusst wird.

Die Zuverlässigkeit eines Elements kann durch seine Ausfallrate charakterisiert werden, die die Anzahl der Ausfälle pro Stunde oder einer anderen Zeiteinheit angibt und abhängig von den Betriebs- und Umgebungsbedingungen ist. Mittlerweile sind die Ausfallraten von gebräuchlichen Bauteilen in speziellen Ausfallratensammlungen katalogisiert (vgl. [1], [2], [3]), von neuen Komponenten müssen sie, sofern es durch gute Kenntnisse der Einzelteile nicht möglich ist sie zu berechnen, jedoch erst experimentell bestimmt werden. Dies ist insbesondere bei Raten in der Größenordnung von  $10^{-6}/h$ , die z.B. bei Sicherheitssystemen gefordert werden, von langen Testzeiten und hohem Probenumfang geprägt. Dazu sei beispielhaft gesagt, dass für ein Bauteil mit der konstanten Ausfallrate von  $10^{-9}/h$  aus einem Verband von  $10^9$  Stück nach einer Betriebsstunde ungefähr eines ausgefallen ist.

Bei einem Bauteil, dessen Ausfallrate abhängig von seinem Lebensalter ist, setzt sich der Verlauf, aufgrund seiner charakteristischen Form Badewannenkurve genannt, aus den Phasen der Frühausfälle mit einer hohen Ausfallrate, der Nutzung mit relativ konstanter Ausfallrate und den altersbedingten Ausfällen mit erneut hoher Ausfallrate zusammen. Hauptsächlich bei Sicherheitssystemen werden vom Hersteller durch den Betrieb unter den vorgesehenen oder sogar verschärften Einsatzbedingungen zielgerichtet Frühausfälle herbeigeführt, so dass zu Beginn der eigentlichen Nutzung der Elemente von einer konstanten Ausfallrate ausgegangen werden kann.

Sind die Ausfallraten der einzelnen Komponenten bekannt, so kann mit Hilfe des Systemaufbaus die Ausfallrate des Systems berechnet werden. Umgekehrt ermöglicht die Vorgabe des Aufbaus und einer gewünschten Gesamtausfallrate bei der Auswahl der Bauteile so vorzugehen, dass am Ende ein Optimum zwischen Sicherheit und Kosten des Systems erreicht werden kann. Von einem Optimum kann geredet werden, wenn der Austausch einer Komponente gegen eine mit einer besseren, d. h. niedrigeren Ausfallrate keinerlei oder relativ geringe Verbesserungen der Systemausfallrate bewirkt, stattdessen nur eine Erhöhung der Systemkosten.

## 2 Mathematische Beschreibung

### 2.1 Grundlagen

Die Lebensdauer einer nicht reparierbaren Einheit E, die zum Zeitpunkt 0 intakt ist, sei durch die positive Zufallsgröße T beschrieben und deren Verteilungsfunktion F durch

$$F(t) = P(T \leq t)$$

charakterisiert. Das heißt, F(t) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Einheit E in dem Zeitintervall  $[0, t]$  ausfällt. Man bezeichnet F(t) daher auch als Ausfallfunktion. Sie besitzt stets folgende Eigenschaften:

- $F(0) = 0$  : Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist E mit Sicherheit nicht ausgefallen.
- $F(\infty) = 1$  : Nach unendlich langer Zeit ist E mit Sicherheit ausgefallen.
- F ist monoton wachsend: Zum Zeitpunkt  $t_2 > t_1$  sind mindestens so viele Einheiten ausgefallen wie zum Zeitpunkt  $t_1$ . Dies gilt jedoch nur bei Betrachtung von nicht reparierbaren Einheiten.

Mit Hilfe von F lässt sich nun die Zuverlässigkeitsfunktion R durch

$$R(t) = 1 - F(t)$$

beschreiben. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Einheit E zum Zeitpunkt t noch intakt ist und hat die folgenden Eigenschaften:

- $R(0) = 1$  : Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist E sicher intakt.
- $R(\infty) = 0$  : Nach unendlich langer Zeit ist E mit Sicherheit nicht mehr intakt.
- R ist monoton fallend: Zum Zeitpunkt  $t_2 > t_1$  sind höchstens so viele Einheiten intakt wie zum Zeitpunkt  $t_1$ .

Die Dichtefunktion sieht wie folgt aus:  $f = \frac{dF}{dt} = \frac{d(1-R)}{dt} = -\frac{dR}{dt}$ .

### 2.2 Ausfallraten

Die Ausfallrate  $\lambda(t)$  beschreibt die Anzahl der Ausfälle pro Stunde zu einem Zeitpunkt t, für eine Einheit E, die bis zu diesem Zeitpunkt t funktioniert. Die Formel für  $\lambda(t)$  lässt sich aus der Wahrscheinlichkeit, dass E bis zum Zeitpunkt t überlebt und im Intervall  $(t, t + \Delta t]$  ausfällt, durch Übergang zum Grenzwert  $\Delta t \rightarrow 0$  herleiten (Anhang 1). Man erhält:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Eine alternative Schreibweise ist auch folgende Formel [4]:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)}$$

Für die Zuverlässigkeitsfunktion  $R(t)$  folgt dann (Anhang 2):  $R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$ . Unter der Annahme, dass  $\lambda(t)$  konstant ist, vereinfacht sich dies zu  $R(t) = e^{-\lambda \cdot t}$ .

## 2.3 Weitere Begriffe

### MTTF (Mean Time To Failure)

MTTF sollte nur für nicht reparierbare Einheiten genutzt werden und entspricht dem Erwartungswert von  $T$  bzw. dem Mittelwert der ausfallfreien Betriebszeit, d.h. der Zeit von Inbetriebnahme bis Ausfall der Einheit und wird somit in Stunden angegeben. Zur Ermittlung wird eine große Anzahl Einheiten über einen längeren Zeitraum betrachtet. MTTF lässt sich aus der Zuverlässigkeitsfunktion  $R(t)$  als

$$MTTF = E[T] = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

berechnen (

Anhang 3). Bei Systemen oder Elementen mit konstanter Ausfallrate stimmt der MTTF-Wert gerade mit der Umkehrung der Ausfallrate überein.

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

Unter der Annahme, dass die Einheit nach der Reparatur neuwertig ist, kann der Begriff MTTF auch auf reparierbare Elemente ausgedehnt werden.

### MTBF (Mean Time Between Failures)

Der MTBF-Begriff sollte nur in Verbindung mit reparierbaren Einheiten verwendet werden und entspricht dem mittleren Ausfallabstand in Stunden.

### MTTR (Mean Time To Repair)

MTTR gibt die mittlere Reparaturzeit in Stunden an und ist somit nur in Verbindung mit reparierbaren Einheiten zu gebrauchen.

### MDT (Mean Down Time)

Dieser Begriff bezieht sich ebenfalls auf reparierbare Einheiten und beschreibt die mittlere Ausfalldauer. Der MDT-Wert, die Angabe erfolgt in Stunden, setzt sich aus MTTR und der durchschnittlichen Zeit vom Ausfall bis zum Reparaturbeginn (Zeit der Fehlerfeststellung und Beschaffung der nötigen Arbeitsmittel) zusammen.

## MUT (Mean Up Time)

Die MUT gibt die mittlere Zeit in Stunden an, in der die Einheit oder das System verfügbar ist und arbeitet.

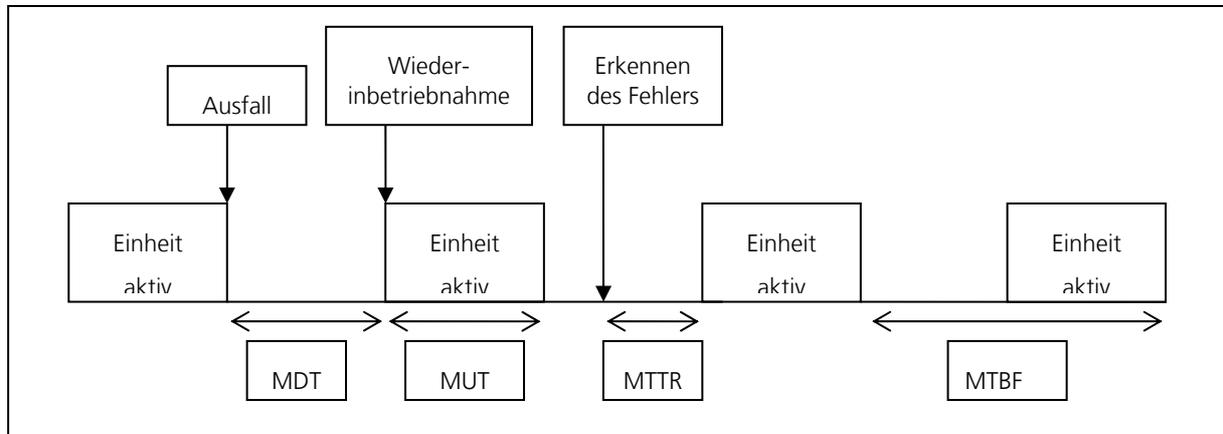


Abbildung 1: Begriffsschaubild für eine reparierbare Einheit

## Fehlerbaum

Der Fehlerbaum ist eine graphische Darstellung der Zusammenhänge zwischen einem betrachteten unerwünschten Ereignis (TOP-Event) und seinen möglichen Ursachen. Dabei wird das unerwünschte Ereignis an die Spitze des Fehlerbaums gesetzt und dieser nach unten hin mit Hilfe von Gattern aufgebaut, so dass letztendlich Basisereignisse erreicht werden, die Ausfälle von Systemkomponenten beschreiben. Als Gatter werden dabei logische Verknüpfungen wie ODER und UND verwendet. Fehlerbäume werden anschließend in der Berechnung der Systemausfallrate genutzt.

## Funktionsbaum

Duale Darstellung zu einem Fehlerbaum, in dem das Ereignis „Systemfunktion“ charakterisiert wird. Das heißt an der Spitze des Baumes befindet sich die Negation des unerwünschten Ereignisses aus dem Fehlerbaum, und die Basisereignisse im Funktionsbaum geben Bedingungen für das Überleben des Systems an, [5].

## 3 Zuverlässigkeitsanalyse von logischen Systemen

In diesem Kapitel seien

$X_i$  ... i-te Systemkomponente

$\lambda_i(t)$  ... Ausfallrate der i-ten Komponente

$R_i(t)$  ... Überlebenswahrscheinlichkeit der i-ten Komponente

$F_i(t)$  ... Ausfallwahrscheinlichkeit der i-ten Komponente

$R(t)$  ... Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems

$F(t)$  ... Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems

$\lambda(t)$  ... Ausfallrate des Systems.

Es wird angenommen, dass die Komponenten nicht reparierbar und deren Ausfallraten jeweils konstant sind. Daraus folgt, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit exponential verteilt ist.

### 3.1 Einfache Systemstrukturen

#### 3.1.1 Das n-Seriensystem

Müssen für das Überleben eines Systems sämtliche  $n$  Komponenten  $X_1, \dots, X_n$  funktionsfähig sein, so liegt eine Serienanordnung vor, die mit der Serienschaltung vergleichbar ist. Das System fällt bereits aus, wenn nur eine der  $n$  Komponenten ausfällt.

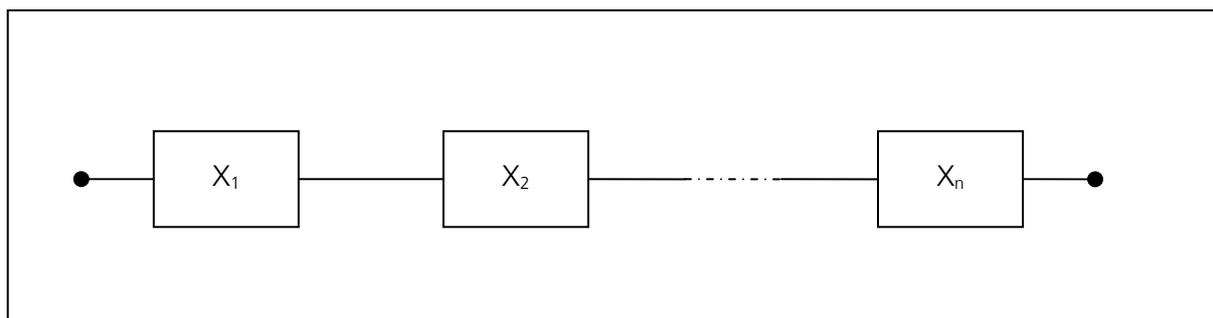


Abbildung 2: Blockdiagramm eines n-Seriensystems

Unter der Voraussetzung, dass die Einzelereignisse  $U_i =$  „Überleben der Komponente  $i$ “ unabhängig sind, erhält man die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems über den Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieser besagt, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das zeitgleiche Eintreten der unabhängigen Ereignisse  $A$  und  $B$  als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ergibt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

In unserem Fall sollen alle Komponenten überleben, somit alle Ereignisse  $U_i$  zeitgleich eintreten. Die Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet sich folglich als Produkt der Komponentenüberlebenswahrscheinlichkeiten und die Systemausfallwahrscheinlichkeit als deren Differenz zu 1.

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

$$F(t) = 1 - R(t)$$

Die Berechnungen für  $\lambda(t)$  und MTTF können dem Anhang 4 entnommen werden.

$\lambda_i(t)$	<b>konstant</b>
$R(t)$	$\exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$
$F(t)$	$1 - \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$
$\lambda(t)$	$\sum_{i=1}^n \lambda_i$
MTTF	$\frac{1}{\lambda(t)}$

Tabelle 1: Übersicht über die Formeln für das Seriensystem

Für eine steigende Anzahl an Komponenten läuft der Wert für die Systemüberlebenswahrscheinlichkeit gegen 0, formelmäßig:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

Das bedeutet, dass ein Hinzufügen von Komponenten die Überlebenswahrscheinlichkeit des System nur verschlechtern kann. Aus der Formel für  $R(t)$  erkennt man außerdem, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems immer kleiner ist als die der schlechtesten Komponente.

Wie schon zu Beginn dieses Abschnitts geschildert, ist es für das Ereignis  $U =$  „Überleben des Systems“ notwendig, dass alle Komponenten überleben. Dies konnte durch das gleichzeitige Eintreten aller Ereignisse  $U_i =$  „Überleben der Komponente  $i$ “ erreicht werden. In Zeichen:

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

Das Komplement von  $U$ , also das Ereignis  $A =$  „Ausfall des Systems“, bestimmt sich über die De Morganschen Regeln:

$$A = \overline{U} = \overline{\bigcap_{i=1}^n U_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}.$$

Aus dieser Formel kann man ablesen, dass es zum Ausfall des Systems genügt, wenn ein Ereignis  $U_i$  nicht eintritt, da das Symbol für die Vereinigung als logische Oder-Verknüpfung gelesen werden kann.

Bei einem 2-Seriensystem z.B. ist es ausreichend, wenn Einheit 1 oder Einheit 2 ausfällt. Es müssen nicht zwingend beide funktionsunfähig sein, damit das System ausfällt. Bei der folgenden Umsetzung dieser Tatsache als Fehlerbaum wurden die Basisereignisse als blaue Kugeln, die Oder-Verknüpfung als rotes Symbol verdeutlicht.

Bei der Umsetzung in Maple ist daran zu denken, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ausfall 2-Seriensystem“ nach der Formel für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $F(t)$  berechnet

$$F(t) = 1 - \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^2 \lambda_i\right), \text{ wobei } \lambda_1 \text{ bzw. } \lambda_2 \text{ die Ausfallraten von Komponente 1 bzw. 2 sind.}$$

**ODER-Verknüpfung:  $F(t) = 1 - R_1(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)$**

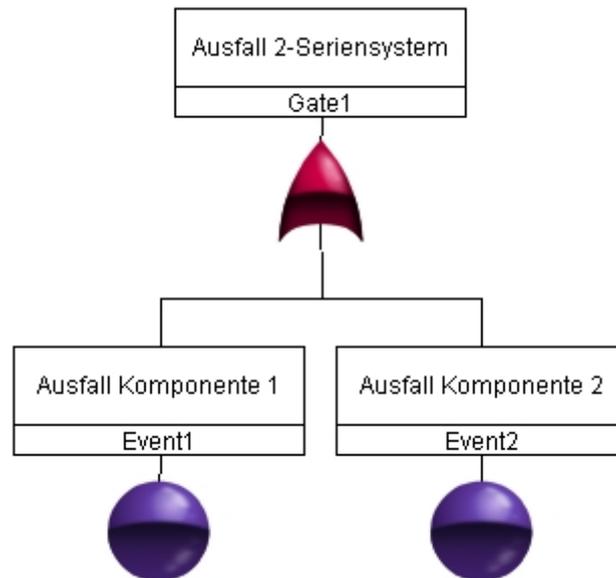


Abbildung 3: Fehlerbaum zum 2-Seriensystem, erstellt mit Relex 7.7

Ergänzend zu den allgemeinen Formeln seien hier die Ausdrücke für die Überlebenswahrscheinlichkeit, die Ausfallrate und die MTTF eines Seriensystems mit 2, 3 oder 4 hintereinandergeschalteten Einheiten mit konstanten Ausfallraten in einer Tabelle angegeben.

n	2	3	4
$R(t)$	$\exp(-t \cdot (\lambda_1 + \lambda_2))$	$\exp(-t \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$	$\exp(-t \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4))$
$\lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$
MTTF in Stunden	$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$	$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$	$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$

Tabelle 2: Formeln für Seriensysteme mit unterschiedlicher Komponentenanzahl

Betrachten wir nun ein 2-Seriensystem in drei unterschiedlichen Ausführungen.

- Die beiden Komponenten besitzen die gleiche Ausfallrate  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$ .
- Die beiden Komponenten besitzen die gleiche Ausfallrate  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-8}$ .
- Die beiden Komponenten besitzen unterschiedliche Ausfallraten,  $\lambda_1 = 10^{-5}$ ,  $\lambda_2 = 10^{-8}$ .

Dann ergeben sich folgende Werte für die Überlebenswahrscheinlichkeit, die Ausfallrate und die MTTF des Systems:

Fall	(1)	(2)	(3)
	$\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-8}$	$\lambda_1 = 10^{-5}, \lambda_2 = 10^{-8}$
$R(t)$	$\exp\left(-\frac{1}{50000} \cdot t\right)$	$\exp\left(-\frac{1}{500.000.000} \cdot t\right)$	$\exp\left(-\frac{1001}{100.000.000} \cdot t\right)$
$\lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$2 \cdot 10^{-5}$	$\frac{1}{50.000.000} = 2 \cdot 10^{-8}$	$\frac{1001}{100.000.000} = 1,001 \cdot 10^{-5}$
MTTF in Stunden	50000	50.000.000	$\frac{100.000.000}{1001}$

Tabelle 3: Werte für das 2-Seriensystem

Aus der Aufstellung ist erkennbar, dass die Ausfallrate des Systems für geringere Komponentenausfallraten im Fall (2) um den Faktor von  $10^{-3}$  geringer ist als im Fall (1), das entspricht genau dem Faktor durch den sich die Komponentenraten unterscheiden. Das System mit unterschiedlichen Einzelausfallraten erreicht in der Gesamtheit eine Ausfallrate, die im Vergleich zu (1) nur etwa halb so groß, aber im Vergleich zu (2) circa 500mal höher ist. Bereits eine Komponente mit einer schlechteren Ausfallrate genügt also, um die Gesamtausfallrate erheblich zu erhöhen. Es zeigt sich sogar, dass die schlechteste Komponente ausgesprochen dominant ist, denn die Systemausfallrate ist fast gleich  $\lambda_1$ .

### 3.1.2 Das n-Parallelsystem

Die logische Parallelanordnung repräsentiert ein System, dessen Überleben bereits durch das Überleben einer einzigen Komponente gesichert ist und das erst ausfällt, wenn alle n Komponenten ausfallen. Das Ereignis  $A =$  „Ausfall des Systems“ beschreibt sich also folgendermaßen:

$$A = \bar{U} = \bigcap_{i=1}^n \bar{U}_i.$$

Nach dem Multiplikationssatz gilt dann

$$P(A) = P(\bar{U}) = \prod_{i=1}^n P(\bar{U}_i).$$

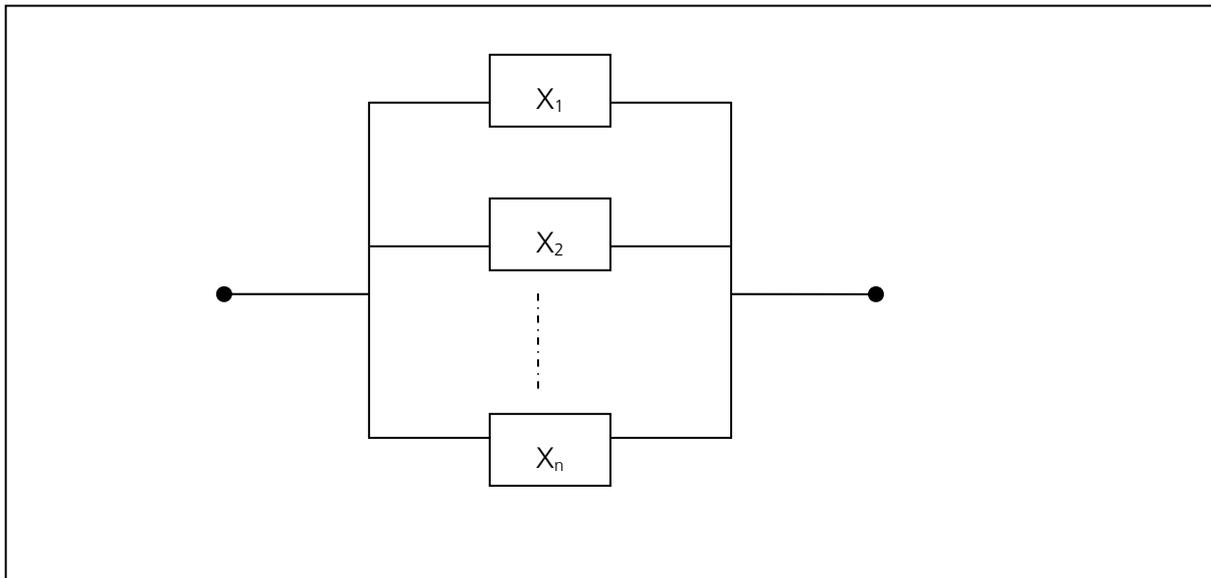


Abbildung 4: Blockdiagramm eines n-Parallelsystems

Die Ereignisse  $U_i =$  „Überleben der Komponente  $X_i$ “, ( $i=1, \dots, n$ ) sind unabhängig voneinander, schließen sich aber nicht gegenseitig aus. Das bedeutet, dass in der Wahrscheinlichkeit für das Überleben von Einheit  $i$  auch die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Überlebens von Einheit  $i$  und Einheit  $j$  enthalten ist. Damit können zur Berechnung der Systemüberlebenswahrscheinlichkeit nicht einfach die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse  $U_i$  addiert werden. Es müssen auch Wahrscheinlichkeiten für das gleichzeitige Eintreten von Ereignissen wieder subtrahiert werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeit, die Differenz der Überlebenswahrscheinlichkeit zu 1, hingegen ergibt sich als Produkt der Einzelausfallwahrscheinlichkeiten nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn die unabhängigen Ereignisse  $U_i$  sollen alle zeitgleich nicht eintreten. Somit berechnet sich die Überlebenswahrscheinlichkeit einfacher aus der Ausfallwahrscheinlichkeit als auf direktem Wege. Dazu sei hier beispielsweise gezeigt wie sich die Überlebenswahrscheinlichkeit für ein 2-Parallelsystem errechnet. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten von Einheit 1 und Einheit 2 werden addiert, dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass beide Komponenten überleben, doppelt addiert und diese muss nun einmal subtrahiert werden:

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t).$$

Die Systemausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich als Produkt der Ausfallwahrscheinlichkeiten aller Komponenten, die Systemüberlebenswahrscheinlichkeit als ihr Komplement zu 1.

$$F(t) = F_1(t) \cdot \dots \cdot F_n(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t),$$

$$R(t) = 1 - F(t).$$

Man erhält dabei auch wirklich dasselbe Ergebnis (Anhang 5).

$\lambda_i(t)$	<b>konstant</b>
$F(t)$	$\prod_{i=1}^n (1 - \exp(-t \cdot \lambda_i))$
$R(t)$	$1 - \prod_{i=1}^n (1 - \exp(-t \cdot \lambda_i))$
$\lambda(t) = \frac{dF(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)}$ in Ausfällen pro Stunde	$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \exp(-t \cdot \lambda_i) \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 - \exp(-t \cdot \lambda_j))}{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \exp(-t \cdot \lambda_i))}$

Tabelle 4: Übersicht der Formeln für das Parallelsystem

Nach der Formel von Poincaré lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit auch wie folgt berechnen, [5]:

$$R(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} R_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot R_{i_k}(t).$$

Sind in dem n-Parallelsystem die Ausfallraten aller n Komponenten identisch, also  $R_i(t) = R_1(t)$ , so gilt auch:

$$R(t) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot R_1^i(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-i}.$$

Es gilt außerdem, dass bei steigender Komponentenanzahl der Wert für die Systemüberlebenswahrscheinlichkeit gegen 1 geht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(t) = 1.$$

Das bedeutet: je mehr Komponenten das Parallelsystem enthält, desto höher ist seine Überlebenswahrscheinlichkeit. Aus den Berechnungen lässt sich folgern, dass die Systemüberlebenswahrscheinlichkeit immer größer ist als die Überlebenswahrscheinlichkeit der besten Komponente.

Der MTTF-Wert und die Ausfallrate ergeben sich über die allgemeine Formel aus 2.3 bzw. 2.2. Für die MTTF lässt sich unter Nutzung der Poincaré-Darstellung der Überlebenswahrscheinlichkeit folgende Formel ermitteln (Anhang 6):

$$MTTF = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}}$$

Bei identischen Ausfallraten aller Komponenten, also wenn für alle  $i = 1, \dots, n$ :  $\lambda_i = \lambda_1$  gilt, vereinfacht sich obige Gleichung zu (Anhang 7):

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Der Ausfall des Systems kommt zustande sobald alle Einheiten funktionsunfähig sind; ist auch nur eine intakt, so überlebt das System. Dies lässt sich durch die logische Und-Verknüpfung formalisieren und sieht im Schaubild folgendermaßen aus.

Bei der Umsetzung in Maple ist daran zu denken, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ausfall 2-Parallelsystem“ nach der Formel für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $F(t)$  berechnet

$$F(t) = \prod_{i=1}^2 (1 - \exp(-t \cdot \lambda_i)), \text{ wobei } \lambda_1 \text{ bzw. } \lambda_2 \text{ die Ausfallraten von Komponente 1 bzw. 2 sind.}$$

### UND-Verknüpfung: $F(t) = F_1(t) \cdot \dots \cdot F_n(t)$

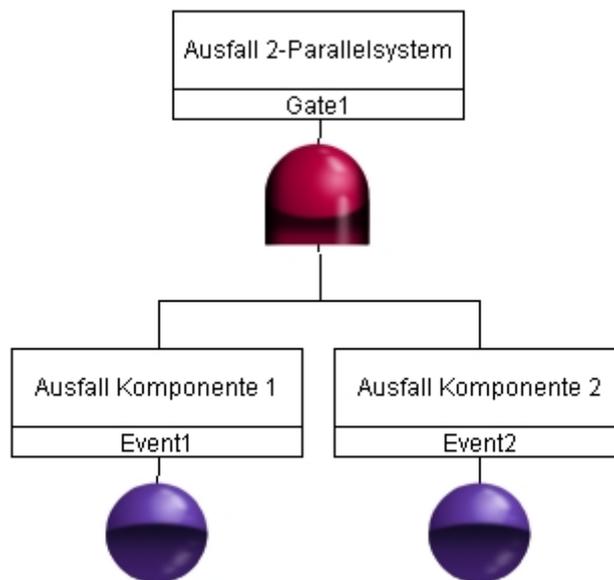


Abbildung 5: Fehlerbaum für ein 2-Parallelsystem, erstellt mit Relex 7.7

Betrachten wir analog zum Seriensystem auch hier das 2-Parallelsystem in drei verschiedenen Ausführungen.

- Die beiden Komponenten besitzen die gleiche Ausfallrate  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$ .
- Die beiden Komponenten besitzen die gleiche Ausfallrate  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-8}$ .
- Die beiden Komponenten besitzen unterschiedliche Ausfallraten,  $\lambda_1 = 10^{-5}$ ,  $\lambda_2 = 10^{-8}$ .

Die nachstehenden Werte erhält man für die Überlebenswahrscheinlichkeit und die MTTF des Systems.

Fall	(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$	(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-8}$	(3) $\lambda_1 = 10^{-5}, \lambda_2 = 10^{-8}$
$R(t)$	$2 \exp\left(-\frac{1}{100000} \cdot t\right) - \exp\left(-\frac{1}{50000} \cdot t\right)$	$2 \exp\left(-\frac{1}{100.000.000} \cdot t\right) - \exp\left(-\frac{1}{50.000.000} \cdot t\right)$	$\exp\left(-\frac{1}{100.000} \cdot t\right) + \exp\left(-\frac{1}{100.000.000} \cdot t\right) - \exp\left(-\frac{1001}{100.000.000} \cdot t\right)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$
MTTF in Stunden, berechnet als $E[T]$	150.000	150.000.000	$\frac{100.100.100.000}{1001} > 100.000.000$
$\lambda$ als Näherung: $\frac{1}{MTTF}$	$\frac{1}{150.000} \approx 6,67 \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{150.000.000} \approx 6,67 \cdot 10^{-9}$	$\frac{1001}{100.100.100.000} \approx 9,99 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 5: Werte für das 2-Parallelsystem mit konstanten Komponentenausfallraten

Die mittlere Systemlaufzeit MTTF von (2) unterscheidet sich beim Parallelsystem von der im Fall (1) um den Faktor  $10^3$ . Im Fall (3) bei unterschiedlichen Komponentenausfallraten ist erkennbar, dass die MTTF höher ist als die MTTF  $10^8$  der besten Komponente mit der Ausfallrate  $\lambda_2$ . Dies bestätigt die theoretische Aussage, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit des Parallelsystems höher ist als die der besten Einheit.

Die MTTF für (3) ist etwa 667mal höher als die von (1) und nur circa ein Drittel geringer als die von (2). Eine einzelne Komponente mit einer besseren Überlebenswahrscheinlichkeit verbessert die Systemüberlebenswahrscheinlichkeit also schon in hohem Maße.

Die Ausfallrate, berechnet über die Formel

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

ist kein konstanter Wert, sondern zeitabhängig, obwohl die Ausfallraten der Komponenten konstant sind. Eine Ursache dafür ist, dass das n-Parallelsystem bei Ausfall einer Komponente ab dem Zeitpunkt des Ausfalls als (n-1)-Parallelsystem betrachtet werden muss, beim Ausfall zweier Komponenten als (n-2)-Parallelsystem usw. Damit ändert sich nicht nur das System, sondern auch die Überlebenswahrscheinlichkeit und die Ausfallrate, da sie sich aus der Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet. Zusätzlich dazu sind die Zeitpunkte der Komponentenausfälle auch

zufällig. Das bedeutet, die Ausfallrate des betrachteten Parallelsystems ist sowohl abhängig von der Zeit als auch der Komponentenanzahl, die wiederum zeitabhängig ist.

Die Grenzwerte der Systemausfallrate sind in obiger Tabelle mit angegeben und entsprechen logischen Gesichtspunkten folgend, nämlich dass die schlechteren Komponenten zuerst ausfallen und die Beste übrigbleibt, der Ausfallrate der besten Komponente. Im Vergleich dazu wurden die Ausfallraten des Systems auch als Kehrwert der MTTF berechnet, obwohl dieses Verfahren nur für konstante Ausfallraten anwendbar ist. Die dabei erhaltenen Werte sind kleiner als die Grenzwerte, somit aus sicherheitstechnischen Gründen keine brauchbare Abschätzung für den realen Wert der Ausfallrate.

Diese näherungsweise Berechnung der Ausfallrate über den MTTF-Kehrwert bildet jedoch nur für eine Betriebszeit von 70.000 h, das entspricht etwa 8 Jahren, eine obere Abschätzung für die Ausfallrate. Danach liegt der wahre Wert der Rate oberhalb des MTTF-Kehrwertes. Dazu folgende Abbildung 6, in der der Verlauf von

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

und der MTTF-Kehrwert für das 2-Parallelsystem mit der Komponentenausfallrate  $\lambda_1 = 10^{-5}$  abgetragen worden sind. Dies gilt analog für jedes n-Parallelsystem, für wachsendes n übersteigt die Ausfallrate den MTTF-Kehrwert jedoch zu einem späteren Zeitpunkt. Kurz gesagt ist die Abschätzung desto länger gut, je mehr Komponenten das Parallelsystem enthält.

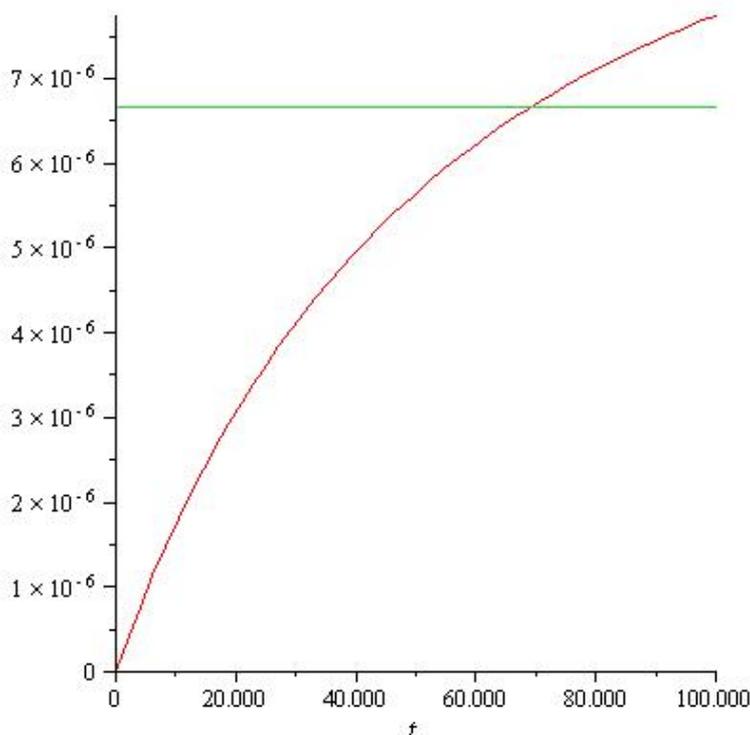


Abbildung 6: Verlauf der Ausfallrate (rot) und des MTTF-Kehrwertes (grün)

Beim Vergleich von Ausfallrate und MTTF-Kehrwert in Abhängigkeit von Zeit und Komponentenanzahl, also wenn die Komponentenausfallrate fest gewählt ist, erkennt man, dass die Ausfallrate den Kehrwert umso später übersteigt, je mehr Komponenten verwendet werden. Wählt man eine feste Anzahl Komponenten, so ist der Zeitpunkt der Überschreitung umso früher, je höher die Komponentenausfallrate ist.

Sind Anzahl und Ausfallrate der Komponenten bekannt, kann leicht ermittelt werden zu welchem Zeitpunkt die wirkliche Ausfallrate den MTTF-Kehrwert übersteigt. Dies kann bei reparierbaren Komponenten genutzt werden, um den Wartungsabstand zu bestimmen. Nach der Wartung kann das System wieder als neuwertig angenommen werden und dadurch kann man die Ausfallrate einfach nach oben durch den MTTF-Kehrwert abschätzen.

<b>n</b>	<b>Komponentenausfallrate <math>\lambda_i</math> in Ausfällen pro Stunde</b>	<b>Zeitpunkt für <math>\lambda(t) \geq \frac{1}{MTTF}</math> in Stunden, 8640 h <math>\approx</math> 1 a</b>
2	$10^{-4}$	6.932 $\approx$ 0,8 a
2	$10^{-8}$	69.314.719 $\approx$ 8022,5 a
3	$10^{-4}$	9.050 $\approx$ 1,05 a
3	$10^{-8}$	90.493.846 $\approx$ 10473,8 a
4	$10^{-4}$	10.737 $\approx$ 1,24 a
4	$10^{-8}$	107.366.171 $\approx$ 12,427 a
5	$10^{-4}$	12.142 $\approx$ 1,41 a
5	$10^{-8}$	121.416.461 $\approx$ 14052,8 a
6	$10^{-4}$	13.348 $\approx$ 1,54 a
6	$10^{-8}$	133.471.043 $\approx$ 15448,04 a
8	$10^{-4}$	15.345 $\approx$ 1,78 a
8	$10^{-8}$	153.449.299 $\approx$ 17760,34 a
10	$10^{-4}$	16.968 $\approx$ 1,96 a
10	$10^{-8}$	169.675.249 $\approx$ 19638,34 a

Tabelle 6: Übersicht über den Zeitpunkt  $\lambda(t) \geq \frac{1}{MTTF}$  bei unterschiedlichen Ausfallraten und Komponentenzahlen

Aus der Tabelle können verschiedene Zusammenhänge zwischen der Anzahl der verwendeten Komponenten, deren Ausfallrate und dem jeweiligen Zeitpunkt, an dem die Systemausfallrate den MTTF-Kehrwert übersteigt, abgelesen werden.

Wird die Komponentenanzahl fest gewählt und nur die Komponentenausfallrate verändert, so lässt sich feststellen, dass der Faktor mit dem die Komponentenausfallrate verändert wird der Kehrwert zu dem Faktor ist, durch den sich dann die Zeitpunkte unterscheiden. Also folgendermaßen mit  $\lambda_i$  Ausfallrate und  $t_i$  Zeitpunkt für die gleiche Komponentenanzahl:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot s \iff t_2 = t_1 \cdot \frac{1}{s}$$

Als Beispiel dazu das System mit 2 Komponenten, wird dort die Zuverlässigkeit von  $10^{-4}$  auf  $10^{-8}$  verdoppelt, Faktor  $10^{-4}$ , dann verschiebt sich der Zeitpunkt von  $6,932 \cdot 10^3$  auf  $6,932 \cdot 10^7$ , Faktor  $10^4$ .

Bei fester Wahl der Komponentenausfallrate verschiebt sich der Zeitpunkt mit steigender Komponentenanzahl nach hinten. Wird die Anzahl verdoppelt, so muss der Zeitpunkt mit einem Faktor multipliziert werden, der bei der Verdopplung von 2 auf 4 noch rund den Wert 1,5 annimmt, aber mit wachsender Komponentenanzahl gegen den Wert 1 läuft. Einfacher formuliert heißt das, bei wenigen Komponenten bringt eine Verdopplung der Anzahl eine leichte Verbesserung, bei relativ vielen Komponenten geringfügig etwas, bei unendlich vielen rein gar nichts. Dazu kurz nachstehende Tabelle mit den Faktoren, die für die beiden Ausfallraten  $10^{-4}$  und  $10^{-8}$  identisch sind.

Verdopplung von ... auf ...	Faktor für Komponentenausfallrate von $10^{-4}$ bzw. $10^{-8}$
2 auf 4	1,549
3 auf 6	1,475
4 auf 8	1,429
5 auf 10	1,397

Tabelle 7: Faktoren zur Zeitpunktberechnung bei Verdopplung der Elementanzahl

## 3.2 Gemischte Systemstrukturen, „m aus n“-Systeme

Unter Mischstrukturen bei Systemen werden solche Strukturen verstanden, die sowohl das Parallel- als auch das Seriensystem im Aufbau enthalten. Es gibt grundsätzlich zwei Kombinationsmöglichkeiten, das Parallel-Seriensystem und das Serien-Parallelsystem. Beim Parallel-Seriensystem werden Seriensysteme parallel geschaltet, beim Serien-Parallelsystem Parallelsysteme in Serie angeordnet. Dazu folgende Abbildung 7.

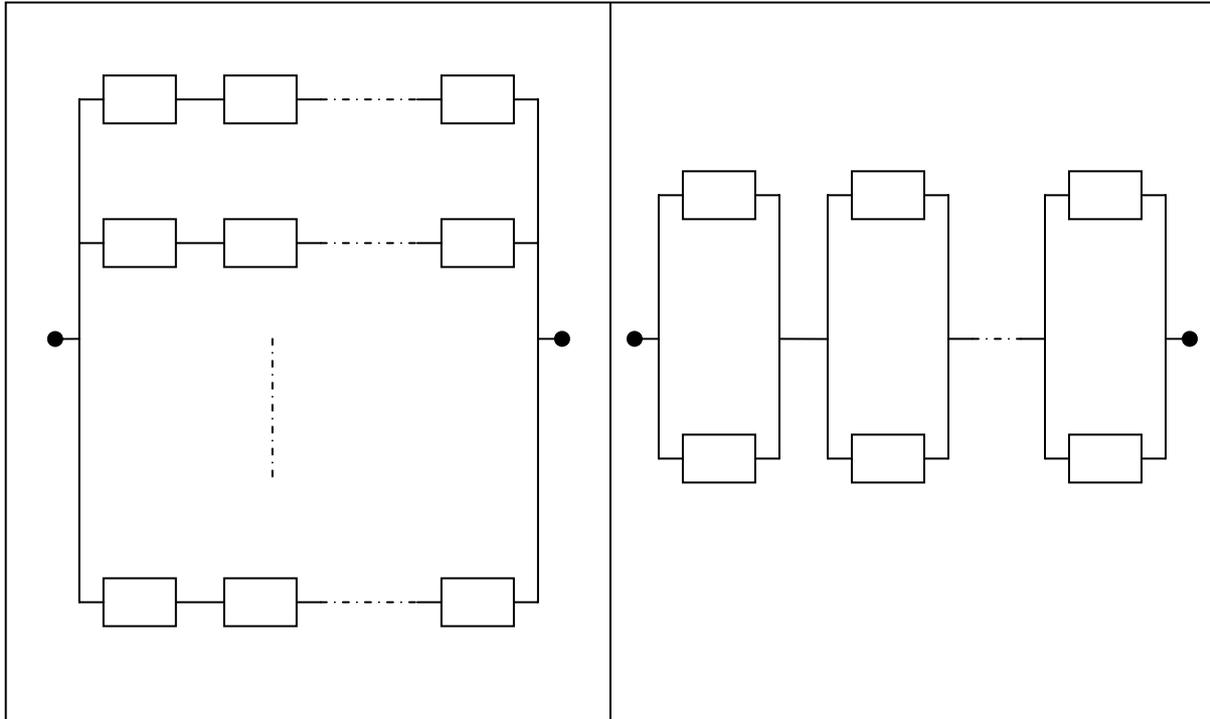


Abbildung 7: Parallel-Seriensystem (links), Serien-Parallelsystem (rechts)

Ein „m aus n“-System besteht aus  $n$  Systemkomponenten, wobei wir annehmen, dass deren Ausfallraten identisch sind, und ist funktionsfähig, solange mindestens  $m$  Komponenten nicht ausgefallen sind. Ein 2-Parallelsystem überlebt, wenn mindestens eine der beiden Einheiten überlebt, es kann somit als ein einfaches Beispiel für „m aus n“-Systeme, nämlich ein „1 aus 2“-System, aufgefasst werden. Allgemein können „m aus n“-Systeme graphisch als Parallel-Seriensysteme dargestellt werden, wobei in der Abbildung 7 die einzelnen Komponenten mehrfach auftauchen. Eine Begründung liefert folgende Überlegung:

Das „m aus n“-System überlebt, wenn  $m$  seiner  $n$  Grundeinheiten funktionsfähig sind. Welche  $m$  Einheiten das sind, ist dabei völlig egal. Die Anzahl der Möglichkeiten diese  $m$  aus den  $n$  vorgegebenen Elementen auszuwählen, gibt der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{m}$  an. Jede dieser Möglich-

keiten lässt sich nun als Seriensystem auffassen, denn fällt eine der darin enthaltenen  $m$  Komponenten aus, so entfällt für das System diese Möglichkeit zu überleben. Damit das System überlebt, muss nur eine Möglichkeit der  $\binom{n}{m}$  übrig bleiben. Existiert keine der Kombinationsmög-

lichkeiten mehr, so dass alle darin enthaltenen Systemkomponenten funktionieren, ist das System ausgefallen. In der graphischen Umsetzung liefert dies ein Parallelsystem, dessen Komponenten die Seriensysteme der  $\binom{n}{m}$  Kombinationsmöglichkeiten von  $m$  der  $n$  Einheiten sind. Ein

„m aus n“-System kann demzufolge als Parallel-Seriensystem mit  $\binom{n}{m}$  Seriensystemen dargestellt werden.

Die Möglichkeit ein „m aus n“-System als Parallel-Seriensystem darzustellen, kann auch damit begründet werden, dass jede logische Und-Verknüpfung als Serienschaltung und jede logische Oder-Verknüpfung als Parallelschaltung im Blockschaltbild umzusetzen ist.

Ein „m aus n“-System lässt sich graphisch also gut durch ein Parallel-Seriensystem beschreiben, nur zur Berechnung der Überlebens- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems eignet sich diese Variante überhaupt nicht. Es würden erst die Überlebens-/ Ausfallwahrscheinlichkeiten jeder Kombination nach der Formel für das Seriensystem berechnet werden und anschließend die Gesamtwahrscheinlichkeiten nach der Formel für das Parallelsystem. Dabei werden Wahrscheinlichkeiten von Kombinationen mehrfach mitgerechnet und führen schließlich zu einem falschen Ergebnis. Die Verdeutlichung dieser Tatsache folgt anhand der Wahrscheinlichkeitsberechnung beim „2 aus 3“-System in Kap. 3.2.1.

Die allgemeine Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines „m aus n“-Systems sieht folgendermaßen aus, [5]:

$$R(t) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-k}$$

und für die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich daraus diese Gleichung (Anhang 8)

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \cdot F_1^{n-k}(t) \cdot (1 - F_1(t))^k$$

Die Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit sei hier noch für drei spezielle „m aus n“-Systeme angegeben, die in der Praxis häufig für Mehrheitsentscheidungen verwendet werden.

System	R(t)
n-1 aus n	$n \cdot R_1^{n-1}(t) - (n-1) \cdot R_1^n(t)$
$\frac{n}{2} + 1$ aus n, n gerade	$\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^n (-1)^j \cdot R_1^j(t) \cdot \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^j (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j-k}$
$\frac{n+1}{2}$ aus n, n ungerade	$\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^n (-1)^j \cdot R_1^j(t) \cdot \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^j (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j-k}$

Tabelle 8: Formel für R(t) für spezielle „m aus n“-Systeme

### 3.2.1 Das „2 aus 3“-System

Ein „2 aus 3“-System besteht aus drei Einheiten. Von den Einheiten müssen mindestens zwei überleben, damit das System nicht ausfällt. Es gibt  $\binom{3}{2} = 3$  Möglichkeiten, zwei aus den drei Elementen auszuwählen:

- Einheit 1 und Einheit 2
- Einheit 1 und Einheit 3

- Einheit 2 und Einheit 3.

Diese drei Kombinationen bilden die drei Seriensysteme im Parallel-Seriensystem, das das „2 aus 3“-System darstellt.

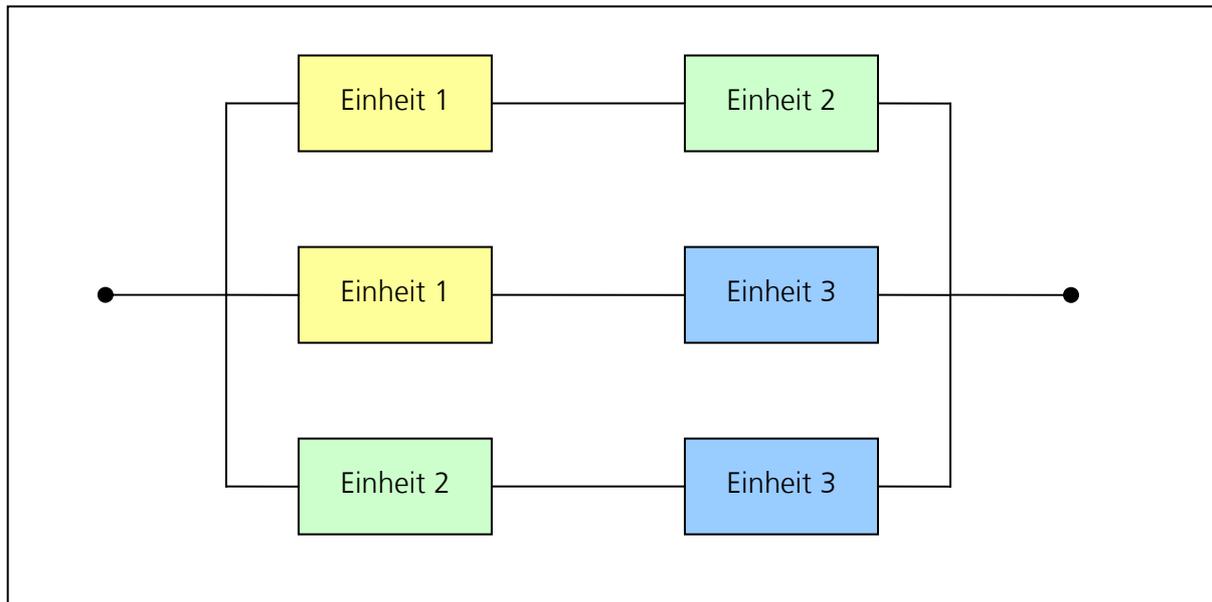


Abbildung 8: Das „2 aus 3“-System

Das „2 aus 3“-System ist intakt, wenn

- Einheiten 1 und 2 intakt sind, Einheit 3 ausgefallen ist
- Einheiten 1 und 3 intakt sind, Einheit 2 ausgefallen ist
- Einheiten 2 und 3 intakt sind, Einheit 1 ausgefallen ist
- alle 3 Einheiten intakt sind.

Mit der Voraussetzung, dass alle Einheiten identische Ausfallraten besitzen, folgt daraus für die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems folgende Gleichung:

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot F_3(t) + R_1(t) \cdot R_3(t) \cdot F_2(t) + R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot F_1(t) + R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t).$$

Da die Komponenten identische Ausfallraten und Überlebenswahrscheinlichkeiten besitzen, vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$R(t) = 3 \cdot R_1^2(t) \cdot F_1(t) + R_1^3(t) = 3 \cdot R_1^2(t) \cdot (1 - R_1(t)) + R_1^3(t) = 3 \cdot R_1^2(t) - 2 \cdot R_1^3(t).$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich dann als Komplement zu 1 und die MTTF erhält man über (Anhang 9)

$$MTTF = \frac{5}{6 \cdot \lambda_1}.$$

Würde die Überlebenswahrscheinlichkeit nach dem Parallel-Seriensystem-Modell ermittelt werden, so wäre das Ergebnis diese falsche Formel (Anhang 10):

$$R(t) = 3 \cdot R_1^2(t) - 3 \cdot R_1^4(t) + R_1^6(t).$$

Vergleicht man die beiden Formeln für die Überlebenswahrscheinlichkeiten graphisch miteinander, stellt man fest, dass die falsche Formel eine höhere Wahrscheinlichkeit für das Überleben

des Systems liefert als die korrekte Berechnung. Dies hängt mit der Tatsache zusammen, dass die Stränge hier keinesfalls unabhängig voneinander sind, denn fällt z.B. Strang 1 mit den Einheiten 1 und 2 aus, so ist mindestens noch Strang 2 oder Strang 3 ausgefallen, vielleicht auch beide. Je nach dem, ob nur eine der beiden Einheiten funktionsuntüchtig ist oder beide. Diese Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Seriensystemen werden bei der Wahrscheinlichkeitsberechnung nach dem Parallel-Seriensystem völlig außer Acht gelassen.

Im Folgenden sind drei unterschiedliche Fehlerbaumdarstellungen abgebildet. Die Abbildung 9, erstellt mit Relex 7.7, bedient sich zur Illustration des „2 aus 3“-Systems eines sogenannten Voting-Gates (m/n). Der Ausgang tritt dabei nur dann ein, wenn mindestens m der n Eingänge eingetreten sind. Die darauffolgende Abbildung 10 wurde ebenfalls mit Relex erstellt, nutzt aber die üblichen Und- und Oder-Verknüpfungen. Eine Vereinfachung dieses komplexen Baumes durch Zusammenfassen mehrfach auftretender Ereignisse findet sich in der Abbildung 11.

### Voting-Gate (2:3): $F(t) = F_1(t)^3 + 3 \cdot F_1(t)^2 \cdot R_1(t)$

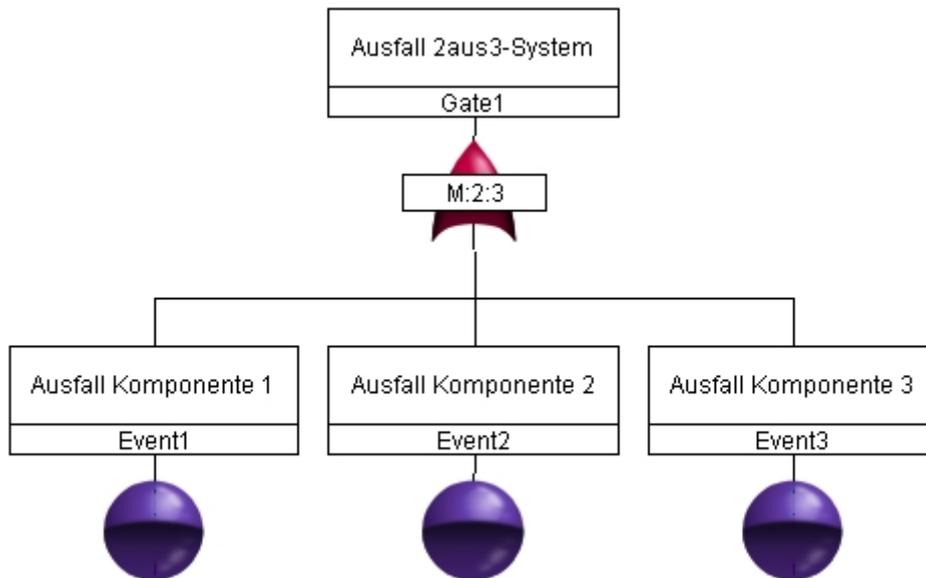


Abbildung 9: Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System mit Voting-Gate

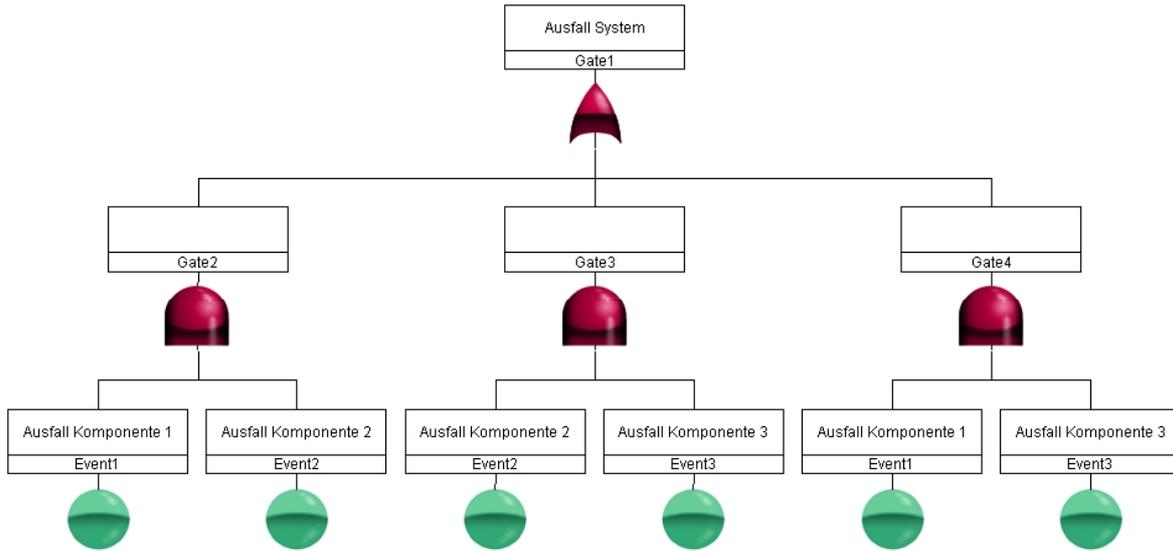


Abbildung 10: Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System mit Und- bzw. Oder- Verknüpfungen

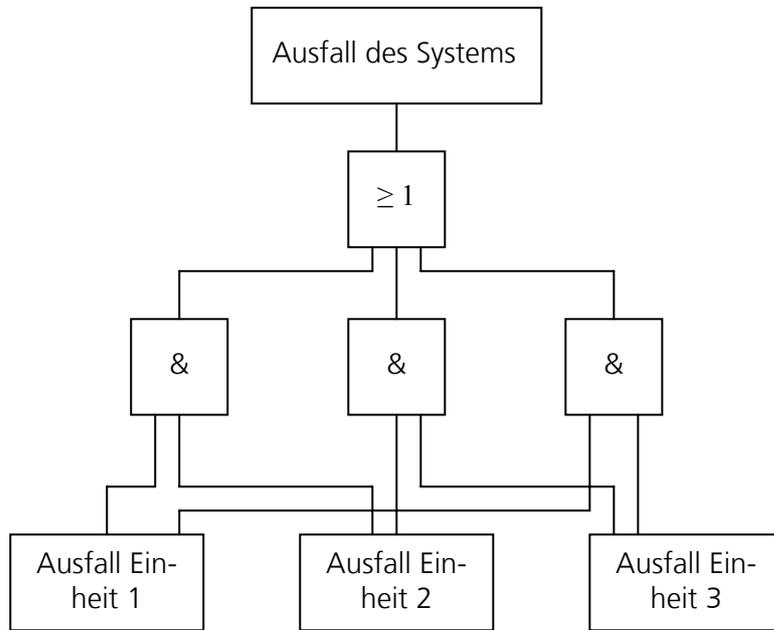


Abbildung 11: Vereinfachter Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System

Es sollen nun zwei „2 aus 3“-Systeme untersucht werden, wobei für die Ausfallraten einmal der Wert  $10^{-5}$  und dann der Wert  $10^{-8}$  angenommen wird.

	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 10^{-5}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 10^{-8}$
$R(t)$	$3 \cdot \exp\left(-\frac{1}{50.000} \cdot t\right)$ $- 2 \cdot \exp\left(-\frac{3}{100.000} \cdot t\right)$	$3 \cdot \exp\left(-\frac{1}{50.000.000} \cdot t\right)$ $- 2 \cdot \exp\left(-\frac{3}{100.000.000} \cdot t\right)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-8}$
MTTF in Stunden, berechnet als $E[T]$	$\frac{250.000}{3} \approx 83.000$	$\frac{250.000.000}{3} \approx 83.000.000$
$\lambda$ als Näherung: $\frac{1}{MTTF}$	$\frac{3}{250.000} \approx 1,2 \cdot 10^{-5}$	$\frac{3}{250.000.000} \approx 1,2 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 9: Werte für das „2 aus 3“-System

Im Vergleich der beiden „2 aus 3“-Systeme fällt auf, dass sich die MTTF-Werte durch den Faktor  $10^3$  unterscheiden, genau derselbe Faktor wie bei den Ausfallraten der Einheiten. Des Weiteren ist die mittlere Systembetriebszeit schon geringer als bei den 2-Parallelsystemen mit identischen Baueinheiten, die als „1 aus 2“-System aufgefasst werden können. Dies lässt sich aber mit dem Anteil der Zustände, bei denen das System überlebt, an allen möglichen Zuständen begründen. Beim 2-Parallelsystem existieren 4 mögliche Zustände:

- beide Einheiten aktiv,
- Einheit 1 aktiv, Einheit 2 ausgefallen
- Einheit 1 ausgefallen, Einheit 2 aktiv
- beide Einheiten ausgefallen.

Für drei dieser vier Zustände überlebt das System. Beim „2 aus 3“-System gibt es  $2^3$  Zustandsmöglichkeiten und nur bei vier davon ist das System aktiv. Zur Übersicht seien die 8 Zustandsmöglichkeiten in Tabelle 10 angegeben, wobei 0 für aktiv und 1 für ausgefallen steht.

Einheit 1	Einheit 2	Einheit 3	System
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabelle 10: Zustandsmöglichkeiten für das „2 aus 3“-System

Der Anteil aktiver Zustände ist somit vom „1 aus 2“- zum „2 aus 3“-System von 0,75 auf 0,5 zurückgegangen. Dies ist jedoch nicht schlimm, da „m aus n“-Systeme größtenteils zu Mehrheitsentscheidungen genutzt werden und es dort viel mehr auf ein richtiges Ergebnis ankommt.

Der Grenzwert der Ausfallrate entspricht der Summe von zwei Komponentenausfallraten. Dies klingt plausibel, denn eine Komponente fällt über die Zeit gesehen sicherlich aus und dann erhält man ein 2-Seriensystem, dessen Ausfallrate gerade die Summe der Komponentenausfallraten war. Der Grenzwert ist erneut größer als der Kehrwert der MTTF, was zu erwarten war, da die Berechnung über den Kehrwert nur eine Näherung für eine zeitabhängige Ausfallrate darstellen kann.

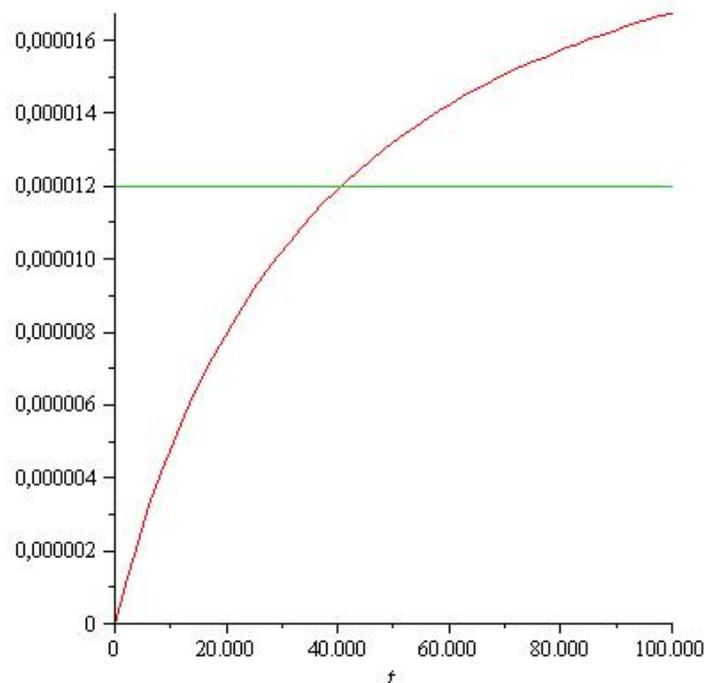


Abbildung 12: Verlauf Ausfallrate (rot) und MTTF-Kehrwert (grün) für ein „2 aus 3“-System mit Komponentenausfallraten von  $10^{-5}$

Auch hier übersteigt die Ausfallrate wieder den MTTF-Kehrwert ab einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei verschiebt sich dieser für „(n-1) aus n“-Systeme für eine ansteigende Komponentenanzahl nicht wie beim Parallelsystem nach hinten, sondern nach vorn (Abbildung 16).

### 3.2.2 Das „3 aus 4“-System

Ein „3 aus 4“-System besteht aus vier Einheiten, von denen mindestens drei überleben müssen, damit das System nicht ausfällt. Es gibt  $\binom{4}{3} = 4$  Möglichkeiten, drei aus den vier Elementen auszuwählen:

- Einheit 1, Einheit 2 und Einheit 3
- Einheit 1, Einheit 2 und Einheit 4
- Einheit 1, Einheit 3 und Einheit 4
- Einheit 2, Einheit 3 und Einheit 4

Diese vier Kombinationen bilden die vier Seriensysteme in der Darstellung für das „3 aus 4“-System.

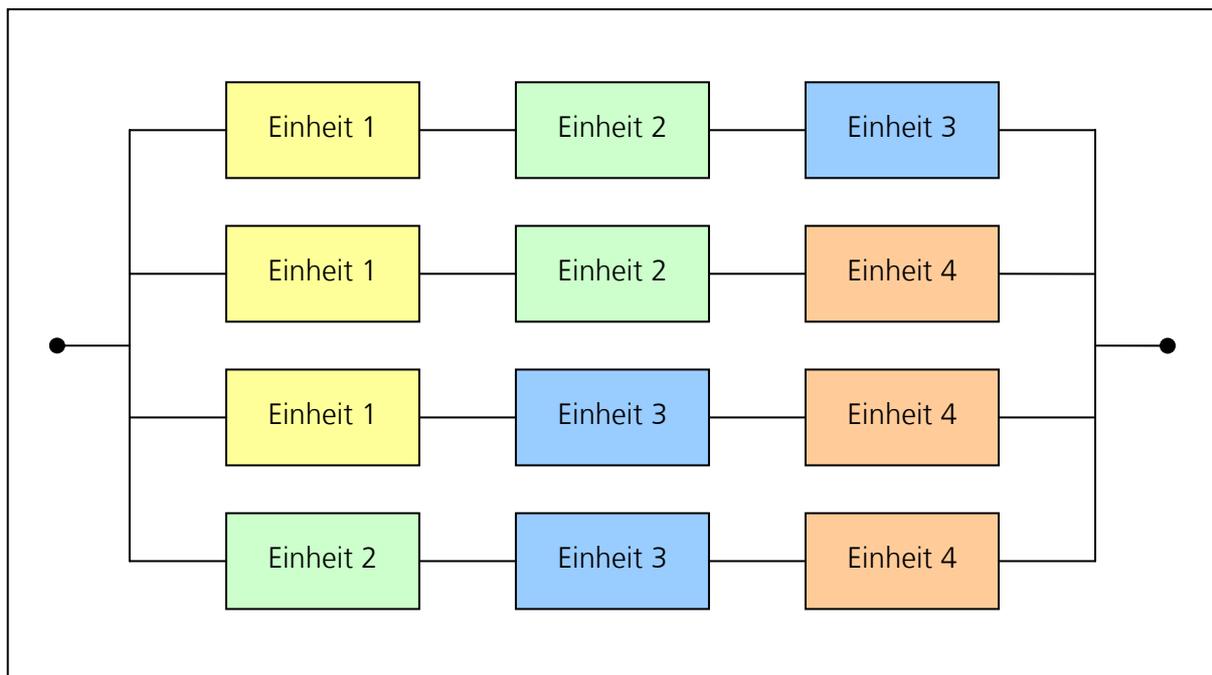


Abbildung 13: Das „3 aus 4“-System

Das System ist intakt, wenn

- Einheiten 1 bis 3 intakt sind, Einheit 4 ausgefallen ist,

- Einheiten 1, 2 und 4 intakt sind, Einheit 3 ausgefallen ist,
- Einheiten 1, 3 und 4 intakt sind, Einheit 2 ausgefallen ist,
- Einheiten 2 bis 4 intakt sind, Einheit 1 ausgefallen ist,
- alle Einheiten intakt sind.

Es wird angenommen, dass die Einheiten identische Ausfallraten besitzen. Die Überlebenswahrscheinlichkeit ergibt sich analog zum „2 aus 3“-System und vereinfacht sich zu (Anhang 11):

$$R(t) = 4 \cdot R_1^3(t) - 3 \cdot R_1^4(t) = 4 \cdot \exp(-3 \cdot \lambda_1 \cdot t) - 3 \cdot \exp(-4 \cdot \lambda_1 \cdot t).$$

Auch dieses System wird mit unterschiedlichen Komponentenausfallraten betrachtet.

	$\lambda_i = 10^{-5}$	$\lambda_i = 10^{-8}$
$R(t)$	$4 \cdot \exp\left(-\frac{3}{100.000} \cdot t\right) - 3 \cdot \exp\left(-\frac{1}{25.000} \cdot t\right)$	$4 \cdot \exp\left(-\frac{3}{100.000.000} \cdot t\right) - 3 \cdot \exp\left(-\frac{1}{25.000.000} \cdot t\right)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8}$
MTTF in Stunden, berechnet als $E[T]$	$\frac{175.000}{3} \approx 58.000$	$\frac{175.000.000}{3} \approx 58.000.000$
$\lambda$ als Näherung: $\frac{1}{MTTF}$	$\frac{3}{175.000} \approx 1,7 \cdot 10^{-5}$	$\frac{3}{175.000.000} \approx 1,7 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 11: Werte für das „3 aus 4“-System

Analog zum „2 aus 3“-System unterscheidet sich die MTTF der beiden Systeme um den Faktor  $10^3$ . Die Ursache dafür liegt in der Berechnung der MTTF als Erwartungswert von T und lässt sich grundsätzlich auf die Auswertung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \exp(-a \cdot \lambda_1 \cdot t) dt = \frac{1}{a \cdot \lambda_1}$$

zurückführen. Da sich die Komponentenausfallraten  $\lambda_1$  um den Faktor  $10^3$  unterscheiden, unterscheiden sich die Werte der Integrale ebenfalls um den Faktor  $10^3$  und damit auch die MTTF-Werte.

Ebenfalls bemerkbar macht sich der Rückgang der mittleren Systembetriebszeit, die MTTF des „3 aus 4“-Systems entspricht in etwa zwei Dritteln der MTTF des „2 aus 3“-Systems. Eine Begründung liefert auch hier wieder der Anteil der aktiven an allen möglichen Systemzuständen, dieser beträgt im Fall des „3 aus 4“-Systems nämlich nur noch rund ein Drittel.

Der Grenzwert der Ausfallrate entspricht dem Wert  $(n-1) \cdot \lambda_1$ . Dies klingt plausibel, denn eine Komponente fällt über die Zeit gesehen sicherlich aus und dann erhält man ein 3-Seriensystem, dessen Ausfallrate gerade die Summe der Komponentenausfallraten war.

Abschließend zu diesem System noch die Fehlerbaumdarstellung mit Hilfe des Voting-Gates.

$$\text{Voting-Gate (2:4): } F(t) = F_1(t)^4 + 4 \cdot F_1(t)^3 \cdot R_1(t) + 6 \cdot F_1(t)^2 \cdot R_1(t)^2$$

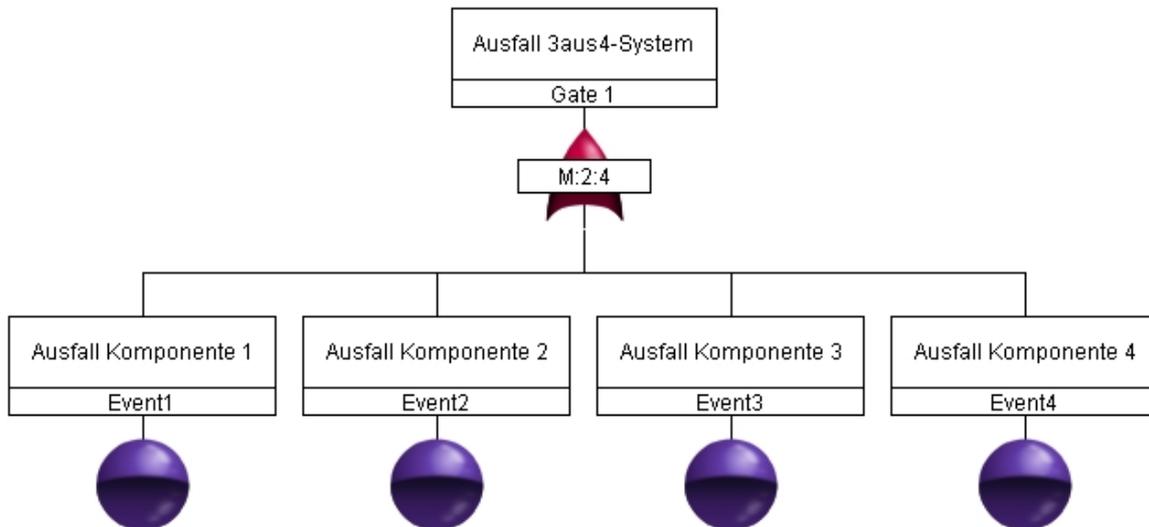


Abbildung 14: Fehlerbaum zum „3 aus 4“-System

### 3.2.3 Das „8 aus 10“-System

Ein „8 aus 10“-System besteht aus zehn Einheiten, von denen mindestens acht überleben müssen, damit das System nicht ausfällt. Es gibt  $\binom{10}{8} = 45$  Möglichkeiten acht aus den zehn Elementen auszuwählen:

- Einheit 1 bis Einheit 8
- Einheit 1 bis Einheit 7 und Einheit 9
- Einheit 1 bis Einheit 7 und Einheit 10
- ...
- Einheit 3 bis Einheit 10

Diese 45 Kombinationen bilden die 45 Seriensysteme in der Darstellung als Parallel-Seriensystem.

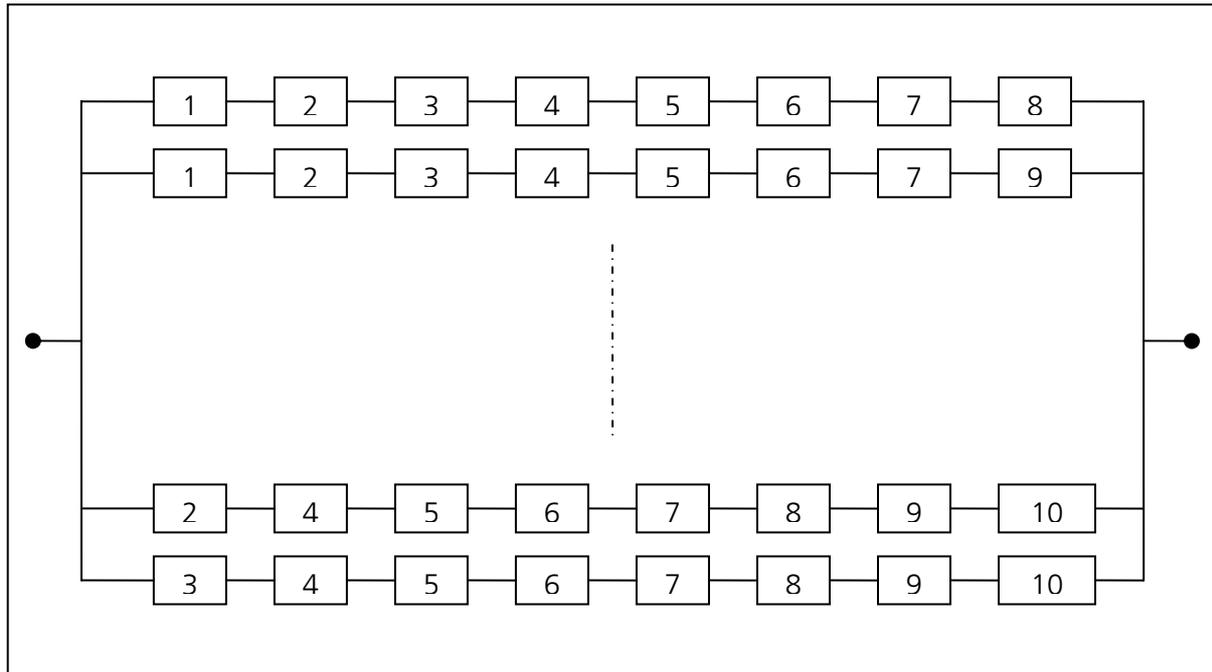


Abbildung 15: Das „8 aus 10“-System

Das „8 aus 10“-System ist intakt, wenn

- alle Einheiten intakt sind,
- nur eine Einheit ausfällt,
- nur zwei Einheiten ausfallen.

Wir nehmen an das die Einheiten identische Ausfallraten besitzen. Dann ergibt sich diese Gleichung für die Überlebenswahrscheinlichkeit (Anhang 12):

$$R(t) = 45 \cdot R_1^8(t) - 80 \cdot R_1^9(t) + 36 \cdot R_1^{10}(t)$$

bzw. über die Komponentenausfallwahrscheinlichkeit berechnet folgende, wesentlich umfangreichere Formel (Anhang 13):

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - 120 \cdot F_1^3(t) + 630 \cdot F_1^4(t) - 1512 \cdot F_1^5(t) + 2100 \cdot F_1^6(t) - 1800 \cdot F_1^7(t) + 945 \cdot F_1^8(t) - 280 \cdot F_1^9(t) + 36 \cdot F_1^{10}(t)$$

Die Formeln lassen sich ineinander überführen (Anhang 14).

Der MTTF-Wert berechnet sich über (Anhang 15)

$$MTTF = \frac{121}{360 \cdot \lambda_1}$$

Betrachten wir dieses System nun ebenfalls mit unterschiedlichen Komponentenausfallraten.

	$\lambda_i(t) = 10^{-5}$	$\lambda_i(t) = 10^{-8}$
$R(t)$	$45 \cdot \exp\left(-\frac{1}{1250} \cdot t\right)$ $- 80 \cdot \exp\left(-\frac{9}{10.000} \cdot t\right)$ $+ 36 \cdot \exp\left(-\frac{1}{1000} \cdot t\right)$	$45 \cdot \exp\left(-\frac{1}{1.250.000} \cdot t\right)$ $- 80 \cdot \exp\left(-\frac{9}{10.000.000} \cdot t\right)$ $+ 36 \cdot \exp\left(-\frac{1}{1.000.000} \cdot t\right)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ in Ausfällen pro Stunde	$8 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-8}$
MTTF in Stunden	$\frac{302.500}{9} \approx 34.000$	$\frac{302.500.000}{9} \approx 34.000.000$
$\lambda(t) = \frac{1}{MTTF}$	$\frac{9}{302.500} \approx 2,97 \cdot 10^{-5}$	$\frac{9}{302.500.000} \approx 2,97 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 12: MTTF- Werte für das „8 aus 10“-System

Im Vergleich zum „3 aus 4“-System ist die MTTF erneut um fünf Zwölftel gesunken. Bemerkenswert hierbei ist nicht so sehr der Rückgang an sich, sondern viel mehr, dass er im Verhältnis zum Rückgang des Anteils der aktiven Systemzustände relativ gering ausfällt. Es existieren nämlich 1024 mögliche Systemzustände und nur 56 davon belassen das System in Funktionsbereitschaft. Dies entspricht einem Anteil von 5,5%. Das heißt der Anteil der aktiven Zustände ist vom „3 aus 4“- zum „8 aus 10“-System um mehr als 80 % zurückgegangen, während die MTTF nur um 40 % gesunken ist.

Dazu ein Exkurs zum Rückgang der MTTF bei „(n-1) aus n“-Systemen. Es sei als konstante Ausfallrate für Bauteile der Wert  $\lambda_i(t) = 10^{-5}$  gewählt und MTTF wird als  $E[T]$  berechnet.

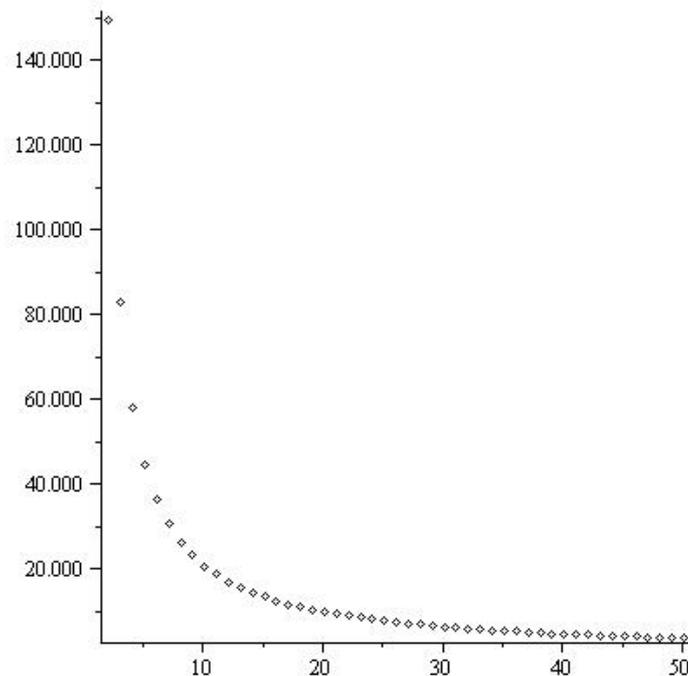


Abbildung 16: MTTF bei „(n-1) aus n“-Systemen für  $\lambda_i = 10^{-5}$

In obiger Abbildung 16 ist dabei der relativ starke Rückgang bis  $n = 10$  und das Streben der MTTF gegen 0 für  $n$  gegen unendlich deutlich erkennbar. Somit gilt: aus je mehr Komponenten ein „(n-1) aus n“-System besteht, desto geringer ist seine durchschnittliche Betriebszeit. Analog zum Seriensystem gilt auch für dieses System

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

Dieser Grenzwert ist dadurch begründet, dass eine Komponente irgendwann sicherlich ausgefallen ist und das übrigbleibende System ein (n-1)-Seriensystem darstellt, dessen Überlebenswahrscheinlichkeit gerade den Grenzwert 0 besitzt.

Nachstehende Abbildung 17 zeigt den Verlauf der Ausfallrate als Kehrwert der MTTF, die als Erwartungswert von T berechnet wurde, und als zeitabhängigen Wert, berechnet über die Formel

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

für das „8 aus 10“-System mit der Komponentenausfallrate von  $\lambda_1 = 10^{-5}$ . Erkennbar ist erneut, dass der MTTF-Kehrwert bis zu einem gewissen Zeitpunkt eine obere Schranke für die korrekte Ausfallrate bildet, anschließend jedoch als Näherung zu ungenau und damit unbrauchbar ist.

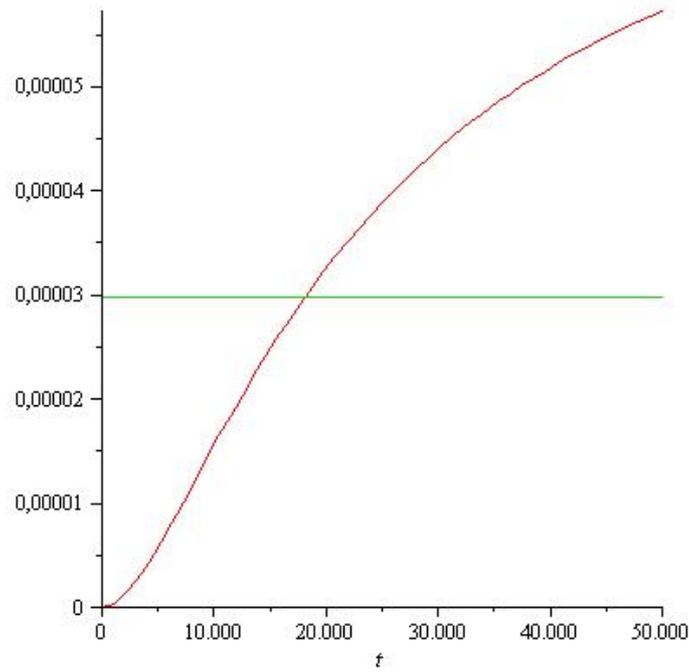


Abbildung 17: Verlauf Ausfallrate (rot) und MTTF-Kehrwert (grün)

Abschließend zu dem „8 aus 10“-System noch die Fehlerbaumdarstellung aus Relex mit Hilfe eines Voting-Gates.

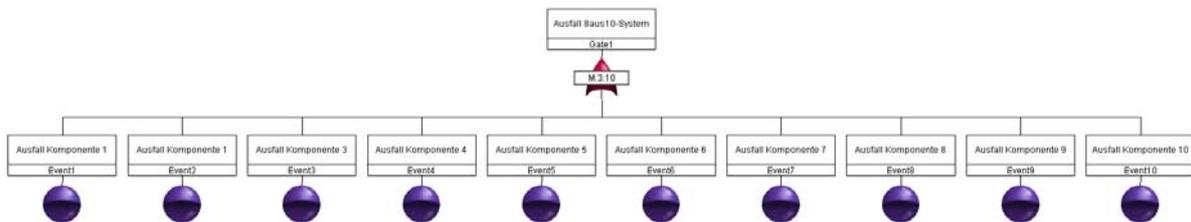


Abbildung 18: Fehlerbaum zum „8 aus 10“-System

## 4 Hinweise zu den genutzten Programmen

### 4.1 Arbeit mit Relex

Das Programm Relex ist ein nützliches Tool zur Erstellung und Analyse von Fehlerbäumen und zur Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeit und deren Dichte des TOP-Events, womit anschließend die Ausfallrate berechnet werden kann. Jedoch müssen im Umgang mit diesem Programm, insbesondere bei der Erstellung des Fehlerbaums bzw. bei der Festlegung der Dateieigenschaften, grundlegende Dinge beachtet werden, damit Relex korrekt arbeiten kann und der Anwender sich lästige Sucherei nach Fehlern erspart.

- Ist das Programm Relex geöffnet, kann unter File> New> Project eine neue Fehlerbaumdatei erstellt werden. Dazu wird der gewünschte Dateiname eingegeben und mit „Create“ bestätigt. Anschließend öffnet sich das Fenster „New Project Properties“. Auf der Registerkarte „Project Options“ müssen die Häkchen bei „Prediction/General“ und „Fault Tree“ gesetzt sein, alle anderen können entfernt werden. Wichtig ist nun, dass auf der Registerkarte „Project Definitions“ der „Failure Rate Multiplier“ auf den Wert 1 gesetzt wird, da sich bei der Berechnung des Fehlerbaums sonst falsche Werte ergeben.
- Bei der Konstruktion des Fehlerbaums muss darauf geachtet werden, dass Teilbäume mit identischen Ereignissen und Verknüpfungen, also Bäume, die mehrmals im Fehlerbaum vorkommen, auch explizit mehrmals erstellt sind. D.h. es darf in Relex nicht ein Teilbaum existieren, auf den zweimal oder sogar öfters verwiesen wird. Dies führt in der Berechnung der Ausfallrate des TOP-Events wieder zu falschen Ergebnissen, bedingt dadurch, dass Relex nicht mehr von unabhängigen Ereignissen ausgeht. Zur Verdeutlichung die Abbildung 20, in der dargestellt ist, was vermieden werden muss. Umgangen werden kann diese Fehlerquelle, indem der Teilbaum des Gatters 4 (Abbildung 19) an beiden Verweisstellen vollständig eingebaut wird, siehe nachfolgende Abbildung 21. Auch möglich ist es, das Gate 4 und das Gate 7 (Abbildung 21) jeweils als blaues Dreieck, als Zeichen für einen sich noch anschließenden, aber nicht abgebildeten Teilbaum, darzustellen (Abbildung 22).

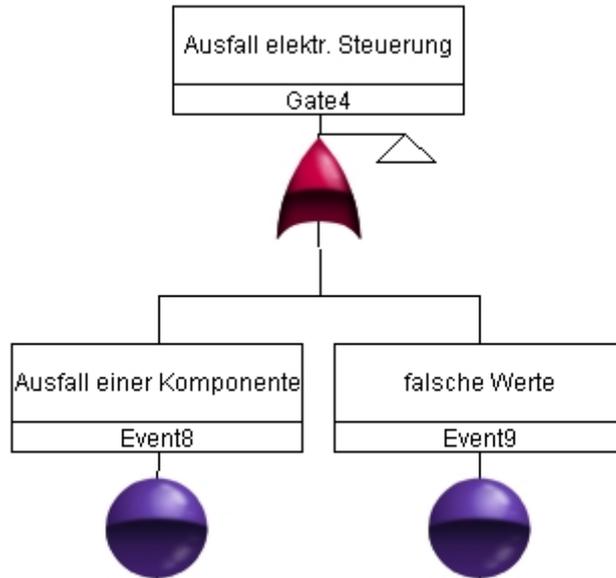


Abbildung 19: Teilbaum für Gate 4

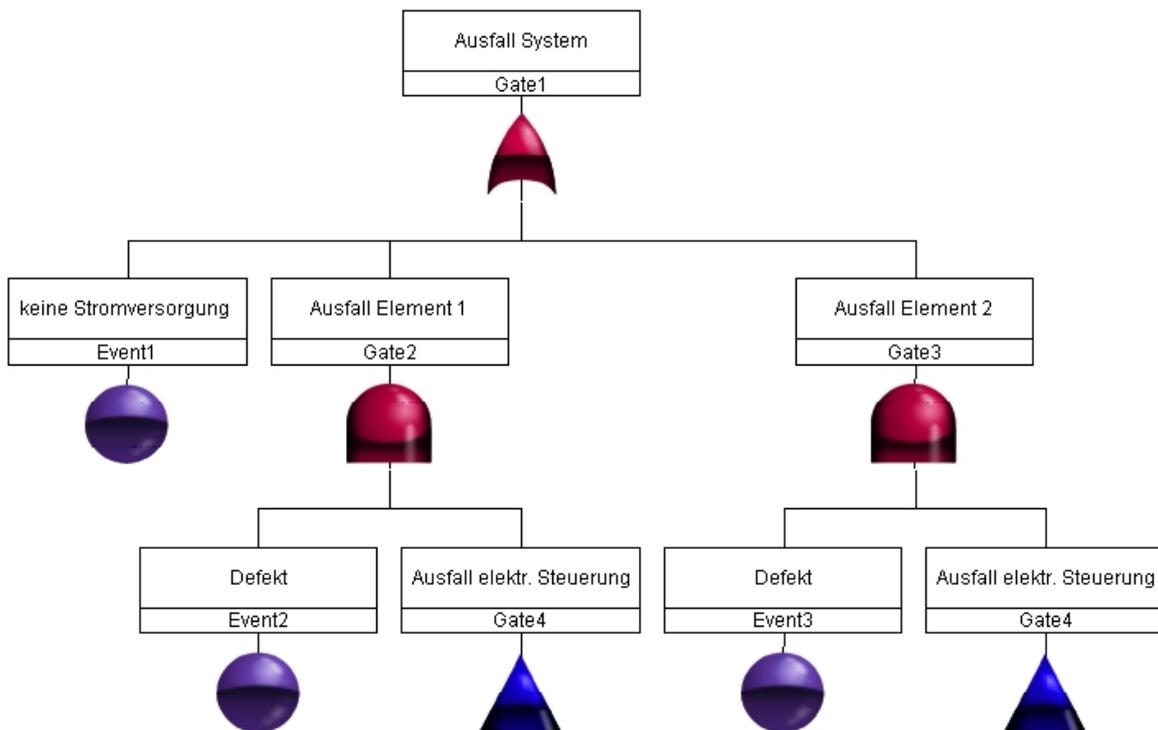


Abbildung 20: doppelter Verweis auf Teilbaum Gate 4 als Fehlerquelle in Relex

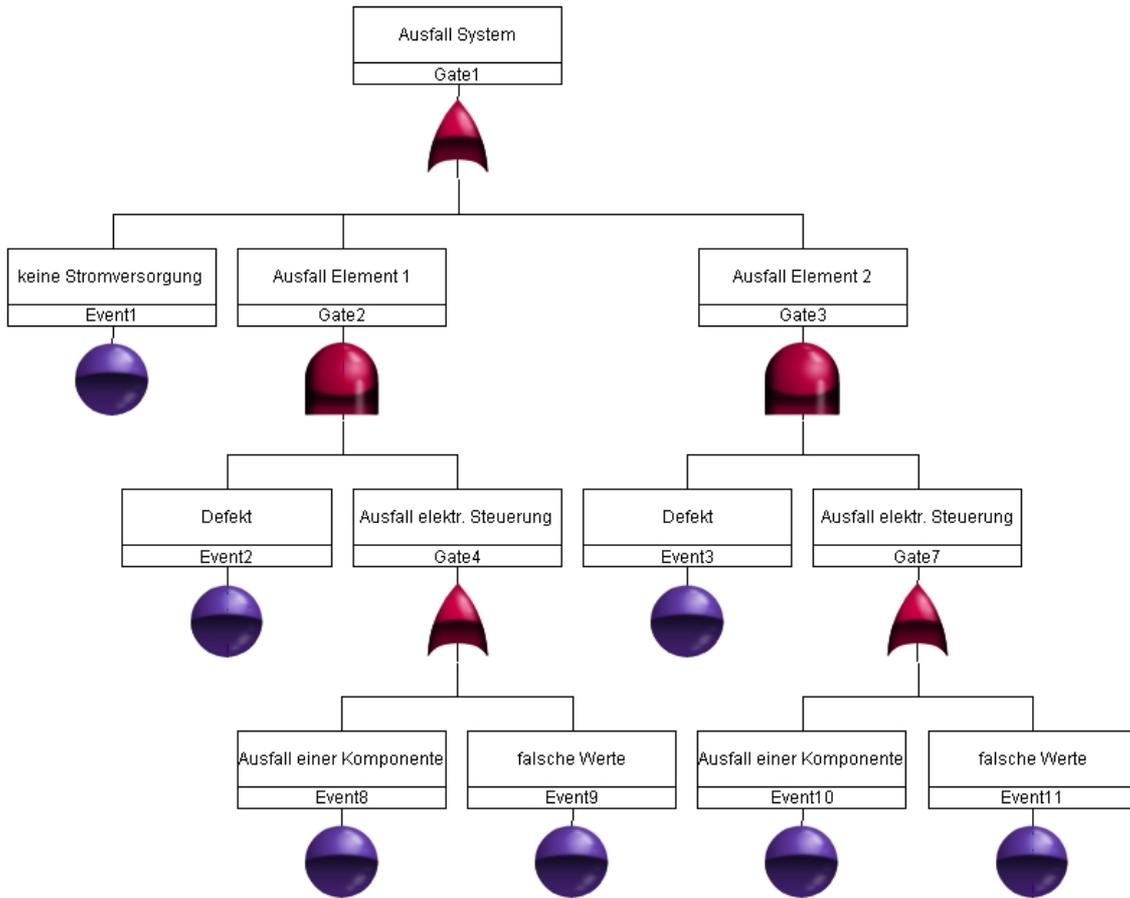


Abbildung 21: Lösung des Problems

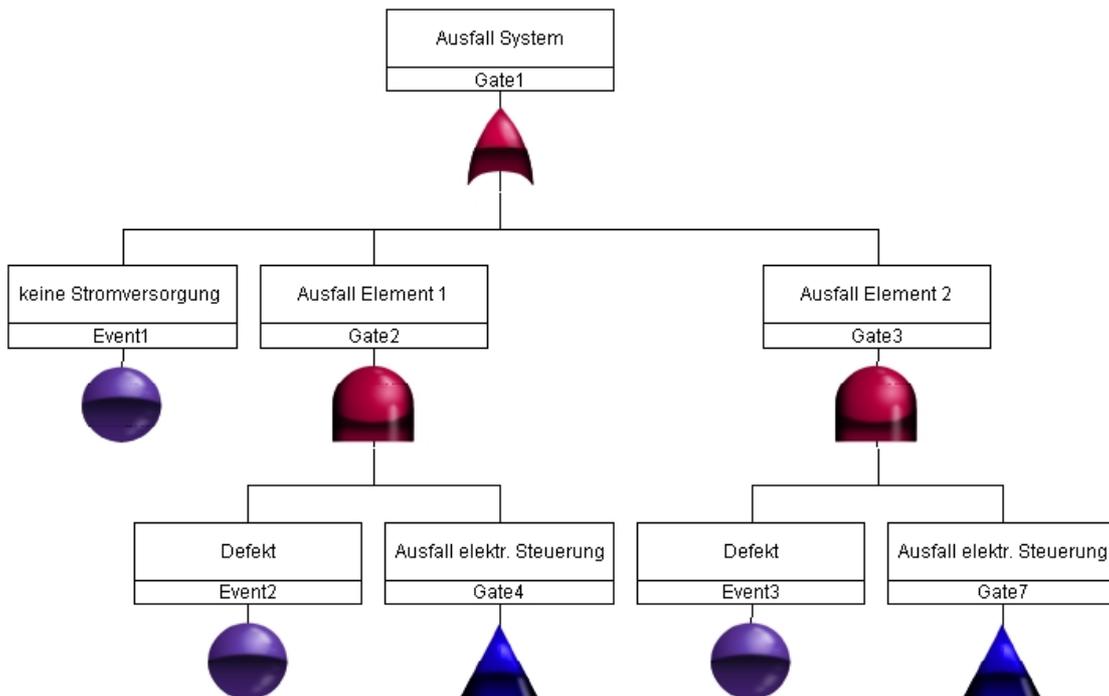


Abbildung 22: Kompaktere Lösung

- Zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit  $F$  und der zugehörigen Dichte  $f$  des TOP-Events des Fehlerbaumes werden zu allen Basisereignissen die Ausfallraten eingegeben. Dazu wird das jeweilige Basisereignis markiert und im Hauptmenü View > Properties und dann die Registerkarte „Calculation Data“ ausgewählt. Dort wird unter „Failure Rate/MTBF“ > „Failure Rate“ die Ausfallrate des Ereignisses eingetragen. Es ist noch darauf zu achten, dass „Failure Rate Percentage“ und „Exposure Time Percentage“ jeweils auf den Wert 100 gesetzt sind. Ist dies für alle Basisereignisse geschehen, so werden im Hauptmenü unter Project > Calculate die Bedingungen für die Rechnung festgelegt.

Auf der Registerkarte „Fault Tree“ können dazu Start- und Endzeitpunkt der Berechnung eingetragen werden, außerdem die Anzahl der Datenpunkte, an denen in diesem Zeitintervall die Werte ermittelt werden sollen. Zur Anzahl müssen natürlich Start- und Endpunkt dazugezählt werden. Dann setzt man das Häkchen bei „Perform Exact Calculations“, und im unteren Teil der Registerkarte noch bei „Unavailability“, „Unreliability“, „Frequency“ und „Number of Failures“. Anschließend wird das Häkchen bei „Cut Sets“ entfernt, und man muss sich nur noch entscheiden, ob man die Werte für  $F$  und  $f$  lediglich für das TOP-Event berechnen lassen möchte („Calculate Top Gate Only“), oder doch lieber für alle vorhandenen Gates („Calculate All Gates“).

Die Registerkarte „Fault Tree Advanced“ kann unberücksichtigt gelassen werden. Dort können lediglich Einstellungen hinsichtlich des mathematischen Berechnungsverfahrens getroffen werden, sofern nicht eine exakte Berechnung verlangt wird, was durch das Häkchen bei „Perform Exact Calculations“ aber geschehen ist.

Durch Bestätigung mit Enter erhält man die „Fault Tree Calculation Results“, die jederzeit auch unter dem Hauptmenüpunkt „View“ einsehbar sind, nachdem die Berechnungen einmal durchgeführt worden sind. Die Eintragungen dort ändern sich mit jeder weiteren Berechnung und Veränderung der Berechnungseinstellungen (z.B. Endzeitpunkt, Anzahl der Datenpunkte).

Die Ausfallrate des TOP-Events für einen einzelnen Zeitpunkt  $t$  erlangt man nun durch den

Quotienten  $\frac{f(t)}{1 - F(t)}$ .

## 4.2 Programmierung in Maple

Das Programm Relex ermöglicht es leider nicht die Ausfallrate, explizit zu berechnen, oder sie als Funktion graphisch darzustellen. Um den graphischen Verlauf zu erhalten, kann deshalb in Maple der Fehlerbaum als Funktion umgesetzt werden, die die Ausfallwahrscheinlichkeit des TOP-Events in Abhängigkeit von der Zeit berechnet. Dazu ein paar kurze Überlegungen zur Berechnung an den verschiedenen Gattertypen.

## Das UND-Gatter

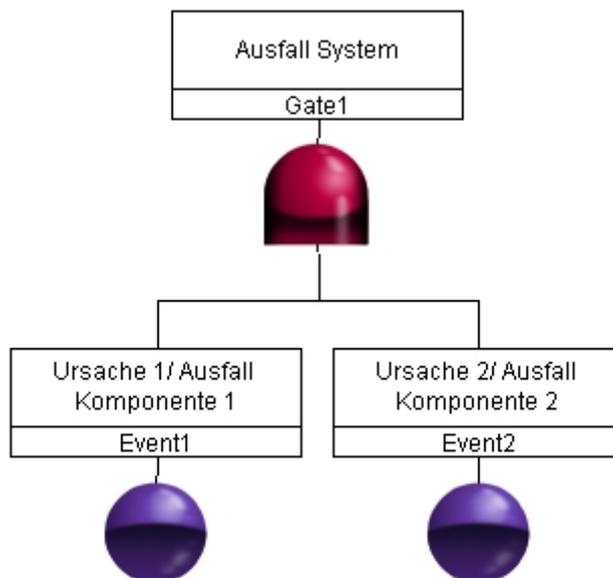


Abbildung 23: UND-Gatter im Fehlerbaum

Sei  $\lambda_1$  die Ausfallrate für Komponente 1,  $\lambda_2$  die Ausfallrate für Komponente 2. Dann ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R_i(t)$  der i-ten Komponente aus  $R_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t)$ , und die Ausfallwahrscheinlichkeit demzufolge aus  $F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i \cdot t)$ . Wir wissen nun bereits, dass für den Ausfall des Systems beide Ursachen eintreten müssen; dies erschließt sich aus der logischen UND-Verknüpfung. Das heißt für die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems müssen die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Komponenten multipliziert werden und es folgt die Formel

$$F(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) = (1 - \exp(-\lambda_1 \cdot t)) \cdot (1 - \exp(-\lambda_2 \cdot t)) = \prod_{i=1}^2 (1 - \exp(-\lambda_i \cdot t)),$$

für ein UND-Gatter mit n Ursachen gilt dementsprechend

$$F(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \exp(-\lambda_i \cdot t)).$$

Diese Formel können wir nun zur rechnerischen Umsetzung eines beliebigen UND-Gatters des Fehlerbaums in der Programmierung nutzen.

Für die Angabe einer Näherungsformel für die Ausfallrate überlegt man sich, dass das UND-Gatter im Fehlerbaum einer ODER-Verknüpfung im entsprechenden Funktionsbaum, in dem die Überlebensbedingungen angegeben sind und die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems berechnet wird, gleichkommt. An dieser ODER-Verknüpfung für das Überleben wird die Ausfallrate näherungsweise über den MTTF-Kehrwert berechnet. Für den MTTF-Wert haben wir in Kapitel 3.1.2 folgende Formel ermitteln können:

$$MTTF = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}}.$$

## Das ODER-Gatter

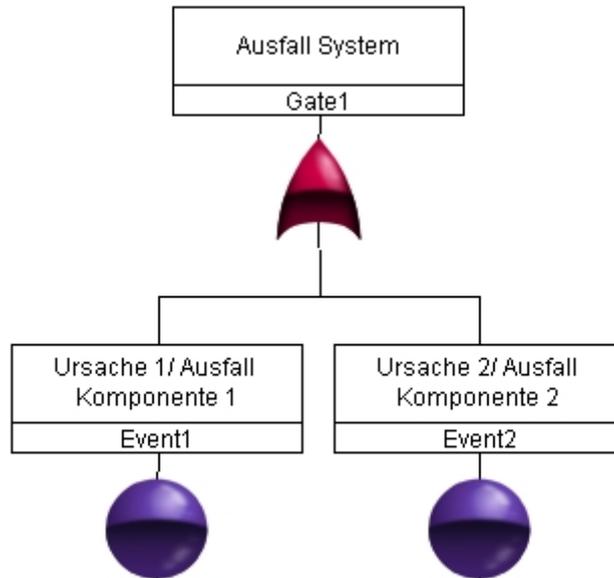


Abbildung 24: ODER-Gatter im Fehlerbaum

Erneut sei  $\lambda_1$  die Ausfallrate für Komponente 1,  $\lambda_2$  die Ausfallrate für Komponente 2. Dann ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R_i(t)$  der i-ten Komponente aus  $R_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t)$ , und die Ausfallwahrscheinlichkeit demzufolge aus  $F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i \cdot t)$ . Die ODER-Verknüpfung zeigt an, dass es für den Systemausfall genügt wenn eine der beiden Ursachen eintritt. Die Systemausfallwahrscheinlichkeit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass

- Komponente 1 ausfällt, Komponente 2 überlebt
- Komponente 1 überlebt, Komponente 2 ausfällt
- beide Komponenten ausfallen.

Formelmäßig:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_1(t) \cdot R_2(t) + R_1(t) \cdot F_2(t) + F_1(t) \cdot F_2(t) \\ &= F_1(t) \cdot (1 - F_2(t)) + (1 - F_1(t)) \cdot F_2(t) + F_1(t) \cdot F_2(t) \\ &= F_1(t) + F_2(t) - F_1(t) \cdot F_2(t) \end{aligned}$$

Weiterhin entspricht dies

$$\begin{aligned} F(t) &= (1 - R_1(t)) \cdot R_2(t) + R_1(t) \cdot (1 - R_2(t)) + (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \\ &= 1 - R_1(t) \cdot R_2(t) \\ &= 1 - \exp(-\lambda_1 \cdot t) \cdot \exp(-\lambda_2 \cdot t) \end{aligned}$$

Verallgemeinert auf n Ursachen folgt diese Formel:

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i \cdot t) = \exp(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i).$$

Für die Angabe einer Näherungsformel folgt man analog zum UND-Gatter der Überlegung, dass das ODER-Gatter des Fehlerbaums einem UND-Gatter im Funktionsbaum entspricht. Das heißt Ausfallraten können hier einfach addiert werden, vgl. dazu Kapitel 3.1.1.

### Das VOTING-Gatter (m/n)

Stellen wir nun noch Überlegungen zu einem VOTING-Gatter (m/n) an. Dazu sei beispielhaft ein Voting-Gate (1/3) abgebildet, die Gedanken zur Rechnung werden jedoch allgemein für (m/n) angegeben.

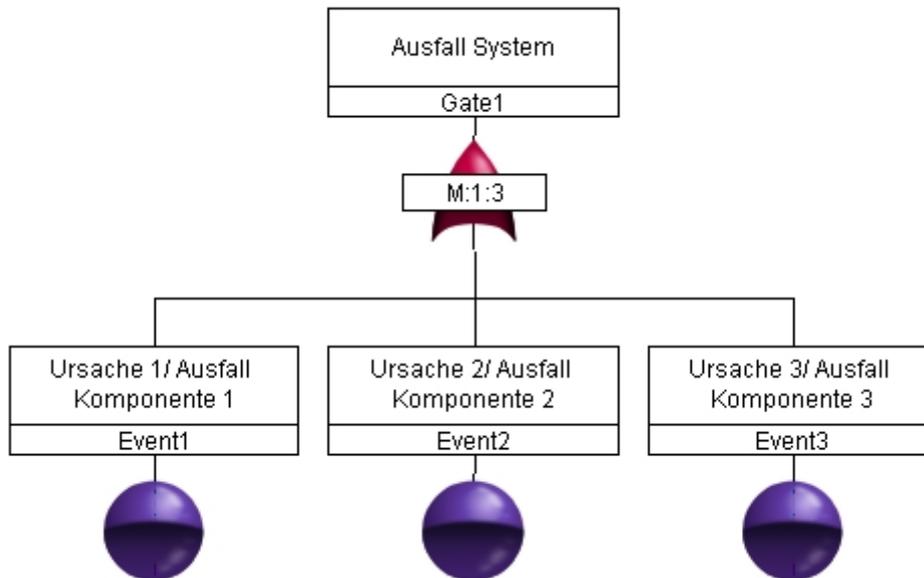


Abbildung 25: VOTING-Gatter im Fehlerbaum

Sei  $\lambda_i$  die Ausfallrate für die i-te Komponente. Dann ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit aus  $R_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t)$ , und die Ausfallwahrscheinlichkeit durch

$$F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i \cdot t).$$

Das Voting-Gate (m/n) beschreibt, dass mindestens m der n Komponenten ausfallen müssen, damit das System ausfällt. Das heißt, das System fällt nicht aus, wenn maximal m-1 Komponenten ausfallen. Die Systemausfallwahrscheinlichkeit kann somit berechnet werden, indem man von 1 die Wahrscheinlichkeiten für den Ausfall von keiner Komponente bis hin zum Ausfall von m-1 Komponenten subtrahiert.

Über die exakte Ausfallwahrscheinlichkeit werden die Überlebenswahrscheinlichkeit und anschließend der MTTF-Wert als Integral der Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet. Die Näherung ergibt sich dann wieder als Kehrwert der MTTF.

### Das NOR-Gatter

Die bisherigen drei Verknüpfungen sind die gebräuchlichsten in einem Fehlerbaum, doch als Exkursion sei hier noch das NOR-Gatter vorgestellt. Dieses kann genau dann eingesetzt werden, wenn an den Ausfall bestimmter Systemkomponenten die Bedingung gekoppelt ist, dass andere Komponenten funktionsfähig sein müssen.

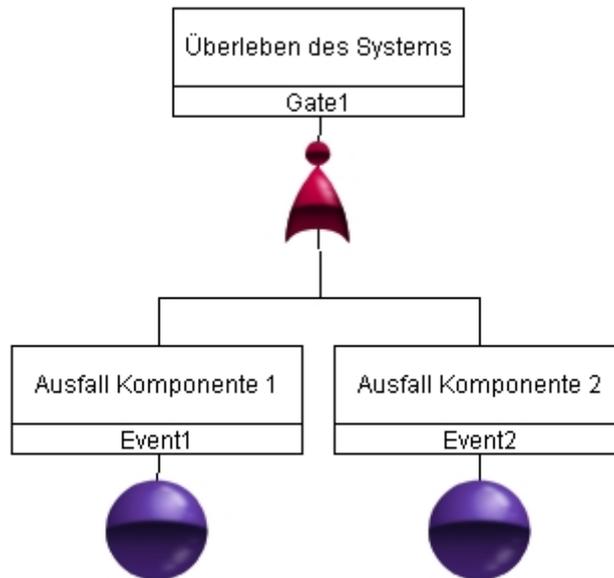


Abbildung 26: NOR-Gatter im Fehlerbaum

Sei  $\lambda_1$  die Ausfallrate für Komponente 1,  $\lambda_2$  die Ausfallrate für Komponente 2. Dann ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R_i(t)$  der i-ten Komponente wieder aus  $R_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t)$ , und die Ausfallwahrscheinlichkeit demzufolge durch  $F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i \cdot t)$ .

Das System überlebt, wenn weder die eine noch die andere Komponente ausfällt, also wenn beide Komponenten überleben, das ergibt rechnerisch:

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) = (1 - F_1(t)) \cdot (1 - F_2(t)).$$

Dies kann auch geschrieben werden als  $R(t) = 1 - (F_1(t) + F_2(t) - F_1(t) \cdot F_2(t))$  und da wird außer durch den Namen auch so deutlich, dass es sich bei einem NOR-Gatter lediglich um die Kombination eines NOT-Gatters und eines OR-Gatters handelt.

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Begriffsschaubild für eine reparierbare Einheit.....	6
Abbildung 2: Blockdiagramm eines n-Seriensystems .....	7
Abbildung 3: Fehlerbaum zum 2-Seriensystem, erstellt mit Relex 7.7 .....	9
Abbildung 4: Blockdiagramm eines n-Parallelsystems .....	11
Abbildung 5: Fehlerbaum für ein 2-Parallelsystem, erstellt mit Relex 7.7 .....	13
Abbildung 6: Verlauf der Ausfallrate (rot) und des MTTF-Kehrwertes (grün) .....	15
Abbildung 7: Parallel-Seriensystem (links), Serien-Parallelsystem (rechts).....	18
Abbildung 8: Das „2 aus 3“-System.....	20
Abbildung 9: Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System mit Voting-Gate .....	21
Abbildung 10: Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System mit Und- bzw. Oder- Verknüpfungen .....	22
Abbildung 11: Vereinfachter Fehlerbaum zum „2 aus 3“-System .....	22
Abbildung 12: Verlauf Ausfallrate (rot) und MTTF-Kehrwert (grün) für ein „2 aus 3“-System mit Komponentenausfallraten von $10^{-5}$ .....	25
Abbildung 13: Das „3 aus 4“-System.....	25
Abbildung 14: Fehlerbaum zum „3 aus 4“-System.....	27
Abbildung 15: Das „8 aus 10“-System.....	28
Abbildung 16: MTTF bei „(n-1) aus n“-Systemen für $\lambda_i = 10^{-5}$ .....	30
Abbildung 17: Verlauf Ausfallrate (rot) und MTTF-Kehrwert (grün).....	31
Abbildung 18: Fehlerbaum zum „8 aus 10“-System.....	31
Abbildung 19: Teilbaum für Gate 4.....	33
Abbildung 20: doppelter Verweis auf Teilbaum Gate 4 als Fehlerquelle in Relex .....	33
Abbildung 21: Lösung des Problems .....	34
Abbildung 22: Kompaktere Lösung.....	34
Abbildung 23: UND-Gatter im Fehlerbaum .....	36
Abbildung 24: ODER-Gatter im Fehlerbaum .....	37
Abbildung 25: VOTING-Gatter im Fehlerbaum .....	38
Abbildung 26: NOR-Gatter im Fehlerbaum.....	39

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Übersicht über die Formeln für das Seriensystem.....	8
Tabelle 2: Formeln für Seriensysteme mit unterschiedlicher Komponentenanzahl .....	10
Tabelle 3: Werte für das 2-Seriensystem.....	10
Tabelle 4: Übersicht der Formeln für das Parallelsystem .....	12
Tabelle 5: Werte für das 2-Parallelsystem mit konstanten Komponentenausfallraten .....	14
Tabelle 6: Übersicht über den Zeitpunkt $\lambda(t) \geq \frac{1}{MTTF}$ bei unterschiedlichen Ausfallraten und Komponentenanzahlen.....	16
Tabelle 7: Faktoren zur Zeitpunktberechnung bei Verdopplung der Elementanzahl.....	17
Tabelle 8: Formel für R(t) für spezielle „m aus n“-Systeme .....	19
Tabelle 9: Werte für das „2 aus 3“-System .....	23
Tabelle 10: Zustandsmöglichkeiten für das „2 aus 3“-System.....	24
Tabelle 11: Werte für das „3 aus 4“-System .....	26
Tabelle 12: MTTF- Werte für das „8 aus 10“-System.....	29

## Anhangverzeichnis

Anhang 1: Herleitung der Formel für die Ausfallrate

$$\begin{aligned}\lambda(t) \cdot \Delta t &= P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P((t < T \leq t + \Delta t) \cap (T > t))}{P(T > t)} = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} \\ \Rightarrow \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t \cdot R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}\end{aligned}$$

Mit  $F(t) = 1 - R(t)$  folgt

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - R(t + \Delta t) - (1 - R(t))}{\Delta t \cdot R(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)}$$

Anhang 2: Herleitung R(t)

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} \\ \Rightarrow -\lambda(t) \cdot dt &= \frac{dR(t)}{R(t)} \\ \Rightarrow -\int_0^t \lambda(s) ds &= \int_0^s \frac{dR(s)}{R(s)} = [\ln R(s)]_0^t = \ln R(t) - \ln R(0) \stackrel{R(0)=1}{=} \ln R(t) \\ \Rightarrow R(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)\end{aligned}$$

Anhang 3: Umformung E[T]

$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = -\int_0^{\infty} t \cdot \frac{dR(t)}{dt} dt$$

Es folgt mit Hilfe der partiellen Integration:

$$-\int_0^{\infty} t \cdot \frac{dR(t)}{dt} dt = -\left([t \cdot R(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} R(t) dt\right) \stackrel{\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)=0}{=} \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Anhang 4: Ausfallrate und MTTF des Seriensystems

Konstante Ausfallraten  $\lambda_i(t) = \lambda_i$ :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \cdot \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)}{\exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i) dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\lambda(t)}$$

Anhang 5: Überprüfung von R(t)

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = 1 - F_1(t) \cdot F_2(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \\ &= 1 - (1 - R_1(t) - R_2(t) + R_1(t) \cdot R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t) \end{aligned}$$

Anhang 6: MTTF beim Parallelsystem

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} R_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot R_{i_k}(t) dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_0^{\infty} R_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot R_{i_k}(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_0^{\infty} \exp\left(-t \cdot \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}\right) dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left[ -\frac{1}{\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}} \cdot \exp\left(-t \cdot \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}\right) \right]_0^{\infty} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}} \end{aligned}$$

Anhang 7: Vereinfachung der MTTF-Formel

$$\begin{aligned} MTTF &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j}} \stackrel{\text{identische } \lambda_{i_j}}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k \cdot \lambda_i} \\ &= n \cdot \frac{1}{\lambda_i} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot \lambda_i} - \dots + \frac{1}{n \cdot \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Beweis der letzten Umformung mittels vollständiger Induktion, als Voraussetzung (\*) mit:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot \underbrace{(n-1-(k-1))!}_{=(n-k)!}} \cdot \frac{1}{k} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n}$$

Induktionsanfang:

$$n = 1$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^1 (-1)^{k-1} \cdot \binom{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda} \cdot \binom{1}{1} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{für } n-1 \text{ gilt } \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Induktionsschritt:

$$n-1 \rightarrow n$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \left( \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \binom{n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} - (-1)^{0-1} \cdot \binom{n}{0} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left( \underbrace{- \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k}}_{=0} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Anhang 8: Herleitung F(t) für "m aus n"-Systeme

$$\begin{aligned}
 F(t) &= 1 - R(t) = 1 - \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-k} - \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{n-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \cdot (1 - F_1(t))^k \cdot F_1^{n-k}(t)
 \end{aligned}$$

#### Anhang 9: MTTF für das "2 aus 3"-System

$$\begin{aligned}
 MTTF &= \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} 3 \cdot R_1^2(t) - 2 \cdot R_1^3(t) dt = \int_0^{\infty} 3 \cdot \exp(-2 \cdot \lambda_1 \cdot t) - 2 \cdot \exp(-3 \cdot \lambda_1 \cdot t) dt \\
 &= \frac{3}{2 \cdot \lambda_1} - \frac{2}{3 \cdot \lambda_1} = \frac{5}{6 \cdot \lambda_1}
 \end{aligned}$$

#### Anhang 10: falsche Berechnung R(t) beim "2 aus 3"-System

Die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R_S(t)$  eines der drei Seriensysteme entspricht dem Produkt der Überlebenswahrscheinlichkeiten der zwei Komponenten des Seriensystems. Die Komponenten sind laut Voraussetzung identisch, d.h.

$$R_S(t) = R_1^2(t).$$

Das Parallel-Seriensystem überlebt, wenn nicht alle Seriensysteme ausfallen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F_S(t) = 1 - R_S(t)$$

jedes Seriensystems ist identisch wegen der gleichartigen Komponenten. Die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit ist das Produkt der Systemausfallwahrscheinlichkeiten, folglich gilt:

$$F(t) = F_S^3(t) = (1 - R_S(t))^3 = (1 - R_1^2(t))^3 = 1 - 3 \cdot R_1^2(t) + 3 \cdot R_1^4(t) - R_1^6(t)$$

und damit

$$R(t) = 3 \cdot R_1^2(t) - 3 \cdot R_1^4(t) + R_1^6(t).$$

Diese Formel ist falsch.

#### Anhang 11: Berechnung R(t) beim "3 aus 4"-System

$$\begin{aligned}
 R(t) &= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot F_4(t) + R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_4(t) \cdot F_3(t) + R_1(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t) \cdot F_2(t) \\
 &+ R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t) \cdot F_1(t) + R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t) \\
 &= 4 \cdot R_1^3(t) \cdot (1 - R_1(t)) + R_1^4(t) \\
 &= 4 \cdot R_1^3(t) - 3 \cdot R_1^4(t)
 \end{aligned}$$

#### Anhang 12: Berechnung R(t) beim "8 aus 10"-System

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \cdot R_1^k(t) \cdot (1 - R_1(t))^{10-k} = 45 \cdot R_1^8(t) \cdot (1 - R_1(t))^2 + 10 \cdot R_1^9(t) \cdot (1 - R_1(t)) + R_1^{10}(t) \\
 &= 45 \cdot R_1^8(t) - 90 \cdot R_1^9(t) + 45 \cdot R_1^{10}(t) + 10 \cdot R_1^9(t) - 10 \cdot R_1^{10}(t) + R_1^{10}(t) \\
 &= 45 \cdot R_1^8(t) - 80 \cdot R_1^9(t) + 36 \cdot R_1^{10}(t)
 \end{aligned}$$

Anhang 13: Berechnung F(t) beim "8 aus 10"-System

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \cdot F_1^k(t) \cdot (1 - F_1(t))^{10-k} = \sum_{k=0}^7 \binom{10}{k} \cdot F_1^{10-k}(t) \cdot (1 - F_1(t))^k \\
 &= F_1^{10}(t) + 10 \cdot F_1^9(t) \cdot (1 - F_1(t)) + \binom{10}{2} \cdot F_1^8(t) \cdot (1 - F_1(t))^2 + \binom{10}{3} \cdot F_1^7(t) \cdot (1 - F_1(t))^3 \\
 &\quad + \binom{10}{4} \cdot F_1^6(t) \cdot (1 - F_1(t))^4 + \binom{10}{5} \cdot F_1^5(t) \cdot (1 - F_1(t))^5 + \binom{10}{6} \cdot F_1^4(t) \cdot (1 - F_1(t))^6 + \binom{10}{7} \cdot F_1^3(t) \cdot (1 - F_1(t))^7 \\
 &= \dots = 120 \cdot F_1^3(t) - 630 \cdot F_1^4(t) + 1512 \cdot F_1^5(t) - 2100 \cdot F_1^6(t) \\
 &\quad + 1800 \cdot F_1^7(t) - 945 \cdot F_1^8(t) + 280 \cdot F_1^9(t) - 36 \cdot F_1^{10}(t)
 \end{aligned}$$

Anhang 14: Überführung der Formeln

$$\begin{aligned}
 R(t) &= 45 \cdot R_1^8(t) - 80 \cdot R_1^9(t) + 36 \cdot R_1^{10}(t) = 45 \cdot (1 - F_1(t))^8 - 80 \cdot (1 - F_1(t))^9 + 36 \cdot (1 - F_1(t))^{10} \\
 &= 45 \cdot (1 - 8 \cdot F_1(t) + 28 \cdot F_1^2(t) - 56 \cdot F_1^3(t) + 70 \cdot F_1^4(t) - 56 \cdot F_1^5(t) + 28 \cdot F_1^6(t) - 8 \cdot F_1^7(t) + F_1^8(t)) \\
 &\quad - 80 \cdot (1 - 9 \cdot F_1(t) + 36 \cdot F_1^2(t) - 84 \cdot F_1^3(t) + 126 \cdot F_1^4(t) - 126 \cdot F_1^5(t) + 84 \cdot F_1^6(t) - 36 \cdot F_1^7(t) \\
 &\quad + 9 \cdot F_1^8(t) - F_1^9(t)) + 36 \cdot (1 - 10 \cdot F_1(t) + 45 \cdot F_1^2(t) - 120 \cdot F_1^3(t) + 210 \cdot F_1^4(t) \\
 &\quad - 252 \cdot F_1^5(t) + 210 \cdot F_1^6(t) - 120 \cdot F_1^7(t) + 45 \cdot F_1^8(t) - 10 \cdot F_1^9(t) + F_1^{10}(t)) \\
 &= \dots = 1 - 120 \cdot F_1^3(t) + 630 \cdot F_1^4(t) - 1512 \cdot F_1^5(t) + 2100 \cdot F_1^6(t) \\
 &\quad - 1800 \cdot F_1^7(t) + 945 \cdot F_1^8(t) - 280 \cdot F_1^9(t) + 36 \cdot F_1^{10}(t)
 \end{aligned}$$

Anhang 15: MTTF beim "8 aus 10"-System

$$\begin{aligned}
 MTTF &= \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} 45 \cdot R_1^8(t) - 80 \cdot R_1^9(t) + 36 \cdot R_1^{10}(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} 45 \cdot \exp(-8 \cdot \lambda_1 \cdot t) - 80 \cdot \exp(-9 \cdot \lambda_1 \cdot t) + 36 \cdot \exp(-10 \cdot \lambda_1 \cdot t) dt \\
 &= \frac{45}{8 \cdot \lambda_1} - \frac{80}{9 \cdot \lambda_1} + \frac{36}{10 \cdot \lambda_1} = \frac{45^2 - 3200 + 36^2}{360 \cdot \lambda_1} = \frac{121}{360 \cdot \lambda_1}
 \end{aligned}$$

## Abkürzungsverzeichnis

DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
T	Zufallsgröße zur Beschreibung der Lebensdauer einer Einheit
U	Ereignis „Überleben des Systems“
$U_i$	Ereignis „Überleben der Einheit i“
A	Ereignis „Ausfall des Systems“
$A_i$	Ereignis „Ausfall der Einheit i“
F	verschiedene Bezeichnungen für F: Verteilungsfunktion, Ausfallfunktion, Ausfallwahrscheinlichkeit
R	Überlebenswahrscheinlichkeit, Zuverlässigkeitsfunktion
f	Dichtefunktion
P	Wahrscheinlichkeit
lim	Grenzwert
MTTF	Mean Time To Failure
MDT	Mean Down Time
MTBF	Mean Time Between Failures
MTTR	Mean Time To Repair
MUT	Mean Up Time

## Quellen-/Literaturverzeichnis

- [1] IEC 61709, 1997, Electronic Components Reliability-Reference-Condition for Failure Rates and Stress Models Conversions
- [2] CNET RDF 93, 1993, Recueil de Données de Fiabilité des Composants Electroniques
- [3] SN 29 500, 1991, Ausfallraten Bauelemente
- [4] CLC/TR 50126-2, 2007, Railway applications – The specification and demonstration of Reliability, Availability, Maintainability and Safety (RAMS) – Part 2: Guide to the application of EN 50126-1 for safety
- [5] Meyna, Arno; Pauli, Bernhard: Taschenbuch der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstechnik: Quantitative Bewertungsverfahren : 1.Aufl. München : Carl Hanser Verlag, 2003
- [6] Börcsök, Josef: Funktionale Sicherheit: Grundzüge sicherheitstechnischer Systeme : 1.Aufl. Heidelberg : Hüthig GmbH & Co. KG, 2006
- [7] B10\_Brief\_deutsch.pdf
- [8] 25073968\_FMEA-V04.doc
- [9] Peters, Olaf H.; Meyna, Arno: Handbuch der Sicherheitstechnik Bd. 1: Sicherheit technischer Anlagen, Komponenten und Systeme, Sicherheitsanalyseverfahren : 1.Aufl. München : Carl Hanser Verlag, 1985
- [10] Schneeweiss, Winfrid: Die Fehlerbaum- Methode: aus dem Themenkreis Zuverlässigkeits- und Sicherheits-Technik : 1.Aufl. Hagen : LiLoLe-Verlag GmbH, 1999
- [11] Messerschmitt-Bölkow-Blohm GmbH (Hrsg.): Technische Zuverlässigkeit: Problematik, mathematische Grundlagen, Untersuchungsmethoden : 1.Aufl. Berlin : Springer-Verlag, 1971
- [12] Schnieder, E.: Technische Zuverlässigkeit : Technische Universität Braunschweig, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik : Skript WS 2000/2001