Gliederung der Vorlesung „Methoden der Aeroakustik“
Sommersemester 2023 TU Braunschweig, Prof. Dr.-Ing. J. Delfs

1. Theoretische/numerische Methoden

1.1 Wellengleichungsmethoden

1.1.1 Analytische Lösungen der aeroakustischen Analogie

Propellergeräusch, (Strahlgeräusch), Hinterkantengeräusch,
Tyler-Sofrin Regel für Rotor-Stator Auslegung in Kanälen

1.1.2 Numerische Lösungsverfahren für Wellengleichungen

Randelementeverfahren (BEM), (Finite Elemente-Verfahren (FEM)),
Schallstrahlenverfahren (Ray-tracing), Ffowcs-Williams und Hawkings Gleichung/ Kirchhoffgleichung

1.2 Methoden zur Lösung von Störungsgleichungen

1.2.1 (Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung)

Schallabstrahlung eines tanzenden Wirbelpaares

1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Prinzip hochauflösender Finite Differenzenverfahren, DRP-Schema,
Rechenbeispiele CAA

2. Experimentelle Methoden

2.1 Akustische Sensoren und Messtechnik
- 2.1.1 Freifeldmikrophone, Frequenzgang und Immissionsrichtwirkung
- 2.1.2 Mikrophone in Strömungen (Nasenkonus)
- 2.1.3 Neise-Sonde
- 2.1.4 Miniatur-Oberflächendrucksensoren Ku-lite

2.2 (Signalverarbeitung)
- 2.2.1 Diskrete und schnelle Fouriertransformation
- 2.2.2 Filter/Fenster

2.3 Quellortungs- oder Quelllokalisierungsmethoden
- 2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel
- 2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

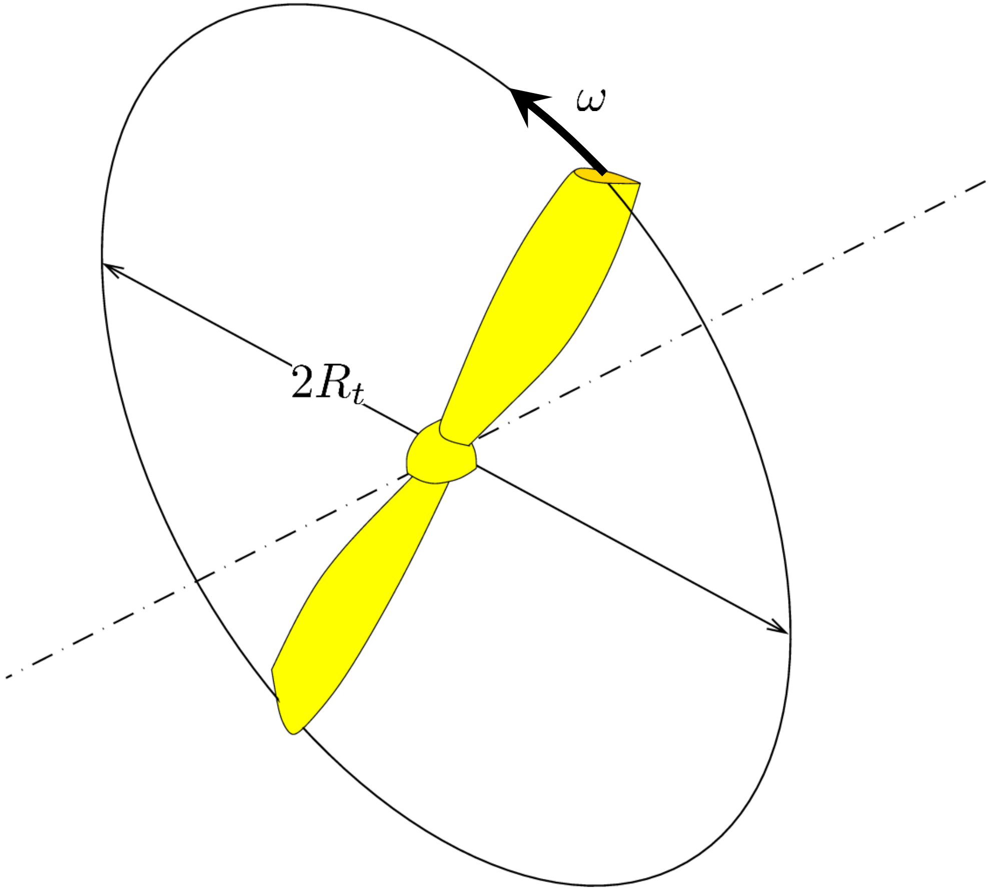
2.4 Messanordnungen in der Aeroakustik
- 2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit
- 2.4.2 Überflug- bzw. Vorbeifahrversuche / Windkanalversuche
  Notwendige Datenreduktionstechniken, Umrechnung Flug-/Windkanal

2.5 Ausblick: Verschmelzung von Experiment und num. Simulation

Urheberhinweis

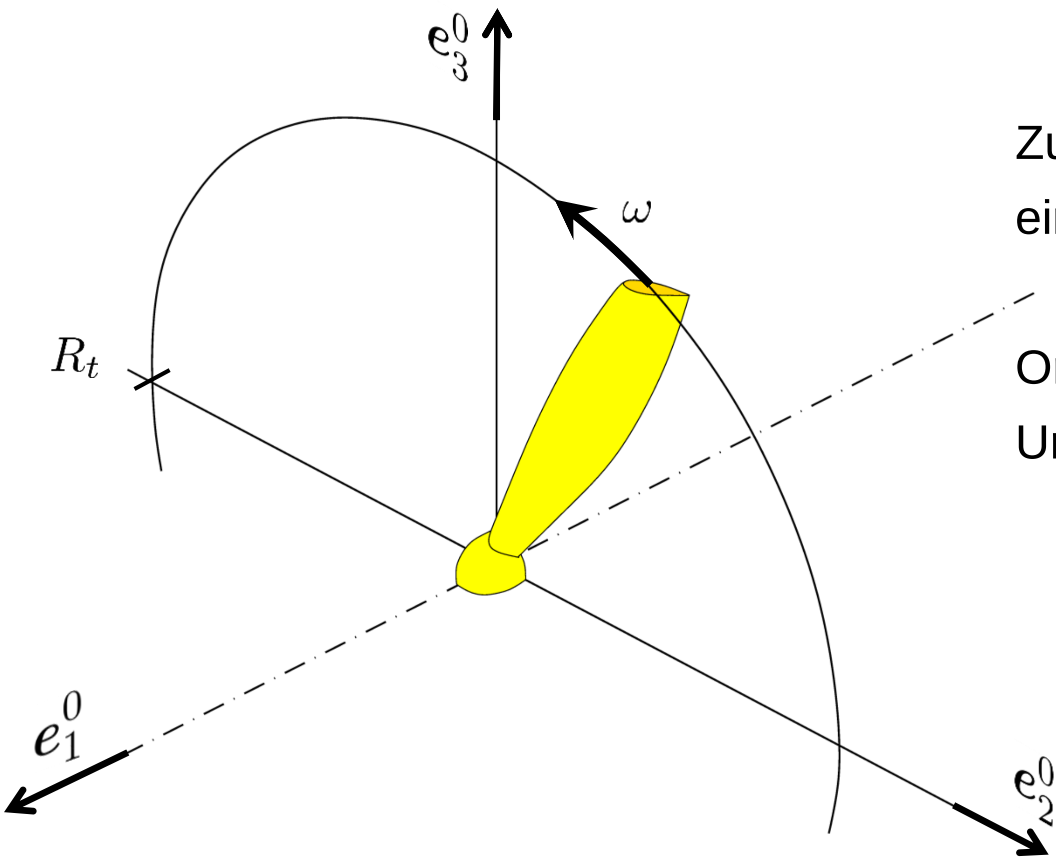
1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?

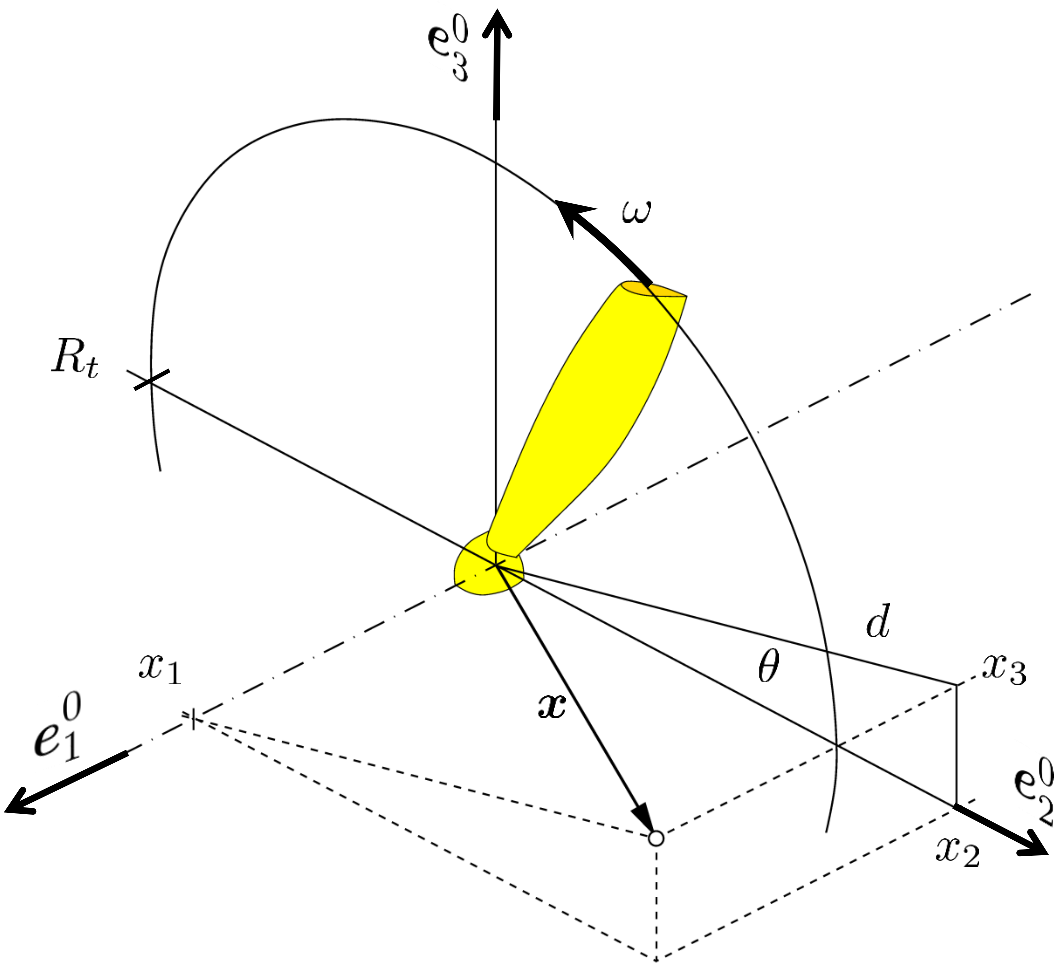


Zunächst Betrachtung eines einzelnen Propellerblatts.

Ortsfestes Koordinatensystem $\boldsymbol{e}_1^0, \boldsymbol{e}_2^0, \boldsymbol{e}_3^0$
Ursprung in Propellerzentrum

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?

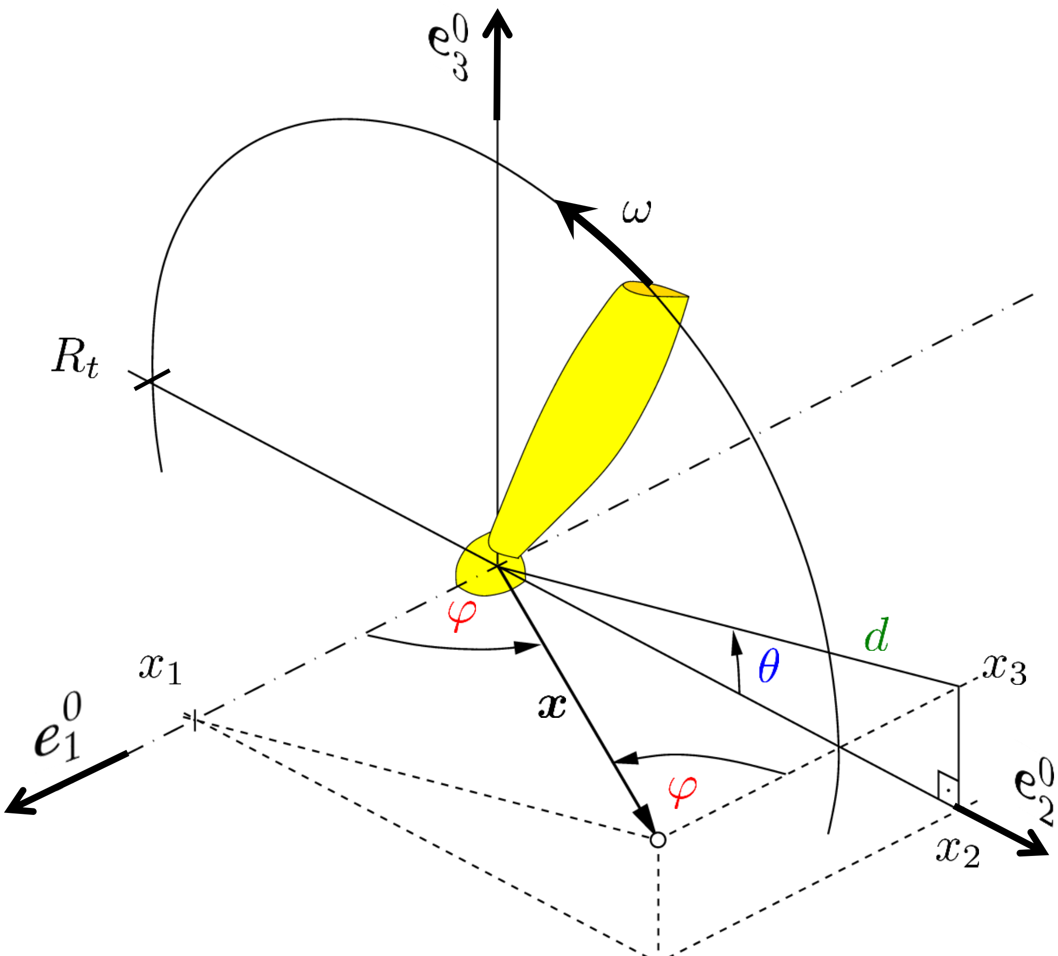


Beschreibung Beobachter in ortsfestem Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1^0 + x_2\boldsymbol{e}_2^0 + x_3\boldsymbol{e}_3^0 \tag{267}$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



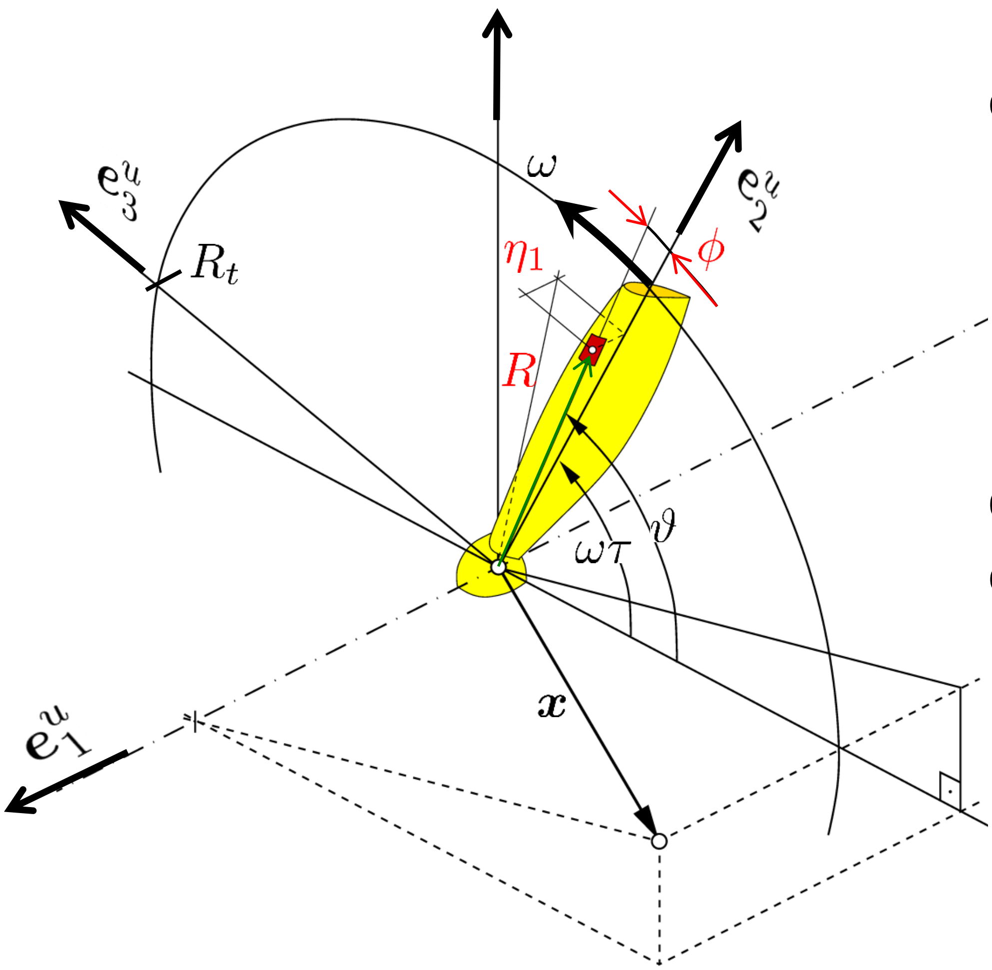
Beschreibung Beobachter in ortsfestem Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1^0 + x_2 \boldsymbol{e}_2^0 + x_3 \boldsymbol{e}_3^0 \tag{267}$$

$$(x_1 = d \cot \varphi)$$
$$x_2 = d \cos \theta$$
$$x_3 = d \sin \theta$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



Beschreibung der Position $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ der Blattoberflächenelemente dS, d.h. Quellpunkte

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1^0 + \xi_2(\tau)\boldsymbol{e}_2^0 + \xi_3(\tau)\boldsymbol{e}_3^0$$

$$dS = dS(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = dS(\xi)$$

Einfacher in mitrotierendem KO-System, da dann Koordinatenwerte und Oberflächenelement (starres Blatt) zeitunabhängig

$$\boldsymbol{\xi} = \eta_1 \boldsymbol{e}_1^u + \eta_2 \boldsymbol{e}_2^u(\tau) + \eta_3 \boldsymbol{e}_3^u(\tau) \tag{268}$$

$$dS = dS(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = dS(\eta)$$

$$\eta_1 = \xi_1$$
$$\eta_2 = R\cos\phi$$
$$\eta_3 = R\sin\phi$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

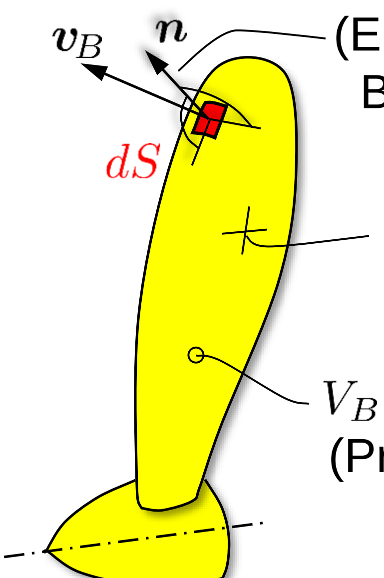
$$H = H(f)$$
$$f < 0 \text{ für } \boldsymbol{\eta} \in V_B$$
$$f > 0 \text{ für } \boldsymbol{\eta} \in V_\infty \backslash V_B$$

$$\begin{aligned} 4\pi a_\infty^2 \rho'(\boldsymbol{x}, t) \quad = \quad & \boxed{\boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\cdot} \int\limits_{V_\infty} \frac{H\boldsymbol{T}}{r|1-M_r|}\, dV(\eta) -} \\ - \quad & \boxed{\boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\cdot} \int\limits_{\partial V_B} \frac{(-\boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{I})\boldsymbol{n}}{r|1-M_r|}\, dS(\eta) +} \\ + \quad & \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\partial V_B} \frac{\rho_\infty \boldsymbol{v}_B \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{n}}{r|1-M_r|}\, dS(\eta)} \end{aligned}$$

Quadrupolschall

Belastungsschall

Verdrängungsschall



Ffowcs-Williams Hawkings Gleichung für starre bewegte Körper (263) (Oberflächenformulierung, d.h. Bilanzfläche = Objektoberfläche)

$$M_r = \boldsymbol{v}_B \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{e}_r / a_\infty$$

$$\boldsymbol{e}_r := \boldsymbol{r}/r = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

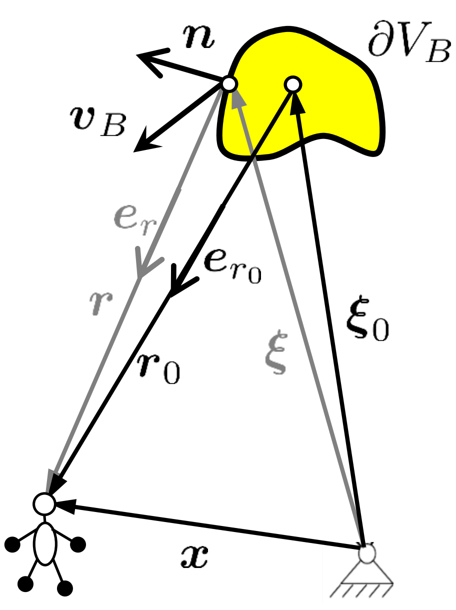
Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \to r_0, \quad \boldsymbol{\nabla}_x \to -\dfrac{1}{a_\infty}\dfrac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial t}$

s. VL Grundlagen Kap:. 4.5

$$
\begin{aligned}
a_\infty^2 \rho'(\boldsymbol{x},t) = p'(\boldsymbol{x},t) \quad &\simeq \quad \frac{1}{4\pi a_\infty^2 r_0}\,\boldsymbol{e}_{r_0}\boldsymbol{e}_{r_0} : \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{V_\infty} \frac{H\boldsymbol{T}}{|1-M_r|}\,dV(\eta) \\
&+ \quad \frac{1}{4\pi a_\infty r_0}\,\boldsymbol{e}_{r_0}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B} \frac{(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{n}}{|1-M_r|}\,dS(\eta) \\
&+ \quad \frac{1}{4\pi r_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B} \frac{\rho_\infty \boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{n}}{|1-M_r|}\,dS(\eta)
\end{aligned}
$$

Isentropie
in Fernfeld



$$\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{\xi},\tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$

!

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

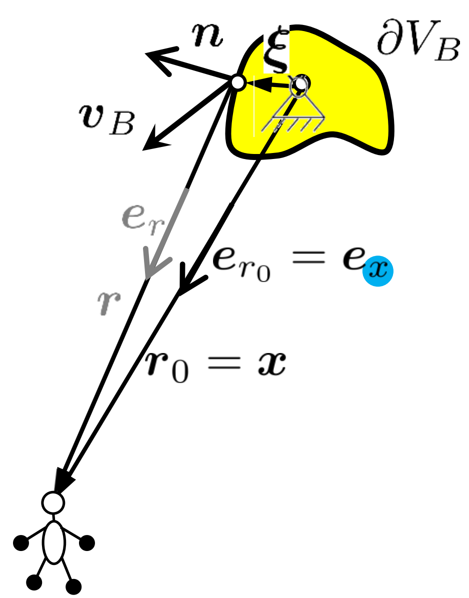
Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \to r_0 = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\nabla}_x \to -\frac{1}{a_\infty}\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{a_\infty}\frac{\boldsymbol{x}}{x}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{a_\infty}\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial t}$

$$
\begin{aligned}
p'(\boldsymbol{x},t) \quad &\simeq \quad \frac{1}{4\pi a_\infty^2 x}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x : \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{V_\infty}\frac{H\boldsymbol{T}}{|1-M_r|}\,dV(\eta) \\
&+ \quad \frac{1}{4\pi a_\infty x}\boldsymbol{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B}\frac{\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{n}}{|1-M_r|}\,dS(\eta) \\
&+ \quad \frac{1}{4\pi x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B}\frac{\rho_\infty\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{n}}{|1-M_r|}\,dS(\eta)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{\xi},\tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

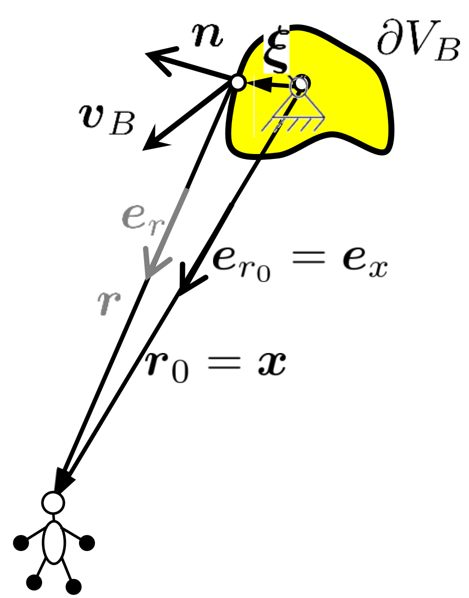
Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \to x, \quad \boldsymbol{\nabla}_x \to -\frac{1}{a_\infty}\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial t}$

$$
\begin{aligned}
p'(\boldsymbol{x},t) \quad \simeq \quad & \frac{1}{4\pi a_\infty^2 x}\,\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{:}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{V_\infty} \cancelto{\simeq 0}{\frac{H\boldsymbol{T}}{|1-M_r|}\, dV(\eta)} \\
+ \quad & \frac{1}{4\pi a_\infty x}\,\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{\cdot}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B} \frac{\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{n}}{|1-M_r|}\, dS(\eta) \\
+ \quad & \frac{1}{4\pi x}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B} \frac{\rho_\infty \boldsymbol{v}_B\boldsymbol{\cdot n}}{|1-M_r|}\, dS(\eta)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{\xi},\tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$



Für subsonische Propeller können die nichtlinearen Terme $\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ aus $\boldsymbol{T}$ vernachlässigt werden; ebenso Entropie+Reibung

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

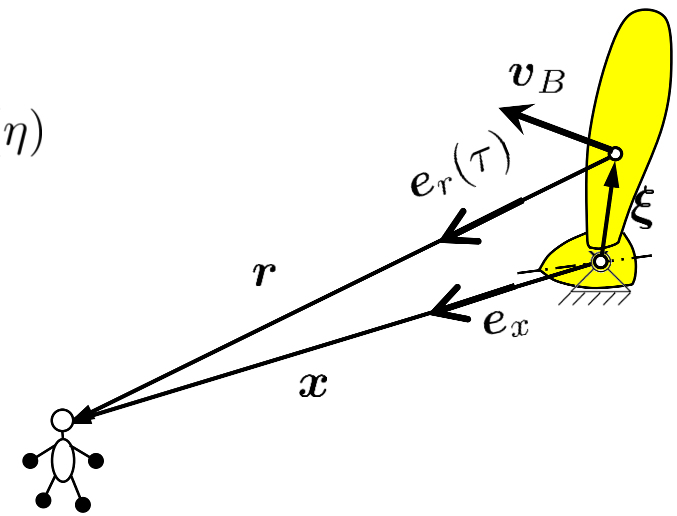
Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \to x, \quad \boldsymbol{\nabla}_x \to -\frac{1}{a_\infty}\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial t}$

$$p'(\boldsymbol{x},t) \simeq \frac{1}{4\pi a_\infty x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial V_B} \frac{\overbrace{\rho_\infty a_\infty \boldsymbol{v}_B\boldsymbol{\cdot n}}^{\text{Verdrängungslärmanteil}} + \overbrace{(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{n})\boldsymbol{\cdot e}_x}^{\text{Belastungslärmanteil}}}{|1-M_r|}\,dS(\eta)$$

$$\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{\xi},\tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$

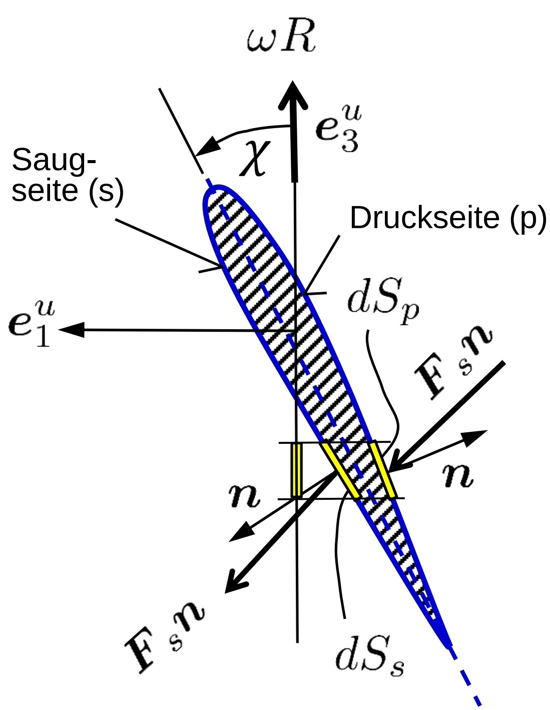


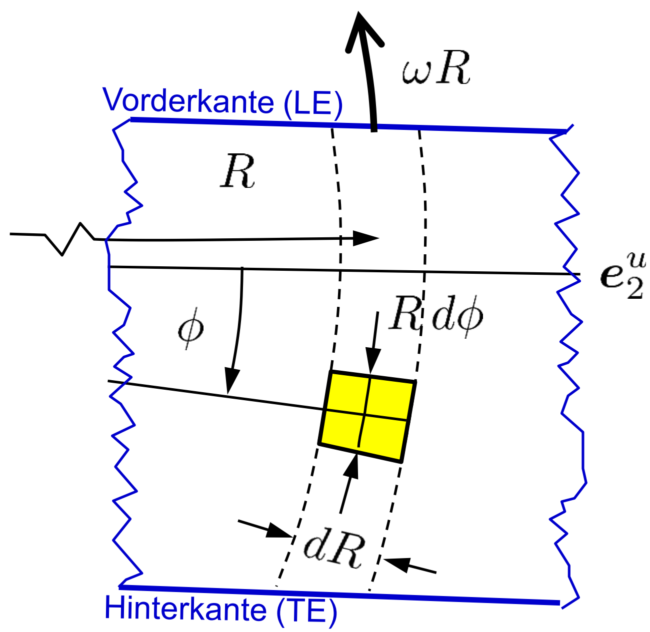
$$\boldsymbol{\xi} = \eta_1\boldsymbol{e}_1^u + \eta_2\boldsymbol{e}_2^u(\tau) + \eta_3\boldsymbol{e}_3^u(\tau)$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Beschreibung Oberflächenintegrale in mitrotierendem kartesischen $(\boldsymbol{e}_1^u, \boldsymbol{e}_2^u, \boldsymbol{e}_3^u)$ bzw. Zylinderkoordinatensystem $(\boldsymbol{e}_R^u, \boldsymbol{e}_\phi^u, \boldsymbol{e}_1^u)$ mit Koordinaten (R, ϕ, η_1) . Beiträge zum Integral von Oberflächenelementen mit identischer Lage (R, ϕ) auf Saug- (s) und Druckseite (p) werden zu resultierender Luftkraft $\boldsymbol{f}_s$ zusammengefasst:

$$\boldsymbol{f}_s(R, \phi) := (\boldsymbol{F}_s \boldsymbol{n})_{R,\phi,\eta_{1s}} + (\boldsymbol{F}_s \boldsymbol{n})_{R,\phi,\eta_{1p}} \qquad (269)$$





$$|\boldsymbol{e}_1^u \cdot \boldsymbol{n}|\, dS = R\, dR\, d\phi$$

$$\Rightarrow dS = |\boldsymbol{e}_1^u \cdot \boldsymbol{n}|^{-1} R\, dR\, d\phi$$

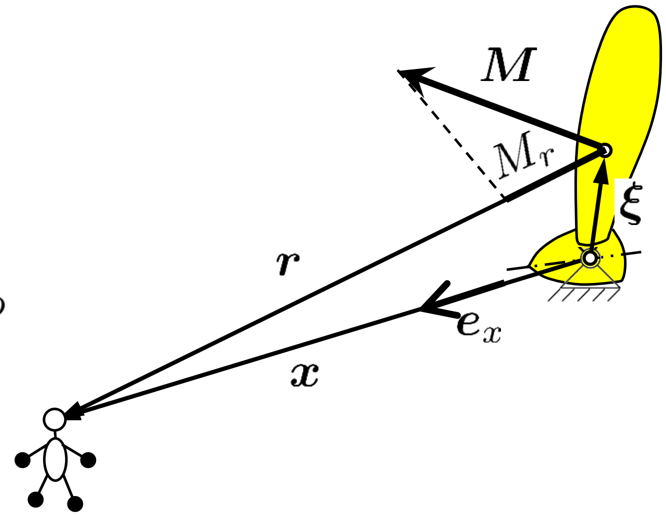
schlankes Profil/Blatt:

$$|\boldsymbol{e}_1^u \cdot \boldsymbol{n}|_s \simeq |\boldsymbol{e}_1^u \cdot \boldsymbol{n}|_p \simeq \cos\chi$$

moderater Einstellwinkel

$$\Rightarrow dS \simeq (\cos\chi)^{-1} R\, dR\, d\phi$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin



Betrachte zunächst nur Belastungslärmanteil p'_L

$$p'_L(\boldsymbol{x},t) \simeq \frac{1}{4\pi a_\infty x}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{R_t}\int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}}\left[\frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{f}_s}{|1-M_r|}\right]_\tau \frac{R}{\cos\chi}\,dR\,d\phi$$

p'_L ist zeitperiodisch mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kann mit Hilfe von Fourierreihe dargestellt werden:

Periodische Funktionen $h'(t) = h'(t+nT), n \in N$ können in harmonische Bestandteile zerlegt werden

$$h'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}_k \exp(ik\omega t) \qquad (270)$$

$$\hat{h}_k = \frac{1}{T}\int_0^T h'(t)\exp(-ik\omega t)\,dt \qquad (271)$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

p'_L muss nach Fourier folgende Form besitzen (270) :

$$p'_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{p}_{Ln} \exp(in\omega t)$$ mit (271): $$\hat{p}_{Ln} = \frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} p'_L(t) \exp(-in\omega t)\, dt$$

eingesetzt:

$$\hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \frac{\boldsymbol{e}_x}{4\pi a_\infty x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} \left[\frac{\boldsymbol{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \frac{R}{\cos\chi} dR\; d\phi \exp(-in\omega t)\, dt$$

$$= \frac{\omega}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t)\, dt \frac{R}{\cos\chi} dR\; d\phi$$

$$= \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} \left[\frac{\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t) \frac{R}{\cos\chi} dR\, d\phi\, dt$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

$$\hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} \left[\frac{\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{f}_s}{|1 - M_r|}\right]_\tau \exp(-in\omega t) \frac{R}{\cos\chi} dR\, d\phi\, dt$$

transformieren nach τ

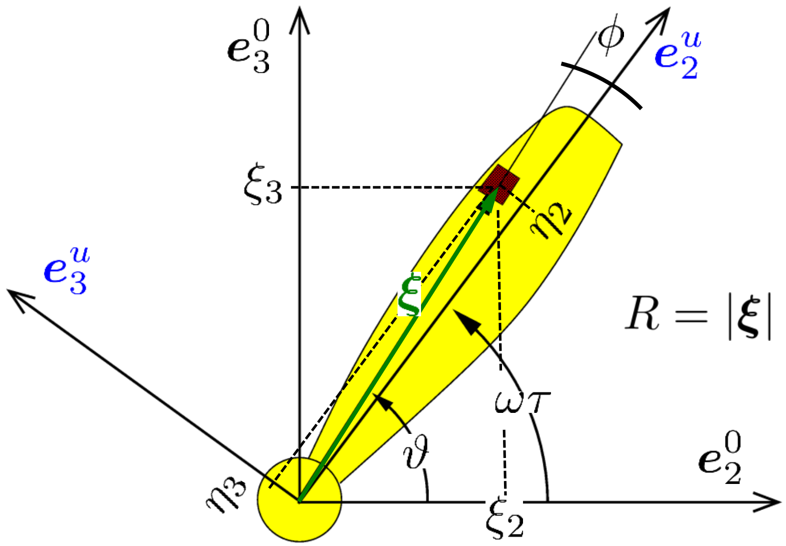
$$t = \tau + r/a_\infty \Rightarrow \qquad \frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{\boldsymbol{u}}{a_\infty} \cdot \boldsymbol{e}_r = 1 - M_r \qquad \Rightarrow dt = (1 - M_r) d\tau$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} [\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{f}_s]_\tau \exp(-in\omega\, t\,) \frac{R}{\cos\chi} dR\, d\phi\, d\tau$$

Beobachterzeit $t = \tau + r/a_\infty$ noch mit Emissionszeit τ ausdrücken
(beachte: es geht um die Zusatzphasenänderung wegen $r = r(\tau)$)

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Im Fernfeld lässt sich der Abstand $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ über $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ explizit als Funktion der Sendezeit τ ausdrücken, denn mit



$$r = x - \underbrace{\frac{\boldsymbol{x}}{x}}_{=\boldsymbol{e}_x}\cdot\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^2}\right):\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi} + \dots$$

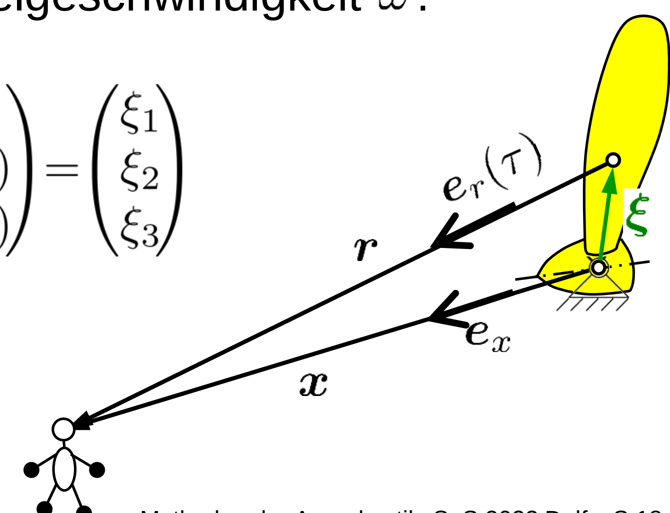
$$\ll |\boldsymbol{\xi}| \qquad \ll x^{-1}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1\boldsymbol{e}_1^0 + \xi_2(\tau)\boldsymbol{e}_2^0 + \xi_3(\tau)\boldsymbol{e}_3^0$$

$$\boldsymbol{\xi} = \eta_1\boldsymbol{e}_1^u + \eta_2\boldsymbol{e}_2^u(\tau) + \eta_3\boldsymbol{e}_3^u(\tau)$$

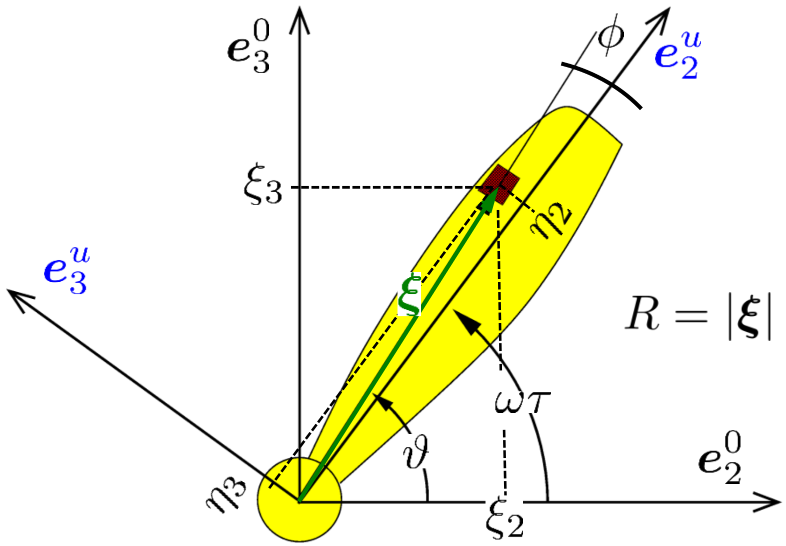
und der Beschreibung der Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ 0 & \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix} \\ \quad\boldsymbol{e}_1^u \quad \boldsymbol{e}_2^u(\tau) \quad \boldsymbol{e}_3^u(\tau)\end{array} \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{e}_1^0 \; \boldsymbol{e}_2^0 \; \boldsymbol{e}_3^0\end{array} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2(\tau)\\ \xi_3(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Im Fernfeld lässt sich der Abstand $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ über $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ explizit als Funktion der Sendezeit τ ausdrücken, denn mit (Taylorreihe von $r(\boldsymbol{\xi})$ um $\boldsymbol{x}$):

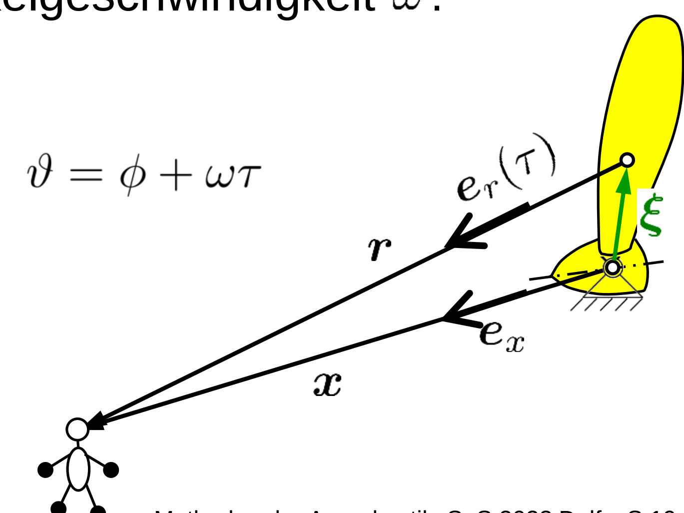


$$r = x - \underbrace{\frac{\boldsymbol{x}}{x}}_{=\boldsymbol{e}_x}\cdot\boldsymbol{\xi} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{x}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^2}\right):\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{\ll|\boldsymbol{\xi}|} + \underbrace{\ldots}_{\ll x^2}$$

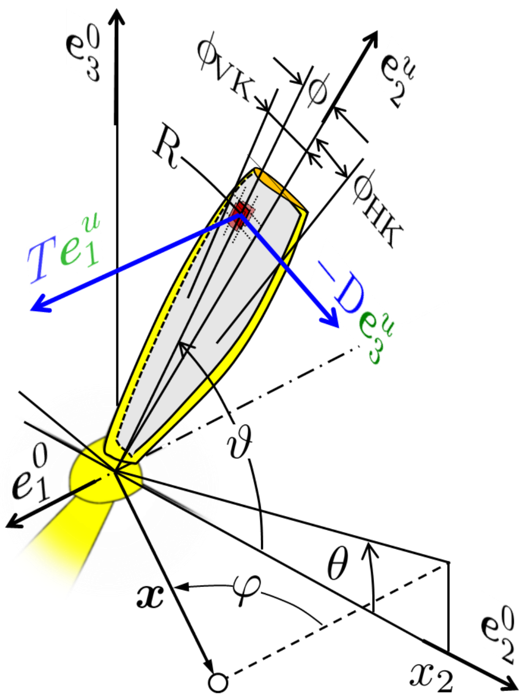
und der Beschreibung der Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ 0 & \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ R\cos\phi \\ R\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \vartheta = \phi + \omega\tau$$

gilt: $r = x - \dfrac{x_1\eta_1}{x} - \dfrac{x_2 R\cos\vartheta}{x} - \dfrac{x_3 R\sin\vartheta}{x} + \ldots$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin



zu lösen:

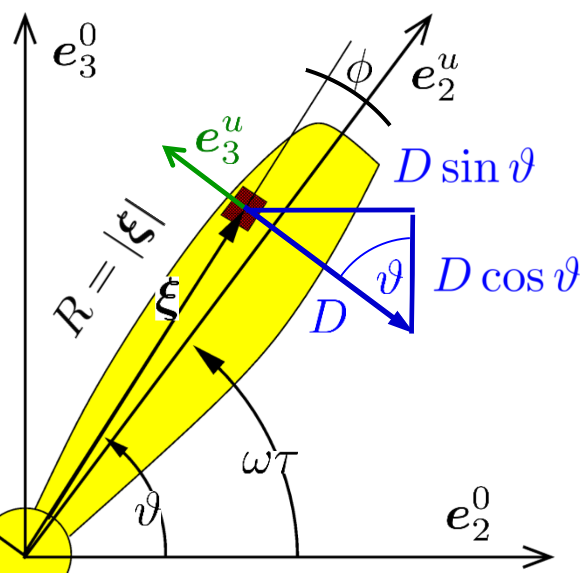
$$\hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x}\int_0^{2\pi/\omega}\int_0^{R_t}\int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} [\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{f}_s]_\tau \exp(-in\omega t)\,\frac{R}{\cos\chi}\,dR\,d\phi\,d\tau$$

beschreibe Beobachterposition $\boldsymbol{x}$ ebenfalls in Zylinder-Ko.
(axiale Ausdehnung des Blatts $\eta_1 \ll d$ vernachlässigbar)

$$t = \tau + r/a_\infty \quad \simeq \tau + \frac{x}{a_\infty} - \frac{d\;R}{x a_\infty}\cos(\vartheta - \theta)$$

$$r = x - \overset{\approx 0}{\cancel{\frac{x_1\eta_1}{x}}} - \frac{\overset{d\cos\theta}{x_2} R\cos\vartheta}{x} - \frac{\overset{d\sin\theta}{x_3} R\sin\vartheta}{x}$$

Außerdem setzen sich die Kräfte $\boldsymbol{f}_s$ vom Blattelement aus Vortrieb T und Widerstand D zusammen:



$$\boldsymbol{f}_s = -T\boldsymbol{e}_1^u + D\boldsymbol{e}_3^u \quad = -T\boldsymbol{e}_1^0 - D\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_2^0 + D\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_3^0$$

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{f}_s = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}_s}{x} = -T\frac{x_1}{x} - D\sin\vartheta\frac{\overset{d\cos\theta}{x_2}}{x} + D\cos\vartheta\frac{\overset{d\sin\theta}{x_3}}{x}$$

$$= -\left(\frac{x_1}{x}T + \frac{d}{x}D\sin(\vartheta - \theta)\right) \qquad (272)$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

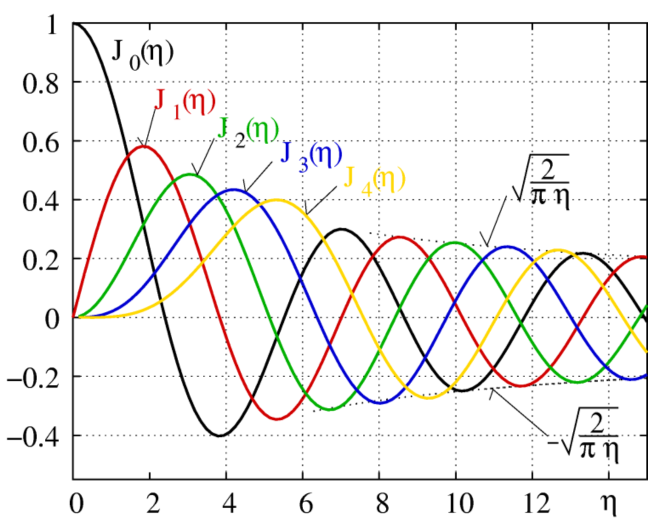
$$\Rightarrow \hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{-in\omega^2 e^{-in\omega x/a_\infty}}{8\pi^2 a_\infty x^2} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} [x_1 T + dD \sin(\vartheta - \theta)] \times$$
$$\times \exp\left(-in\omega\left[\tau - \frac{dR}{xa_\infty} \cos\underbrace{(\vartheta - \theta)}_{\omega\tau + \phi - \theta =: \alpha}\right]\right) \frac{R}{\cos\chi} dR\, d\phi\, d\tau \qquad (273)$$

Zeitintegral exakt lösbar mit:

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(-i[n\alpha - s\cos\alpha]\right) d\alpha = 2\pi e^{in\pi/2} J_n(s) \qquad (274)$$

$$s := \frac{n\,\omega\, d\, R}{x a_\infty}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(-i[n\alpha - s\cos\alpha]\right) \sin\alpha\, d\alpha = -\frac{2\pi n}{s} e^{in\pi/2} J_n(s) \qquad (275)$$

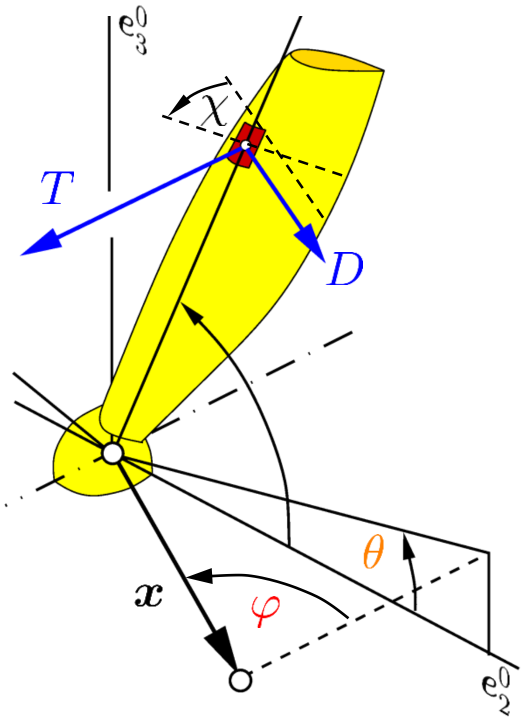


Besselfunktion 1.Art n-ter Ordnung

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Die Amplitude der n‘ten Harmonischen eines Einblattpropellers, der mit der Kreisfrequenz ω dreht, ist also:

$$\hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi a_\infty x}\int_0^{R_t}\int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}}[T\cos\varphi - D/M]\, J_n(nM\sin\varphi)e^{in\phi}\frac{R}{\cos\chi}dR\,d\phi$$



Hierbei ist φ der Polarwinkel zwischen Beobachtungsrichtung und Achsrichtung und $M=\omega R/a_\infty$ die lokale Umfangsmachzahl des Propellerelements bei R,φ

<u>Beachte</u>: die negativen Ordnungen n sind tatsächlich konjugiert komplex zu den positiven $\hat{p}_{L(-n)} = \overline{\hat{p}}_{Ln}$, denn $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ und $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ sowie: $\overline{\hat{z}_1\hat{z}_2} = \overline{\hat{z}}_1\overline{\hat{z}}_2$

Wie sieht das Signal bei B gleichartigen, gleichmäßig über Umfang verteilten Blättern aus?

$\Rightarrow$ Summe über alle Blätter, je versehen mit entsprechendem Phasenunterschied in θ :

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

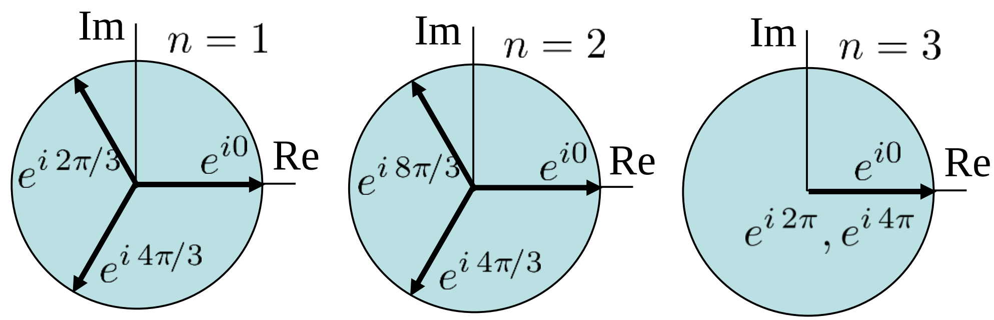
$$\hat{p}_{Ln}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{b=1}^{B} \frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi a_\infty x} \int_0^{R_t}\int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} \left[T(\phi+\frac{2\pi(b-1)}{B})\cos\varphi - D(\phi+\frac{2\pi(b-1)}{B})/M\right]$$

$$\times\ J_n(nM\sin\varphi)\ e^{in(\phi+2\pi(b-1)/B)}\,\frac{R}{\cos\chi}\,dR\,d\phi$$

$$\simeq \sum_{b=1}^{B} \exp\left(in\frac{2\pi(b-1)}{B}\right)$$

$$\times\frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi a_\infty x} \int_0^{R_t}\int_{\phi_{\mathrm{TE}}}^{\phi_{\mathrm{LE}}} [T\cos\varphi - D/M]\ \ J_n(nM\sin\varphi)e^{in\phi}\,\frac{R}{\cos\chi}\,dR\,d\phi$$

$$= \begin{cases} B & \text{für} \quad n = B, 2B, 3B, 4B, \ldots \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \text{sonst Auslöschung!} \end{cases}$$



$\underbrace{\hspace{10em}}$

Beispiel 3-Blatt Propeller, B=3

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Verallgemeinerung auf Propeller mit B gleichmäßig um den Umfang verteilten Blättern: ersetze n durch nB (Periodizitätsänderung). Wird der Dickenlärmanteil analog wie der Belastungslärmanteil berechnet und dazu addiert ist schließlich

$$\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times \tag{276}$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \Big[\underbrace{R_t T \cos\varphi - R_t \frac{D}{M}}_{\text{Belastung}} + \underbrace{inBM_t \rho_\infty a_\infty^2 h}_{\text{Dicke}}\Big] \; J_{nB}(nBM_t R^* \sin\varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos\chi} dR^* \, d\phi$$

$R^* = R/R_t$ (Blattradius R_t)

$h(R^*, \phi)$ - Dickenverteilung des Blattes

$M_t = \dfrac{\omega R_t}{a_\infty}$ - Blattspitzenmachzahl

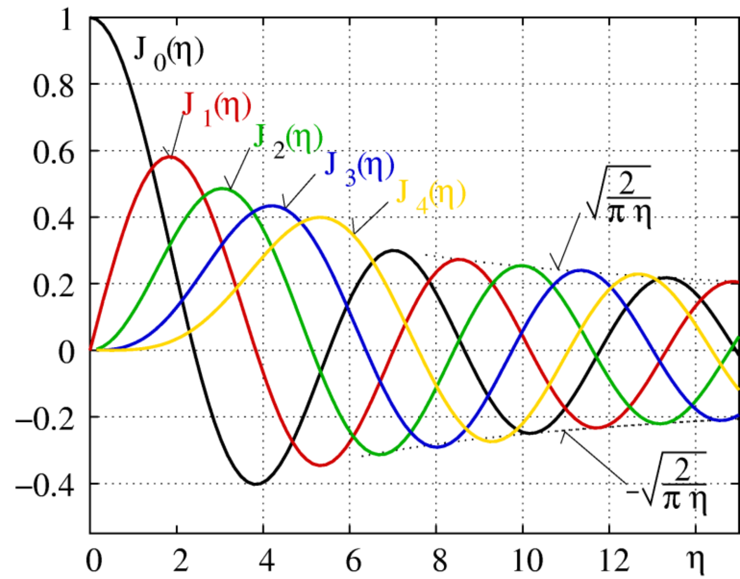
$M = \dfrac{\omega R}{a_\infty}$ - Machzahl bei R

$\cos\chi \simeq 1$ - Einstellwinkel Blattschnitt

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Dickenlärm $\sim \omega\,(nB)$: nur bei hohen Drehzahlen und Harmonischen wichtig, bei kleinen Drehzahlen, wo Blattspitzenmachzahl $M_t < 0.8$, vernachlässigbar



Quellregion

beachte: $J_m(z) \approx \dfrac{z^m}{2^m m!}$ für $0 < z < m$

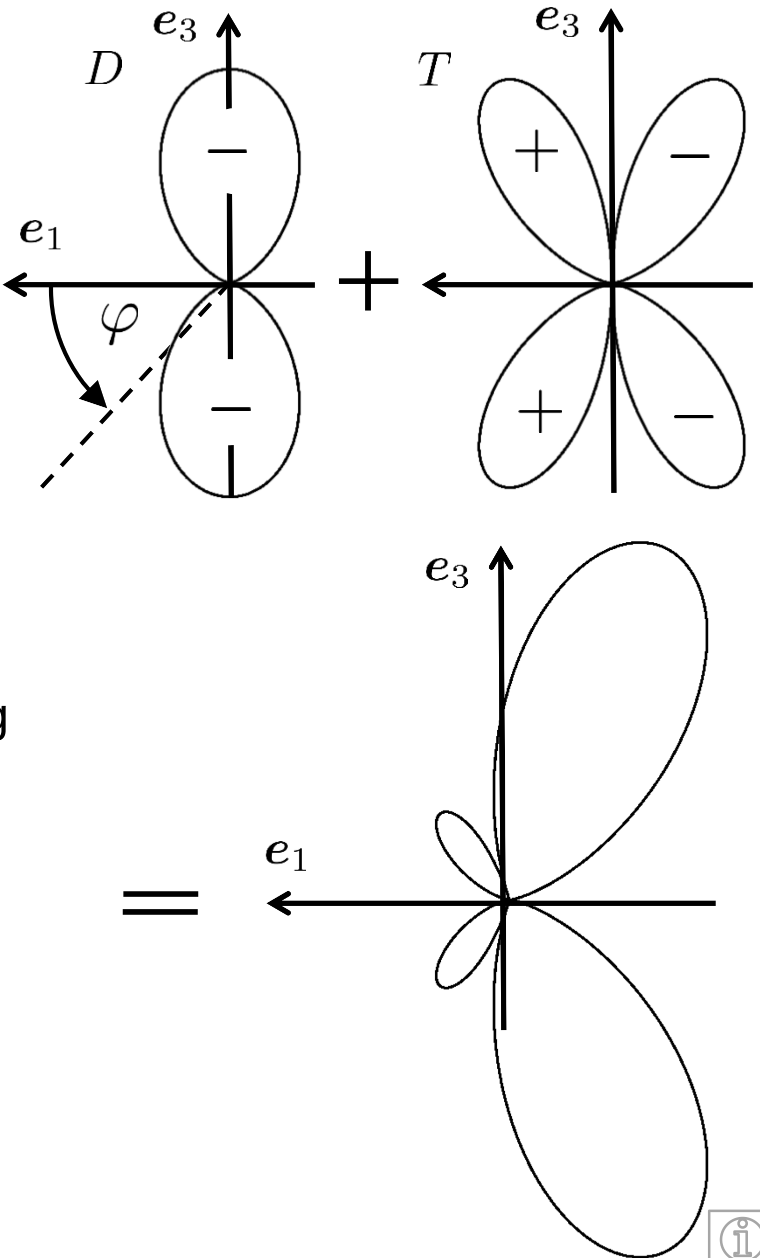
für subsonische Props ist $M < 1$, außerdem $\sin\varphi < 1$, so dass Argument in Besselfunktion $nBM_tR^* \sin\varphi < nB$

$$J_{nB}(nBM_tR^* \sin\varphi) \approx \frac{1}{2^{nB}(nB)!}\left(nBM_t \sin\varphi\right)^{nB} R^{*nB}$$

wichtigster Quellbereich Blattspitze, $R^* \approx 1$

(ganz besonders für höhere Harmonische)

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin



<u>Interpretation</u>

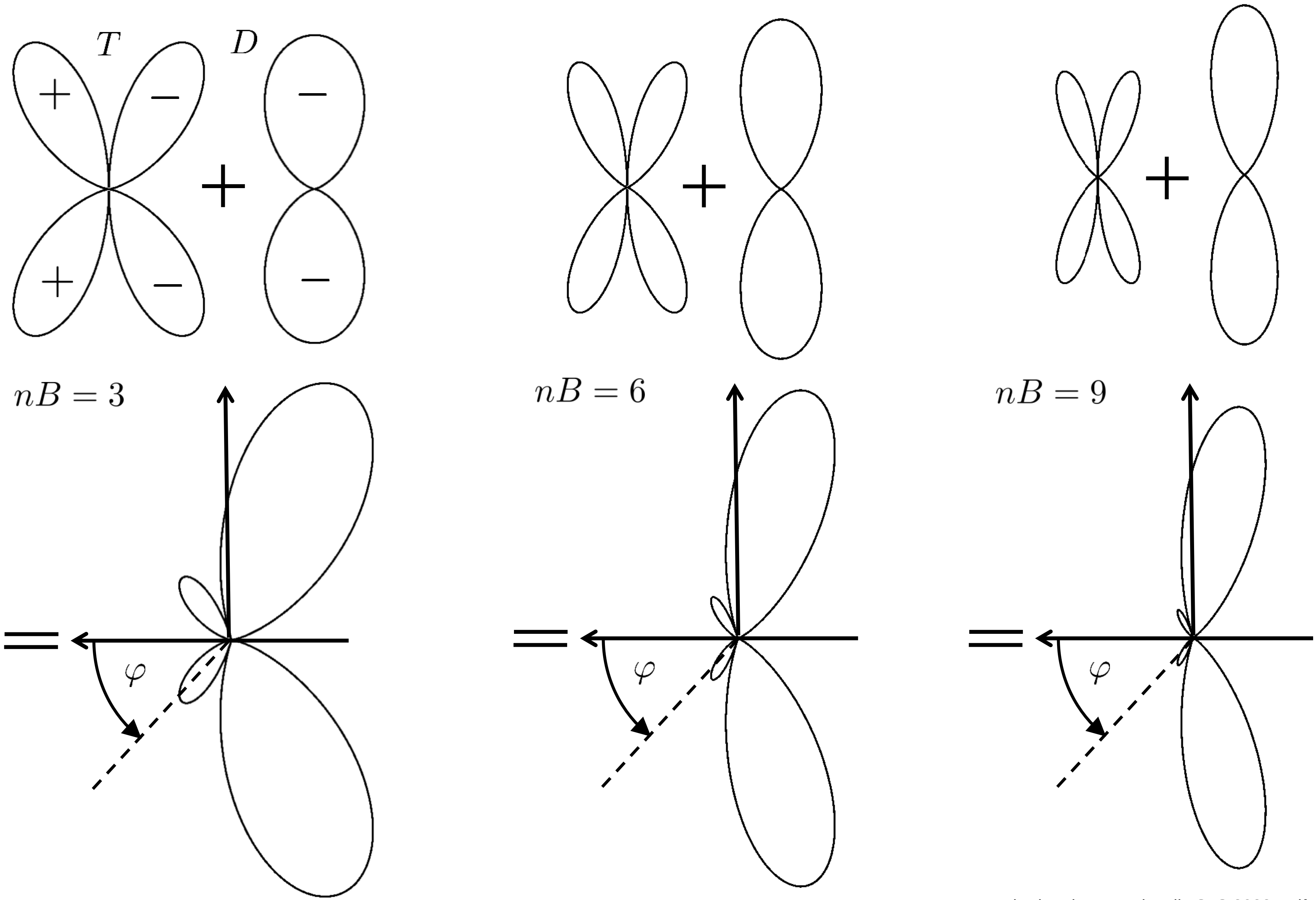
Richtwirkung:

Schubanteil (T) $\cos\varphi(\sin\varphi)^{nB}$

Widerstandsanteil (D) $-(\sin\varphi)^{nB}$

- keine Abstrahlung in oder gegen Flugrichtung
- Maximalabstrahlung etwas in Abstromrichtung geneigt, im wesentlichen in Propellerebene
- Abstrahlungskeulen schmaler je höher Harmonische (Frequenz)
- Dickenlärm hat gleiche Charakterisitik wie Widerstandsanteil

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

$$\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[R_t T \cos\varphi - R_t \frac{D}{M} + inBM_t \rho_\infty a_\infty^2 h\right] J_{nB}(nBM_t R^* \sin\varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos\chi} dR^*\, d\phi$$

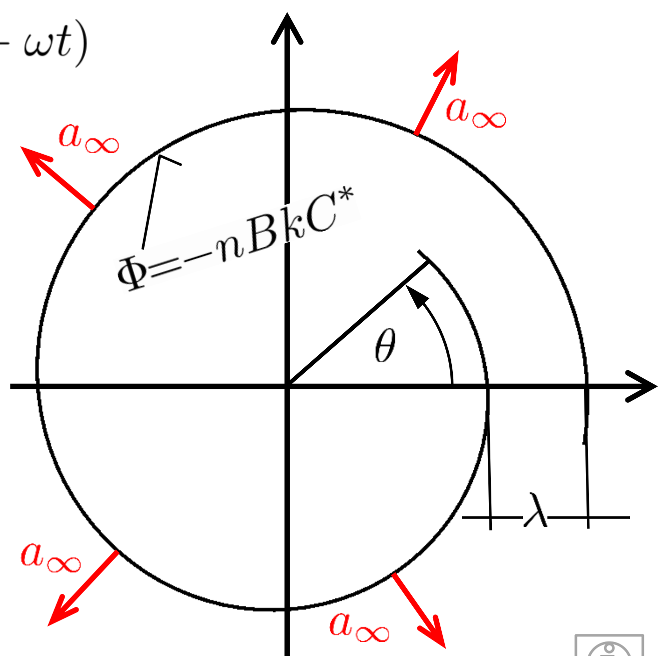
Phasenlage (alles Fernfeld):

Phase(nfunktion): $\Phi(\boldsymbol{x}, t) := -nB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2 - \omega t)$

Momentanbild einer Phasenfläche (Wellenfront), d.h.

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) := -nB(kx + \theta) = \text{const} =: -nBkC^*$$

$$\Rightarrow x = C^* - \theta/k = C^* - \lambda \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{(Spirale)}$$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

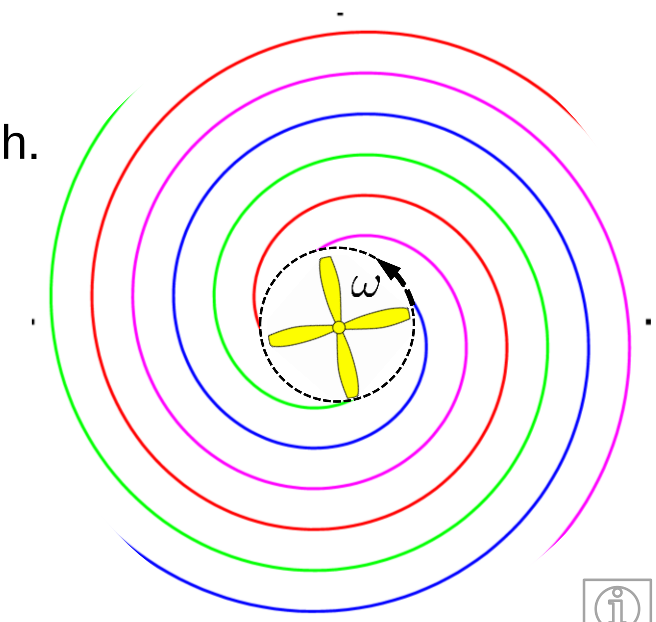
Interpretation

$$\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi x} \times$$
$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[R_t T\cos\varphi - R_t \frac{D}{M} + inBM_t\rho_\infty a_\infty^2 h\right] J_{nB}(nBM_t R^* \sin\varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos\chi} dR^*\, d\phi$$

Phasenlage (alles Fernfeld):

Phase(nfunktion) $\Phi(\boldsymbol{x},t) := -nB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2 - \omega t)$

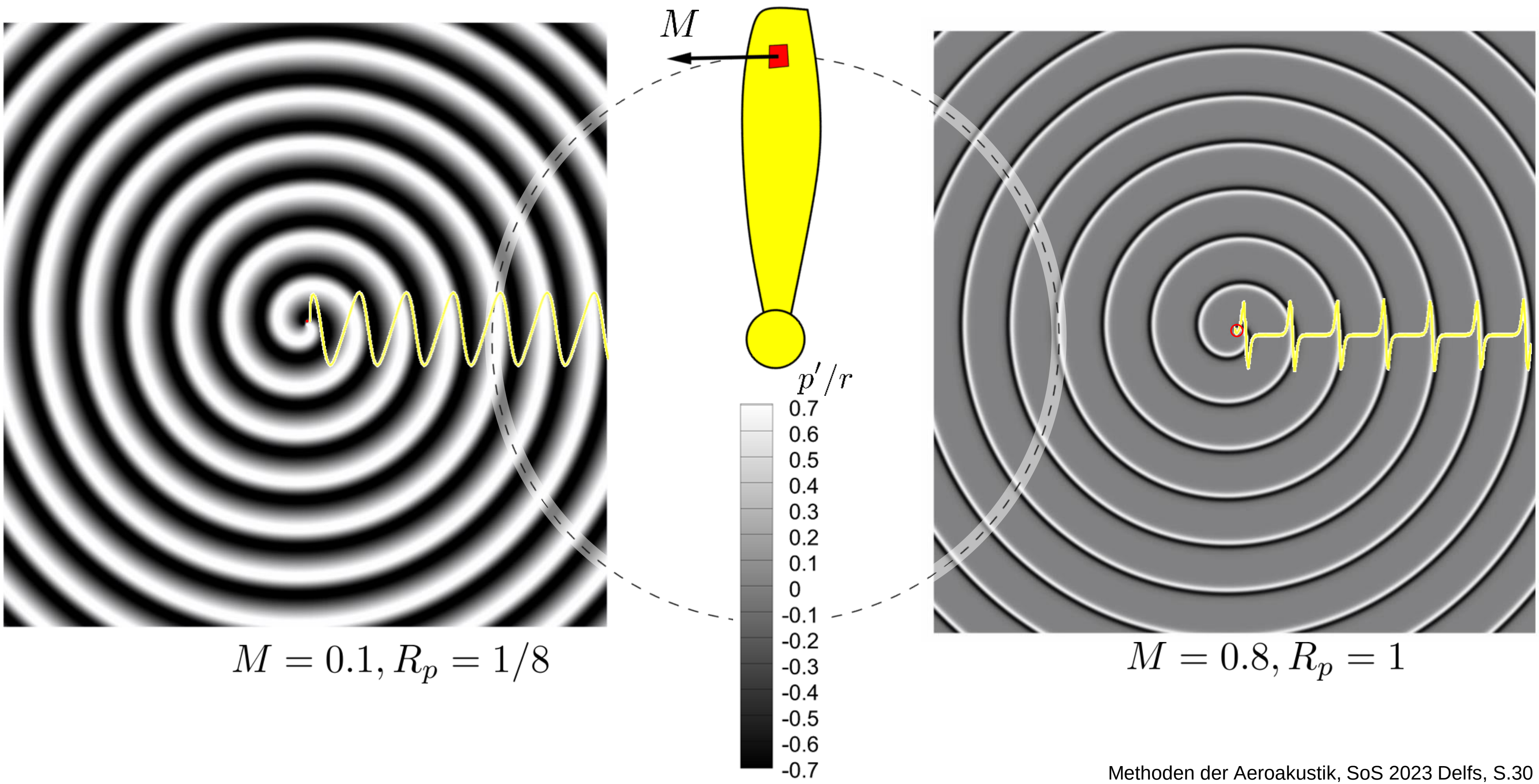
Während eines Umlaufs $\theta = 0 \to 2\pi$ entstehen bei festem x und t nB äquivalente Phasenlagen, d.h. die n'te Harmonische produziert nB-fach mehrgängige Spirale $\Phi \sim nB\,\theta$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Animation für Druckfeld (Einblattpropeller, nur Verdrängungsgeräusch, repräsentiert durch Punktmassenquelle, Rotationsebene)



$M = 0.1, R_p = 1/8$

$M = 0.8, R_p = 1$

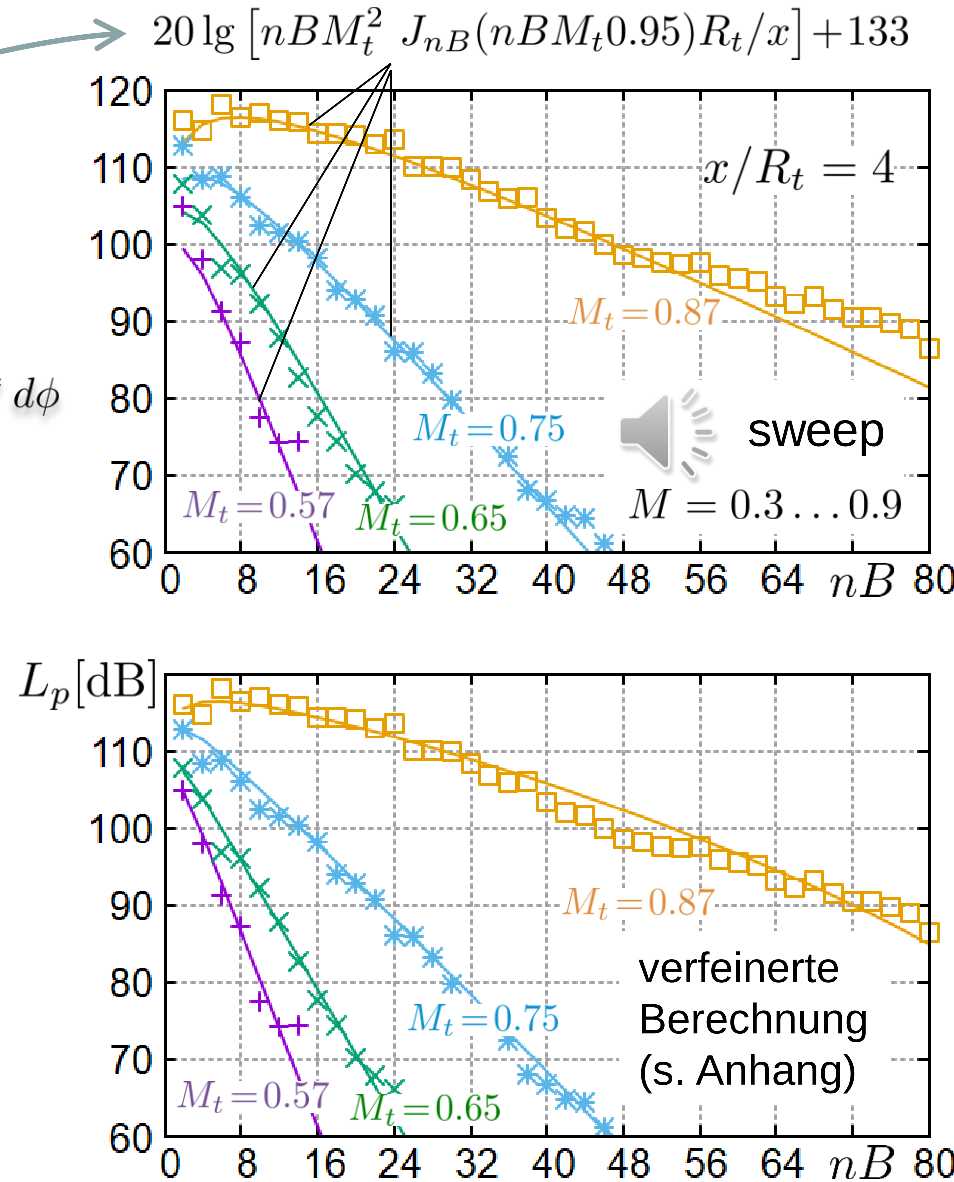
1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

<u>Interpretation</u>

Spektralgehalt

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow$$

$$|\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x})| \simeq \frac{nBM_t}{x} \int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} R_t \frac{D}{M} J_{nB}(nBM_t R^*) R^* dR^* \, d\phi$$



- bei kleinen Blattspitzenmachzahlen fallen Amplituden stark mit Harmonischenordnung ab
- bei hohen (subsonischen) Mach-zahlen fallen Amplituden nur schwach mit Ordnung; bei sehr hohen subsonischen M_t können Amplituden zunächst mit Ordnung ansteigen

Symbole: Messung

W. Dobrzynski, H. Heller, J. Powers, and J. Densmore, DFVLR-IB 129-86/3, FAA Report No. AEE 86-3, DLR / FAA, 1986.

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

schätze (276) ab (Größenordnungen) mit

$$\boxed{J_{nB}(nBM_tR^*\sin\varphi)} \approx \frac{(nBM_t\sin\varphi)^{nB}}{2^{nB}(nB)!}R^{*nB}$$

Winkelabhängigkeit interessiere nicht und nur Bereich $R^* \approx 1$ wichtig, dann ist

$$|\hat{p}_{nB}| \sim \frac{(nBM_t)^{nB+1}}{2^{nB}(nB)!}\frac{1}{R_t}(BTR_t^2) \qquad (*)$$

wobei nur Belastungsterm betrachtet wurde und T repräsentativ für spezif. Kräfte am Blatt steht.

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{inB^2M_te^{-inB(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi x}\times \qquad (276)\\ \int_0^1\int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)}\left[R_tT\cos\varphi - R_t\frac{D}{M} + inBM_t\rho_\infty a_\infty^2 h\right]J_{nB}(nBM_tR^*\sin\varphi)e^{inB\phi}\frac{R^*}{\cos\chi}dR^*d\phi\end{aligned}}$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

<u>Interpretation</u>

Schallminderungsmöglichkeiten

- Blattzahleffekt (Hörbeispiel: 2-, 3-, 4-Blatt)
  - Erhöhung Blattzahl B

$$\left.\begin{array}{ll}\text{- gleicher Radius} & R_t\\ \text{- gleiche Drehzahl} & \omega\end{array}\right\} M_t = \text{const}$$

  - gleicher Gesamtschub $\Rightarrow BT = \text{const}: \quad B\uparrow \Rightarrow T\downarrow$

  $\Rightarrow$ (*): Harmonische mit erhöhtem Frequenzabstand (weniger Harmonische im hörbaren Bereich), allerdings keine Amplitudenminderung

  $\Rightarrow$ hauptsächlich Frequenzverschiebungseffekt bei Höreindruck; wenig Gesamtminderungserfolg

- Blattspitzenmachzahleffekt (Hörbeispiel: 2-, 3-, 4-Blatt)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{- gleiche Drehzahl} & \omega\\ \text{- gleicher Gesamtschub} & BTR_t^2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_{t2}}{R_{t1}} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

  - gleiche spez. Blattbelastung T^*
  - Reduzierung Blattradius bei Erhöhung Blattzahl

*) für einen idealen Propeller (hier angenommen): $T \neq T(R)$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

- Blattspitzenmachzahleffekt (Hörbeispiel) …

$\Rightarrow$ Harmonische mit erhöhtem Frequenzabstand (weniger Harmonische in hörbarem Bereich); außerdem

$$R_{t2} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} R_{t1} < R_{t1} \Rightarrow M_{t2} < M_{t1}$$

Da $|\hat{p}_{nB}| \sim \dfrac{M_t^{nB+1}}{R_t} \sim M_t^{nB}$ wird Amplitude stark gemindert!

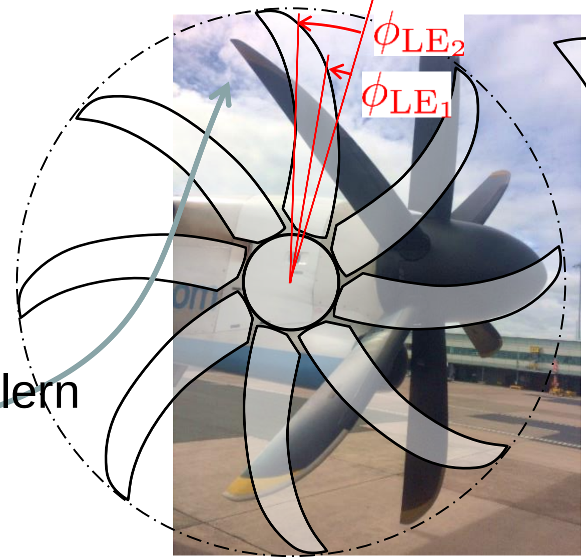
$\Rightarrow$ Verkleinerung des Blattradius‘ bei Erhöhung Blattzahl ergibt (über Reduzierung von M_t) starke Schallminderung

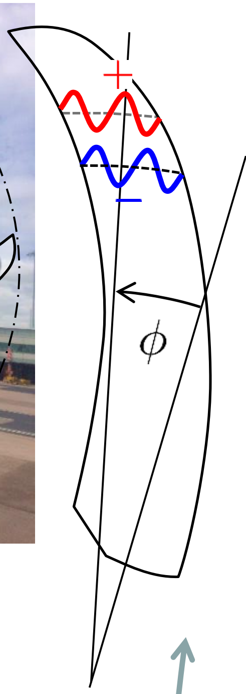
$\Rightarrow$ Radius R_t kann bei zusätzlicher Erhöhung der Blattbelastung unter Beibehaltung des Gesamtschubs weiter reduziert werden!

$\Rightarrow$ Problem: Maßnahmen erzeugen aerodynamisch höhere Verluste. Leistungsbedarf $P \sim U_s(\rho U_s^2 R_t^2)$ mit selbem Schub $\rho U_{s2}^2 R_{t2}^2 = \rho U_{s1}^2 R_{t1}^2$ $P_2/P_1 = U_{s2}/U_{s1} = R_{t1}/R_{t2} = \sqrt{B_2/B_1} > 1$, d.h. es handelt sich um ein multidisziplinäres Entwurfsproblem (Aerodynamik/Akustik).

U_s - mittlere Querschnittsgeschwindigkeit in Prop-Abstrom

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin





Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

- Maßnahmen bei Hochgeschwindigkeits-Propellern

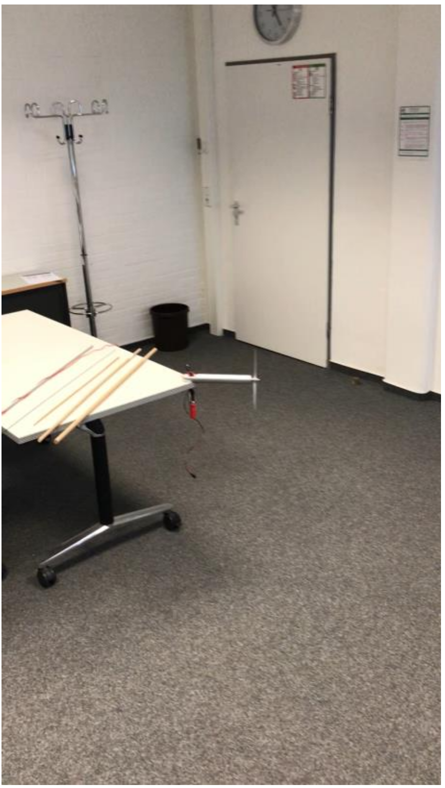
  ⇒ geringe Blattdicke
  * reduziert Verdrängungsschall
  * reduziert Quadrupolschall aus lokalen Überschallgebieten am Blatt

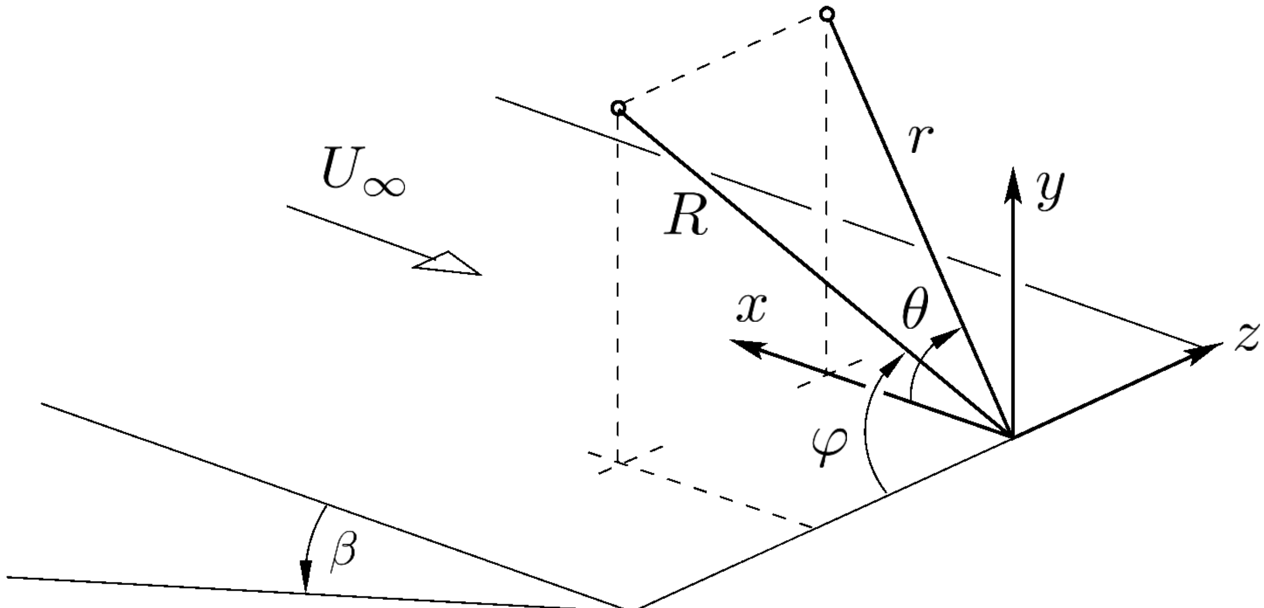
  ⇒ Blattsichelung
  * reduziert, weil Beitrag von jedem Blattsegment bei unterschiedlichen
    - Sendzeitpunkten ausgesandt wird: keine steilen Signalflanken
    - bzw.(äquivalent): Phasenlagen (stark bei hohen Harmonischen n)
  * Sichelung vermindert Stoß (vgl. Aerodynamik gepfeiler Flügel)

$$\hat{p}_{nB}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty+\theta-\pi/2)}}{4\pi x} \times \int_0^1 \int_{\boxed{\phi_{TE}(R^*)}}^{\boxed{\phi_{LE}(R^*)}} \left[R_t T\cos\varphi - R_t\frac{D}{M} + inBM_t\rho_\infty a_\infty^2 \boxed{h}\right] J_{nB}(nBM_t R^* \sin\varphi)\boxed{e^{inB\phi}}\frac{R^*}{\cos\chi}\,dR^*\,d\phi \qquad (276)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

Aufgabe: Turbulent überströmte Kante, Geschwindigkeit U_∞, Keilwinkel β
Schall ?





Ansatz:

Lösung über Lighthill-Analogiegleichung in Druckformulierung (248)

$= s' \approx 0$ (kalte Strömung)

$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \cancel{\boldsymbol{\tau}}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cancel{\left(\frac{1}{a_\infty^2}p' - \rho'\right)}$$

Reibung vernachlässigt

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

Dazu treten die Randbedingungen an der Platte: Annahme schallhart:

$$\left.\frac{\partial p'}{\partial n}\right|_{wand} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial p'}{\partial \theta}\right|_{\theta=0,2\pi-\beta} = 0$$

Problem: zur Erfüllung der Randbedingungen wird exakte (maßgeschneiderte) Green‘sche Funktion G benötigt mit $\left.\frac{\partial G}{\partial \theta}\right|_{\theta=0,2\pi-\beta} = 0$ denn damit wäre

$$p'(\boldsymbol{x},t) = \int\int G\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\,dV\,dt$$

G allerdings nicht allgemein verfügbar!* $\Rightarrow$?

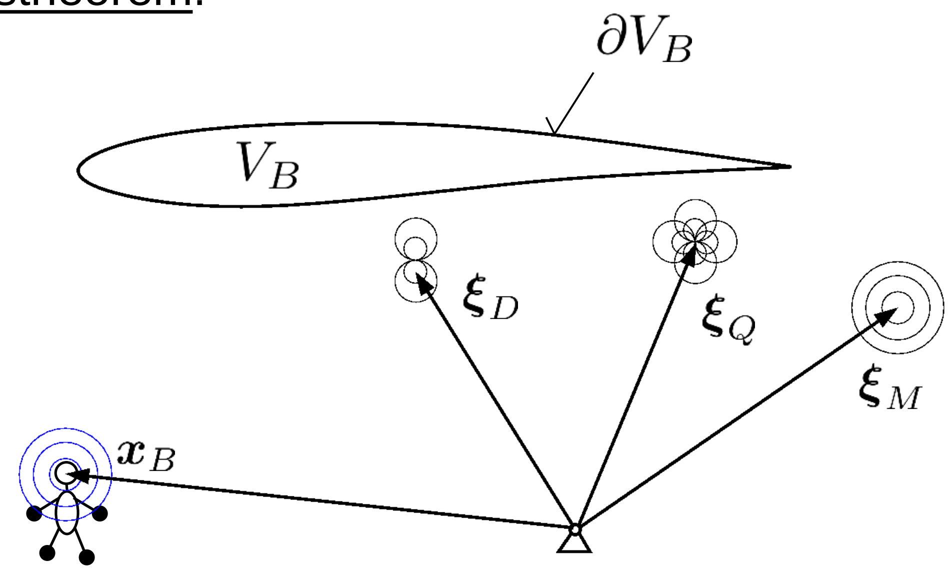
<u>2 alternative Lösungswege</u>: 1: Reziprozitätstheorem,

2: Methode der angepassten asympt. Entwicklung

*(für $\beta = 0$: Mac Donald, 1915, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 14, 410-427)

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1)

Lösungsabschätzung über Reziprozitätstheorem:



Einschub: Reziprozitätstheorem (1)

Betrachte inhomogene Helmholtz gleichung für Geschw. Potenzial $\hat{\phi}$:

$$k^2\hat{\phi} + \Delta\hat{\phi} = -\hat{Q}_\phi$$

mit Schallschnelle $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}$

und Schalldruck $\hat{p} = -i\omega\rho_\infty\hat{\phi}$

* $\hat{\phi}_A$ sei akustisches Feld für Monopol bei $\boldsymbol{\xi}_M$ mit Stärke $\boldsymbol{M}$, Dipol bei $\boldsymbol{\xi}_D$ mit Stärke $\hat{\boldsymbol{f}}$ und Quadrupol bei $\boldsymbol{\xi}_Q$ mit Stärke $\hat{\boldsymbol{T}}_0$, erfüllt also:

$$k^2\hat{\phi}_A + \Delta\hat{\phi}_A = -\hat{M}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_M) - \hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_D) - \hat{\boldsymbol{T}}_0 : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_Q) \qquad (277)$$

* $\hat{\phi}_B$ sei akustisches Feld für Monopol bei $\boldsymbol{x}_B$ mit Stärke 1, erfüllt also:

$$k^2\hat{\phi}_B + \Delta\hat{\phi}_B = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_B) \qquad (278)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (2)

* Beide Felder (A,B) erfüllen die Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V_B irgendwelcher Objekte V_B also: $\hat{z} \cdot \dfrac{\partial \hat{\phi}_{A,B}}{\partial n} = \hat{\phi}_{A,B}$

* Bilde $\hat{\phi}_B \cdot (277) - \hat{\phi}_A \cdot (278)$:

$$\underbrace{\hat{\phi}_B \Delta \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \Delta \hat{\phi}_B}_{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\phi}_B \boldsymbol{\nabla} \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \boldsymbol{\nabla} \hat{\phi}_B)} = -\hat{\phi}_B \hat{M} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_M) - \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_D) - \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) + \hat{\phi}_A \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B)$$

* Integriere über gesamtes Volumen $V_\infty \setminus V_B$:

$$\int \boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\phi}_B \boldsymbol{\nabla} \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \boldsymbol{\nabla} \hat{\phi}_B) \, dV =$$

$$= \int -\hat{\phi}_B \hat{M} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_M) - \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_D) - \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) + \hat{\phi}_A \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B) \, dV$$

$$= -\hat{M} \hat{\phi}_B(\boldsymbol{\xi}_M) - \int \hat{\phi}_B \, \hat{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_D) + \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) \, dV + \hat{\phi}_A(\boldsymbol{x}_B)$$

1.1.1.2 **Schallerzeugung an Kanten** (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (3)

$$\underbrace{\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)\, dV}_{= \int_{\partial V_B} \underbrace{\hat{\phi}_B \frac{\partial \hat{\phi}_A}{\partial n} - \hat{\phi}_A \frac{\partial \hat{\phi}_B}{\partial n}}_{=0 \text{ (Rbn.)}} dS} = -\hat{M}\hat{\phi}_B(\boldsymbol{\xi}_M) + \hat{\phi}_A(\boldsymbol{x}_B) - \boxed{\int_V \hat{\phi}_B\ \hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_D)\, dV} + \boxed{-\int_V \hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_Q)\, dV}$$

$$= \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{\nabla}\delta) - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0)\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\, dV = \cancelto{0}{\int_{\partial V} \hat{\phi}_B (\hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{\nabla}\delta)\cdot\boldsymbol{n} dS} - \underbrace{\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 \delta)\, dV}_{\cancelto{0}{\int_{\partial V} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0 \delta)\cdot\boldsymbol{n} dS}}$$

$$+ \underbrace{\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\phi}_B \hat{\boldsymbol{T}}_0)\delta\, dV}_{(\hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)(\boldsymbol{\xi}_Q)}$$

$$= \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\hat{\boldsymbol{f}}\hat{\phi}_B \delta) - (\hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)\delta\, dV = \cancelto{0}{\int_{\partial V} \hat{\phi}_B \delta \hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{n} dS} - (\hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)(\boldsymbol{\xi}_D)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (4)

$$\Rightarrow \hat{\phi}_A(\omega, \boldsymbol{x}_B) = \hat{M}(\hat{\phi}_B)_{\xi_M} - \hat{\boldsymbol{f}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)_{\xi_D} + \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} (\boldsymbol{\nabla\nabla}\hat{\phi}_B)_{\xi_Q} \qquad (279)$$

bzw.* $\phi_A(t, \boldsymbol{x}_B) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau)(\phi_B)_{(t-\tau),\xi_M} - \boldsymbol{f}(\tau)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi_B)_{(t-\tau),\xi_D} + \boldsymbol{T}_0(\tau)\boldsymbol{:}(\boldsymbol{\nabla\nabla}\phi_B)_{(t-\tau),\xi_Q}\, d\tau$

Originalschallfeld A an Stelle $\boldsymbol{x}_B$ gleich Summe aus Anteilen von künstlichem Monopolschallfeld B an den Positionen des Monopols, Dipols und Quadrupols.

Beachte: ist A allg. Schallfeld nach $k^2\hat{\phi}_A + \Delta\hat{\phi}_A = -\hat{Q}_\phi$ gilt:

$$\hat{\phi}_A(\boldsymbol{x}_B) = \int_{V_\infty} \hat{\phi}_B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_B)\; \hat{Q}_\phi(\boldsymbol{\xi})\; dV(\xi)$$

*) Rücktrafo in Zeitbereich über Faltungstheorem

Ende Einschub Reziprozitätstheorem

Zurück: Lösung der Lighthillgleichung im Spektralbereich:

$$k^2\hat{p} + \Delta\hat{p} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{T}}$$

nur für Turbulenzelement (Quadrupol $\hat{\boldsymbol{T}} = \hat{\boldsymbol{T}}_0\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_Q)$) das nah an Kante liegt, d.h. $k|\boldsymbol{\xi}_Q| \ll 1$ und Beobachter im Fernfeld, d.h. $k|\boldsymbol{x}_B| \gg 1$

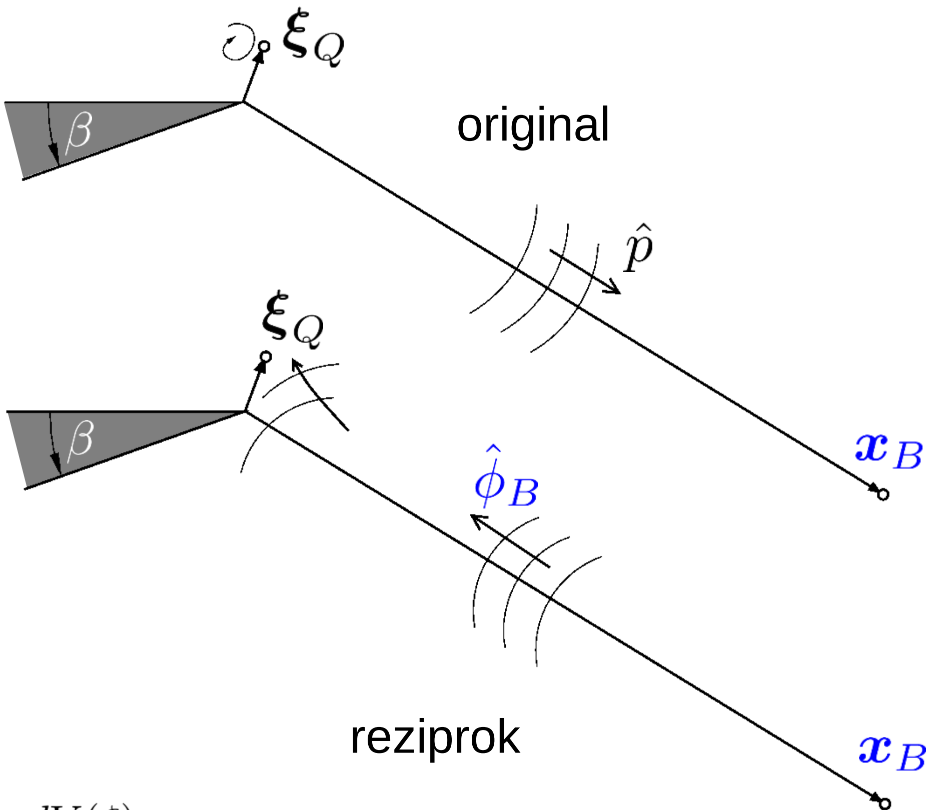
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Übersetze Problem auf (279): $\hat{\phi}_A(\boldsymbol{x}_B) = \hat{M}(\hat{\phi}_B)_{\xi_M} - \hat{\boldsymbol{f}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}_B)_{\xi_D} + \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} (\boldsymbol{\nabla\nabla}\hat{\phi}_B)_{\xi_Q}$

- $\boldsymbol{x}_B$ ist zugleich gewünschte Beobachterposition im Fernfeld
- $\hat{\phi}_A := \hat{p}$, $\quad M = 0, \ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_B) = \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} (\boldsymbol{\nabla\nabla}\hat{\phi}_B)_{\xi_Q} \ \Big|^{*} \qquad (280)$$

- d.h. nur die Lösung des fiktiven Monopolproblems B in der Nähe der Kante wird benötigt!
- außerdem: nahe Singularitäten (vgl. 2.4.2.3 VL WS) geht Wellengl. in Poissongleichung über!
- in Kantennähe ist Quellterm des Problems B null!



*) bei verteilter Quelle: $\hat{p}(\boldsymbol{x}_B) = \int_{V_Q} \hat{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{:} \boldsymbol{\nabla\nabla}\hat{\phi}_B \, dV(\xi)$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

$\Rightarrow$ für (280) kann $\hat{\phi}_B$ aus $\Delta\hat{\phi}_B = 0$ (Laplace Gleichung) bestimmt werden.

Lösung 2D: konforme Abbildungen: „jede komplexe Funktion $\tilde{\phi}(z) := \phi(z) + i\psi(z)$ von $z = x + iy$ löst 2D Laplace-Gleichung“.

Wahl von $\tilde{\phi} = z^m$ mit $m = \dfrac{\pi}{2\pi - \beta}$ löst das Kantenproblem mit Keilwinkel β !

Denn in Zeigerdarstellung $z = r\exp(i\theta)$ ist $\tilde{\phi} = r^m \exp(im\theta)$ bzw. $\phi = r^m \cos(m\theta)$ und die Randbedingung $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0,2\pi-\beta} = 0$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

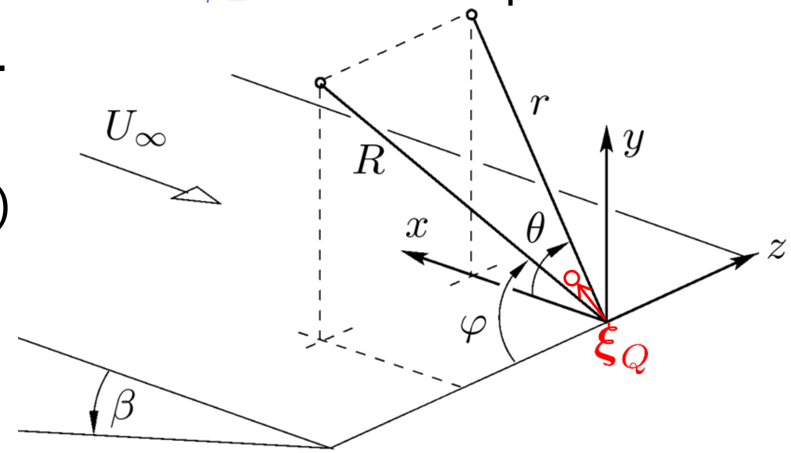
Also ist $\hat{\phi}_B \sim \phi$ oder $\hat{\phi}_B = \mathrm{const} \cdot r^m \cos(m\theta)$

Bestimme „const“ über Dimensionsanalyse:

3D-Welle für $k|\boldsymbol{x}_B| \gg 1$ trifft als ebene Welle auf $\boldsymbol{\xi}_Q$ in Kantennähe; besitzt Amplitude $\sim 1/R$ mit $R = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{\xi}_Q| \simeq |\boldsymbol{x}_B|$; einzige Längenskala kann nur Wellenlänge des Schalls $\lambda = 2\pi/k$ sein; außerdem muss $\hat{\phi}_B$ im 3D entsprechend Wellengleichung die Dimension [Länge]$^{-1}$ haben*.

Das führt zwangsläufig auf:

$\hat{\phi}_B \sim (kr)^m \cos(m\theta)\dfrac{1}{R}$ (in der Nähe von $\boldsymbol{\xi}_Q$)



Bilde für (277) $\boldsymbol{\nabla\nabla}\hat{\phi}_B$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla\nabla}(\dots) = {}& \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\dots) + \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\dots)\right] + \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_z\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(\dots) + \\ & \boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\dots) - \frac{(\dots)}{r}\right] + \boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\dots) + \frac{\partial}{\partial r}(\dots)\right] + \boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_z\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}(\dots) + \\ & \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_r\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}(\dots) + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}(\dots) + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\dots)\end{aligned} \tag{281}$$

*) $k^2\hat{\phi}_B + \Delta\hat{\phi}_B = -\overbrace{\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B)}^{[\text{Länge}]^{-3}} = -\delta(x - x_B)\delta(y - y_B)\delta(z - z_B)$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

$$\ldots \hat{p} \sim \hat{\boldsymbol{T}}_0 \boldsymbol{:} \nabla\nabla \hat{\phi}_B = m(m-1)k^m |\boldsymbol{\xi}_Q|^{m-2} \frac{1}{R} \left[(\hat{T}_{0rr} - \hat{T}_{0\theta\theta}) \cos(m\theta) - 2\hat{T}_{0r\theta} \sin(m\theta) \right]$$

Schätze Terme ab: $T_{rr} \sim \rho_\infty v_r v_r \, dV \sim \rho_\infty U_\infty^2 \, l^3 \quad (\sim T_{r\theta} \sim T_{\theta\theta})$

$$k = 2\pi/\lambda; \;\; \tau = \lambda/a_\infty = l/U_\infty \Rightarrow \lambda \sim l/M; \;\; M = U_\infty/a_\infty$$

$\Rightarrow k \sim M/l, \quad l$ ist Maß für turb. Längenskala ($\sim |\boldsymbol{\xi}_Q|$)

Insgesamt ist die Amplitude damit

$$|p'| \sim m(m-1) M^m \frac{1}{R} \frac{\overbrace{|\boldsymbol{\xi}_Q|}^{l}{}^{m-2} l^3}{l^m} \rho_\infty U_\infty^2 \sim M^{m+2} \rho_\infty a_\infty^2 l/R$$

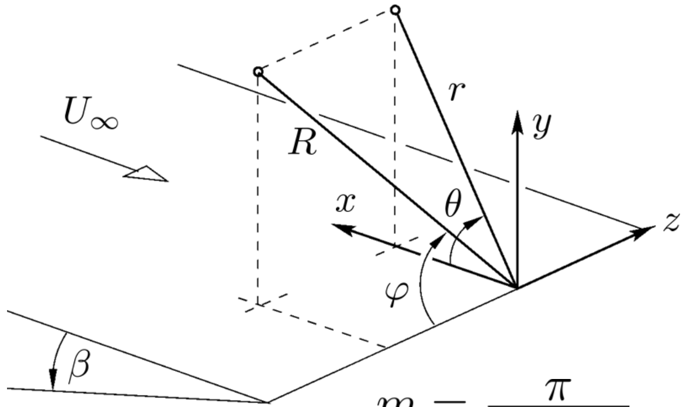
Intensität $I = \overline{p' v_r'}$ im Fernfeld mit (83) $v_r' \simeq p'/(\rho_\infty a_\infty)$:

$$\boxed{I \simeq \overline{p'^2}/(\rho_\infty a_\infty) \sim \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^{2m+4}}{a_\infty^{2m+1}}}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

$$\boxed{I \simeq \frac{\overline{p'^2}}{\rho_\infty a_\infty} \sim \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^{2m+4}}{a_\infty^{2m+1}}}$$

$$= \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty a_\infty^3 M^{2m+4}$$



$$m = \frac{\pi}{2\pi - \beta}$$

- unendlich dünne Platte ($m = 1/2$) am lautesten: $I \sim U_\infty^5$
- vergl. mit Schallintensität in freier Turbulenz nach Lighthill U_∞^8

  (265) aus 5.1 VL WS: $I_{FT} = \frac{1}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^8}{a_\infty^5} \Rightarrow \frac{I_K}{I_{FT}} \sim m^2(m-1)^2 M^{2m-4}$

  d.h. bei kleinen Machzahlen dominiert Kantenschall ($I_K(m=1/2) \sim M^{-3} I_{FT}$)
- $m = 1$ entartet (keine Singularität, d.h. keine Kante)
- unter Schrägeinfall wäre für Bestimmung Längenskale auf S.44 zu ersetzen gewesen $k \to k \sin\varphi$ und damit $I(\varphi) = I(\varphi = 0)\sin^{2m}\varphi$ (keine Abstrahlung exakt spannweitig)

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Beachte: im 2D Fall hätte die Dimensionsanalyse ergeben

$$\hat{\phi}_B \sim (kr)^m \cos(m\theta) \frac{1}{\sqrt{kR}} \qquad k^2 \hat{\phi}_B + \Delta \hat{\phi}_B = -\overbrace{\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B)}^{[\text{Länge}]^{-2}}$$

weil

a) $\hat{\phi}_B$ nach Wellengleichung im 2D dimensionslos sein muss und

b) Amplituden im 2D mit $1/\sqrt{R}$ skalieren

$$\Rightarrow |p'| \sim m(m-1) M^{m-1/2} \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{|\boldsymbol{\xi}_Q|^{m-2} l^2}{l^{m-1/2}} \rho_\infty U_\infty^2$$

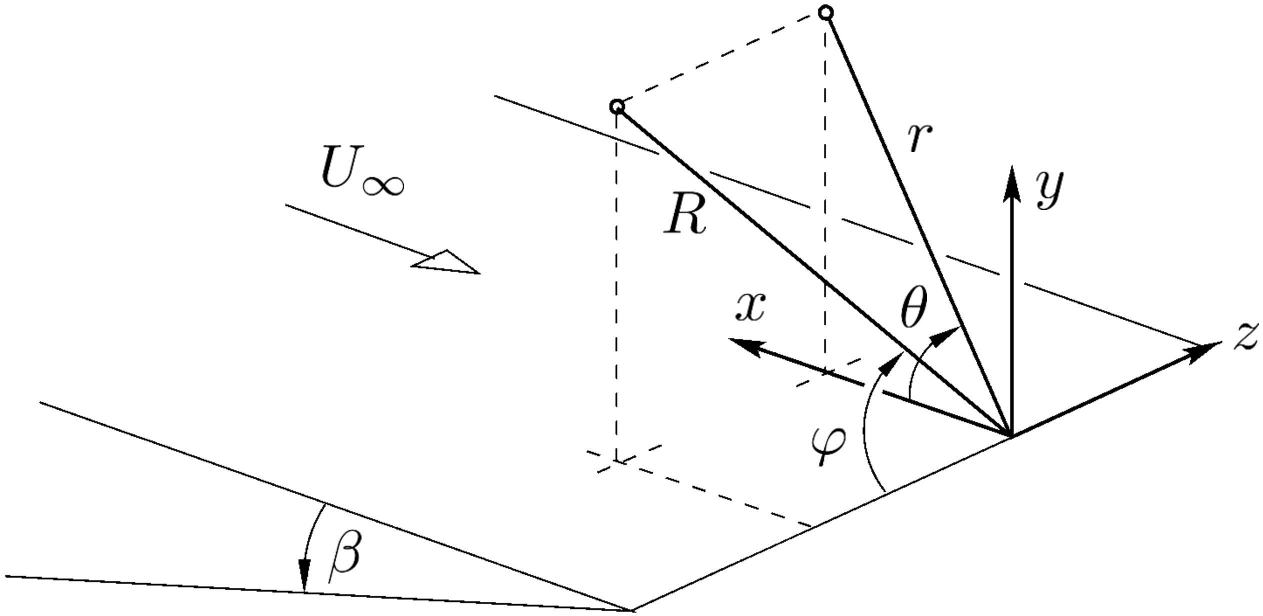
und damit: $\boxed{I_{2D} \sim U_\infty^{2m+3} = U_\infty^{-1} I_{3D}}$

allgemein: 2D Rechnungen der Intensität ergeben immer eine um exakt 1 verminderte Potenz in U_∞ im Vergleich zu 3D Rechnungen* !

)* beachte: auch bei 2D Geometrien ist die schallerzeugende Turbulenz 3D!

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

<u>Aufgabe:</u> Turbulent überströmte Kante, Geschwindigkeit U_∞, Keilwinkel β
Schall ?



$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

Voraussetzung:

Problem hat in verschiedenen Teilgebieten sehr unterschiedliches Verhalten

⇒ versuche zunächst separate Lösungen zu finden (einfacher)

⇒ danach separate Lösungen aneinander anpassen

<u>Beispiel 1</u>: Grenzschichttheorie: innere Lösung in Wandnähe, äußere (Potential) Lösung weit weg von der Wand,

<u>Beispiel 2</u>: aeroakustische Schallerzeugung: innere Lösung im Quellbereich, äußere Lösung weit weg von Quelle.

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

Die Methode kann in 4 Teilschritten (i-iv) beschrieben werden:

(i) Identifikation eines asymptotisch kleinen definierenden Parameters ε für das Problem:

(ii) 2 dimensionslose Schreibweisen der Grundgleichung in Bereichen (a) und (b)

(iii) separate („zonale") Lösung von Problem (a) und (b)

(iv) Anpassen der Lösung (a) bei asymptotisch großen Abständen mit Lösung (b) bei asymptotisch kleinen Abständen
(über Bestimmung freier Konstanten in Lösungen (a) und (b))
$\Rightarrow$ Gesamtlösung !

z.B. kleine Machzahl $\varepsilon = M \ll 1$
oder Reynoldszahl $\varepsilon = Re^{-1} \ll 1$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

(i) Identifikation eines asymptotisch kleinen definierenden Parameters ε für das Problem:

$\rightarrow$ soll Analyse für kleine Strömungsmachzahl M sein, d.h.

$$\varepsilon = \frac{U_\infty}{a_\infty} = M \ll 1$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:

(a) Entdimensionierung mit charakteristischen Größen des Quellbereichs (Turbulenzgrößen, z.B. Grenzschichtdicke δ)

→ Referenzzeitskala $t_{\mathrm{ref}} = \dfrac{l}{U_\infty}$; l – Quellbereich charakterisierende Referenzlänge z.B $l \sim \delta$

→ Referenzdruck $p_{\mathrm{ref}} = \rho_\infty U_\infty^2$ dynamischer Druck der Strömung

benutze Druckform der Lighthill Gleichung (248):

$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}; \quad \boldsymbol{T} \simeq \rho_\infty \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{U_\infty^2}{l^2}\cancel{\rho_\infty U_\infty^2}\frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \frac{1}{l^2}\cancel{\rho_\infty U_\infty^2}\Delta^* p'^* = \cancel{\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{l^2}}\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{T}^*$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{U_\infty^2}{a_\infty^2}}_{\to\ \varepsilon^2 \ll 1}\frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \Delta^* p'^* = \boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{T}^*$$

* markiert dimensionslose Größen

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:

(a) …Gleichung für den Druck p_i im Quellbereich ist demnach (wieder dimensionsbehaftet)

$$\boxed{\Delta p_i = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}}$$

d.h. im Quellbereich ist nicht die Wellengleichung, sondern die (einfachere) Poissongleichung zu lösen

(b) Entdimensionierung mit charakeristischen Größen des akustischen Bereichs (weit weg von Objekt, bzw. Quelle):

→ einzige Längenskala im akustischen Bereich ist Wellenlänge λ der Schallwellen; hängt mit charakteristischen Frequenz f_{ref} zusammen:

$\lambda = \dfrac{a_\infty}{f_{\mathrm{ref}}}$ beachte: charakt. Zeitskala $t_{\mathrm{ref}} = 1/f_{\mathrm{ref}}$ in (a) und (b) gleich:

$$\lambda = \frac{a_\infty}{U_\infty} l = \frac{l}{M}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:

(b) …

→ Referenzdruck $p_{\mathrm{ref}} = \rho_\infty a_\infty^2$ (Maß für statischen Druck in akust. Medium)

$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}; \quad \boldsymbol{T} \simeq \rho_\infty \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{1}{\cancel{a_\infty^2}}\frac{U_\infty^2}{l^2}\cancel{\rho_\infty}\cancel{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \frac{U_\infty^2}{\cancel{a_\infty^2 l^2}}\cancel{\rho_\infty}\cancel{a_\infty^2}\Delta^* p'^* = \frac{U_\infty^2}{a_\infty^2 l^2}\rho_\infty U_\infty^2\,\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{T}^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \Delta p'^* = \underbrace{\frac{U_\infty^2}{a_\infty^2}}_{\varepsilon^2 \ll 1}\,\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{T}^*$$

Gleichung für den Druck p_a im akustischen (äußeren) Bereich (mit Dimens.)

$$\boxed{\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0}$$

d.h. homogene anstatt inhomogene Wellengleichung

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

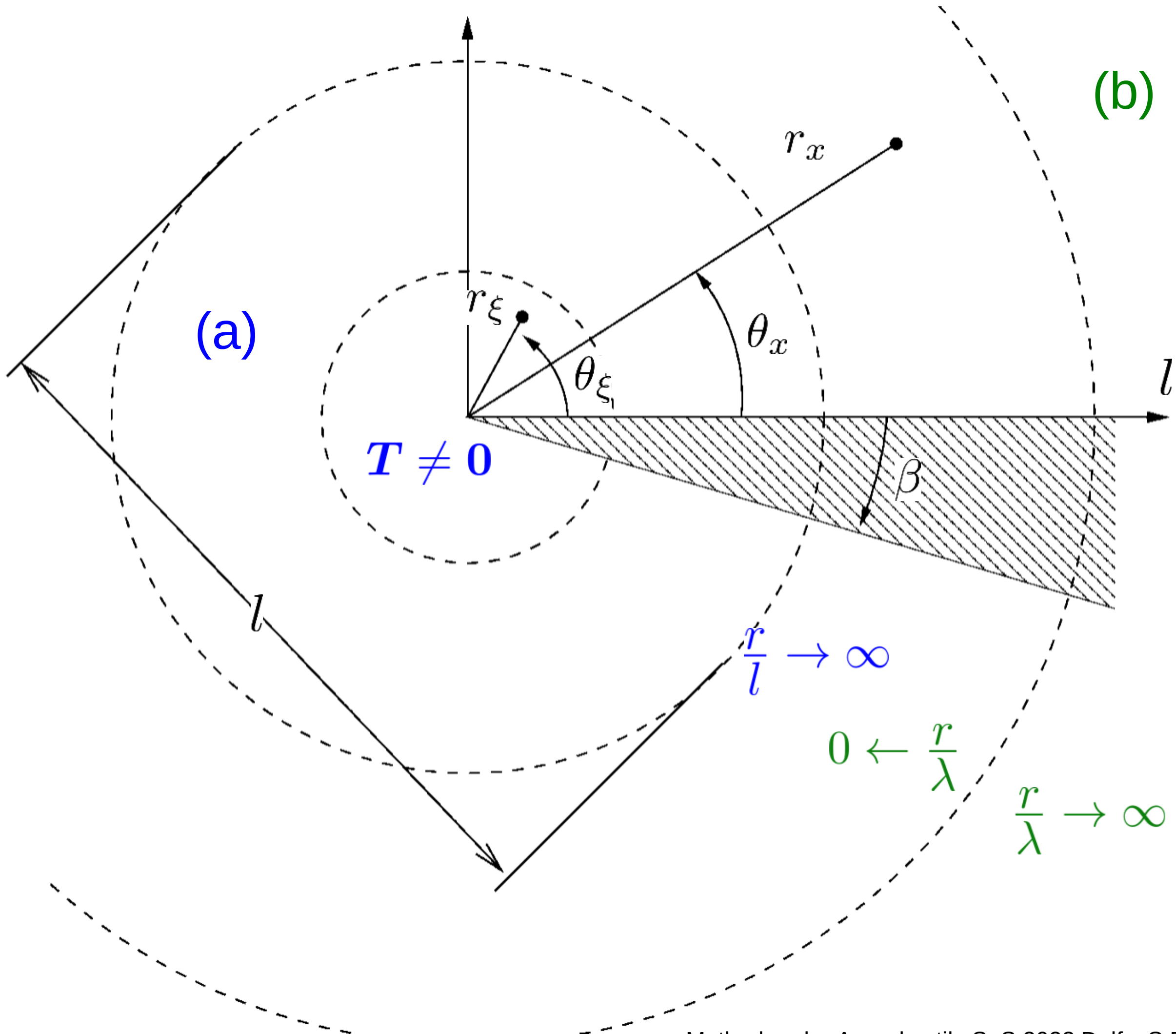
iii) separate („zonale“) Lösung von Problem (a) und (b)

(a) $\Delta p_i = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$

auch : „innere Lösung“

(b) $\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$

auch : „äussere Lösung“



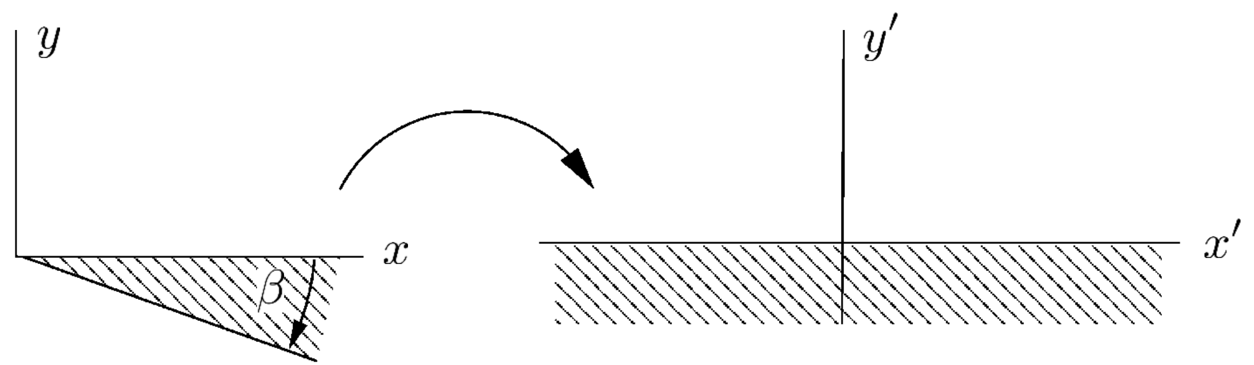
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) $\Delta p_i = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ Lösung über Methode der Green‘schen Funktionen:

konstruiere maßgeschneiderte (exakte) Green‘sche Funktion g für 2D Laplace Gleichung $\Delta g = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ mit $\frac{\partial g}{\partial n}|_{\theta=0,2\pi-\beta} = 0$
zunächst konforme Abbildung des Keils auf Halbebene (Halbebenenproblem einfacher zu lösen): $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'; \boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\xi}'$

$$x' + iy' := (x+iy)^m; \qquad \xi' + i\eta' := (\xi + i\eta)^m$$

$$r'_x \exp(i\theta'_x) := r_x^m \exp(im\theta_x); \qquad r'_\xi \exp(i\theta'_\xi) = r_\xi^m \exp(im\theta_\xi)$$

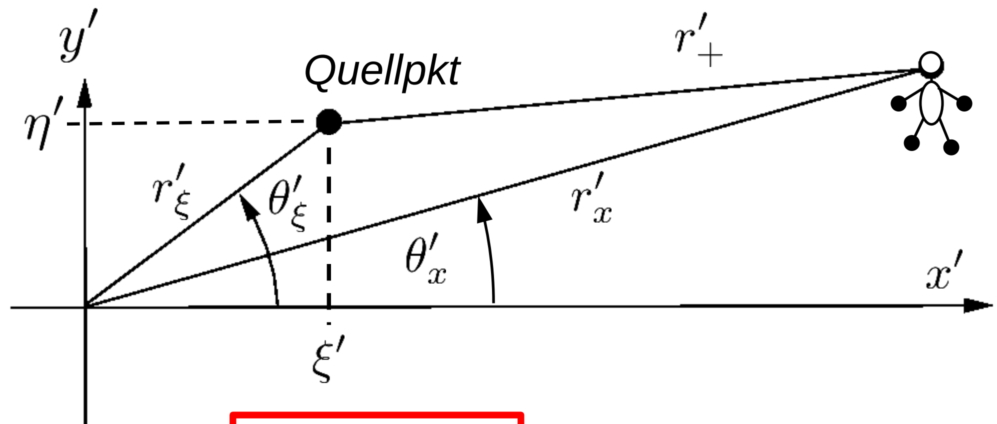


1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Green‘sche Funktion für Halbebenenproblem durch Quellenspiegelung (Superposition der Freifeld GF (Tab. B1 VL WS) für Quell- und Spiegelquellort)

$$g' = \frac{1}{2\pi} \ln r'_+$$

$$r'_+ = \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2}$$



equation	1D $\boldsymbol{x} = x$ $\boldsymbol{\xi} = \xi$	2D $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y)$ $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi, \eta)$	3D $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi, \eta, \zeta)$
$\Delta G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2} r$	$\frac{1}{2\pi} \ln r$	$-\frac{1}{4\pi r}$
$\Delta G + k^2 G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$	$\frac{i}{2k} \exp(-ikr)$	$\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr)$	$\frac{-\exp(-ikr)}{4\pi r}$
$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau)$	$\frac{a_\infty^2}{2} H(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})$	$\frac{1}{2\pi} \frac{H(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{r^2}{a_\infty^2}}}$	$\frac{\delta(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})}{4\pi r}$

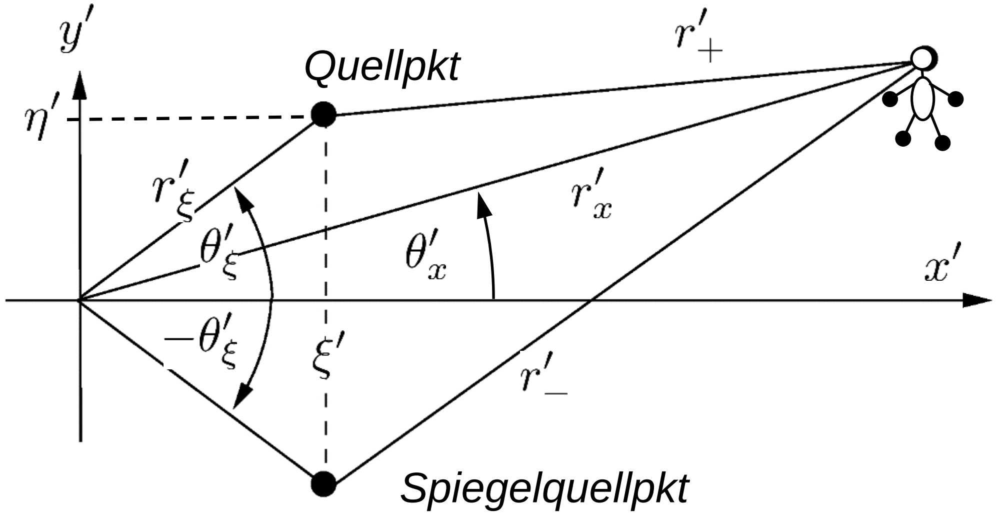
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Green‘sche Funktion für Halbebenenproblem durch Quellenspiegelung (Superposition der Freifeld GF (Tab. B1 VL WS) für Quell- und Spiegelquellort)

$$g' = \frac{1}{2\pi}\ln r'_+ \quad + \frac{1}{2\pi}\ln r'_-$$

$$r'_\pm = \sqrt{(x'-\xi')^2 + (y' \mp \eta')^2}$$

$$r'_- = r'_+ - 2(\boldsymbol{e}_{y'} \cdot \boldsymbol{r}'_+)\boldsymbol{e}_{y'}$$



Funktionen, die Laplacegleichung in konform abgebildetem Gebiet erfüllen, erfüllen sie auch im Originalgebiet, d.h.

$$g'(r'_\pm) = g(r'_\pm) = \frac{1}{4\pi}\ln(r'^2_+ r'^2_-)$$

$$x' = r_x^m \cos(m\theta_x) \qquad \xi' = r_\xi^m \cos(m\theta_\xi)$$

$$y' = r_x^m \sin(m\theta_x) \qquad \eta' = r_\xi^m \sin(m\theta_\xi)$$

$$r'^2_\pm = r_x^{2m} + r_\xi^{2m} - 2r_x^m r_\xi^m \cos[m(\theta_x \mp \theta_\xi)]$$

$$r'^2_+ r'^2_- = \left(r_x^{2m} + r_\xi^{2m} - 2r_x^m r_\xi^m \cos[m(\theta_x - \theta_\xi)]\right) \cdot \left(r_x^{2m} + r_\xi^{2m} - 2r_x^m r_\xi^m \cos[m(\theta_x + \theta_\xi)]\right)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Lösung: $p_i = -\int (\boldsymbol{\nabla}_\xi \cdot \boldsymbol{\nabla}_\xi \cdot \boldsymbol{T})\; g\, dV(\xi)$

Ableitungen auf g abwälzen (Gauss‘scher Satz): … $p_i = -\int \boldsymbol{T} \boldsymbol{:} (\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\nabla}_\xi\, g)\, dV(\xi)$

in Zylinderkoordinaten

$$p_i = -\rho_\infty \int\limits_0^{2\pi-\beta} \int\limits_0^{\infty} v_r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial {r_\xi}^2} + v_r v_\theta \frac{2}{r_\xi} \frac{\partial}{\partial \theta_\xi} \left[\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r} \right] + v_\theta^2 \frac{1}{r_\xi} \left[\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial^2 g}{\partial {\theta_\xi}^2} \right] r_\xi \, dr_\xi \, d\theta_\xi$$

bilde die diversen Ableitungen, z.B.:

$$4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} = \frac{2m r_\xi^{m-2} r_x^m}{r_\pm'^2} \left\{ -2m \frac{r_\xi^m}{r_x^m} \frac{r_x^{2m}}{r_\pm'^2} \left[\frac{r_\xi^m}{r_x^m} - \cos\left[m(\theta_x \mp \theta_\xi) \right] \right]^2 + \right.$$
$$\left. +(2m-1) \frac{r_\xi^m}{r_x^m} - (m-1) \cos\left[m(\theta_x \mp \theta_\xi) \right] \right\}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Lösung soll für asymptotisch große r_x ausgewertet werden:

$$\frac{r_\xi}{r_x} \ll 1 \Rightarrow \frac{r_\pm'^2}{r_x^{2m}} \to 1$$

für $m \neq 1$ heißt das:

$$4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} \simeq -\frac{2m r_\xi^{m-2}}{r_x^m}(m-1)\cos\left[m(\theta_x \mp \theta_\xi)\right]$$

$$= -4m(m-1)\frac{r_\xi^{m-2}}{r_x^m}\cos(m\theta_x)\cos(m\theta_\xi)$$

für $m = 1$ heißt das:

$$4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} \simeq -\frac{2}{r_x^2}\left[1 - 2\cos^2(\theta_x \mp \theta_\xi)\right]$$

$$= -\frac{4}{r_x^2}\cos(2\theta_x)\cos(2\theta_\xi)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) nach Auswertung aller Terme und für $r_x \gg r_\xi$

für $m \neq 1$:

$$\boxed{p_i = \frac{m(m-1)\cos(m\theta_x)}{\pi r_x^m} \int\limits_0^{2\pi-\beta} \int\limits_0^{\infty} \rho_\infty \Big[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(m\theta_\xi) - 2 v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi) \Big] r_\xi^{m-1} \, dr_\xi \, d\theta_\xi} \tag{282}$$

für $m = 1$:

$$\boxed{p_i = \frac{\cos(2\theta_x)}{\pi r_x^2} \int\limits_0^{2\pi-\beta} \int\limits_0^{\infty} \rho_\infty \Big[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(2\theta_\xi) - 2 v_r v_\theta \sin(2\theta_\xi) \Big] r_\xi \, dr_\xi \, d\theta_\xi} \tag{283}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(b) äußere Lösung, d.h. $\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$

Separationsansatz: $p_a = \hat{p}_a \exp(i\omega t) = C F(r_x) \underbrace{\cos(m\theta_x)}_{\text{erfüllt Randbed.!}} \exp(i\omega t)$

$$\cancel{\cos(m\theta_x)}\left\{k^2 F + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}F\right)\right\} + F\frac{1}{r^2}(-m^2)\cancel{\cos(m\theta_x)} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2F}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta} + \left(1 - \frac{m^2}{\eta^2}\right)F = 0; \quad \eta := kr} \qquad (284)$$

Besselsche DGL

für Zeitfaktor $\exp(+i\omega t)$ erfüllt Hankelfunktion m'ter Ordnung, 2.Art die Dgl.:

$$F(\eta) = H_m^{(2)}(\eta)$$

Benötigt wird (in Schritt iv) die äußere Lösung bei asymptotisch kleinem η

$$H_m^{(2)}(kr_x)|_{kr_x\to 0} = \frac{i}{\pi}\Gamma(m)\left(\tfrac{1}{2}k\right)^{-m} r_x^{-m} \qquad (285)$$

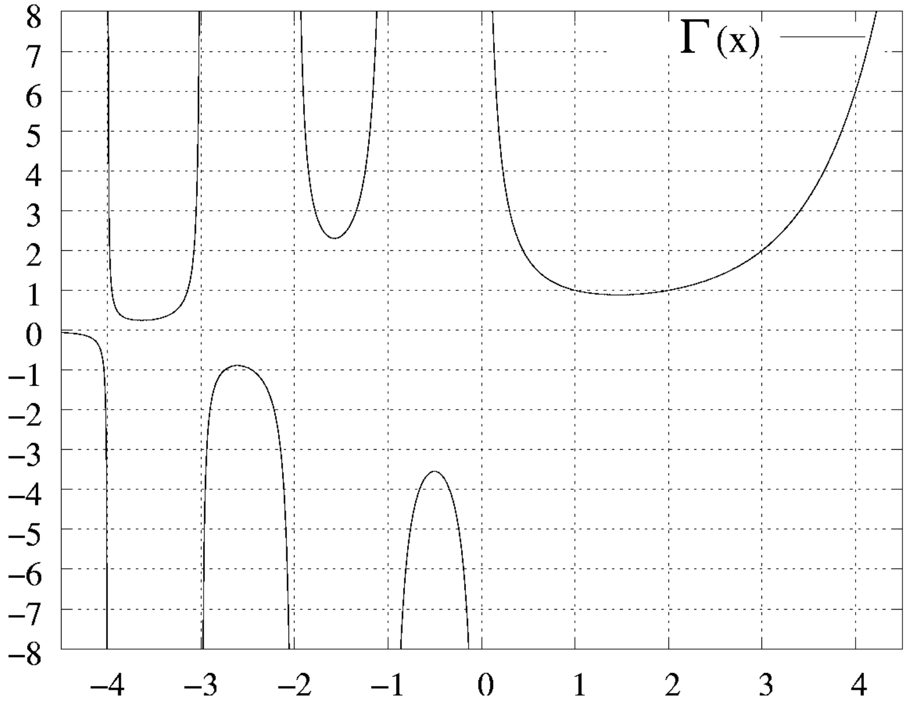
↑

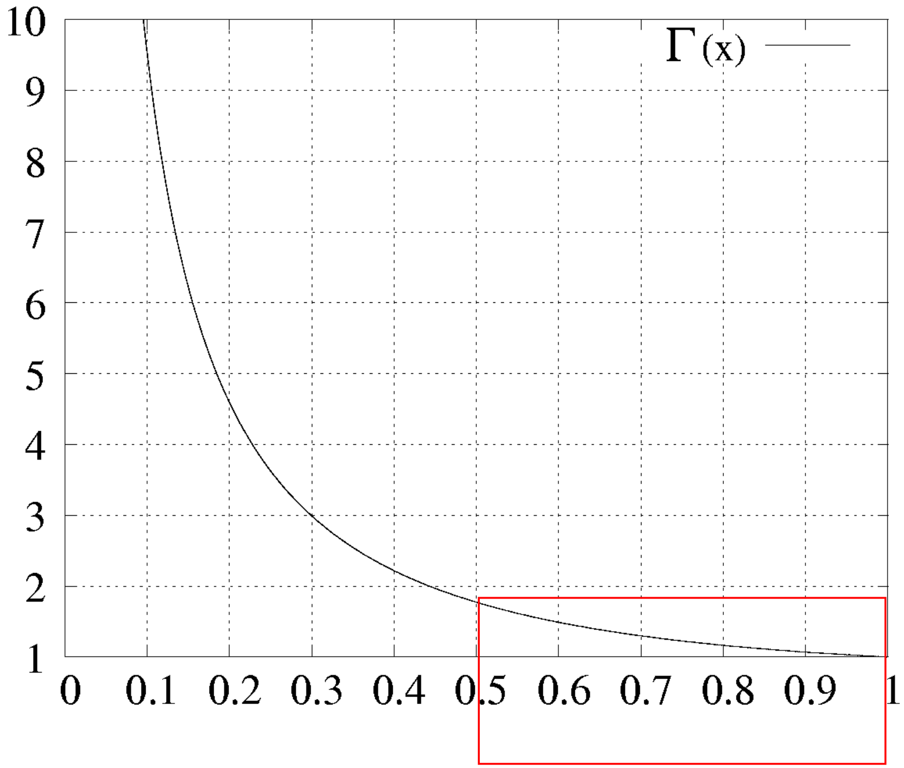
Gammafunktion (verallg. Fakultät) $m \in \mathbb{N}:\ \Gamma(m+1) = m!$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(b) Gammafunktion (verallgemeinerte Fakultät)





1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

iv) Anpassen der Lösung (a) bei asymptotisch großen Abständen mit Lösung (b) bei asymptotisch kleinen Abständen

(Bestimmung freier Konstanten in Lösungen (a) und (b)) $\Rightarrow$ Gesamtlösung !

$$m \neq 1: \qquad p_i = \frac{m(m-1)\cos(m\theta_x)}{\pi r_x^m} \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^{\infty} \rho_\infty \Big[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(m\theta_\xi) - 2 v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi) \Big] r_\xi^{m-1}\, dr_\xi\, d\theta_\xi$$

$$\hat{p}_a = C H_m^{(2)}(r_x)\cos(m\theta_x)$$

Anpassung von innerer und äußerer Lösung $\hat{p}_a(r_x \to 0) = p_i(r_x \to \infty)$

$$C \frac{i}{\cancel{\pi}} \Gamma(m) \left(\tfrac{1}{2}k\right)^{-m} \cancel{r_x^{-m}} \cancel{\cos(m\theta_x)} \overset{!}{=}$$

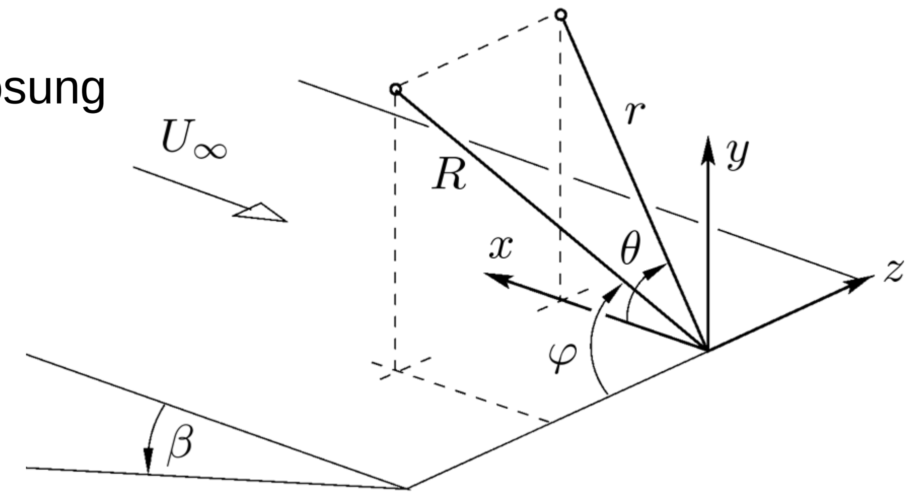
$$\overset{!}{=} \frac{m(m-1)\cancel{\cos(m\theta_x)}}{\cancel{\pi}\cancel{r_x^m}} \underbrace{\int_0^{2\pi-\beta} \int_0^{\infty} \rho_\infty \Big[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(m\theta_\xi) - 2 v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi) \Big] r_\xi^{m-1}\, dr_\xi\, d\theta_\xi}_{I_s}$$

beachte: Anpassung hat funktioniert, denn C ergibt sich wirklich als Konstante!

$$\Rightarrow C = i \frac{m(m-1)}{\Gamma(m)} 2^{-m} k^m I_s$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

iv) Anpassung von innerer und äußerer Lösung



Interesse besteht nur an Fernfeldlösung, d.h.

$\hat{p}_a(r_x \to \infty)$

beachte dazu:

$$H_m^{(2)}(kr_x)|_{kr_x\to\infty} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k r_x}}\exp[-i(kr_x - \tfrac{1}{2}m\pi - \tfrac{1}{4}\pi)] \tag{286}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{p}_a(r_x \to \infty) \simeq\ & 2^{\frac{1}{2}-m}\frac{m(m-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m)}\frac{\cos(m\theta_x)}{\sqrt{r_x}}k^{m-\frac{1}{2}}\exp(-ikr_x)\exp(\tfrac{i}{2}m\pi + \tfrac{i}{4}\pi)\times \\ & \times \int\limits_0^{2\pi-\beta}\int\limits_0^{\infty}\rho_\infty\left[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(m\theta_\xi) - 2v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi)\right] r_\xi^{m-1}\,dr_\xi\,d\theta_\xi\end{aligned}} \tag{287}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

- Abschätzung der Abhängigkeit der Schallintensität I von Strömungsparametern: charakteristische Frequenz f entsteht durch Wirbelpassage (bei charakterist. Wirbeldimension: l)

$f \sim \dfrac{U_\infty}{l}$ andererseits ist $f \sim \dfrac{a_\infty}{\lambda}$, also $\dfrac{1}{\lambda} \sim \dfrac{M}{l}$, bzw. $k \sim \dfrac{2\pi M}{l}$

Die Größenordnung des Integrals wird nach den charakteristischen Größen abgeschätzt:

$$\int\limits_0^{2\pi-\beta}\int\limits_0^{\infty} \rho_\infty \left[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(m\theta_\xi) - 2v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi)\right] \overbrace{r_\xi^{m-1}\, dr_\xi}\, d\theta_\xi \sim \rho_\infty U_\infty^2 l^m$$

eingesetzt in (287):

$$p_a \sim 2^{\frac{1}{2}-m} m(1-m) \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{m-\frac{1}{2}} M^{m-\frac{1}{2}} \rho_\infty a_\infty^2 M^2 l^m = \pi^{m-\frac{1}{2}} m(1-m) \sqrt{\frac{l}{r}} M^{\frac{3}{2}+m} \rho_\infty a_\infty^2$$

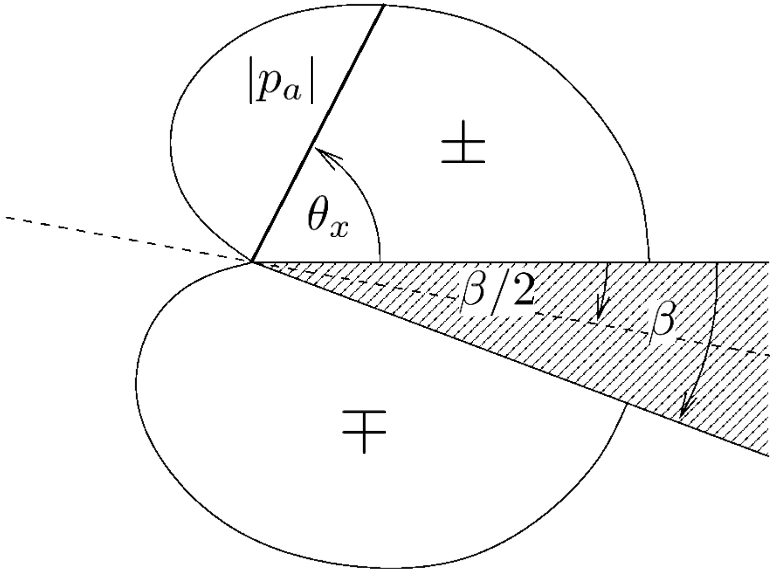
$$\boxed{I \sim \frac{\overline{p'^2}}{\rho_\infty a_\infty} \sim \frac{\pi^{2m-1} m^2 (1-m)^2}{\Gamma^2(m)} \rho_\infty a_\infty^3 \frac{l}{r} M^{3+2m}}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

- Richtcharakteristik : $\cos(m\theta_x)$ heißt auch „Kardioide“
  keine Abstrahlung in Richtung der Winkelhalbierenden des Keils

- Gegenphasige Abstrahlung auf den beiden Seiten des Keils

- Schallintensität skaliert mit M^{3+2m}, d.h. über *m* abhängig von Keilwinkel



1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Sonderfall $m = 1$ (keine Singularität) hätte analog zur Herleitung von (287) ergeben:

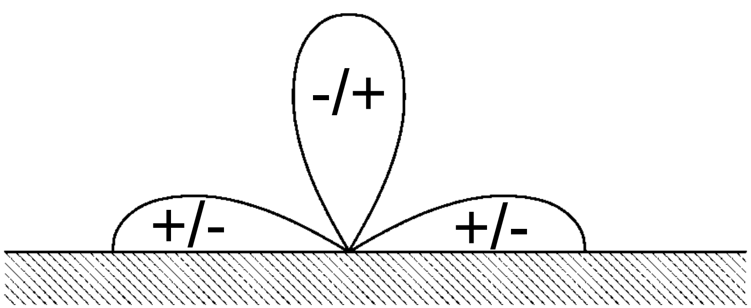
$$\boxed{\begin{aligned}\hat{p}_a(r_x \to \infty) \simeq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(2\theta_x)}{\sqrt{r_x}} k^{\frac{3}{2}} \exp(-ikr_x) \exp(i\tfrac{3}{4}\pi) \times \\ \times \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^{\infty} \rho_\infty \left[(v_r^2 - v_\theta^2) \cos(2\theta_\xi) - 2 v_r v_\theta \sin(2\theta_\xi) \right] r_\xi \, dr_\xi \, d\theta_\xi\end{aligned}} \qquad (288)$$

und damit: $\boxed{I \sim \frac{\overline{p'^2}}{\rho_\infty a_\infty} \sim \rho_\infty a_\infty^3 \frac{l}{r} M^7}$

Quadrupol! vgl. freie Turbulenz beachte:

für 3D gilt $I^{3D} \sim I^{2D} M^1$,

$\sim M^8$!



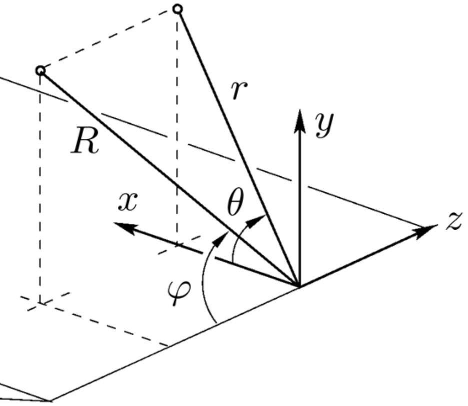
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Vergleiche (287) für $m = \frac{1}{2}$ mit exakter 3D Lsg. für Platte von Ffowcs-Williams & Hall (1970):

(287):
$$p_{2D} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{\sqrt{r_x}}\exp(-ikr_x)\exp(i\tfrac{3}{2}\pi)\cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\infty}\rho_\infty\Big[(v_r^2 - v_\theta^2)\cos(\tfrac{1}{2}\theta_\xi) - 2v_r v_\theta \sin(\tfrac{1}{2}\theta_\xi)\Big] r_\xi^{-\frac{1}{2}}\, dr_\xi\, d\theta_\xi}_{:= I_s}$$

$$\boxed{p_{3D} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{4\pi\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{R_x}\exp(-ikR_x)\exp(i\tfrac{1}{4}\pi)\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cdot\int_b L_s\, dz} \quad (289)$$

b - Spannweite



FW-Hall: v_z - Fluktuationen (in Spannweitenrichtung) spielen keine Rolle bei Schallerzeugung!

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Direktvergleich in x-y-Ebene (bzw. $\varphi = \pi/2$):

$$\frac{p_{2D}}{p_{3D}} = \exp(i\tfrac{5}{4}\pi)\frac{I_s}{\int_b I_s dz}\sqrt{\frac{2\pi R_x}{k}} = -\frac{(1+i)}{L_z}\sqrt{\frac{\pi R_x}{k}}$$

also:

$=: L_z^{-1}$ (L_z Maß für spannweitige Korrelation der Quelle)

$$\boxed{p_{3D} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi R_x}}(1-i)\; L_z\; p_{2D} \qquad \text{oder} \qquad I_{3D} = \frac{p_{3D}\, p_{3D}^*}{\rho_\infty a_\infty} = \frac{L_z^2 k}{2\pi R_x} I_{2D}} \tag{290}$$

(290) stellt exakte Umrechnung 2D→3D für beliebige 2D-Geometrien dar

(Oberai et al.) $$|p_{3D}| = \sqrt{\frac{k}{2\pi R_x}}\; L_z\; |p_{2D}|$$

beachte: Intensität darf nur linear mit Spannweite b wachsen: $\Rightarrow L_z = \sqrt{b l_z}$

l_z stellt also die spannweitige Korrelation der Quelle dar

typisch: $l_z \sim \omega^{-1}$, so dass insg. Umrechnung 2D/3D im wesentlichen frequenzunabhängig, d.h. Schalldruckspektrum bleibt erhalten!

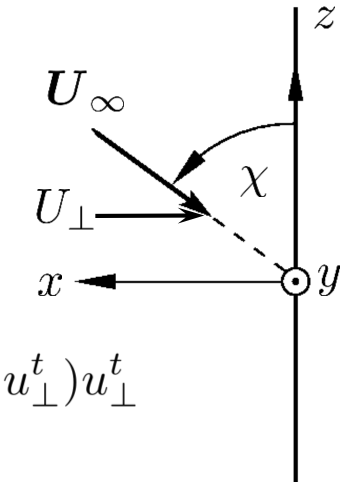
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Intensitätsabschätzung in 3D auf der Grundlage von (289)

$$p'_{3D} \simeq \frac{k^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{R_x} \rho_\infty U_\perp^2 \frac{l}{l^{\frac{1}{2}}} (b l_z)^{\frac{1}{2}} \ ; \quad l$$

~ charakt. Ausdehnung Quellgebiet (z.B. Grenzschichtdicke)

Nach (289) geht nur die Geschwindigkeitskomponente von $\boldsymbol{U}$ ein, die senkrecht auf der Kante steht, $U_\perp$. Diese wiederum setzt sich aus einem zeitgemittelten und einem (turbulenten) Wechselanteil zusammen:



$$U_\perp^2 = (\overline{U}_\perp + u_\perp^t)^2 = \underbrace{\cancel{\overline{U}_\perp^2}}_{\text{stationär (kein Beitrag)}} + (2\overline{U}_\perp + u_\perp^t) u_\perp^t \qquad \Rightarrow U_\perp^2 \sim (2U_\infty \sin\chi + u_\perp^t) u_\perp^t$$

worin χ der Winkel zwischen Anströmrichtung und Kante ist.
Die turbulenten Schwankungsamplituden skalieren etwa proportional mit der Anströmgeschwindigkeit; Beschreibung über Turbulenzintensität

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u^{t2}} + \overline{v^{t2}} + \overline{w^{t2}}\right)} / U_\infty$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Die Turbulenzintensität α lässt sich mit Hilfe der gebräuchlicheren kinetischen Turbulenzenergie $k_t := \frac{1}{2}(\overline{u^{t2}} + \overline{v^{t2}} + \overline{w^{t2}})$ ausdrücken, wobei für den Zweck der Abschätzung vereinfachend angenommen wird, dass isotrope Turbulenz vorliegt. Dann ist $k_t := \frac{3}{2}\overline{u^{t2}}$ und für die Turbulenzintensität gilt $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}k_t}/U_\infty$

(typisch: $\alpha \simeq 0.1$)

Eine, nämlich die kantenparallele Komponente geht nicht ein: $\overline{u_\perp^{t2}} = 2\overline{u^{t2}} = 2\alpha^2 U_\infty^2$

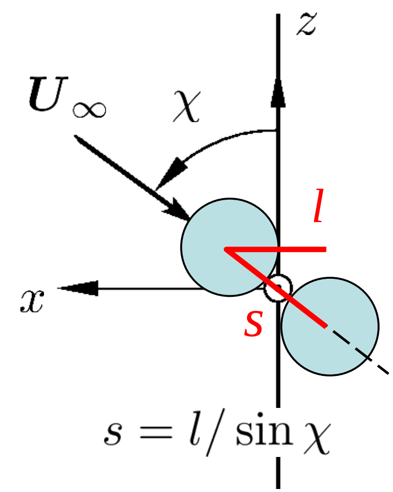
$$U_\perp^2 \simeq (2U_\infty \sin\chi + u_\perp^t)u_\perp^t \Rightarrow U_\perp^2 \sim (2U_\infty \sin\chi + \sqrt{2}\alpha U_\infty)\sqrt{2}\alpha U_\infty$$

Im Fernfeld wird die Schallintensität des Kantengeräuschs damit

$\sim M \sin\chi / l$

$$I_{3D} = \frac{\overline{p'^2_{3D}}}{\rho_\infty a_\infty} \simeq \frac{k \sin\varphi \cos^2(\frac{1}{2}\theta_x)\rho_\infty}{a_\infty R_x^2}(\sqrt{2}\sin\chi + \alpha)^2\alpha^2 U_\infty^4 l b l_z$$

$$\boxed{I_{3D} \simeq \rho_\infty \frac{b l_z}{R_x^2}\frac{U_\infty^5}{a_\infty^2}\alpha^2 \sin\chi(\sqrt{2}\sin\chi + \alpha)^2 \sin\varphi \cos^2(\tfrac{1}{2}\theta_x)}$$



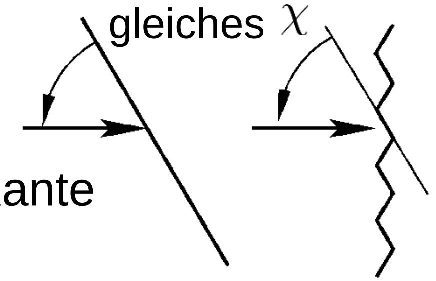
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

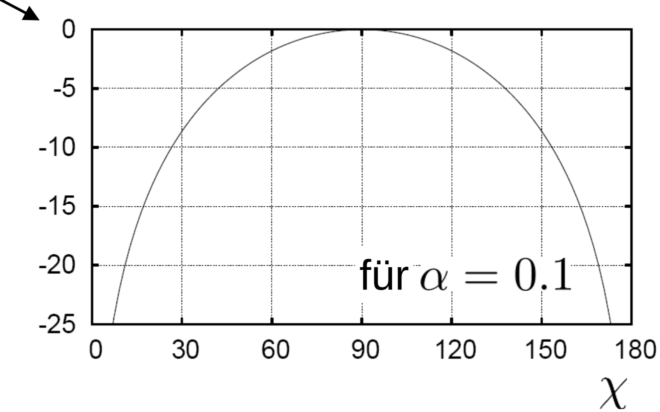
Als Schallintensitätspegel:

$$L_I \simeq 10\lg\left(\frac{\rho_\infty U_\infty^5}{a_\infty^2 I_{\mathrm{ref}}}\right)+10\lg\left(\frac{b l_z}{R_x}\right)+\underbrace{10\lg\left(\alpha^2(\sqrt{2}\sin\chi+\alpha)^2\sin\chi\right)}+\underbrace{10\lg\left(|\sin\varphi|\right)+10\lg\left(\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta_x)\right)}_{\text{Richtcharakteristik}}$$

Minderungsmaßnahmen für Kantengeräusch:

- U_∞ reduzieren
- An-/Abströmwinkel χ an Kante weit weg von 90º: geschrägte, oder gezahnte Kante





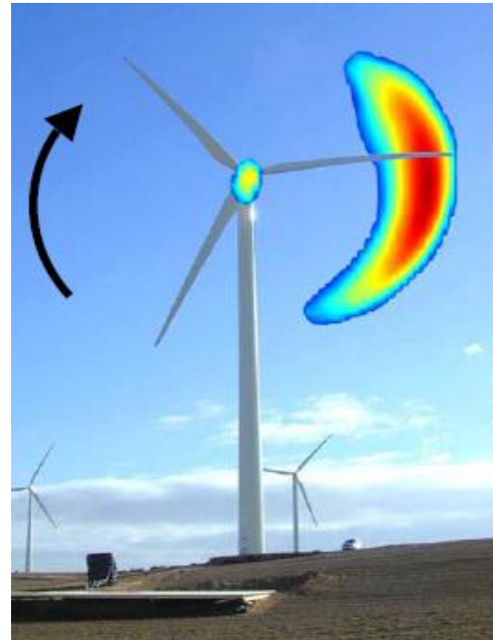
- Turbulenzintensität α verringern
- Korrelationslänge der Turbulenz l_z verringern
- Temperatur in Kantennähe erhöhen:

id. Gas

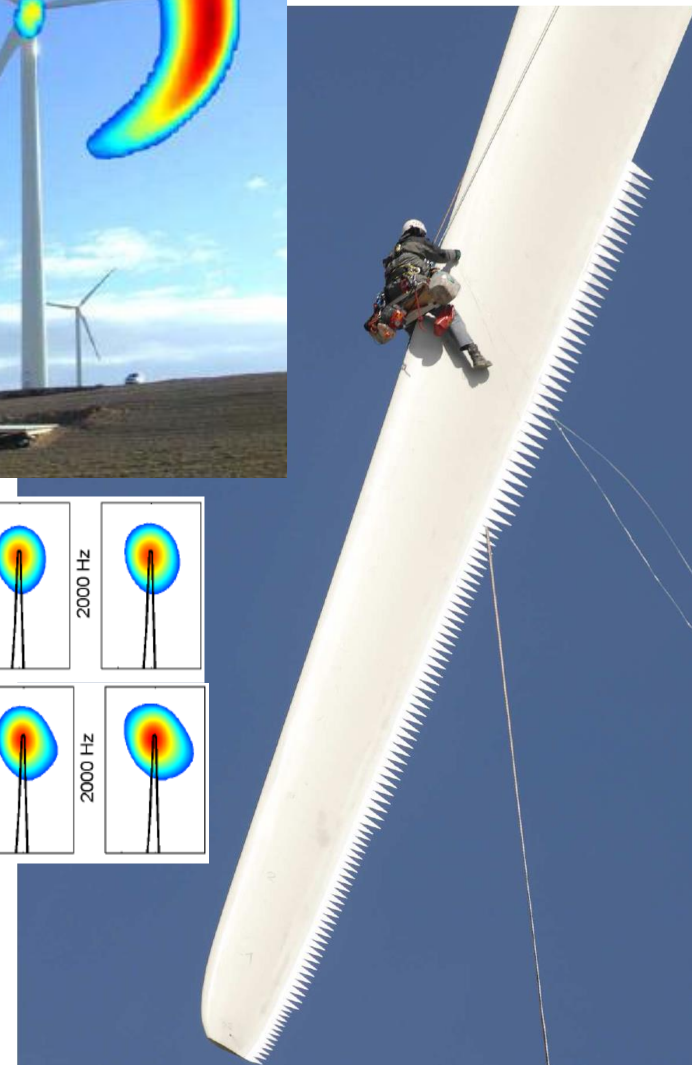
$$T_\infty \uparrow \;\Rightarrow\; \frac{\rho_\infty}{a_\infty^2} = \frac{p_\infty}{R T_\infty R T_\infty} \sim \frac{1}{T_\infty^2} \downarrow$$

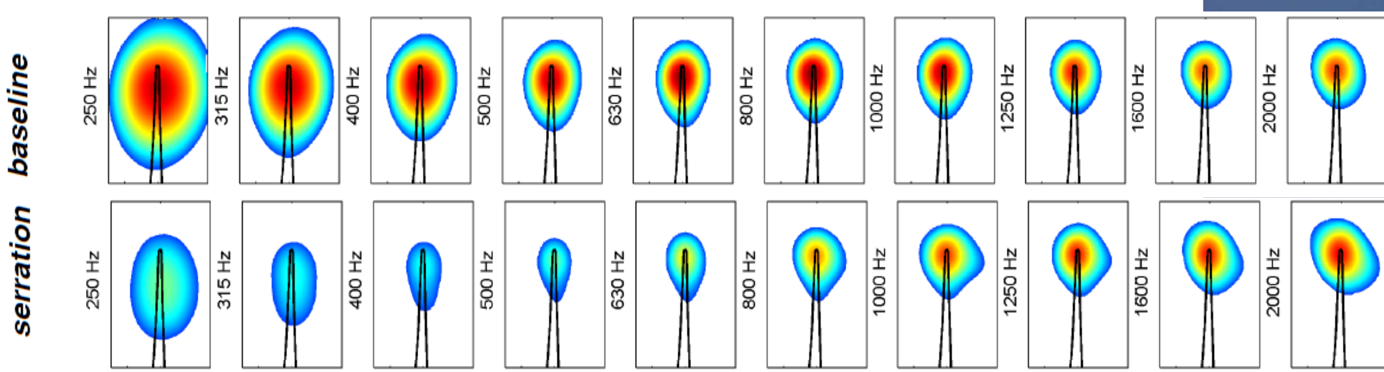
Übersichtsartikel Kantengeräusch, s. auch:
Howe, M. S., A Review of the Theory of Trailing Edge Noise, Journal of Sound and Vibration, Vol. 61, No. 3, 1978, pp. 437465.

Hinterkantenschrägung an Rotorblatt WEA

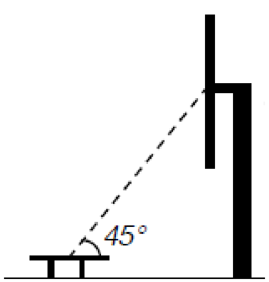


- Drehtonanteile (Propeller) irrelevant bei Windenergieanlage (WEA)
- Hinterkanten- und Blattspitzengeräusch vornehmlich im Blattaußenbereich (größte Geschwindigkeiten)





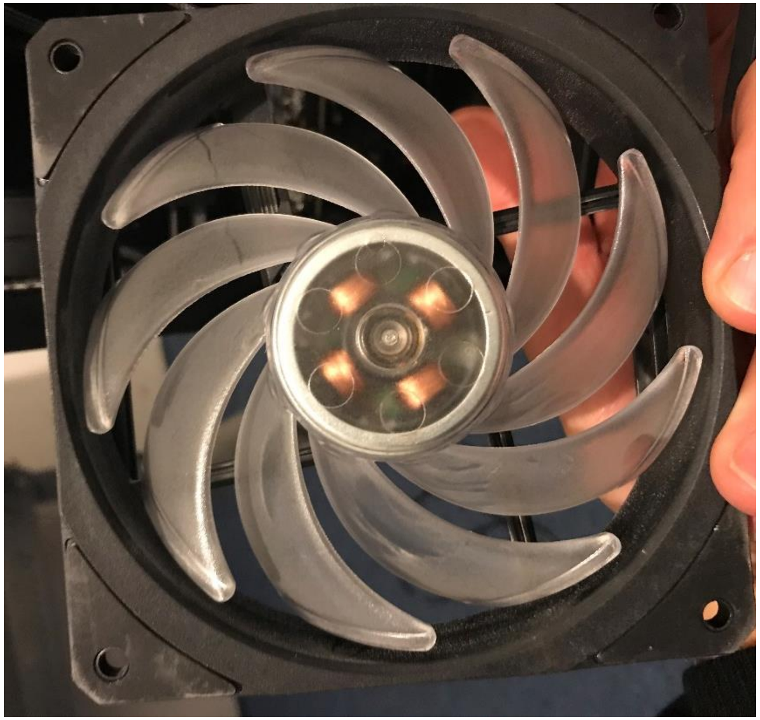
Farbumfang 12dB

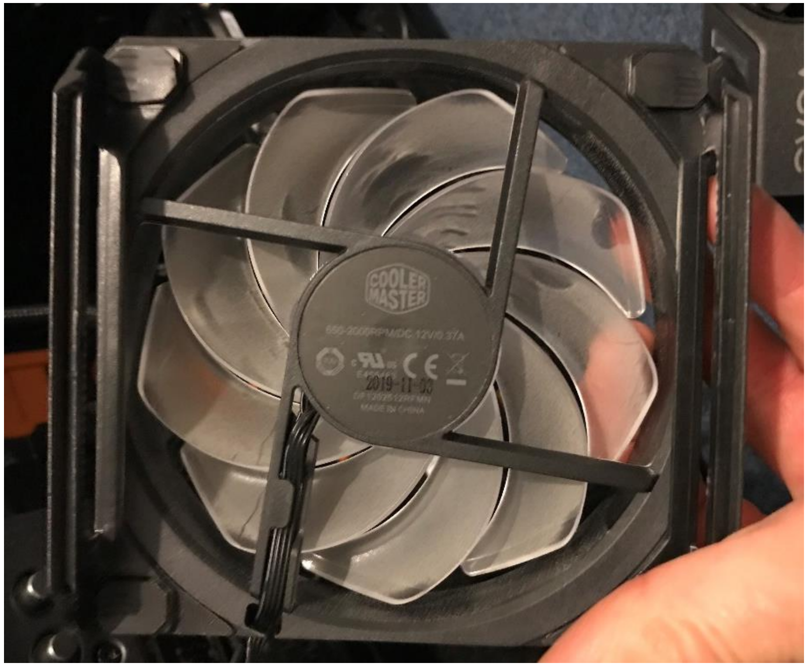


Oerlemans et al. AIAA 2008-2819

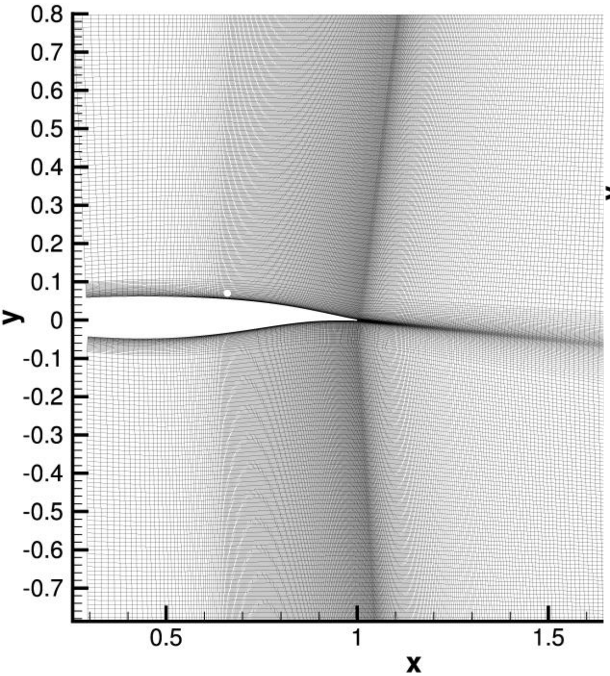
Quelle: EC-Project SIROCCO

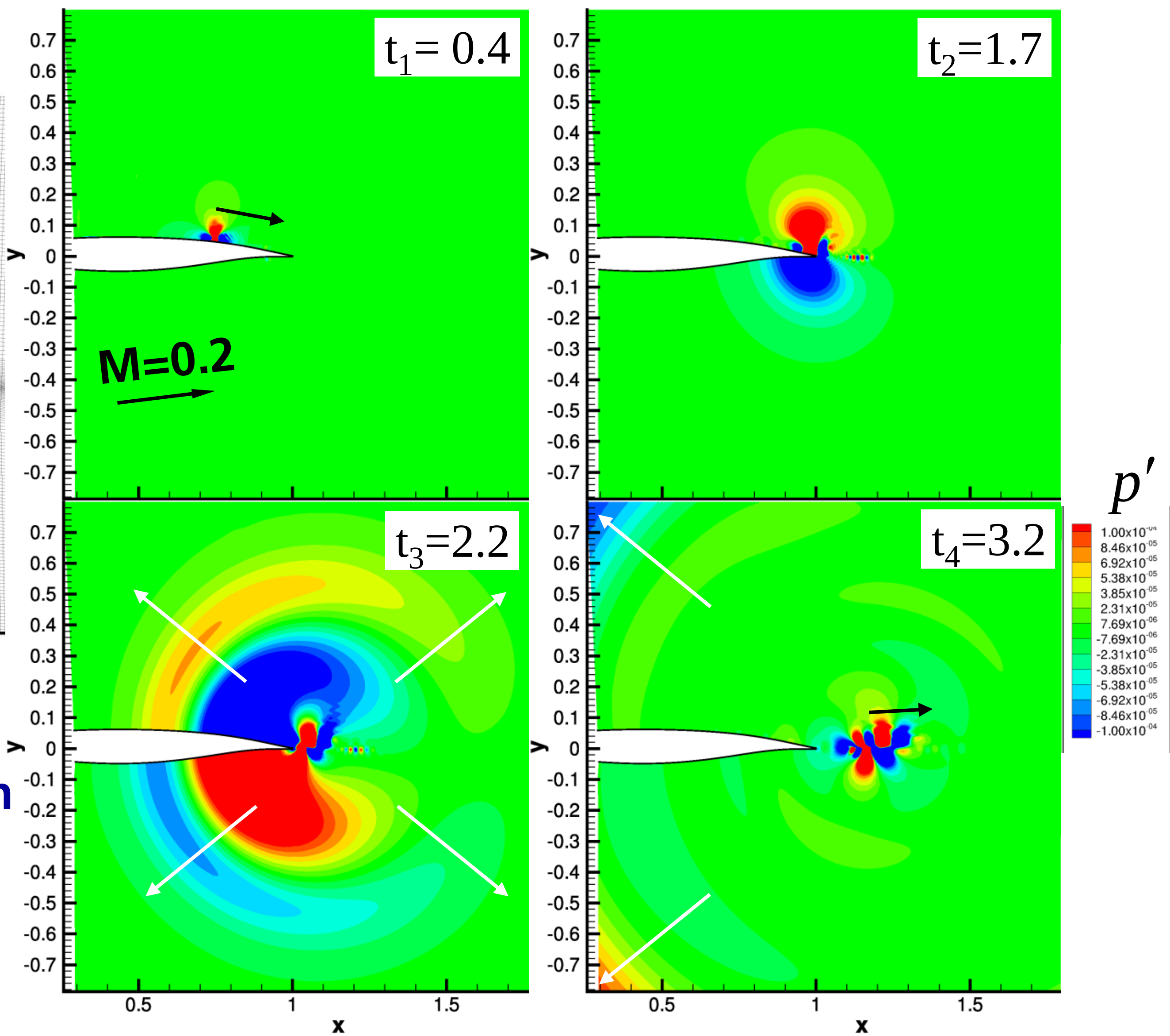
Hinterkantenschrägung PC Lüfter





Hinterkantengeräuschentstehung





Numerische Simulation

Konvektion eines Einzelwirbels über Profilhinterkante

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Abschlussbemerkung:

- Analyse nicht beschränkt auf Außenkanten (Lösung gültig auch für $m > 1$)
- Innenkanten für $1 < m < \infty$

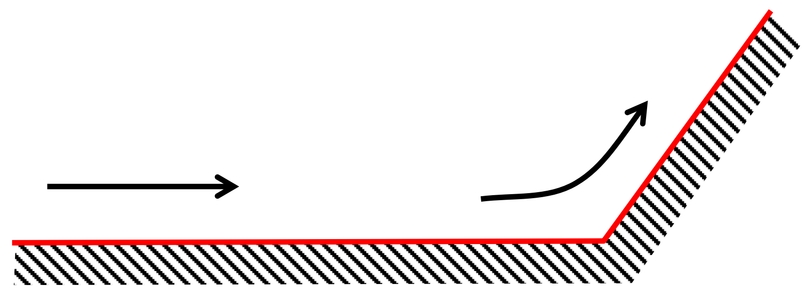
$\beta = 0^\circ (m = \frac{1}{2}):$

$I \sim U_\infty^5$

$\beta = 180^\circ (m = 1):$

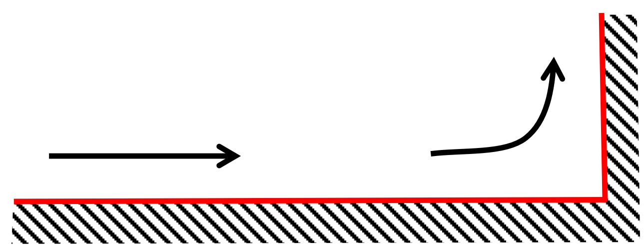
$I \sim U_\infty^8$

$\beta = 225^\circ (m = \frac{4}{3}):$



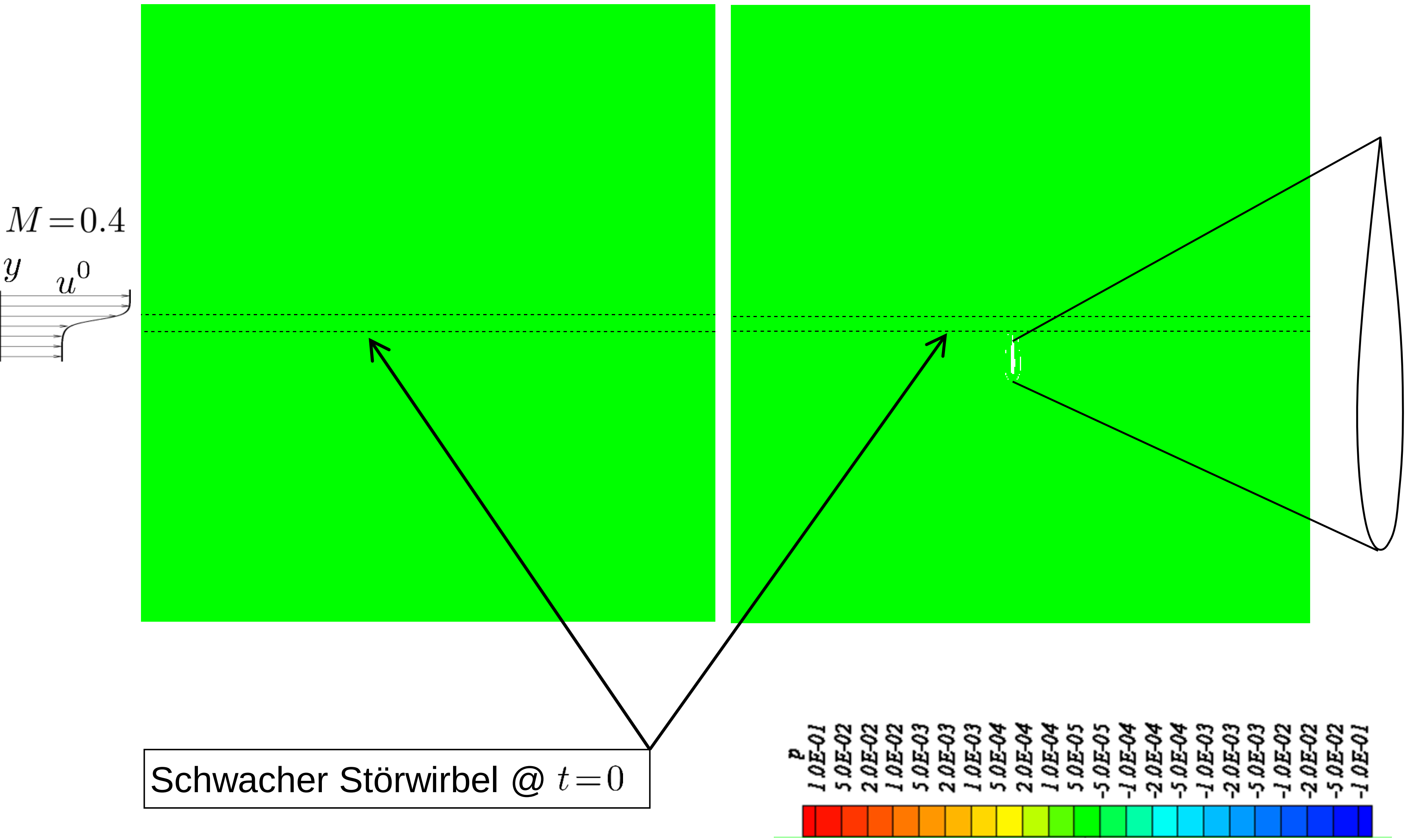
$I \sim U_\infty^{6\frac{2}{3}}$

$\beta = 270^\circ (m = 2):$



$I \sim U_\infty^8$

Umströmungsgeräusch - Quellmechanismen

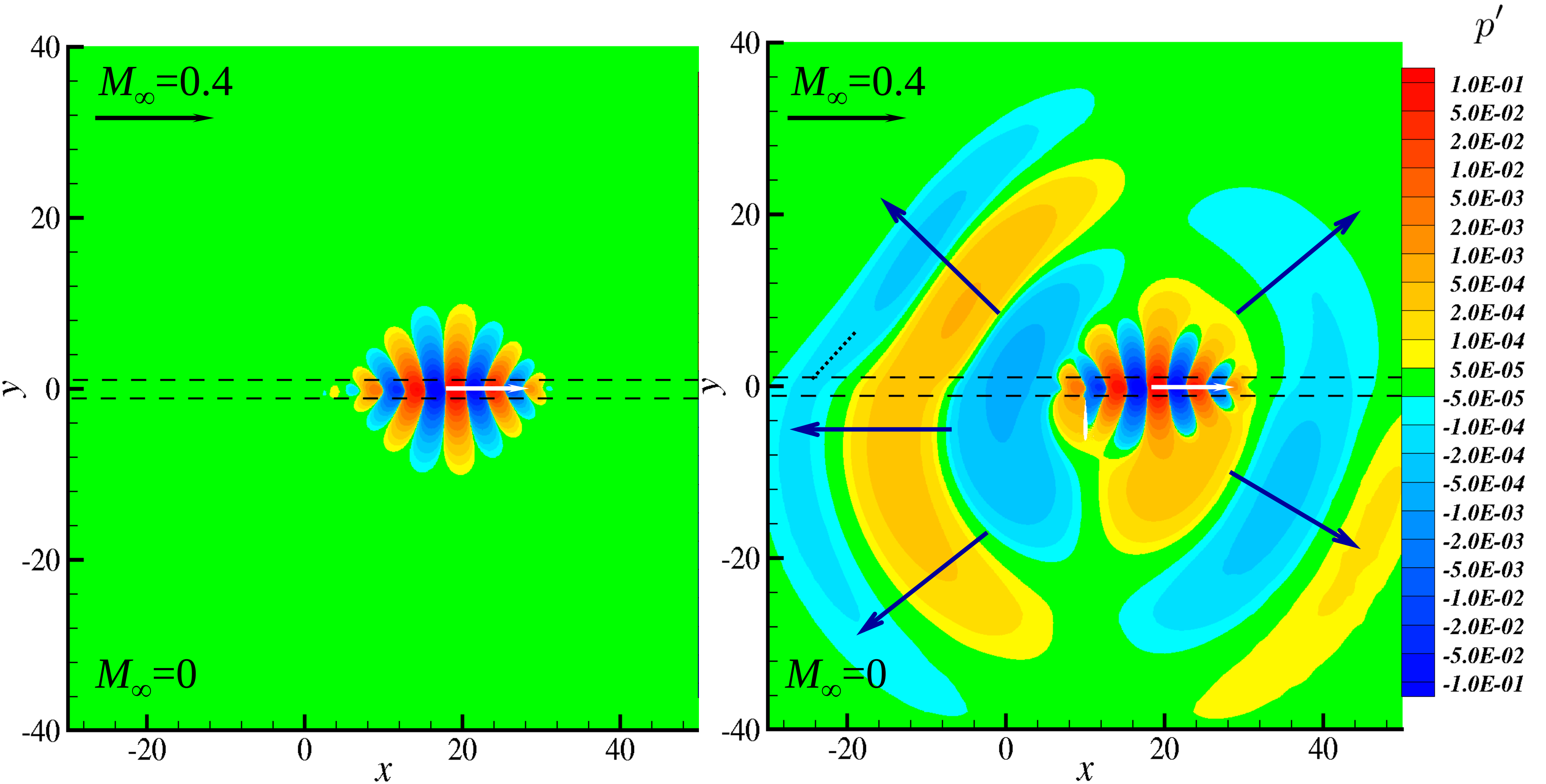


Schallentstehung an scharfer Schneide

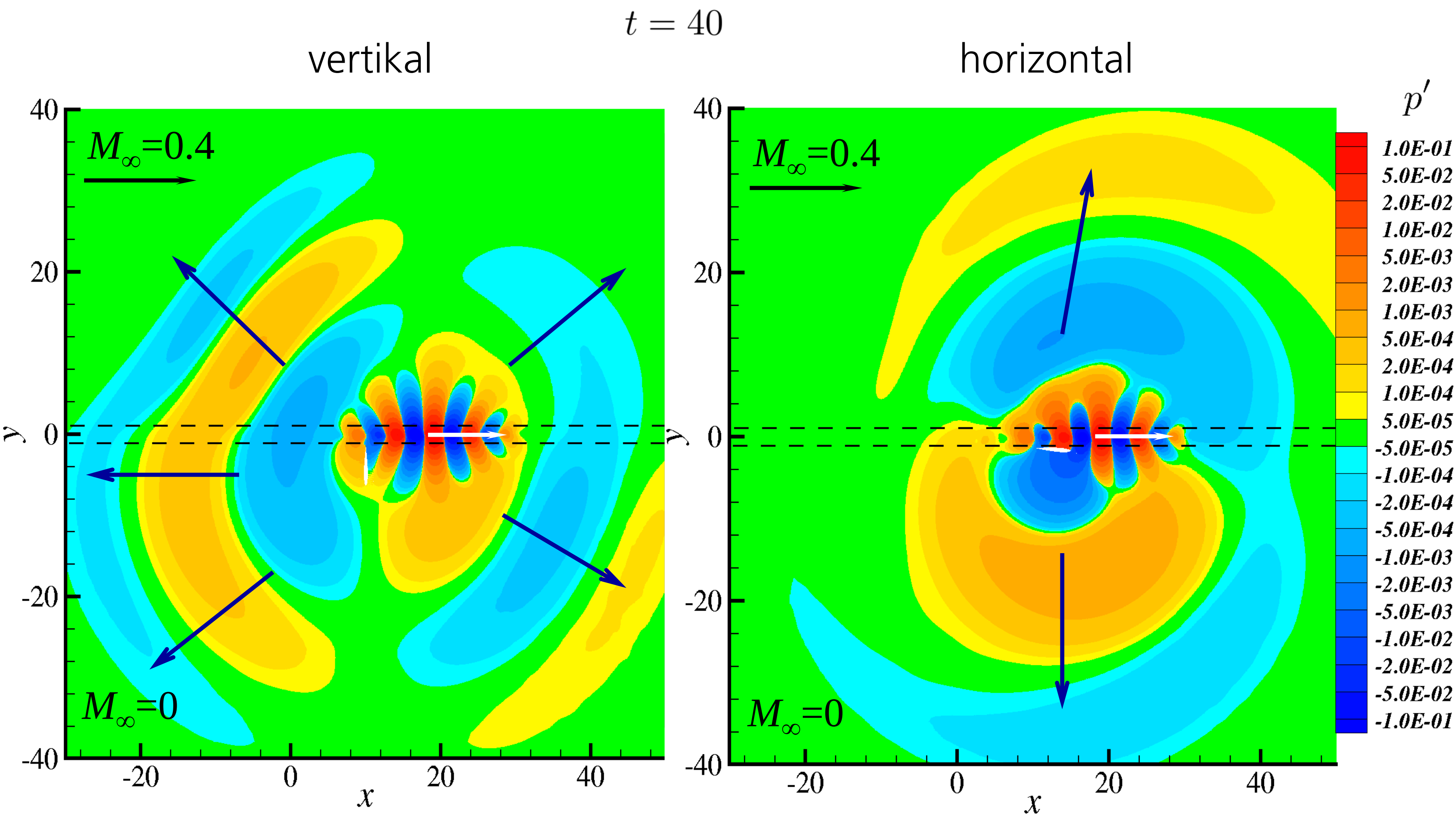
$t = 40$

freie Scherschicht:
anwachsendes Wellenpaket

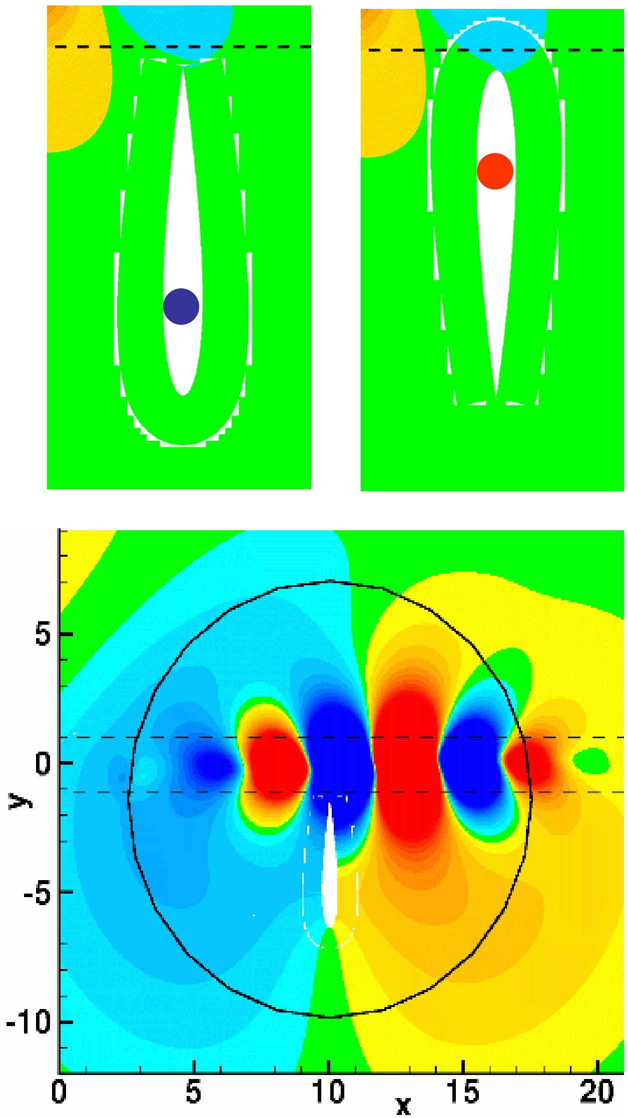
Scherschicht & Schneide:
Schallentstehung an Kante

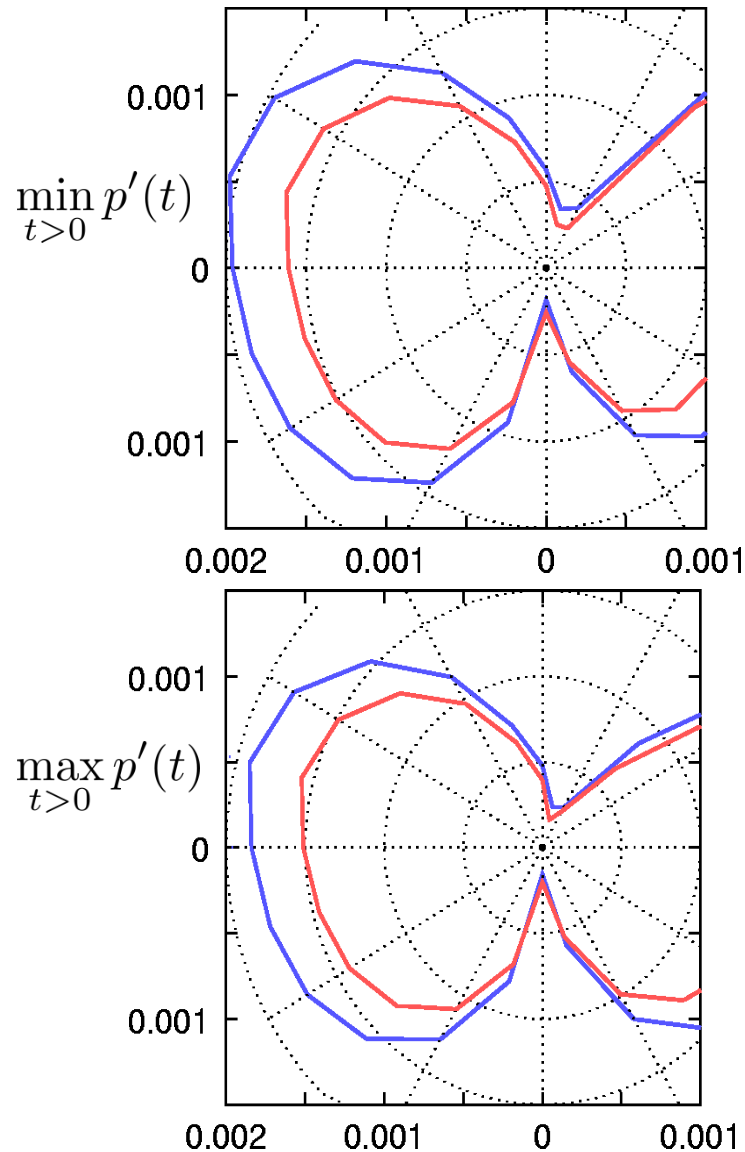


Einfluss Schneidenausrichtung



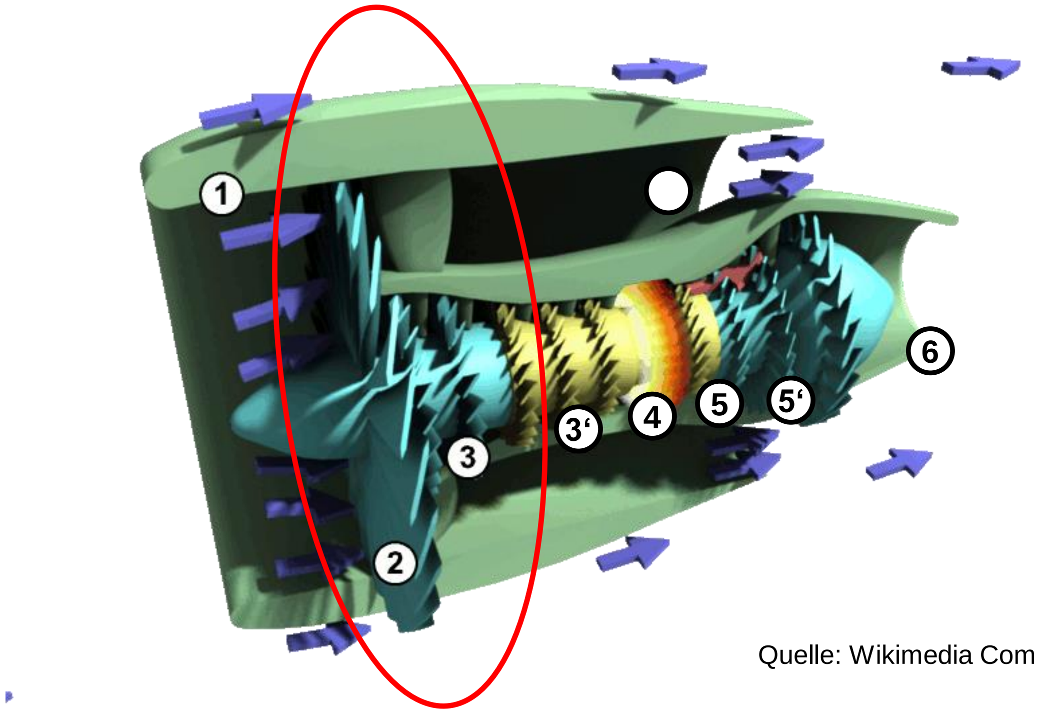
Einfluss Schneidengestalt





1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

(mit Material von Dr. Marco Rose, Rolls-Royce Deutschland)

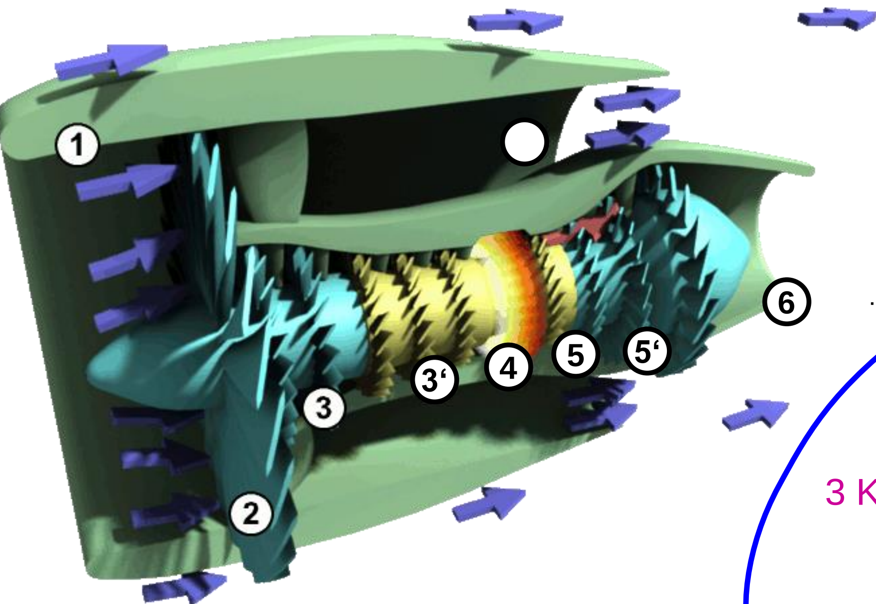


Quelle: Wikimedia Commons

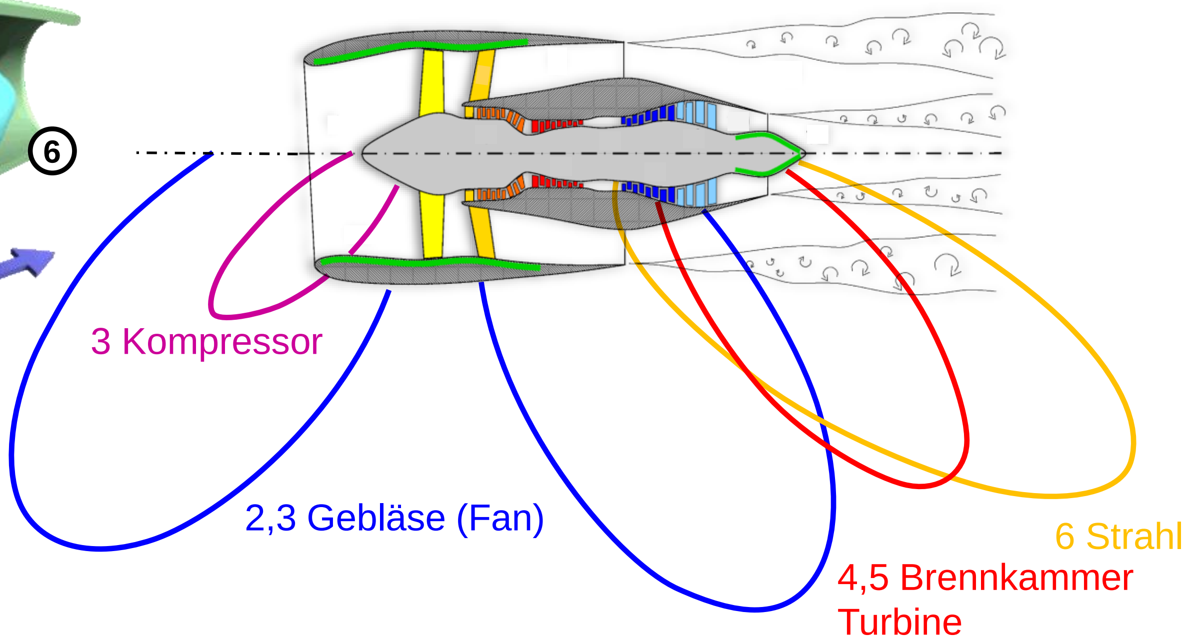
1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Hintergrund: tonale Schallanregung in axialen Turbomaschinen

Quellen am Triebwerk und Richtcharakteristiken schematisch

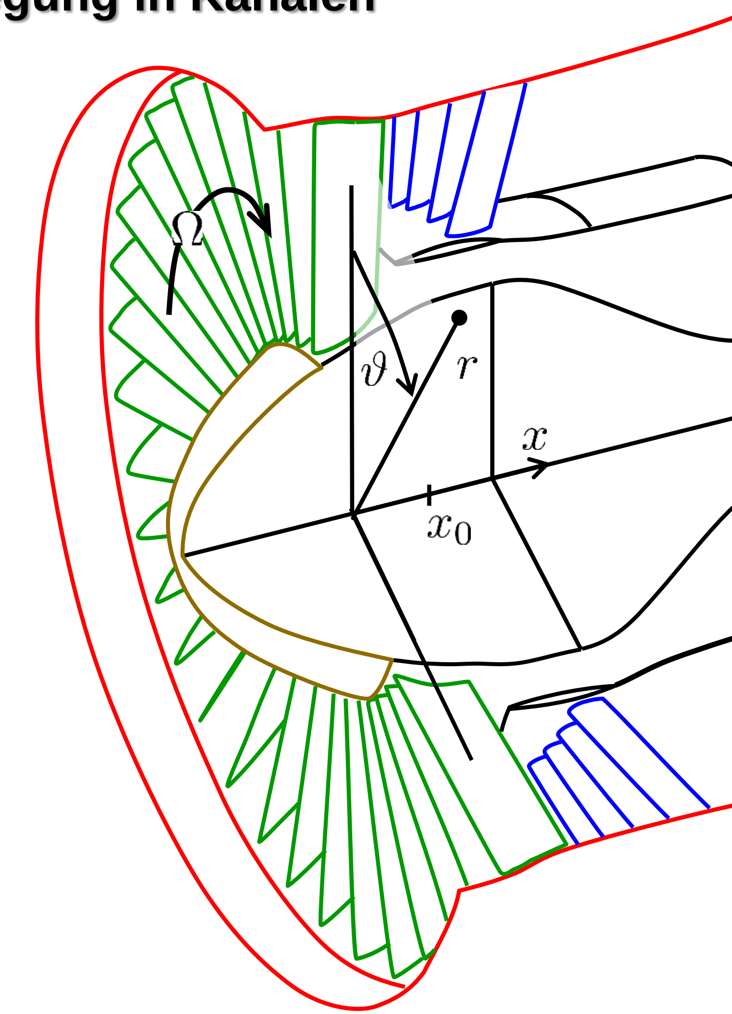


Quelle: Wikimedia Commons



Beispiel: Schallabstrahlung Triebwerk mit hohem Nebenstromverhältnis

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



Tonschallberechnung von Rotor-Stator Kombination

a) Welche Druckfelder werden angeregt?

b) Wie propagiert der Schall durch den Kanal?

Rotor mit B Schaufeln rotiert mit Winkelgeschw. Ω stromauf des Stators mit V Schaufeln

---

a) Welche Druckfelder werden angeregt?

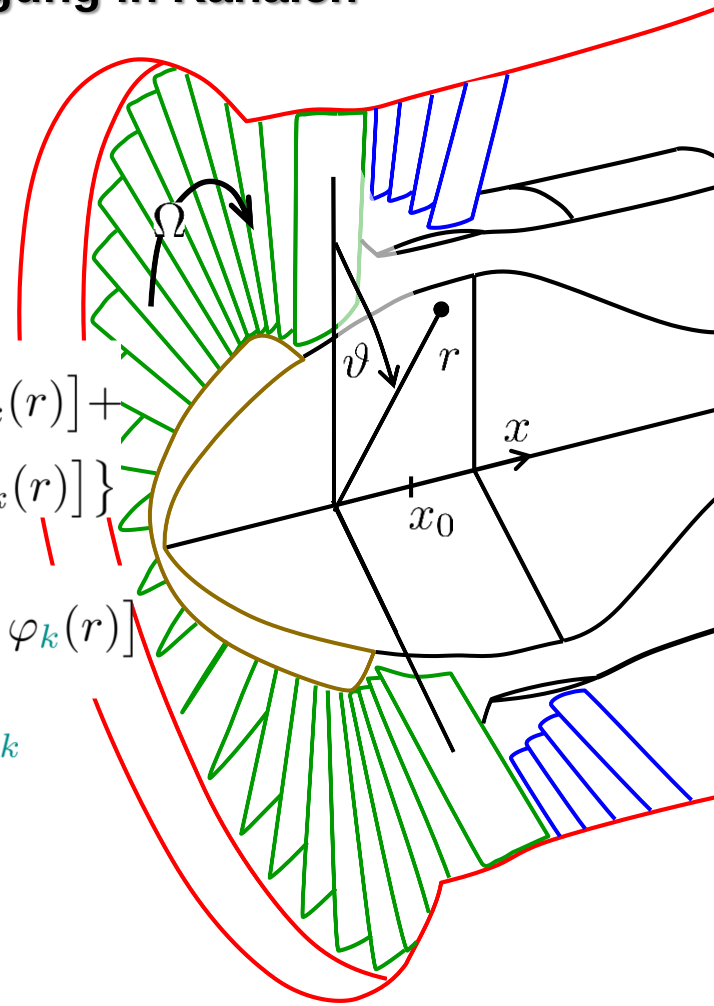
Ohne Rotor wäre Statordruckfeld periodisch mit Schaufelteilung $2\pi/V$ in ϑ

$$p(\vartheta, x = x_0, r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos\left[kV\vartheta + \varphi_k(r)\right]$$

Amplitudenmodulation vom Rotor mit Schaufelteilung $2\pi/B$ in ϑ

$$a_k(\vartheta, t, r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu k}(r) \cos\left[\nu B(\vartheta - \Omega t) + \varphi_\nu(r)\right]$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) =$$

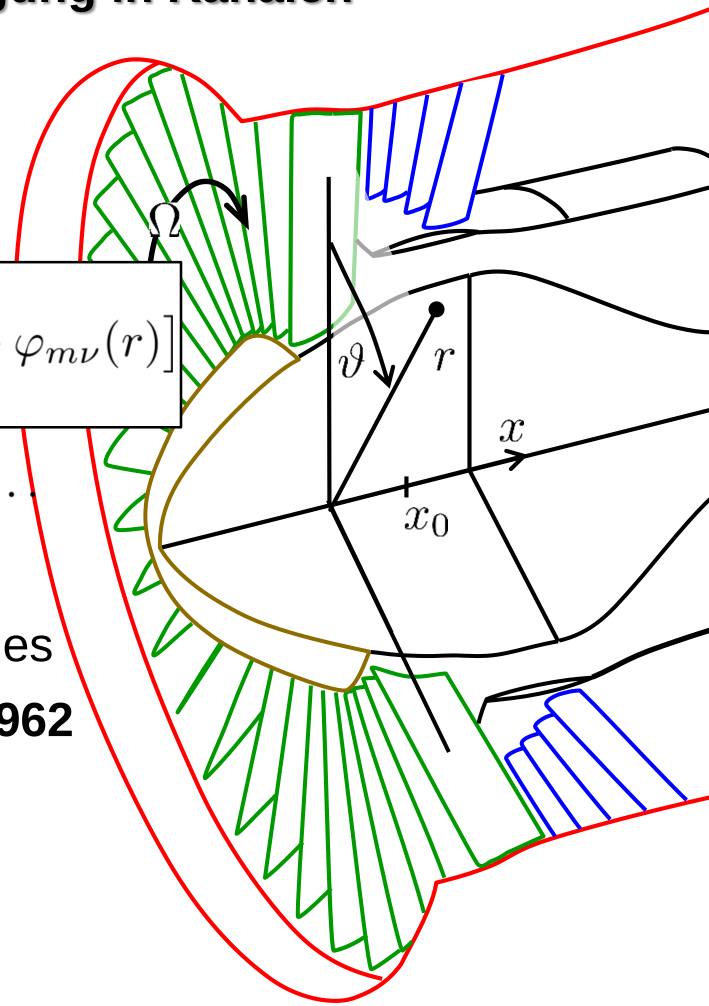
$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k}\Big\{\cos\left[\nu B(\vartheta-\Omega t)+kV\vartheta+\varphi_\nu(r)+\varphi_k(r)\right]+ + \cos\left[\nu B(\vartheta-\Omega t)-kV\vartheta+\varphi_\nu(r)-\varphi_k(r)\right]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{\nu k}\cos\left[\underline{\nu B}(\vartheta-\Omega t)+\underline{kV}\vartheta+\varphi_\nu(r)+\varphi_k(r)\right]$$

$$\text{mit} \quad a_{\nu(-k)} = a_{\nu k}, \varphi_{(-k)} = -\varphi_k$$

Einführung neuer Index $\underline{m := \nu B + kV}$ und Umnummerierung der Koeffizienten $a_{\nu k}$ zu neuem Koeffizienten $A_{m\nu} := a_{\nu(\nu B+kV)}/2$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{m\nu}(r) \cos\left[-\nu B \Omega t + m\vartheta + \varphi_{m\nu}(r)\right]$$

$$m := \nu B + kV; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Beschreibung von Druckstruktur des Wechseldruckfeldes von Rotor und Stator **TYLER/SOFRIN, 1962**

! Bemerkung: in der Summe über $m := \nu B + kV$ sind in der Regel nicht alle $m \in \mathbb{Z}$ enthalten (lückenhafter Index!), d.h. nicht alle Rotor/Statorkombinationen erzeugen alle denkbaren Umfangsmoden

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Komplexe Darstellung der durch Rotor – Stator Interaktion erzeugten Druckverteilung an der Quelle:

$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{A_{m\nu}(r) \exp\left(i[-\omega_\nu t + m\vartheta + \varphi_{m\nu}(r)]\right)}_{=:\, \hat{p}_{m\nu}} \right\}$$

$$\omega_\nu := \nu B \Omega$$

- $\mathrm{Re}\{\hat{p}_{m\nu}\}$ - m -te räumliche Komponente (Mode)
  - ν -te zeitliche Komponente

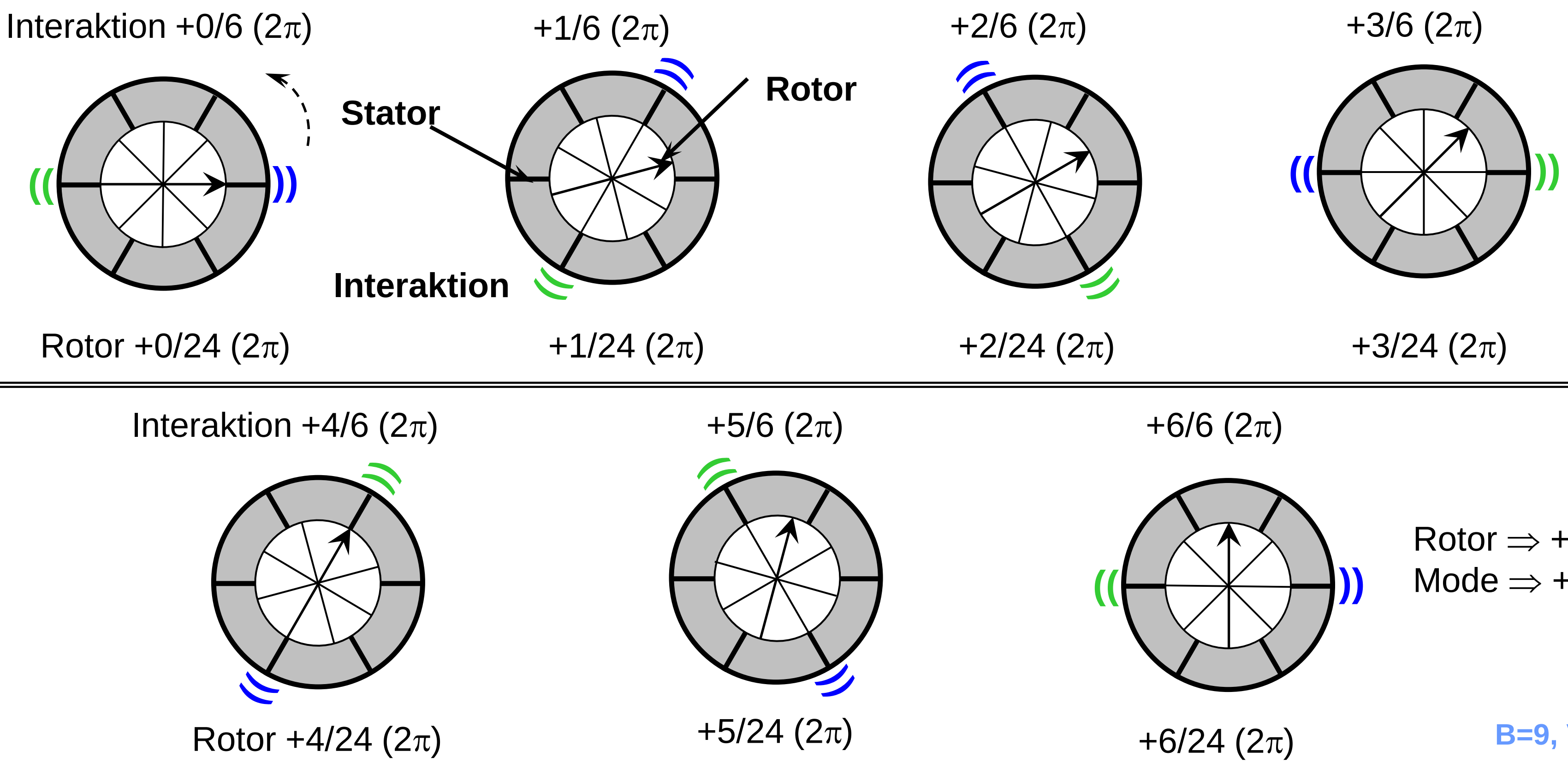
  der instationären Druckverteilung bei x_0

- Fall “Rotor ohne Stator” (V=0) eingeschlossen

- Repräsentiert eine in Umfangsrichtung laufende Mode:
  - $m > 0$ - Mode läuft in Drehrichtung des Rotors
  - $m < 0$ - Mode läuft entgegengesetzt der Drehrichtung des Rotors
  - Mode (der Ordnung m) rotiert mit Winkelgeschwindigkeit: $\omega_{m\nu} := \frac{\omega_\nu}{m} = \frac{\nu B \Omega}{m}$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Beispiel 1 (B>V): Rotor – Stator Interaktion B=8, V=6
- Für ν=1 (Fundamentale) ergibt sich die Mode mit *niedigster Ordnung* (mit k=-1)zu m=2.
- Rotationsgeschwindigkeit 4Ω > 0 (in Richtung des Rotors – 'co-rotating mode'!)



Rotor ⇒ +90°
Mode ⇒ +360°

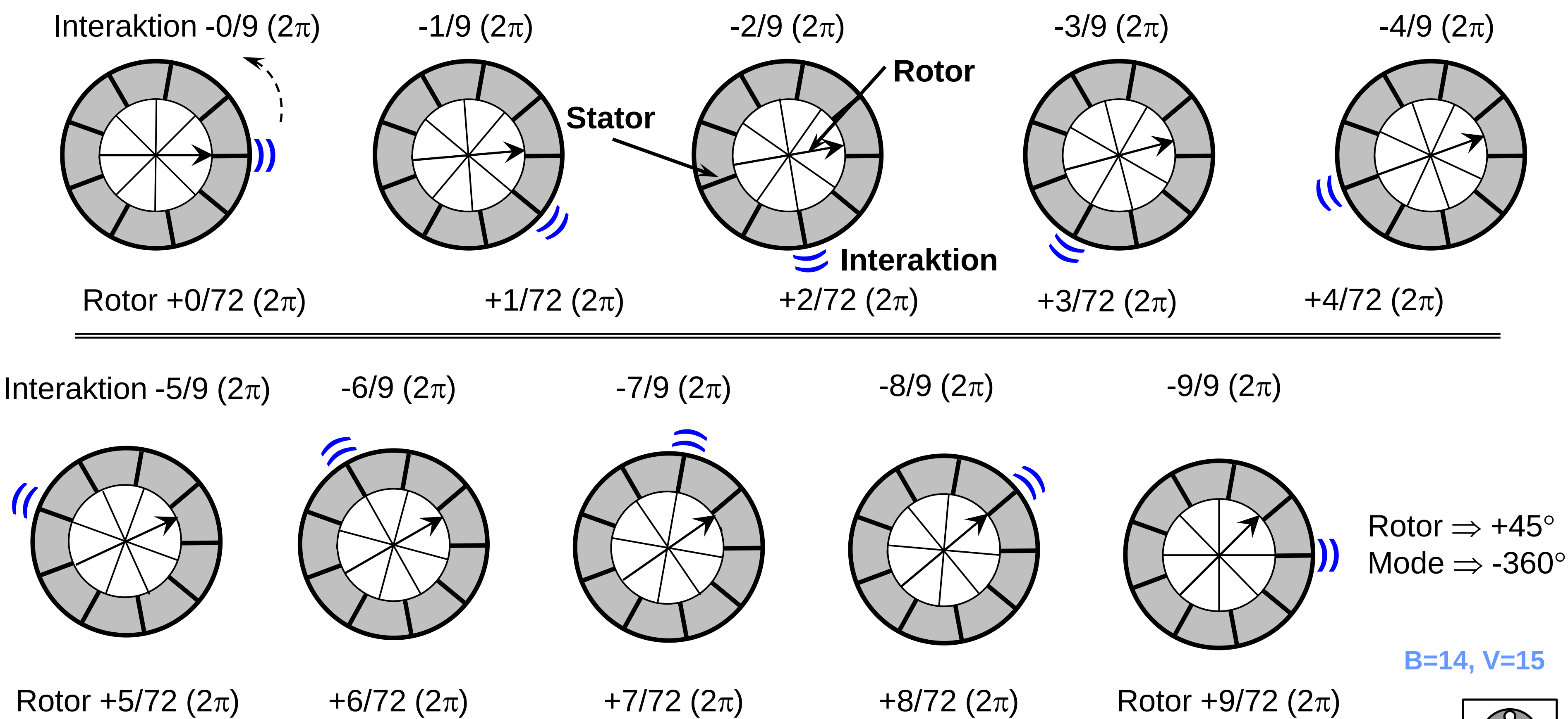
B=9, V=8

Rotor-Stator Interaktion nach TYLER/SOFRIN /5/

s.249-261

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Beispiel 2 (B<V): Rotor – Stator Interaktion B=8, V=9
- Für ν=1 (Fundamentale) ergibt sich die Mode mit *niedigster Ordnung* (mit k=-1)zu m=-1.
- Rotationsgeschwindigkeit $-8\Omega < 0$ (entgegen Drehrichtung des Rotors – 'counter-rotating mode'!)



B=14, V=15

Rotor-Stator Interaktion nach TYLER/SOFRIN /5/

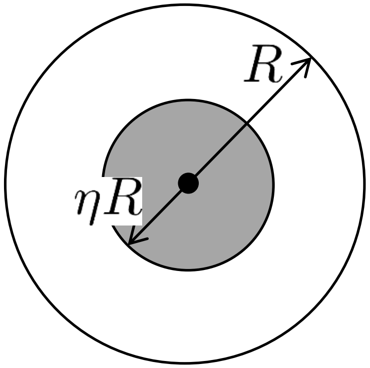
s.262-268

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

b) Wie propagiert der Schall durch den Kanal?

Voraussetzungen

- Ringkanal äußerer Radius R, innerer Radius $\eta R, (0 < \eta < 1)$,schallhart
- Stationäre Parallelströmung U entlang $+x$ (Kanalachse)



Wellengleichung für den Schalldruck

- „konvektiver Wellenoperator"

$$\frac{1}{a_\infty^2}\frac{D^2 p}{Dt^2} - \Delta p = 0 \text{ mit} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}$$

- spektral und in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{a_\infty^2}\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)p = 0$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Lösungsansatz

- Separation der Variablen

$$p(x,r,\vartheta,t) = \underbrace{A\,X(x) f(r) \Theta(\vartheta)}_{\hat{p}}\, e^{i\omega t}$$

$$\hat{p}(\vartheta,x,r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp(-i\alpha_m x) f_m(r) \exp(-im\vartheta)$$

$\hat{p}$ – komplexe Amplitude des Schalldrucks

Problem periodisch in $\vartheta \Rightarrow$

$$\Theta(\vartheta) = \exp(-im\vartheta),\ m \in \mathbb{Z}$$

Problem homogen in $x \Rightarrow$

$$X(x) = \exp(-i\alpha_m x)$$

- $x = \text{const} \Rightarrow$ Wellenausbreitung in ϑ, $\vartheta = \text{const} \Rightarrow$ Wellenausbreitung in x
  $\Rightarrow$ Kombination aus rotierendem und axial fortschreitendem Druckfeld

- Einsetzen in Wellengleichung $\Rightarrow$ Separationskonstante C_m^2

$$\underbrace{\frac{\left[a_\infty^{-2}\left(i\omega + U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right] X(x)}{X(x)}}_{-a_\infty^{-2}(\omega - \alpha_m U)^2 + \alpha_m^2} = \frac{\left[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{m^2}{r^2}\right] f_m}{f_m} =: -C_m^2$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$-a_\infty^{-2}\Big(\omega-\alpha_m U\Big)^2+\alpha_m^2=\frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\right]f_m}{f_m}=:-C_m^2$$

- Quadratische Gl. für axiale Wellenzahlkomponente α_m

$$\alpha_m^2=k^2\Big(1-\frac{\alpha_m}{\omega}U\Big)^2-C_m^2 \qquad \Rightarrow \alpha_m^\pm=\frac{k}{1-M^2}\Big[-M\pm\sqrt{1-(1-M^2)\frac{C_m^2}{k^2}}\Big]$$

$$k:=\omega/a_\infty$$

- Bessel'sche DGL für radiale Moden f_m

$$r^2 f_m''+r f_m'+(r^2C_m^2-m^2)f_m=0$$

- Substitution $\rho_m:=C_m r$ ergibt: $\rho_m^2 f_m''+\rho_m f_m'+(\rho_m^2-m^2)f_m=0$

- mit der allgemeinen Lösung $f_m(\rho_m)=J_m(\rho_m)+Q_m Y_m(\rho_m)$

beachte (bei neg. m): $J_{-m}=(-1)^m J_m,\quad Y_{-m}=(-1)^m Y_m$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- J_m – Besselsche Funktion (Zylinderfunktion) der 1. Gattung und der Ordnung m
  Y_m – Besselsche Funktion 2. Gattung und der Ordnung m (Weberfunktion, Neumannfunktion)

- Q_m, wie auch ρ_m (bzw. C_m^2) werden als Eigenwerte aus den Randbedingungen bestimmt. Damit liegt auch α_m fest

Randbedingungen

- Funktion $f_m(r)$ wird
  - durch die Geometrie des Ringkanals (Nabenverhältnis) und
  - durch die akustischen Eigenschaften der Wand bestimmt
  - (kein Nabenkörper (kreisrundes Rohr) $\Rightarrow \; Q_m = 0, \forall m$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Randbedingung bei $r = R, r = \eta R$ bei schallharter Wand:

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r = R) = \frac{\partial p}{\partial r}(r = \eta R) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow f'_m(r = R) = f'_m(r = \eta R) = 0$$

(beachte: gleich bei bei pos./neg. m)

- Zwei Gleichungen zur Bestimmung der n ten Nullstellen $\sigma_{mn} := C_{mn} R$ und der Konstanten Q_{mn}

$$J'_m(\sigma_{mn}) + Q_{mn} Y'_m(\sigma_{mn}) = 0, \quad J'_m(\eta\sigma_{mn}) + Q_{mn} Y'_m(\eta\sigma_{mn}) = 0$$

(numerische Lösung)

(beachte: $\sigma_{mn} = \sigma_{(-m)n}$, s.o.)

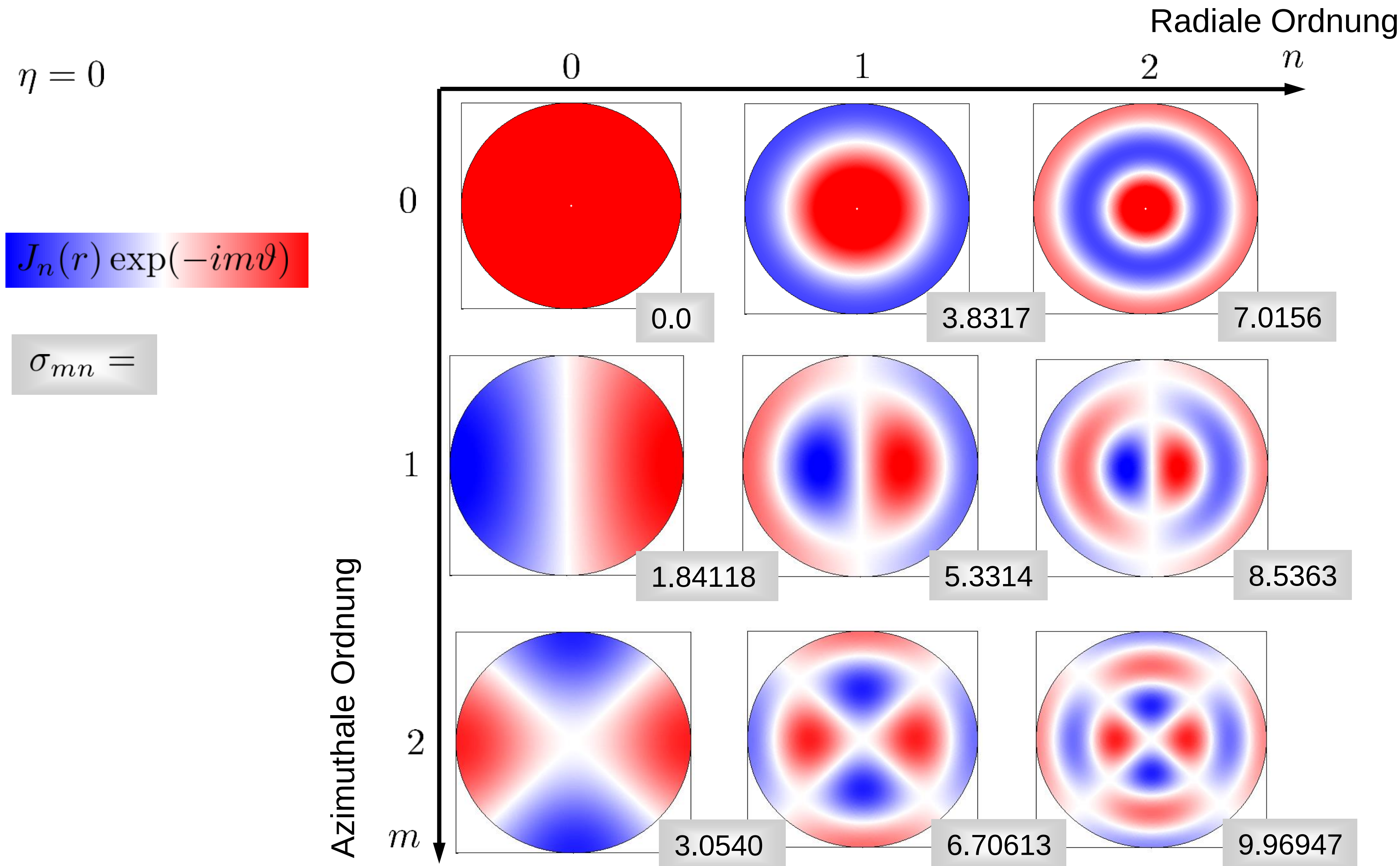
- damit ist die Wellenzahl in Achsrichtung (vgl. Gl. (189) in Grundlagen AA)

$$\alpha^{\pm}_{mn} = \frac{k}{1 - M^2}\left[- M \pm \sqrt{1 - (1 - M^2)\left(\frac{\sigma_{mn}}{kR}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{\hat{p}(\vartheta, x, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A^+_{mn} \exp(-i\alpha^+_{mn} x) + A^-_{mn} \exp(-i\alpha^-_{mn} x)\Big) f_{mn}(r) \exp(-im\vartheta)}$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$\eta = 0$



Modenstruktur und Eigenwerte σ_{mn} für kreiszylindrische Rohr, nach Stahl /4/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$\hat{p}(\vartheta, x, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_{mn}^{+} \exp(-i\alpha_{mn}^{+} x) + A_{mn}^{-} \exp(-i\alpha_{mn}^{-} x) \Big) f_{mn}(r) \exp(-im\vartheta)$$

Diskussion der Lösung

- Mode A_{mn}^{+} läuft in positive Richtung der x-Achse und stromab (in Richtung der Strömung)
  Mode A_{mn}^{-} läuft in negative Richtung der x-Achse und stromauf (entgegen der Richtung der Strömung)
- α_{mn} – Wellenzahlkomponente der akustischen Mode axialer Richtung x
- (m, n) - Ordnung der akustischen Mode in azimuthaler (ϑ) bzw. radialer (r) Richtung
- $\Rightarrow$ Tonerzeugung: Quelle generiert in der Referenzebene x_0 Moden mit festgelegter Struktur und Rotationsgeschwindigkeit, bestimmt durch Beschaufelung und Wellendrehzahl
- Erfüllt das erzeugte, rotierende Druckfeld die Wellengleichung im Sinne in axialer Richtung ausbreitungsfähiger, periodischer Druckschwankungen?

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Abkürzung:

$$\zeta_{mn} := 1 - (1 - M^2)\left(\frac{\sigma_{mn}}{kR}\right)^2$$

$$\Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm} = \frac{k}{1 - M^2}\left[- M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}\right]$$

Fallunterscheidung :

(1) $\zeta_{mn} \geq 0 :\Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ reell: beschreibt Welle, die sich für (periodische Lösungen):

a) $\alpha_{mn}^{+} > 0$: in positive x-Richtung (stromab) ungedämpft ausbreitet

b) $\alpha_{mn}^{-} < 0$: in negative x-Richtung (stromauf) ungedämpft ausbreitet

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

i. $\zeta_{mn} = 0 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ ist reell (Sonderfall von Fall (1)); dieser Fall tritt ein, wenn:

– die akustische Wellenzahl k bzw. die Frequenz $\omega = 2\pi f = k a_\infty$ einen bestimmten Wert annimmt (so daß die Helmholtz-Zahl $kR = \sigma_{mn}\sqrt{1-M^2}$):

$$f_{mn,c} = \frac{\sigma_{mn}}{2\pi R} a_\infty \sqrt{1-M^2}^{\,*}$$

s.269-280

– Höhere Moden sind nur **oberhalb** dieser Grenzfrequenz **ausbreitungsfähig** ⇒ **“Cut-On Frequency”**

– **Unterhalb** dieser Frequenz ist die akustische Mode **nicht ausbreitungsfähig**

ii. $\zeta_{mn} = 1 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ ist reell (Sonderfall von Fall (1)); dieser Fall tritt ein, wenn:

– Die Eigenwerte σ_{mn} verschwinden. Damit ist die Mode unabhängig von der Frequenz ausbreitungsfähig. Dies trifft für die Mode der Ordnung (0,0) zu.

*) vgl. Rechteckkanal $f_{mn,c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2}{d_y^2} + \frac{n^2}{d_z^2}}\, a_\infty \sqrt{1-M^2}$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

(2) $\zeta_{mn} < 0 \Rightarrow \alpha^{\pm}_{mn}$ ist komplex und beschreibt gedämpfte Ausbreitung des räumlichen Schwingungszustandes (aperiodische Lösungen):

- Für stromab und stromauf laufende Wellen
- Zustand klingt ab in axialer Richtung
- Im Gegensatz zu (1) i. wird der Zustand als **“Cut-Off”** bezeichnet
- ‘Cut-Off Ratio’ der Mode (m,n) :

$$f = \nu B\Omega/2\pi$$

$$\boxed{\xi_{mn} := \frac{f}{f_{mn,c}} = \frac{\nu BkR}{\sigma_{mn}\sqrt{1-M^2}} = \frac{\nu BM_{tip}}{\sigma_{mn}\sqrt{1-M^2}} \overset{!}{<} 1}$$

- Ist das ‘Cut-Off Ratio’ größer 1, ist die Frequenz der Mode (m,n) hoch genug, um ausbreitungsfähig zu sein (Fall (1))

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Weitere wichtige Zusammenhänge:
  - Axiale Phasengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Fläche konstanter Phase) der Mode:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\alpha_{mn}^{\pm}} = \frac{a_\infty(1-M^2)}{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}}$$

  - Für $\sqrt{\zeta_{mn}} > M$ ist die axiale Phasengeschwindigkeit positiv
    $\Rightarrow$ Transport der Information stromab
  - Gruppengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Einhüllenden eines Wellenpakets):

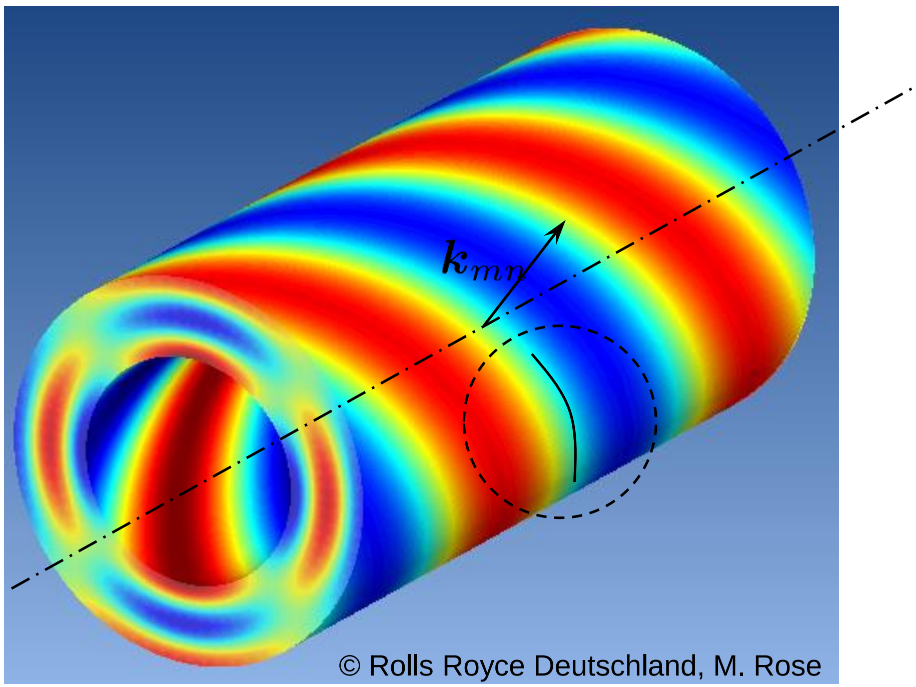
$$c_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha_{mn}^{\pm}} = \frac{a_\infty(1-M^2)}{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}^{-1}}$$

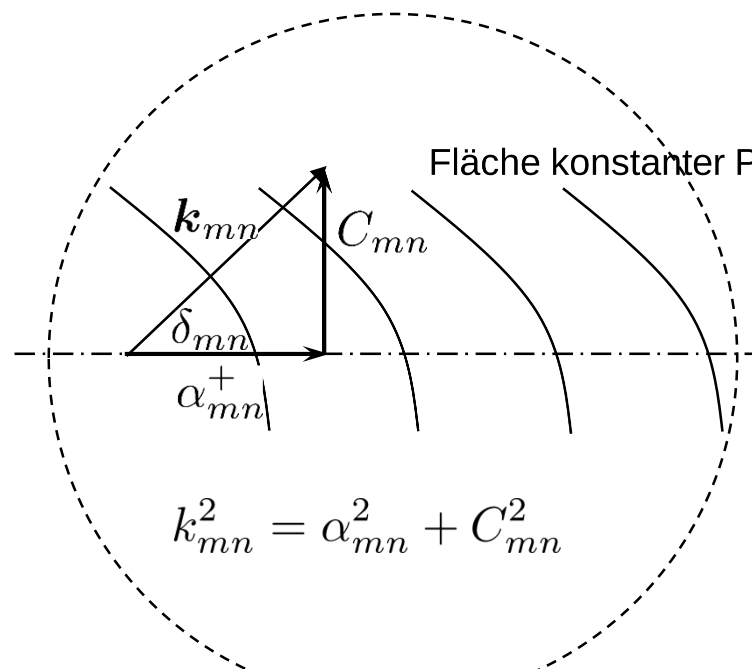
1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

– Für alle reellen Werte $\sqrt{\zeta_{mn}}$
Ausbreitungsrichtung wird durch Winkel δ_{mn} gekennzeichnet (oberes Vorzeichen $\Rightarrow$ stromab):

$$\cos\delta_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{|\boldsymbol{k}_{mn}|} = \frac{\alpha_{mn}}{\sqrt{\alpha_{mn}^2 + C_{mn}^2}} = \frac{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}}{1 \mp M\sqrt{\zeta_{mn}}}$$

(Ausbreitungsrichtung der Mode, wenn sie sich frei ausbreiten könnte, also ohne Außenberandung)





Ausbreitungsrichtung der höheren akustischen Mode (2,2) im kreiszylindrischen Ringkanal, nach Stahl /4/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Ausbreitungswinkel ist von der Mach-Zahl und der Frequenz abhängig
- Ist die Frequenz oberhalb der Grenzfrequenz $f_{mn,c}$ sind verschiedene Ausbreitungswinkel möglich, je nach Laufrichtung der Schallwelle ($\alpha^+_{mn}/\alpha^-_{mn}$, stromab/stromauf)
- Ausbreitungswinkel bei Grenzfrequenz ($\zeta_{mn} = 0$, “Cut-On”):

$$\cos\delta_{mn} = -M$$

- Bei diesem Winkel wird der Energietransport der stromauf laufenden Welle (α^-_{mn}) durch die Strömungsgeschwindigkeit kompensiert, und $c_{gr} \rightarrow 0$
- **Resonanz!** Schallenergie wird nicht abtransportiert $\Rightarrow$ Schalldruck im Rohr wird sehr groß

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Einige Auslegungsregeln

1. Anzahl der Rotoren / Statoren keine Vielfache voneinander ⇒ Vermeidung der Mode $(m,n)=(0,0)$ bei kleinen Werten von $\nu, |k|$ $\quad m=\nu B+kV\neq 0$
2. V so groß wählen, daß Fundamentale $\nu=1$ (Blattfolgefreq.) „cut-off“ ist*
3. V gewählt, so daß auch höhere Harmonische „cut-off“ sind ist prinzipiell möglich, aber selten realisierbar
4. Abstand zwischen Rotor/Stator (Stator/Rotor) möglichst groß wählen (Interaktion Nachlauf/Potentialfeld mit Rotor bzw. Stator minimieren)

---

*) betrachte cutoff-ratio $\xi_{mn}^2=\dfrac{(\nu B)^2 M_{tip}^2}{\sigma_{mn}^2(1-M^2)}\overset{!}{<}1$ bzw. $\dfrac{M_h^2-M^2}{1-M^2}\overset{!}{<}\dfrac{\sigma_{mn}^2}{(\nu B)^2}$

$M_h=\sqrt{M_{tip}^2+M^2}$ „helikale Blattspitzenmachzahl“. Erweitert:

$\dfrac{M_h^2-M^2}{1-M^2}\overset{!}{<}\dfrac{\sigma_{mn}^2}{m^2}\left(1+\dfrac{kV}{\nu B}\right)^2$, für Fundamentale also $\dfrac{M_h^2-M^2}{1-M^2}\overset{!}{<}\dfrac{\sigma_{mn}^2}{m^2}\left(1+k\dfrac{V}{B}\right)^2$

* beachte$_1$: linke Seite für subsonische Rotoren <1 und es gilt $\sigma_{mn}>|m|$. Daher macht Wahl $V>2B$ Fundamentale cutoff (beliebige k)!

* beachte$_2$: subsonische Rotoren (V=0) komplett cutoff (kein Tonschall)!

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Weiterführende Literatur

/1/ Hubbard, H. H.: Aeroacoustics of flight vehicles: theory and practice, volume 1: noise sources. NASA Reference publication 1258, vol.1, WRDC technical report 90-3052, 1991.

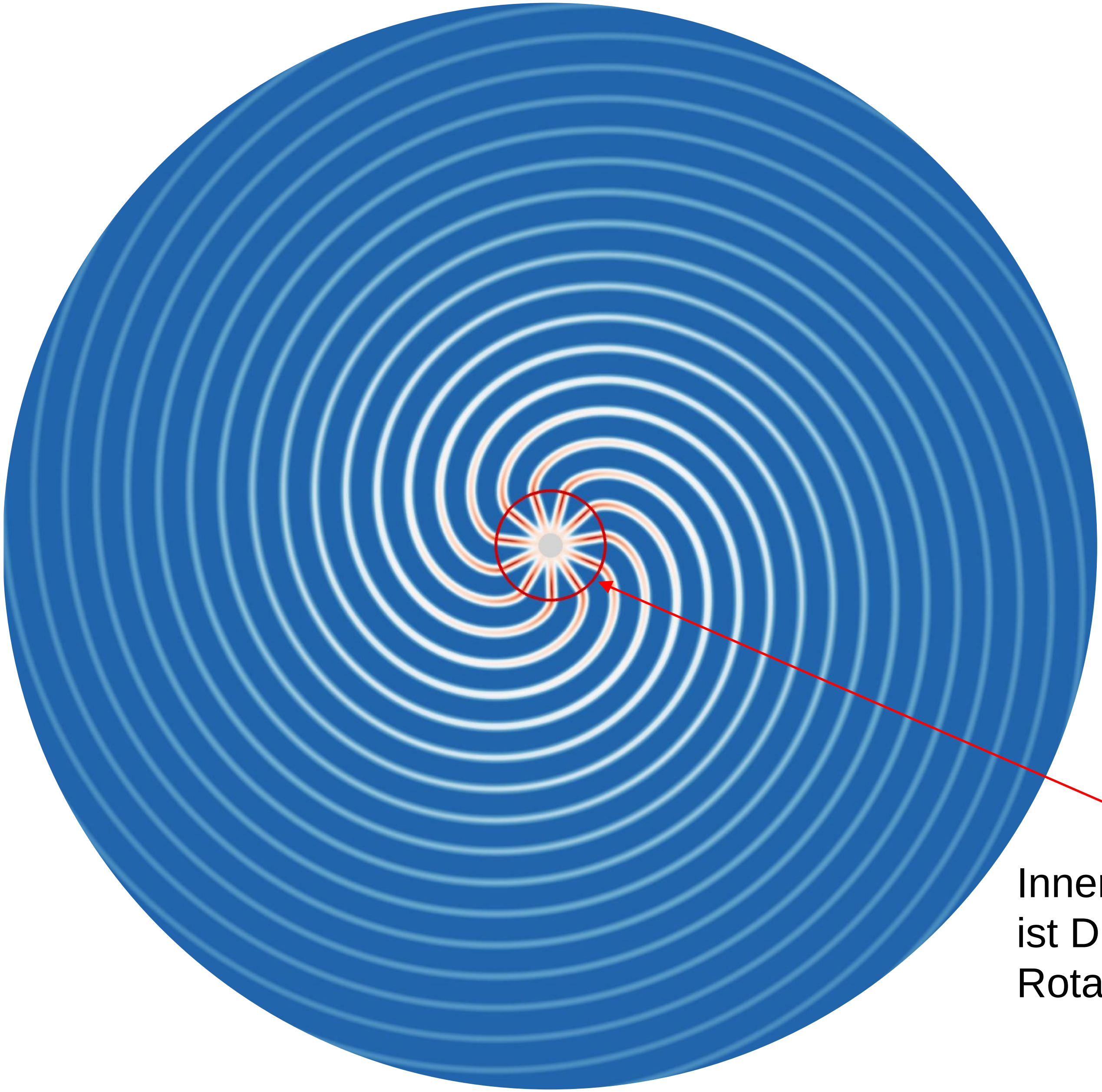
/2/ Munjal, M. L.: Acoustics of ducts and mufflers. John Wiley & Sons, Inc., 1987.

/3/ Smith, M. J. T.: Aircraft noise. Cambridge university press, 1989.

/4/ Stahl, B.: Experimenteller Beitrag zur Schallerzeugung durch die Turbulenz in einer Rohrströmung hinter einer unstetigen Querschnittserweiterung. Forschungsbericht DFVLR-FB 86-06, 1986.

/5/ Tyler, J. M.; Sofrin, T. G.: Axial flow compressor noise studies. SAE Transaction 70, 1962, pp 309-332.

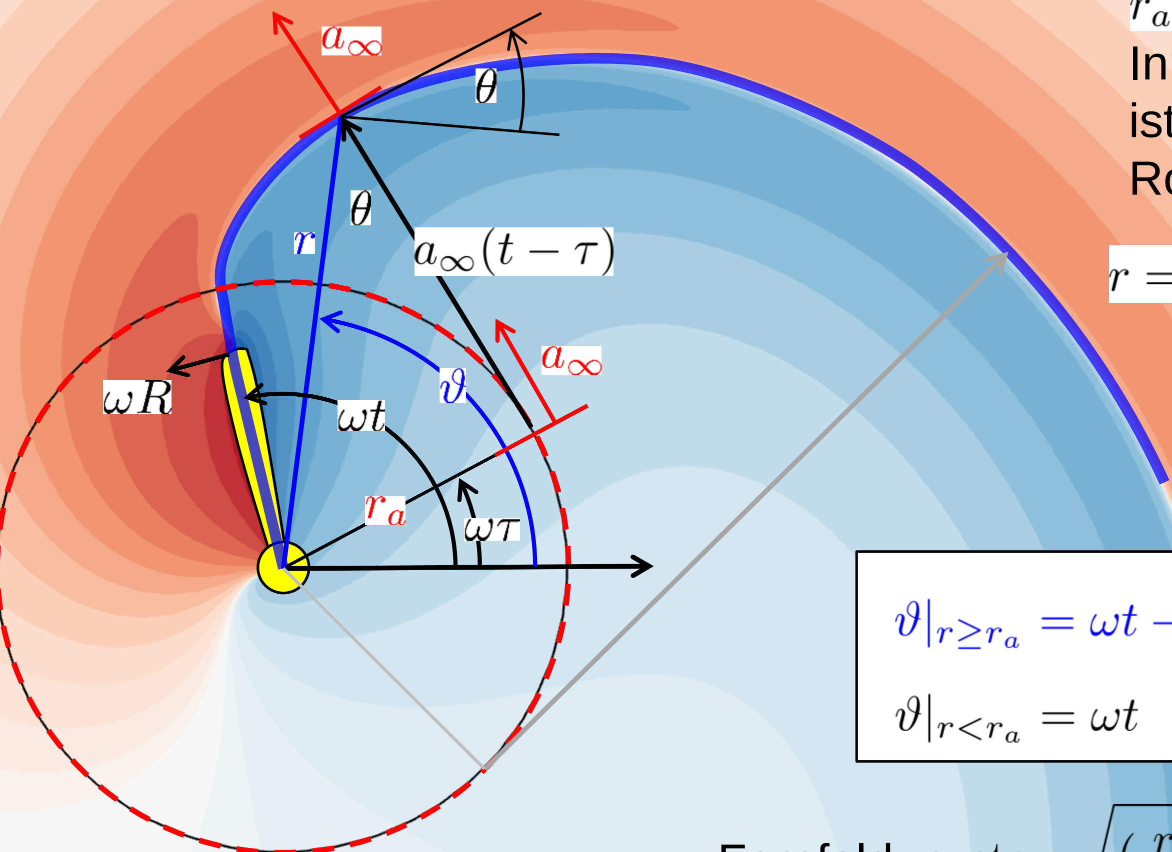
1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



freier Rotor
ohne Kanal
(Propellerschall)

Innerhalb sonischen Kreises
ist Drucksignatur an Starrkörper-
Rotation des Blatts gebunden

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



$r_a = a_\infty/\omega$ sonischer Radius

Innerhalb sonischen Kreises ist Drucksignatur an Starrkörper-Rotation des Blatts gebunden

$$r = \sqrt{r_a^2 + a_\infty^2(t-\tau)^2)}$$

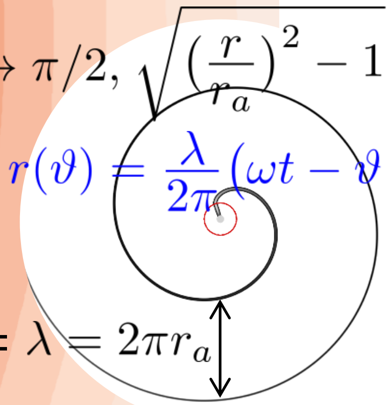
$$\Rightarrow \tau = t - \sqrt{r^2 - r_a^2}/a_\infty$$

$$\vartheta = \omega\tau + \arctan\left(\frac{a_\infty(t-\tau)}{r_a}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vartheta|_{r\geq r_a} &= \omega t - \sqrt{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 - 1} + \arctan\sqrt{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 - 1} \\ \vartheta|_{r<r_a} &= \omega t\end{aligned}}$$

Fernfeld: $\arctan\sqrt{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 - 1} \to \pi/2, \sqrt{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 - 1} \to r/r_a$

$$\vartheta \simeq \omega t - \frac{r}{r_a} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow r(\vartheta) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t - \vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$$

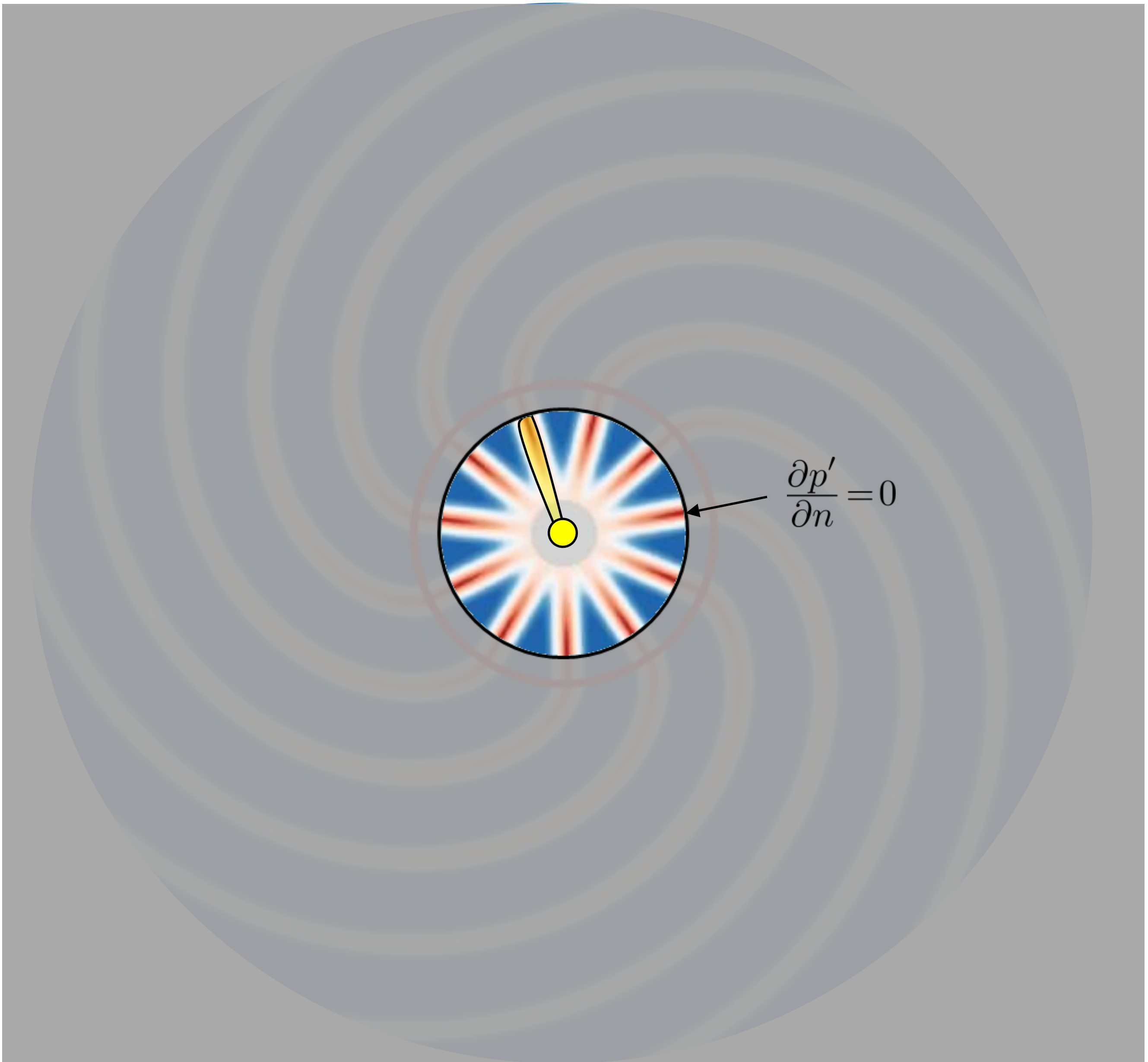


Gangweite = $\lambda = 2\pi r_a$

Beachte: $r_a/r = 1/M(r) = \sin\theta$

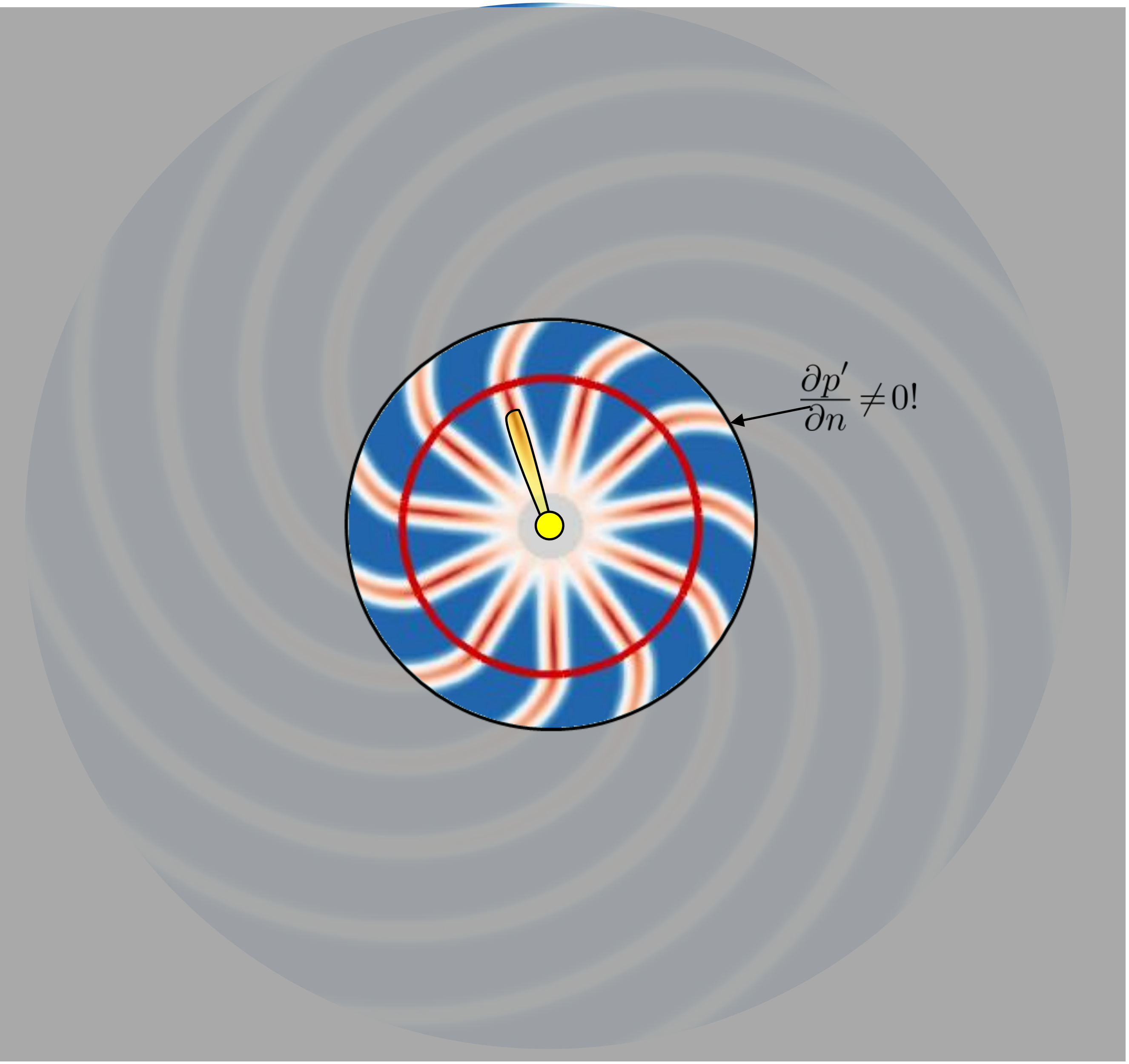
$\theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + \omega\tau$ Machwinkel

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



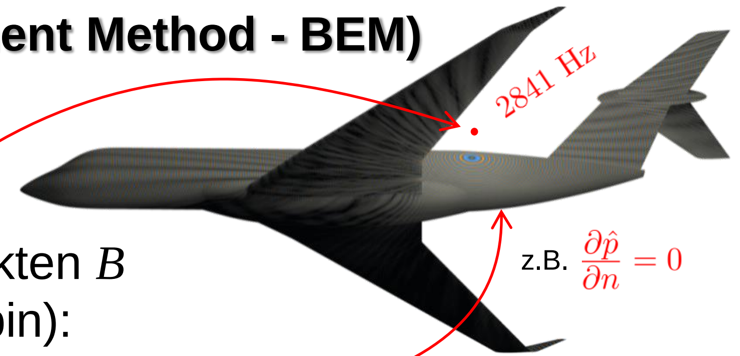
bleibt Rotor und Druckmuster innerhalb sonischen Kreises keine Schallausbreitung in Kanal (cutoff)

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



Ist Kanalradius größer als sonischer Radius sind progierende Druckmuster innerhalb Kanal
→ Schallausbreitung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

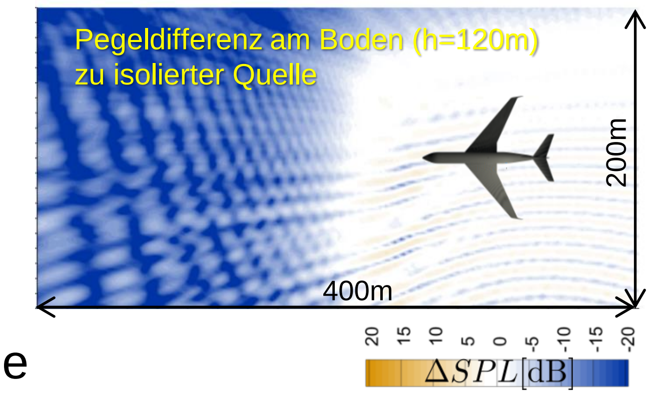


<u>Aufgabe:</u> Löse Helmholtzgleichung $k^2\hat{p} + \Delta\hat{p} = -\hat{Q}_p^*$

für Außenraumproblem mit beliebigen Objekten B
mit allg. Oberflächenrandbedingungen (Robin):

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -ik\rho_\infty a_\infty(\hat{a}\hat{p} + \hat{v}_n^{vib})$$

<u>Problem:</u> keine Green'sche Funktion bekannt



<u>Lösung:</u> transferiere tatsächliche Problemstellung in künstliches Freifeldproblem durch Aufnahme der Objekte in das Rechengebiet (über Heaviside Funktion, vgl. Grundlagenvorlesung) und nutze (bekannte) Freifeld-Green'sche Funktion $\hat{G}_0$ für die Helmholtzgleichung

$$\hat{G}_0(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x},\omega) = -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$$

(129): $$\hat{p}(\boldsymbol{x},\omega) = -\int\limits_{V_s} \hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi},\omega)\hat{G}_0\; dV(\xi) + \int\limits_{\partial V_B} \hat{p}\frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}\hat{G}_0\; dS(\xi)$$

*) nach Lighthillanalogie $\hat{Q}_p = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\widehat{\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} - \hat{\boldsymbol{\tau}}\right] - k^2(\hat{p} - a_\infty^2\hat{\rho})$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

nach Einsetzen von $\hat{G}_0$ in (129):

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\xi r = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_r$$

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_s} \frac{\hat{Q}_p \exp(-ikr)}{r}\, dV(\xi) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial V_B} \left[(ikr+1)\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\hat{p}}{r} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}\right]\frac{\exp(-ikr)}{r}\, dS(\xi)$$

$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$; $\boldsymbol{n}$ weist nach außerhalb von V_B

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -ik\rho_\infty a_\infty (\hat{a}\,\hat{p} + \hat{v}_n^{vib})$$

→ benötigt: $\hat{p}, \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ auf Wand (rechte Seite)!

noch unbekannt!
(Lösung selbst wird auf Wand benötigt: implizites Problem)

<u>wesentlicher Schritt:</u> wähle Beobachterposition $\boldsymbol{x}$ auf Wand, $\boldsymbol{x} \in \partial V_B$

→ Integralgleichung für $\hat{p}$ auf ∂V_B

<u>beachte:</u> Wenn $\boldsymbol{x}$ auf Rand liegt, läuft Oberflächenintegrationsvariable $\boldsymbol{\xi}$ irgendwann gegen $\boldsymbol{x}$, d.h. $r \to 0$ Singularität!

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Beitrag Oberflächenintegral $I_1 := \int_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r}(ikr+1)\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_r\ \frac{\hat{p}}{r}\ dS(\xi)$ für $r \to 0$

Für Teilfläche $\Delta S \in \partial V_B$: $I_1(r\to 0) = \int_{\Delta S} \hat{p}(\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}dS(\xi) = \hat{p}(\boldsymbol{x})\underbrace{\int_{\Delta S}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}dS(\xi)}_{=:\,\Phi}$

$\hat{p}$ stetig

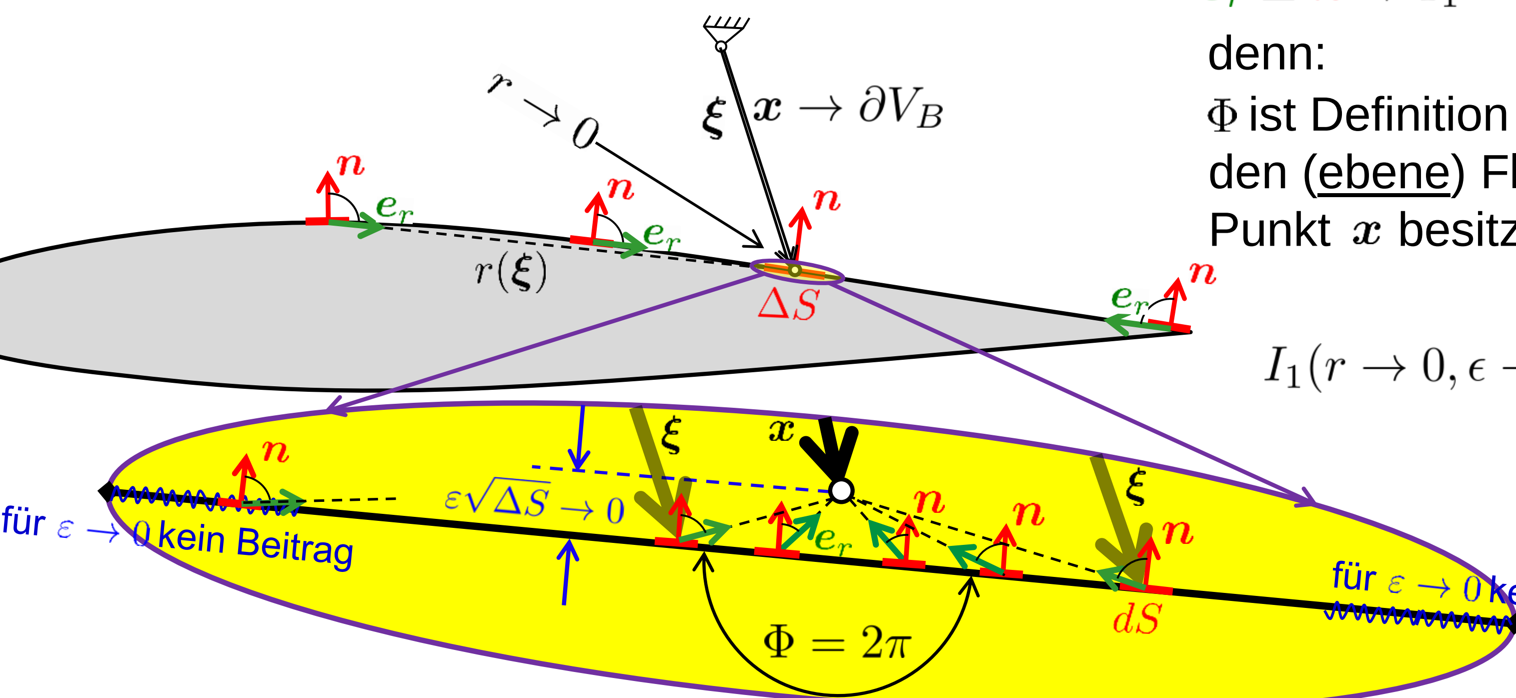
Für Φ betrachte $\boldsymbol{x}$ in Abstand $\varepsilon\sqrt{\Delta S}\to 0$ von ΔS:

Für stetige Oberflächen sind über alle lokalen Teilflächen $\Delta S(\xi)$ mit Ausdehnung $\sqrt{\Delta S} \ll R(\xi)$ (kleinerer Hauptkrümmungsradius an lokaler Kontur) Krümmungseffekte asymptotisch klein (ΔS quasi eben).

$\boldsymbol{e}_r \perp \boldsymbol{n} \Rightarrow I_1 = 0?$ nein!

denn:

Φ ist Definition des Raumwinkels, den (<u>ebene</u>) Fläche ΔS bezgl. Punkt $\boldsymbol{x}$ besitzt: $\Phi = \underline{2\pi}$



$I_1(r\to 0, \epsilon\to 0) = \hat{p}(\boldsymbol{x})\ 2\pi$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

betrachte zweiten Teil des Oberflächenintegrals:

$$I_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial V_B} \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} \, \frac{\exp(-ikr)}{r} dS(\xi)$$

In der Umgebung $\Delta S(\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x})$ der singulären Stelle $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}$ ergibt das Integral

$I_2(r \to 0) = 0$, da $dS(\xi) \sim r^2 d\Phi$

"unter Ausschluss der Singularität bei $r = 0$ (Cauchy'scher Hauptwert)"

$\Rightarrow$ Integralgleichung für $\hat{p}$:

$$2\pi \hat{p}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi}) \exp(-ikr)}{r} dV(\xi) + \fint\limits_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r} \left[\left(ik + r^{-1}\right) \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] \hat{p} \, dS(\xi)$$
$$+ \int\limits_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r} ik\rho_\infty a_\infty v_n^{vib} \, dS(\xi) \qquad \boldsymbol{x} \in \partial V_B \qquad (291)$$

BEM Grundgleichung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Kleiner Exkurs in Raumakustik

Betrachte Wirkung von Wänden/Kanten/Ecken auf Oberflächendruckamplitude infolge einfallenden Schallfelds $\hat{p}_i$ bei ebenen, passiven ($v_n^{vib} = 0$) Wänden

$$\left(1 - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\hat{p}(\boldsymbol{x}_S) = \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi})\exp(-ikr)}{4\pi r} dV + \oint_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}\left[\left(ik + r^{-1}\right)\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}}_{0} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a}\right]\hat{p}\, dS$$

Punkt auf:

ebener Wand:

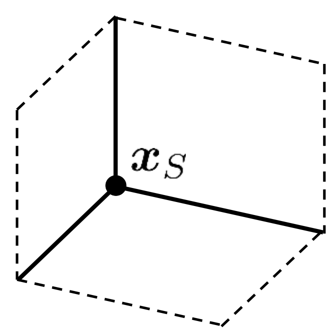
$$\Phi = 2\pi$$
$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_S) = 2\hat{p}_i$$
$$\Delta L_p = 6\text{dB}$$

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}_S) = \frac{\hat{p}_i}{1 - \frac{\Phi}{4\pi}}$$

Innenkante:

$$\Phi = 3\pi$$
$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_S) = 4\hat{p}_i$$
$$\Delta L_p = 12\text{dB}$$

Innenecke:



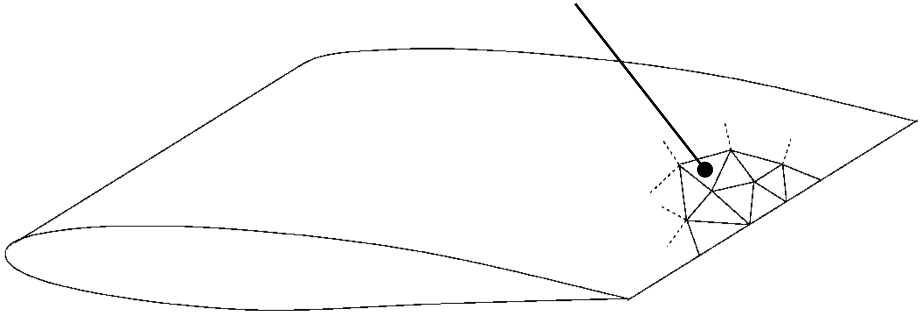
$$\Phi = \frac{7}{2}\pi$$
$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_S) = 8\hat{p}_i$$
$$\Delta L_p = 24\text{dB}$$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

4 Verfahrensschritte BEM:

(i) teile Oberfläche ∂V_B in finite Oberflächenelemente $\Delta S_j, j = 1, \ldots, N$ auf,

so dass $\sum_{j=1}^{N} \Delta S_j = \partial V_B$



(ii) führe Integration über jedem Randelement ΔS_j für Punkt $\boldsymbol{x}$ aus:

(a) p-Integral

$$I_j^p(\boldsymbol{x}) := -\int\limits_{\Delta S_j} \overbrace{\frac{\exp(-ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\left[\left(ik + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^{-1}\right)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a}\right]}^{:= c^p(\boldsymbol{\xi})} \hat{p}(\boldsymbol{\xi})\, dS(\xi)$$

Mittelwertsatz: $\int_{\Delta S_j} c^p(\boldsymbol{\xi})\hat{p}(\boldsymbol{\xi})\, dS(\xi) = \hat{p}(\boldsymbol{\xi}_c)\int_{\Delta S_j} c^p(\boldsymbol{\xi})\, dS(\xi)$ für einen Punkt $\boldsymbol{\xi}_c$ in ΔS_j

Näherung: $\boldsymbol{\xi}_c \approx \boldsymbol{\xi}_j$ (Schwerpkt des Elements) und berechne Restintegral*
für jeden Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_m,\ m = 1, \ldots, N$

*) numerisch über Quadraturformeln, z.B. 2ter, 4ter Ordnung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

<u>Verfahrensschritte BEM:</u>

(ii) … mit $\boldsymbol{r}_m := \boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}$ ist $I_j^p(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_m) \simeq: I_{jm}^p$ mit

$$I_{jm}^p = \underbrace{-\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{r}_m|)}{|\boldsymbol{r}_m|} \left[\left(ik + |\boldsymbol{r}_m|^{-1} \right) \frac{\boldsymbol{r}_m \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}_m|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] dS(\xi)}_{=: C_{jm}^p} \; \hat{p}_j$$

(b) v-Integral

$$I_{jm}^v = \underbrace{\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{r}_m|)}{|\boldsymbol{r}_m|} ik\rho_\infty a_\infty \hat{a}\, dS}_{=: C_{jm}^v} \; (\hat{v}_n^{vib})_j$$

(c) Quellintegral:

$$q_m^p := \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi}) \exp(-ik|\boldsymbol{r}_m|)}{|\boldsymbol{r}_m|} dV(\xi)$$

bekannt
(einfach auswerten)

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Verfahrensschritte BEM:

(ii) einsetzen in (291) gibt:

$$2\pi \hat{p}_m = q_m^p + \sum_{j=1}^{N} [-C_{jm}^p \hat{p}_j + C_{jm}^v (\hat{v}_n^{vib})_j] \quad \text{bzw. mit} \tag{292}$$

$$\underline{\underline{A}} := (4\pi - \Phi)\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}}^p \quad ; \quad \underline{R} := \underline{q}^p + \underline{\underline{C}}^v \underline{\hat{v}}_n^{vib}$$

$\underline{\underline{A}}\ \underline{\hat{p}} = \underline{R}$ lineares Gleichungssystem für Oberflächendrücke $\underline{\hat{p}}$

(iii) Lösung des (vollbesetzten, komplexen) linearen Gleichungssystems für $\underline{\hat{p}}$

(iv) Nachlaufrechnung (explizit) zur Berechnung des Schalldrucks an jedem $\hat{p}_n$ beliebigen Punkt des Außenraums $\boldsymbol{x} \notin \partial V_B$:

$$4\pi\ \hat{p}(\boldsymbol{x}) = q^p(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N} -C_j^p(\boldsymbol{x})\hat{p}_j + C_j^v(\boldsymbol{x})(\hat{v}_n^{vib})_j \tag{293}$$

$$C_j^p(\boldsymbol{x}) = -\!\!\!\!\!\!\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\left[\left(ik + |\boldsymbol{r}|^{-1}\right)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a}\right] dS(\xi) \quad \text{etc.}$$

$$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Bemerkungen:

$$I^p_{jm} = -\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{r}_m|)}{|\boldsymbol{r}_m|}\left[\left(ik + |\boldsymbol{r}_m|^{-1}\right)\frac{\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}_m|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a}\right] dS(\xi)\,\hat{p}_j$$

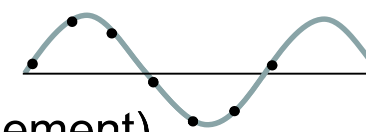
- Wahl der <u>Größe von Elementen</u>: Fehler der Darstellung des Felds $\hat{p}(\boldsymbol{\xi}_c,\omega)$in (291) durch Werte $\hat{p}_j = \hat{p}(\boldsymbol{\xi}_j)$ am Schwerpunkt $\boldsymbol{\xi}_j$ des Elements, ergibt sich aus Betrachtung des Verlaufs von $\hat{p}$ im Element nahe $\boldsymbol{\xi}_j$, also $\hat{p} \sim \exp(-ik\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))$ wobei $\boldsymbol{e}_k := \boldsymbol{k}/k$. Maximale Variation entlang Ausdehnung $\max(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)) \simeq l_e$. Maximale Abweichung von Schwerpunktswert über Element $\Delta\hat{p} = \hat{p}(\boldsymbol{\xi}) - \hat{p}(\boldsymbol{\xi}_j) \simeq [1-\exp(ikl_e)]$ kann durch Potenzreihe von $\exp(ikl_e)$ abgeschätzt werden

$$1-\exp(ikl_e) = \frac{(kl_e)^2}{2!} - \frac{(kl_e)^4}{4!} + \cdots + i\left\{-\frac{(kl_e)}{1!} + \frac{(kl_e)^3}{3!} - \frac{(kl_e)^5}{5!}\ldots\right\}$$

schnelle Konvergenz der Reihe nur für $kl_e < 1 \Rightarrow l_e < \lambda/2\pi \simeq \lambda/6$

$\Rightarrow$ **Elementgröße kleiner als ein Sechstel der Wellenlänge**!

(Phasenvariation über Element gering: „akustisch kompaktes“ Element)



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Bemerkungen:

- BEM erlaubt numerische Berechnung der exakten Green'schen Fktn, wenn $\hat{Q}_p = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$ gesetzt wird.

- Für Außenraumprobleme ergibt sich Problem, wenn interessierende Frequenz mit Resonanzfrequenz des Innenraums V_B für $\hat{p} = 0 \text{ auf } \partial V_B$ übereinstimmt. Die dazugehörige Eigenform erscheint zusätzlich in der Lösung (für das Außenproblem) und ist unphysikalisch. Damit werden die spezifizierten Randbedingungen für $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ verletzt!

  Abhilfe : „Burton-Miller Korrektur"*: punktweises Erzwingen der Randbedingung für $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ auf dem Rand $\Rightarrow$ spezielle Behandlung neu auftretender Singularitäten in Integralen notwendig.

*) A. J. Burton and G. F. Miller, *Proc. R. Soc. Lond. A* 1971 **323**, 201-210

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Vorteile BEM:

- Diskretisierung nur auf Oberfläche, obwohl 3D Problem! (3D Diskretisierung nur im Quellgebiet V_S)
- Lösung wird nur dort produziert, wo nötig
- Abstrahlungsbedingung inhärent erfüllt!

Nachteile BEM:

- Freifeld Green'sche Fktn $\hat{G}_0$ für Problem wird benötigt, aber evt. nicht vorhanden (konstante Strömung kann noch berücksichtigt werden)
- Gleichungssystem teuer zu lösen, da voll besetzt
- Anzahl der Elemente steigt quadratisch mit Frequenz ! $N \simeq (6/\lambda)^2 A = (6 f^2/a_\infty^2) A$

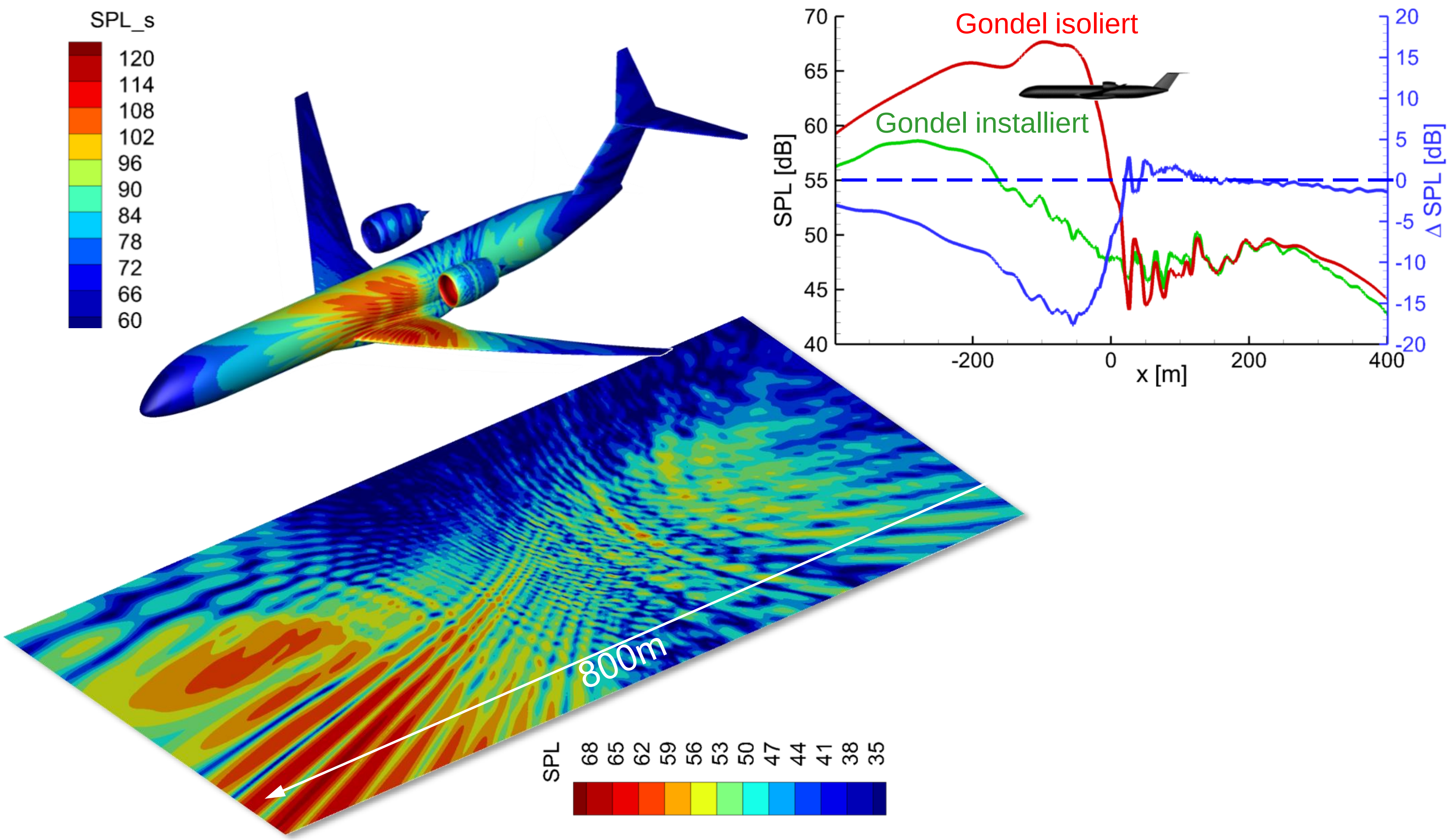
  z.B. A340: $A = 2250\ \mathrm{m}^2$ @ 4,5kHz ⇒ N=1,4 · 10^7 ⇒ 2 · 10^{14} Matrixelemente
  single precision ⇒ $8N^2$ = 1.41PByte, derzeit größter Rechner:
  „Summit" (No.1 2019)* = 2.74 PByte!

- Alternativen:
  „Fast Multipole Boundary Element Method"
  - Löse $\underline{\underline{A}}\,\underline{\hat{p}} = \underline{R}$ iterativ
  - Clustering $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{\mathrm{nah}} + \underline{\underline{A}}^{\mathrm{fern}}$ (approx.) : $N^2 \rightarrow N^{3/2}$
  - multi level octree/interpol. : $N^{3/2} \rightarrow N \log N$

*) top500: https://www.top500.org/lists/2019/06 , 23.09.2019

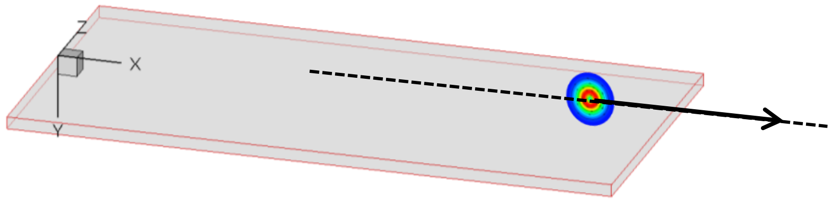
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Abschattung an Flugzeugkonfiguration (vollskalig wellenauflösend)



M. Lummer, M. Staggat, DLR ATLAS AS/AT 2019/20

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)



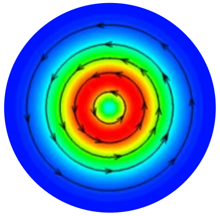
Beispiele:

Hinterkantenschall:
Betrachte Wirbelpassage über Hinterkante,

Annahme Parallelströmung $\boldsymbol{v} = u^0(y)\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{v}'$. Dann ist $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 2\rho_\infty \dfrac{du^0}{dy}\dfrac{\partial v'}{\partial x}$

Modelliere $\boldsymbol{v}'$ bzw. v' als Komponente eines Störwirbels mit Stromfunktion

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\sqrt{e}h_w}{\ln 4} v_{max}\boldsymbol{e}_z \exp\left(-\frac{\ln 2}{h_w^2}\left[(x-u^0(y)t)^2 + (y-d)^2 + z^2\right]\right)$$

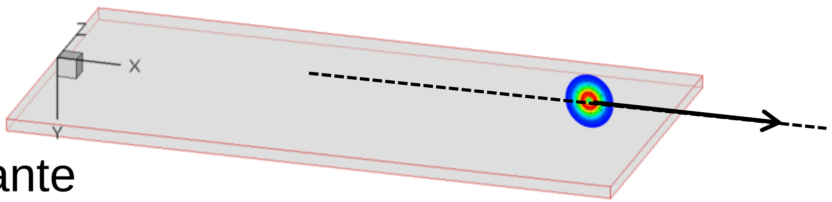


$$\Rightarrow \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_z}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\frac{\ln 2}{h_w^2}\psi_z \begin{pmatrix} (x-u^0 t)\dfrac{du^0}{dy}t - (y-d) \\ (x-u^0 t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = -2\rho_\infty \frac{1}{u}\frac{du^0}{dy}\frac{\partial v'}{\partial t}$$ ... und Fourier-transf.: $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = -2\rho_\infty \frac{i\omega}{u^0}\frac{du^0}{dy}\hat{v}$$

$$\hat{v} = i\frac{\sqrt{2\pi e}}{\ln 4}\left(\frac{h_w\omega}{u^0}\right)^2 \frac{v_{max}}{\omega}\exp\left(-\frac{\ln 2}{h_w^2}\left[(y-d)^2 + z^2\right] - \frac{1}{4\ln 2}\left(\frac{h_w\omega}{u^0}\right)^2\right)\exp\left[i\omega(-x/u^0)\right]$$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

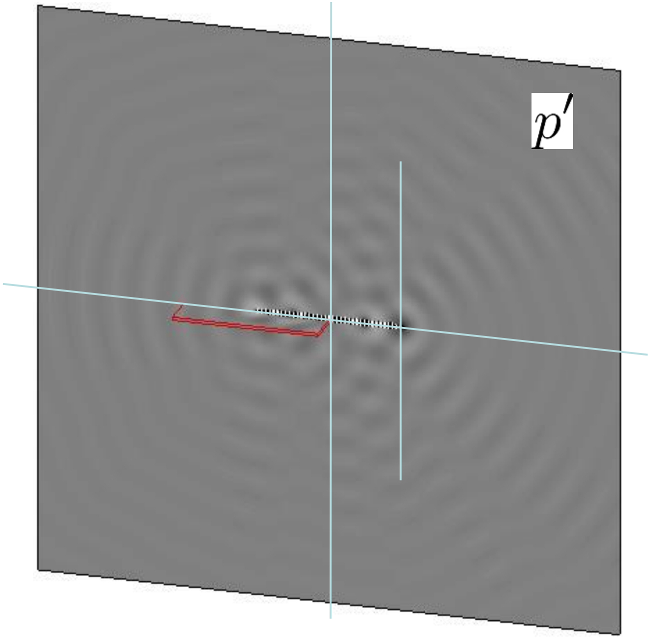


Beispiele:

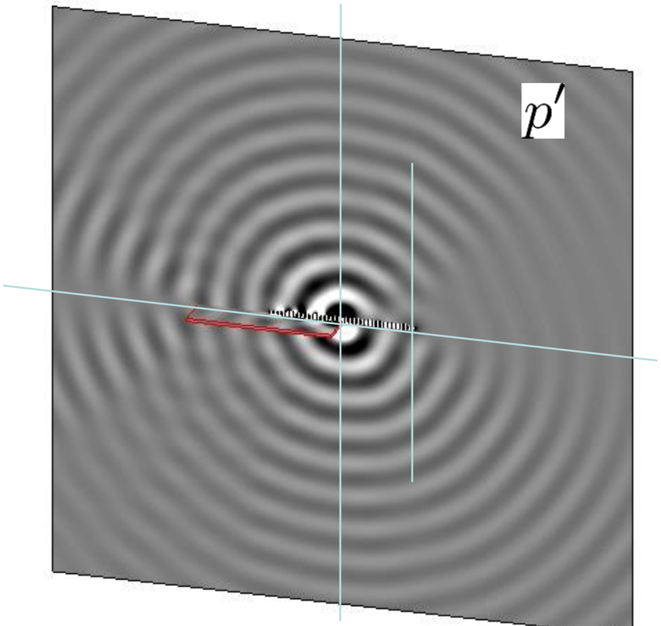
Hinterkantenschall:
Wirbelpassage = spektral: Wirbelzug über Kante

$$\hat{v} = i\frac{\sqrt{2\pi e}}{\ln 4}\left(\frac{h_w\omega}{u^0}\right)^2 \frac{v_{max}}{\omega}\exp\left(-\frac{\ln 2}{h_w^2}\left[(y-d)^2+z^2\right]-\frac{1}{4\ln 2}\left(\frac{h_w\omega}{u^0}\right)^2\right)\exp\left[i\omega(-x/u^0)\right]$$

Wähle Wirbelzentrum in Schicht $d=-0.01\mathrm{m}$ mit $u(d)=0.7U_\infty$
Platte mit Länge $1\mathrm{m}$, Spannweite $0.5\mathrm{m}$, Dicke $0.02\mathrm{m}$, $M=\frac{U_\infty}{a_\infty}=0.1$



1500Hz

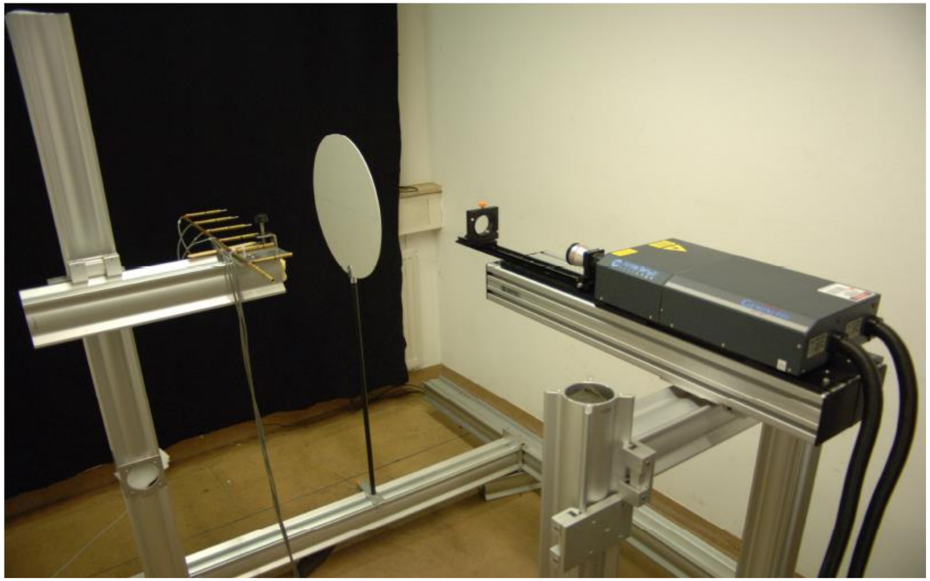


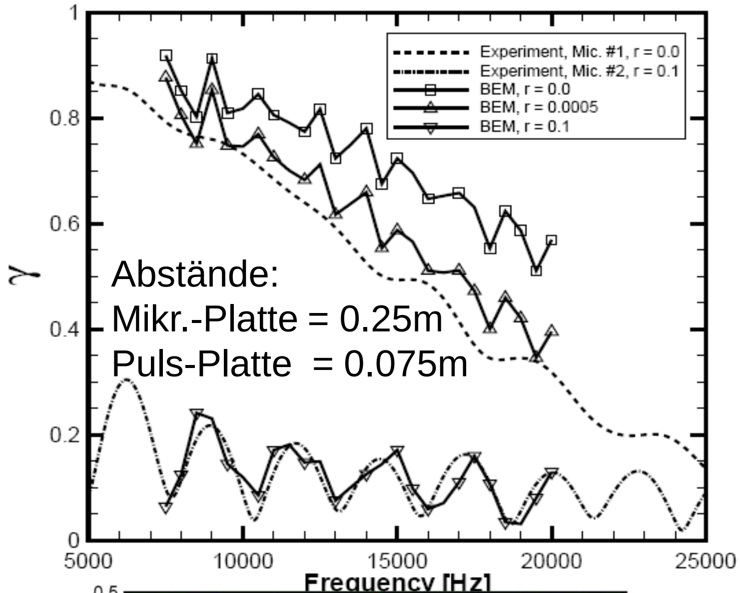
Wirbelstörung ohne Platte

Wirbelstörung mit Platte

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Kreisplatte





Abstände:
Mikr.-Platte = 0.25m
Puls-Platte = 0.075m

Schallquelle: Knall infolge punktfokussierten Laserpulses (lok. Wärmeeintrag)

$$p'(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{c_p T_\infty}\frac{\partial \dot{\vartheta}'}{\partial t}\bigg|_\tau$$

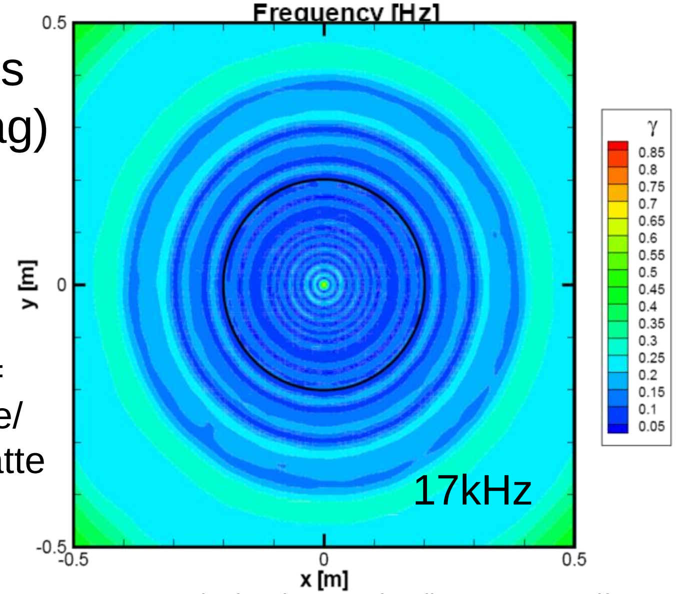
$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)\delta(t)\,dt\,\exp(0) = 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\exp(i\omega t)\,d\omega$$

Puls enthält alle Frequenzen!

$$\gamma(f) = \frac{\langle p_S(f)\rangle}{\langle p_I(f)\rangle}$$

Abschattungsfaktor = Schalldruck mit Platte/ Schalldruck ohne Platte

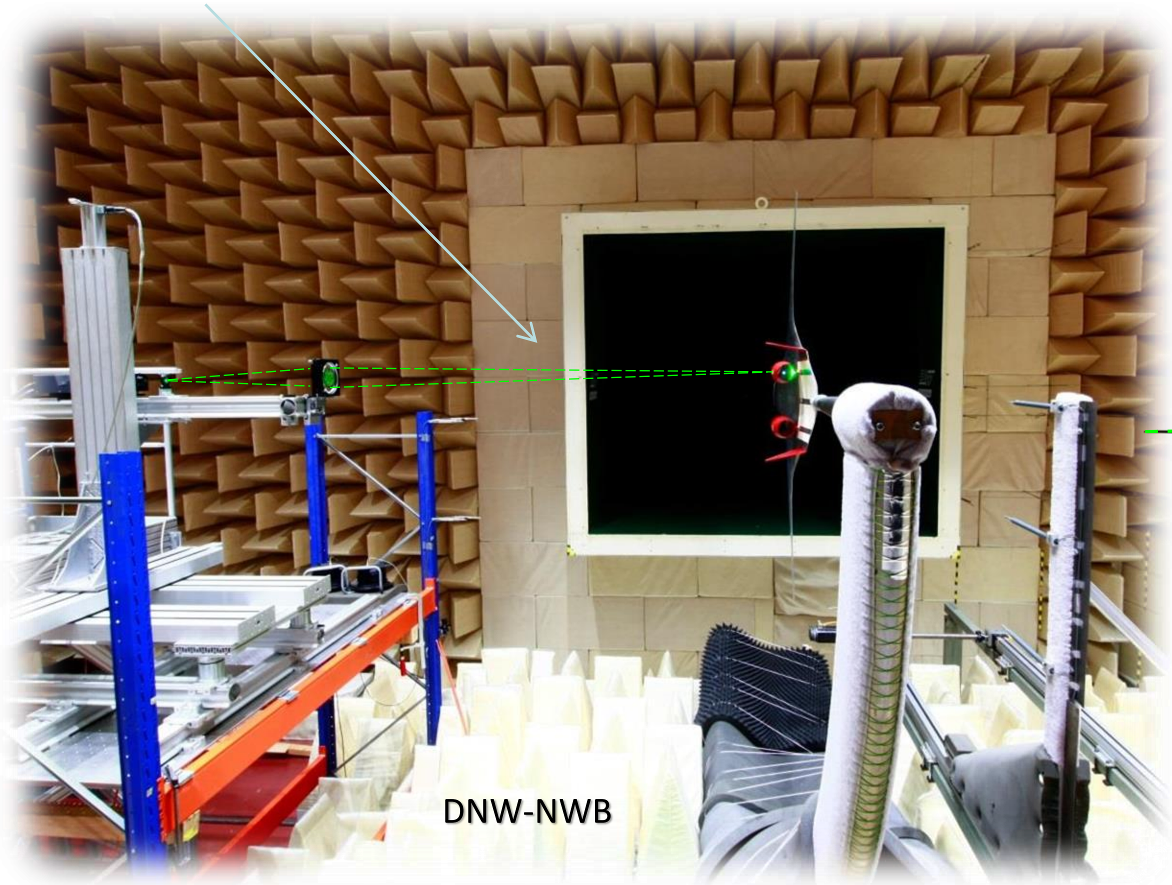


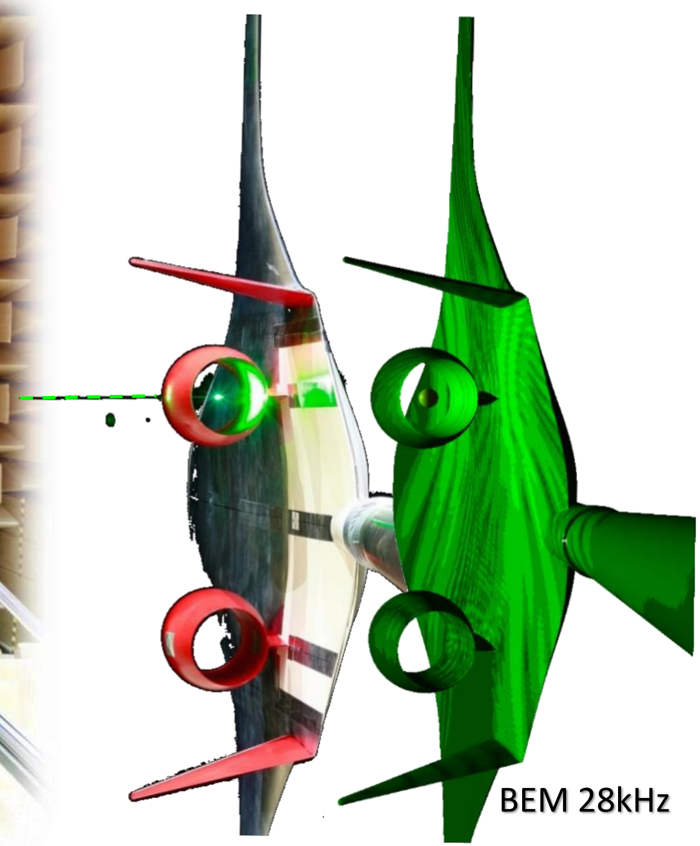
K.-St. Rossignol, M. Lummer, Delfs AIAA 2009

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Flugzeugkonfiguration (Schallabschattung)

Laserpuls





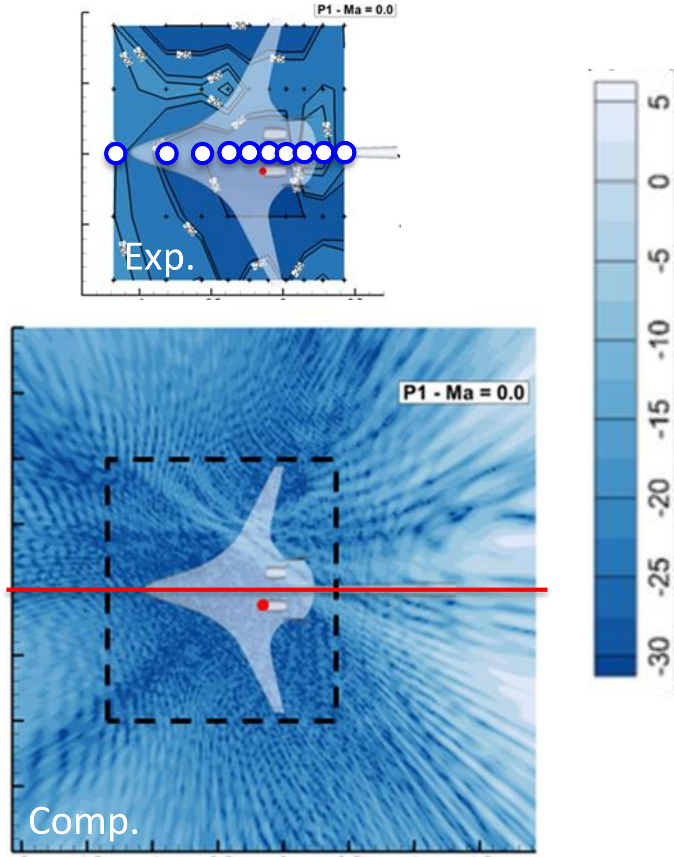
K.-St. Rossignol, 2017

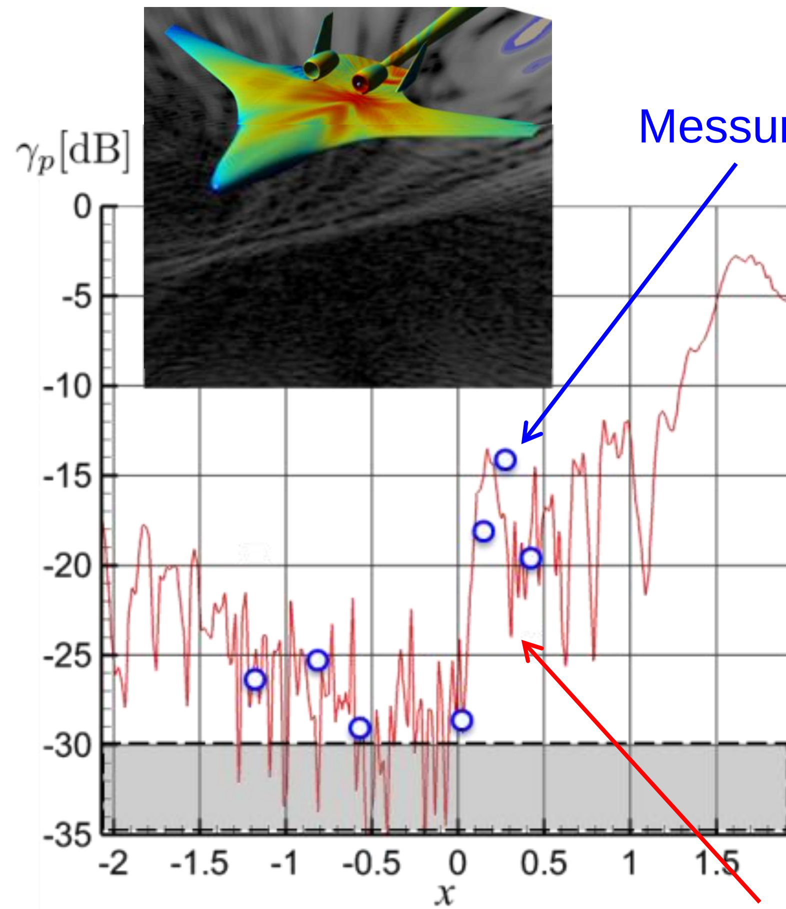
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Flugzeugkonfiguration (Schallabschattung)

Messung

Simulation





Messung

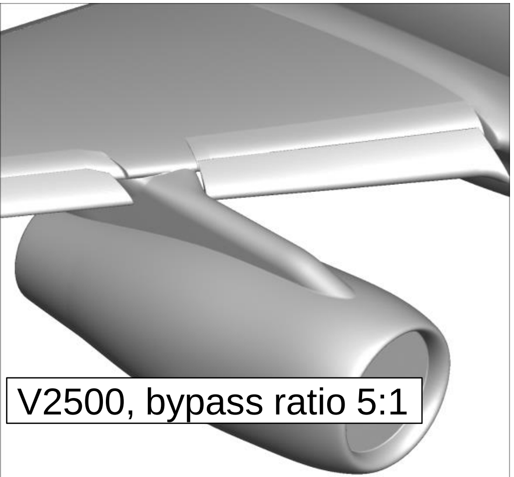
Messung

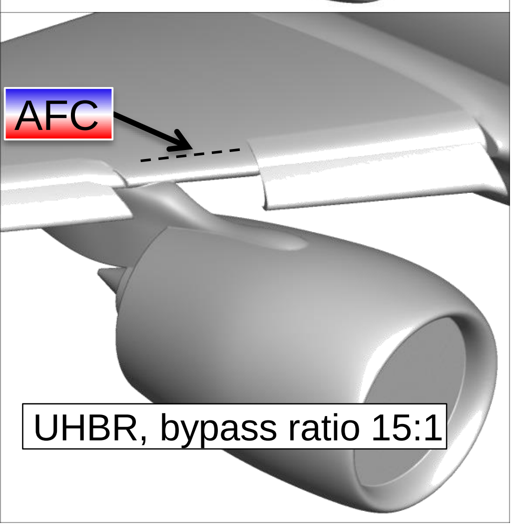
K.-St. Rossignol, M. Lummer 2017

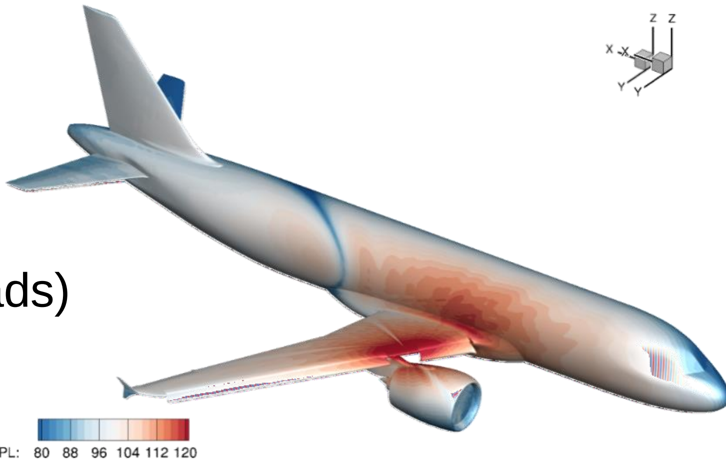
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

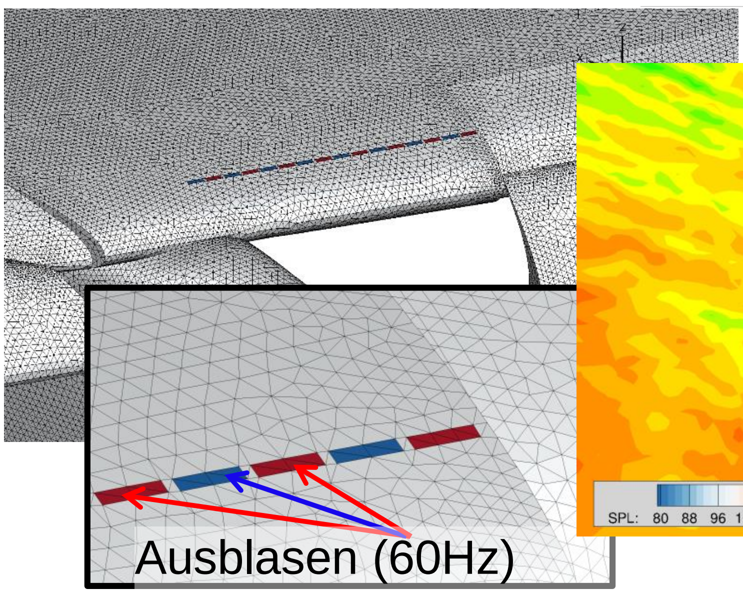
Schallerzeugung infolge aktiver Strömungskontrolle

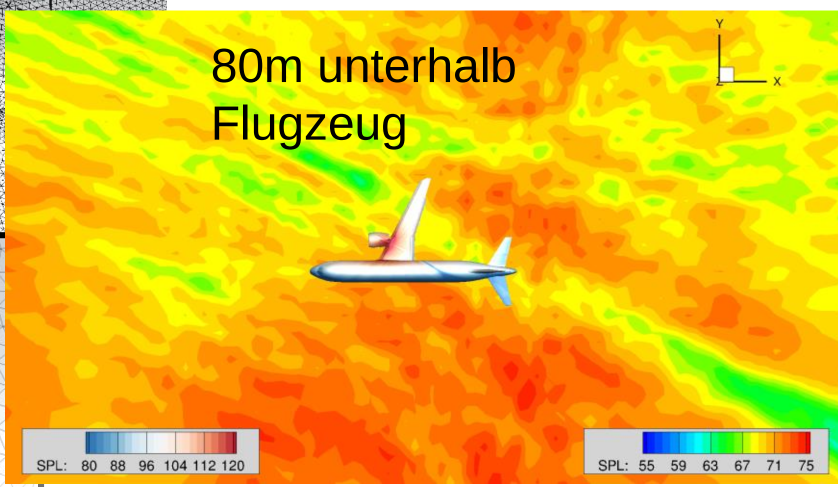
DLR Code FMCAS
- 2.5M Elemente
- Auflösung 2kHz
- 3-4h pro Frequenz (24 threads)











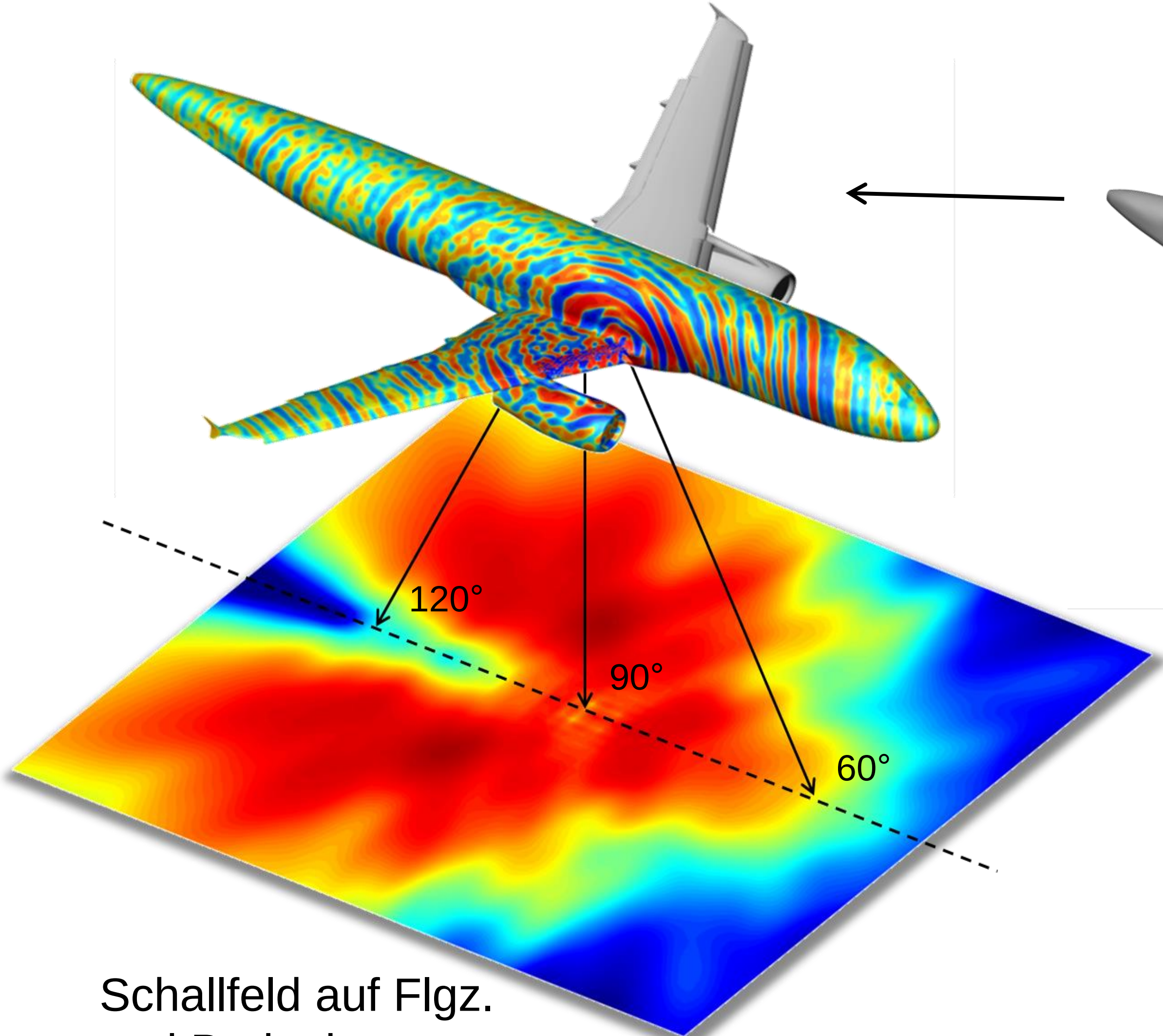
paarweise gegenphasig (Rechteckpuls)

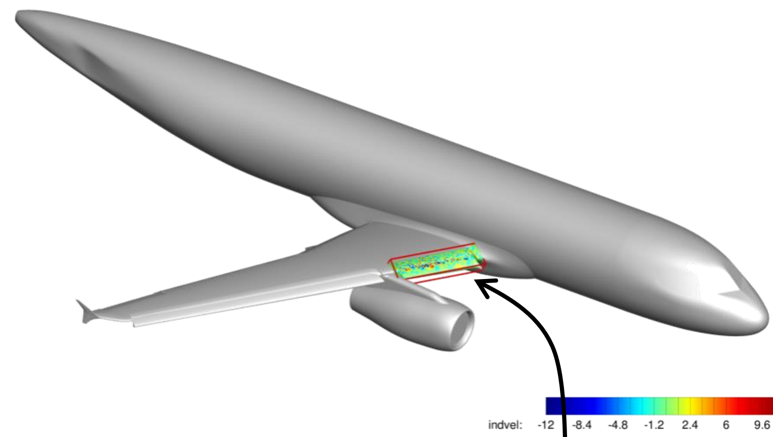
Reiche, Ewert, Delfs DLRK 2019

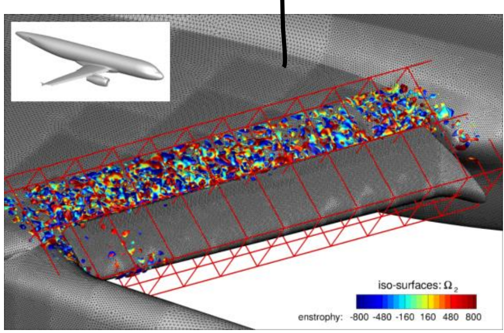
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Vorflügelgeräusch: DLR A320-ATRA, vollskalig

- 3.1 mio. Dreiecke, 6.5 ppw
- Auflösung $f_{max} \approx 1kHz$
- Burton-Miller coeff. $\alpha = 10^{-3}\frac{i}{k}$
- ~26h auf 24 CPUs (1 Frequenz)







Schallfeld auf Flgz.
und Bodenkontur

DLR-code FMCAS

Quelle: stochastische Turbulenzmodellierung in-board slat

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Aufgabe: Berechnung der Schallfortpflanzung bei inhomogenem und/oder bewegtem Medium bei hohen Frequenzen

Problem: sehr hoher Rechenaufwand bei numerischer Lösung der Wellengleichung mit BEM (oder FEM): 6 Elemente/Wellenlänge λ, wobei $\lambda = a_\infty / f$

Ansatz: beschreibe Wellenausbreitung durch Kinematik der Senkrechten auf Wellenfronten (Strahlen)

Zu lösen: (61) ohne Quellen: $\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho^0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho^0}\boldsymbol{\nabla} p'\right) = 0$ bzw. mit

$$p' = \hat{p}(\boldsymbol{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\frac{\omega^2}{a_0^2}\hat{p} + \rho^0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho^0}\boldsymbol{\nabla}\hat{p}\right) = 0 \quad \text{wobei} \quad \rho^0 = \rho^0(\boldsymbol{x}), \quad a_0 = a_0(\boldsymbol{x})$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

$$\frac{\omega^2}{a_0^2}\hat{p} + \rho^0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho^0}\boldsymbol{\nabla}\hat{p}\right) = 0$$

Betrachtung hoher Frequenzen ω

Strahlenreihe, bzw. Debye-Reihe (asymptotische Entwicklung für $\omega \rightarrow \infty$):

$$\hat{p}(\boldsymbol{x},\omega) \approx e^{-i\omega\Psi(x)/a_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(\boldsymbol{x})}{(i\omega)^k} \qquad (294)$$

a_∞ - konst. $k_\infty = \omega/a_\infty$
Referenzschallgeschwindigkeit

$k_\infty\Psi(\boldsymbol{x})$ - Phasenfunktion (ebene Welle u. homog. Medium: $\Psi = \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{k}_\infty}{k_\infty}$
Kugelwelle u. homog. Medium: $\Psi = r$)

$A_k(\boldsymbol{x})$ - Amplitudenfunktion (ebene Welle u. homog. Med.: $A_0 = C,\ A_{k\neq 0} = 0$
Kugelwelle u. homog. Med.: $A_0 = C/r,\ A_{k\neq 0} = 0$)

Setze (294) in (61) ein und sortiere nach Potenzen in $\omega^{-1} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(i\omega)^k}\left\{\left(\frac{i\omega}{a_\infty}\right)^2\left[-\left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2\right]A_k - \frac{i\omega}{a_\infty}\left[\boldsymbol{\nabla}A_k\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi + \rho^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi A_k}{\rho^0}\right)\right] + \rho^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}A_k}{\rho^0}\right)\right\} = 0$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^k} \left\{ \left(\frac{i\omega}{a_\infty}\right)^2 \left[-\left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 \right] A_k - \frac{i\omega}{a_\infty} \left[\boldsymbol{\nabla} A_k \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi A_k}{\rho^0} \right) \right] + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla} A_k}{\rho^0} \right) \right\} = 0$$

$(i\omega/a_\infty)^2$ – Term für $\omega \to \infty$ dominant → Klammer Null setzen ⇒

$$\boxed{(\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 - \frac{a_\infty^2}{a_0^2} = 0}$$

„Eikonalgleichung*“ (295)

$(i\omega/a_\infty)$ – nächst-dominanter Term für $k=0$ → Klammer Null setzen ⇒

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} A_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi A_0}{\rho^0} \right) = 0} \qquad (296)$$

weitere Potenzen $k \geq 1$:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} A_k \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi A_k}{\rho^0} \right) = a_\infty \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla} A_{k-1}}{\rho^0} \right)} \qquad (297)$$

---

*) mit Strömung: $(\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 - \left(\frac{a_\infty}{a_0} - \boldsymbol{M}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi\right)^2 = 0$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Praktische Lösung von (295)-(297):

(a) Bilde Ortskurven $\boldsymbol{R}(s)$, entlang derer Eikonalgleichung (295) erfüllt ist: auch „Strahlen“ wobei s Ortsparameter ist. Zur Definition der Strahlen bilde Hilfsfunktion $$H(s) := (\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 - \frac{a_\infty^2}{a_0^2} = 0$$

Entlang $s(\boldsymbol{x})$ soll keine Abweichung von $H=0$ erfolgen, d.h.

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi)} \cdot \frac{d\boldsymbol{\nabla}\Psi}{ds} + \frac{\partial H}{\partial a_0^2}\frac{da_0^2}{ds} = 0 \qquad \frac{da_0^2}{d\boldsymbol{R}} \cdot \frac{d\boldsymbol{R}}{ds}$$

bzw. $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial a_0^2}\dfrac{da_0^2}{d\boldsymbol{R}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{d(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}{ds} \\ \dfrac{d\boldsymbol{R}}{ds} \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren müssen $\perp$ aufeinander stehen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{R}}{ds} &= \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi)} = \boldsymbol{\nabla}\Psi \\ \frac{d(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}{ds} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_0^2}\frac{da_0^2}{d\boldsymbol{R}} = \frac{a_\infty^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{a_0^2} \end{aligned}} \qquad (298)$$

Anfangswertproblem, gewöhnl. Differenzialgleichung für $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{\nabla}\Psi$ in s: explizite num. Integration.

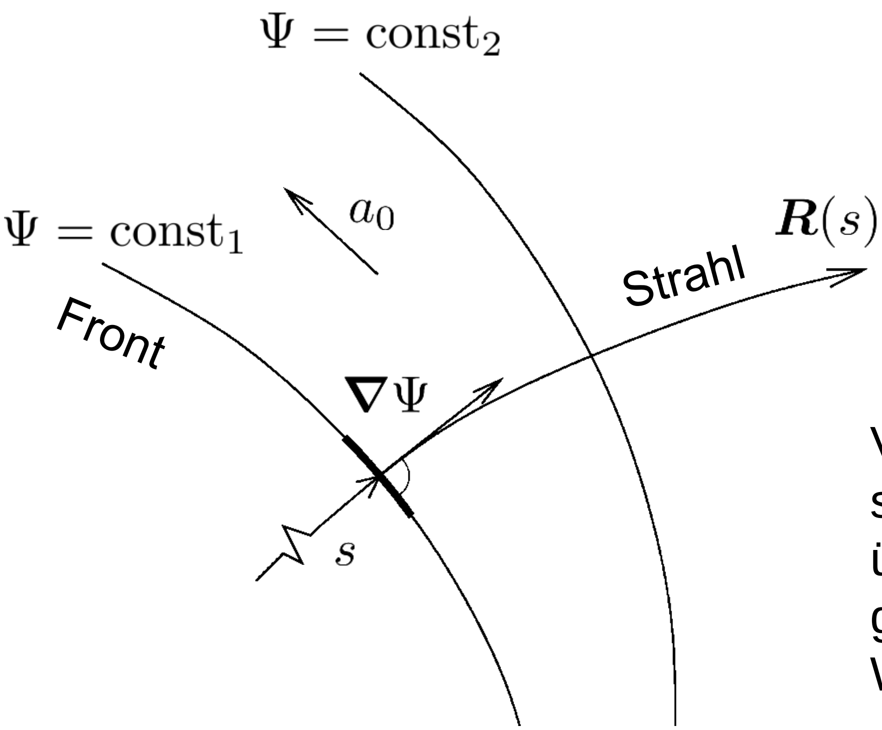
Anfangswerte für $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\nabla}\Psi$

$\boldsymbol{R}$ heißen auch „Charakteristiken“

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beachte: $k_\infty \boldsymbol{\nabla}\Psi(s)$ hat die Bedeutung eines lokalen Wellenzahlvektors bei s und Tangente an Strahl $\boldsymbol{R}(s)$ zeigt nach (298) in selbe Richtung

für homogenes Medium ($a_0 = a_\infty$) ist nach (298) $\boldsymbol{\nabla}\Psi = \mathrm{const}$, d.h. Wellenfront bewegt sich entlang einer Geraden



$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \boldsymbol{\nabla}\Psi$$
$$\frac{d(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}{ds} = \frac{a_\infty^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{a_0^2} \tag{289}$$

Vorstellung nur korrekt, wenn signifikante Variationen in $\rho^0 a_0$ über Bereiche stattfinden, die groß gegenüber der betrachteten Wellenlänge sind.

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Praktische Lösung von (295)-(297):

(b) Lösung der Amplitudengleichung (296):

umgeschrieben ist (296) $2\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi\cdot\boldsymbol{\nabla}A_0 + A_0[\Delta\Psi + \rho^0\boldsymbol{\nabla}\Psi\cdot\boldsymbol{\nabla}(\rho^0)^{-1}] = 0$

oder mit $\boldsymbol{\nabla}\Psi\cdot\boldsymbol{\nabla}(\ldots) = \underbrace{|\boldsymbol{\nabla}\Psi|}_{\frac{a_\infty}{a_0}} \underbrace{\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi}{|\boldsymbol{\nabla}\Psi|}}_{\boldsymbol{e}_s}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\ldots) = \frac{a_\infty}{a_0}\underbrace{\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{\nabla}(\ldots)} = \frac{a_\infty}{a_0}\frac{d(\ldots)}{ds}$

Richtungsableitung entlang Strahl

$\boldsymbol{e}_s$ → Einheitsvektor tangential an Strahl

$$\Rightarrow 2\frac{dA_0}{ds} + A_0\left[\frac{a_0}{a_\infty}\Delta\Psi + \underbrace{\rho^0\frac{d}{ds}(\rho^0)^{-1}}_{= -\frac{d\ln(\rho^0)}{ds}}\right] = 0$$

Lösung mittels „Trennung der Variablen“:

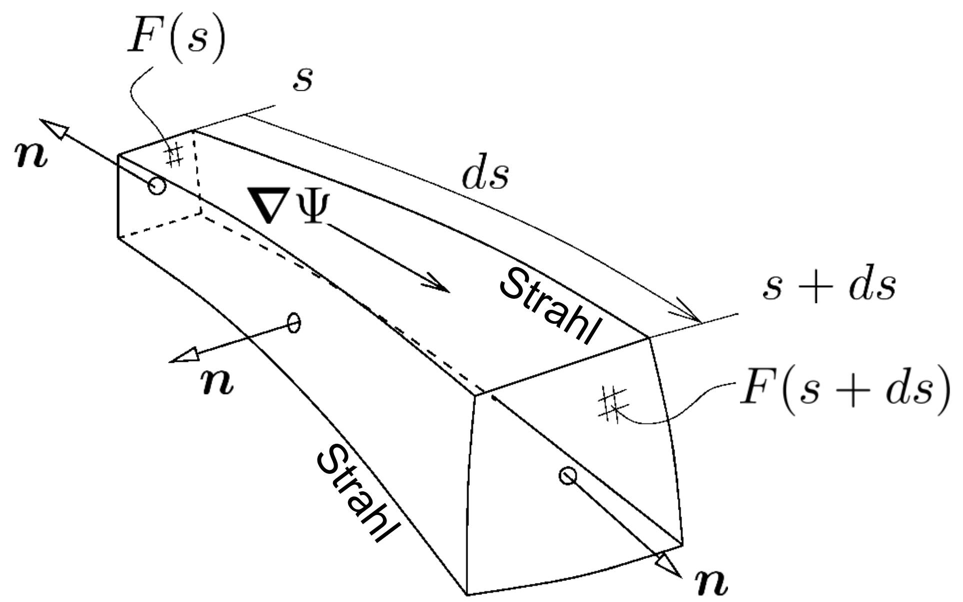
$$\Rightarrow A_0(s) = A_0(s_0)\cdot\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{a_0}{a_\infty}\Delta\Psi\,ds + \tfrac{1}{2}\ln\frac{\rho^0(s_0)}{\rho^0(s)}\right\}$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Betrachte zur Lösung des Integrals $\int_{s_0}^{s} \frac{a_0}{a_\infty} \Delta\Psi \, ds$ zunächst das Integral

$$\int_V \Delta\Psi \, dV \underset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} \boldsymbol{\nabla}\Psi \cdot \boldsymbol{n} \, dF$$

wobei V das von einem Abschnitt einer „Strahlröhre“ eingeschlossene Volumen ist. Eine Strahlröhre ist eine Röhre, deren Mantelfläche aus Schallstrahlen gebildet wird (vgl. Bild), vgl. auch Analogie zu „Stromröhren“



$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{\nabla}\Psi$ an Mantelfläche, allerdings

$\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{\nabla}\Psi$ auf Stirnfächen $F(s+ds)$ und $F(s)$

$$\Rightarrow \int_V \Delta\Psi \, dV = \int_{F(s+ds)} \overbrace{|\boldsymbol{\nabla}\Psi|}^{\frac{a_\infty}{a_0}} dF - \int_{F(s)} \overbrace{|\boldsymbol{\nabla}\Psi|}^{\frac{a_\infty}{a_0}} dF \Big\}$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Bei differenziell kleinem Volumen $dV = dF \cdot ds$ wird hieraus:

$$\Delta\Psi\, dF \cdot ds = \left(\frac{a_\infty}{a_0} dF\right)_{s+ds} - \left(\frac{a_\infty}{a_0} dF\right)_s \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_0}{a_\infty}\Delta\Psi = \frac{a_0}{dF}\frac{d(dF/a_0)}{ds} = \frac{d}{ds}\ln(dF/a_0)$$

und daher $\displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{a_0}{a_\infty}\Delta\Psi\, ds = \ln\left[\frac{(a_0^{-1}dF)_s}{(a_0^{-1}dF)_{s_0}}\right]$, so dass

$$A_0(s) = A_0(s_0)\left(\frac{\left[(\rho^0 a_0)^{-1}dF\right]_{s_0}}{\left[(\rho^0 a_0)^{-1}dF\right]_s}\right)^{1/2} \Rightarrow \quad \boxed{\frac{A_0(dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = const} \qquad (299)$$

→ Amplitude wächst mit zunehmender Freifeldimpedanz (Wellenwiderstand) $\rho^0 a_0$ und fällt mit in Strahlrichtung s divergenten Strahlen $dF \uparrow$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

(298) und (299) bilden Gleichungen zur numerischen Berechnung des Schalldrucks entlang von Strahlen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{R}}{ds} &= \boldsymbol{\nabla}\Psi \\ \frac{d(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}{ds} &= \frac{a_\infty^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{a_0^2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{A_0(dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = const}$$

Vorteile: * sehr schnell, für sehr hohe Frequenzen,
* Berücksichtigung von inhomogenem (und strömendem*) Medium

Nachteile: * Beugungsphänomene vernachlässigt (Beugungskorrektur kompliziert)**
* Fehler durch Vernachlässigung des Reflexionsanteils bei Brechung im Medium: Entartung bei Totalreflexion (s. folgendes Beispiel)

Anwendungsbeispiel ohne Strömung und konstanter Temperatur S.92 im Vergleich zu exakter Lösung Wellengleichung mit BEM

*) hier nicht gezeigt (Basis dann Linearisierte Eulergleichungen anstatt Wellengleichung (61))
**) z.B.: Rubinowicz, A., “Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen,” Annalen der Physik, Vol. 53, 1917, pp. 257–278.

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung bei z=0

Lösung der Eikonalgleichung

$$\boxed{\frac{d(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}{ds} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(a_\infty/a_0)^2\,; \qquad \frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \boldsymbol{\nabla}\Psi}$$

$$a_0^{-2} = a_i^{-2} + (a_t^{-2} - a_i^{-2})H(z)$$

$z < -\varepsilon$:

$$\boldsymbol{\nabla}\Psi_i = \boldsymbol{C}_i; \quad |\boldsymbol{\nabla}\Psi_i| = (a_\infty/a_i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\Psi_i = (a_\infty/a_i)\boldsymbol{e}_i$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}_i}{ds} = (a_\infty/a_i)\boldsymbol{e}_i \Rightarrow \boldsymbol{R}_i(s) = \boldsymbol{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\boldsymbol{e}_i\ s$$

$z > \varepsilon$:

$$\boldsymbol{\nabla}\Psi_t = (a_\infty/a_t)\boldsymbol{e}_t \Rightarrow \boldsymbol{R}_t(s) = \boldsymbol{R}_t^0 + (a_\infty/a_t)\boldsymbol{e}_t(s - s_0)$$

$$\boldsymbol{R}_t^0 \stackrel{!}{=} \boldsymbol{R}_i(s_0) = \boldsymbol{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\boldsymbol{e}_i\ s_0$$

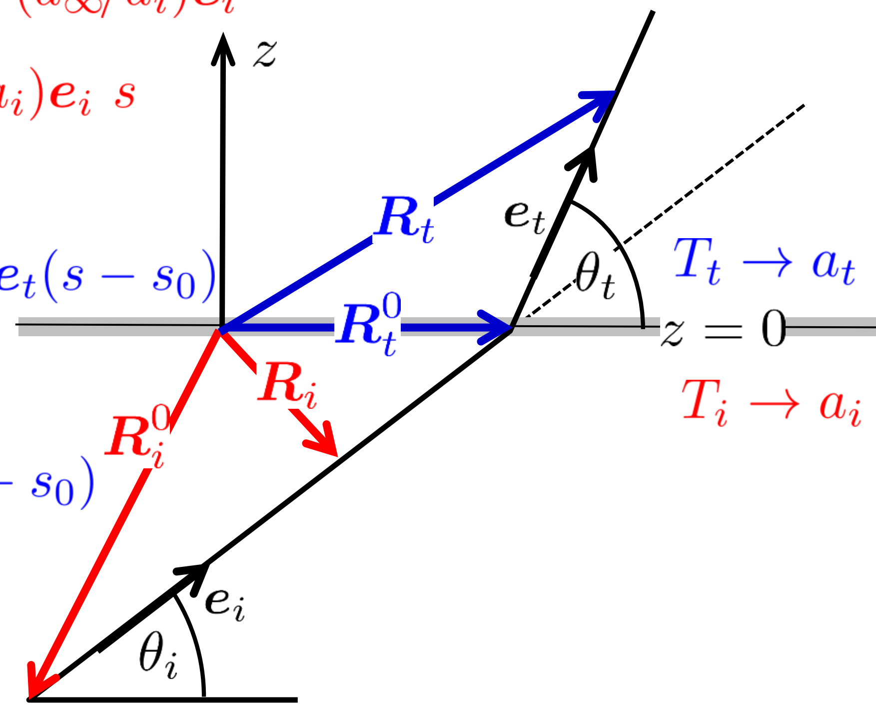
$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\boldsymbol{e}_i\ s_0 + (a_\infty/a_t)\boldsymbol{e}_t(s - s_0)$$

↑ unbekannt!

$|z| < \varepsilon$:

$$\boldsymbol{\nabla} a_0^{-2} = (a_t^{-2} - a_i^{-2})\delta(z)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{\nabla}\Psi_t - \boldsymbol{\nabla}\Psi_i = \frac{a_\infty^2}{2}(a_t^{-2} - a_i^{-2})\boldsymbol{e}_z \int_{s(-\varepsilon)}^{s(\varepsilon)} \delta(z)\, ds$$



1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

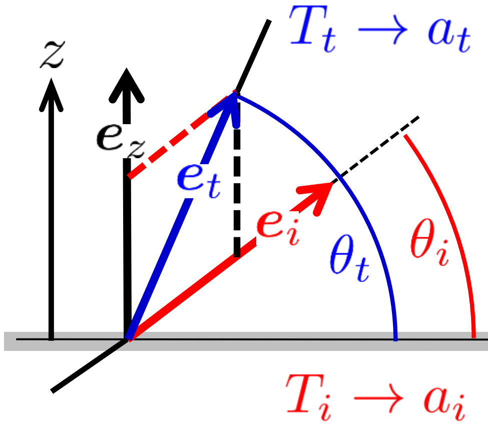
Beispiel zur Lösung der Eikonalgleichung

$$\nabla\Psi_t - \nabla\Psi_i = \frac{a_\infty^2}{2}(a_t^{-2} - a_i^{-2})\boldsymbol{e}_z \boxed{\int_{s(-\varepsilon)}^{s(\varepsilon)} \delta(z)\, ds} \overset{(114)}{=} \left|\frac{dz}{ds}\right|_{z=0}^{-1} =: \sigma$$

$$\Rightarrow (\nabla\Psi_t)^2 = \left[\nabla\Psi_i + \frac{a_\infty^2}{2}(a_t^{-2} - a_i^{-2})\boldsymbol{e}_z\sigma\right]^2$$

$$\Leftrightarrow a_t^{-2} = a_i^{-2} + \frac{a_\infty^2}{4}(a_t^{-2} - a_i^{-2})^2\sigma^2 + (a_t^{-2} - a_i^{-2})(a_\infty/a_i)\overbrace{(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_z)}^{\sin\theta_i}\sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2(a_\infty a_i)^{-1}}{a_t^{-2} - a_i^{-2}}\left(-\sin\theta_i \pm \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right)\sqrt{\left(\frac{a_i}{a_t}\right)^2 - \cos^2\theta_i}\right)$$



$a_t < a_i$: $+$: Durchgangsanteil, $-$: Reflexionsanteil

$a_t > a_i$: beide Lösungen, aber einzeln reell nur für $|\cos\theta_i| < a_i/a_t$ (ansonsten Totalreflexion und Summe beider Lösungen = reelle reflekt. Welle!)

$$\nabla\Psi_t = \frac{a_\infty}{a_i}\left(\boldsymbol{e}_i + \left[-\sin\theta_i + \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right)\sqrt{\left(\frac{a_i}{a_t}\right)^2 - \cos^2\theta_i}\right]\boldsymbol{e}_z\right) = \frac{a_\infty}{a_t}\boldsymbol{e}_t$$

Brechungsgesetz (208)!

$$\Rightarrow \sin\theta_t = \frac{a_t}{a_\infty}\boldsymbol{e}_z\cdot\nabla\Psi_t = \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{a_t}{a_i}\right)^2\cos^2\theta_i} \Rightarrow \boxed{\cos\theta_t = \frac{a_t}{a_i}\cos\theta_i}$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung

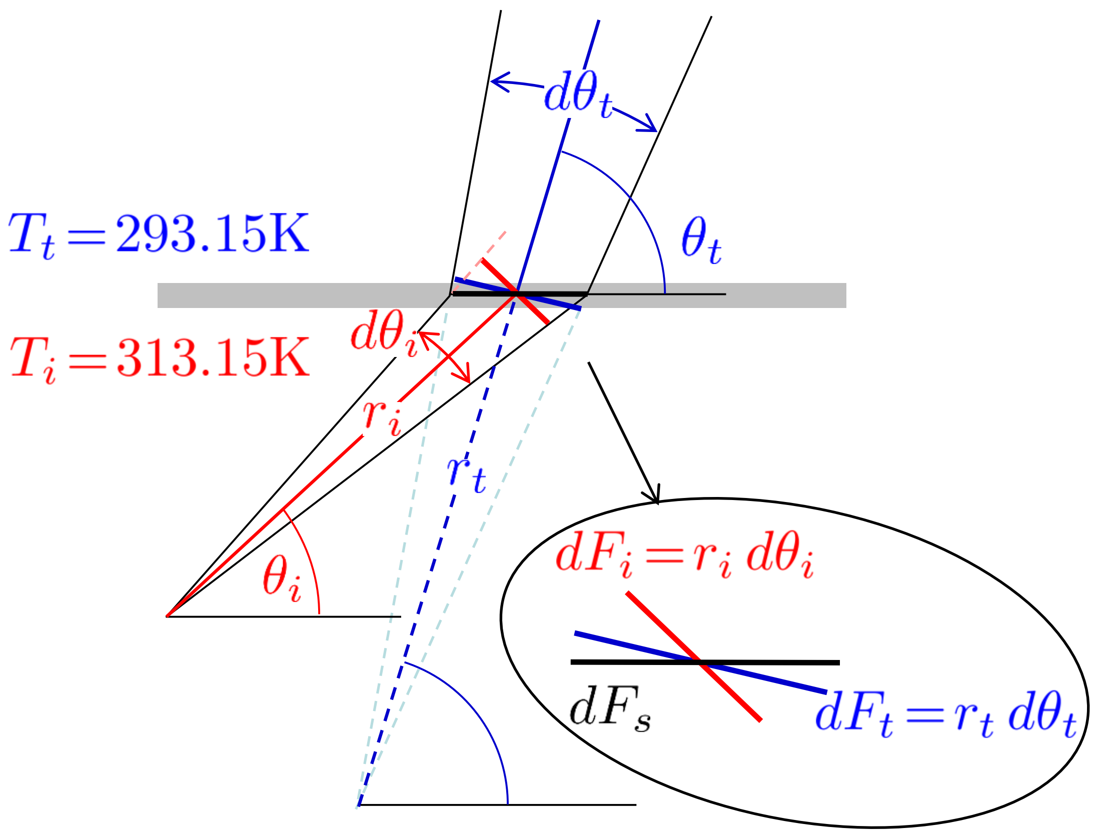
Lösung der nullten Amplitudengleichung

$$\frac{A_0(dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = const \Rightarrow \frac{A_{0t}^2}{A_{0i}^2} = \frac{(\rho^0 a_0)_t}{(\rho^0 a_0)_i}\frac{dF_i}{dF_t}$$

$$dF_s = dF_i/\sin\theta_i = dF_t/\sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \frac{dF_i}{dF_t} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta_i}{1-\cos^2\theta_t}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta_i}{1-\left(\frac{a_t}{a_i}\cos\theta_i\right)^2}}$$



$1 = p_t/p_i =$

$$\frac{A_{0t}^2}{A_{0i}^2} = \cancel{\frac{\rho_t a_t^2}{\rho_i a_i^2}}\ \frac{a_i}{a_t}\frac{dF_i}{dF_t}$$

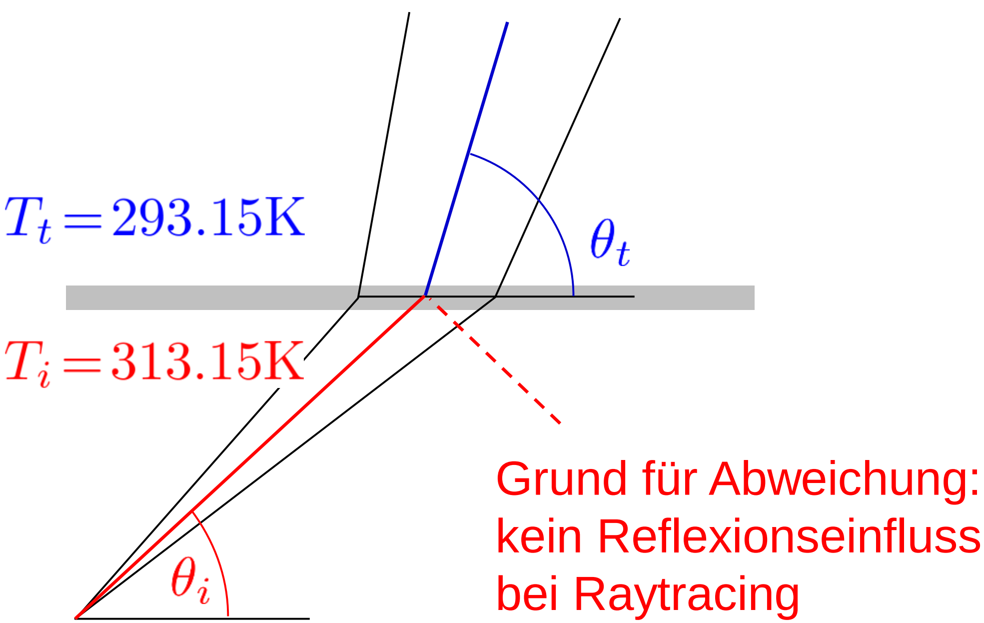
$$\boxed{\frac{A_{0t}}{A_{0i}} = \sqrt[4]{\frac{T_i}{T_t}}\sqrt[4]{\frac{1-\cos^2\theta_i}{1-\frac{T_t}{T_i}\cos^2\theta_i}}}$$

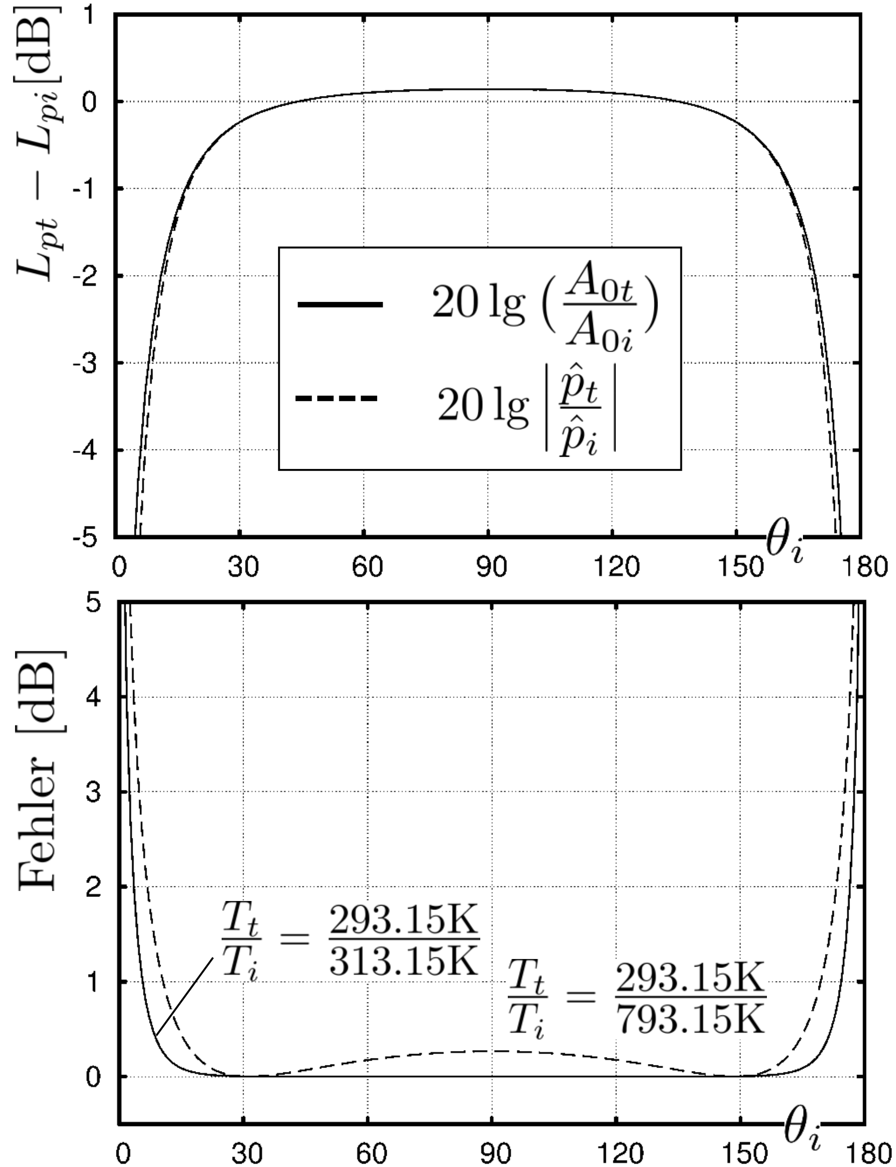
1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung

$$\frac{A_{0t}}{A_{0i}} = \sqrt[4]{\frac{T_i}{T_t}} \sqrt[4]{\frac{1-\cos^2\theta_i}{1-\frac{T_t}{T_i}\cos^2\theta_i}}$$ Strahlen

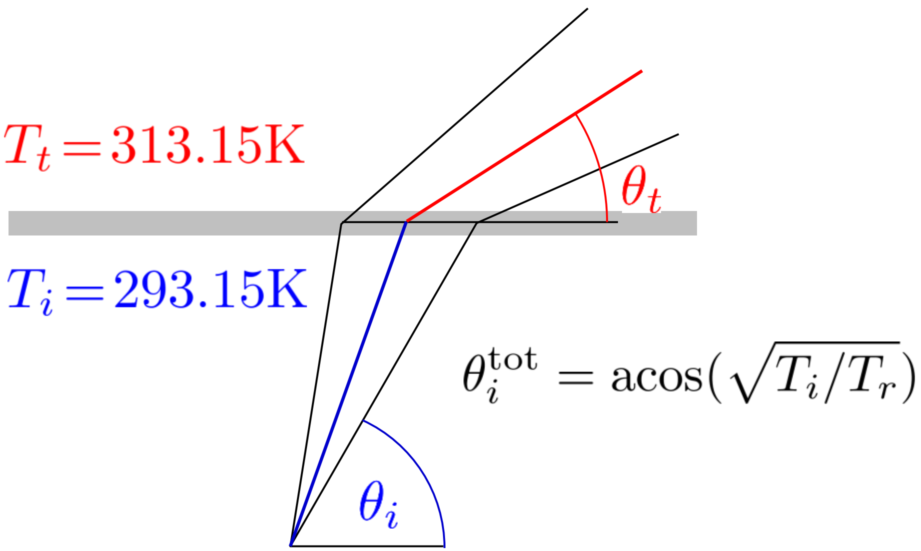
$$\left|\frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i}\right| = \frac{2\sin\theta_i}{\sin\theta_i + \sqrt{\frac{T_t}{T_i}}\sqrt{1-\frac{T_t}{T_i}\cos^2\theta_i}}$$ „exakt“ (215)

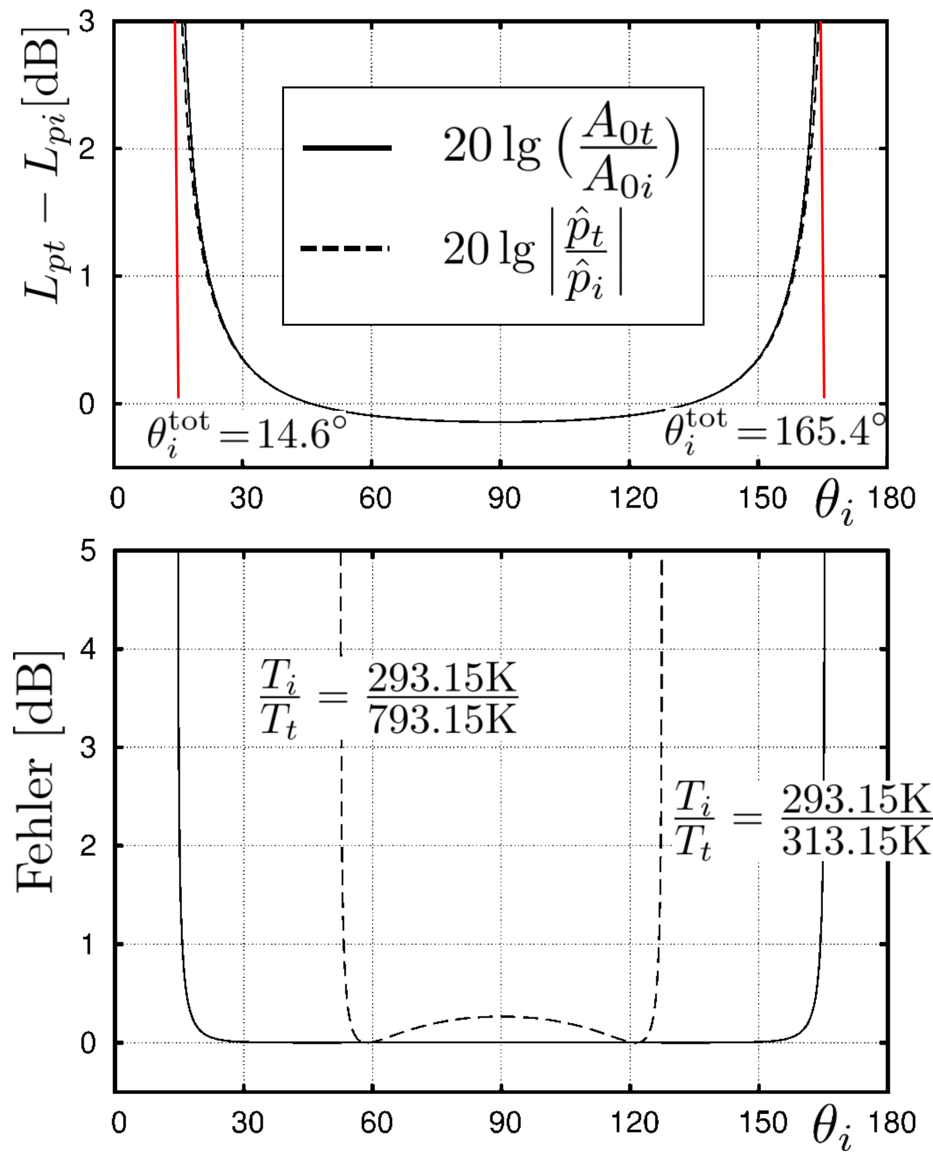




1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung





Ray tracing zeigt unendliche Amplitudenerhöhung bei Totalreflexion.
Exakt: Erhöhung um 6dB

Alle Abweichung amplitudenbezogen, Strahlkinematik (Brechungsgesetz) wird exakt wiedergegeben.

1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Verfahren der Computational Aeroacoustics (CAA) werden zur numerischen Lösung des allgemeinsten Gleichungssystems für die Dynamik von Störungen um beliebige stationäre Strömungsfelder (54,55,56) entwickelt. Dieses Gleichungssystem wird auch „Linearisierte Eulergleichungen“ (engl.: „Linearized Euler Equations (LEE)“) genannt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho' + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho^0 + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}^0 &= 0 \qquad (54) \\
\rho^0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}' \right) + \boldsymbol{\nabla} p' + \rho^0 \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^0 + \rho' \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^0 &= \boldsymbol{0} \qquad (55) \\
\frac{\partial p'}{\partial t} + \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla} p' + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} p^0 + \gamma \left(p^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}' + p' \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}^0 \right) &= 0 \qquad (56)
\end{aligned}
$$

1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Anforderungen an numerische Lösungsverfahren für LEE

Es gelten besondere Anforderungen bei der numerischen Lösung der Gleichungen:

- Akustische, entropische und Wirbelfreiheitsgrade sind enthalten. Für kleine Strömungsmachzahlen müssen Wirbel der Größenordnung l_ω, Schallwellen der Größenordnung λ aufgelöst werden, wobei $l_\omega \sim \lambda M$ (M -Machzahl); für kleine $M \rightarrow$ Multiskalenproblem !
- Hohe Genauigkeit in der numerischen Darstellung der Signalamplituden gefragt, wobei die Größenordnungen der akustischen Störungen im Vergleich zu den Strömungsgrößen sehr klein sind, z.B. 10^{-6}-fach kleiner.
- Es dürfen keine künstlichen Interferenzen entstehen („Dispersionsfehler“!)
- Interaktion von Schall mit Strömungsgradienten (Brechung etc.)
- Schall darf an künstlichen Außenrändern des Rechengebiet nicht reflektiert werden.
- Genauigkeit wird nicht nur auf Geometrien benötigt (CFD: lokal, z.B. Reibung/ Druck auf Oberflächen), sondern auch an den Fernfeldrändern (also global)

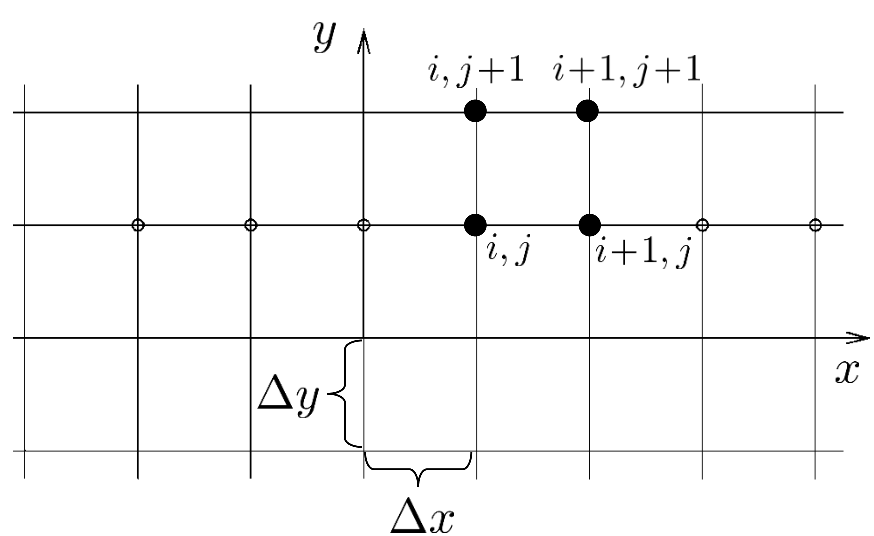
1.2.2.1 Diskretisierung des Gebiets

$$u^0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v^0 \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w^0 \frac{\partial \rho'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho' + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho^0 + \rho^0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}^0 = 0$$

Approximation der räumlichen Gradienten durch Finite Differenzen Repräsentation der Funktionen $f(\boldsymbol{x})$ an den Kreuzungspunkten $\boldsymbol{x}_{ij}$ eines Gitters, das das Fluid abdeckt. Approximation der Gradienten an den Knoten $\boldsymbol{x}_{ij}$ mit Hilfe der Funktionswerte an Nachbarknoten.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{i,j}} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{f(x_{i,j} + k\Delta x, y_{i,j})}_{=:\, f_{i+k,j}} \qquad (300)$$



<u>Frage:</u> Wie groß ist numerischer Fehler und von welcher Art ist er?

(300) für beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}_{i,j} = \boldsymbol{x}$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^{N} c_k f(x + k\Delta x, y) \qquad (301)$$

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

Entwicklung von f in Taylorreihe

$$f(x+k\Delta x) \approx f(x) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x (k\Delta x) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_x (k\Delta x)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_x (k\Delta x)^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_x (k\Delta x)^4 + \ldots$$

…einsetzen in (301) $\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x = \frac{f(x)}{\Delta x}\sum_{k=-N}^{N} c_k + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x \sum_{k=-N}^{N} k c_k + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_x \sum_{k=-N}^{N} k^2 c_k + \frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_x \sum_{k=-N}^{N} k^3 c_k + \cdots + R(\Delta x^m)$$

Bestimmungsgleichungen für die FD-Koeffizienten c_k

$$\boxed{\sum_{k=-N}^{N} k^n c_k = 0,\ \ n = 0, 2, 3, 4, 5, \ldots \qquad \sum_{k=-N}^{N} k c_k = 1} \qquad (302)$$

Wenn Restglied R von Ordnung m, d.h. $\sim \Delta x^m \Rightarrow$ Approximation m‘ter Ordnung: beliebiges Polynom m‘ten Grades lässt sich noch exakt ableiten oder: Fehler skaliert mit Δx^m (z.B. bei m=4 sinkt Fehler um Faktor 1/16 bei Halbierung der Gitterschrittweite Δx).

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

$$\sum_{k=-N}^{N} k^n c_k = \delta_{n1}$$

<u>Beispiel:</u> $N = 3$

$$\begin{array}{lrrrrrrrcl}
n=0: & c_{-3} & +c_{-2} & +c_{-1} & +c_0 & +c_1 & +c_2 & +c_3 & = & 0 \\
n=1: & -3c_{-3} & -2c_{-2} & -c_{-1} & & +c_1 & +2c_2 & +3c_3 & = & 1 \\
n=2: & 9c_{-3} & +4c_{-2} & +c_{-1} & & +c_1 & +4c_2 & +9c_3 & = & 0 \\
n=3: & -27c_{-3} & -8c_{-2} & -c_{-1} & & +c_1 & +8c_2 & +27c_3 & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \\
n=2N=6: & & & & & & & & &
\end{array}$$

Beachte: $c_{-k} = -c_k$ löst bereits alle Bestimmungsgleichungen mit n gerade

$\Rightarrow$ noch 3 „echte“ Gleichungen für ungerade n : (speziell $c_0 = 0$):

$$\begin{array}{llrcl}
(303) & n=1: & 3^1 c_3 + 2^1 c_2 + 1^1 c_1 & = & \frac{1}{2}
\end{array}$$
← bei Erfüllung: Ordnung 2

$$\begin{array}{llrcl}
(304) & n=3: & 3^3 c_3 + 2^3 c_2 + 1^3 c_1 & = & 0
\end{array}$$
← zusätzl. Erfüllung: Ordnung 4

$$\begin{array}{llrcl}
(305) & n=5: & 3^5 c_3 + 2^5 c_2 + 1^5 c_1 & = & 0
\end{array}$$
← zusätzl. Erfüllung: Ordnung 6

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

$\Rightarrow$ mit $N=3$ („Differenzenstern“, bzw. „stencil“ der Breite 7) lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 6 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm\tfrac{3}{4}; \quad c_{\pm 2} = \mp\tfrac{3}{20}; \quad c_{\pm 3} = \pm\tfrac{1}{60}; \quad R = \frac{\Delta x^6}{7!}\sum_{k=-3}^{3} k^7 c_k \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} + \cdots = \frac{\Delta x^6}{140}\frac{\partial^7 f}{\partial x^7} \cdots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren sechster Ordnung“ CDS6

$\Rightarrow$ mit $N=2$ lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 4 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm\tfrac{2}{3}; \quad c_{\pm 2} = \mp\tfrac{1}{12}; \qquad R = \frac{\Delta x^4}{5!}\sum_{k=-2}^{2} k^5 c_k \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \cdots = \frac{\Delta x^4}{30}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \cdots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren vierter Ordnung“ CDS4

$\Rightarrow$ mit $N=1$ lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 2 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm\tfrac{1}{2}; \qquad R = \frac{\Delta x^2}{3!}\sum_{k=-1}^{1} k^3 c_k \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots = \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren zweiter Ordnung“ CDS2

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^{N} c_k f(x + k\Delta x, y)$$

Fourier-transformieren in x :

$$i\alpha \hat{f} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x + k\Delta x) \exp(-i\alpha x)\; dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp[-i\alpha(\tilde{x} - k\Delta x)]\; d\tilde{x}}$$

$$= \exp(i\alpha k\Delta x) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp(-i\alpha\tilde{x})\; d\tilde{x}}^{=\hat{f}}$$

$$\Leftrightarrow i\alpha \hat{f} \approx \underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(i\alpha k\Delta x)\right)}_{=:\, i\overline{\alpha}} \hat{f}$$

Hierbei ist $\overline{\alpha}$ die mittels des Finite Differenzenverfahrens interpretierte (also approximierte) Wellenzahl

Dimensionslos geschrieben:

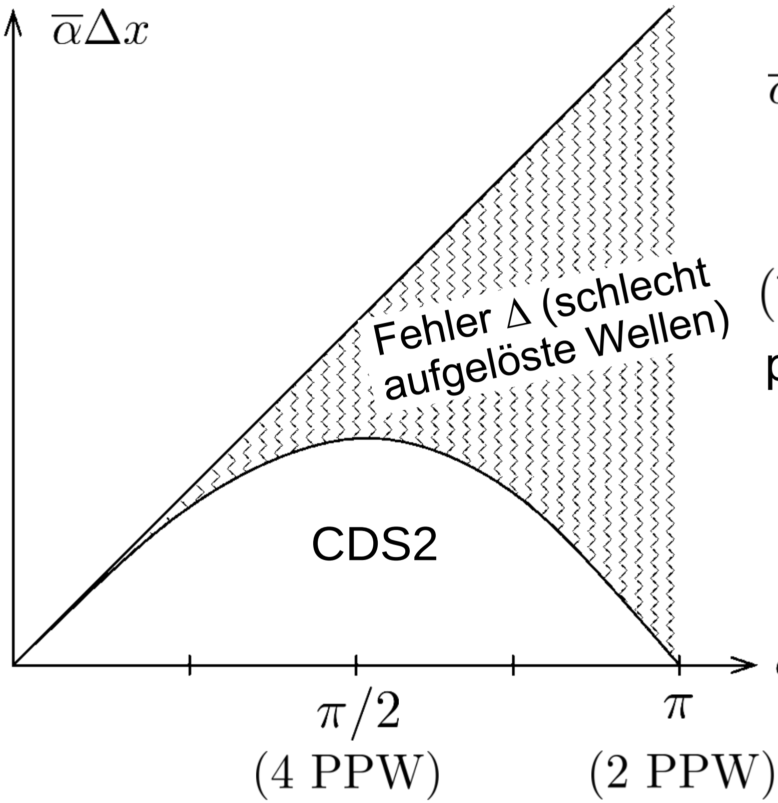
$$\boxed{\overline{\alpha}\Delta x = -i \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp\left(ik(\alpha\Delta x)\right)} \qquad (306)$$

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

Hieraus wird der spektrale Fehler Δ definiert als: $\Delta := \alpha\Delta x - \overline{\alpha}\Delta x$

Dessen Realteil Δ_r heisst auch „Dispersions-“ oder „Phasenfehler“ und sein Imaginärteil Δ_i heisst „Dissipationsfehler“

<u>Beachte:</u> für $c_k = -c_{-k}$ ist $\overline{\alpha}$ reell, z.B. beim CDS2-Verfahren $(N=1)$ ist $c_{\pm 1} = \pm\frac{1}{2}$



somit (302)

$$\overline{\alpha}\Delta x = \frac{i}{2}\big(-\exp(i\alpha\Delta x) + \exp(-i\alpha\Delta x)\big) = \sin(\alpha\Delta x)$$

(vgl. Diagramm)

$(\overline{\alpha}\Delta x)^{-1}$ ist Maß für die relative Auflösung pro Wellenlänge PPW“:

$$\overline{\alpha}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta x}{\lambda} =: \mathrm{PPW} = \frac{2\pi}{\alpha\Delta x}$$

(weniger als 2PPW nach „Abtasttheorem“ nicht möglich: untere Grenze)

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

Finite Differenzenverfahren für die numerische Aeroakustik (CAA-Verfahren) haben insbesondere Anforderungen (iii) und (iv) (vgl. Einleitung zu 1.2.2) bei gegebenem N bestmöglich zu erfüllen, d.h. möglichst hohe Ordnung (iv) bei gleichzeitig hoher Spektralgüte:

DRP-Verfahren von Tam & Webb (DRP=„Dispersion Relation Preserving")

Für $\frac{\partial f}{\partial x}$ wird ein Verfahren 4. Ordnung angesetzt, d.h. Koeffizienten haben (302) und (303) zu erfüllen $\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} - 4c_3, \quad c_1 = \frac{2}{3} + 5c_3$

Dann wird c_3 so bestimmt, dass $\overline{\alpha}\Delta x$ über einen möglichst großen Auflösungsbereich $-\eta \leq \alpha\Delta x \leq \eta$ nahe an $\alpha\Delta x$ bleibt:

$$E := \int_{-\eta}^{\eta} (\overline{\alpha}\Delta x - \alpha\Delta x)^2 \; d(\alpha\Delta x) \overset{!}{=} \min$$

$$\overline{\alpha}\Delta x = -i \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp\left(ik(\alpha\Delta x)\right)$$

$$\frac{dE}{dc_3} = 0 = \int_{-\eta}^{\eta} 2(\overline{\alpha}\Delta x - \alpha\Delta x) \frac{d(\overline{\alpha}\Delta x)}{dc_3} \; d(\alpha\Delta x)$$

1.2.2.4 Beispiel: DRP-Verfahren

Nach Einsetzen von $\overline{\alpha}\Delta x$ aus (306) ergeben sich die Koeffizienten des DRP Verfahrens zu

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.02084314277\ldots \\ c_2 &= -0.166705904415 \\ c_3 &= 0.770882380518 \end{aligned} \qquad (307)$$

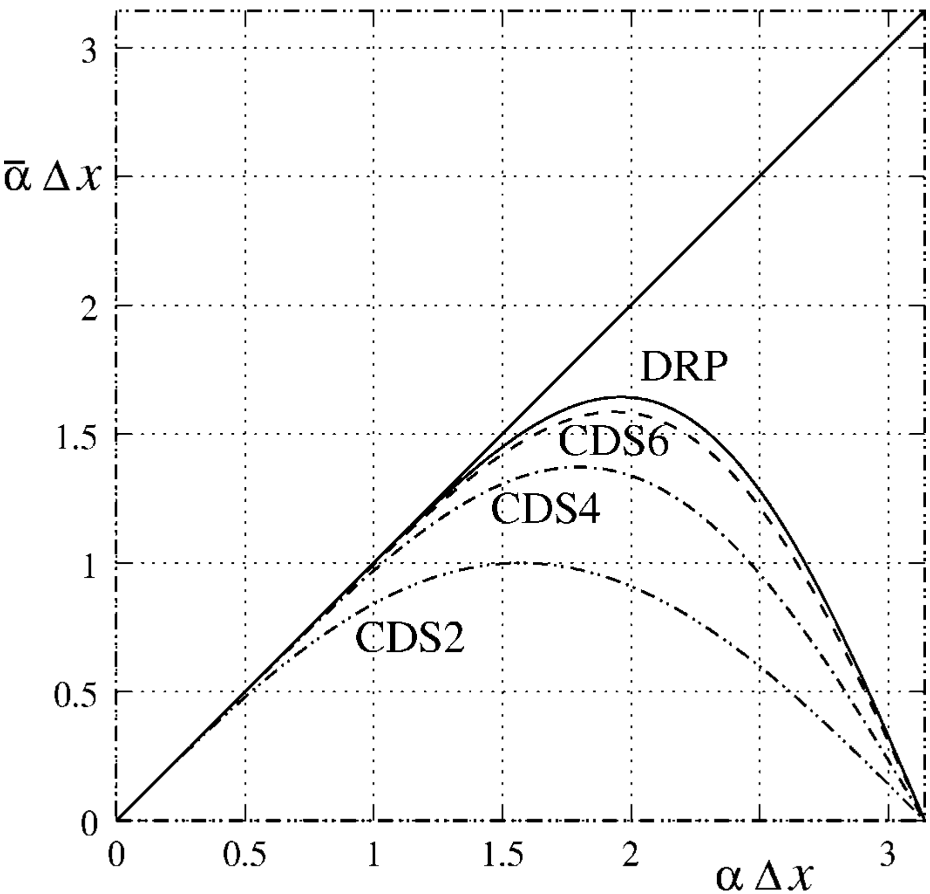
Für die Verwendung auf gekrümmten Rechennetzen, Randbehandlung etc. vgl. Skriptzusatz.

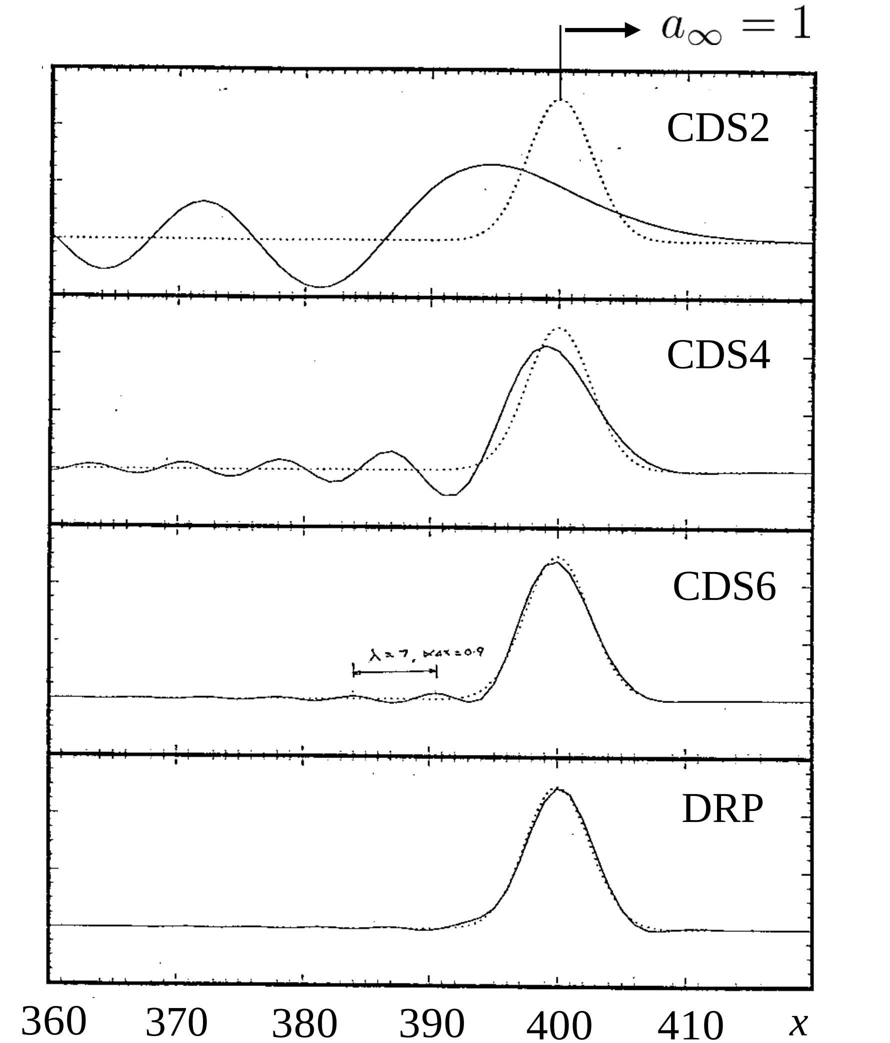
Neuere Entwicklungen:

- Unstrukturierte Netze bei hoher Ordnung mittels „Diskontinuierlichen Galerkin“ Verfahren (Variante von Finite Element Methoden)
- Rein (hierarchisch) kartesische Gitter mit sog. „immersed boundary conditions“ zur Erfüllung der Randbedingungen

1.2.2.4 Beispiel: DRP-Verfahren

Auflösungsvermögen von Finite Differenzenverfahren



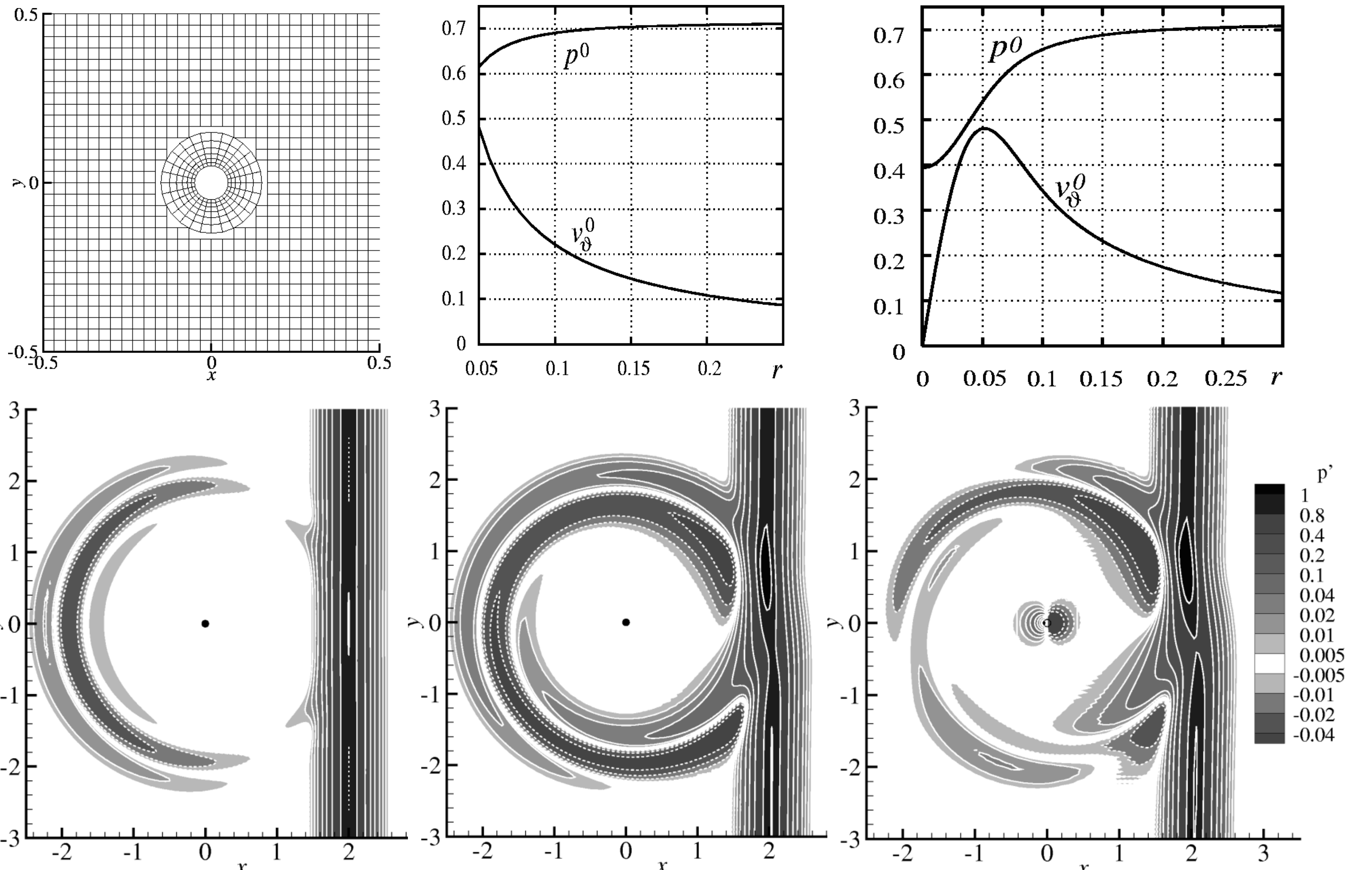


$$p'(x,t=0) = \exp\left(-\ln 2 (x/3\Delta x)^2\right); \quad \Delta x = 1$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + a_\infty \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

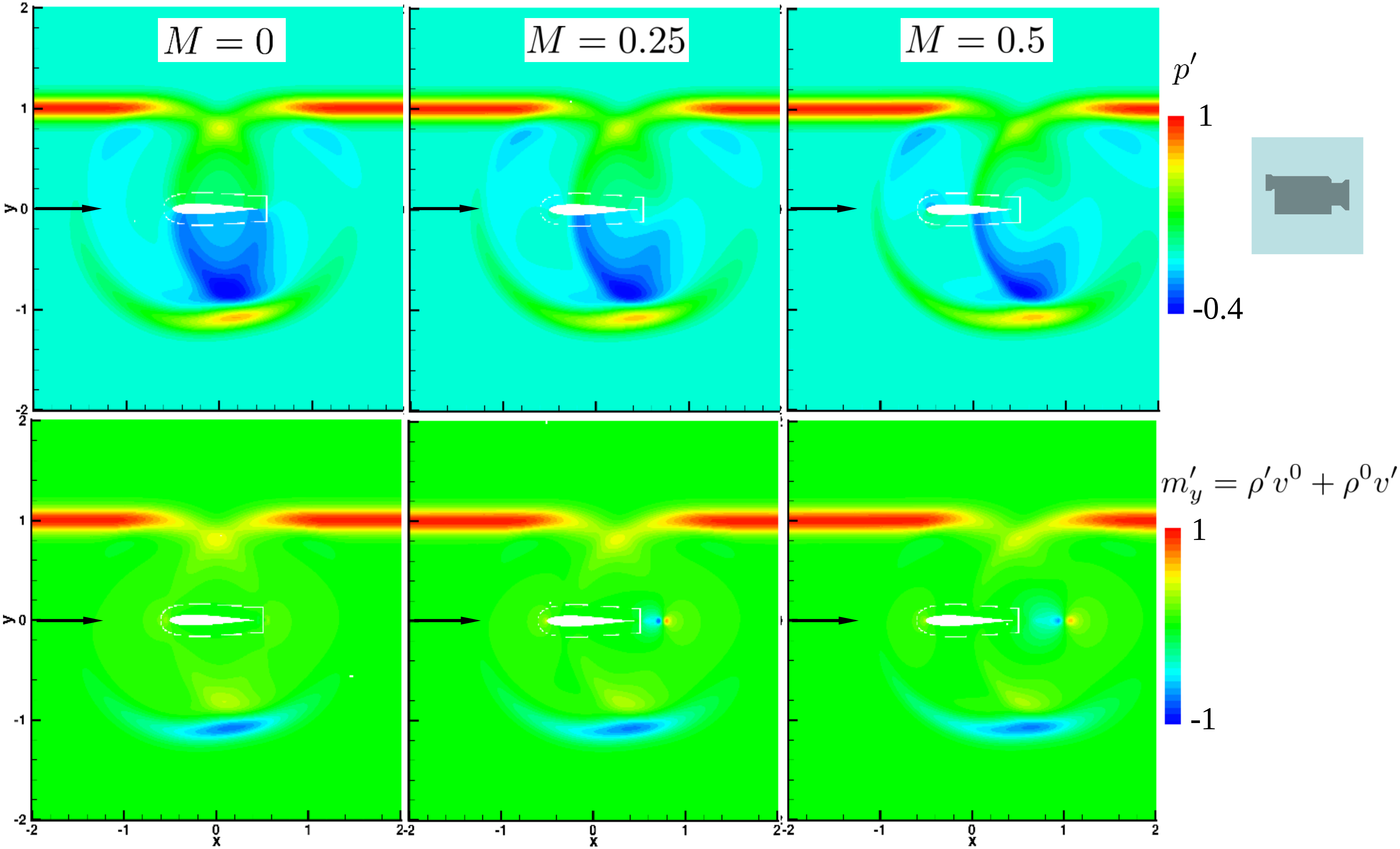
CDS N = Central Differencing Scheme of order N

CAA Simulation Konvektions- und Beugungseffekten



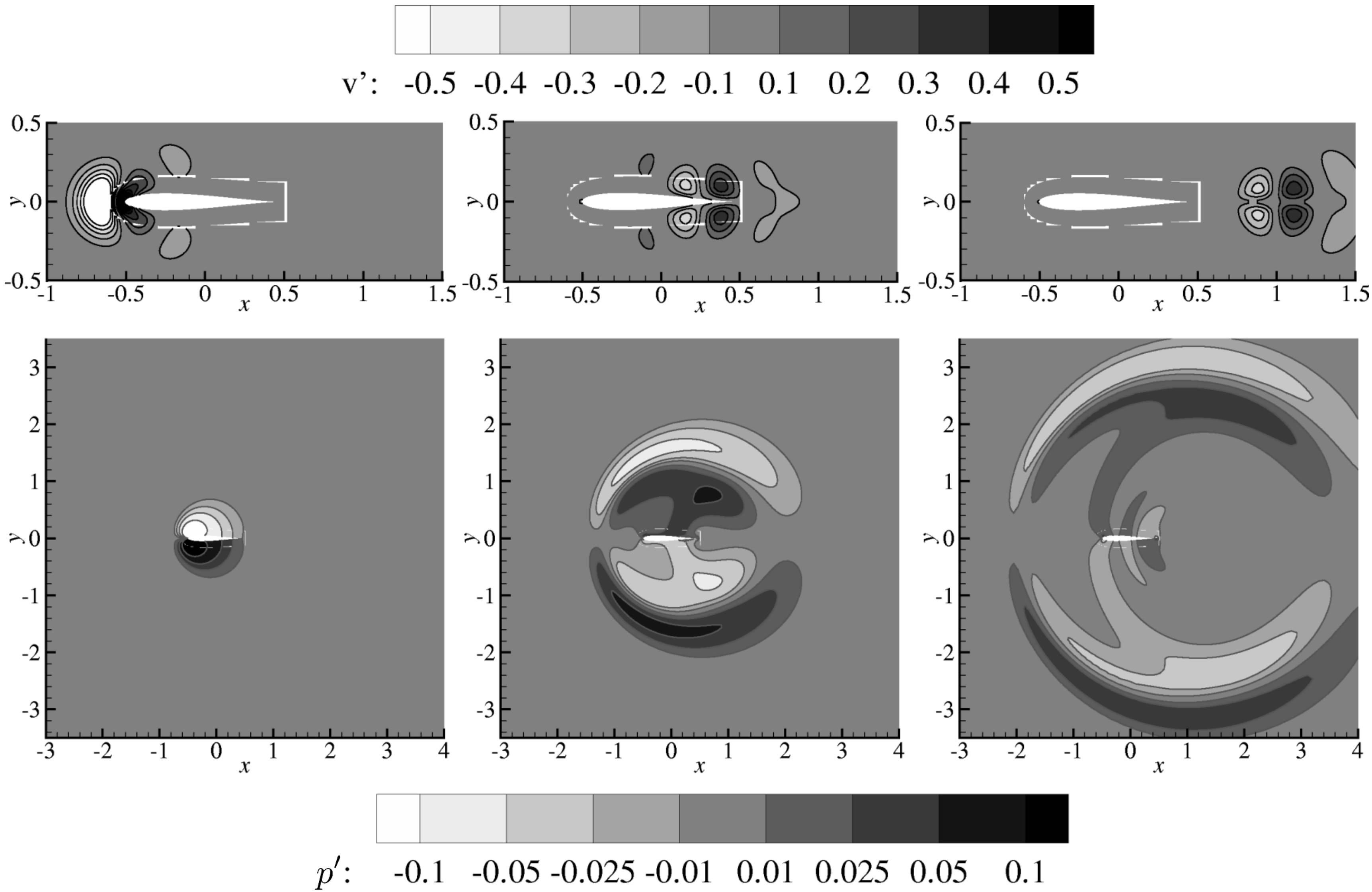
keine Strömung | Potentialwirbel | Wirbel mit Kern (kein Zylinder)

Simulation Wechselwirkung Schall → Wirbel

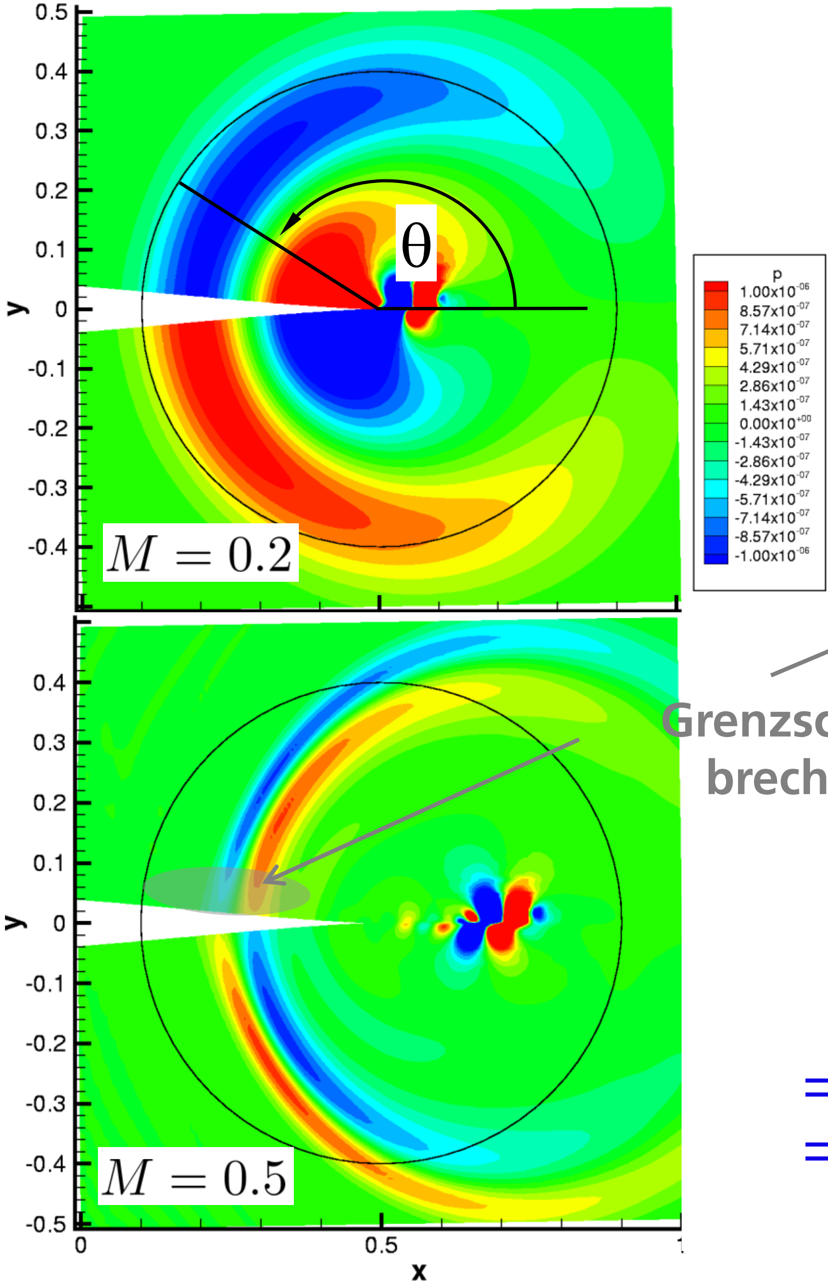


Aerodynamische Erzeugung von Schall (Wirbel → Schall)

Anströmende Wirbelstörung auf Profil (Joukowski)

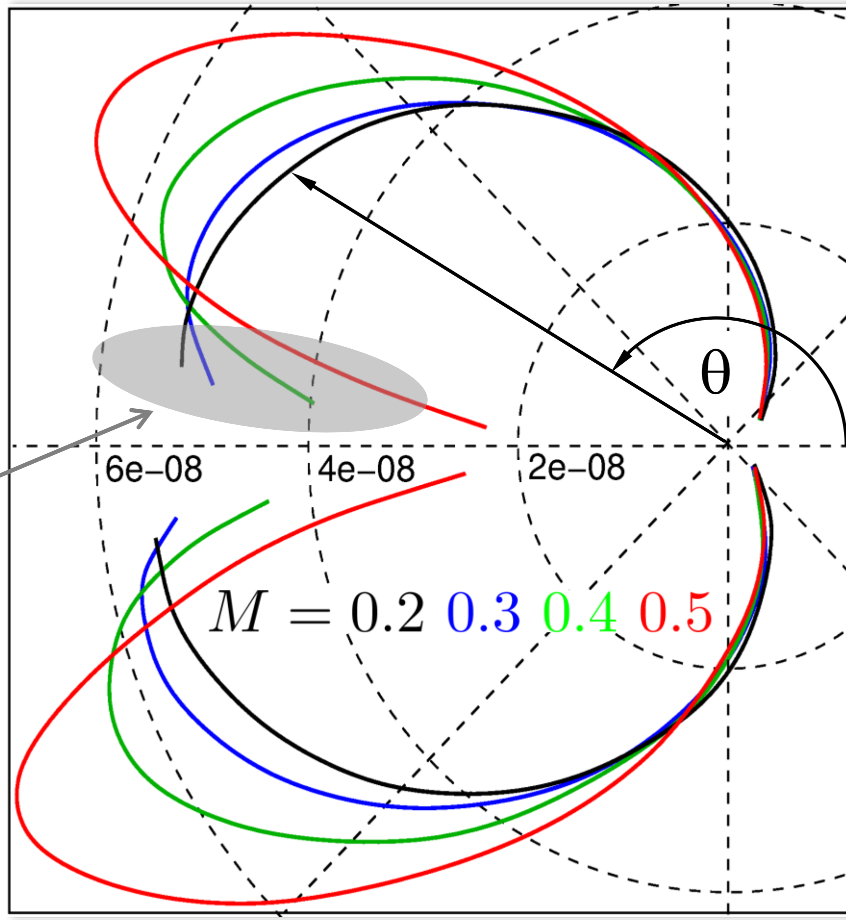


Effekt der Strömungsgeschwindigkeit auf Kantengeräusch



Grenzschicht-brechung

Intensität / M^4

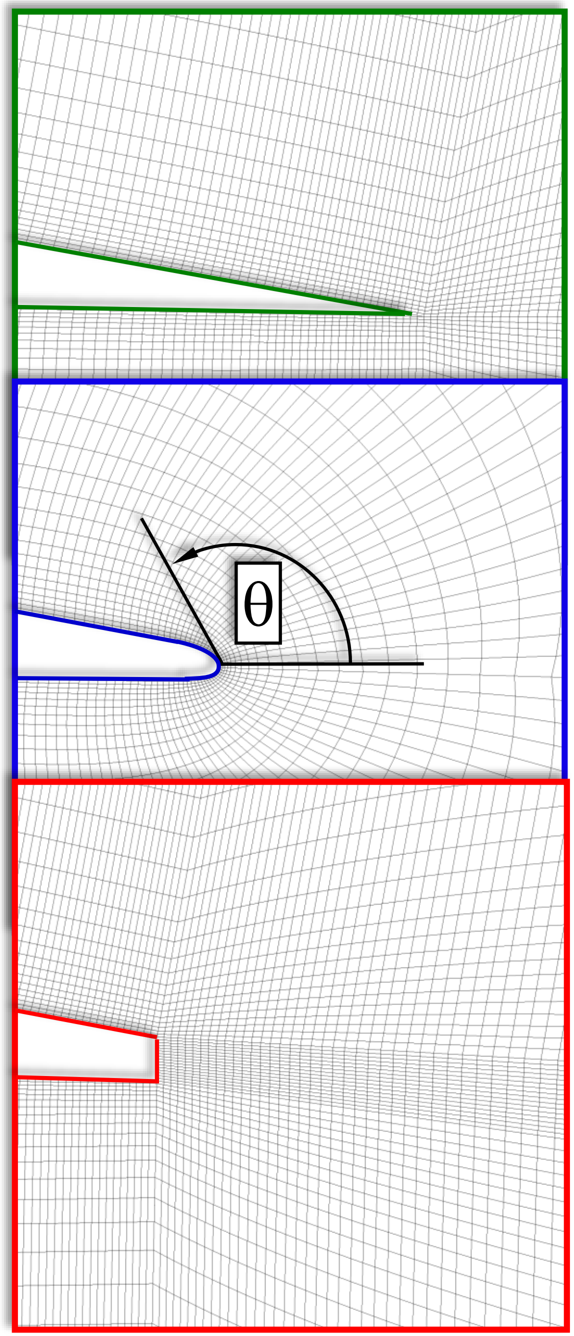


⇒ Richtwirkung Quelle

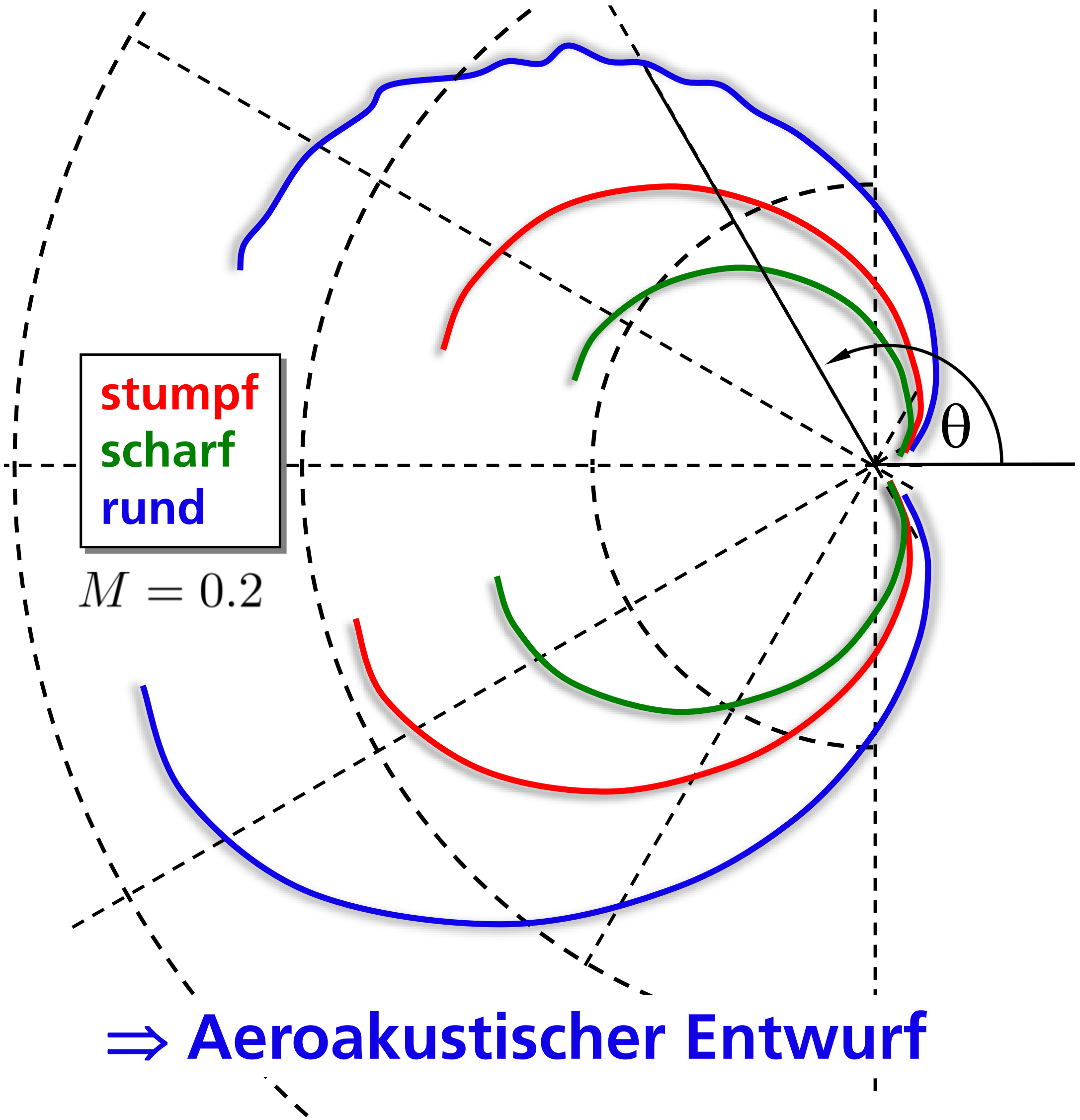
⇒ Geschwindigkeitsgesetz $I \sim U^4$ (2-dim)

M. Lummer et al. AIAA 2002-2578

Entwurfsstudie zu Kantenform



Intensität / M^4



⇒ Aeroakustischer Entwurf

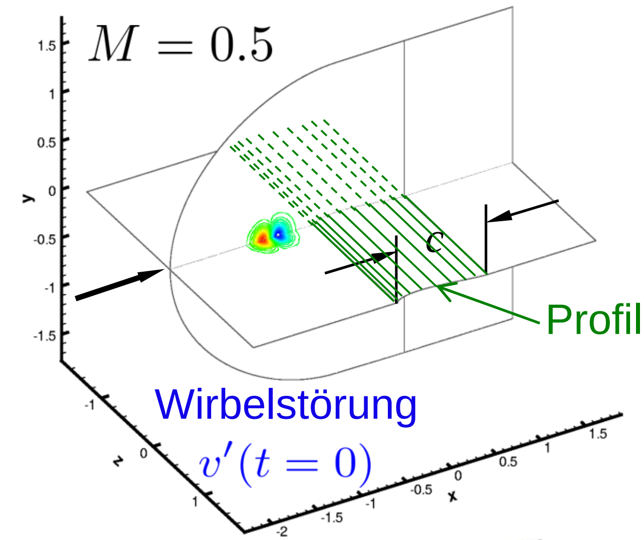
M. Lummer et al. AIAA 2003

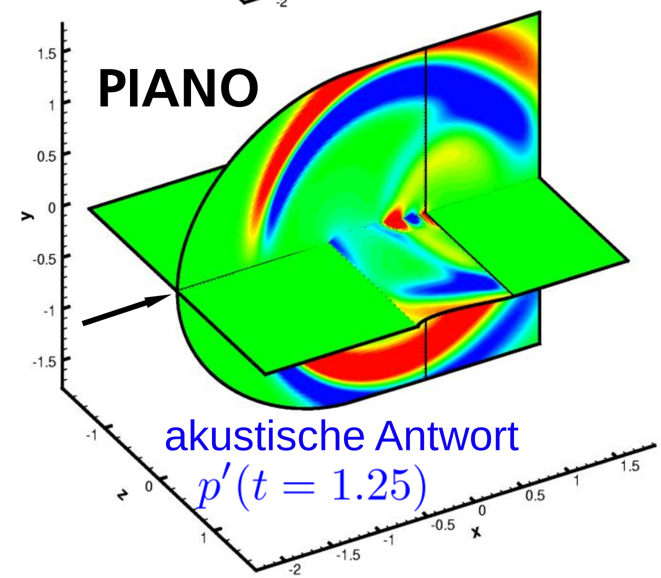
Einfluss Strebendicke in gestörter Zuströmung (1)

Aufgabe:
Entwurfsstudie (Vergleich von Varianten)

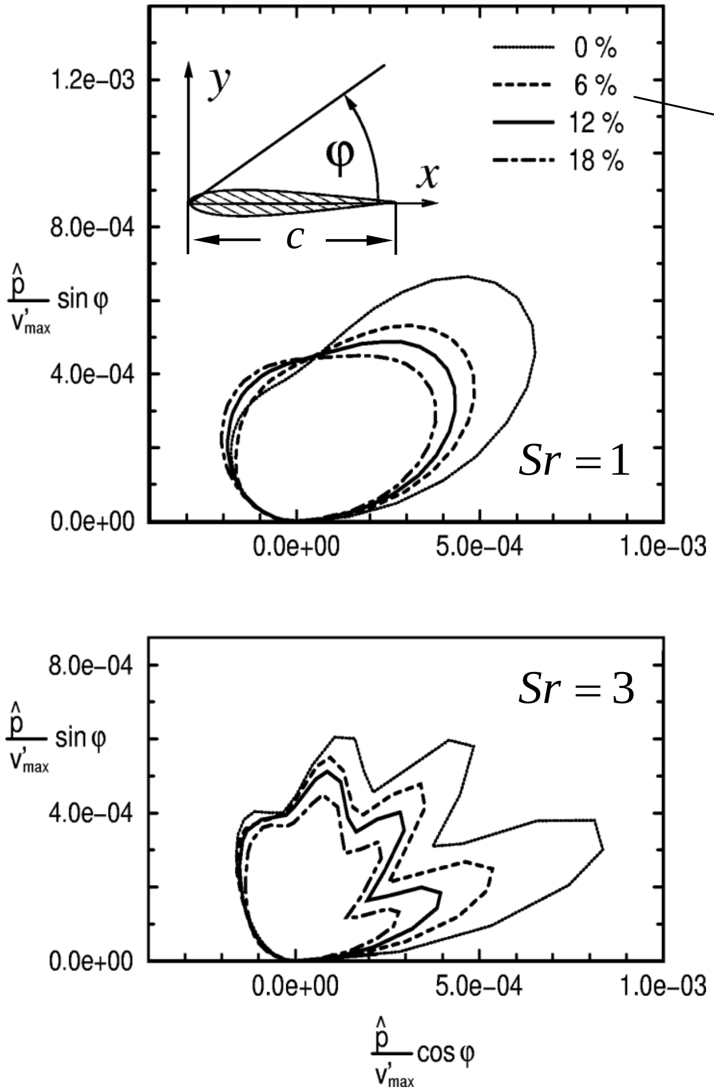
Ansatz:
Quellursache: Teststörwirbel
Quellprozess: Störung RANS mit LEE
Abstrahlung: LEE

Realisierung:
CAA Code PIANO





Einfluss Strebendicke in gestörter Zuströmung (2)



rel. Profildicke

Quantifizierung Schallminderung mit Dicke

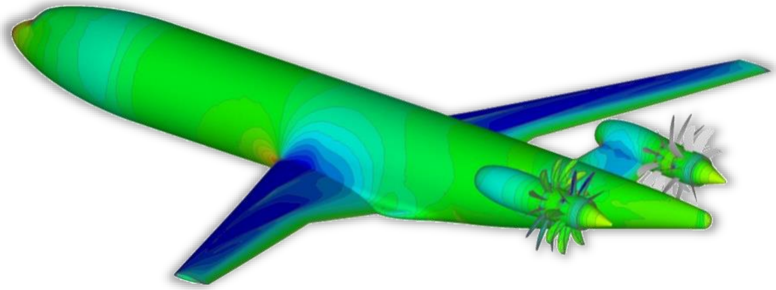
$\Downarrow$

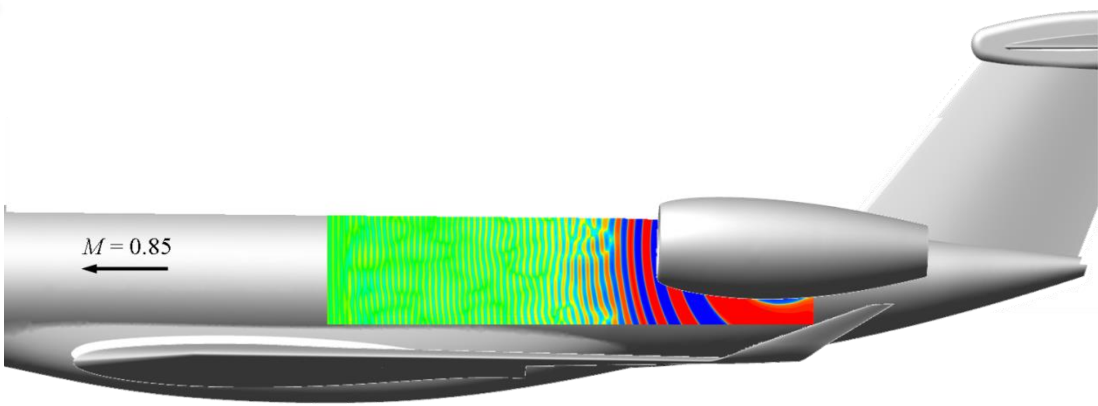
Computer- gestützer aeroakustischer Entwurf

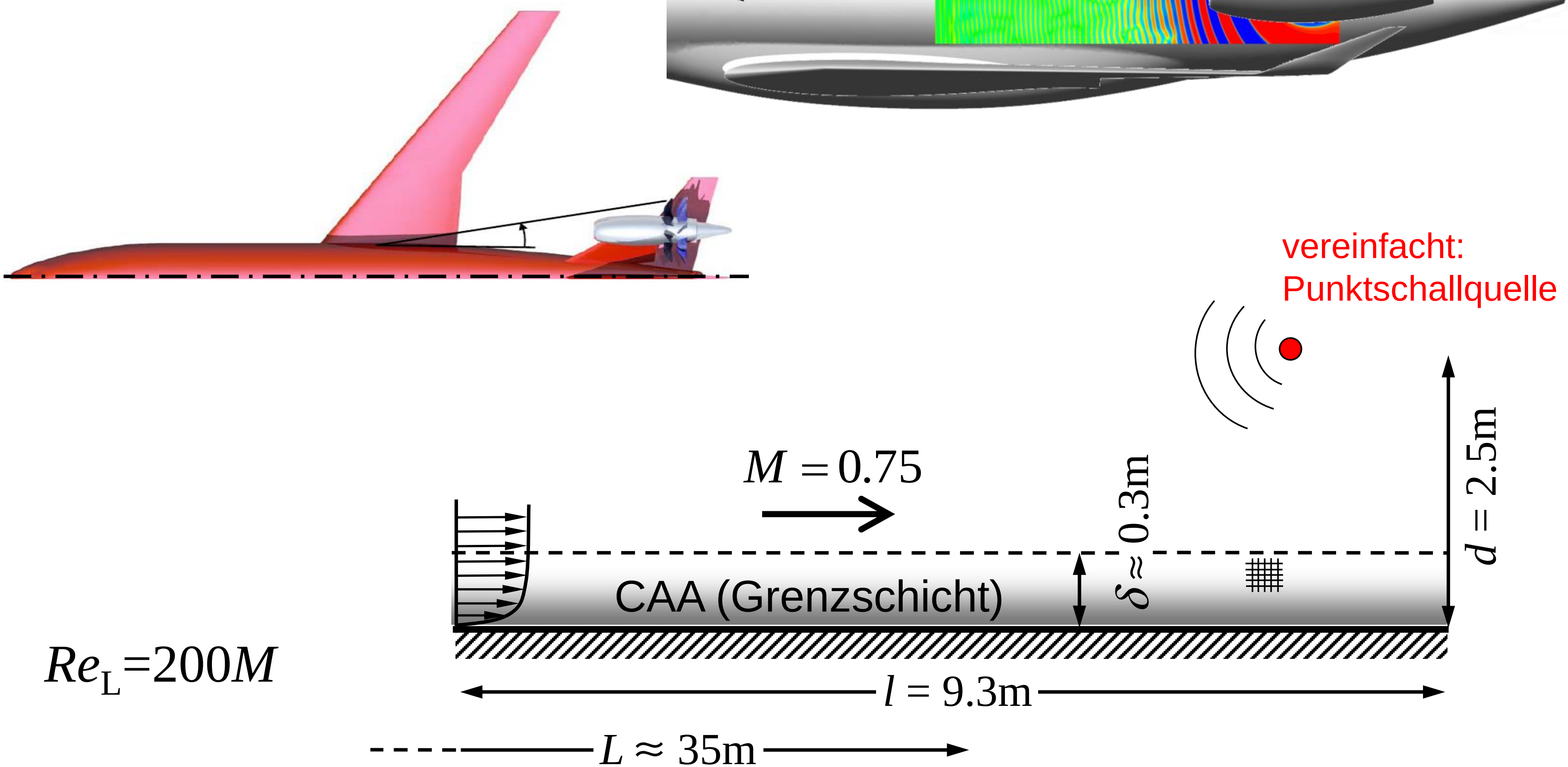
$$(Sr = f \cdot c / U_\infty, \Delta Sr = 0.2)$$

H. Grogger et al. AIAA 2001-2137

Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk



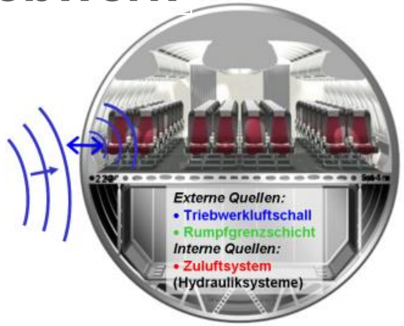


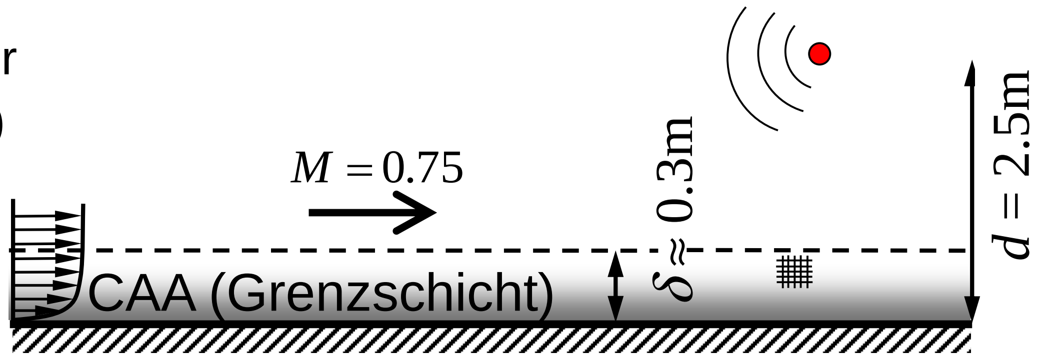


$Re_{\mathrm{L}}=200M$

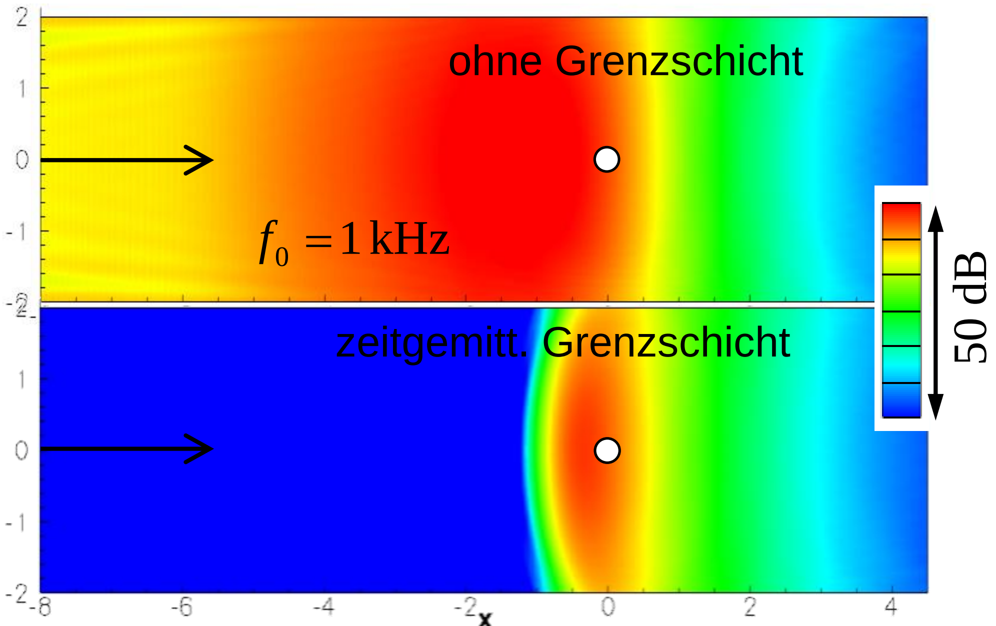
Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk

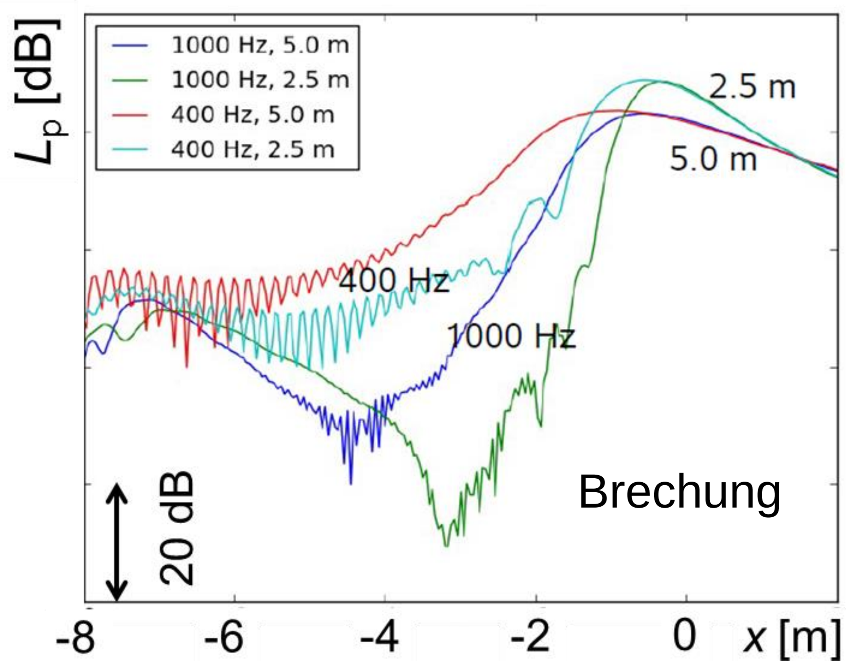
- Realreynoldszahl
- RANS + LEE
  (Turbulenz über
  stoch. Modell)





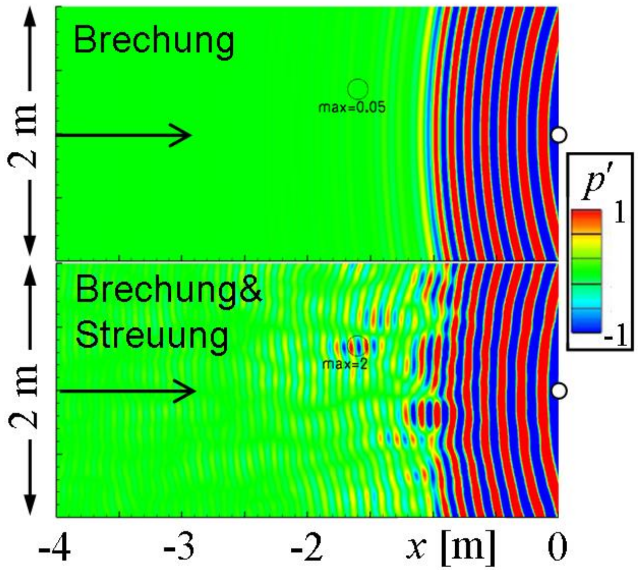
Oberflächendruckpegel von Punktquelle

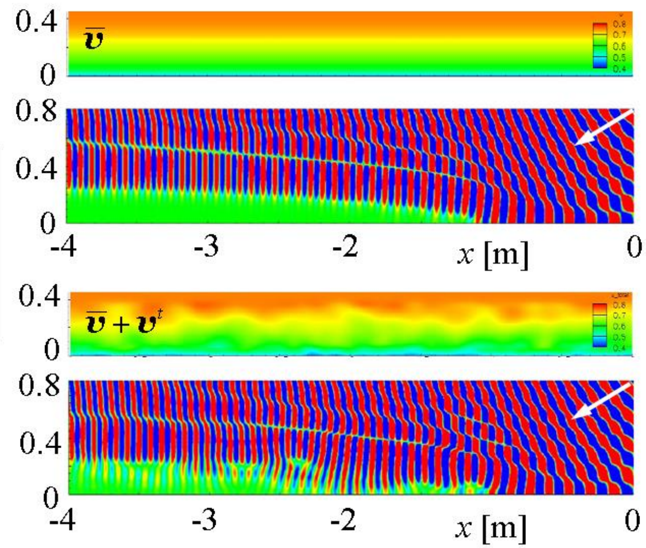


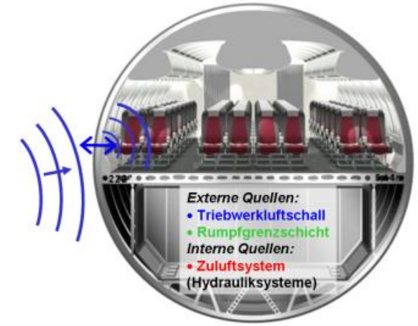


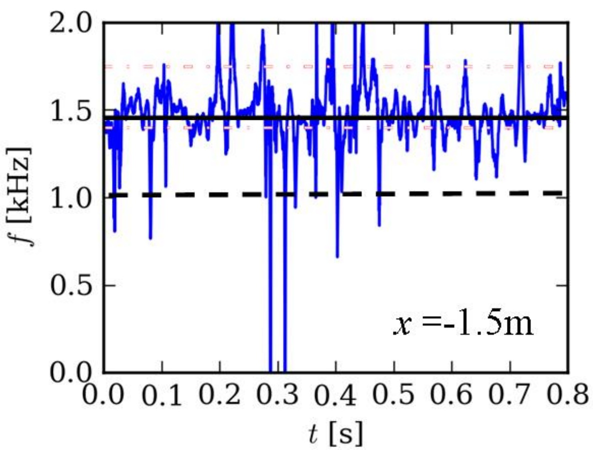
Siefert, Delfs, Caruelle, AIAA2011

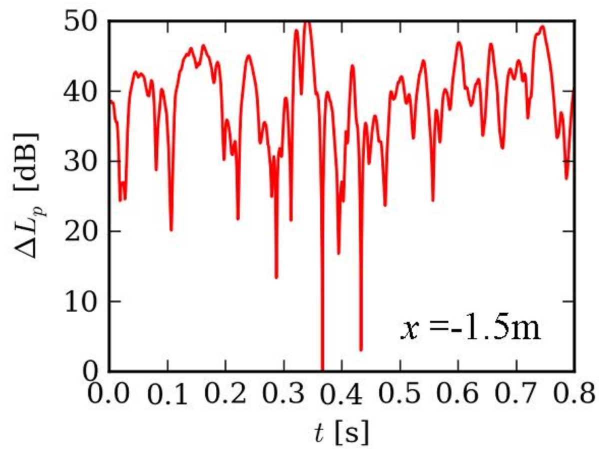
Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk









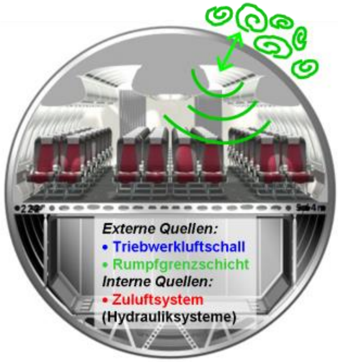


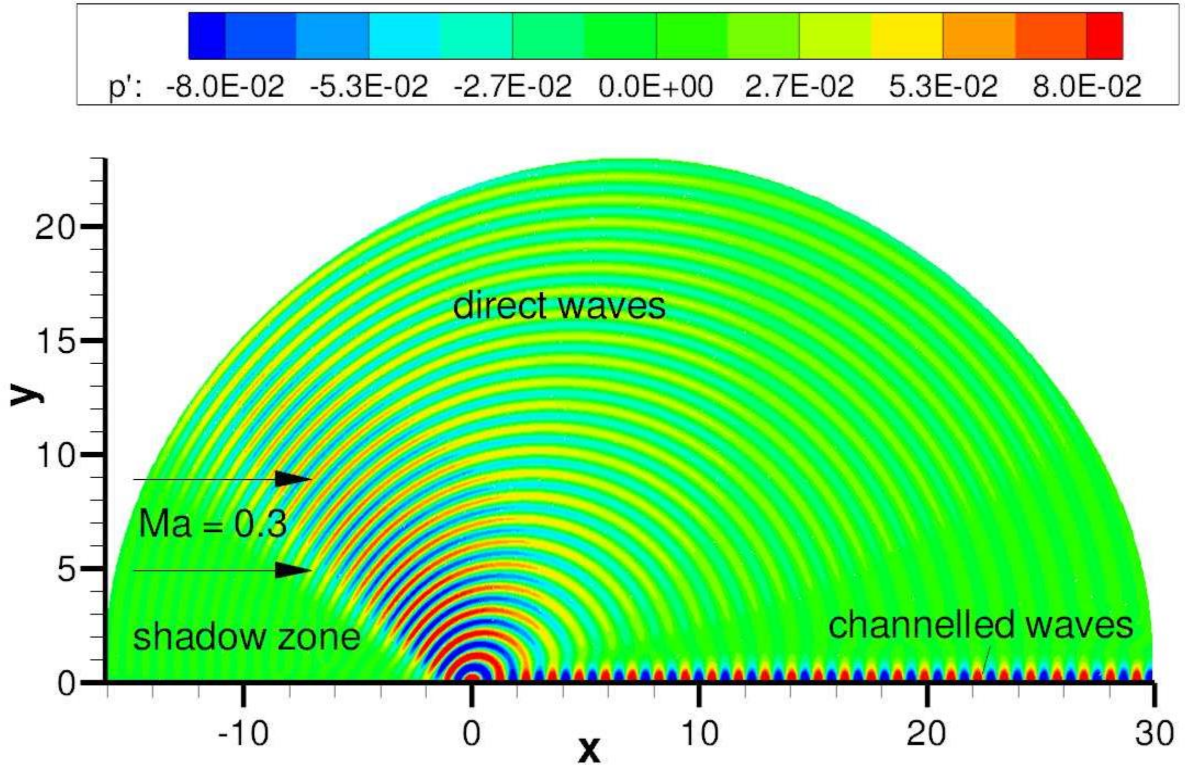
Brechung + Streuung an bewegten turbulenten Wirbeln

⇒ Dopplerverschiebung (positionsabhängig) !

Siefert, Delfs, Caruelle, AIAA2011

Brechung von Schallquellen in Grenzschicht





⇒ Schallschatten und Wellenleiterphänomene

M. Bauer, 2009

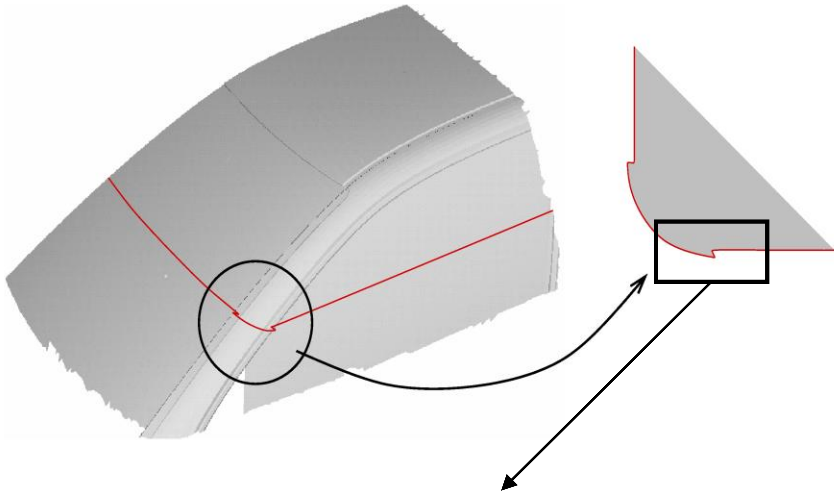
Einfluss der Form einer Wasserfangleiste auf Schallerzeugung

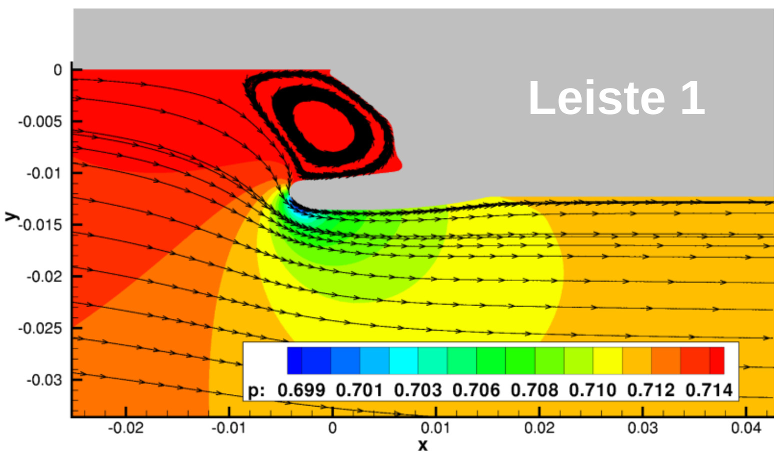
Aufgabe:
Entwurfsstudie (Vergleich von Variationen)

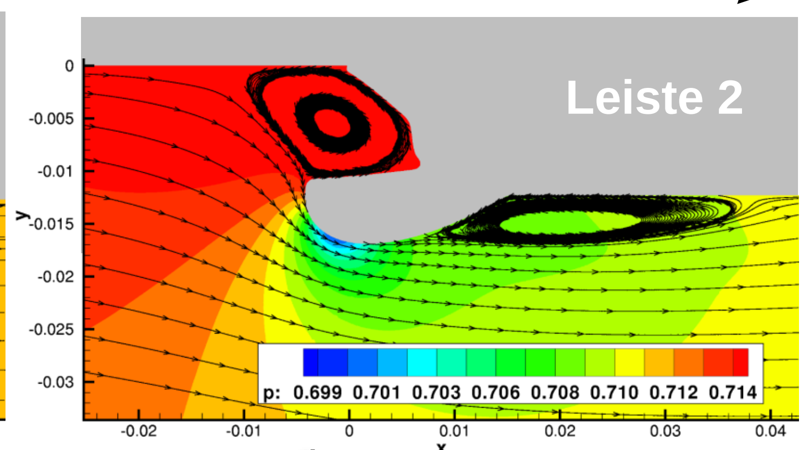
Ansatz:

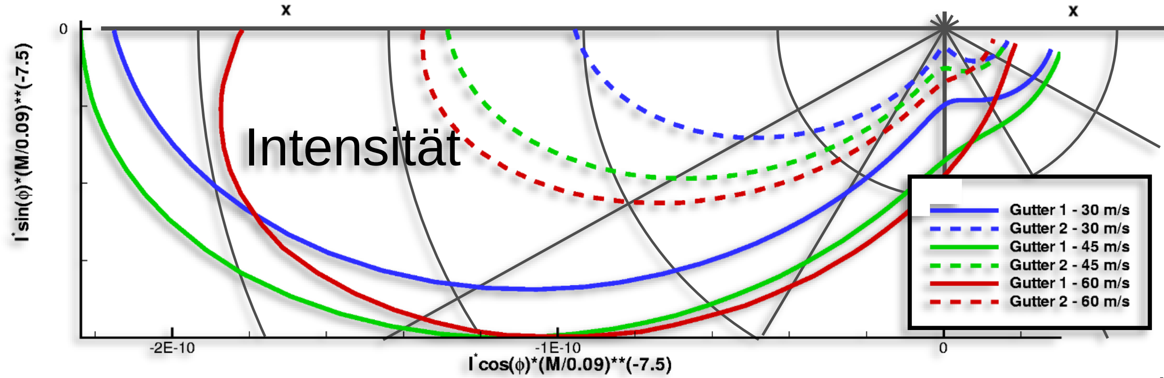
Quellursache: Testwirbelstörung
Quellprozess: Störung RANS mit LEE
Abstrahlung: LEE

Realisierung:
RANS-Löser OpenFoam & CAA Code PIANO

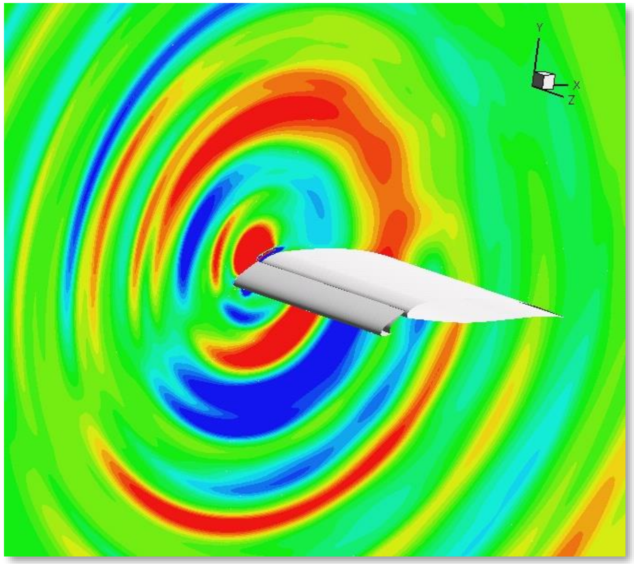




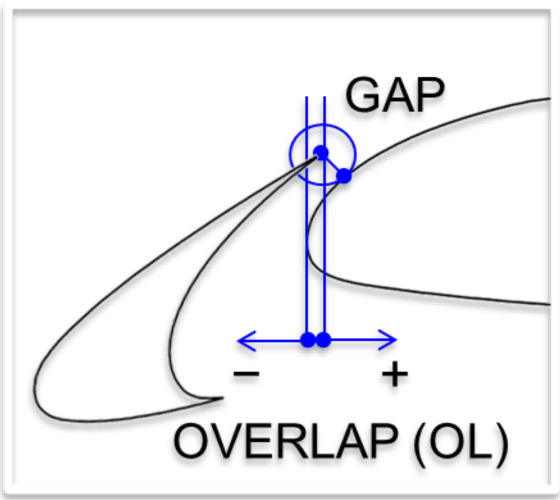


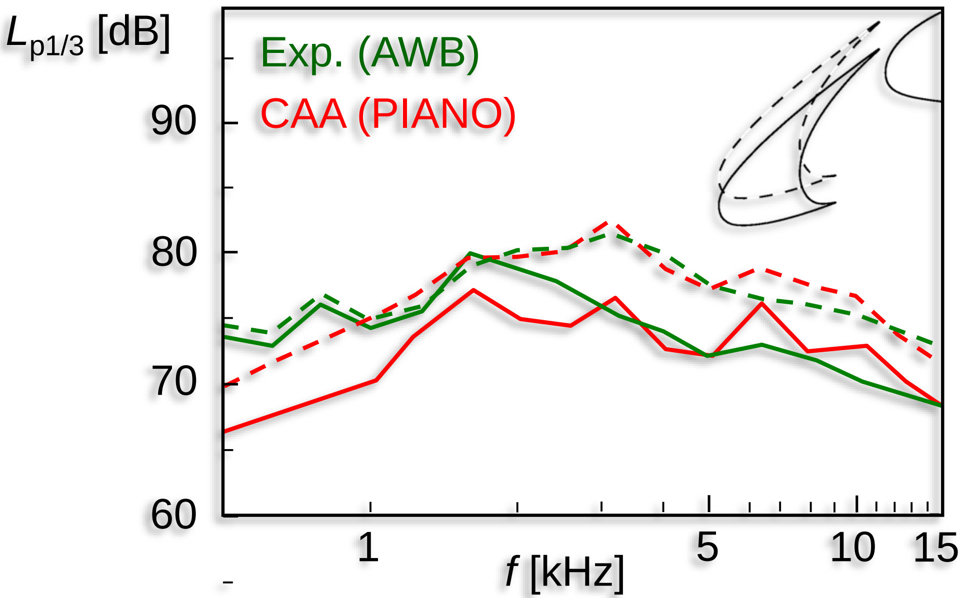


Geräuschminderung Vorflügel



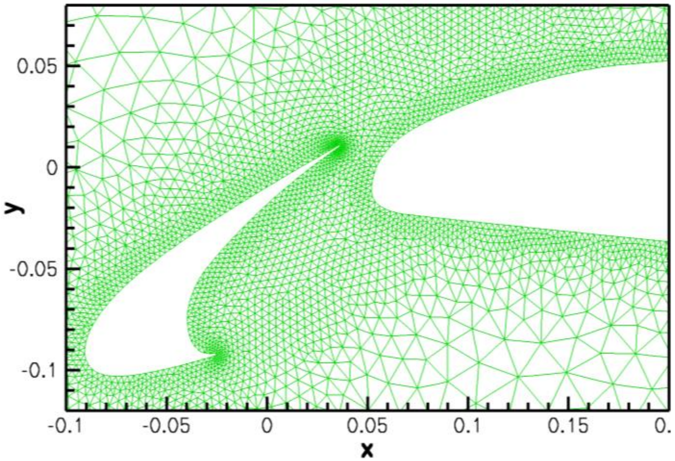
„Silent by design“
Klappensetzung: - 4 dB

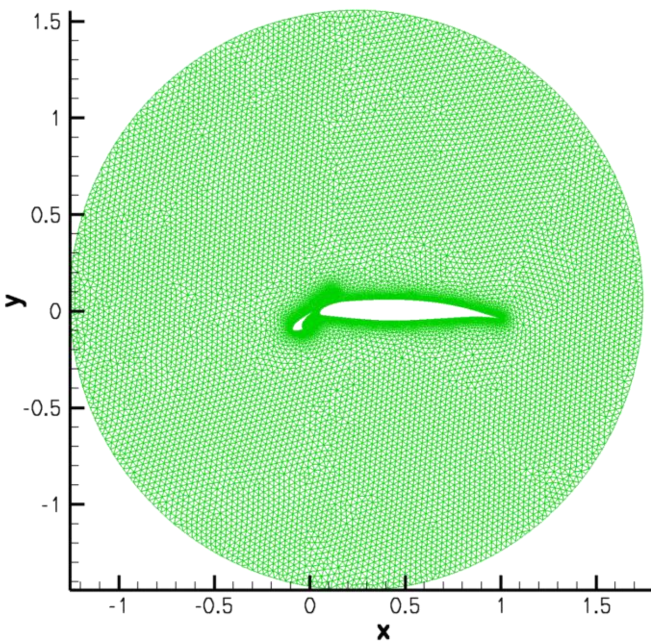


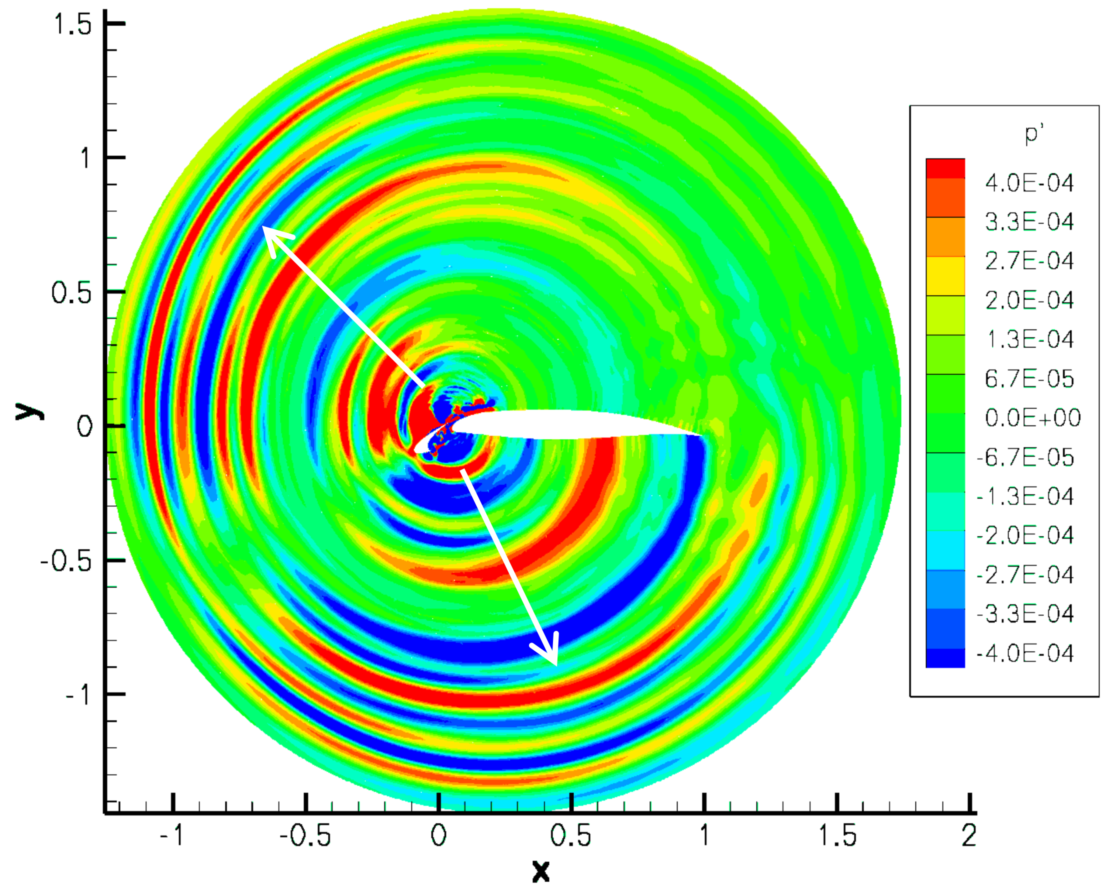


CAA auf unstrukturierten Gittern

- basierend auf Discontinuous Galerkin Finite-Elemente Ansatz
- 4th Ordnung, knotenbasierte Formulierung (Lagrange Polynome)
- Stochastisches Quellenmodell

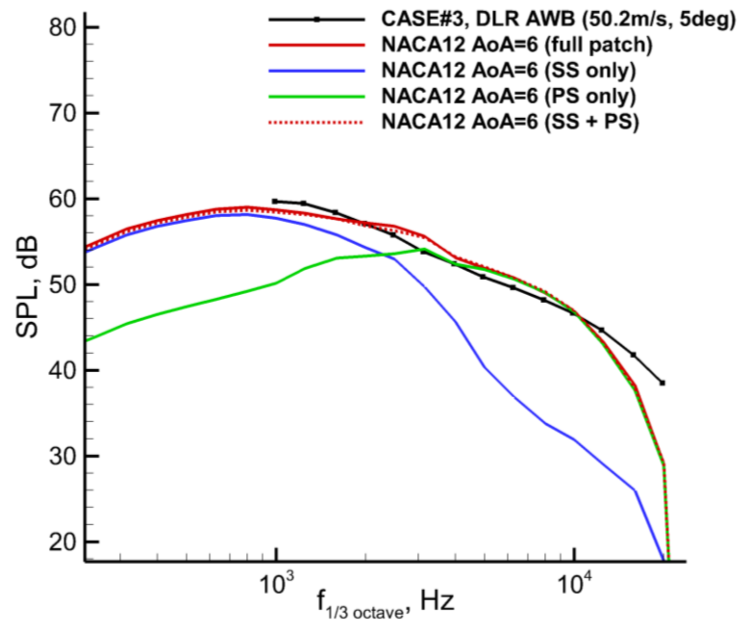


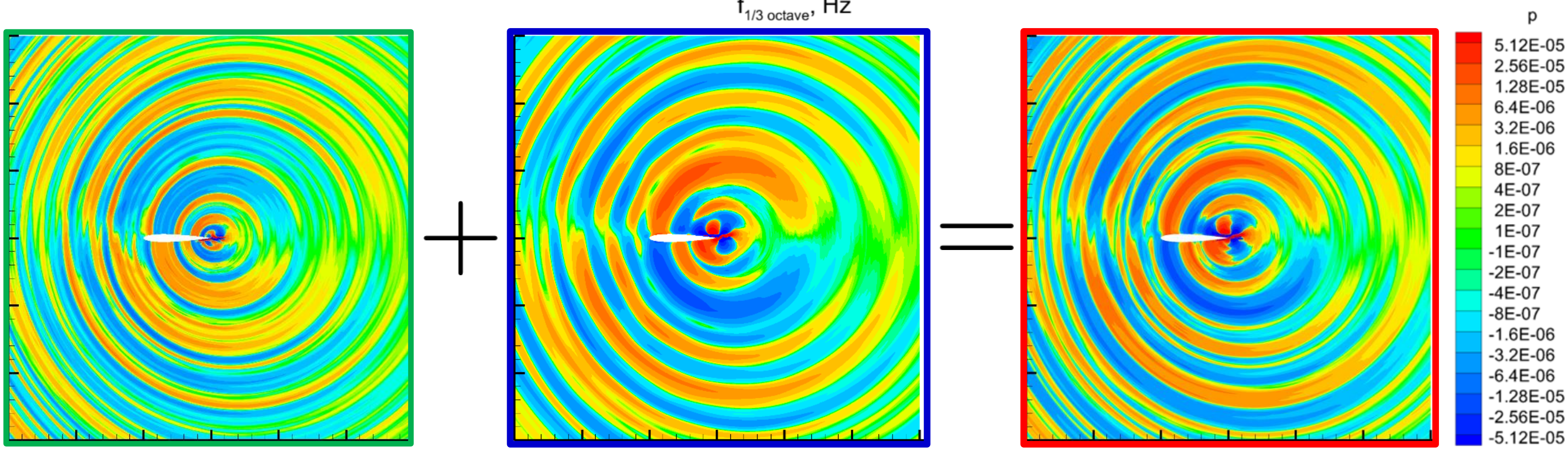




M. Bauer, AIAA 2009

CAA Simulation NACA0012 Hinterkantengeräusch bei AoA=6deg





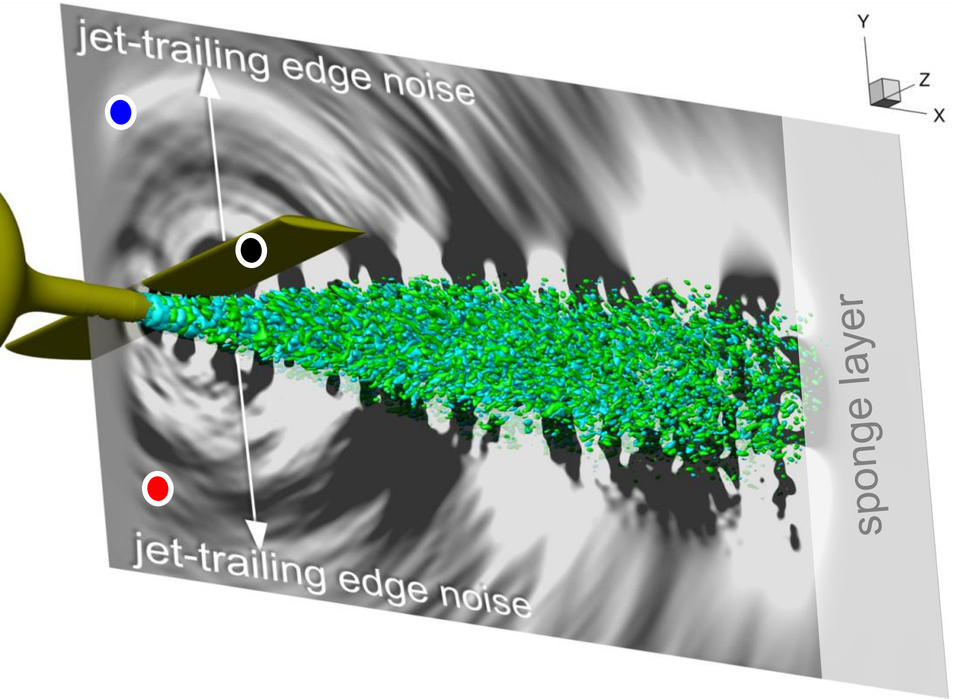
Turbulenz nur Druckseite

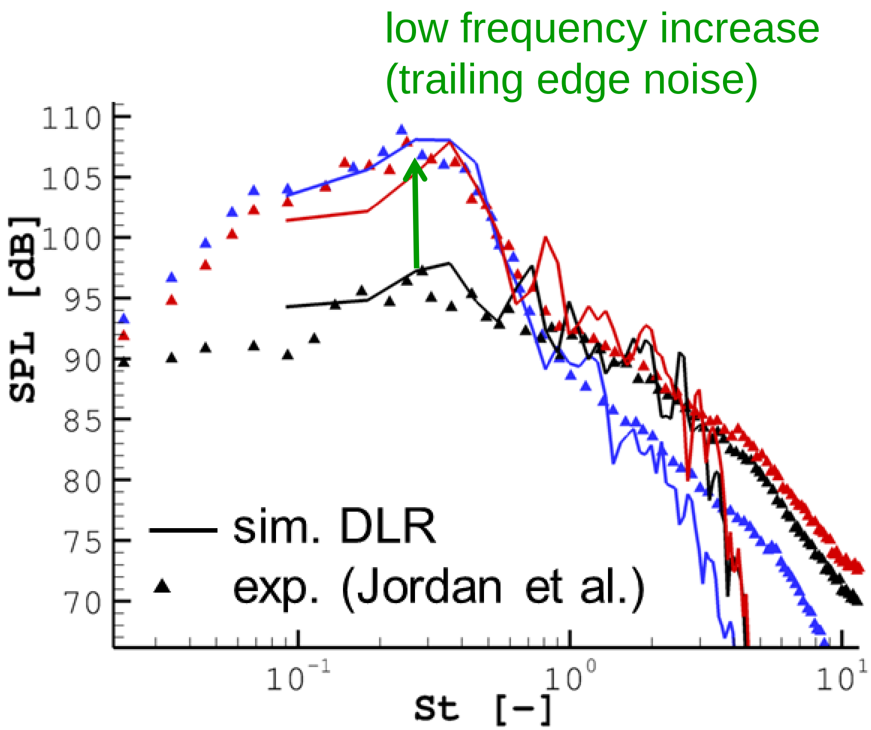
Turbulenz nur Saugseite

Turbulenz beidseitig

Strahl-Profil Interferenzgeräusch

CAA Simulation M=0.6 Strahlinterferenz mit NACA0012

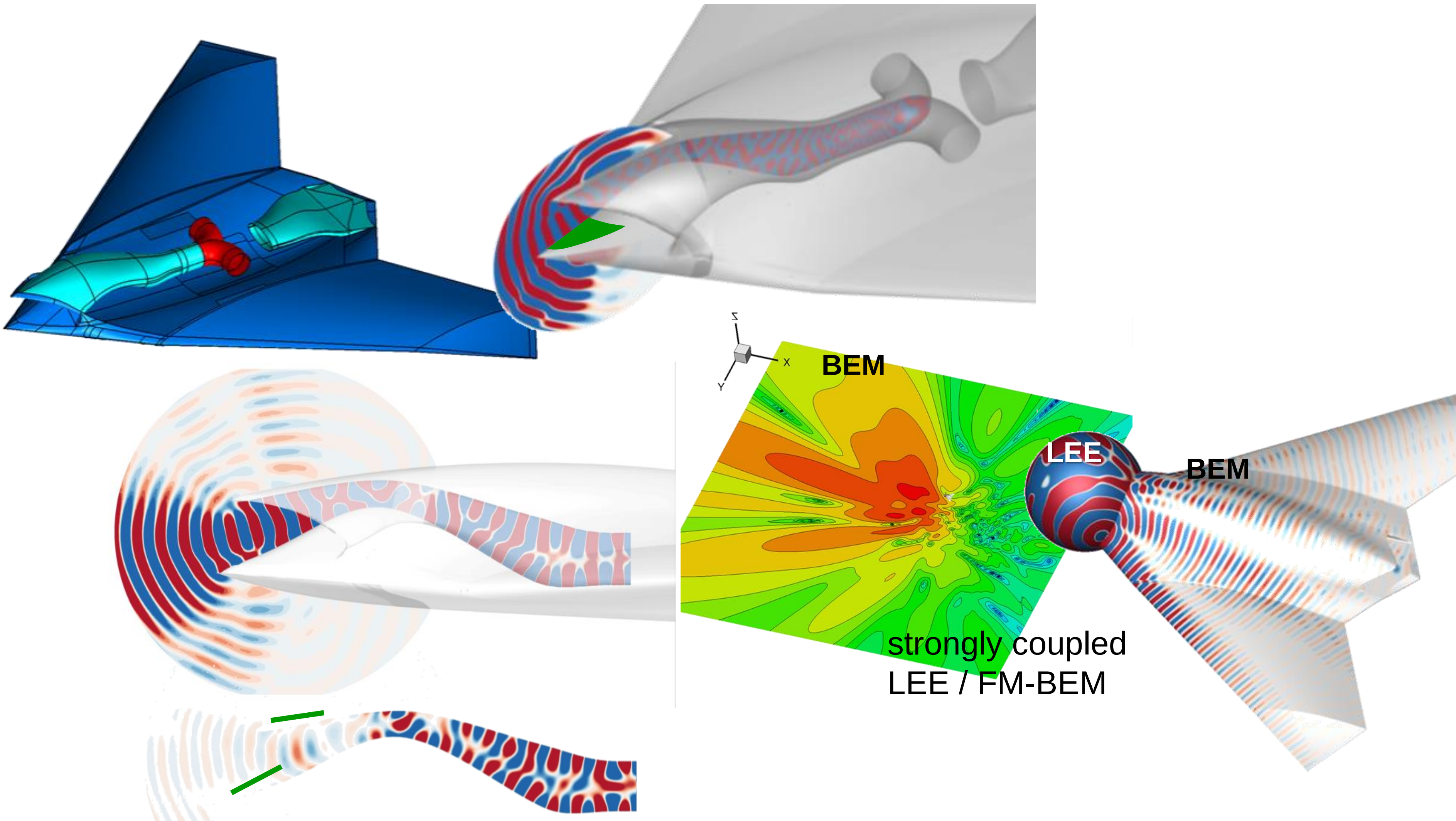




FES=„Forced Eddy Simulation“

- uRANS: CFD solver **TAU**
- subscale forcing: Eddy Relaxation model*
- stochastic turbulence: **FRPM**
- nonl. perturb: CAA solver **PIANO**

Abstrahlungssimulation Einlauf – Kopplung CAA-BEM



Influence of intake design on radiation incl. flow effects

Inclusion of arbitrary liner surfaces (CAA code DISCO++)

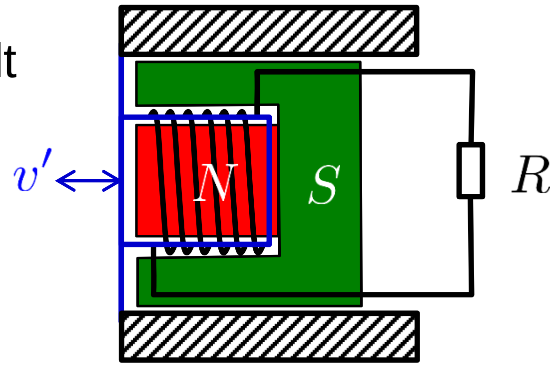
2.1 Akustische Sensoren und Messtechnik

2.1.1 Mikrophone

Mikrophone sind sog. „elektroakustische Wandler“, die eine akustische Eingangsgröße (Druck oder Schnelle) in eine elektrische Ausgangsgröße (Spannung oder Strom) umsetzen.

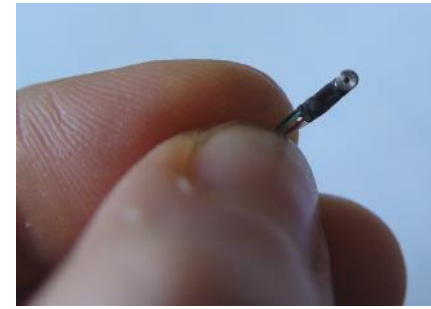
Es wird zwischen elektrostatischen, (elektro-)dynamischen und piezoelektrischen Wandlern unterschieden. Entsprechend der gemessenen Größe gibt es Schalldruck- und Schnellemikrophone. In der Mehrzahl der aeroakustischen Anwendungen interessiert die Schalldruckmessung. Hierbei hat sich das sog. „Kondensatormikrophon“ als Vertreter der elektrostatischen Wandler durchgesetzt (s.u.).

2.1.1.1 elektrodynamisches Mikrophon, auch „dynam. Tauchspulenmikrophon“:
freitragende Spule ist an Membran befestigt und taucht bei schalldruckinduzierter Bewegung der Membran in Ringspalt eines Permanentmagneten ein
⇒ Induktion eines magnetischen Flusses ~ Geschwindigk.
⇒ Induktion Spannung
Vorteil: robust, keine ext. Spannung
Nachteil: träge (wg. Spulenmasse)

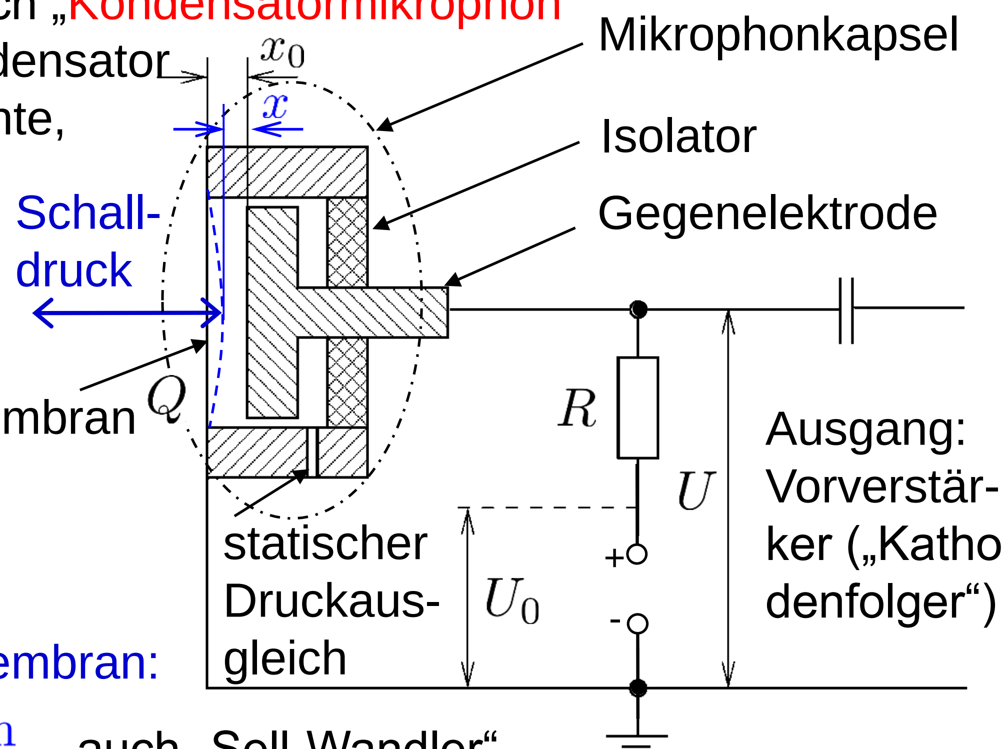


2.1.1 Freifeldmikrophone, Frequenzgang und Immissionsrichtwirkung

2.1.1.2 piezoelektrisches Mikrophon: auch piezoresistiver Druckwandler. Wandeln druckinduzierte Verformung von Piezo-Kristallen in elektrische Spannung um. Häufige Anwendung: Messung instationärer Oberflächendrücke bei überströmten Flächen, (bekannter Hersteller Ku-lite Semiconductors Inc., „Ku-lite-Sensoren“)
Vorteil: klein, Nachteil: unempfindlich



2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon, auch „Kondensatormikrophon“
Stellt im wesentlichen einen Plattenkondensator dar, dessen eine Elektrode als sehr leichte, leitfähige Membran ausgeführt ist.



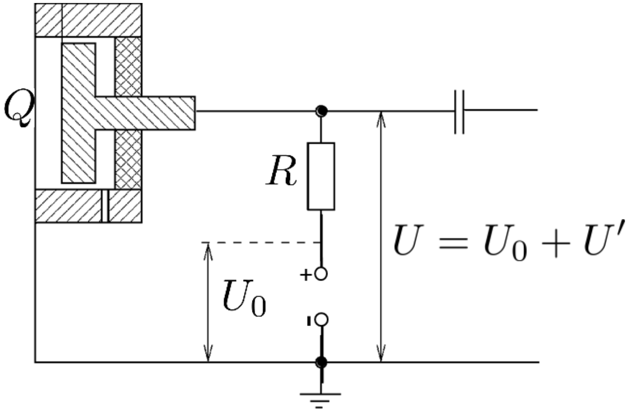
Q – Ladung
C – Kapazität d. Kondensators
R – Widerstand (hochohmig)
U_0 – Polaristationsspannung (200V Gleichspannung)

Schalldruckinduzierte Bewegung der Membran:

$$x(t) = x_0 + \hat{x}\sin(\omega t), \quad x_0 \sim 5 - 20\mu\text{m}$$

auch „Sell-Wandler“

2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon



Schalldruckinduzierte Bewegung der Membran:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{x}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$ - elektrische Feldkonstante für Vakuum

A - wirksame Kondensatorfläche

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\big(x_0 + \hat{x}\sin(\omega t)\big)$$

R wird hochohmig gewählt, um den Strom zu begrenzen und damit die Ladung Q konstant zu halten, d.h. $Q \simeq Q_0 \Rightarrow$

$$U = \underbrace{\frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}}_{U_0}\big(x_0 + \hat{x}\sin(\omega t)\big) \qquad \Rightarrow U'(t) = U(t) - U_0 \sim \hat{x}\sin(\omega t) \sim p'(t)$$

Es gibt Ausführungen, bei denen ein permanent elektrisch vorpolarisiertes Dielektrikum verwendet wird (permanentes elektrisches Gleichfeld), sog. „Elektrete“. Solche Mikrophone heißen auch „Elektretmikrophone“.

2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon

<u>Frequenzgang:</u>

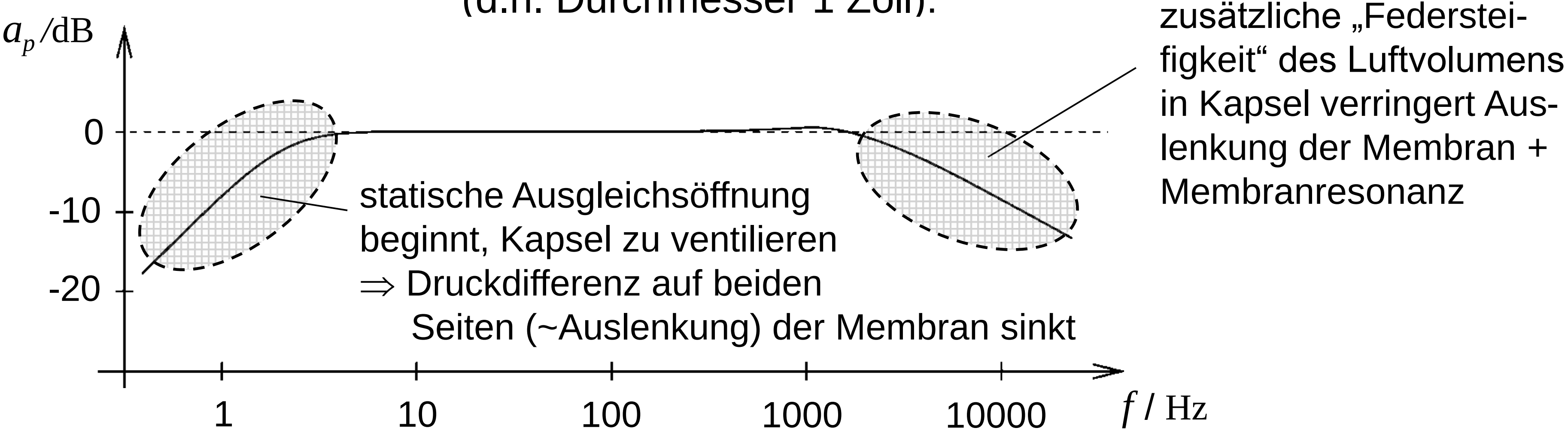
$$M_p = \frac{U}{p_1} \quad (324)$$

Druckübertragungsfaktor, (pressure response)

p_1 Effektivwert des an Membran tatsächl. anliegenden Drucks

$a_p := 20\,\mathrm{lg}(M_p/M_{\mathrm{ref}})$ Druckübertragungsmaß, $M_{\mathrm{ref}} = 1\mathrm{V/Pa}$

Typischer Verlauf für ein 1“ Mikrophon (d.h. Durchmesser 1 Zoll):



a_p beschreibt „innere Charakteristik des Mikrophons“

2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon

<u>Frequenzgang</u>:

$$M_F = \frac{U}{p_0} \quad (325)$$

Feldübertragungsfaktor, (free field response)

p_0 Druck im Messpunkt ohne Störwirkung des Mikrophons

$a_F := 20\,\mathrm{lg}(M_F/M_{\mathrm{ref}})$ Feldübertragungsmaß

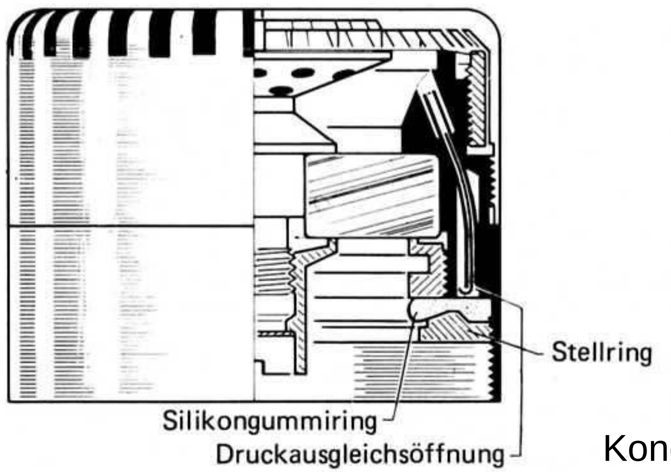
Für Messung benötigt: Freifeldkorrektur

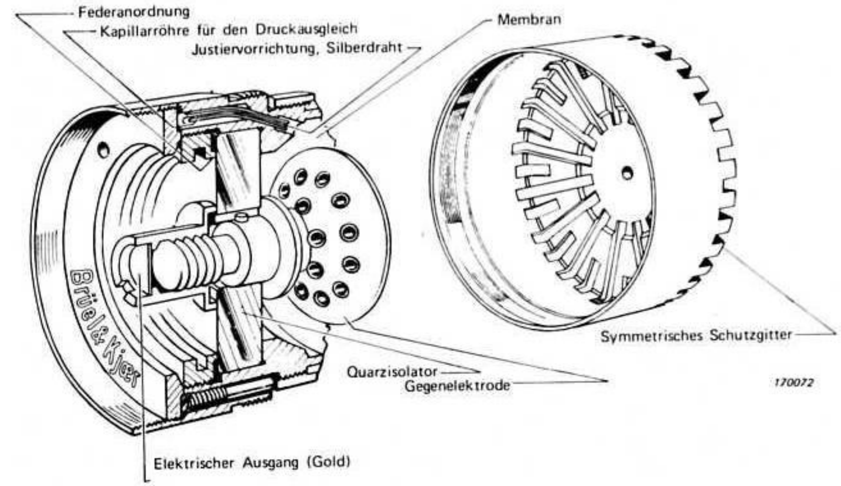
$$K = a_F - a_p = 20\,\mathrm{lg}\,\frac{p_1}{p_0} \quad (326)$$

K beschreibt die „äußere Charakteristik“ des Mikrophonkörpers inkl. Einbauanordnung (z.B. Beugungsphänomene), vgl. Diagramme von B&K 2.9, 2.10., 2.13.
Beachte: K ist stark einfallswinkelabhängig!

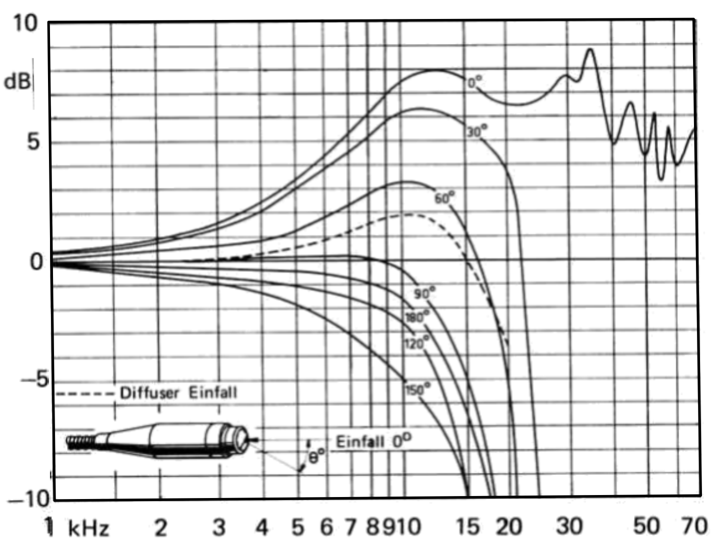
Folgerung für z.B. Überflugmessungen: lege Mikrophon so auf Betonboden, dass Membranebene in Überflugebene $\Rightarrow K$ = const. für alle Überflugwinkel

2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon

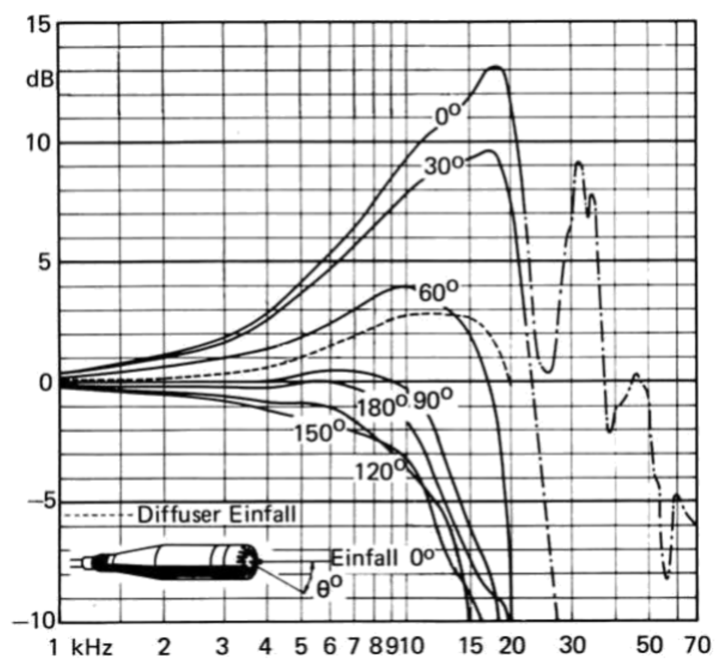




Kondensatormikrophonkapsel



ohne Schutzgitter



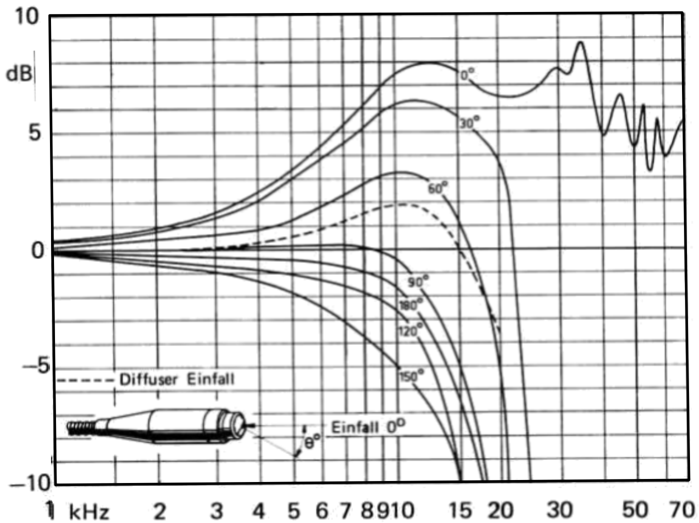
mit Schutzgitter

Freifeld-Korrekturen für 1“ Mikrophonkapseln (zu Druckfrequenzgang zu addieren)

Quelle: Brüel & Kjaer 1973

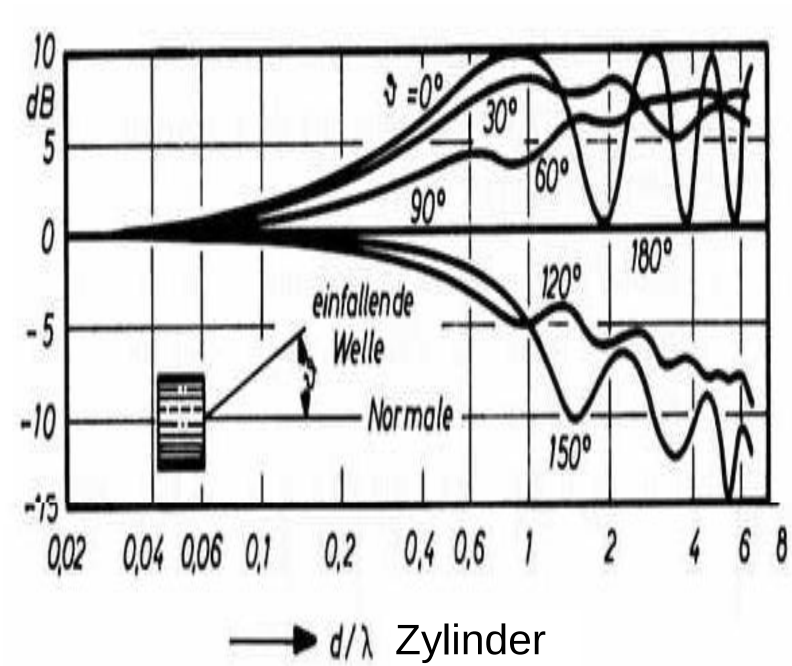
2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon

vgl. Charakteristik Mikrophon mit berechnetem
Schallfeld am Zylinder (Beugung)



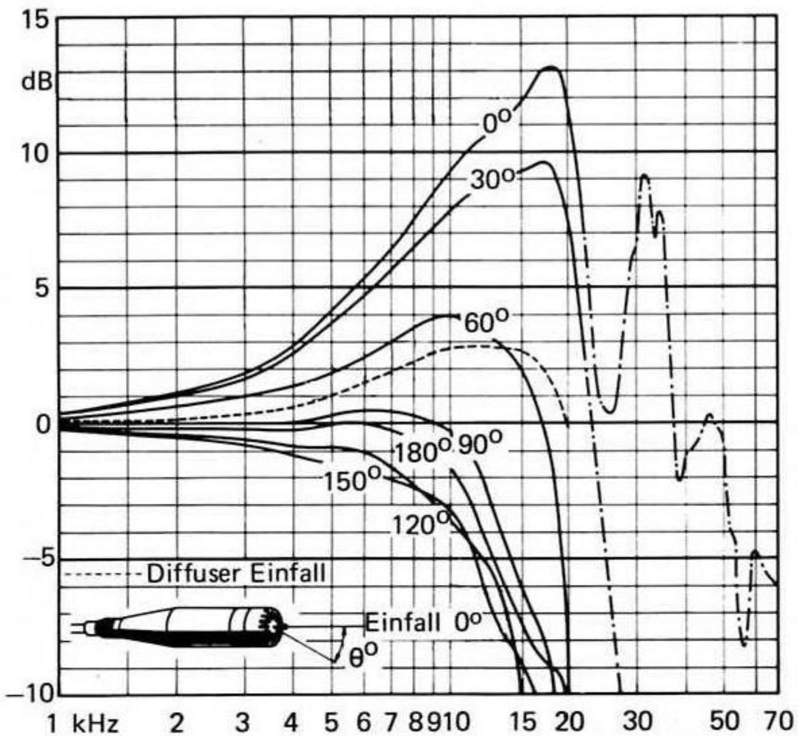
ohne Schutzgitter

Quelle: Brüel & Kjaer 1973

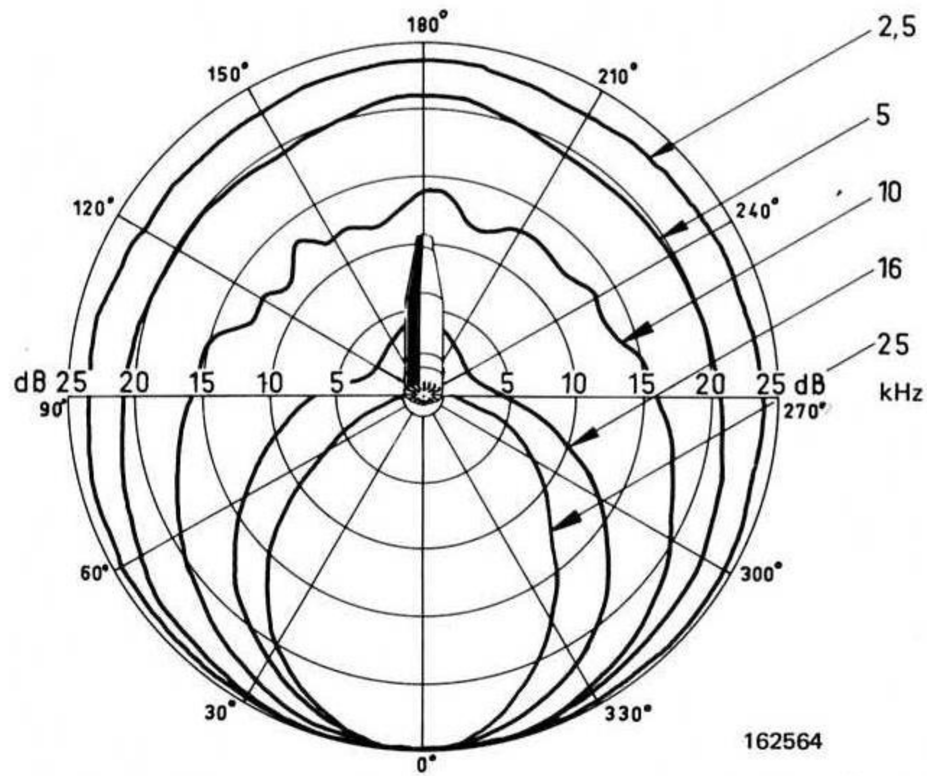


Quelle: E.Meyer, E.G. Neumann „Physikalische und Techische Akustik“, Vieweg1974

2.1.1.3 elekrostatisches Mikrophon



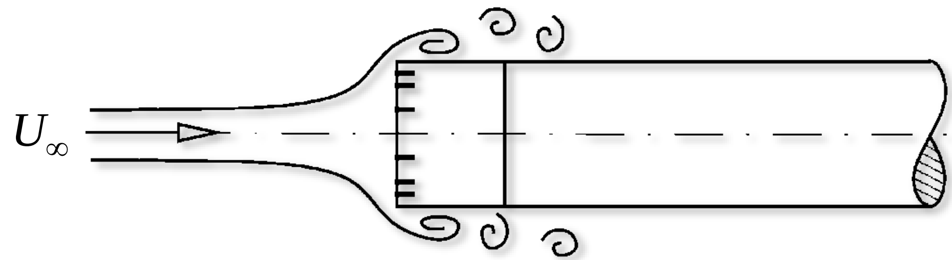
Freifeld-Korrekturen für 1“ Mikrophonkapsel
mit Schutzgitter
(zu Druckfrequenzgang zu addieren)



Typische Richtcharakteristiken für
1“ Mikrophonkapseln mit Schutzgitter

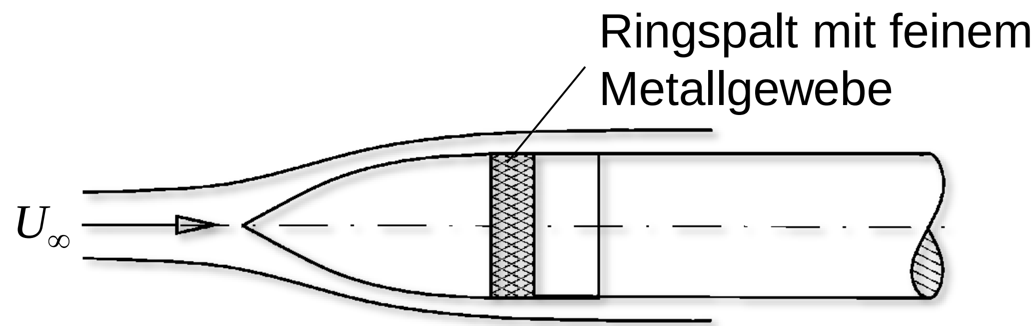
Quelle: Brüel & Kjaer 1973

2.1.2 Mikrophone in Strömungen



Betrieb von Mikrophonen in Strömungen würde hohe (turbulenz- und ablösungsbedingte) hydrodynamische Druckschwankungen ergeben. Akustische Drücke würden davon verdeckt.

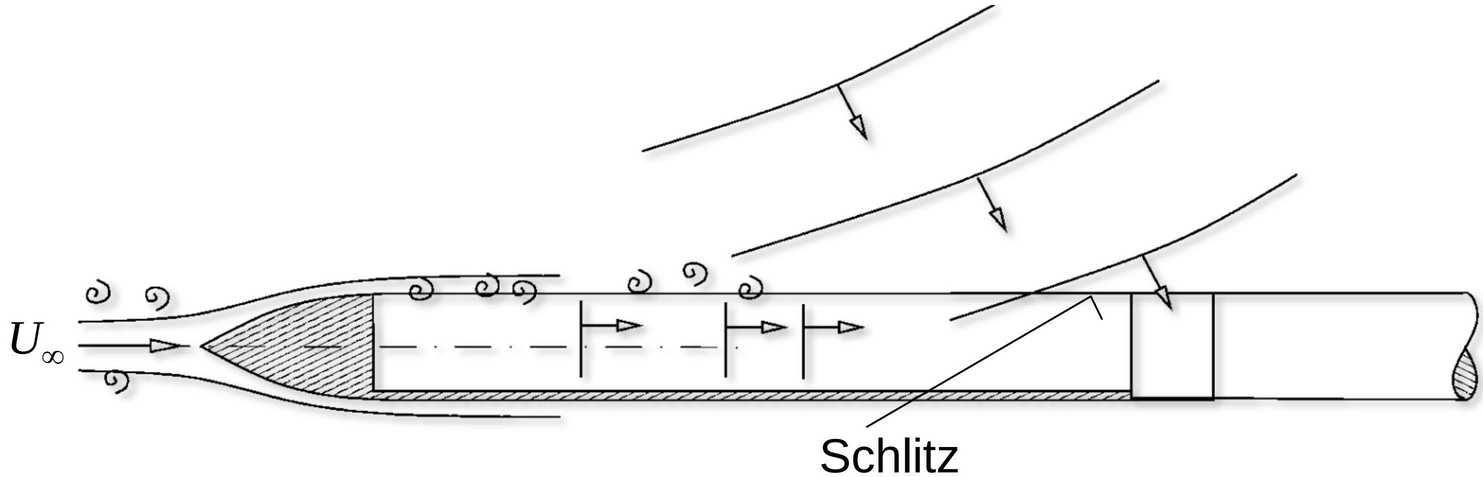
(a) Lösung 1: „Nasenkonus“



Ablösungen werden vermieden, nur Schwankungen des statischen Drucks werden gemessen, außerdem Verbesserung der Richtwirkung.
Probleme: Konus muss genau in Strömung ausgerichtet sein, anderenfalls entstehen wieder schädliche Ablösungen, auch am Konus. Zuströmturbulenz führt zu Stördruckschwankungen.

2.1.2 Mikrophone in Strömungen

(b) Lösung 2: „Schlitzrohrsonde“ (engl. „turbulence screen), auch „Neise-Sonde“



Ablösungen werden vermieden, turbulente Störungen existieren an jeder axialen Position des Schlitzes; die damit verbundenen lokalen Druckfelder werden durch den Schlitz ventiliert (Auslöschungen). Das gilt auch für Störungen aus bereits turbulenter Zuströmung(!). Externe akustische Wellen werden nur leicht durch Brechung beeinflusst und erreichen die Membran.

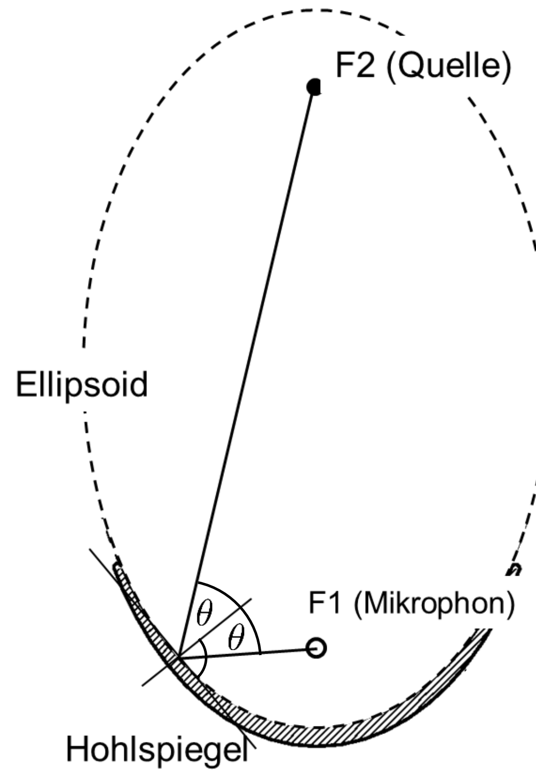
Problem: Rohr muss mit Strömung genau ausgerichtet sein.
Günstige Anwendung: Schallmessung in hochturbulenten Rohrströmungen.

2.3 Quellortungsmethoden

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Der elliptische Hohlspiegel besteht aus einer Schale, die aus einem achsensymmetrischen Abschnitt eines Ellipsoiden entsteht. Ein Ellipsoid besitzt zwei Brennpunkte (F1 und F2). In dem der Schale nahen Brennpunkt F1 wird ein Mikrophon platziert, in dem zweiten Brennpunkt F2 wird die Schallquelle vermutet. Die Summe aus den Abständen eines Punktes auf der Hohlspiegelschale zu F1 und F2 ist (konstruktionsgemäß) konstant. D.h. dass alle Schallstrahlen, die aus dem Quellenbrennpunkt F2 austreten und an der Hohlspiegelfläche reflektiert werden, die selbe Laufstrecke/Laufzeit zum Mikrophon in F1 haben. Das Signal der Quelle wird damit an F2 hoch verstärkt. Für andere Quellpositionen ist dies nicht der Fall. Durch Verfahren des Spiegels können Quellpositionen lokalisiert werden.

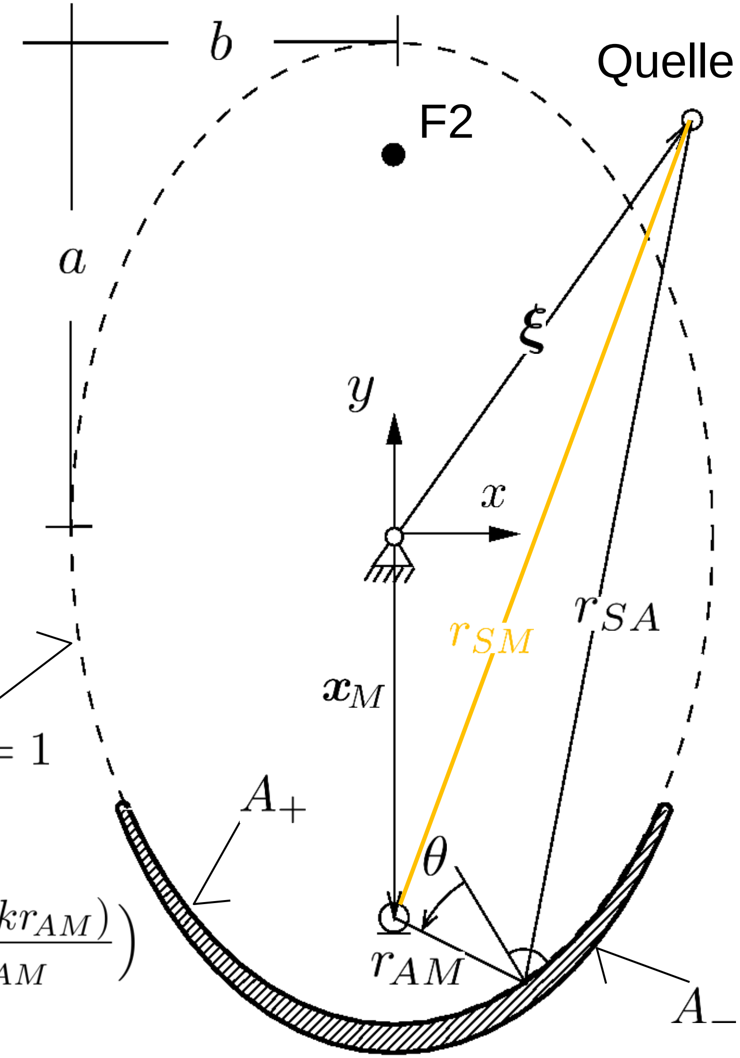
(beachte: Normale an Wandpunkt ist Winkelhalbierende des Winkels zwischen Strecken zu F1, F2)



2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Wie groß ist Schalldruck bei Mikrophon? (129):

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}_M, \omega) = \underbrace{\int_{V_S} \hat{Q}_p \hat{G}_0 \, dV(\xi)}_{\text{einfallendes Feld } \hat{p}_i} + \int_A \hat{p} \frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} - \underbrace{\cancel{\hat{G}_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}}}_{= 0 \text{ (schallhart)}} dS(\xi)$$



$$\frac{x^2 + z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Annahmen:

Druck auf Sichtseite A_+ lokal wie bei ebener Wand

$$\hat{p}(\boldsymbol{\xi} \in A_+) \approx 2\hat{p}_i$$

Druck auf Schattenseite A_- Null

$$\hat{p}(\boldsymbol{\xi} \in A_-) \approx 0$$

$$\frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(\frac{\exp(-ikr_{AM})}{4\pi r_{AM}} \right) = -\overbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}_x r_{AM}}^{\cos\theta} \frac{d}{dr_{AM}} \left(\frac{\exp(-ikr_{AM})}{4\pi r_{AM}} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_M, \omega) \approx \hat{p}_i + \frac{1}{2\pi} \int_{A_+} \hat{p}_i \frac{\exp(-ikr_{AM})}{r_{AM}} (ik + r_{AM}^{-1}) \cos\theta \, dS(\xi)$$

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

… Wie groß ist Schalldruck bei Mikrophon?

Quelle sei Monopol bei $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_S$ mit Quellstärke $\sigma(\omega)$:

$$\hat{p}_i(\boldsymbol{\xi}) = \sigma \frac{\exp(-ikr_{SA})}{4\pi r_{SA}} \;;\; r_{SA} = |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_S|$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\boldsymbol{x}_M, \omega) \approx \frac{\sigma}{8\pi^2} \int_{A_+} \frac{e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}}{r_{AM}\, r_{SA}} (ik + r_{AM}^{-1}) \cos\theta \, dS(\xi)$$

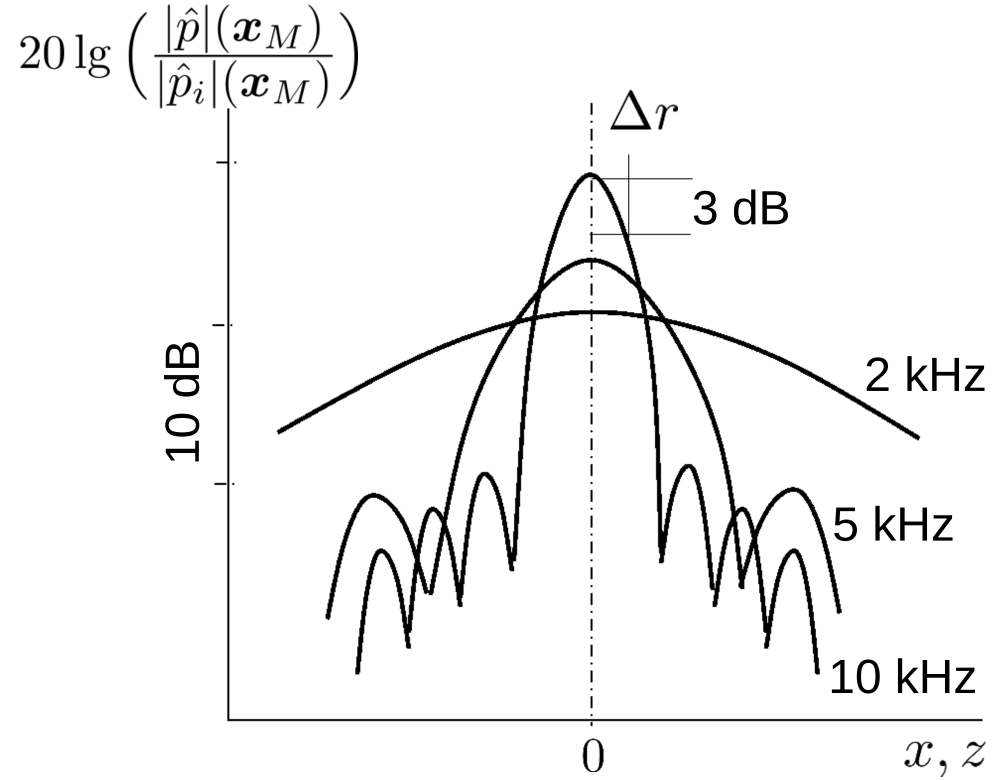
(Direkteinfall vernachlässigt)

Beachte:

- Ist Quellpunkt in Brennpunkt F2, so ist $r_{AM} + r_{SA} = \mathrm{const}$ und damit die Phase für alle Spiegelpunkte: konstruktive Verstärkung des Signals
- Ist Quellpunkt außerhalb F2, so erzeugt $e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}$ Auslöschungen
- Je höher die Wellenzahl k (Frequenz), desto stärker das Signal !

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Typisches Messsignal bei Spiegeltraverse entlang x oder z (Quelle an $x = z = 0$):



Spiegelcharakteristika:

Verstärkung:

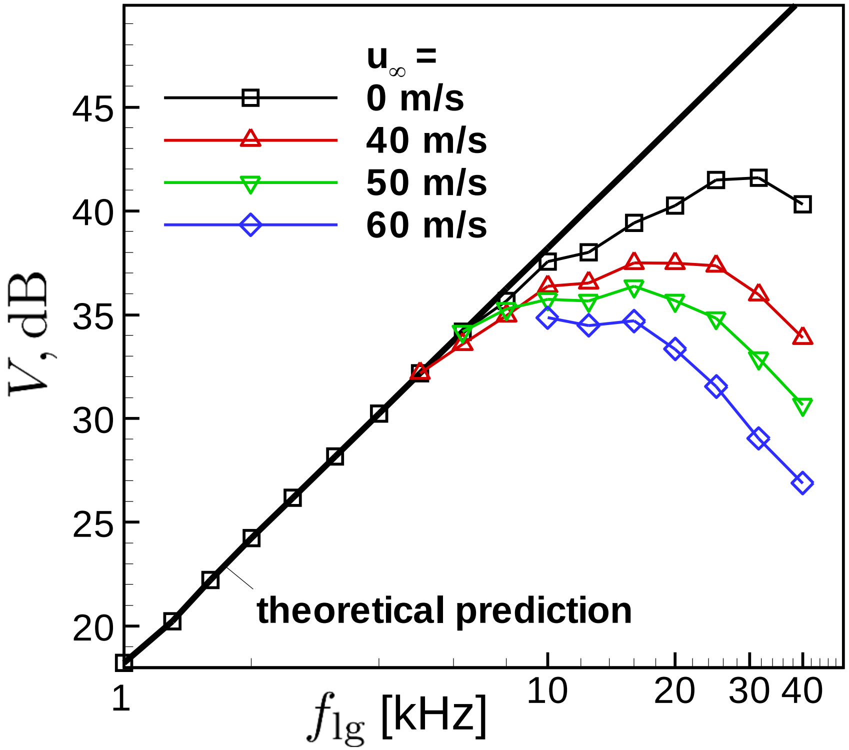
$$V(\omega) = \frac{|\hat{p}|(\boldsymbol{x}_M)}{|\hat{p}_i|(\boldsymbol{x}_M)} \simeq k\,\frac{r_{SM}}{4\pi}\left|\int_{A_+} \frac{e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}}{r_{AM}\,r_{SA}}\cos\theta\, dS(\xi)\right|$$

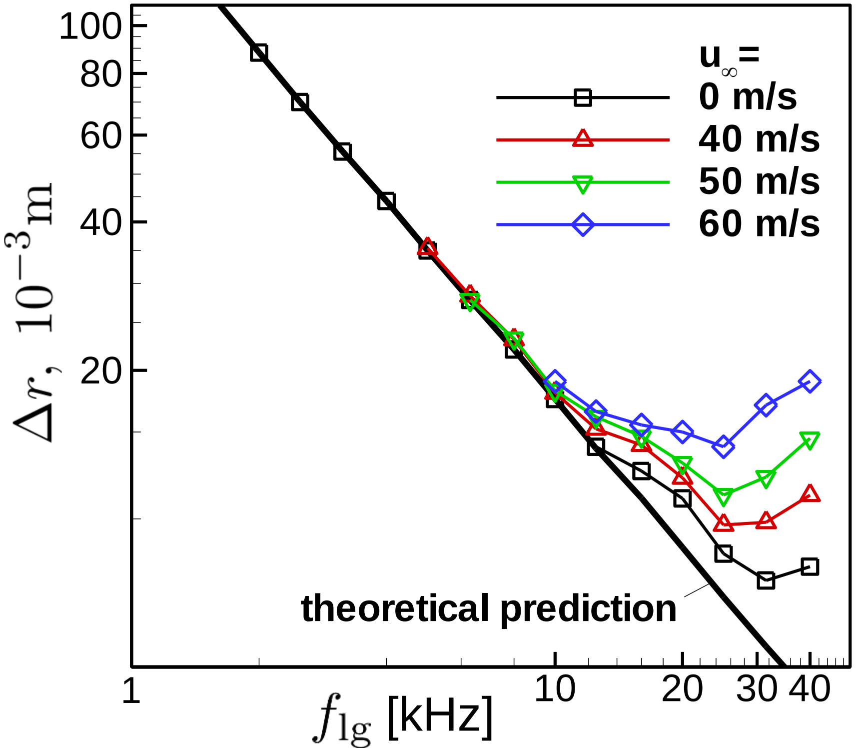
(räumliche) Auflösung: $\Delta r(\omega) = \left|x(|\hat{p}|^2_{max}) - x(\tfrac{1}{2}|\hat{p}|^2_{max})\right|$ (3dB-down range)

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Spiegelcharakteristika (Terzen) des DLR-Hohlspiegels im Akustischen Windkanal Braunschweig AWB

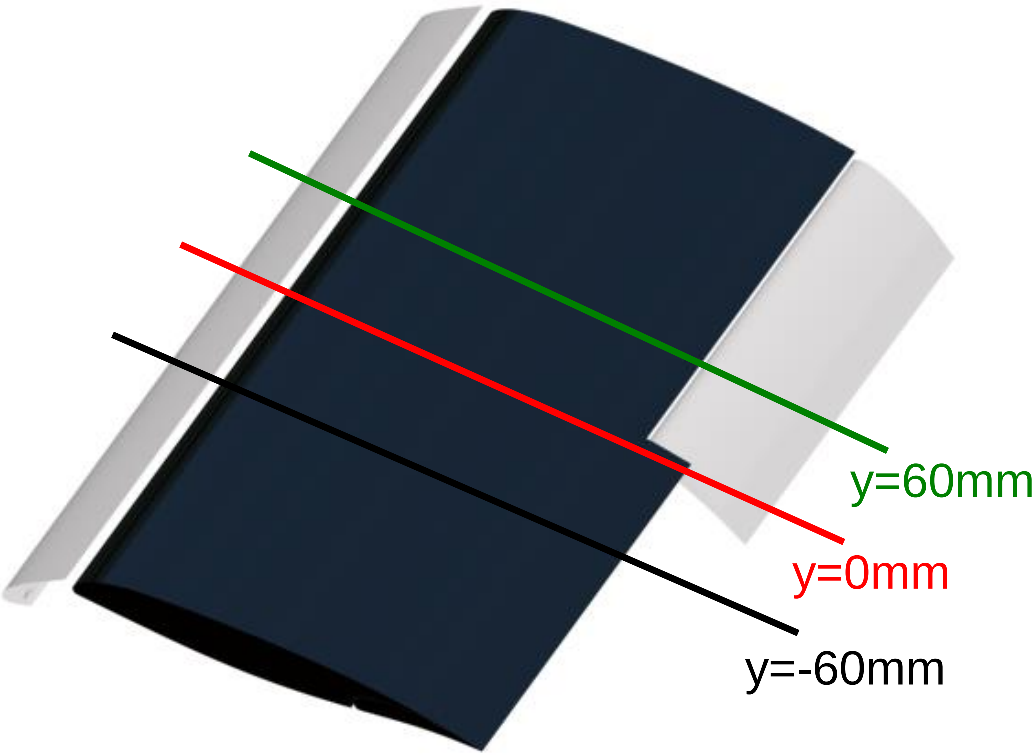
→ real ist Verstärkung zu hohen Frequenzen hin begrenzt durch a) atmosphärische Absorptionsdämpfung und (bei Messung im Windkanal) durch Turbulenzstreuung:

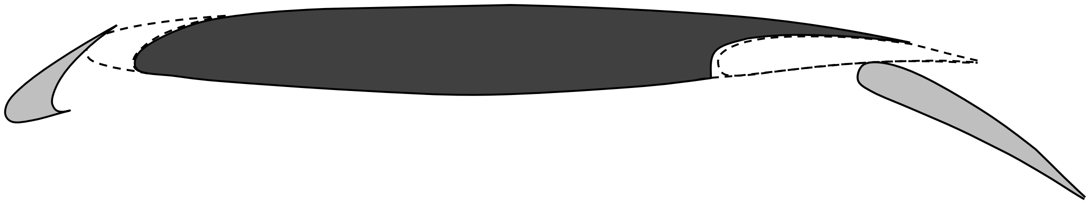




Beispiel: Quellokalisierung an Hochauftriebsflügel

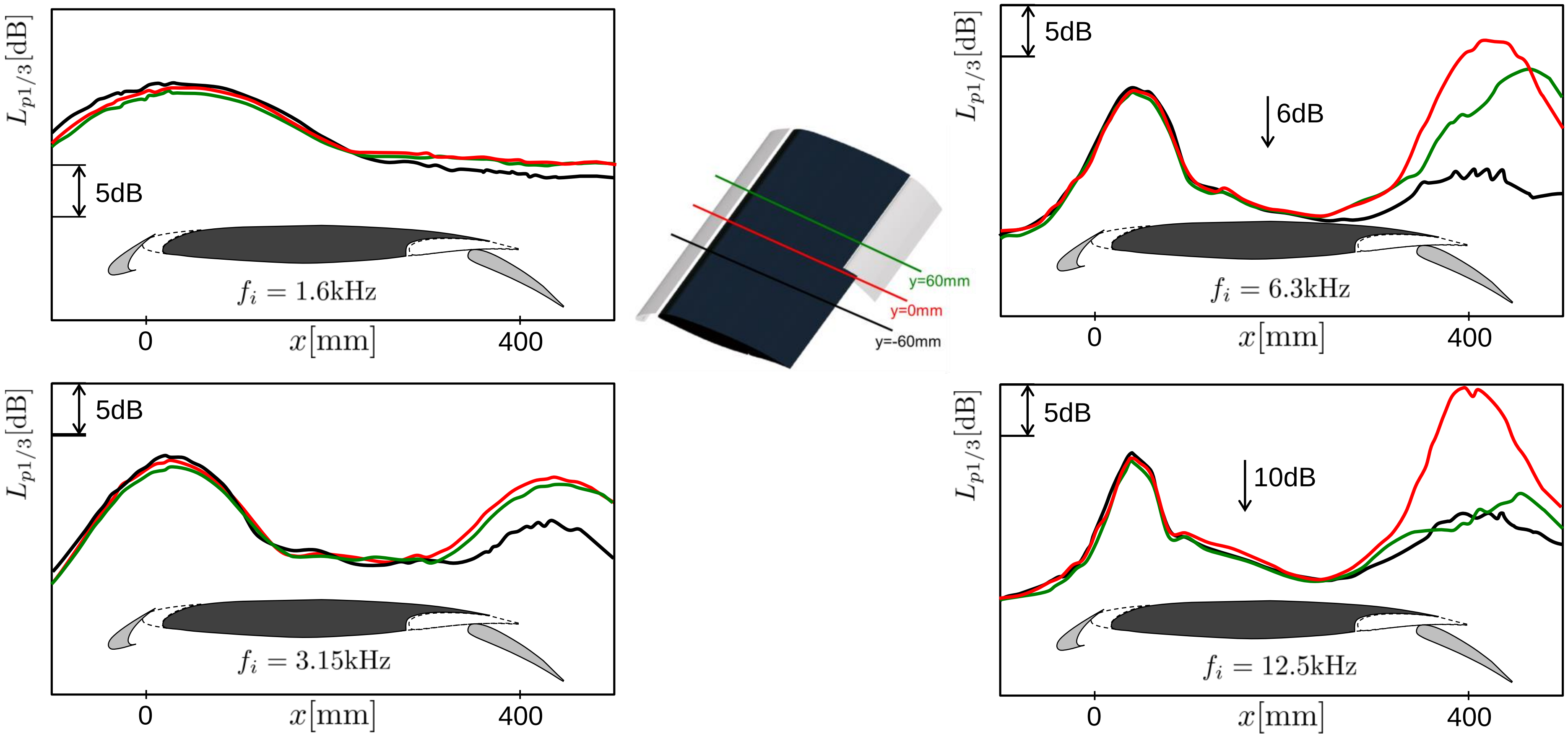
Profilschnitte im AWB in Landekonfiguration





Beispiel: Quellokalisierung an Hochauftriebsflügel

Bis hier gekommen



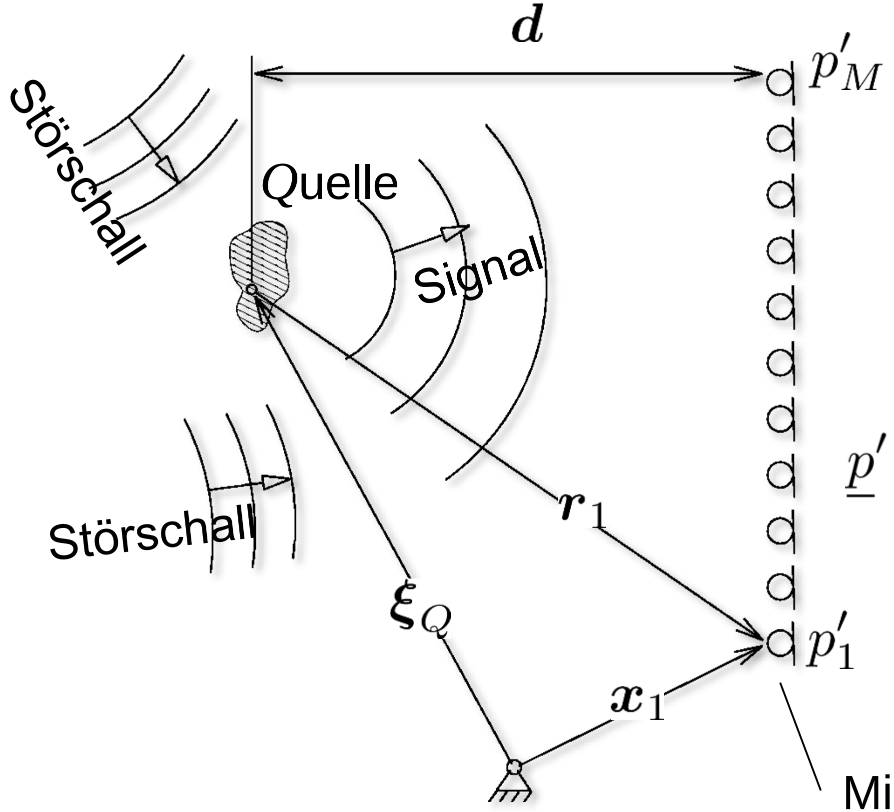
⇒ tieffrequenter Schall kommt von Vorflügel

⇒ ab 6.3kHz trennt Hohlspiegel spannweitig Seitenkanten- Klappenhinterkanten- und Flügelhinterkantengeräusch (beachte: Wellenlänge bei 6.3kHz ~50mm < 60mm)

2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Aufgabe: Lokalisierung von akustischen Quell(bereich)en

Ansatz: Anordnung von M Mikrophonen auf einer Linie oder Ebene („Array“) & „Nachbearbeitung“ der Messdaten.



Arraybreite $\quad w = |\boldsymbol{x}_M - \boldsymbol{x}_1|$

<u>Schritt (a):</u> Bildung des „Messvektors“

$$\underline{p}'(t) := \begin{bmatrix} p'(\boldsymbol{x}_1,t) \\ p'(\boldsymbol{x}_2,t) \\ \vdots \\ p'(\boldsymbol{x}_M,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \vdots \\ p'_M \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\hat{p}} := \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_M \end{bmatrix} \qquad (327)$$

2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Forme aus $\underline{\hat{p}}$ und seinem konjugiert Komplexen äußeres Produkt und mittle über gleiche Versuche:

(328) $$\underline{\underline{A}} := \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{V} \underline{\hat{p}}\,\underline{\hat{p}}^*$$ heisst „Kreuzkorrelationsmatrix (M x M)

„konjugiert Komplexes“ von $\underline{\hat{p}}$

<u>Schritt (b):</u> Simulation einer Messung für eine fiktive Monopoleinheitsquelle bei $\boldsymbol{\xi}$ mit Stärke 1:

$$\hat{p}_S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_j) = G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_j), \quad G = \frac{\exp(-ikr_j)}{4\pi r_j}, \quad r_j := |\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{\xi}|$$

Simulierter Messvektor (auch „steering vector“):

(329) $$\underline{\hat{p}}_S := \begin{bmatrix} G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_1) \\ G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}_M) \end{bmatrix} =: \underline{G}$$

2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

<u>Schritt (c):</u> Bilde Lokalisationsgröße (engl. „beamformer“):

(330) $$b := \frac{\hat{\underline{p}}_S^* \,\underline{\underline{A}}\, \hat{\underline{p}}_S}{|\hat{\underline{p}}_S|^4} = \frac{\underline{G}^* \,\underline{\underline{A}}\, \underline{G}}{|\underline{G}|^4}; \qquad |\underline{G}(\boldsymbol{\xi})|^2 := \underline{G}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \underline{G}^*(\boldsymbol{\xi})$$

Diese Gleichung heißt „beamforming“ Gleichung.
Die Bedeutung von b wird für den Fall deutlich, wo das gemessene Feld $\hat{\underline{p}}$ aus (327) bzw. $\underline{\underline{A}}$ aus einer Monopolquelle bei $\boldsymbol{\xi}_Q$ entstanden gedacht wird; dann ist:

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\underline{G}^*(\boldsymbol{\xi})\,[\sigma\, \underline{G}(\boldsymbol{\xi}_Q)\, \sigma^*\, \underline{G}^*(\boldsymbol{\xi}_Q)]\ \underline{G}(\boldsymbol{\xi})}{|\underline{G}(\boldsymbol{\xi})|^4}$$

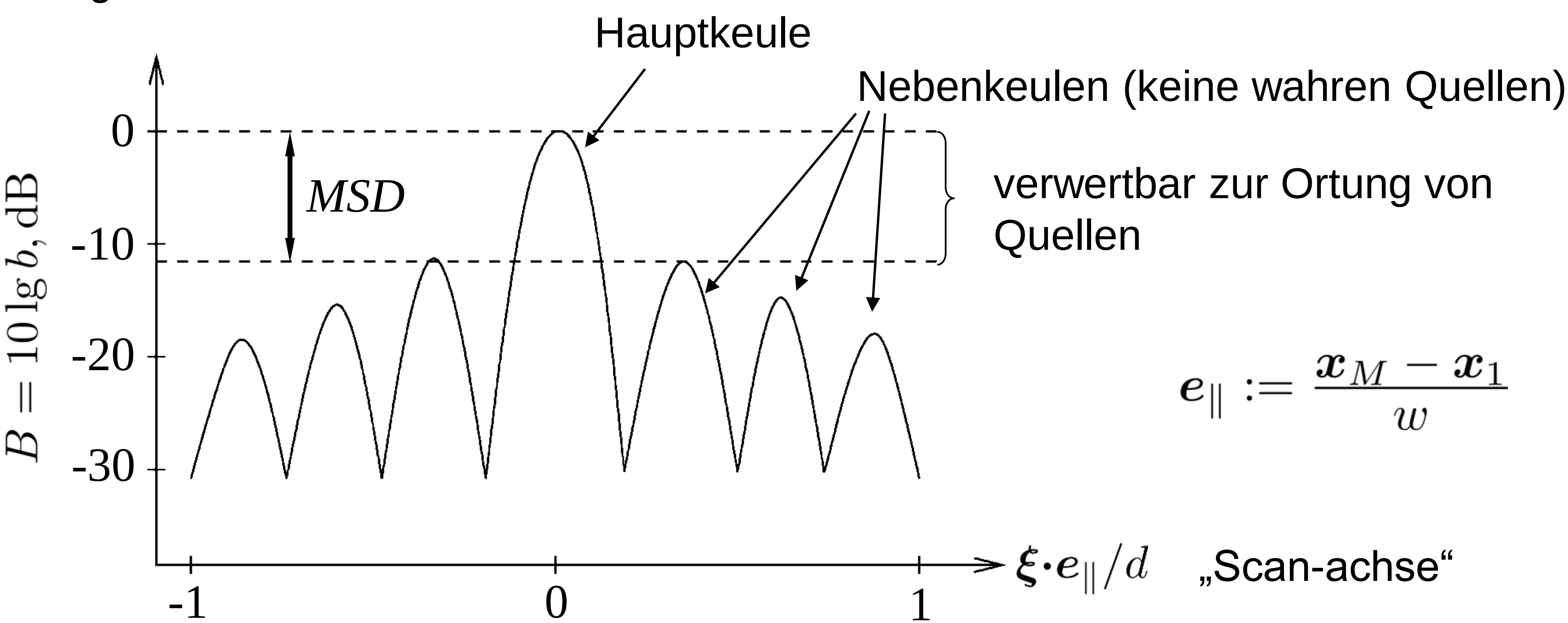
b kann als Funktion von $\boldsymbol{\xi}$ (Abscannen des Raumes) dargestellt werden. Speziell dort, wo $\boldsymbol{\xi}$ auf den Quellort $\boldsymbol{\xi}_Q$ trifft, gilt

$$b(\boldsymbol{\xi}_Q) = \frac{\underline{G}^*(\boldsymbol{\xi}_Q)\,[\sigma\, \underline{G}(\boldsymbol{\xi}_Q)\, \sigma^*\, \underline{G}^*(\boldsymbol{\xi}_Q)]\ \underline{G}(\boldsymbol{\xi}_Q)}{|\underline{G}(\boldsymbol{\xi}_Q)|^4} = |\sigma|^2$$

2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

D.h. für eine Monopolquelle ergibt die Auswertung der Größe b für den Ort Der Quelle das Quadrat der Quellstärke des Monopols. Die Funktion $b(\boldsymbol{\xi})$ heißt „Acoustic Image“ (bzw. Quellkarte oder „source map“).

Eine gleichmäßige Anordnung von M Mikrophonen auf einer Linie („Linienarray“) ergibt für eine Monopolquelle bei $\boldsymbol{\xi}_Q = \mathbf{0}$ typischerweise eine Quellkarte mit folgendem Aussehen:



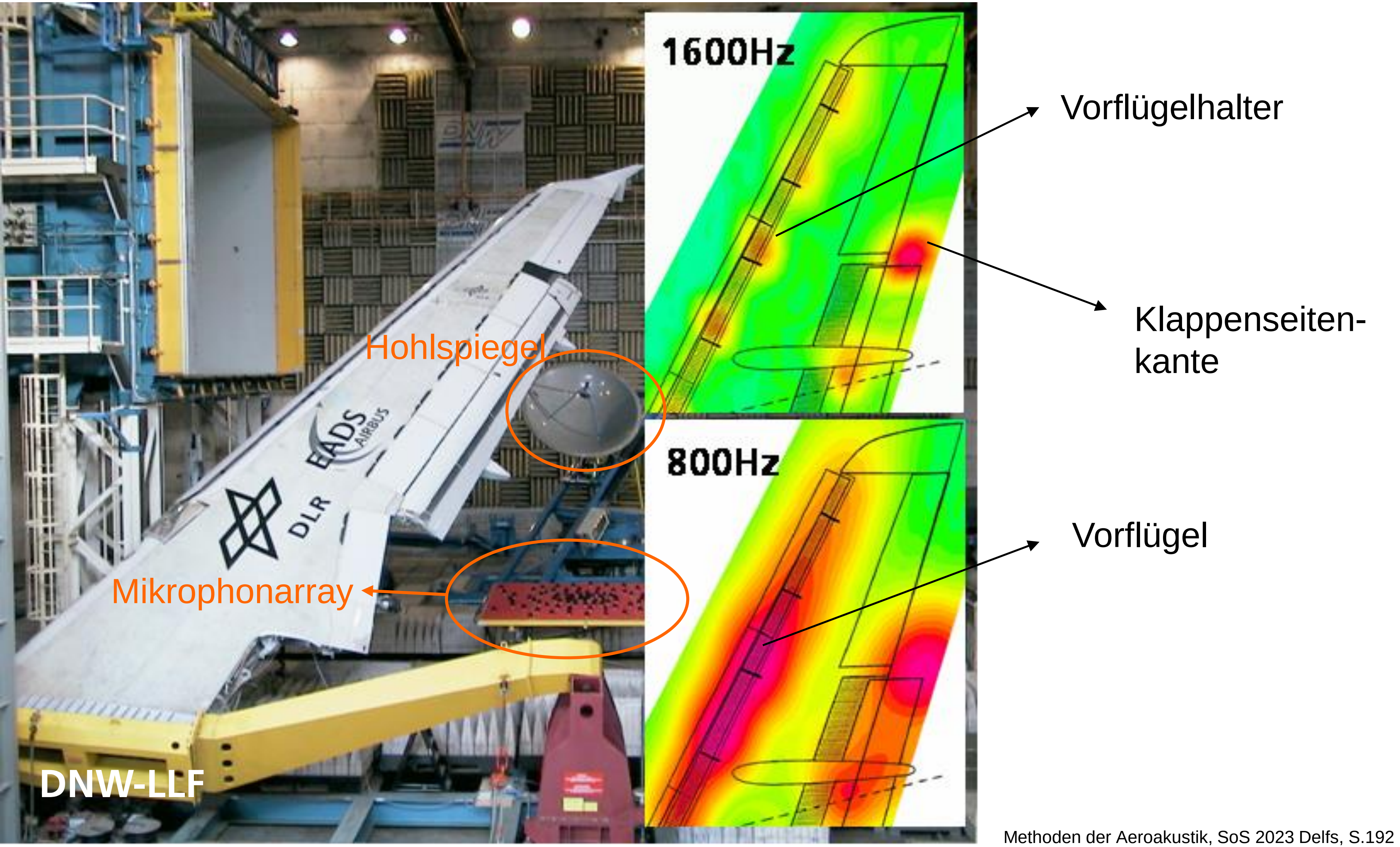
$$\boldsymbol{e}_\parallel := \frac{\boldsymbol{x}_M - \boldsymbol{x}_1}{w}$$

2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

- Die Quellkarte zeigt die Position der Quelle an (höchstes Maximum oder Hauptkeule (engl. main lobe)), aber auch unphysikalische Quellen bei den Nebenmaxima oder Nebenkeulen (engl. side lobes)!
- Die dynamische Auflösung des Arrays ist definiert als der Höhenunterschied zwischen Hauptkeule und höchster Nebenkeule und wird als MSD (Main-side-lobe distance) bezeichnet.
- Das MSD eines Linienarrays für äquidistant verteilte Mikrophone ist ca. 12 dB
- Die Breite und Anzahl der Keulen hängt von Frequenz, Abstand von Quelle zu Linienarray d und Breite des Array (Apertur $W = w/d$) ab: $W\uparrow$ oder $M\uparrow \Rightarrow$ Keulenbreite $\downarrow$ (d.h. Auflösung $\uparrow$)
- $b(\boldsymbol{\xi})$ gibt das Quadrat des Monopolmoments einer Monopolquelle im Scanpunkt korrekt wieder; ist die tatsächliche Quelle kein Monopol, darf $b(\boldsymbol{\xi})$ nicht direkt als physikalisch interpretierbare Quellgröße angesehen werden.

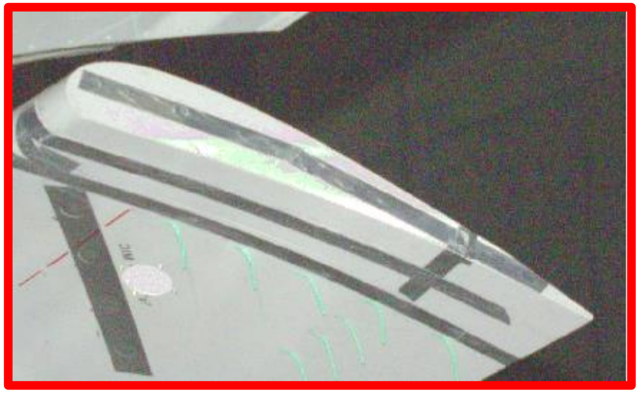
2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Schallquellortung mit Mikrophonarray am Flügel in Hochauftriebskonfiguration



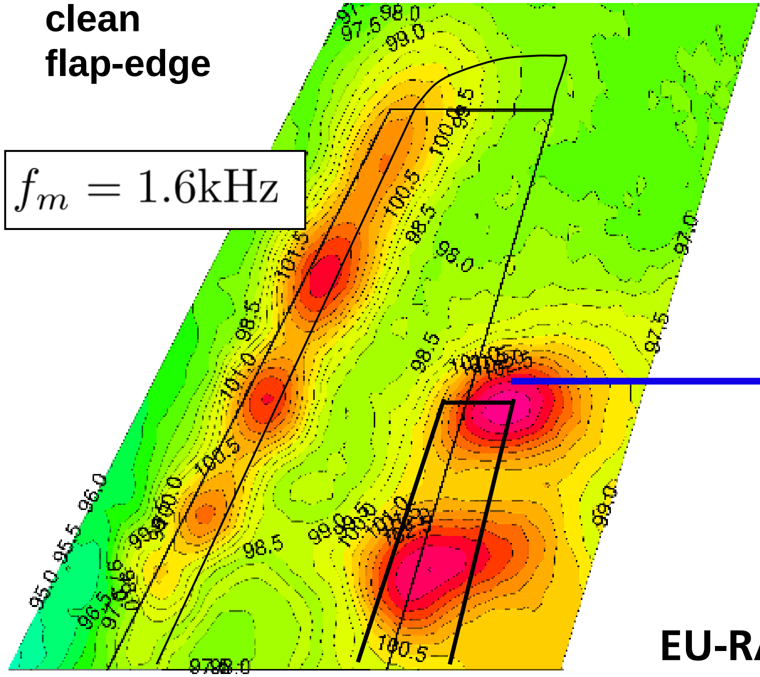
2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Lärmminderungspotential an Vorflügeln und Klappen

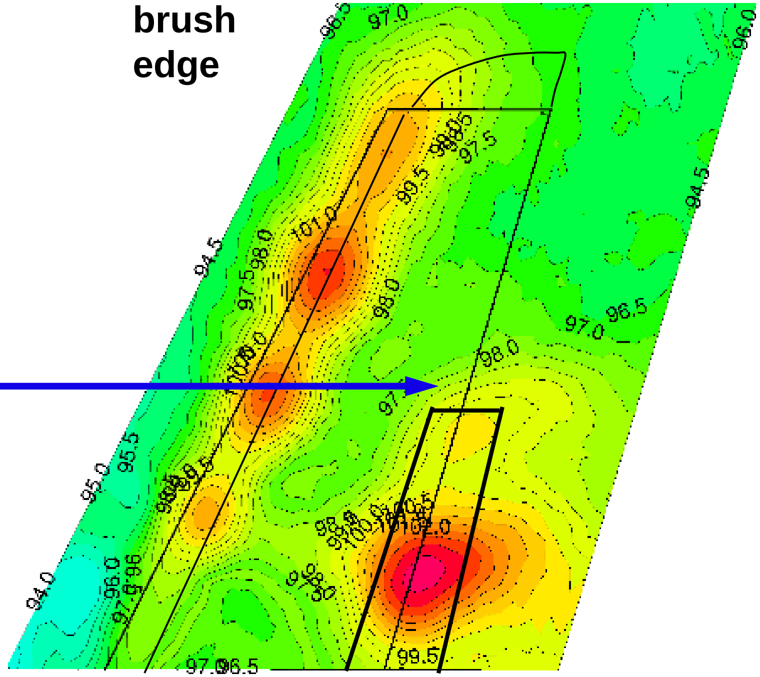


clean flap-edge

$$f_m = 1.6\mathrm{kHz}$$



brush edge



EU-RAIN

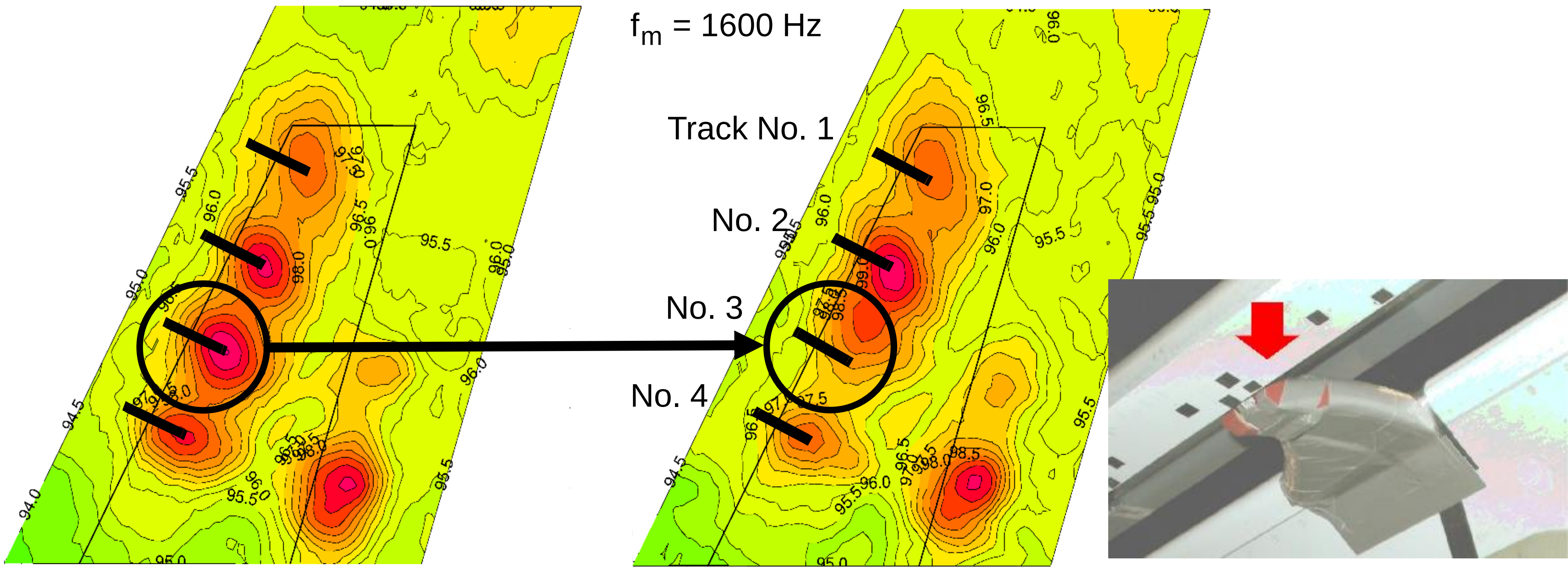
2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Lärmminderungspotential an Vorflügeln und Klappen

Quelllärmminderung durch Verkleidung slat-track 3

Standard slat track 3

mit aerodyn. verkleidetem slat track 3



⇒ **Welche Bedeutung hat dieses bei Überflug im Vergleich zu Vorflügellärm?**

W. Dobrzynski, 2002

2.4 Messanordnungen in der Aeroakustik

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Wie in der Aerodynamik besteht großes Interesse daran, Bauteile im Modell in einer gegenüber dem Original verkleinerten Größe zu untersuchen. Um die Ähnlichkeit im Verhalten von Original und Modell sicherzustellen, sind Ähnlichkeitskennzahlen zu beachten. Diese entstehen z.B. wenn die Grundgleichungen (linearisierte Eulergleichungen) mit den das Problem beschreibenden Größen entdimensioniert werden, diese Referenzgrößen seien für die Zeit $T = 1/\omega$, den Ort L, die Dichte ρ_∞ , die Geschwindigkeit a_∞ und den Druck $\rho_\infty a_\infty^2$ (Stern bedeutet entdimensioniert):

$$t = T\ t^*, \quad \boldsymbol{x} = L\ \boldsymbol{x}^*, \quad p' = \rho_\infty a_\infty^2\ p'^*, \quad \rho' = \rho_\infty\ \rho'^*, \quad \boldsymbol{v}' = a_\infty\ \boldsymbol{v}'^*$$

eingesetzt in die linear. Eulergleichungen im Frequenzbereich (Fourier-Trafo):

$$i\ \frac{\omega L}{a_\infty}\ \hat{\rho}^* + \boldsymbol{\nabla}^* \cdot (\hat{\rho}^* \boldsymbol{v}^{0*} + \hat{\boldsymbol{v}}^* \rho^{0*}) = 0$$

$$i\ \frac{\omega L}{a_\infty}\ \rho^{0*} \hat{\boldsymbol{v}}^* + \rho^{0*} (\boldsymbol{v}^{0*} \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \hat{\boldsymbol{v}}^* + \hat{\boldsymbol{v}}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \boldsymbol{v}^{0*}) + \hat{\rho}^* \boldsymbol{v}^{0*} \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \boldsymbol{v}^{0*} + \boldsymbol{\nabla}^* \hat{p}^* = \boldsymbol{0}$$

$$i\ \frac{\omega L}{a_\infty}\ \hat{p}^* + \boldsymbol{v}^{0*} \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \hat{p}^* + \hat{\boldsymbol{v}}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^* p^{0*} + \gamma (\hat{p}^* \boldsymbol{\nabla}^* \cdot \boldsymbol{v}^{0*} + p^{0*} \boldsymbol{\nabla}^* \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^*) = 0$$

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Die einzige Kombination der Problem beschreibenden Größen, die in diesen Gleichungen auftaucht, und damit die wesentliche Ähnlichkeitskennzahl ist

$$\frac{\omega L}{a_\infty} = 2\pi \frac{fL}{a_\infty} \quad \text{mit dem Anteil} \quad He := \frac{fL}{a_\infty} = \frac{L}{\lambda} \qquad (330),$$

die auch „Helmholtzzahl“ genannt wird (vgl. Kapitel 5.3 Grundlagen VL). Sie beschreibt das Verhältnis der problemcharakteristischen Länge L und der Wellenlänge des Schalls λ. Für ein strömungsakustisches Problem stecken zusätzlich implizit zwei weitere Ähnlichkeitskennzahlen in dem gemittelten Strömungsfeld $\rho^{0*}, \boldsymbol{v}^{0*}, p^{0*}$, das durch die Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty}$ und die Machzahl $M = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ eindeutig bestimmt ist.

Aeroakustische Ähnlichkeit besteht demnach, wenn *M*, *Re* und *He* bei Original und Modell übereinstimmen. Insbesondere:

$$He^{Modell} = He^{Original} \Rightarrow f^{Modell} = \frac{L^{Original}}{L^{Modell}} f^{Original} \qquad (331)$$

Beim um z.B. Faktor 10 verkleinerten Modell muss die 10-fach höhere Frequenz gemessen werden (Reynolds- und Machzahlähnlichkeit vorausgesetzt) !

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Die Helmholz- und Machzahl lassen sich alternativ zu einer der anderen Kennzahl folgendermaßen kombinieren:

$$Sr := \frac{fL}{U_\infty} = \frac{He}{M} \qquad (332),$$

die „Strouhalzahl" genannt wird.

Ähnlichkeit ist also auch erreicht, wenn Sr, He, Re von Original und Modell gleich sind.

Die Helmholtzzahl charakterisiert dabei die rein akustischen Bedingungen

Die Strouhalzahl charakterisiert die aeroakustische Quelle

Die Reynoldszahl charakterisiert die Kraftverhältnisse in der Strömung

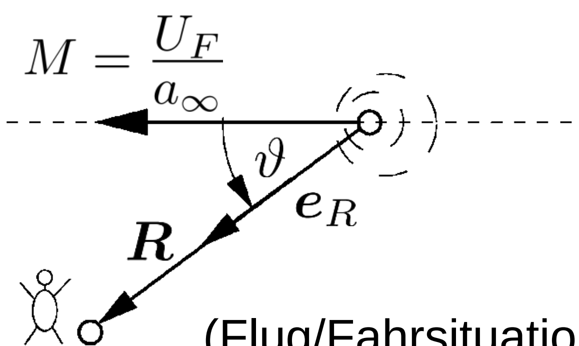
Beachte: $He = Sr \cdot M$

2.4.2 Akustische Überflugmessungen/ Windkanalmessungen

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle im ruhendem Medium

Aufgabe : Übertragung von Messdaten aus Windkanal auf Flugzustand.
gegeben: Anströmgeschwindigkeit WK U_∞ Flug/Fahrgeschwindigkeit: $U_F = U_\infty$

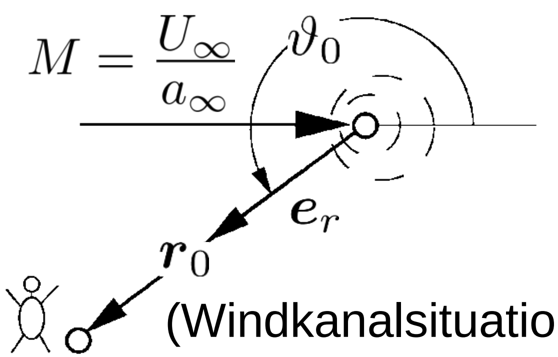
Elementarlösung ruhende Pktmassenquelle mit Quellstärke θ_p (Fernfeldlsg.):



(Flug/Fahrsituation)

$$p'(\boldsymbol{x},t) = \frac{D_F}{4\pi R} \left.\frac{\partial \theta_p}{\partial \tau}\right|_{t-R/a_\infty}; \quad D_F := \frac{1}{(1 - M\cos\vartheta)^2}$$

$$\boxed{D_F \neq D_C \ ?}$$



(Windkanalsituation)

$$p'(\boldsymbol{x},t) = \frac{D_C}{4\pi r_0} \left.\frac{\partial \theta_p}{\partial \tau}\right|_{t-r_0^+/a_\infty};$$

$$D_C = \frac{1}{(1-M^2)\sqrt{1-M^2\sin^2\vartheta_0}}\left[1 - \frac{M\cos\vartheta_0}{\sqrt{1-M^2\sin^2\vartheta_0}}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-M^2\sin^2\vartheta_0)\left(\sqrt{1-M^2\sin^2\vartheta_0} + M\cos\vartheta_0\right)}$$

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

für $\vartheta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_C = (1+M)^{-1}$

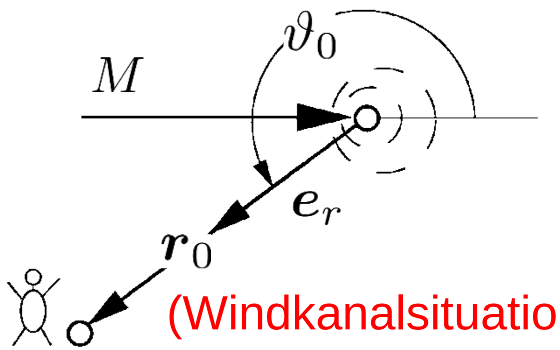
d.h. $\vartheta = \pi \quad \Rightarrow \quad D_F = (1+M)^{-2}$

konvektive Minderung stromab

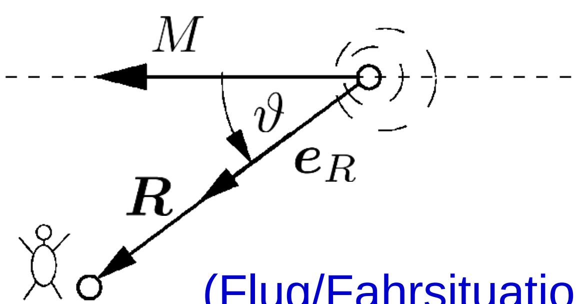
für $\vartheta_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad D_C = (1-M)^{-1}$

d.h. $\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad D_F = (1-M)^{-2}$

konvektive Verstärkung stromauf



(Windkanalsituation)



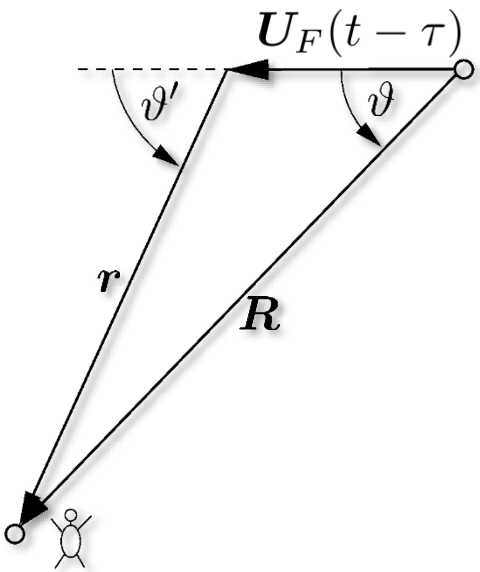
(Flug/Fahrsituation)

Windkanalmessdaten nicht direkt übertragbar auf Flugsituation, obwohl gleiche Quelle?

Doch!

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

beachte: in (241) werden ϑ und R zum <u>Sende</u>zeitpunkt ausgewertet;
Vergleichbarkeit aber nur, wenn ϑ und R zum <u>Empfangs</u>zeitpunkt ausgewertet werden!



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{U}_F(t-\tau) \Rightarrow r^2 = R^2 - 2\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}_F(t-\tau) + U_F^2(t-\tau)^2$$

$$R = a_\infty(t-\tau) \Rightarrow R = \frac{r}{\sqrt{1+M^2-2M\cos\vartheta}} \tag{333}$$

$$R^2 = [\boldsymbol{r} + \boldsymbol{U}_F(t-\tau)]^2 = r^2 + 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{U}_F(t-\tau) + U_F^2(t-\tau)^2$$

$$R = a_\infty(t-\tau) \Rightarrow r^2 + 2\underbrace{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{M}}_{M\cos\vartheta'} rR + M^2R^2 = R^2$$

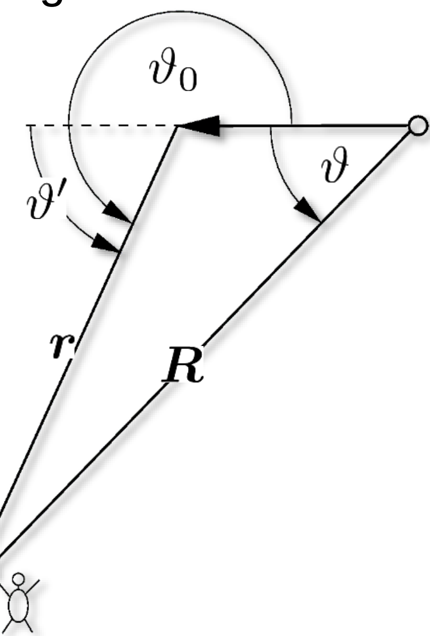
R aus (333):

$$\cos\vartheta = M\sin^2\vartheta' + \cos\vartheta'\sqrt{1-M^2\sin^2\vartheta'} \tag{334}$$

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

Werden (333) und (334) in (241) eingesetzt, so folgt nach Umformungen:

$$p' = \frac{1}{4\pi r} \underbrace{\frac{1}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta')\left(\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta'} - M \cos \vartheta'\right)}}_{=:\, D'_F} \frac{\partial \theta_p}{\partial \tau}$$



Wird jetzt berücksichtigt, dass $\vartheta' = \vartheta_0 - \pi$:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta' &= \sin(\vartheta_0 - \pi) = -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta' &= \cos(\vartheta_0 - \pi) = -\cos \vartheta_0 \end{aligned}$$

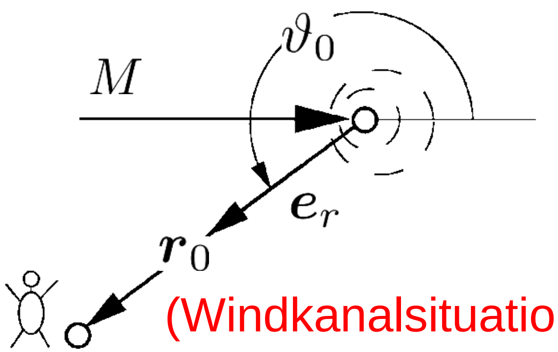
$$D'_F = \frac{1}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0)\left(\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0} + M \cos \vartheta_0\right)} \overset{\checkmark}{=} D_C(\vartheta_0)$$

$\Rightarrow$ bei Auswertung zu Empfängerzeitpunkt gehen beide Lösungen ineinander über!

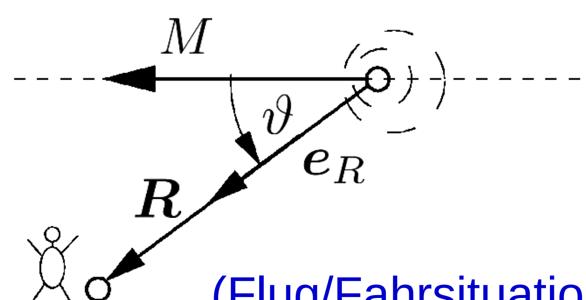
Gilt ebenfalls für Punktkraftquelle und sogar beliebige Quellen!

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

Bei gleicher Strömungsmachzahl und gleicher Quellverteilung können Windkanaldaten direkt (ohne Kenntnis der Quellart) auf Überflugsituation übertragen werden, sofern der Abstrahlungswinkel nach (334) und Abstände nach (333) umgerechnet werden (Werte zum Empfangszeitpunkt).
Beachte:
Zur Berechnung der Frequenzkorrektur (Dopplereffekt) ist der Ort der Sendezeit zu nehmen! $\omega_{\mathrm{Windkanal}} = \omega_{\mathrm{Flug}}(1 - M\cos\vartheta)$ (vgl. WS)



(Windkanalsituation)



(Flug/Fahrsituation)

$$R = r\Big/\sqrt{1+M^2-2M\cos\vartheta} \qquad (333)$$

$$\cos\vartheta = M\sin^2\vartheta_0 - \cos\vartheta_0\sqrt{1-M^2\sin^2\vartheta_0} \qquad (334)$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl (nach Amiet)

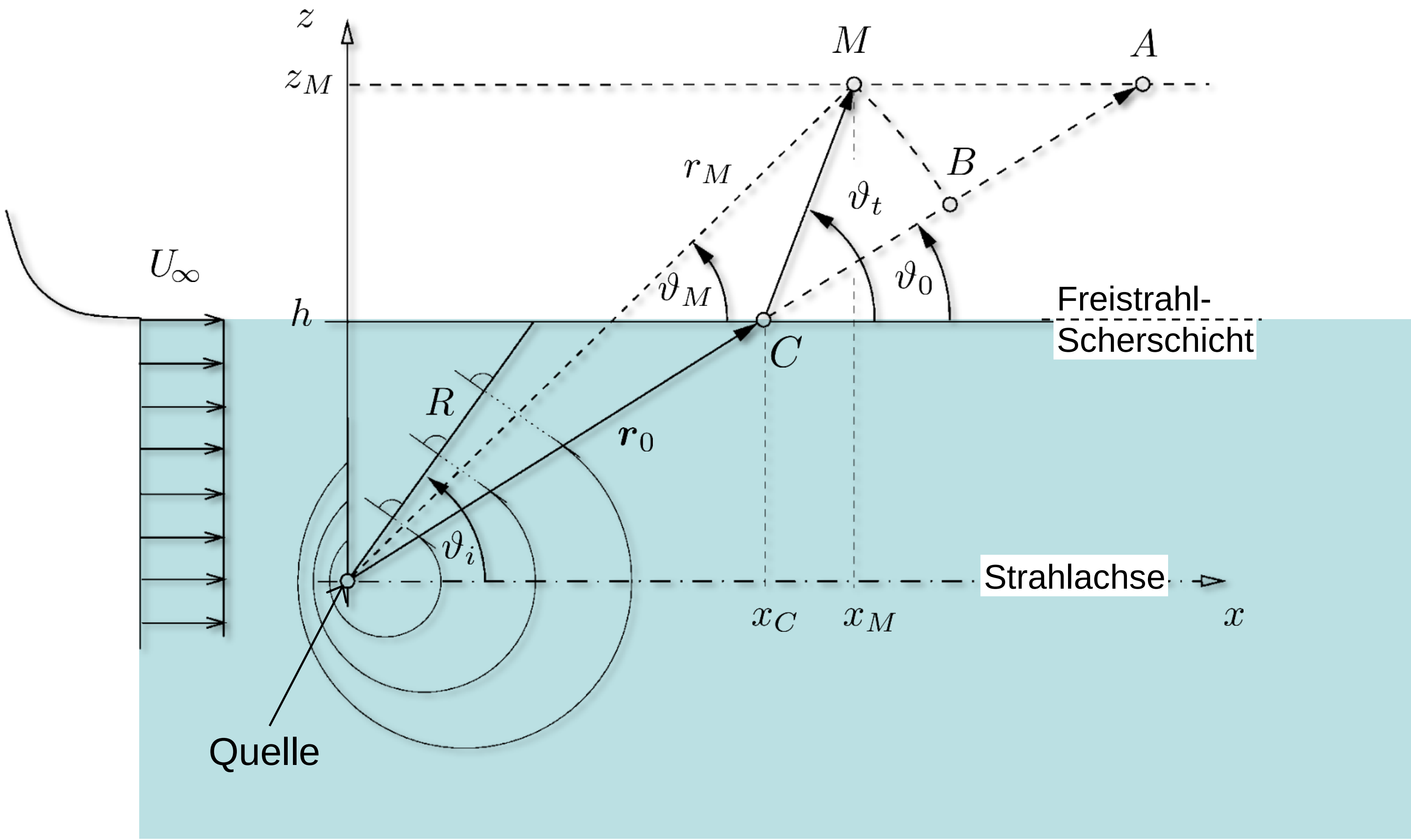
Aufgabe : Übertragung von Messdaten aus Windkanal auf Flugzustand.
gegeben: Anströmgeschwindigkeit WK: U_∞ Fluggeschwindigkeit: $U_F = U_\infty$

Im Windkanalfreistrahl abgestrahlter Schall wird an Freistrahlscherschicht verändert, bevor er auf Mikrophon in Messkammer trifft (vgl. folgendes Bild)

Gegeben: Punktschallquelle in Freistrahl, Mikrophon an Position M im Abstand r_M unter Winkel ϑ_M jenseits Strahlrand, dort gemessener Schalldruck p'_M

Frage: Welcher Stelle A mit selbem Abstand zur Strahlachse entspricht M , wenn der Strahl unendlich breit wäre und welchen Wert hätte dort der Schalldruck p'_A (entsprechend idealer Schallmessung in konstanter Strömung über gesamtes Gebiet ohne Strahlscherschicht)?

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Iterative Bestimmung des wahren Abstrahlwinkels ϑ_0 und des Ausfallswinkels ϑ_t aus folgenden beiden Gleichungen

$$\cos\vartheta_i = \frac{\cos\vartheta_t}{1 - M\cos\vartheta_t}$$

Refraktionsgleichung (212)

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\vartheta_0 &= \frac{a\sin\vartheta_i}{a\cos\vartheta_i + U_\infty} = \frac{\sqrt{(1-M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}}{(1-M^2)\cos\vartheta_t + M} \\ z_M\cot\vartheta_M &= h\cot\vartheta_0 + (z_M - h)\cot\vartheta_t \end{aligned}}$$

← Strahlengeometrie

$$\zeta := \sqrt{(1-M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}$$

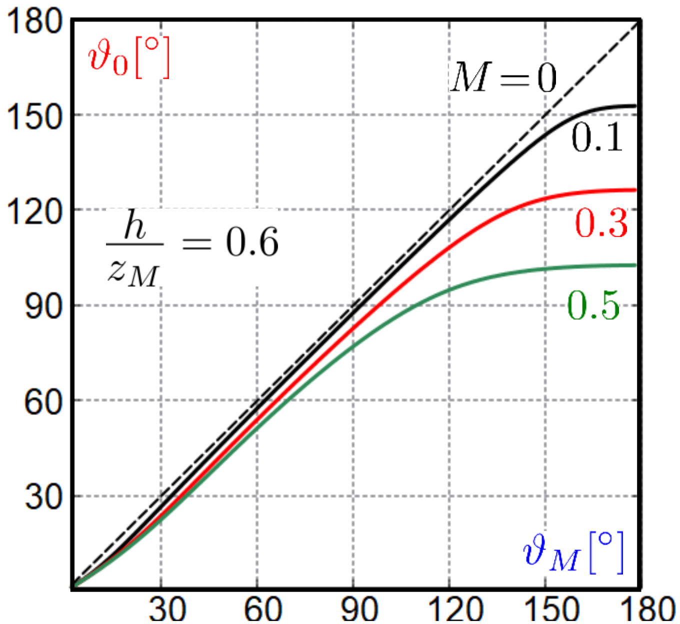
Danach Bestimmung der Schalldruckumrechnung von Punkt M zu Punkt A :

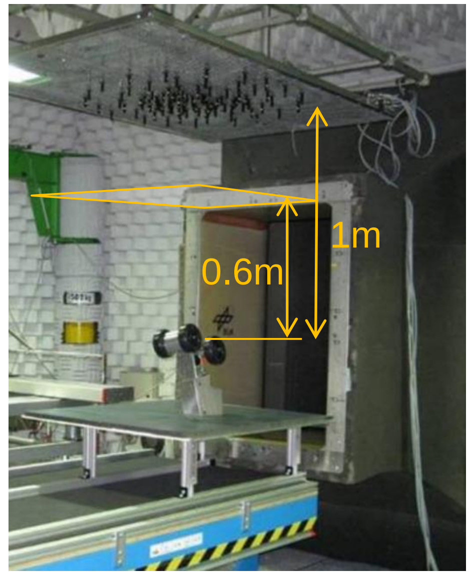
$$\boxed{\frac{\overline{p_A'^2}}{\overline{p_M'^2}} = \underbrace{\frac{h^2}{z_M^2}}_{\text{Lauf-strecken-unterschied Punkt } C \text{ zu } A} \underbrace{\frac{[\sin\vartheta_t + (z_M/h - 1)\zeta]}{\sin\vartheta_t}}_{\text{geometr. Dämpfung (Strahlröhrenaufsprei-zung in } x-z \text{ Ebene)}} \underbrace{\frac{[\sin^3\vartheta_t + (z_M/h - 1)\zeta^3]}{\sin^3\vartheta_t}}_{\text{geometr. Dämpfung (Strahlröhrenaufsprei-zung in } y)} \underbrace{\frac{[\zeta + \sin\vartheta_t(1 - M\cos\vartheta_t)^2]^2}{4\zeta^2}}_{\text{Intensitätssprung über Scherschicht an Pkt. } C}} \qquad (335)$$

$$\frac{\overline{p_A'^2}}{\overline{p_{C-}'^2}} \qquad \times \qquad \frac{\overline{p_{C+}'^2}}{\overline{p_M'^2}} \qquad \times \qquad \frac{\overline{p_{C-}'^2}}{\overline{p_{C+}'^2}}$$

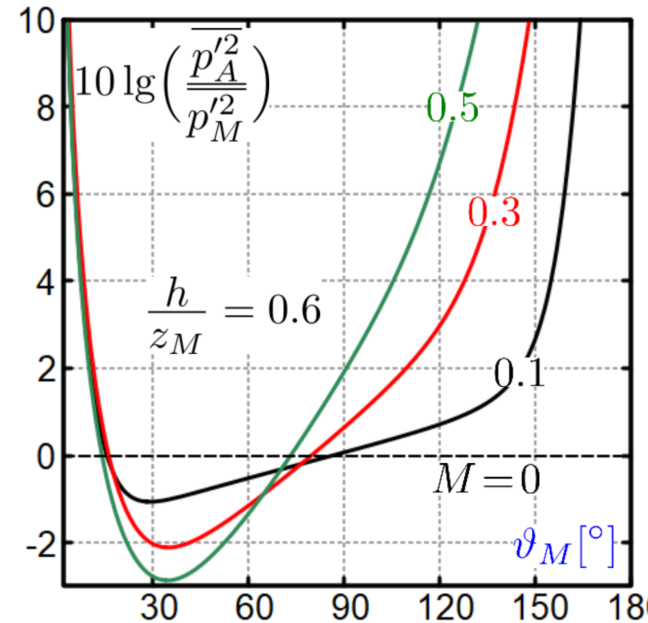
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

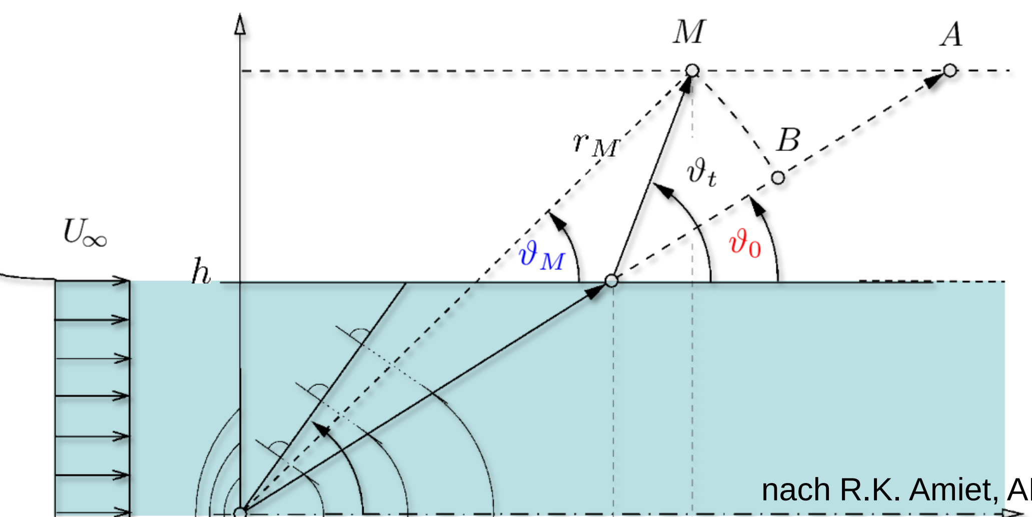
Winkelkorrektur





Amplitudenkorrektur bei A





nach R.K. Amiet, AIAA 75-532

Verstärkung weil:

$\overline{p_M'^2} \rightarrow 0$ nahe Schattengrenze

Laufstrecke zu A kürzer als M und Reduzierung Strahlaufweitung nahe Totalreflex.

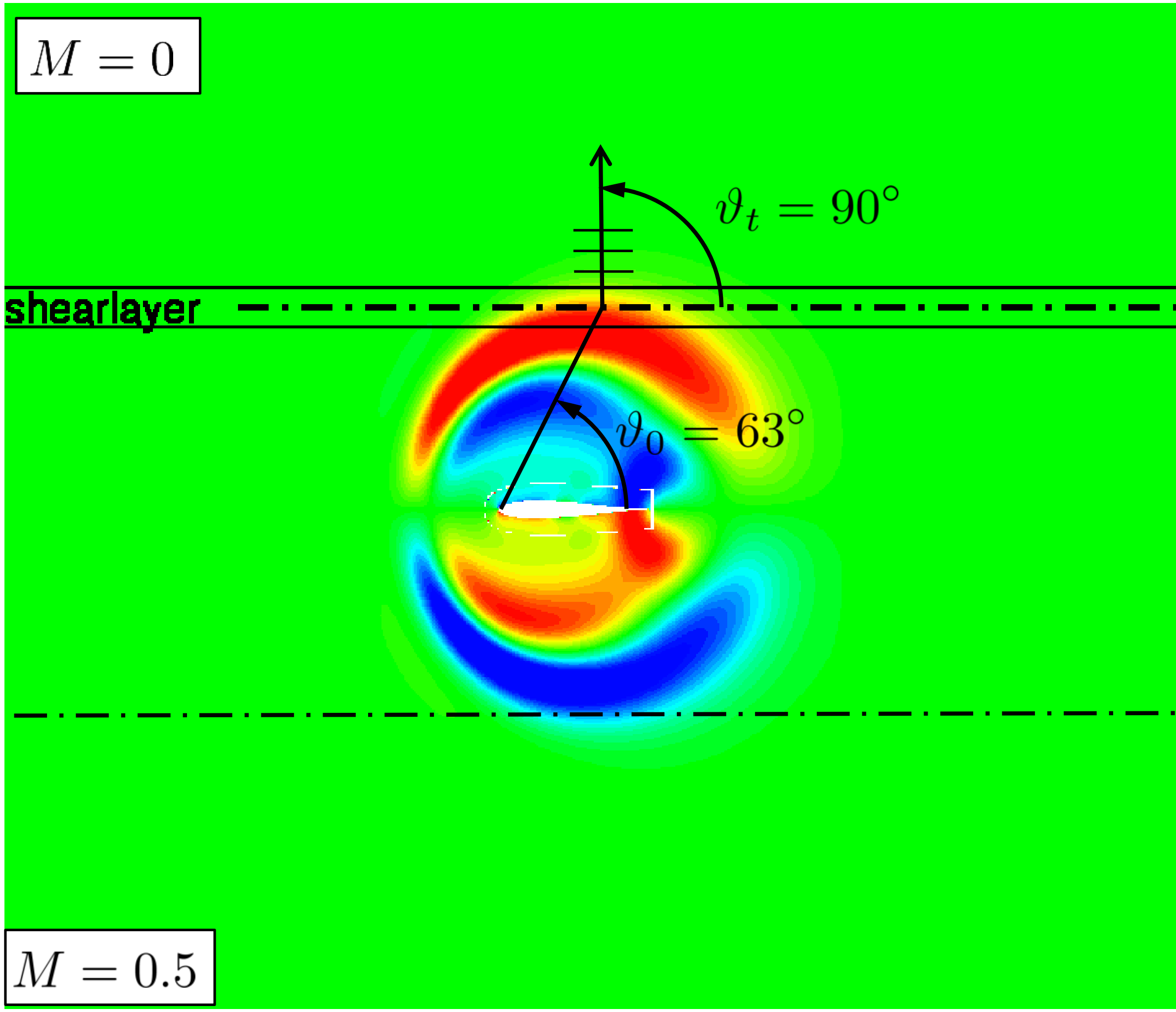
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

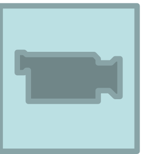
$$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}}{(1 - M^2)\cos\vartheta_t + M}$$

<u>Beispiel:</u> Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profil-vorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

Im Strömungsfeld werden nach oben und unten anti-phasisch gleiche Signale ab-gestrahlt.

Vergleich CAA Simulation mit obiger Winkelbeziehung für Ausfallswinkel 90°





2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

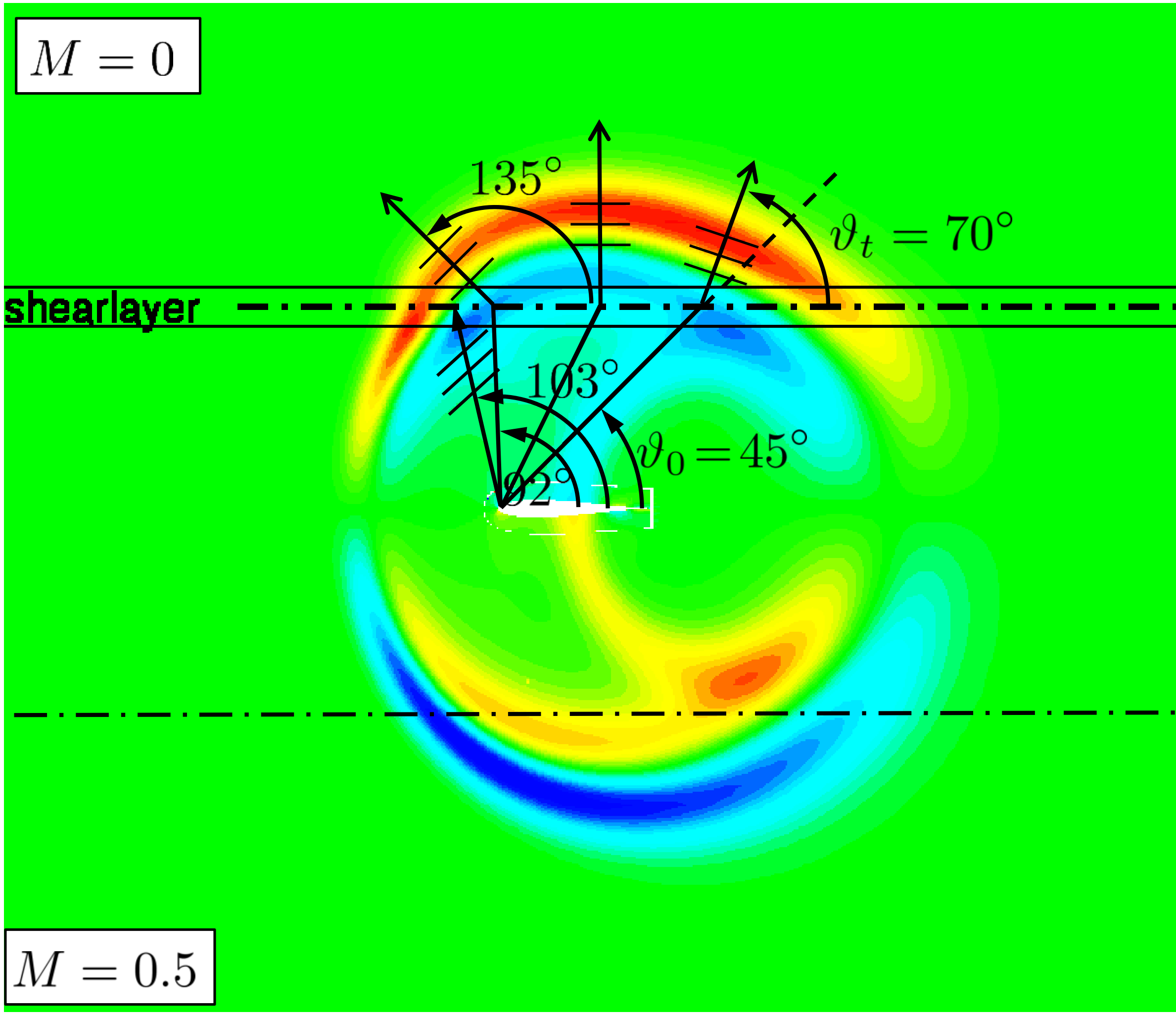
$$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}}{(1 - M^2)\cos\vartheta_t + M}$$

Beispiel: Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profilvorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

Beim Scherschichtdurchtritt wird Druckfeld unsymmetrisch.

Vergleich CAA Simulation mit obiger Winkelbeziehung für Ausfallswinkel $70^\circ, 135^\circ$

Grenzwinkel für Totalreflexion $\vartheta_0(\vartheta_t = 180^\circ) = 103^\circ$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

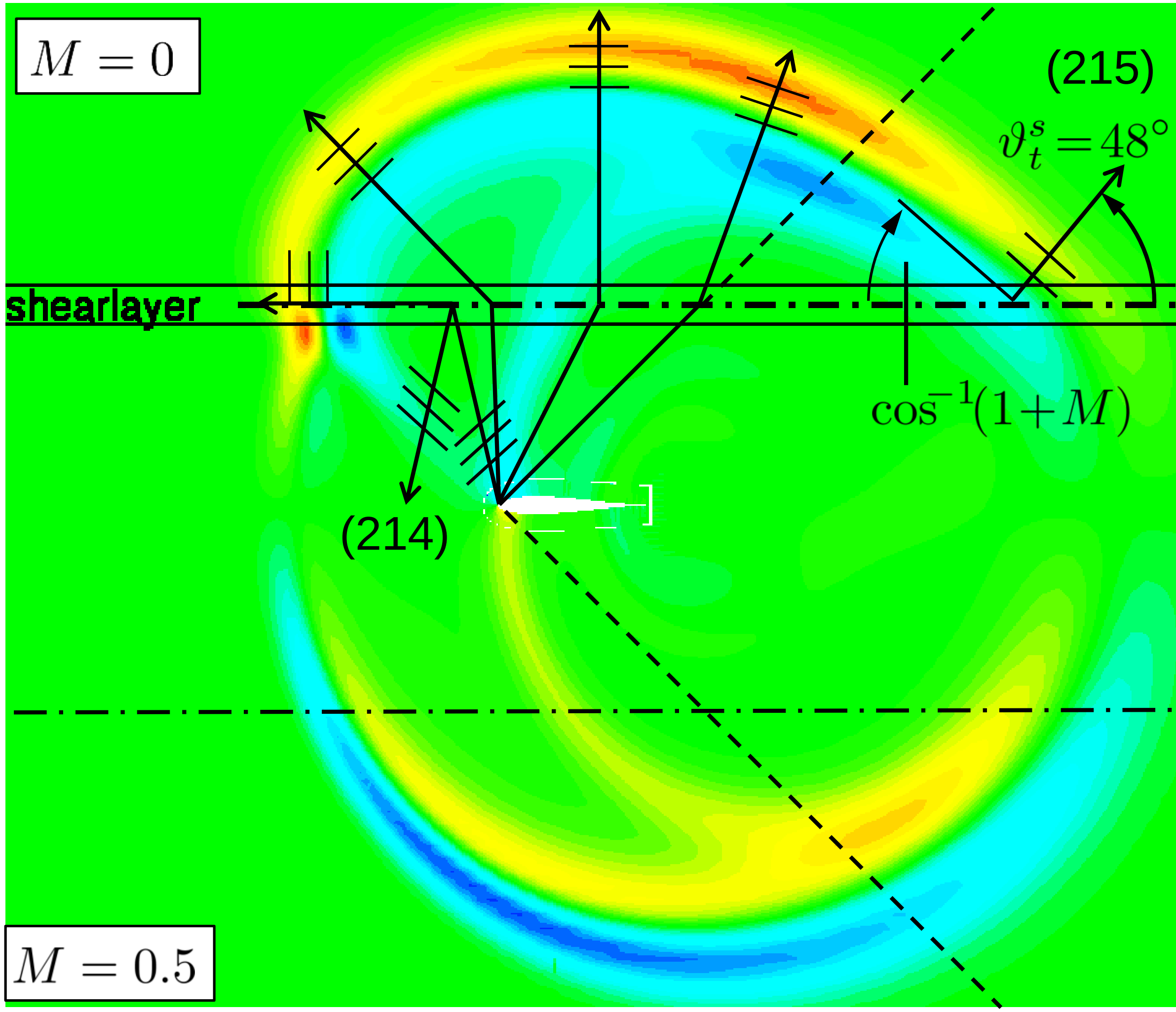
$$\vartheta_0 = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(1-M\cos\vartheta_t)^2-\cos^2\vartheta_t}}{(1-M^2)\cos\vartheta_t + M}$$

Beispiel: Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profil-vorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

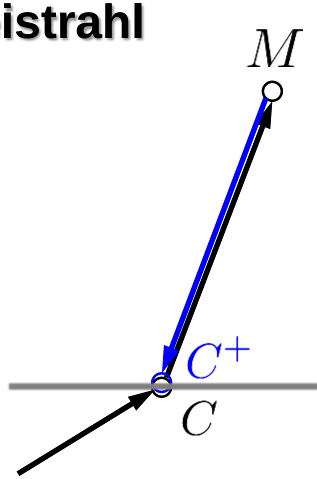
Im Strömungsfeld werden nach oben und unten anti-phasisch gleiche Signale ab-gestrahlt.

Beachte:
* Orientierung des reflektierten Schallsignals entspr. Theorie (ist Machwelle für $M=1.5$!)

* Wellenfront stromab asympt. ebenfalls nach Machwelle für $M=1.5$ orientiert (Schall-schatten!)



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



Übersicht zur Herleitung der Windkanalkorrektur nach Amiet:

a) Rückrechnung der Intensität von Messpunkt auf Punkt $C^+ := (x_0, h(1+\epsilon))$ infinitesimal oberhalb Scherschichtpunkt C :

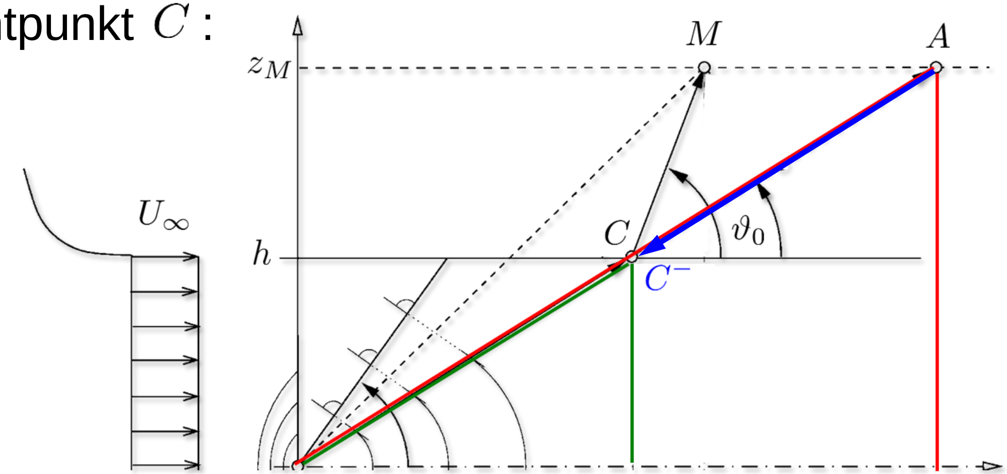
dazu: Erhaltung der Schallleistung entlang Strahlröhre :

dF aus Strahlröhrenaufweitung in x-z-Ebene
mal Strahlröhrenaufweitung in y-Richtung

$$\frac{\overline{p_M'^2}}{\overline{p_{C^+}'^2}} = \frac{dF_{C^+}}{dF_M}$$

b) Rückrechnung der Intensität von Punkt A auf Punkt $C^- := (x_0, h(1-\epsilon))$ infinitesimal unterhalb Scherschichtpunkt C :

$$\frac{\overline{p_A'^2}}{\overline{p_{C^-}'^2}} = \frac{h^2}{z_M^2}$$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

c) Sprungbedingung für Druck von $C^- \rightarrow C^+$
(für Amplitude vgl. (219) hier mit $u_{+\infty} = 0,\; a_{+\infty} = a_{-\infty}$):

$$\frac{p^t}{p^i} = \frac{2\sin\vartheta_i (1 + M\cos\vartheta_i)^2}{\sin\vartheta_i (1 + M\cos\vartheta_i)^2 + [H(\sigma) - i(1 - H(\sigma))]\sqrt{|\sigma|}}$$

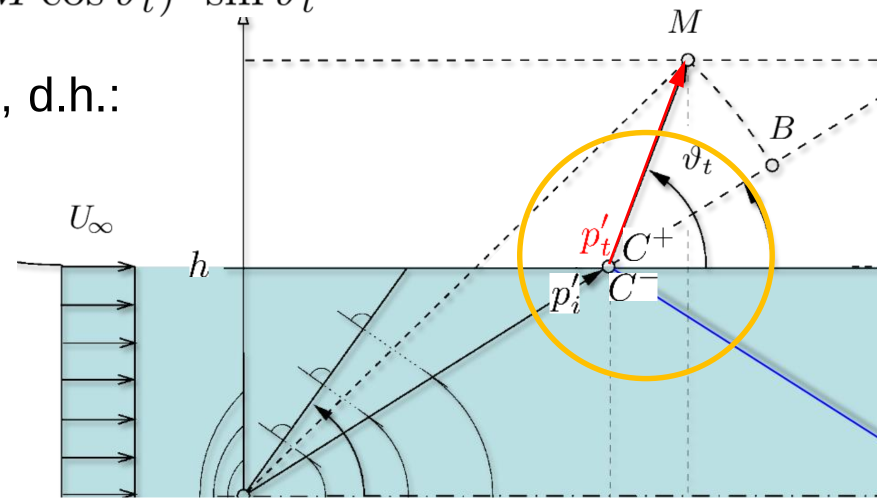
außerhalb Totalreflexion ist $\sigma > 0$ $\qquad \sigma = (1 + M\cos\vartheta_i)^2 - \cos^2\vartheta_i$

außerdem sagt Brechungsgesetz (212) $\quad \cos\vartheta_i = \dfrac{\cos\vartheta_t}{1 - M\cos\vartheta_t}$

$$\Rightarrow \frac{p^t}{p^i} = \frac{2\sqrt{(1 - M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}}{\sqrt{(1 - M\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t} + (1 - M\cos\vartheta_t)^2 \sin\vartheta_t}$$

Effektivwertverhältnis=Amplitudenverhältnis, d.h.:

$$\frac{\overline{p_t'^2}}{\overline{p_i'^2}} = \frac{\overline{p_{C+}'^2}}{\overline{p_{C-}'^2}} = \frac{4\zeta^2}{\left[(1 - M\cos\vartheta_t)^2 \sin\vartheta_t + \zeta\right]^2}$$

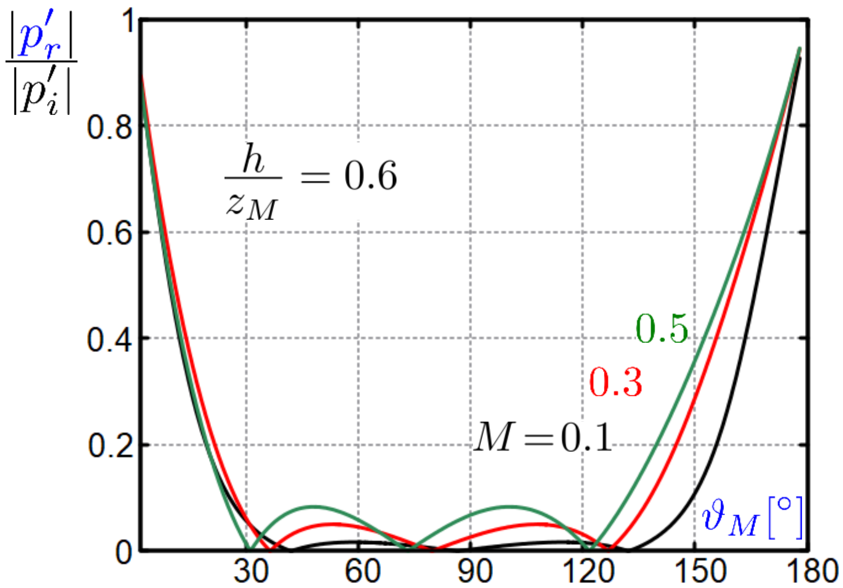


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

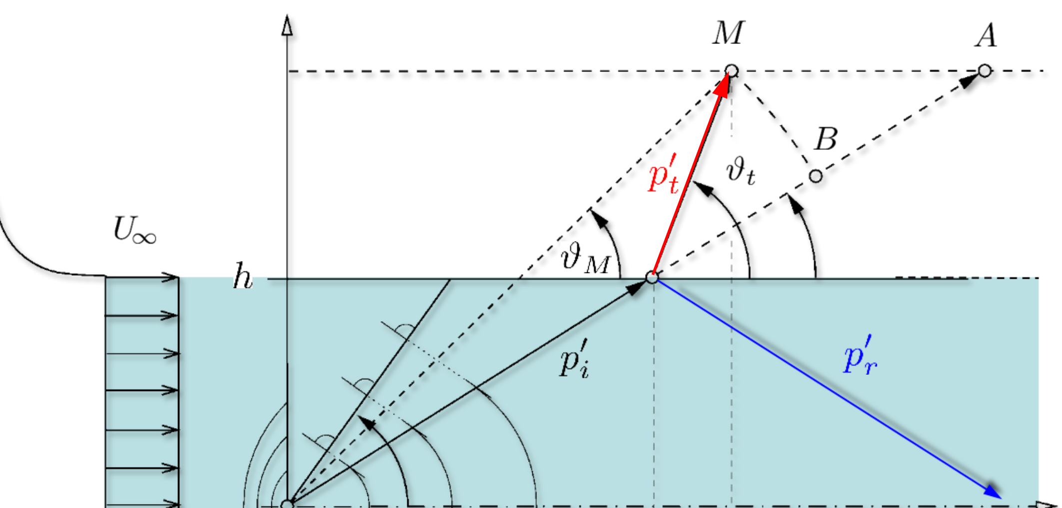
Nicht berücksichtigt bei der Formel von Amiet ist der Fehler aufgrund der von der gegenüber liegenden Scherschicht zurückgeworfenen Schallstrahlen,die ebenfalls das Mikrophon bei M treffen.

Die Intensität der reflektierten Strahlen ist mit (220): $\frac{p_r'}{p_i'} = \frac{p_t'}{p_i'} - 1$

$$\frac{p_r'}{p_i'} = \frac{\zeta - (1 - M\cos\vartheta_t)^2 \sin\vartheta_t}{\zeta + (1 - M\cos\vartheta_t)^2 \sin\vartheta_t} \qquad (336)$$

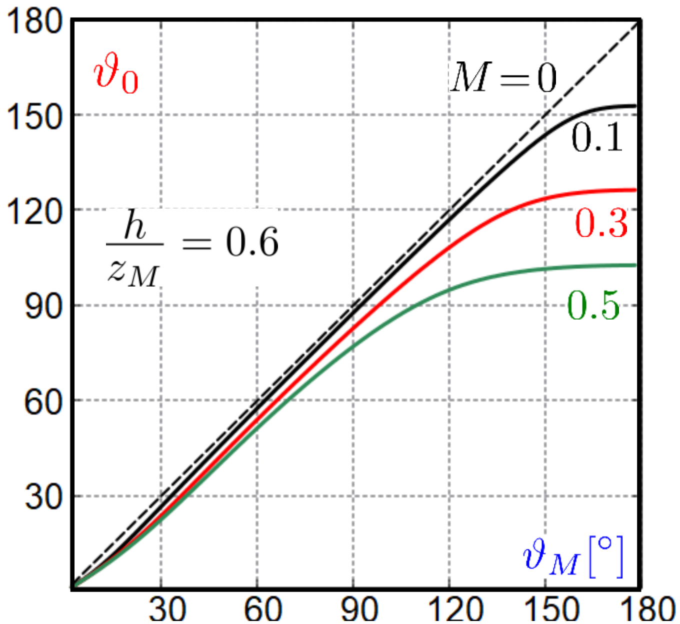


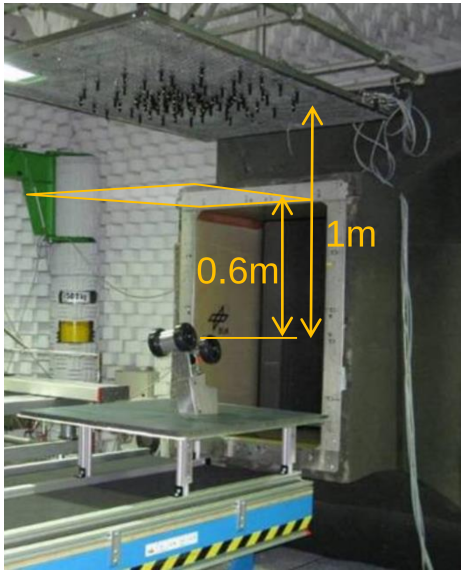
Reflektion an Windkanalscherschicht



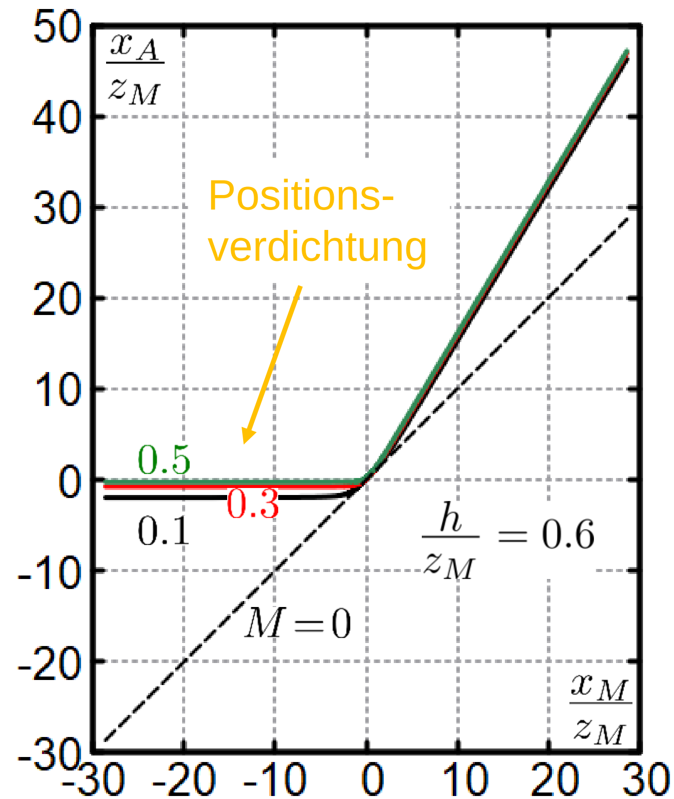
nach R.K. Amiet, AIAA 75-532

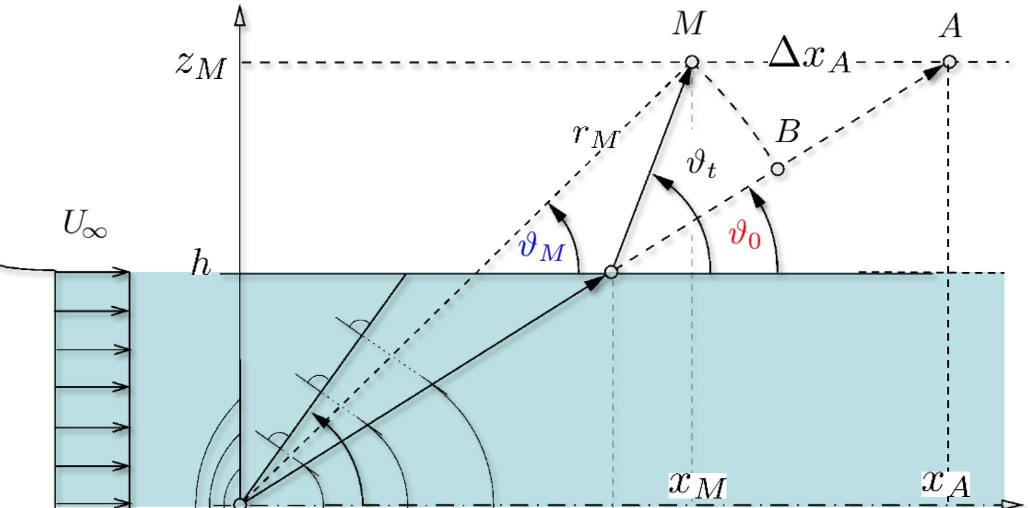
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl





Virtuelle Mikrophonverschiebung



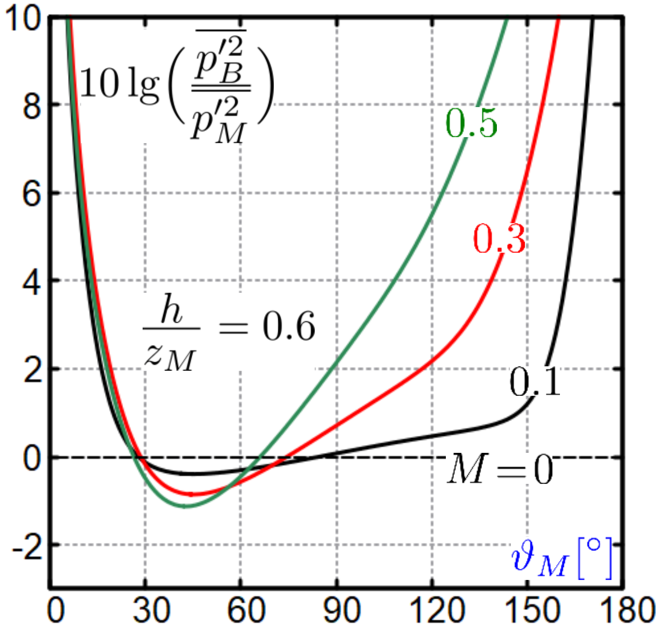


$$\frac{x_A}{z_M} = \cot\vartheta_0 \qquad \frac{x_M}{z_M} = \cot\vartheta_M$$

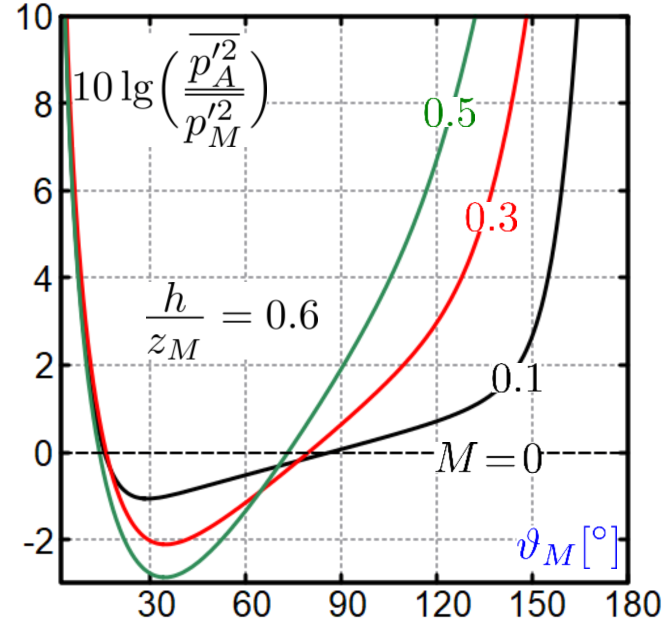
$$\frac{\Delta x_A}{z_M} = \frac{x_A - x_M}{z_M}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Amplitudenkorrektur bei B



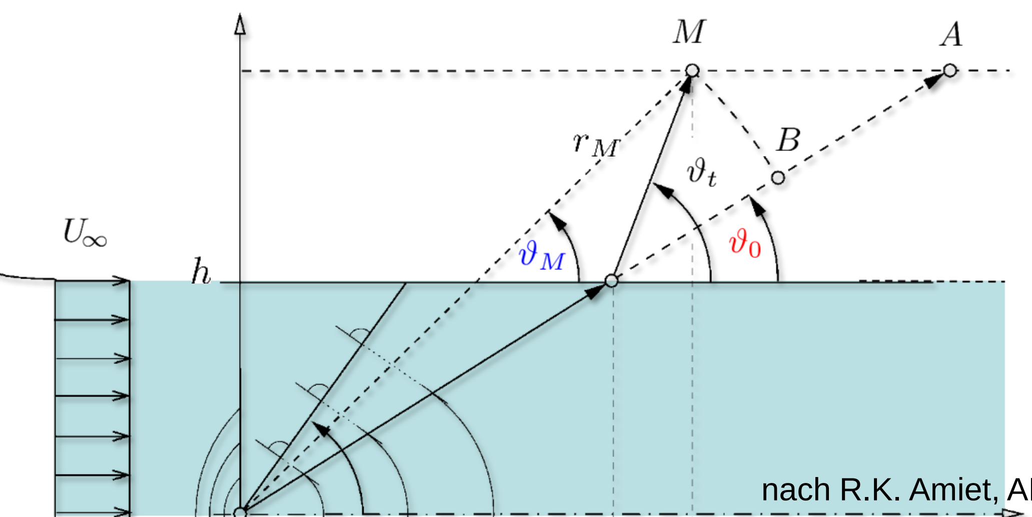
Amplitudenkorrektur bei A



←

Umrechnung auf Pos. *B* mit gleicher Orientierung wie Pos. *A*, und Abstand r_M :

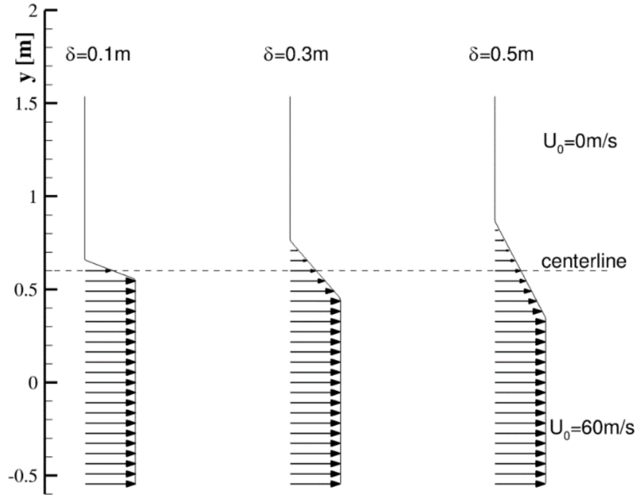
$$\frac{\overline{p_B'^2}}{\overline{p_A'^2}} = \frac{\sin^2\vartheta_M}{\sin^2\vartheta_0}$$



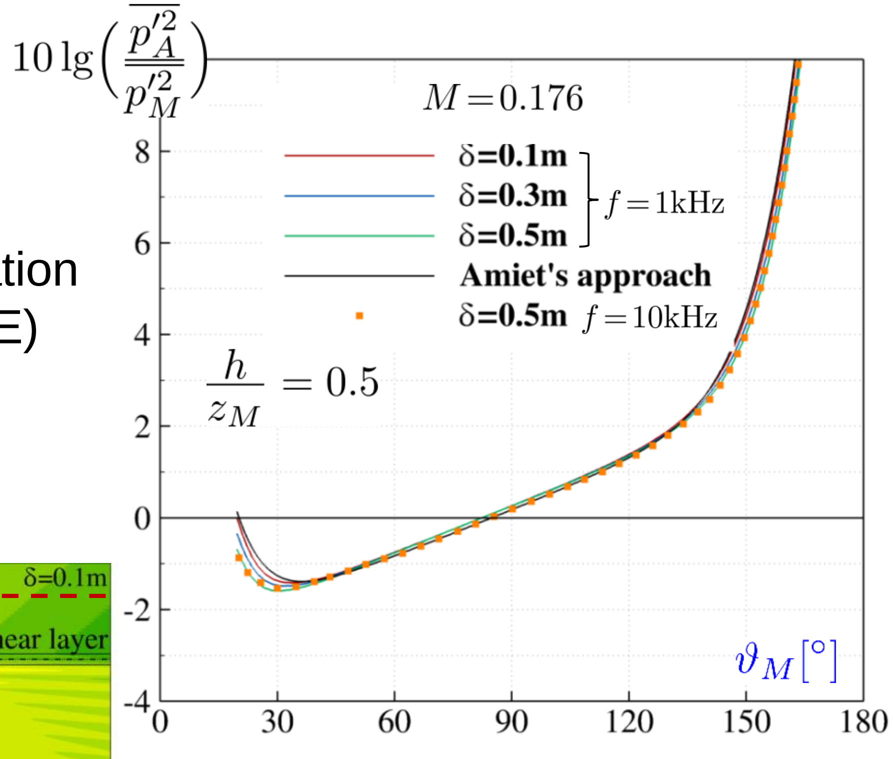
nach R.K. Amiet, AIAA 75-532

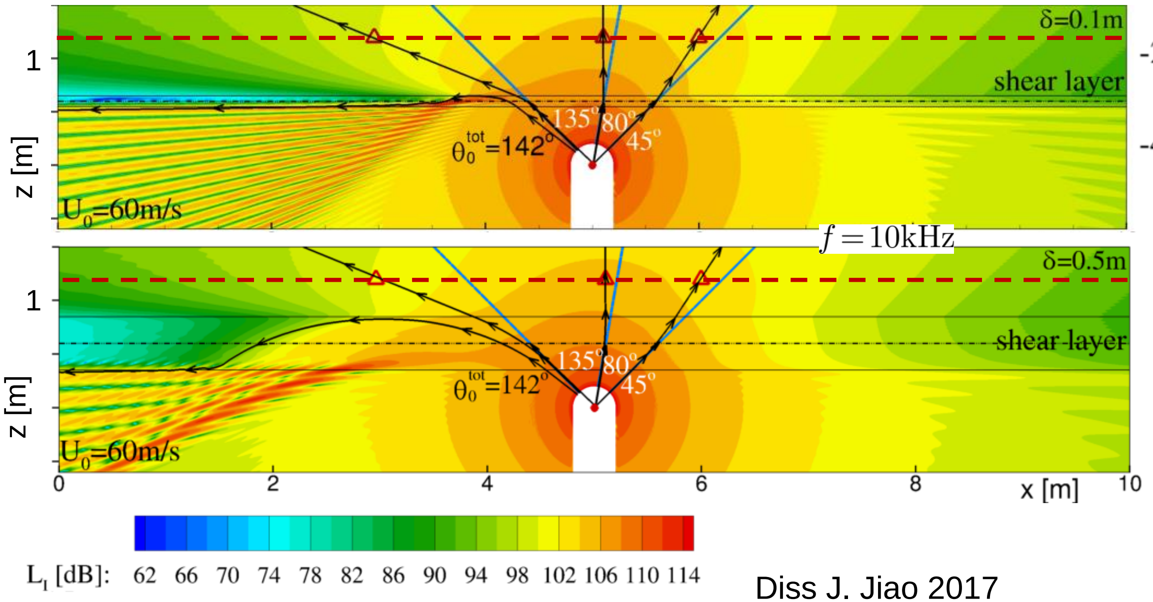
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?



CAA Simulation (Lösung LEE)



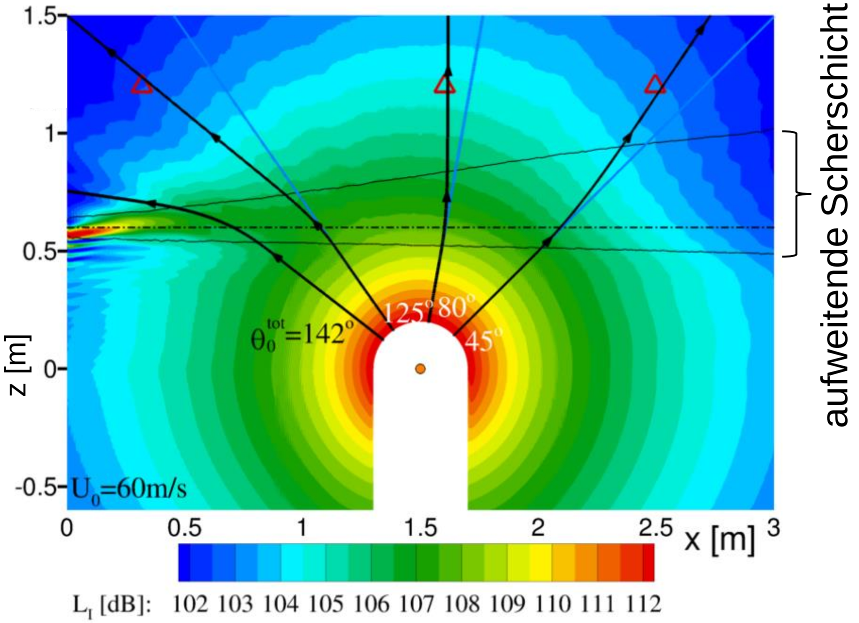


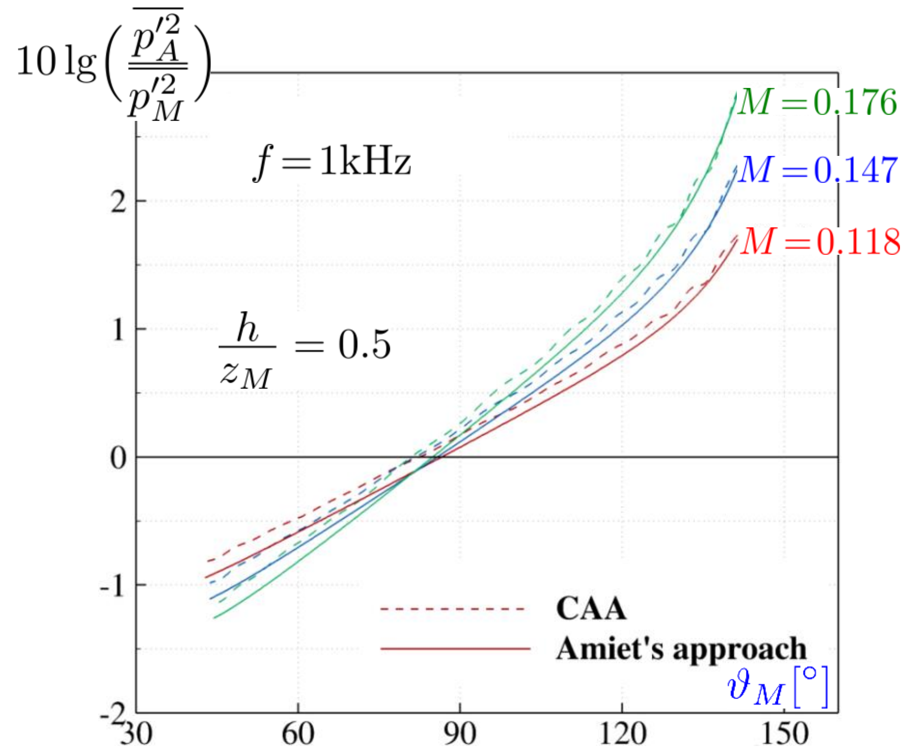
- geringer Einfluss durch Scherschichtdicke
- weitgehend frequenz-unabhängig

Diss J. Jiao 2017

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?



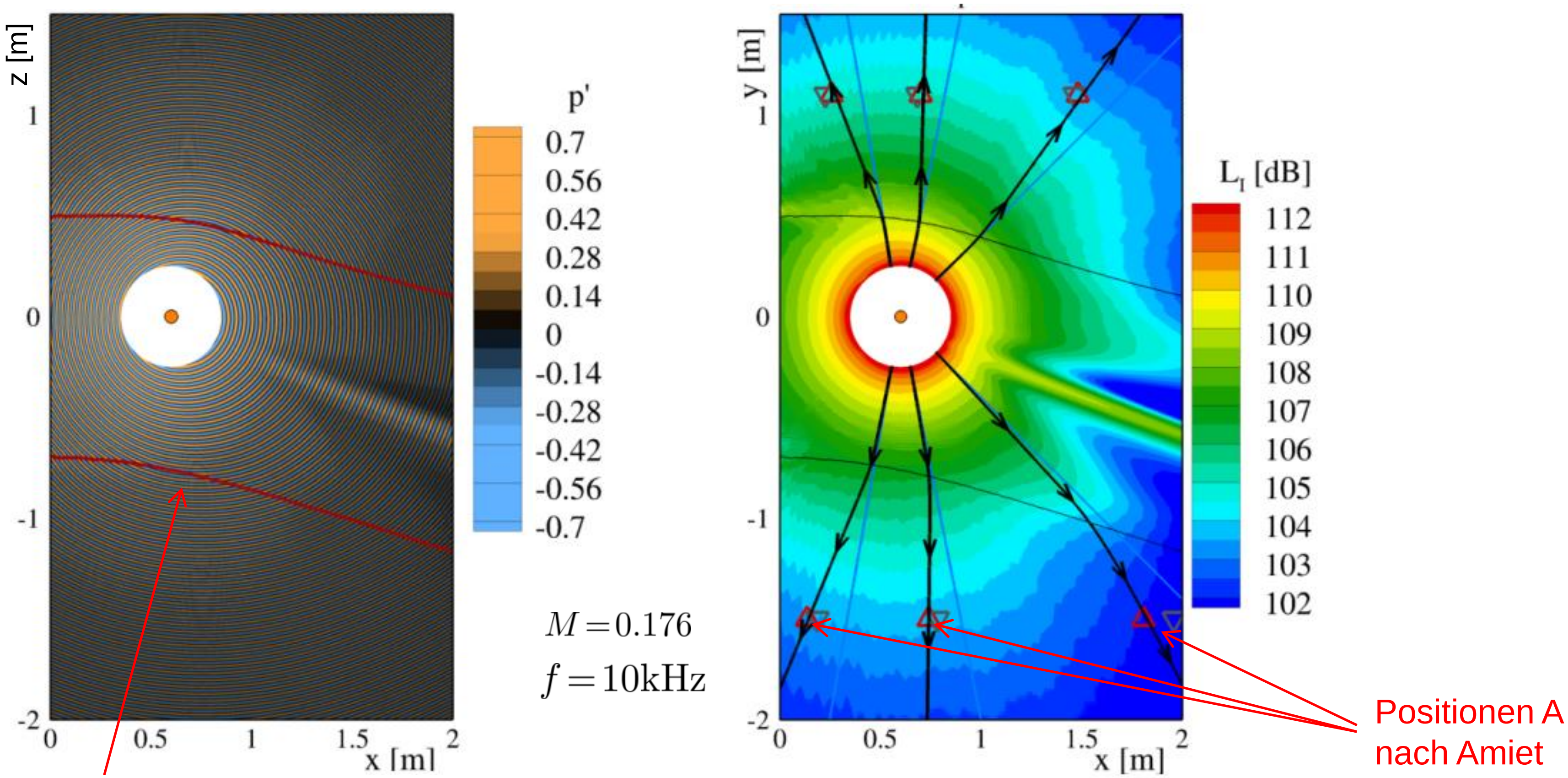


- geringer Einfluss durch aufweitende Scherschicht
- weitgehend geschwindig-keitsunabhängig

Diss J. Jiao 2017

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?

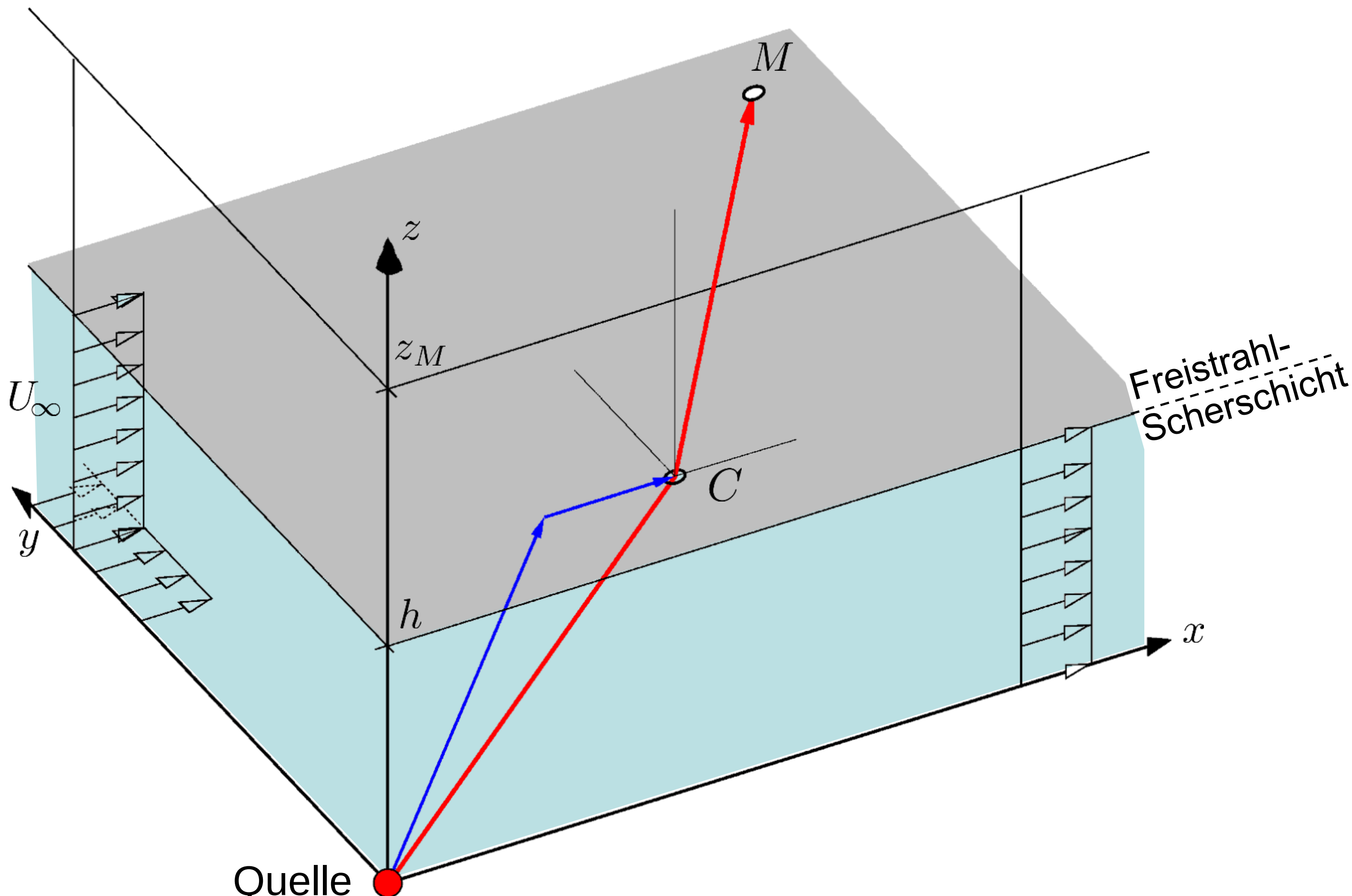


aufweitende, gekrümmte Scherschicht $\delta(x, z)$

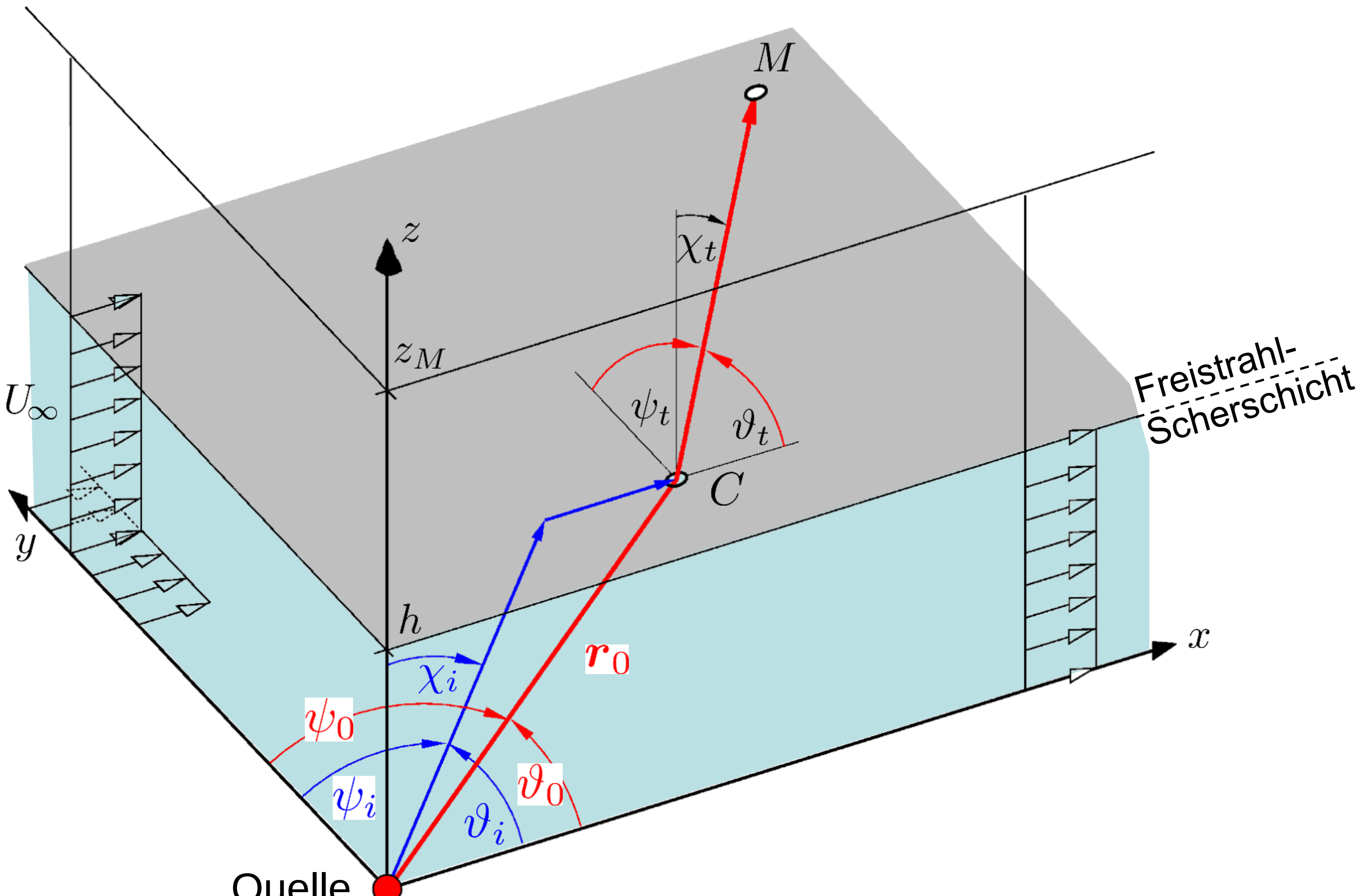
- rel. gute Wiedergabe des Strahlenverlaufs auch bei komplexen Scherschichten.

Diss J. Jiao 2017

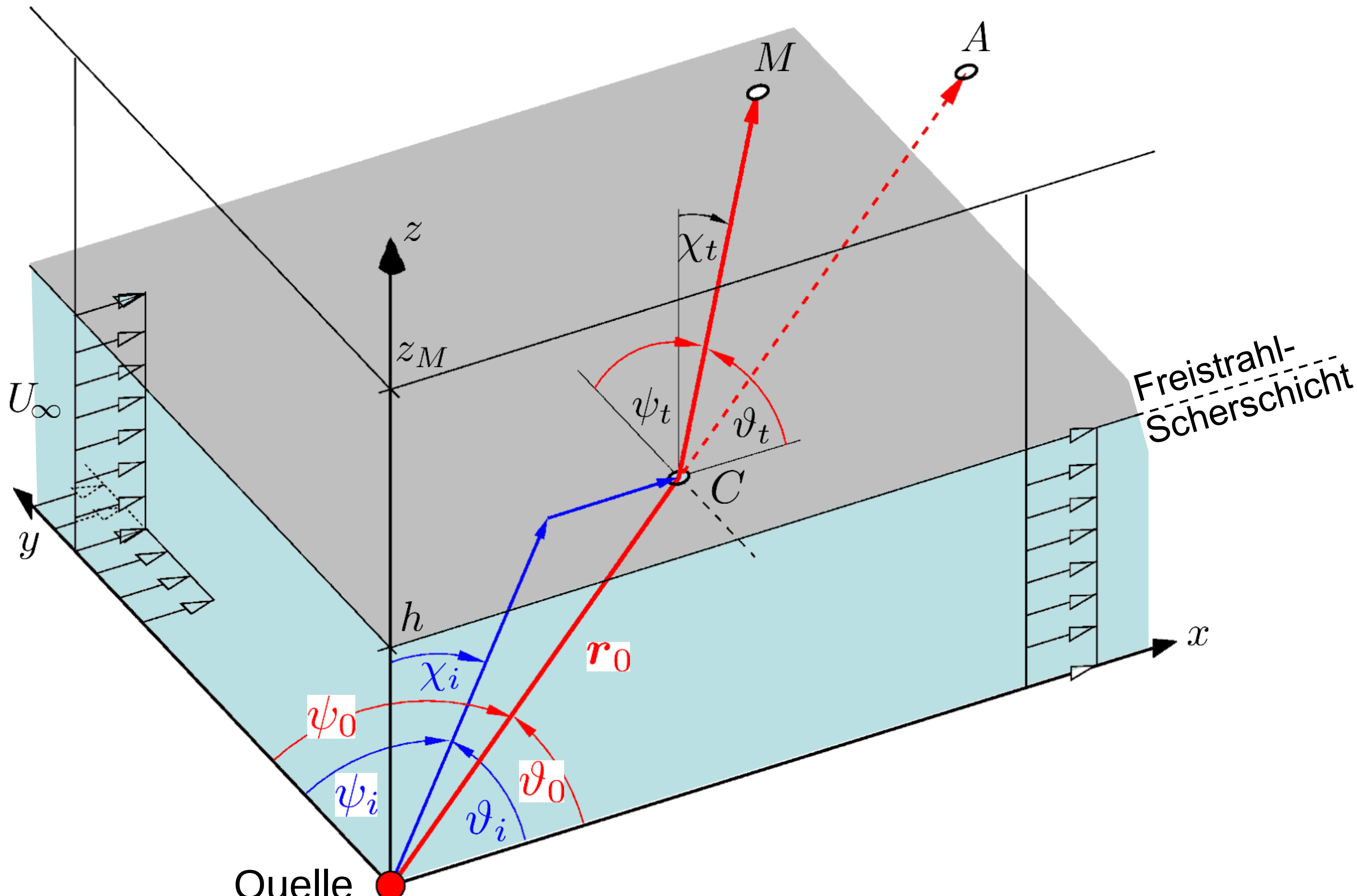
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



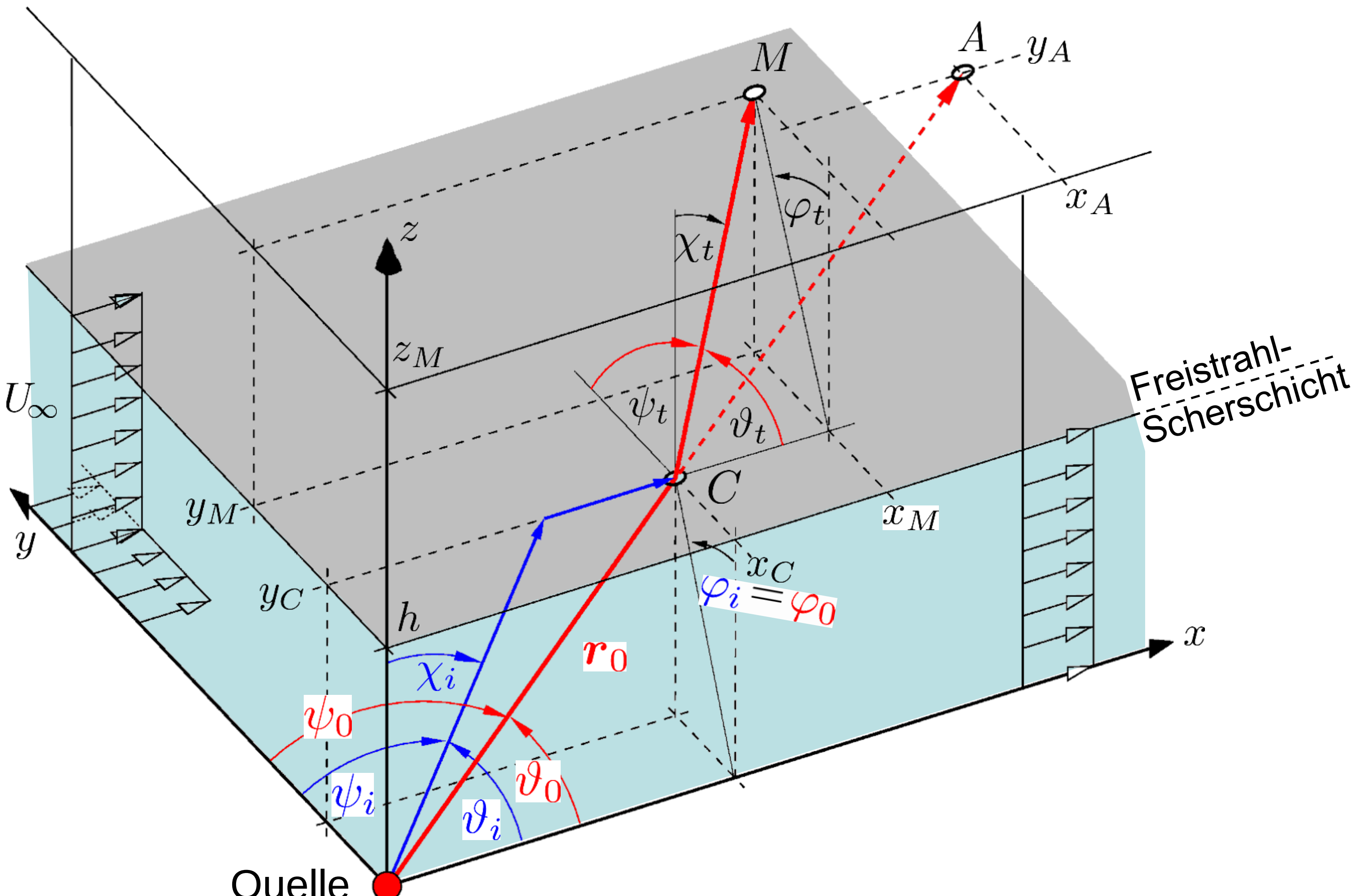
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



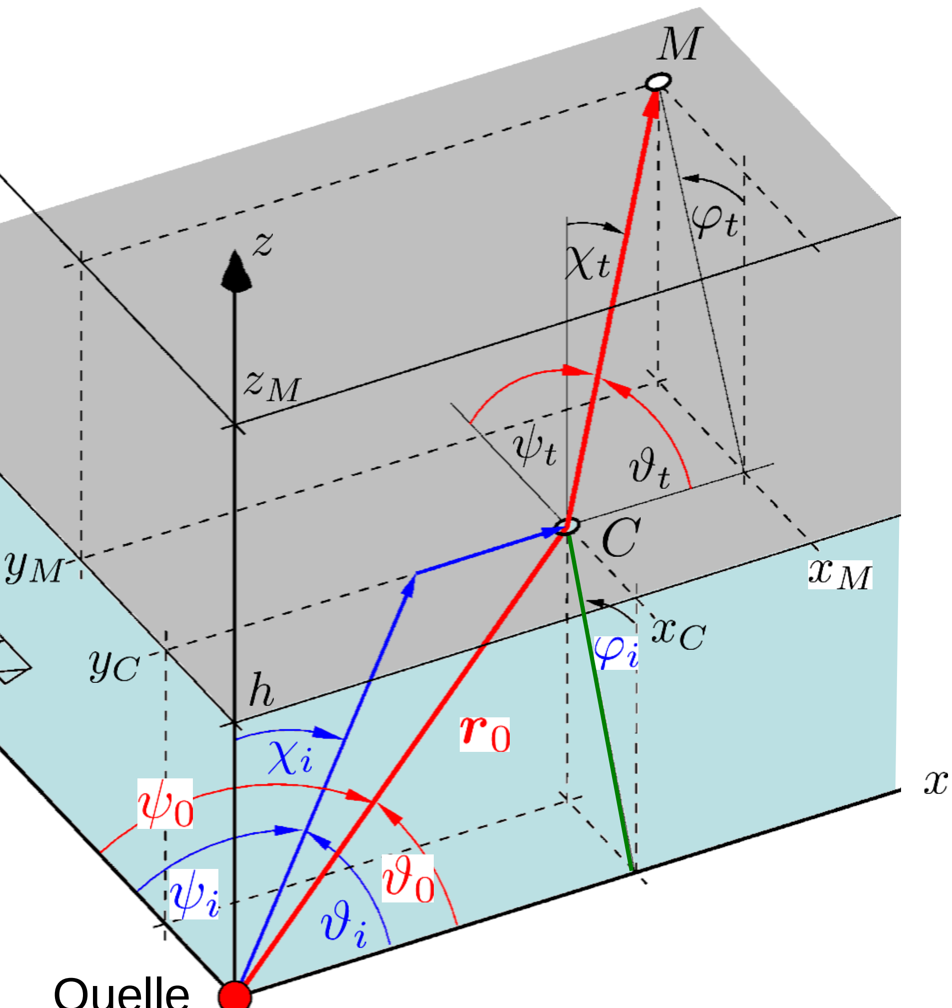
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$

ges.: ϑ_t, ψ_t



$$\tan\vartheta_0 = \frac{a\sin\vartheta_i}{a\cos\vartheta_i + U_\infty} = \frac{\sin\vartheta_i}{\cos\vartheta_i + M_\infty}$$

Brechungsgesetz über Schicht: Konstanz von ω sowie $x-$ und $y-$ Wellenzahlkomponenten α und β

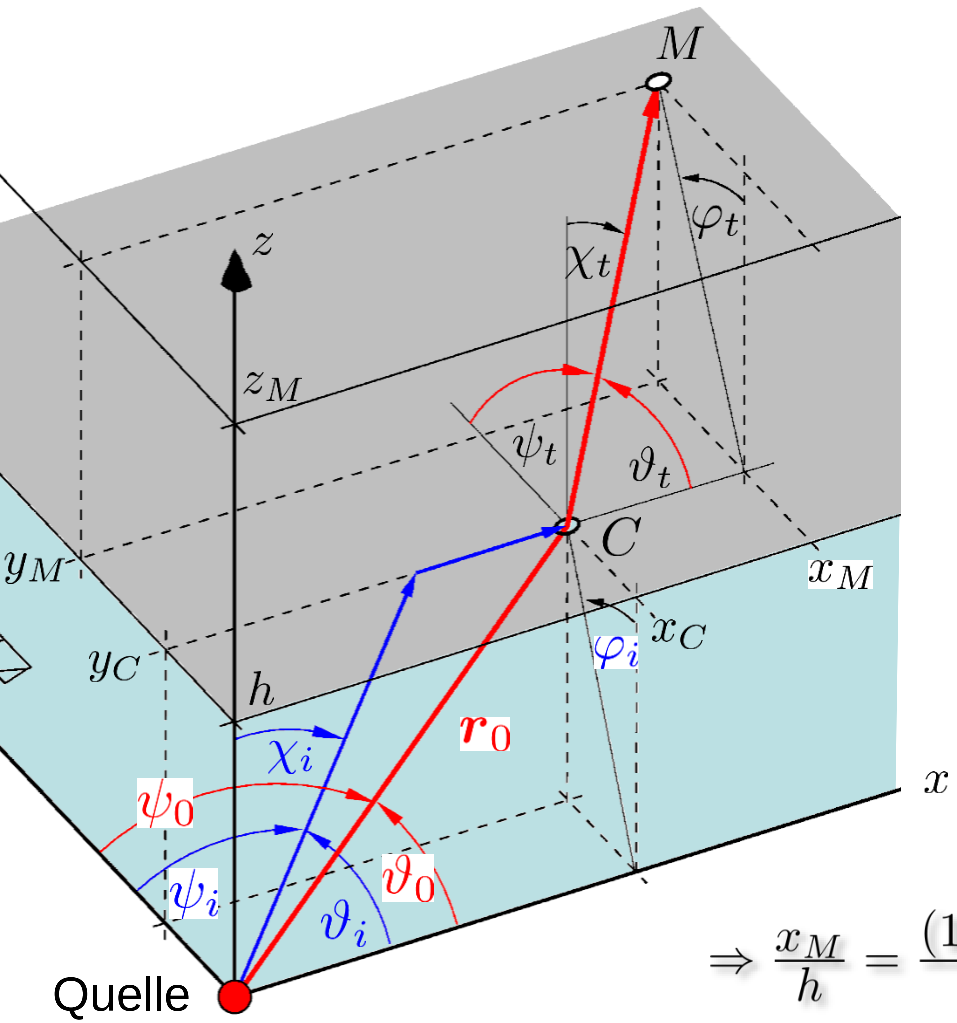
$$\omega = \boxed{ak_{-\infty} + U_\infty k_{-\infty}\cos\vartheta_i = ak_{+\infty}}$$
$$\alpha = \boxed{k_{-\infty}\cos\vartheta_i = k_{+\infty}\cos\vartheta_t}$$
$$\beta = \boxed{k_{-\infty}\cos\psi_i = k_{+\infty}\cos\psi_t}$$

$$= \left.\frac{\sqrt{(1-M_\infty\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}}{(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}\right\} =: \zeta$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$

ges.: ϑ_t, ψ_t



$$\overbrace{x_0 \tan\vartheta_0}^{\frac{\zeta}{(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}} = h/\underbrace{\cos\varphi_i}$$

$$\sin^2\vartheta_i = \cos^2\psi_i + (\sin\vartheta_i \cos\varphi_i)^2$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\cos^2\psi_i}{\sin^2\vartheta_i}} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\psi_t}{\zeta^2}} \quad \boxed{?}$$

analog:

$$(x_M - x_0)\tan\vartheta_t = (z_M - h)/\cos\varphi_t$$

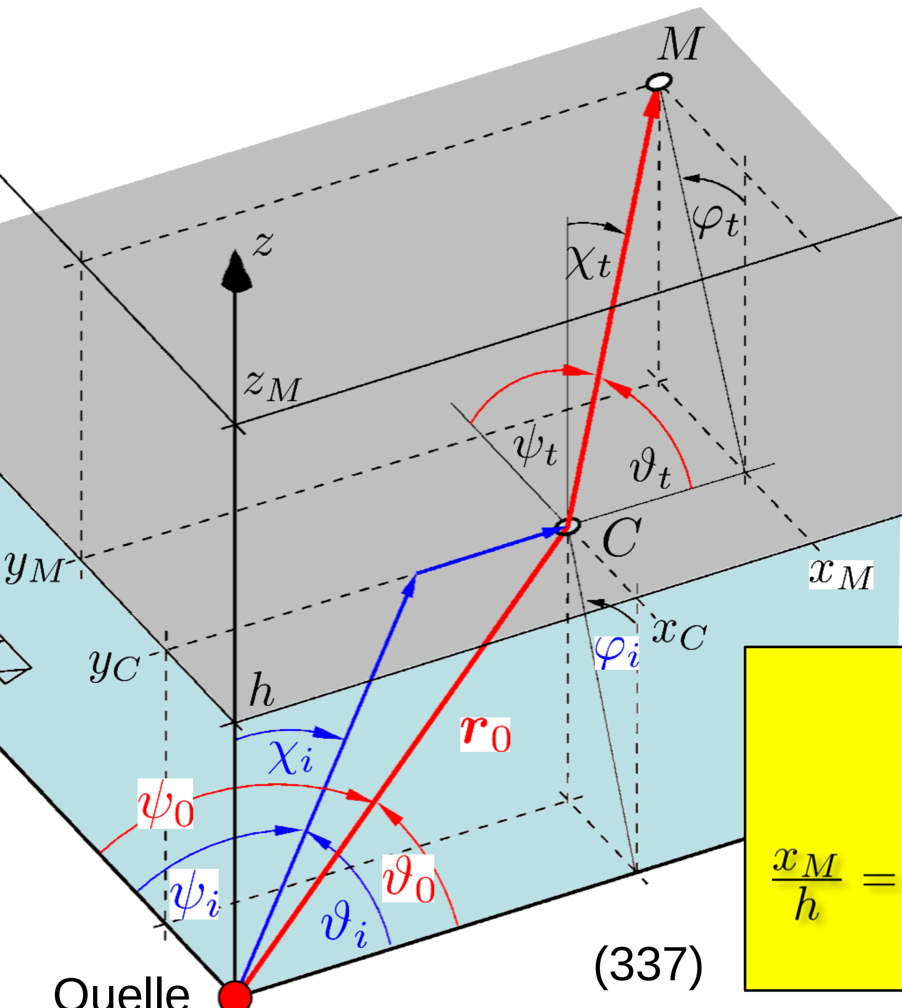
$$\cos\varphi_t = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\psi_t}{\sin^2\vartheta_t}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_M}{h} = \frac{(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1)\cos\vartheta_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$

ges.: ϑ_t, ψ_t



analog:

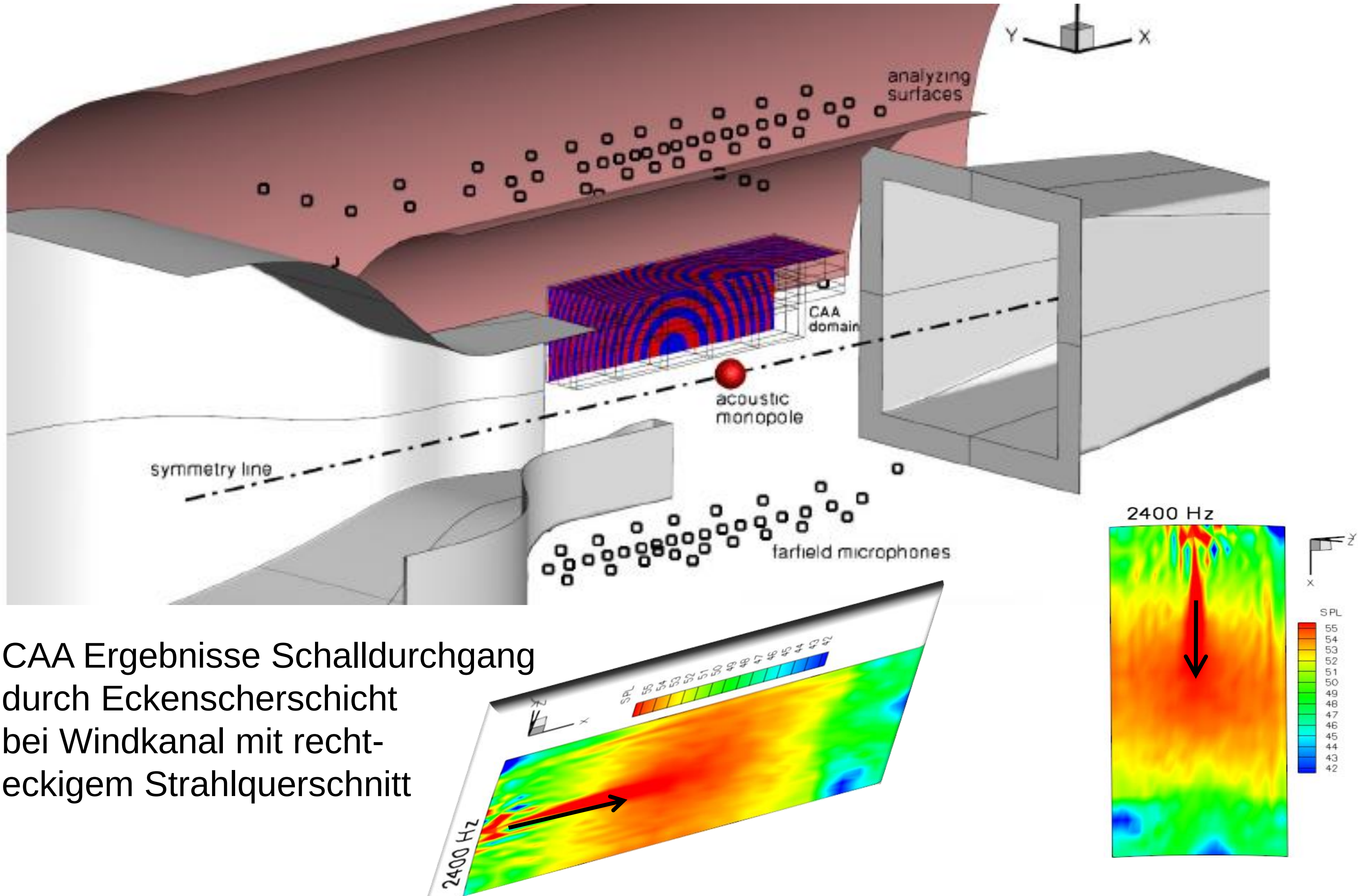
$$\frac{y_0}{h} = \tan\varphi_i = \frac{\sqrt{1-\cos\varphi_i}}{\cos\varphi_i} = \\ = \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}}$$

$$\frac{y_M - y_0}{z_M - h} = \tan\varphi_t = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi_t}}{\cos\varphi_t} = \\ = \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y_M}{h} &= \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{\zeta^2-\cos^2\psi_t}} + \frac{(z_M/h-1)\cos\psi_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}} \\ \frac{x_M}{h} &= \frac{(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2-\cos^2\psi_t}} + \frac{(z_M/h-1)\cos\vartheta_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}} \end{aligned}} \quad (337)$$

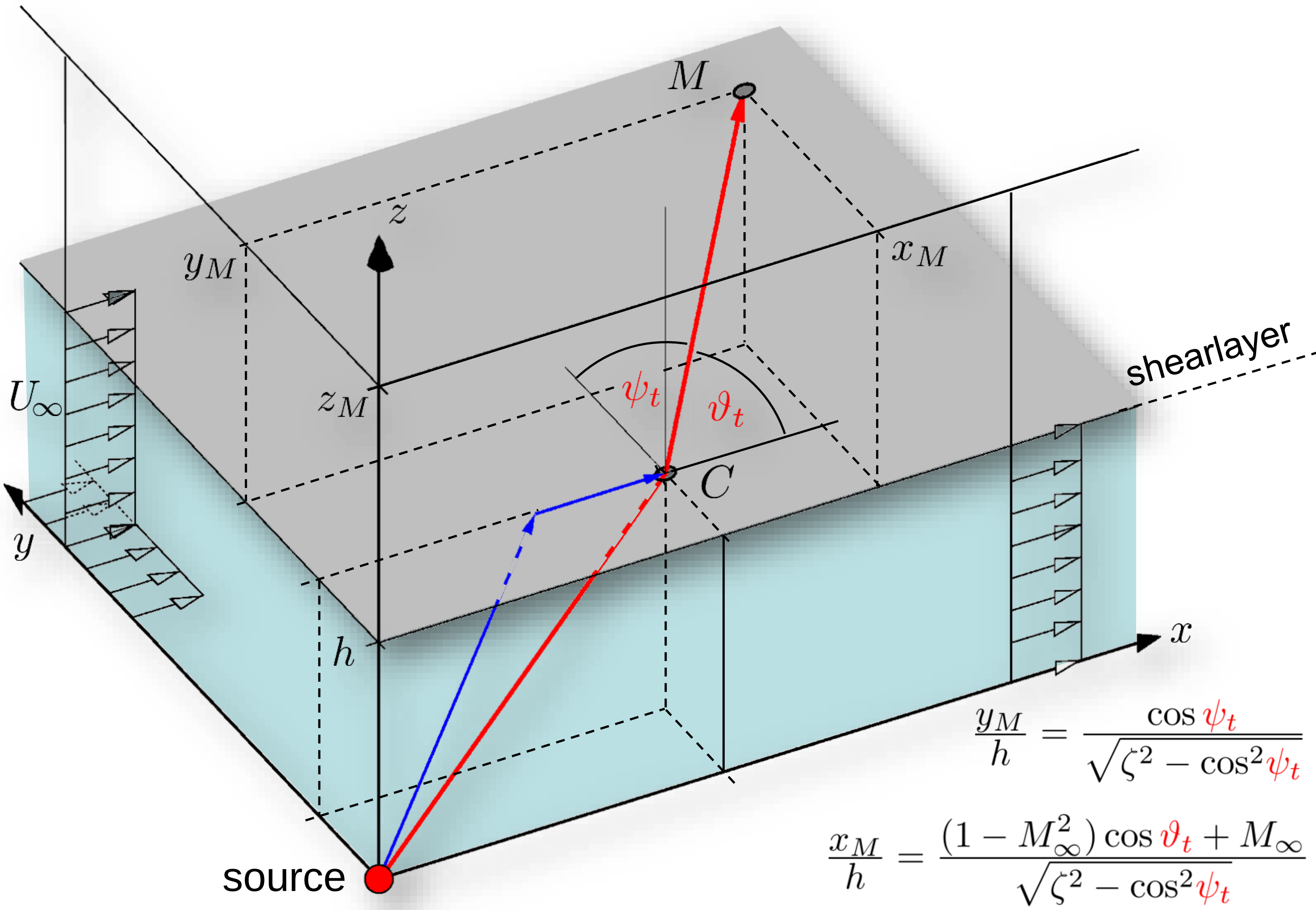
Löse iterativ nach ϑ_t, ψ_t

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



CAA Ergebnisse Schalldurchgang durch Eckenscherschicht bei Windkanal mit recht-eckigem Strahlquerschnitt

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

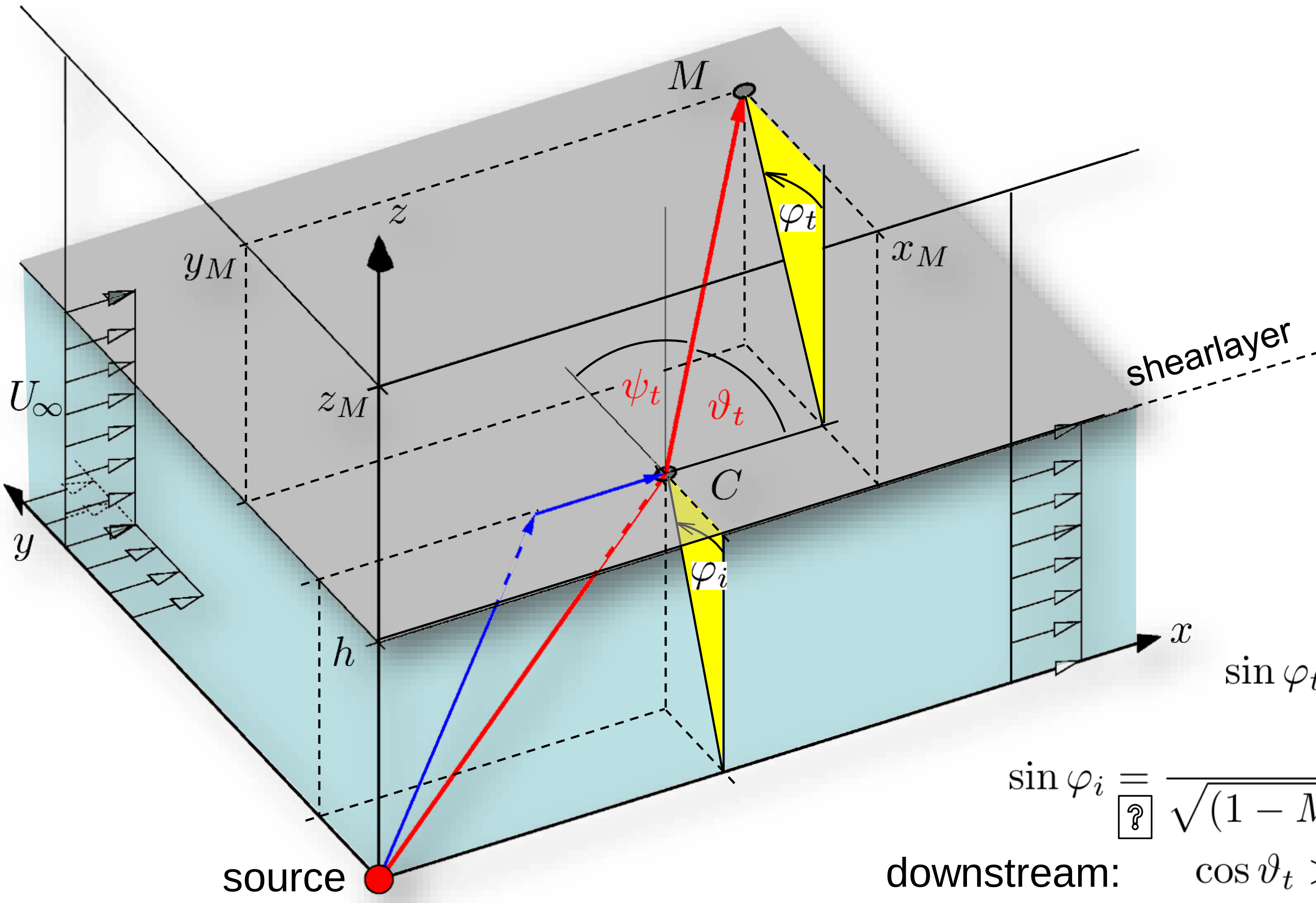


$$\frac{y_M}{h} = \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1)\cos\psi_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}}$$

$$\frac{x_M}{h} = \frac{(1 - M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1)\cos\vartheta_t}{\sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}}$$

$$\zeta = \sqrt{(1 - M_\infty\cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



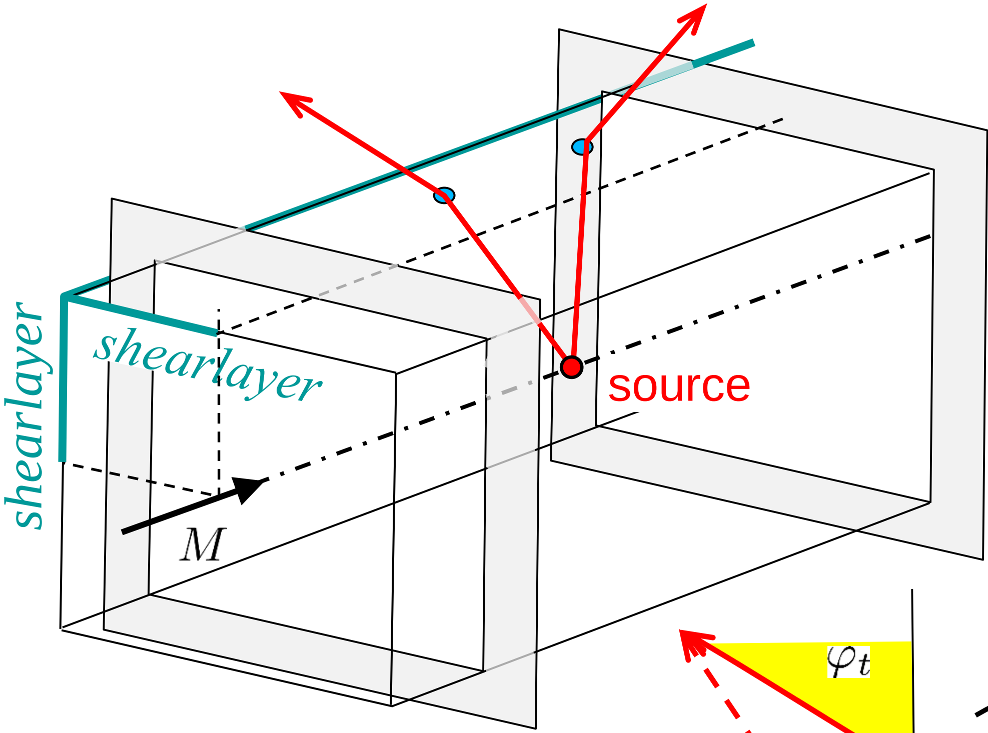
$$\sin\varphi_t = \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_t}}$$

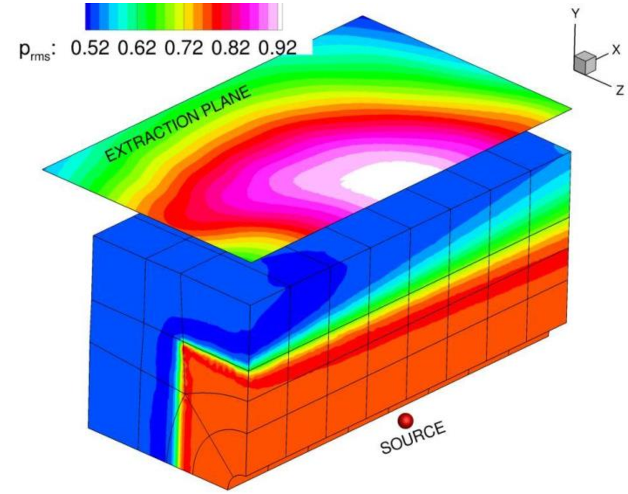
$$\sin\varphi_i = \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{(1-M\cos\vartheta_t)^2-\cos^2\vartheta_t}}$$

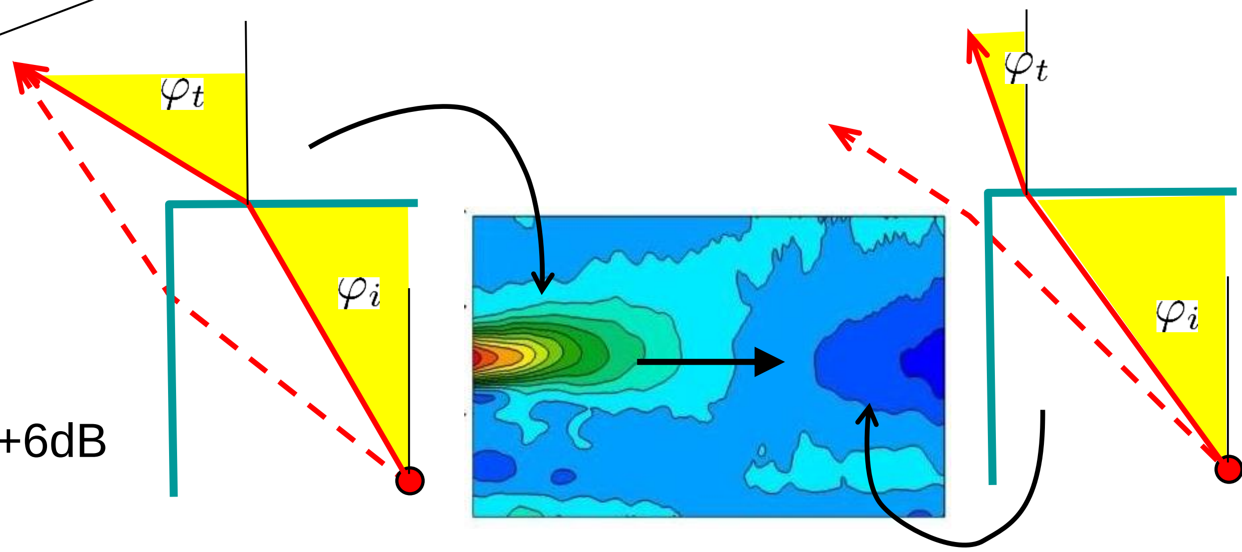
downstream: $\cos\vartheta_t > 0 \Rightarrow \varphi_i > \varphi_t$

upstream: $\cos\vartheta_t < 0 \Rightarrow \varphi_i < \varphi_t$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



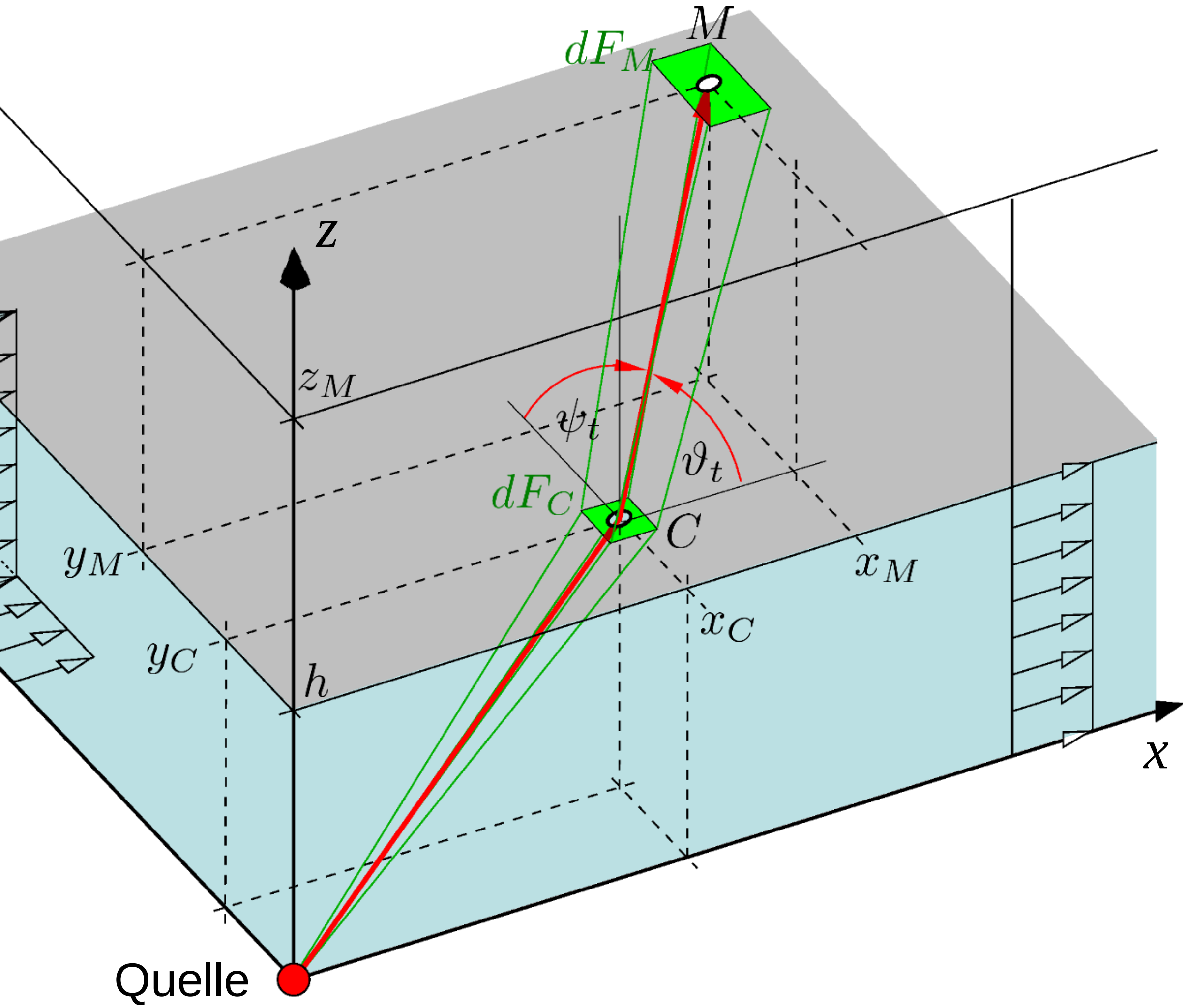




- „converging lens“ upstream: +6dB
- „diverging lens“ downstream

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

2. Strahlaufweitung $C \to M$: geg.: ϑ_t, ψ_t



ges.: $$\frac{\overline{p'^2}(C)}{\overline{p'^2}(M)} = \frac{dF(M)}{dF(C)} = \frac{dF_M}{dF_C}$$

$$dF_M = dx_M \, dy_M$$

$$dF_C = dx_C \, dy_C$$

$$\frac{dx_M \, dy_M}{d\vartheta_t \, d\psi_t} = J_M = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_M}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial x_M}{\partial \psi_t} \\ \frac{\partial y_M}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial y_M}{\partial \psi_t} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dx_C \, dy_C}{d\vartheta_t \, d\psi_t} = J_C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial x_C}{\partial \psi_t} \\ \frac{\partial y_C}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial y_C}{\partial \psi_t} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dF_M}{dF_C} = \frac{J_M}{J_C}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

2. Strahlaufweitung:

$$x_C(\vartheta_t, \psi_t) = h \frac{(1 - M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}}$$

$$y_C(\vartheta_t, \psi_t) = h \frac{\cos\psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2\psi_t}}$$

$$\zeta = \sqrt{(1 - M_\infty \cos\vartheta_t)^2 - \cos^2\vartheta_t}$$

⋮

$$J_C = \frac{h^2 \sin\vartheta_t \sin\psi_t}{(\zeta^2 - \cos^2\psi_t)^3} \left\{[1 - (1 - M_\infty^2)\cos^2\psi_t]\zeta^2 - [(1 - M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty]^2 \cos^2\psi_t\right\}$$

$$J_M = h^2 \sin\vartheta_t \sin\psi_t \left\{\left[\frac{1-(1-M_\infty^2)\cos^2\psi_t}{(\zeta^2-\cos^2\psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^*-1)\sin^2\psi_t}{(\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t)^{3/2}}\right]\left[\frac{\zeta^2}{(\zeta^2-\cos^2\psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^*-1)\sin^2\vartheta_t}{(\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t)^{3/2}}\right] - \right.$$

$$\left. - \cos\psi_t \left[\frac{[(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty]\cos\psi_t}{(\zeta^2-\cos^2\psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^*-1)\cos\vartheta_t\cos\psi_t}{(\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t)^{3/2}}\right]\left[\frac{(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t+M_\infty}{(\zeta^2-\cos^2\psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^*-1)\cos\vartheta_t}{(\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t)^{3/2}}\right]\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dF_M}{dF_C} = &\frac{[1-(1-M_\infty^2)\cos^2\psi_t + \eta^3(z_M^*-1)\sin^2\psi_t][\zeta^2 + \eta^3(z_M^*-1)\sin^2\vartheta_t]}{[1-(1-M_\infty^2)\cos^2\psi_t]\zeta^2 - [(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty]^2\cos^2\psi_t} - \\ &\cos^2\psi_t \frac{[(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty + \eta(z_M^*-1)\cos\vartheta_t]^2}{[1-(1-M_\infty^2)\cos^2\psi_t]\zeta^2 + [(1-M_\infty^2)\cos\vartheta_t + M_\infty]^2\cos^2\psi_t}\end{aligned}} \qquad (338)$$

$$z_M^* := \frac{z_M}{h} \qquad \eta := \sqrt{\frac{\zeta^2-\cos^2\psi_t}{\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

2. Strahlaufweitung $C \rightarrow M$ Sonderfall: ebener Durchtritt (Standard Amiet):

$$\psi_t = \pi/2$$

$$\frac{dF_M}{dF_C} = \frac{[1+(z_M^*-1)\zeta^3]}{\sin^3\vartheta_t}\,\frac{[1+(z_M^*-1)\zeta]}{\sin\vartheta_t}$$

3. Sprungbedingung $C^- \rightarrow C^+$ (analog (204), (205), (207), (208))

unterhalb Scherschicht:

$$\hat{p}^- = p^i \exp\Big(-ik_{-\infty}\sqrt{\sin^2\vartheta_i - \cos^2\psi_i}(z-h)\Big) + p^r \exp\Big(ik_{-\infty}\sqrt{\sin^2\vartheta_i - \cos^2\psi_i}(z-h)\Big)$$

oberhalb Scherschicht, analog (210):

$$\hat{p}^+ = p^t \exp\big(-k_{-\infty}\sqrt{-\sigma}(z-h)\big) \qquad \text{mit} \qquad \sigma = (1+M_\infty\cos\vartheta_i)^2 - \cos^2\vartheta_i - \cos^2\psi_i$$

i) $\hat{p}^-(z=h) = \hat{p}^+(z=h) \Rightarrow p^i + p^r = p^t$

ii) $\dfrac{-ik_{-\infty}\sqrt{\sin^2\vartheta_i - \cos^2\psi_i}}{(\omega-\alpha a M_\infty)^2}(p^i - p^r) = \dfrac{-k_{-\infty}\sqrt{-\sigma}}{\omega^2}\,p^t$ analog (218)

$$\Rightarrow \frac{p^i}{p^t} = \frac{\sqrt{\zeta^2-\cos^2\psi_t} + \sqrt{\sin^2\vartheta_t - \cos^2\psi_t}(1-M_\infty\cos\vartheta_t)^2}{2\sqrt{\zeta^2-\cos^2\psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

4. Laufstreckenunterschied zu Punkt C^- bzw. A :

$$\frac{\overline{p'^2_A}}{\overline{p'^2}_{C^-}} = \frac{(h/\cos\chi_i)^2}{(z_M/\cos\chi_i)^2} = \frac{h^2}{z_M^2}$$

Gesamtkorrektur 3D:

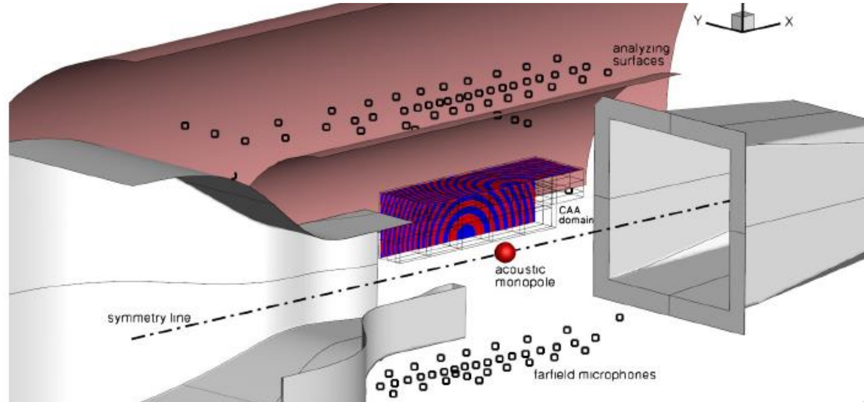
$$\boxed{\frac{\overline{p'^2_A}}{\overline{p'^2_M}} = \frac{h^2}{z_M^2}\,\frac{J_M}{J_C}\,\frac{\left[\sqrt{\zeta^2-\cos^2\psi_t}+\sqrt{\sin^2\vartheta_t-\cos^2\psi_t}(1-M_\infty\cos\vartheta_t)^2\right]^2}{4(\zeta^2-\cos^2\psi_t)}} \qquad (339)$$

$$\zeta = \sqrt{(1-M_\infty\cos\vartheta_t)^2-\cos^2\vartheta_t}$$

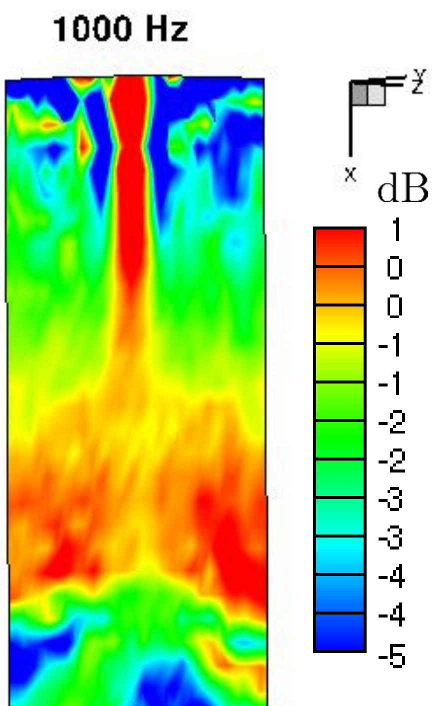
vgl. mit (335) für $\psi_t = \pi/2$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

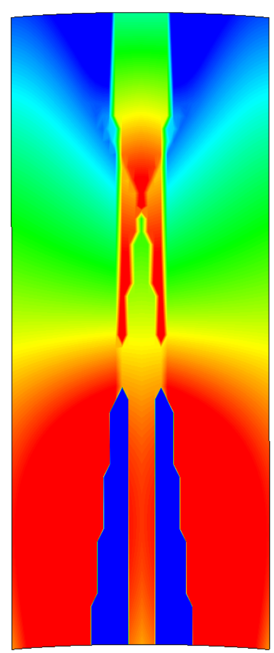
3D Scherschichtkorrektur für rechteckigen Strahlquerschnitt

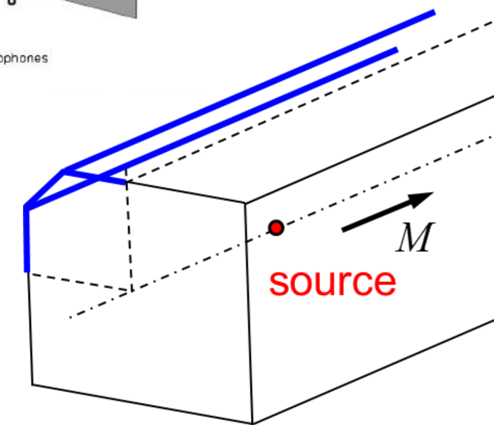


CAA Lösung
LEE



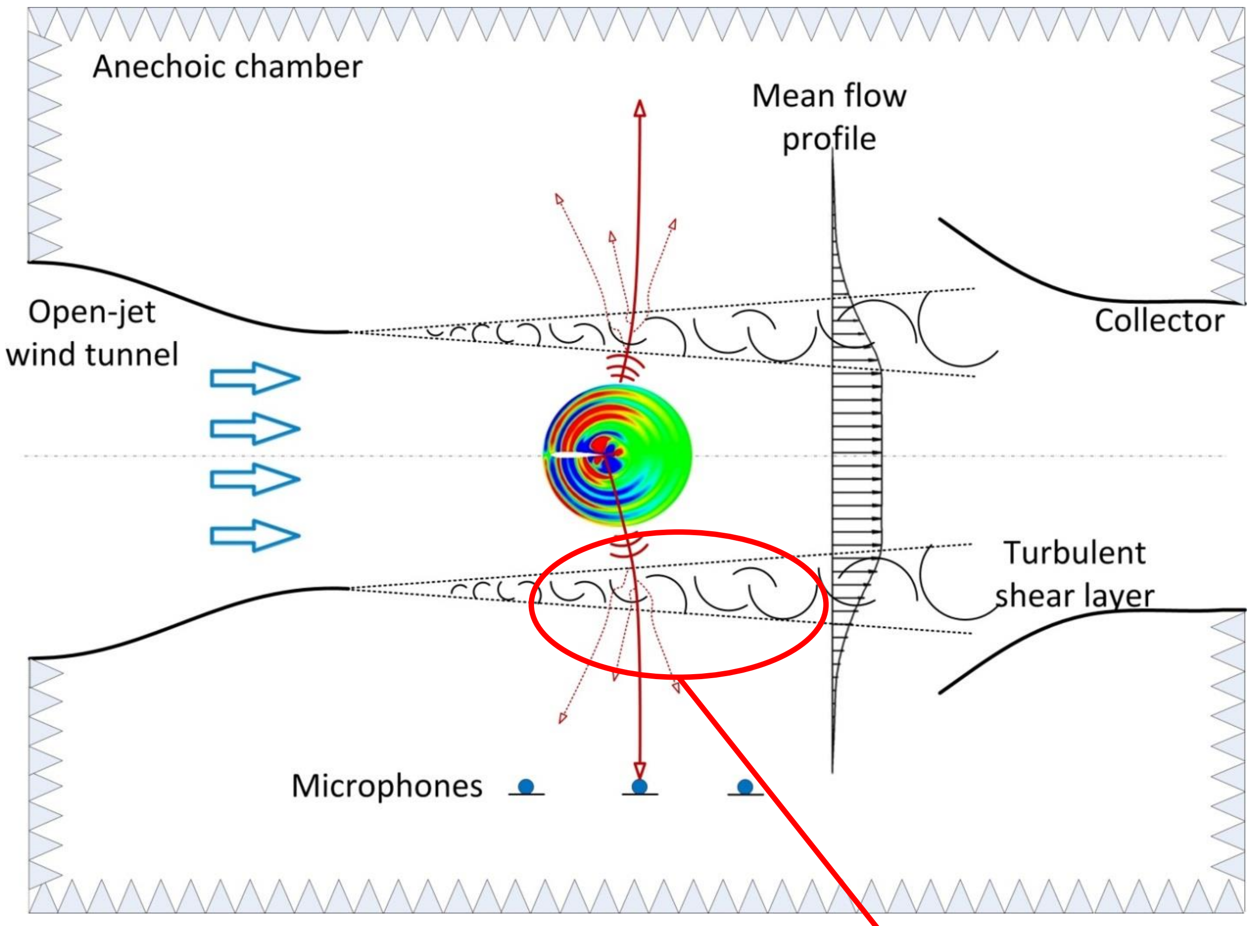
(339)





Modellierung der „Kante“ in Scherschicht (3 Brechungsebenen)

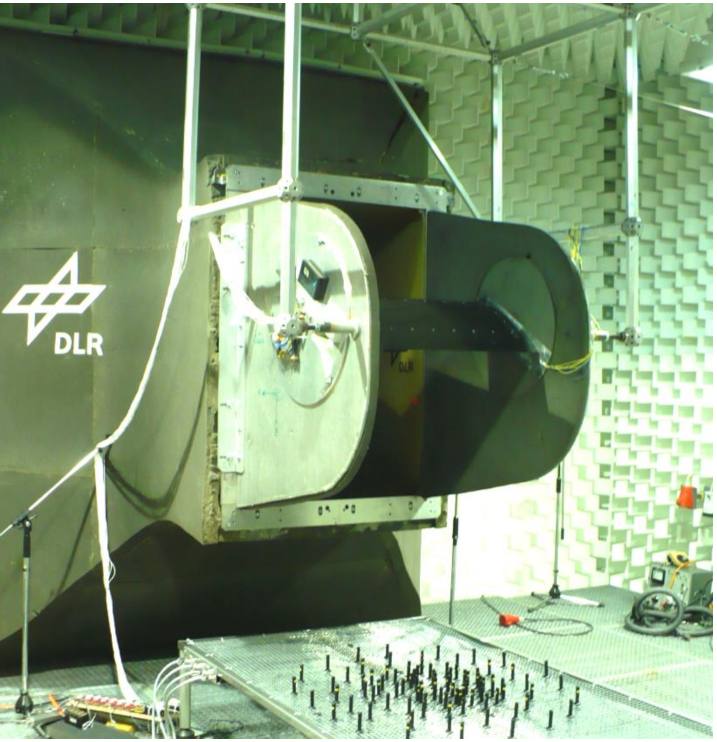
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl Streuung durch Turbulenz

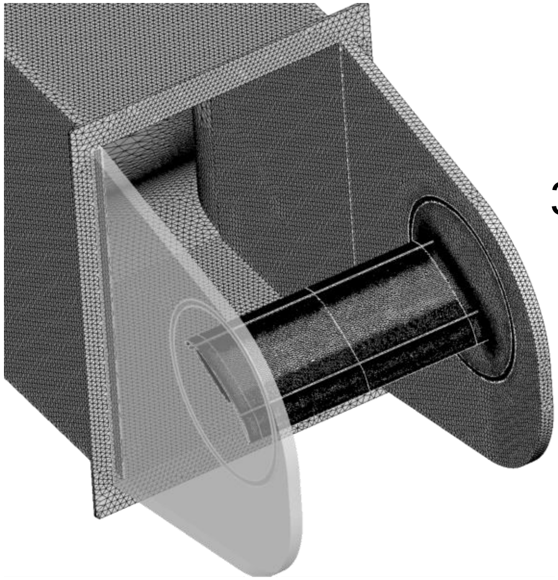


Beeinflussung durch Scherung und Turbulenz

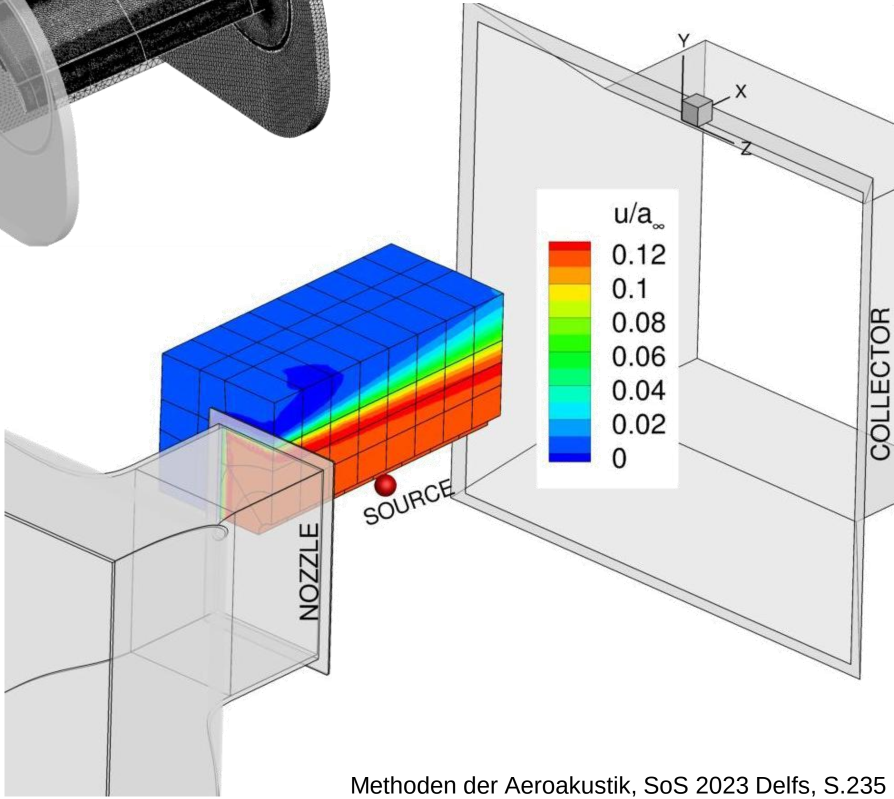
Diss. J. Jiao, 2017

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl
Streuung durch Turbulenz





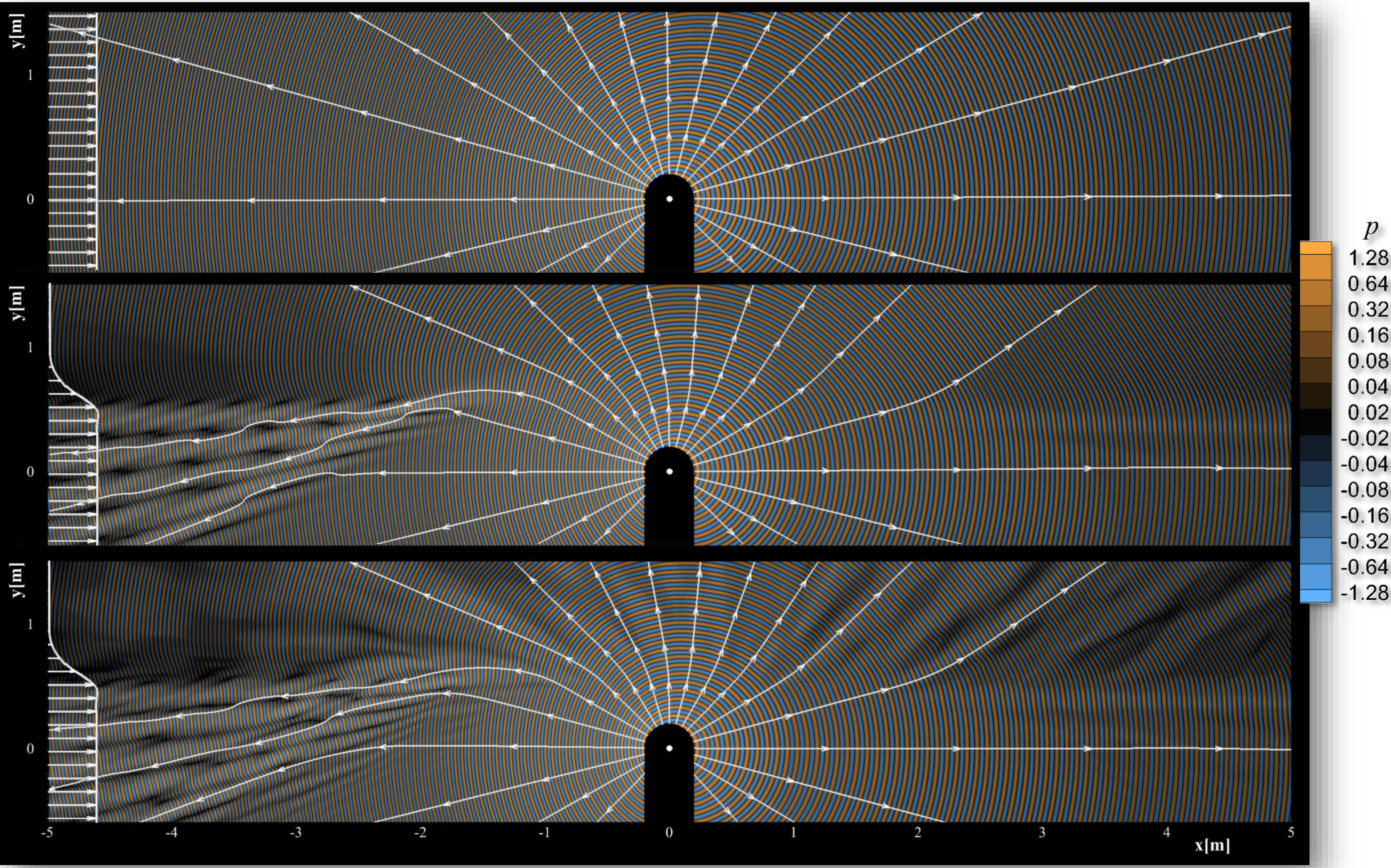
3D RANS Strömung



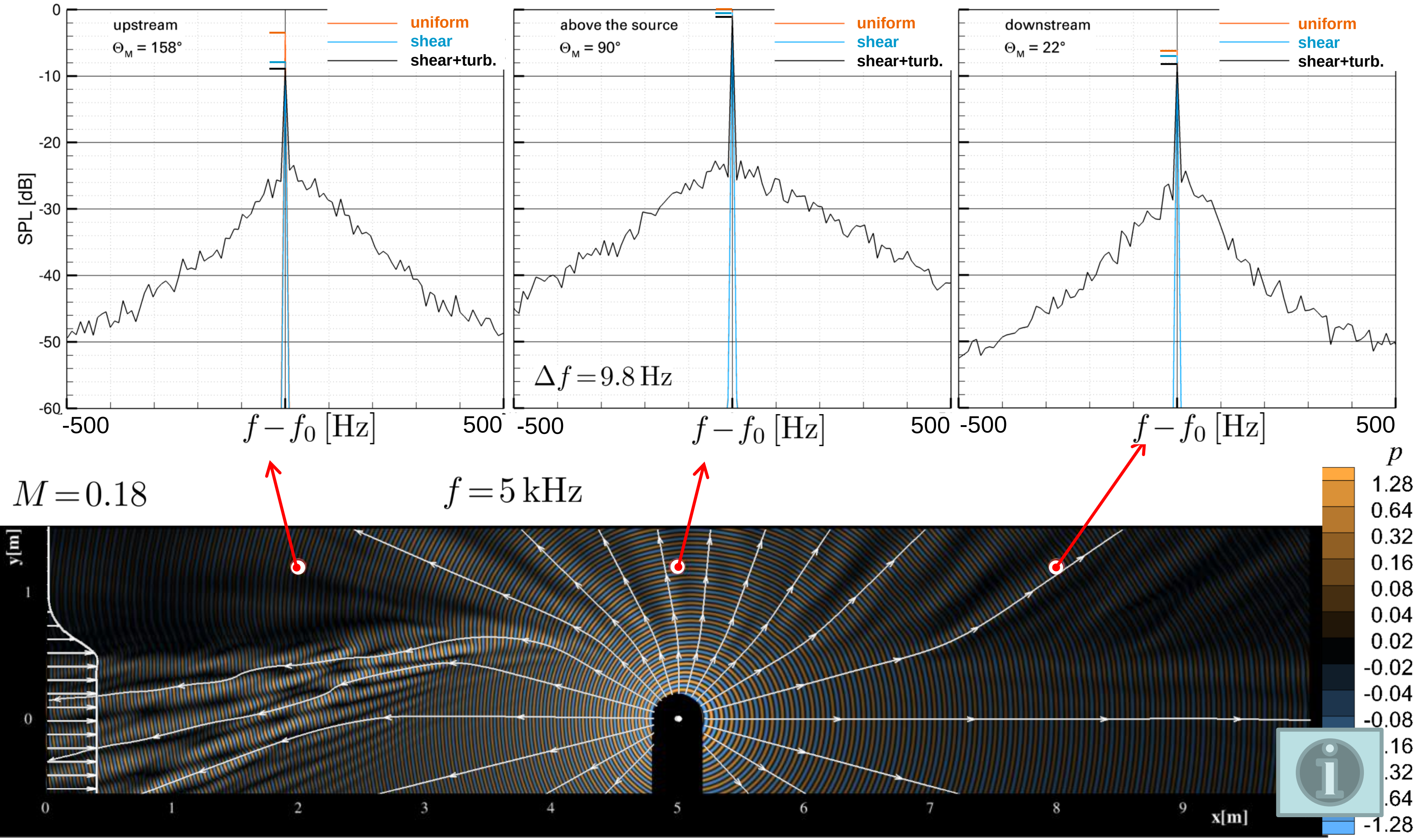
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Streuung durch Turbulenz

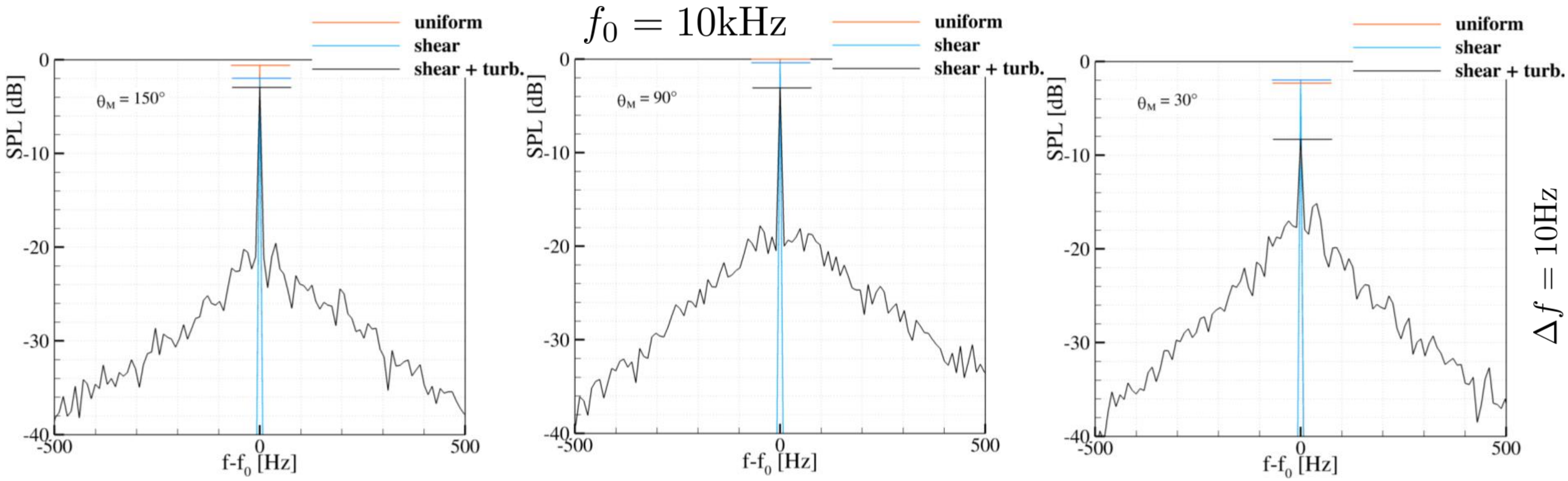
$M = 0.18$ $f = 5\,\mathrm{kHz}$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl
Streuung durch Turbulenz

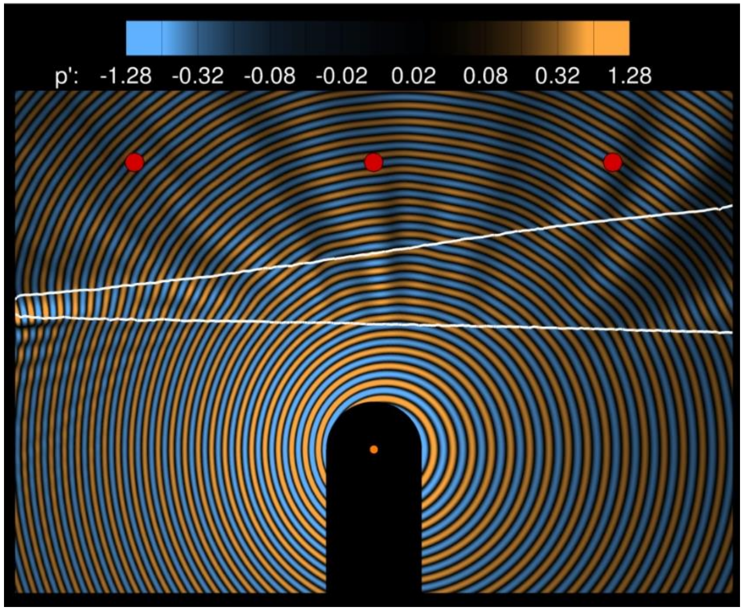


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl
Streuung durch Turbulenz



CAA Simulation:
DLR - PIANO Code:

- DRP Verfahren
- LEE (linearisiert um turbulent flukt. Grundströmung!)
- 4D Turbulenzmodell in Scherschicht (FRPM)



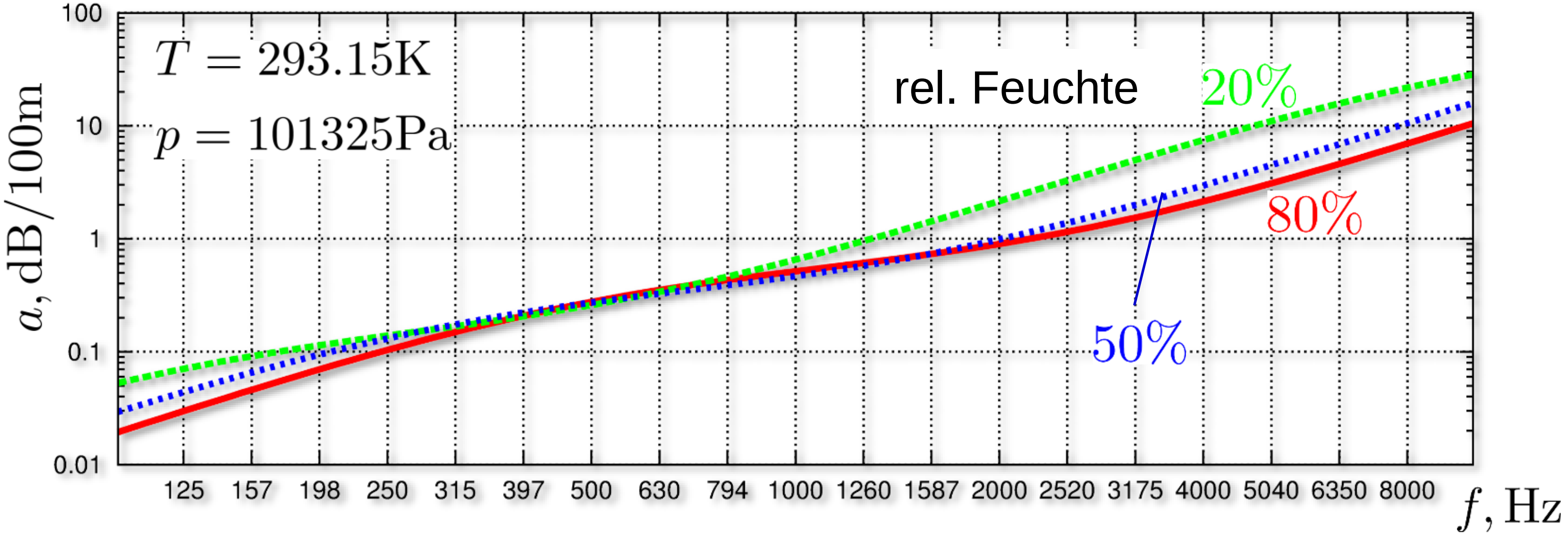
Tonstreuung durch Turbulenz:

- Amplitudenverlust
- Umverteilung von Schallleistung in Seitenbänder (breitbandig)
- frequenzabhängig!

Diss. J. Jiao, 2017

2.4.2.3 Weitere Korrekturen bei Akustischen Messungen

- Korrektur der atmosphärischen Absorption (Dämpfung) a von Schall (stark frequenzabhängig und stark beeinflusst von Luftfeuchte). Hoch-frequente Signale werden stärker gedämpft als niedrigfrequente Signale (ISO 9613-1:1993, Berechnung z.B. http://sengpielaudio.com/Rechner-luft.htm)



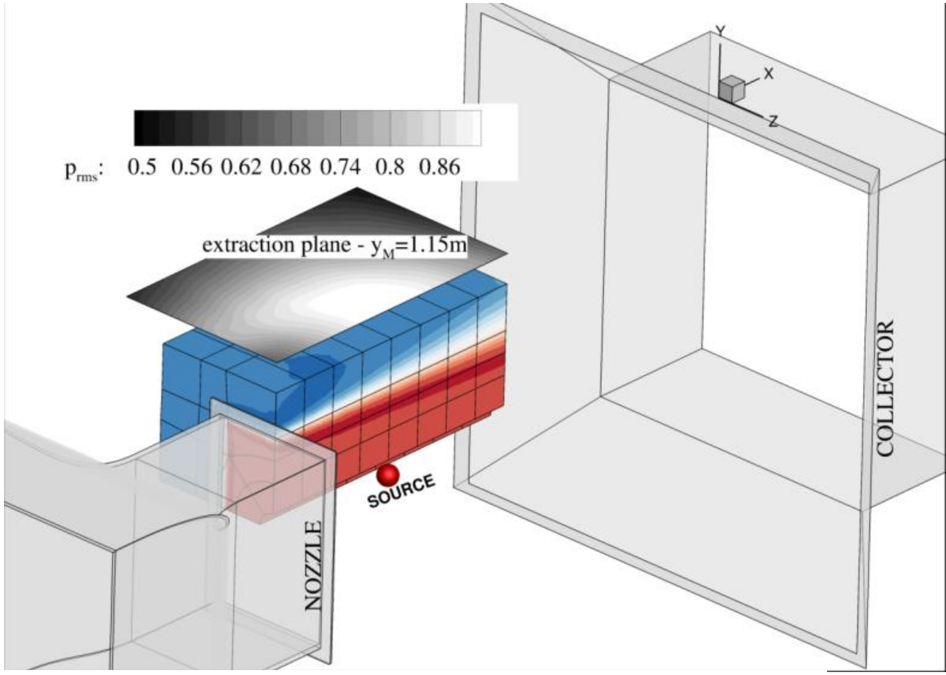
- Korrektur der Bodenabsorption von Schall bei Überflugmessungen (stark abhängig von Frequenz, Einfallswinkel, Temperatur, Luftfeuchte, Bewuchs). Signale mit flachem Einfallswinkel erfahren stärkere Dämpfung als solche mit steilem Einfallswinkel

- Freifeldkorrekturen entsprechend (326)

2.5 Ausblick: Verschmelzung von Experiment und num. Simulation

2.5.1 Nutzung von numerischer Simulation für akustische Windkanalkorrekturen

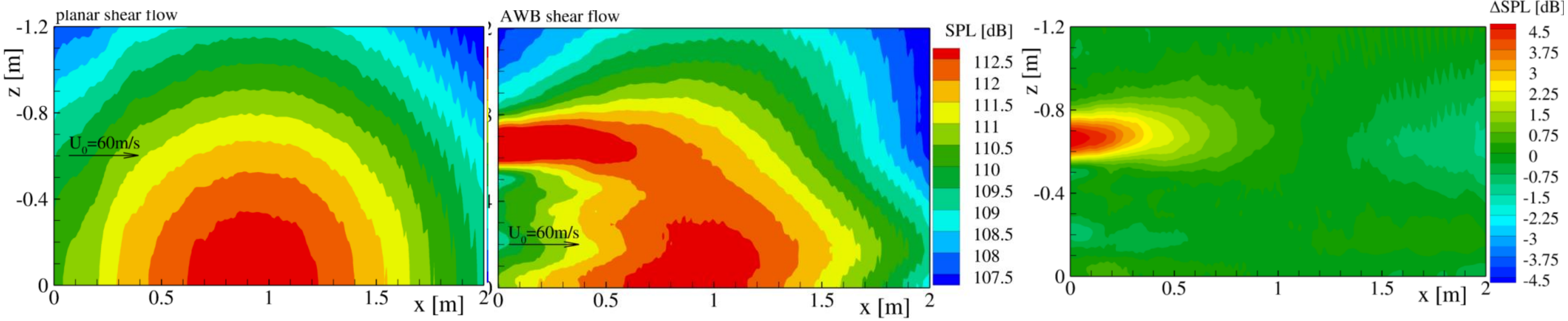
Nutzung numerischer Simulation + HPC zur Korrektur (in)stationärer Windkanalscherschichteffekte



Ausweitung des Bereichs von Empfangspositionen durch Verwendung numerischer Simulation

ebene Scherschicht | AWB Scherschicht | Differenz (Korrektur)

60m/s



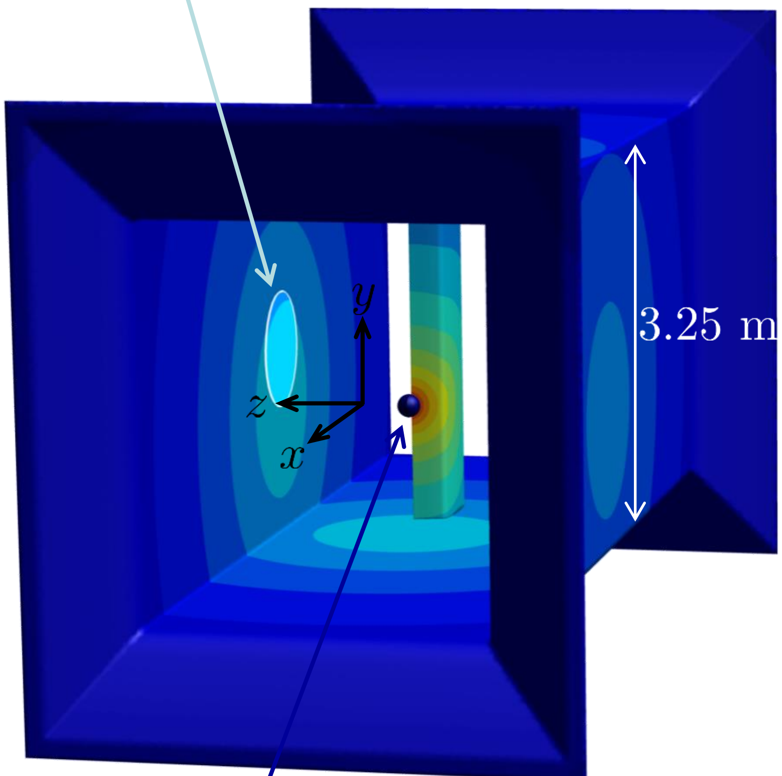
$$f_0 = 10\text{kHz}$$

S. 247

Diss. J. Jiao, 2017

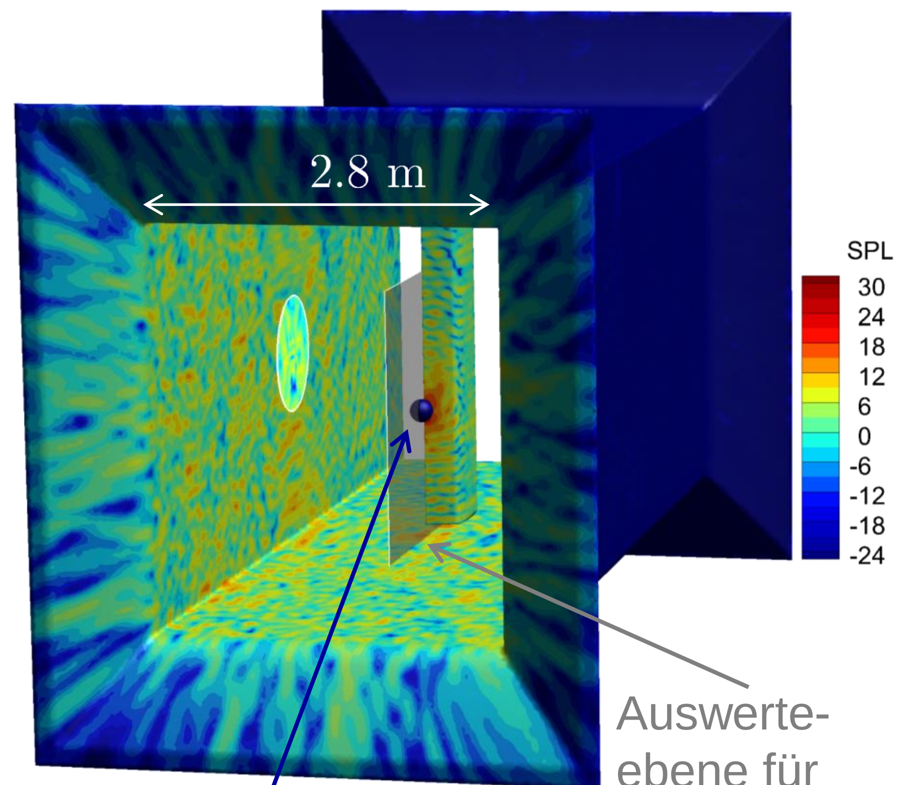
Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallender Oberflächendruck einer Monopolquelle (Annahme für beamforming mit kreisförmigen Seitenwandarray)



Monopol 1000 Hz

Tatsächlicher Oberflächendruck in geschlossener Messstrecke



Auswerte-ebene für beamforming

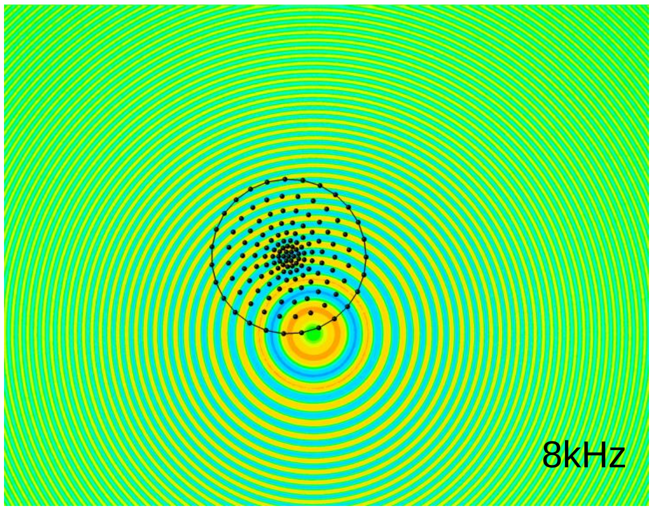
Monopol 1000 Hz

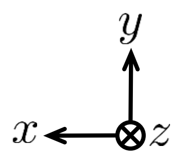
M. Lummer 2018

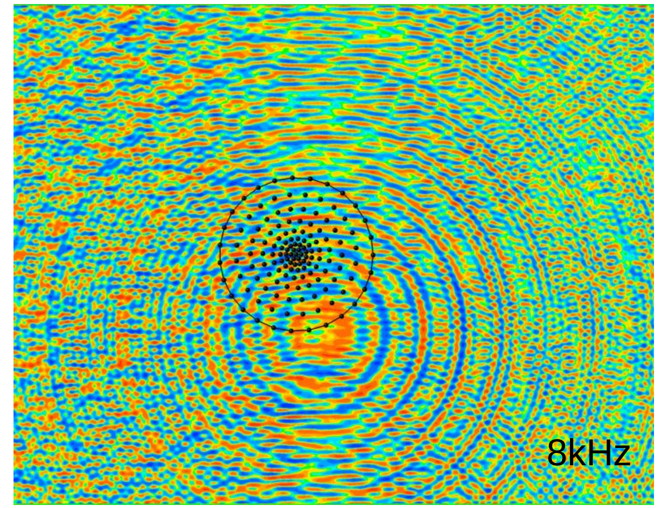
Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallendes Monopoldruckfeld
(was Arrayalgorithmus erwartet)

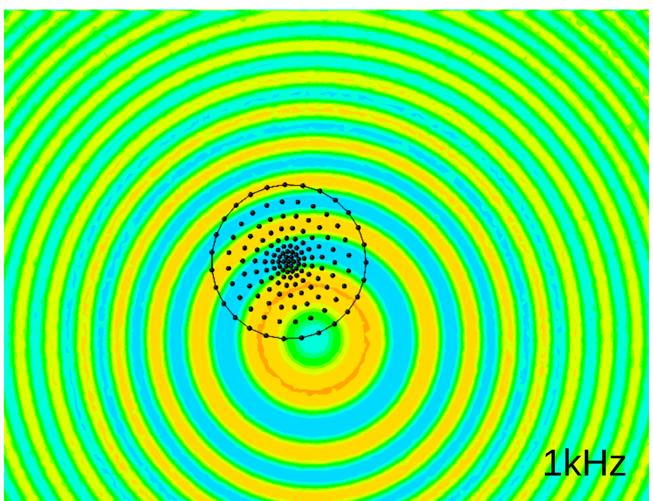
tatsächliches Monopoldruckfeld



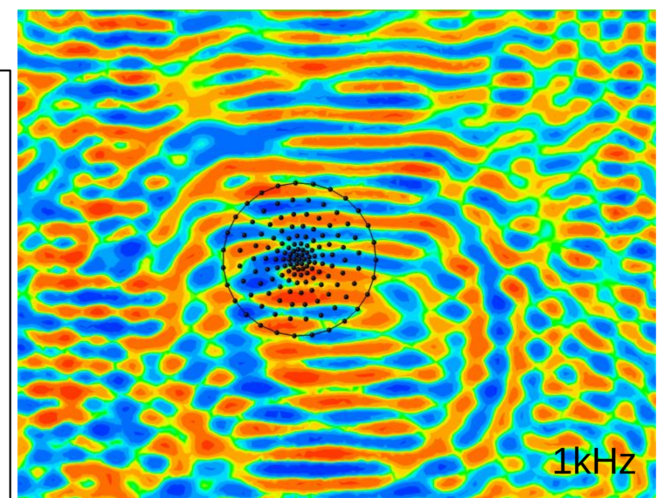




Fast Multipole BEM (FMCAS)



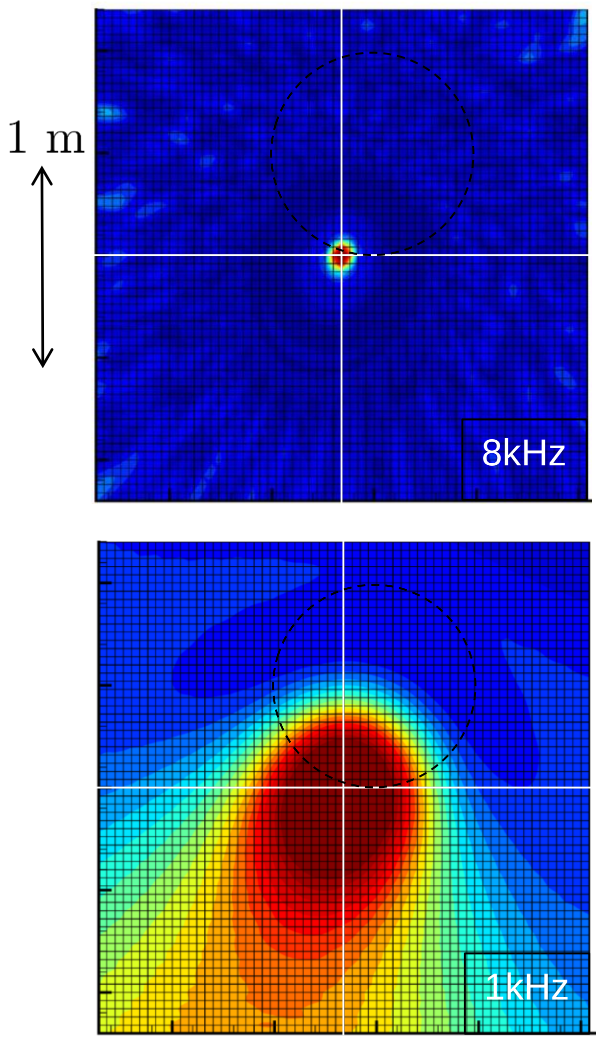
Künftig: numerische Simulation+HPC zur Berechnung der exakten Green‘s Funktion inkl. aller Reflexionen: **Säuberung von WK-Effekten**



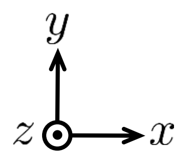
M. Lummer 2018

Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallendes Monopoldruckfeld
(was Arrayalgorithmus erwartet)



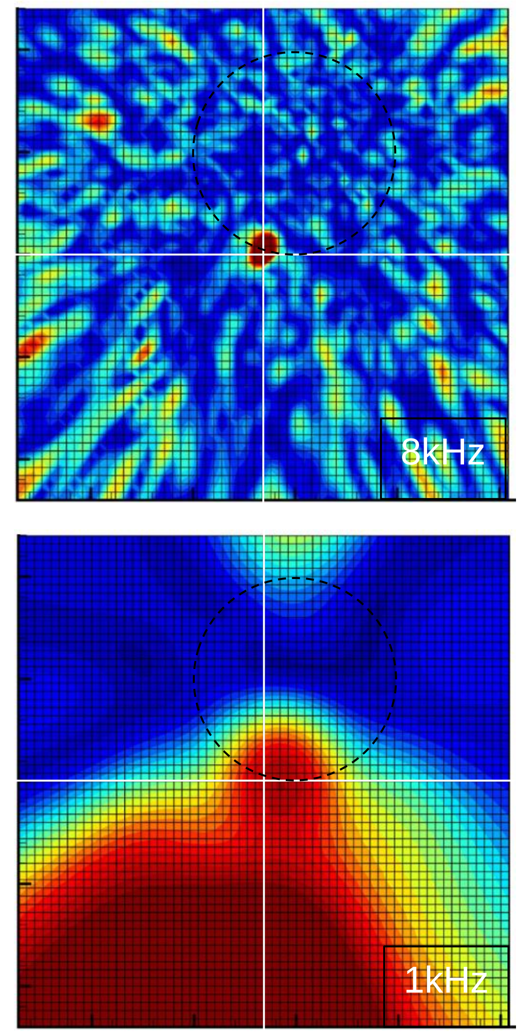
Acoustic Image

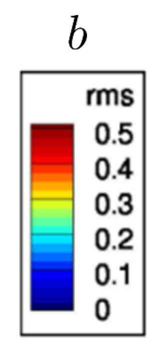


Fast Multipole
BEM (FMCAS)

Künftig: numerische Simulation+HPC zur Berechnung der exakten Green‘s Funktion inkl. aller Reflexionen: **Säuberung von WK-Effekten**

tatsächliches Monopoldruckfeld

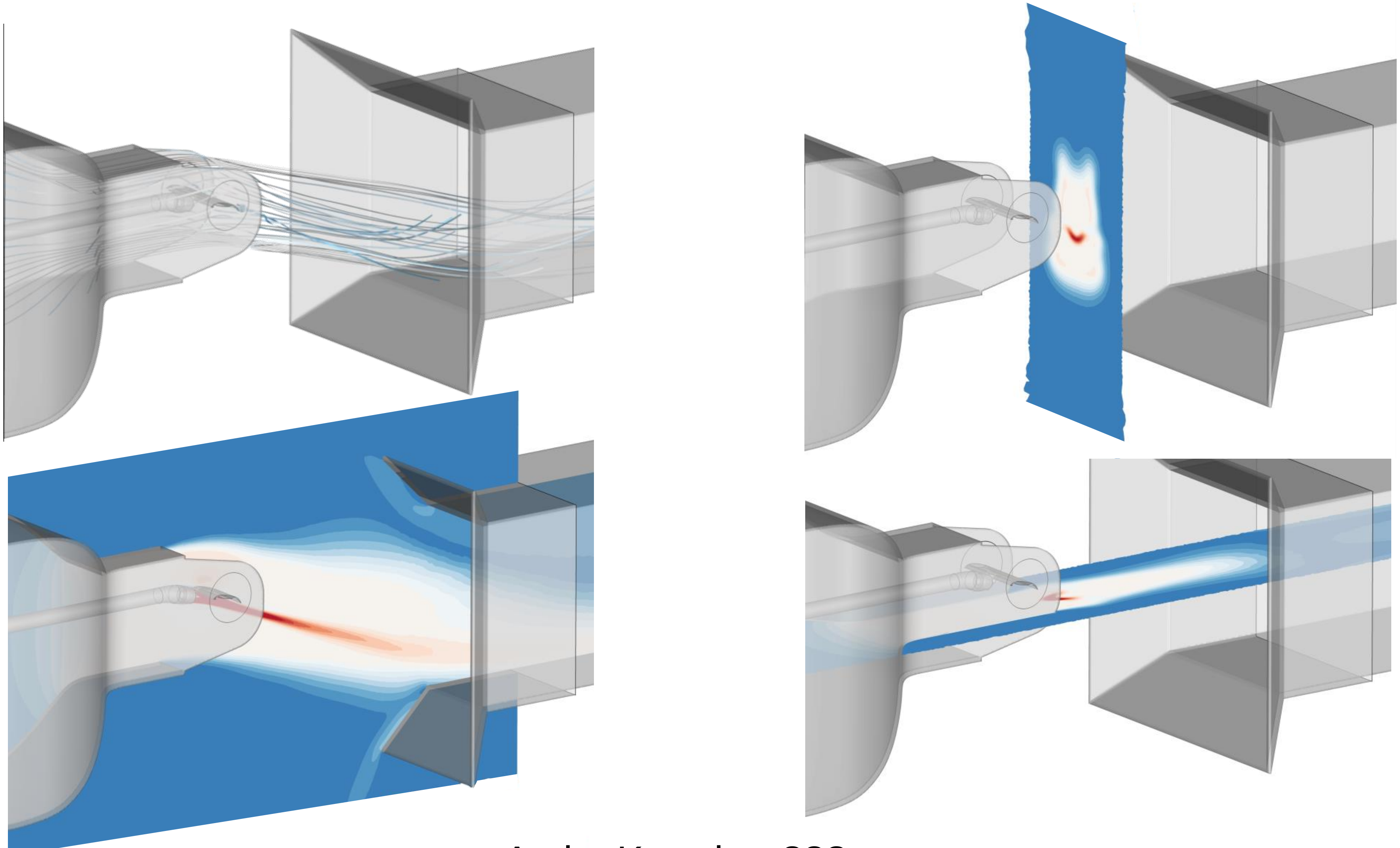




M. Lummer 2018

2.5.2 Simulation des gesamten Windkanalexperiments

Test relativ großer Modelle in offenen Windkanälen
(Ziel realisierung hoher Re-Zahlen)



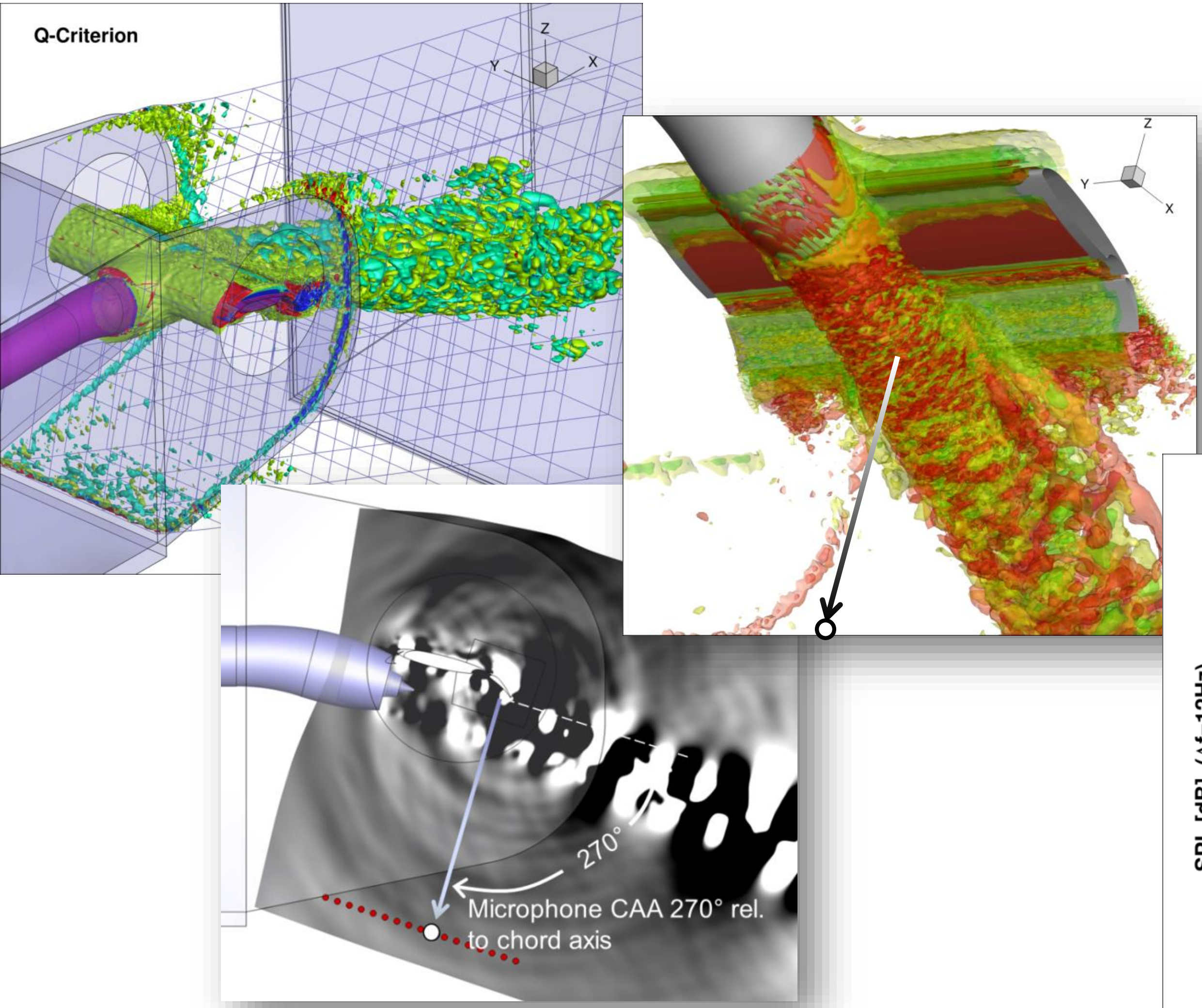
Amiet Korrektur???

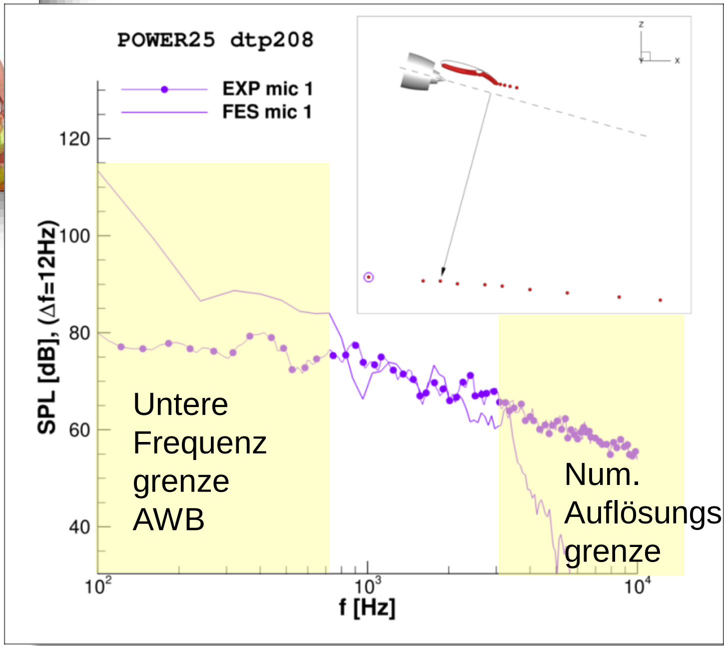
D. Boenke, J. Delfs, Lufo Power25 2017

CAA eines UHBR Zweistromstrahls in Kombination mit 2D Hochauftriebsflügel in AWB

PIANO: FES=„Forced Eddy Simulation“

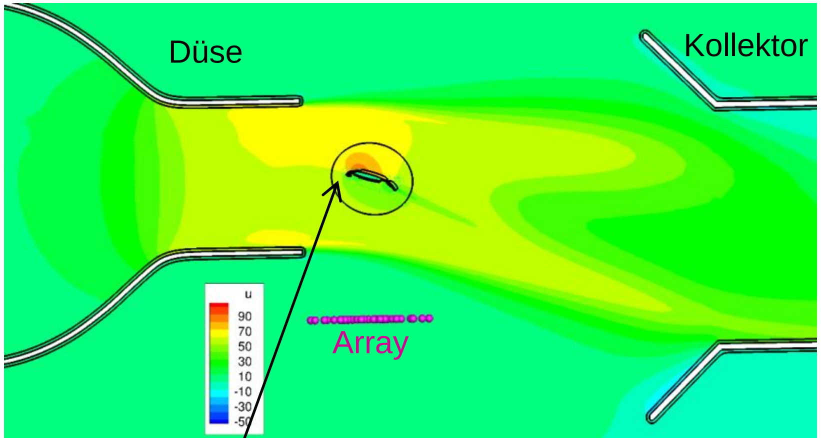
Simulation Modell +
Testumgebung
Validierung an Rohdaten
„do the whole thing“

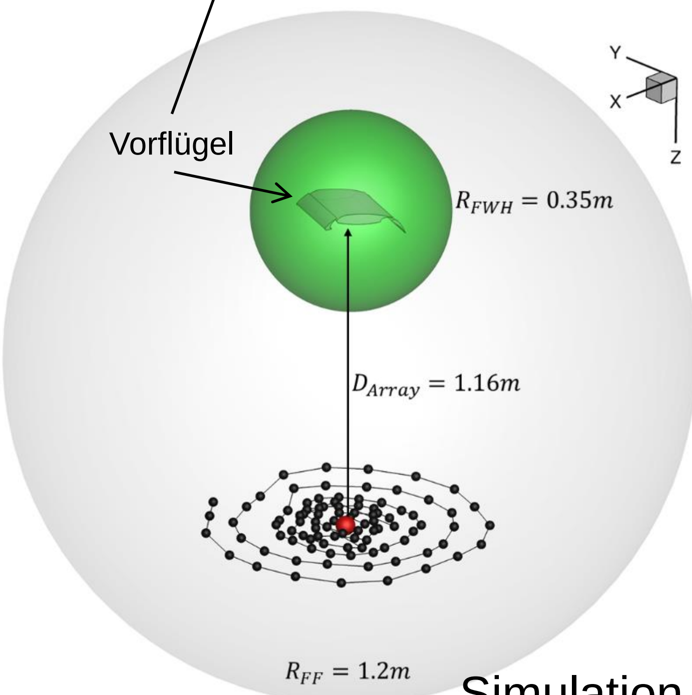


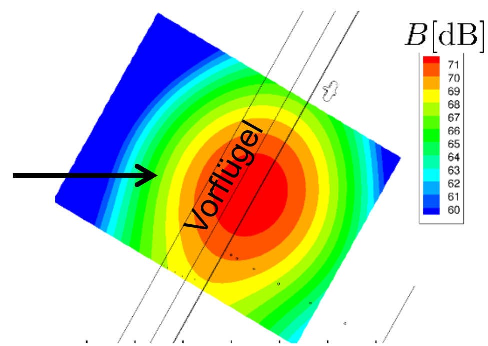


A. Neifeld, R. Ewert, EU-JERONIMO 2017

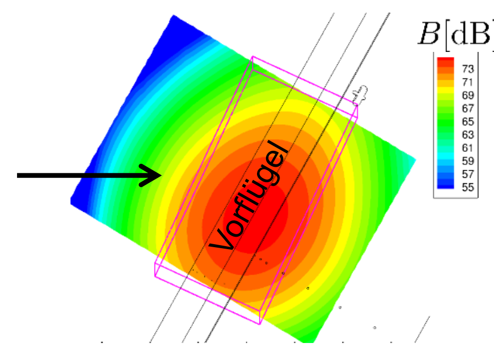
CAA von Vorflügelhaltergeräusch an schiebendem Hochauftriebsflügel in AWB







experimentelle Mikrophondaten



CAA-simulierte Mikrophondaten

Simulation Modell + Testumgebung + numerisches beamforming
„do the whole thing“

S. Haubold, Masterarbeit 2021

The End

Anhang

Einfache Vorhersage Propellerschall auf Basis (276)

Input:

- diameter [m] $D = 2R_t$
- blade count B
- blade rel. thickn. $\bar{t}^*$
- thrust coefficient c_T
- power coefficient c_P
- rpm [1/s] N
- receiver distance x
- polar angle φ
- tip Mach no. M_t
- prop thrust T_B
- power [W] P

$$c_T = \frac{T_B}{\rho_\infty N^2 D^4}$$

$$c_P = \frac{P}{\rho_\infty N^3 D^5}$$

Output:

$$|\hat{p}_{nB}|^2 \simeq \left[\frac{R_t}{x}\frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\pi} nBM_t^2\right]^2 \Bigg\{ \frac{1}{\pi^4}\Bigg[3M_t\tilde{c}_T\cos\varphi R_T^{*2} J_{nB}(nBM_tR_T^*\sin\varphi) - \frac{4}{\pi}\tilde{c}_P R_P^* J_{nB}(nBM_tR_P^*\sin\varphi)\Bigg]^2 + \left[\frac{nB}{4}B\bar{t}^*\left(\frac{\bar{l}}{R_t}\right)^2 J_{nB}(nBM_tR_h^*\sin\varphi)\right]^2\Bigg\}$$

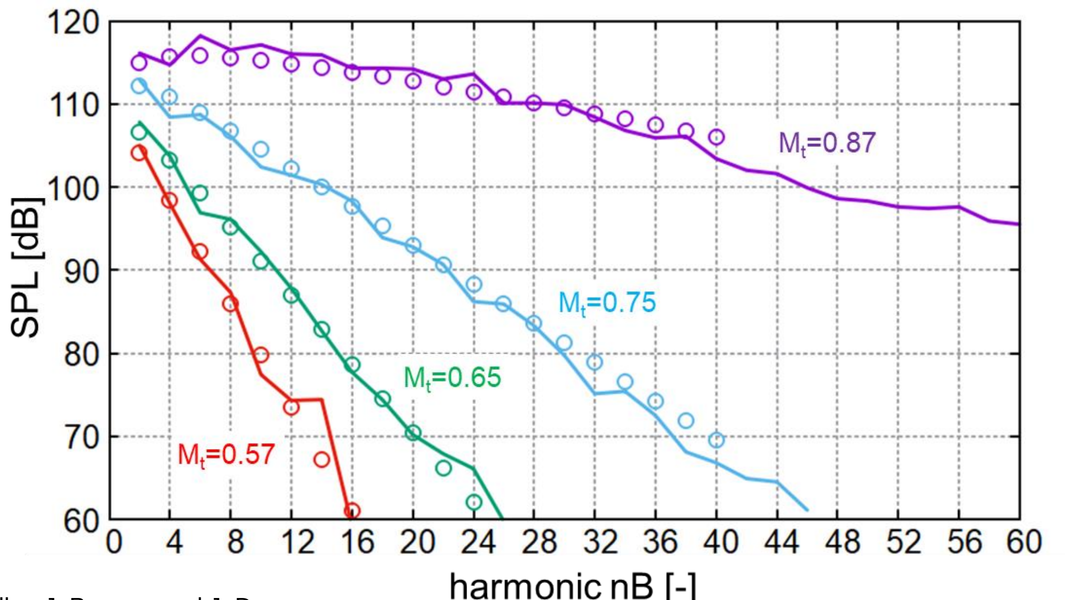
$$R_T^* = (nB+3)^{-\frac{1}{nB+2}}$$

$$R_P^* = (nB+2)^{-\frac{1}{nB+1}}$$

$$R_h^* = (nB+1)^{-\frac{1}{nB}}$$

$$\tilde{c}_P = 1.3\ c_P$$

$$\tilde{c}_T = 0.9\ c_T$$



Messdaten (Linien): W. Dobrzynski, H. Heller, J. Powers, and J. Densmore, DFVLR-IB 129-86/3, FAA Report No. AEE 86-3, DLR / FAA, 1986.