

Mathematically analysis of measurement instrumentation on the test benches at DLR/Lampoldshausen

Stuchlik, Wolfgang*
Neumann, Heike†

German Aerospace Center (DLR)
Institute of Space Propulsion
74239 Hardthausen, Germany

May 2014

1 Abstract

The aim of this paper is to present methods to objectively assess the electronics required in measurement and test engineering. We will evaluate mathematical methods and results. With the help of analytical statistics measurement technics will be analyzed and evaluated. Measurements are made, recorded and interpreted. The interpretation of the measurements is based on results which have been calculated using statistical methods. We will

have a closer look at the separate parts of a measurement chain. Every measurement chain consists of the same components. These components are delivered by a manufacturer in different quality. Sometimes buying less expensive equipment can

turn into an expensive investment after brought into service. Even good quality equipment, when used in the wrong way, can supply us with wrong or pure results. The presentation will:

- show how the electrical equipment and complete measurement chains on test benches can be analyzed
- give present mathematical methods and how they can be put into practice
- present a mathematical model of a measurement chain and analyze the quality of the chain using the GUM method

Denkanstöße:

- Warum Messen wir? Wir messen, weil wir den notwendigen bzw. benötigten Wert nicht kennen.
- Jeder Messwert bzw. auf Messwerten basierende Daten müssen mit ihrem Fehler- bzw. den Einzelfehlern angegeben werden.
- Warum messen wir immer falsch? Weil nur nach unendlich vielen Messungen der wahre Wert, über die Berechnung des arithmetischen Mittelwertes, bestimmbar ist.
- An was erkennen wir eine plausible Messung? Wir erkennen es an der Normalverteilung. Keine Streuung bedeutet, es ist keine statistische Auswertung möglich. Messwerte streuen, weil jeder Wert vom gemessenen Wert zuvor unabhängig ist.
- Der wahre Wert kann nie gemessen werden, jedoch können wir angeben, mit welcher Unsicherheit wir gemessen haben.
- Wir müssen zwei Unsicherheitstypen voneinander unterscheiden, die eine Unsicherheit, die sich aus der Mehrfachmessung ergibt und die, die sich aus den Kalibrierscheinangaben ergibt. Die resultierende Unsicherheit ist die geometrische Addition beider Größen.
- Wie ist das mit der Unsicherheit? Nehmen wir alle möglichen, maximalen Einzelfehler oder bewerten wir den Einzelfehlertyp? Gauss versus GUM. Nur wer beide Methoden versteht und an-

*Wolfgang.Stuchlik@dlr.de

†Heike.Neumann@dlr.de

wendet, interpretiert eine Messung richtig!

2 Gauss versus GUM

Warum benötigen wir ein neues Verfahren, wenn die Gauss'sche Fehlerfortpflanzungstheorie bereits vorhanden ist?

Das Gauss'sche Verfahren summiert alle Quadrate der Einzelfehler und radiziert die Gesamtsumme. Im schlechtesten Fall wirken alle Fehler in eine Richtung. Dies ist richtig, jedoch führt es zu einem höheren, theoretischen Fehler, der in der Praxis nicht auftreten muss. Gauss bewertet nicht die Fehler, er behandelt jeden Teilfehler mit gleicher Wichtigkeit.

Das GUM-Verfahren betrachtet nicht die Einzelfehler, sondern die Einzelunsicherheiten. Jede Unsicherheit wird nach ihrem Charakter bewertet und somit sind die dominanten Fehler erkennbar.

Eine Brücke wurde mit einer Traglast von 20t ausgelegt. Es kommt ein LKW mit einem Gewicht von 20t und möchte über die Brücke fahren. Zufällig steht Herr Gauss an der Brücke und so kann der LKW-Fahrer ihn fragen, ob die Brücke mit einer Traglast von 20t auch ein Gewicht von 20t tragen wird.



Gauss sagt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% wird die Brücke nicht zusammenfallen.

Diese Aussage ist für unsere Prozesse an den Prüfständen nicht akzeptabel, weil sie nur für Unsicherheit sorgt.

Diese Vorgehensweise führt zu überzogenen Toleranzanforderungen und Sicherheitsfaktoren, um Risiken zu vermeiden. Letztendlich sind wir auf der sicheren Seite, jedoch wird ein hoher Aufwand betrieben, der die Kosten durch eine aufwendigere Herstellung und Installation erhöht. Das GUM-Verfahren ist eine logische Forderung, um Sicherheit beim Messvorgang und bei Interpretation von Messergebnissen zu erhalten.

3 Analyse am Prüfstand P1.0



Beim Prüfstand P1.0 beim DLR in Lampoldshausen handelt es sich um den kleinsten Prüfstand, der in der Abteilung Versuchsanlagen (VEA) für Tests, unter simulierten Höhenbedingungen (im technischen Vakuum), genutzt wird. Kleintriebwerke bis zu einem Schub von 600 N können hier getestet werden. Als so genannte lagerfähige Treibstoffe kommen Monomethyl-Hydrazin (MMH) und Distickstofftetroxid (N_2O_4) zur Anwendung. Der Dampferzeuger der Höhenanlage (evakuiert die Vakuumkammer) wird mit Alkohol und flüssigem Sauerstoff (LOX) betrieben.

3.1 Die Messartenvielfalt

Wenn ganz allgemein die Sensorik nur nach den Wandlerverfahren betrachtet wird, dann ist hiermit eine Übersicht gegeben. Am Prüfstand P1.0 werden zum Testen des Triebwerks folgende Sensortypen eingesetzt:

- Absolutdruckaufnehmer
- Relativdruckaufnehmer
- Differenzdruckaufnehmer
- dynamische Druckaufnehmer als HF Daten
- Temperaturlaufnehmer
- Dehnungsmessstreifen (DMS) an Flächen
- Kraftmessung des Triebwerkschubes
- Potentiometrische Messungen bei Winkelpositionen
- Vibrationsaufnehmer
- Gaskonzentrationsaufnehmer
- Rotationen (turns per minute)
- Volumenströme mittels Messturbinen

Wie zu ersehen ist, wird bereits durch die Vielzahl der Messwandlertypen ein erhöhter Mess- und Verstärkeraufwand gefordert. Die Besonderheit der Messungen besteht darin, dass die jeweiligen Messungen für bestimmte Messbereiche optimiert werden müssen.

3.2 Druckaufnehmer

Exemplarisch die Messstelle xyz im Bereich von: 0 - 10bar

Ein maximaler Fehler, bedingt durch das Kalibrierverfahren von:

3.3 Temperaturlaufnehmer

3.3.1 Widerstandsthermometer

Exemplarisch die Messstelle xyz im Bereich von: 300 - 1000K

Ein maximaler Fehler, bedingt durch das Kalibrierverfahren von:

3.3.2 Thermoelemente

Exemplarisch die Messstelle xyz im Bereich von: 300 - 1000K

Ein maximaler Fehler, bedingt durch das Kalibrierverfahren von:

Für die Messstellen, die mit Thermoelementen bestückt sind, muss der maximale Fehler der Temperaturmessstelle berücksichtigt werden. Bei Geräten der Firma Isotech wird laut Datenblatt eine Abweichung von: $0,01^{\circ}C$ angegeben.

3.4 Verstärkertechnik

Am Prüfstand P1 wurde der Verstärkertyp ICV140 der Firma ADAS analysiert und untersucht.



Es wurden folgende mögliche Quellen von Signalbeeinflussungen identifiziert:

- Verstärkungsfaktor der ersten Stufe, mit einem maximalen Fehler von: 1Bit
- Verstärkungsfaktor der zweiten Stufe, mit einem maximalen Fehler von: 1Bit
- Offsetspannung, mit einem maximalen Fehler von: xmV
- Balance-Spannung, mit einem maximalen Fehler von: ymV
- AD Konvertierung, mit einem maximalen Fehler von: 2Bit
- Sensorstromspeisung, mit einem maximalen Fehler von: $1\mu A$
- Sensorspannungsspeisung, mit einem maximalen Fehler von: $1mV$

Die Signalbeeinflussung von Steckverbindern und dem Leitungswiderstand vom Sensor zum Verstärker kann vernachlässigt werden. Diese Dämpfungen sind, in Relation zum Eingangswiderstand des Verstärkers von $R_{IN} = 40M\Omega$, kleiner als 0,001%.

3.5 Genauigkeitsanalyse nach GUM

Die detaillierte Analyse und der Rechenweg nach der GUM Methode wird im Vortrag präsentiert, erklärt und dokumentiert.



Figure 1: follow and enjoy the presentation

4 Prüfung von Messreihen auf Normalverteilung

Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung:

$$f(x) \text{ für } \mu = 0, \sigma^2 = 1 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Die Normal- oder Gauss-Verteilung ist ein charakteristischer Typ stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Bedeutung der Normalverteilungsfunktion beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz.

Bei endlicher und positiver Varianz der Zufallsvariablen ist die Summe annähernd normalverteilt, was die Sonderstellung der Normalverteilung erklärt. Die Abweichungen der gemessenen Werte vieler natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftlicher Vorgänge vom Mittelwert lassen sich durch die Normalverteilung entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben.

1. These: In der Messtechnik wird häufig eine Normalverteilung angesetzt, die die Streuung der Messfehler beschreibt. Hierbei ist von Bedeutung, wie viele Messpunkte innerhalb einer gewissen Streubreite liegen.

2. These: Sind Messdaten nicht normalverteilt, so können wir daraus schließen, dass mindestens ein dominanter Einfluss vorhanden ist. Dieser Einfluss ist ein Messfehler, den es einzugrenzen und zu analysieren gilt.

3. These: Entsprechen die Messdaten der Gauss'schen Normalverteilungsfunktion, dann ist die Qualität der gemessenen Daten sehr hoch. Das Messprinzip und die technische Realisierung sind empfehlenswert.

Zur Aussage über die Deckungsgleichheit der zu untersuchenden Funktion gegenüber der Normalverteilungsfunktion mittels Histogramm, P-P-Plot oder Q-Q-Plot lassen sich lediglich nur qualitative Aussagen machen.

4.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie

von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben. Solche Versuchs-Serien werden auch Bernoulli-Prozesse genannt. Die Größe p ist die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem Versuch von n -Versuchen.

Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$B(K | p, n) = B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$B_{n,p}(k) = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

- für $k = 0, 1, \dots, n$
- n - Anzahl der Versuche
- $p \in [0, 1]$
- k - Anzahl der Erfolge

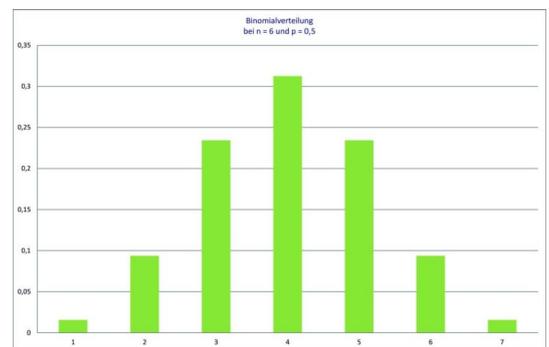


Figure 2: Wahrscheinlichkeit bei 6 Versuchen

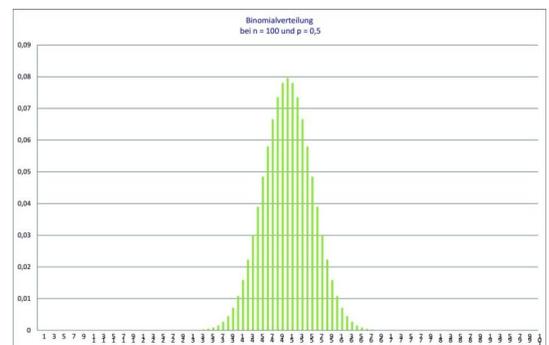


Figure 3: Wahrscheinlichkeit bei 100 Versuchen

Fazit: Je mehr Versuche durchgeführt werden, desto mehr nähern wir uns der Normalverteilung.

4.2 Satz von Moivre-Laplace

Der Satz von Moivre ist ein Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Nach diesem Satz konvergiert die Binomialverteilung für $n \Rightarrow \infty$ und Wahrscheinlichkeiten im Bereich von $0 < p < 1$ gegen die Normalverteilung. Bei einem großen Stichprobenumfang kann die Normalverteilung als

Näherung für die Binomialverteilung verwendet werden, was vor allem in der Praxis bei Hypothesentests Anwendung findet. Dabei handelt es sich um einen Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes.

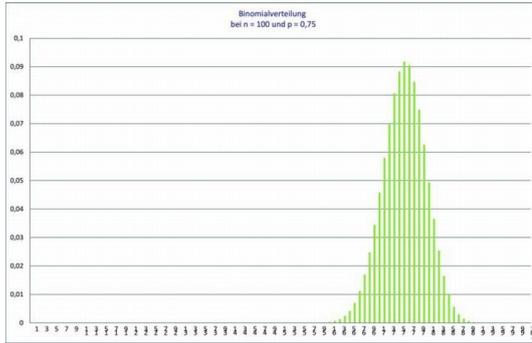


Figure 4: Der Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgröße p auf die Charakteristik

Fazit: Wird der Parameter p verändert, so hat es keinen Einfluss auf die Funktionscharakteristik. Der Wert p wurde vom Wert 0,5 auf 0,75 verändert, jedoch wird dadurch nicht die typische Verteilung der Daten verändert.

Der zentrale Grenzwertsatz

Die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes lautet: Die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ von Z_n für $n \Rightarrow \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardverteilung konvergiert.

Für jedes reelle z gilt (P entspricht der Wahrscheinlichkeit):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

$$\text{wobei: } \bar{x}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

dem Mittelwert der ersten n Summanden der Zufallsvariablen entspricht.

4.3 Charakteristische Größen der Normalverteilung

- Zufallsvariable $x \in R$

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt. Er ergibt sich bei unbegrenzter Wiederholung eines zugrunde liegenden Experiments als Durchschnitt der Ergebnisse.

- Dichtefunktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte

über ein Intervall [a,b] ergibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable mit dieser Dichte einen Wert zwischen a und b annimmt.

- Verteilungsfunktion $\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \right) \right]$

Als Fehlerfunktion oder Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet man in der Theorie der Speziellen Funktionen das Integral:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

erf(a,b) ist der Verteilungsfunktion der Normalverteilung ähnlich. Normalverteilung:

$$N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

$$\text{Substitution: } \tau = \frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \Rightarrow dt = \sigma\sqrt{2}d\tau$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\tau^2} \cdot \sigma\sqrt{2}d\tau$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\tau^2} d\tau + \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\tau^2} d\tau \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\tau^2} d\tau \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\tau^2} d\tau \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(0, \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- Erwartungsfunktion $\mu \in R$

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Der Erwartungswert ist null, d.h. der Erwartungswert μ ist bei $n = +\infty$ gleich dem arithmetischen Mittelwert x. Für die Erwartungswertfunktion E(x) gilt: E(x) = 0 in den Grenzen $[-\infty, +\infty]$.

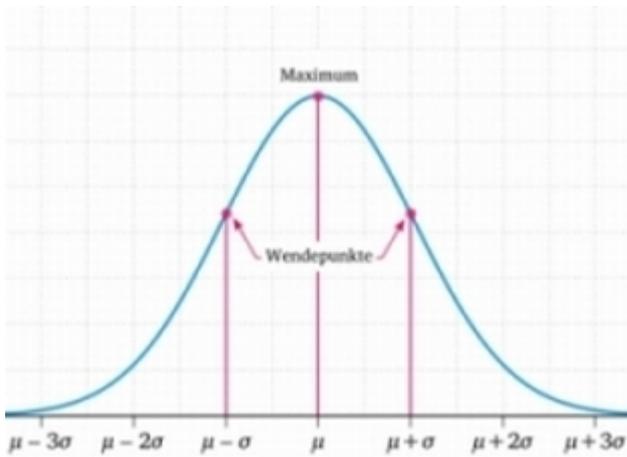


Figure 5: Der Erwartungswert μ ist gleich null, wenn er den maximalen Wert erreicht.

- Median μ

Wenn in ein Dorf, indem bereits 100 Familien wohnen, 5 neue Familien einziehen, die jeweils mehrere Millionen von Euro besitzen, so macht der Mittelwert der Einkommen aller Dorfbewohner praktisch keinen Sinn. Der Erwartungswert ist in diesem Fall keine nützliche Maßzahl, um die wahre finanzielle Situation des Dorfes zu beschreiben. In diesen Fällen ist der Median nützlicher, als der arithmetische Mittelwert.

Der Median ist der Mittelwert einer nach der Größe geordneten Reihe von zufälligen Zahlen. Die Anzahl der Zahlen muss in diesem Fall ungerade sein. Bei einer geraden Anzahl von zufälligen Zahlen wird der arithmetische Mittelwert der beiden mittleren Zahlen gebildet.

- Modus μ

Der Modus ist der Wert, der am häufigsten in einer Zahlenreihe vorkommt.

- bei einer empirischen Häufigkeitsverteilung der häufigste Wert,
- bei einer diskreten Zufallsvariable die Ausprägung mit der größten Wahrscheinlichkeit und
- bei einer stetigen Zufallsvariable die Maximumstelle der Dichtefunktion.

In der Messtechnik ist jedoch Vorsicht geboten. Übersteuerte Verstärker liefern ein konstantes Signal und zwar die maximal mögliche Spannung. Dieser Wert ist ein Alarmsignal für eine Anomalie. Ähnlich verhält es sich bei einem Kurzschluss. Der

Kurzschluss muss nicht unbedingt ein Schluss zwischen Signalleitung und Nullpotential sein.

- Varianz $\sigma^2 > 0$

Ist die Varianz gleich null, so ist die Streuung gleich null. Ohne Streuung kann es keine statistische Auswertung geben. Zahlenreihen, besonders Messwertreihen, die nicht streuen verhalten sich anormal. Bei der Berechnung der Varianz wird von den einzelnen Daten jeweils der Mittelwert abgezogen und dann jede dieser Differenzen quadriert. Das Quadrieren bringt allerdings ein Problem mit sich. Nach dem Quadrieren ist die Einheit der Daten auch quadriert. Daher ist die Varianz physikalisch schwierig zu interpretieren. Was sind bar^2 ? Das Problem wird gelöst, indem die Wurzel aus der Varianz gezogen wird. Dadurch erhält man ein Abweichungsmaß, das wieder in der gleichen Einheit vorliegt wie die ursprünglichen Daten, z.B. bar. Dieses Maß heißt Streuung oder Standardabweichung.

- Schiefe = 0

- Wölbung = 0

- Entropie = $\frac{1}{2} \ln(2\pi e \cdot \sigma^2)$

Die Entropie ist ein Maß für die Unsicherheit, die mit einer Zufallsvariable verbunden wird. In der Digitaltechnik hat jede Informationsquelle einen begrenzten Zeichenvorrat, da die mögliche Darstellung von der Anzahl der verfügbaren Bits abhängt. Ihre Maßeinheit in der Shannonschen Theorie ist das Bit, abgekürzt für binary digit.

4.4 Grafische Möglichkeiten auf Prüfung der Normalverteilung

4.4.1 Das Histogramm

Ein Histogramm ist die graphische Darstellung der Häufigkeiten eines metrischen Merkmals durch rechteckige Flächen über zuvor eingeteilten Klassen, wobei die Höhe der Rechtecke den Häufigkeiten entspricht. Mithilfe eines Histogramms lassen sich mehr Aussagen über Messdaten machen, als dies mit einer einfachen Wertetabelle möglich ist. So kann man unter anderem auch Aussagen über die Verteilung der Werte treffen.

Bei der Erstellung eines Histogramms gelten folgende Richtlinien:

- Die Anzahl der Klassen sollte erfahrungsgemäß zwischen 5 und 20 liegen. Ein guter Richtwert für die Anzahl der Klassen ist die Wurzel aus der Anzahl der betrachteten Daten.
- Bei der Einteilung der Klassen dürfen weder Lücken noch Überlappungen entstehen.
- Die Klassen sollten gleich groß sein. Die Klassenbreite errechnet sich daher folgendermaßen:
$$\text{Klassenbreite} = \frac{\text{Groesster Wert} - \text{kleinster Wert}}{\text{Klassenanzahl}}$$
- Die Breite der Rechtecke entspricht der jeweiligen Klassenbreite. Die seitlichen Ränder der Rechtecke befinden sich an den X-Koordinaten, die den jeweiligen Klassengrenzen entsprechen.
- Auf der Y-Achse wird die Häufigkeitsdichte aufgetragen. Diese berechnet sich aus der relativen Häufigkeit innerhalb einer Klasse dividiert durch die jeweilige Klassenbreite.

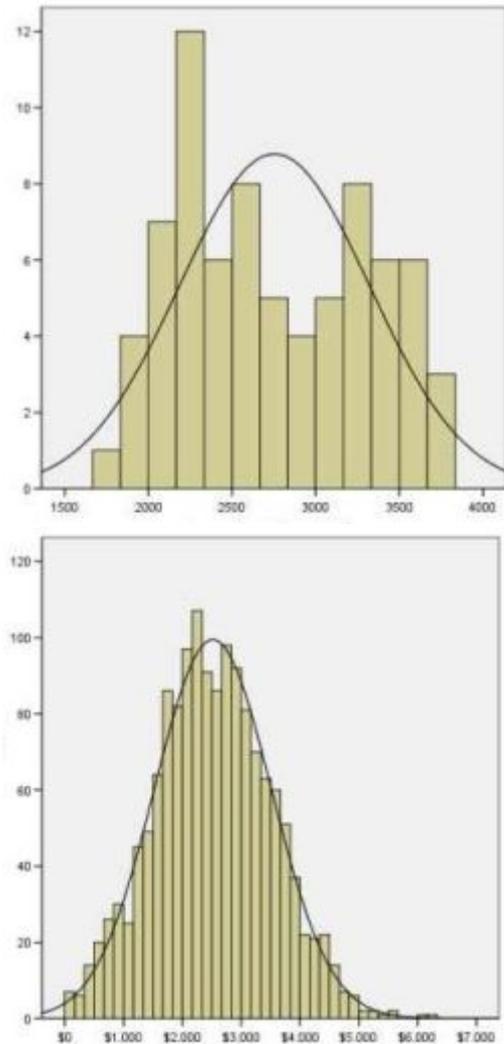


Figure 6: Optische Prüfung einer Normalverteilung mittels Histogramm

In der Abbildung **Histogramm** ist auf der linken Seite eine Verteilung mit starker Abweichung von der Normalverteilung dargestellt. Dies ist an den großen Zwischenräumen zwischen der Normalverteilungskurve und den tatsächlichen Werten zu erkennen. Im Gegensatz dazu zeigt die rechte Seite der Abbildung eine Verteilung, die der Normalverteilung sehr nahe kommt, da nur kleine Zwischenräume vorhanden sind.

4.4.2 Q-Q-Plot

Das Quantil Neben der Darstellung des Schwerpunkts einer gemessenen Datenreihe bzw. der Bestimmung der Mitte der Daten durch den arithmetischen Mittelwert oder den Median, können für eine adäquate Beschreibung noch weitere interessante Lagepunkte relevant sein. Die Verallgemeinerungen des Medians sind die Quantile.

- Quantile teilen die Daten in zwei, ungleich große Hälften.

- Für die Bestimmung von Quantilen ist es zunächst erforderlich, die Werte der Stichprobe vom kleinsten zum größten Wert zu sortieren.
- Als dritten Schritt wird für jede Beobachtung die relative Häufigkeit angegeben, das heißt der Anteil von Werten, die kleiner oder gleich dieser Beobachtung sind. Das kann dann graphisch als Treppenfunktion dargestellt werden, wobei jede Beobachtung einer Stufe entspricht.

Das Prinzip des Q-Q-Plots Das Prinzip des Q-Q-Plots (Quantil-Quantil-Plots) bei der Überprüfung von Messdaten auf Normalverteilung besteht darin, die beobachteten empirischen Quantile einer Messwertreihe gegen die hypothetischen Quantile bei Normalverteilung der Messwerte zu plotten. Ziel dieser Methode ist die graphische Einschätzung der Abweichung der beobachteten Verteilung von der Normalverteilung.

Ein einfaches Beispiel soll diese Analyseform veranschaulichen:

Über einen Tag wurde der Blutdruck gemessen. Ein Medikament gegen den hohen Blutdruck wurde alle vier Stunden eingenommen. Sind die gemessenen Daten normalverteilt?

- Messreihe über den Tag betrachtet - chronologisch geordnet: 168 184 172 173 150 155 163 164 151 146
- Zur Bestimmung der Quantile ordnen wir sie nach der Wertgröße
- 146 150 151 155 163 164 168 172 173 184
- Es werden die Daten für $n = 10$ Punkte im Intervall $[0; 1]$ gleich verteilt.
- 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95

Die Datenpunkte haben dann folgende Koordinaten (siehe Quantil Tabelle für die Normalverteilung - Kapitel 8.1):

- (0:05; 146) = (-1:645; 146)
- (0:15; 150) = (-1:0364; 150)
- (0:25; 151) = (-0:6745; 151)
- (0:35; 155) = (-0:3853; 155)
- (0:45; 163) = (-0:1257; 163)
- (0:55; 164) = (0:1257; 164)
- (0:65; 168) = (0:3853; 168)
- (0:75; 172) = (0:6745; 172)

- (0:85; 173) = (1:0364; 173)
- (0:95; 184) = (1:645; 184)

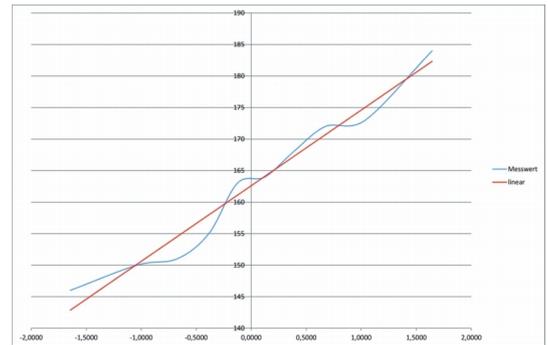


Figure 7: QQ-Plot der Blutdruckmessung - es ist zu erkennen, dass die Messdaten um die ideale Kurve, verstreut sind. Die Linienform wirkt sich ungünstig für die Analyse aus.

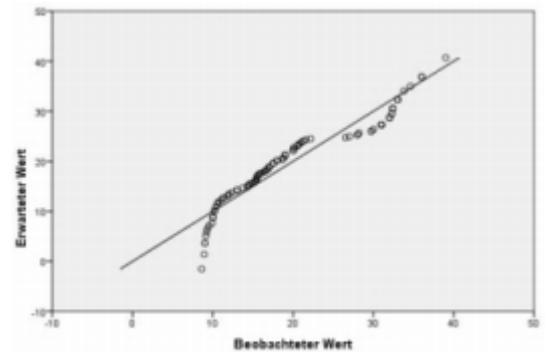


Figure 8: QQ-Plot Beispiel - die einzelnen Messpunkte sind besser zu erkennen

Dabei entspricht die X-Koordinate eines Punktes im Q-Q-Plot dem beobachteten Quantil. Die zugehörige Y-Koordinate stimmt mit dem bei Normalverteilung der Daten erwarteten Quantil überein. Wenn die entstehende Punktwolke auf einer Diagonalen liegt, sind die Messdaten normalverteilt. Weichen die Punkte aber systematisch von der Diagonalen ab, entspricht die empirische Häufigkeitsverteilung nicht der Normalverteilung.

Der Q-Q-Plot ist ein Indikator für eine mögliche Anomalie. Es ist nicht möglich quantitativ eine Aussage zu treffen, inwieweit die gemessenen Werte normalverteilt sind bzw. von der Normalverteilung abweichen. Für eine genauere Analyse sind die numerischen Verfahren vorzuziehen. Bereits einfache Berechnungen der Kurtosis und

der Wölbung geben Auskunft über die Abweichung vom Idealzustand. Eine Definition, ab welchem Wert (Kurtosis, Wölbung), die Daten als normalverteilt betrachtet werden können, hängt vom Einsatz der Daten ab und von der geforderten Präzision. Die Forderung nach zu hoher Präzision ist in der Praxis unökonomisch. Nicht so genau wie möglich, sondern so genau wie benötigt sollte die Prämisse sein.

4.4.3 P-P-Plot

Anders als bei Q-Q-Plot werden beim P-P-Plot Diagramm nicht die Quantile verwendet, sondern die Verteilungsfunktionen. Es wird die empirische kumulative Verteilungsfunktion und die theoretische kumulierte Verteilungsfunktion berechnet und im Diagramm gegen einander abgetragen. Die empirische kumulierte Verteilungsfunktion der gemessenen Daten entspricht der kumulierten relativen Häufigkeit eines Messwertes, d.h. $F(x) = P(X \leq x)$. Für normierte Messwerte ergibt sich somit als Verteilungsfunktion $F(x_i) = i/n$, wobei n die Anzahl der Daten ist. Für den Test auf Normalverteilung wird die zugehörige Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung als theoretische Verteilungsfunktion verwendet.

Kochrezept für die Erstellung eines P-P-Plots:

1. Sortieren der n Messdaten in aufsteigender Reihenfolge $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$
2. Berechnung des Mittelwertes $\hat{\mu}$ und der Standardabweichung $\hat{\sigma}$ der Daten als Schätzwert für μ und σ
3. Berechnung der normierten Variablen $z_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$
4. Bestimmung des Wertes der Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung für die Messwerte, $F(z_i)$, mit Hilfe der Tabelle der Standard-Normalverteilung
5. Berechnung der $u_i = i/n$
6. Auftragen der Paare $(u_i, F(z_i))$

Falls die Messdaten normalverteilt sind, sollten die Paare $(u_i, F(z_i))$ im Diagramm annähernd auf der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ liegen.

Auswertung des Blutdruckbeispiels mittels P-P

Plot

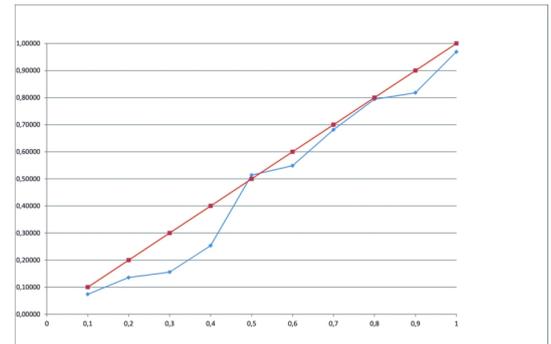


Figure 9: Darstellung einer Messwertreihe - Prüfung auf Normalverteilung

4.4.4 Boxplot

Der Boxplot - auch Box-Whisker-Plot oder in alter deutscher Fachliteratur Kastengrafik genannt - ist ein Diagramm, das zur grafischen Darstellung der Verteilung kardinalskaliertter Daten verwendet wird. Der Boxplot fasst verschiedene robuste Streuungs- und Lagemaße in einer Grafik zusammen. Ein Boxplot vermittelt schnell einen Eindruck darüber, in welchem Bereich die Daten liegen und wie sie sich über diesen Bereich verteilen. Deshalb werden alle Werte der signifikanten Fünf-Punkte-Zusammenfassung, der Median, die zwei Quartile und die beiden Extremwerte, dargestellt.

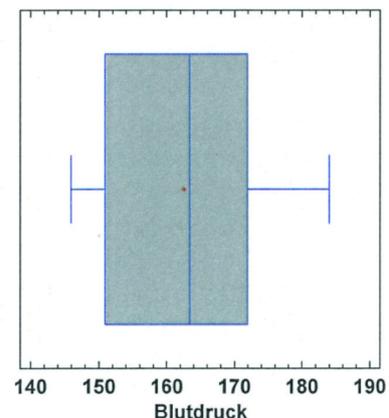


Figure 10: Box-Whisker Plot der Blutdruckmessung

Interpretation des Plots

- Es gibt keine Konvergenz von Median und dem Mittelwert, damit ist keine echte Normalverteilung gegeben.
- Der rechte Whisker ist länger als ein Quartil, es gibt (mindestens einen) Ausreißer in dieser Messreihe.

Ursachenforschung

- Eine Messung wurde durch das falsche Anlegen der Messmanschette verursacht.
- Der Patient hat ein Medikament während der Messreihe eingenommen.

5 Empfehlungen

- Die geforderten Mindestbiegeradien der Thermoleitungen strengstens beachten.
- Überwachung von Thermolement-Referenzzellen für die TC-S- und TC-K-Messstellen , Erfassung durch den Prozessrechner und Archivierung.
- Zyklisches kalibrieren der Sensoren, Datenbankarchivierung der Ergebnisse und Analyse von Veränderungen - insbesondere der Drift.
- Offsetüberwachung der ICV140 Verstärker
- Linearitätstests der ICV140 Verstärker bezüglich der ADC Qualität (missing codes)
- Temperaturkompensation von DMS Elementen (zwei aktive Kraftaufnehmer, zwei Elemente zur Temperaturkompensation)
- RTD Stromspeisungsüberwachung für PT Sensoren
- SG Spannungsspeisungsüberwachung für Brückenschaltungen
- Erstellung eines täglichen Messquerschnittes und Prüfung der Daten auf Normalverteilung

6 Annex

6.1 Acronyms

ADC	Analogue Digital Converter
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, location of the test facilities
DMS	strain gauge element
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement
HF	high frequency data with a upper cut off frequency of 20kHz
ICV140	amplifier/conditioner type in use on the test bench P1 from the company "ADAS"
LOX	Liquid Oxygene
MCC	System for measurement, command and control
MMH	Monomethyl-Hydrazin
N2O4	Distickstofftertoxid
P4.1	test bench for VINCI tests at the DLR in Lampoldshausen
Pt	Pt-sensors are Platin sensors like Pt100, Pt500 and Pt1000
P1	test bench for tests at the DLR in Lampoldshausen
RMS	root mean square value
RT	rotation per time
RTD	resistor temperature device - sensor will be supplied by a constant current
SG	strain gauge bridge measurement device - sensor will be supplied by a constant voltage
TC	thermo couple element
TC-K	thermocouple element Nickel-Chrom (NiCr) and Nickel-Aluminium (NiAl)
TC-S	thermocouple element Platin-10% Rhodium (Pt10Rh) and Platin (Pt)
VDI	Verein der Deutschen Ingenieure
VEA	DLR test facilities departement Lampoldshausen

6.2 Bibliography

- ABB "Praxis der industriellen Temperaturmessung" - 2000 - ISBN: 3-00-006082-0
- JCGM Joint Committee for Guides in Metrology "Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement" - corrected version 2010
- VDI Mordhorst, H.-J.; Grützner, U. "Messunsicherheit nach GUM" - 2007 - Seminar Nr. 36-58
- VDI Gimpel, B.; "Datenanalyse"

document
