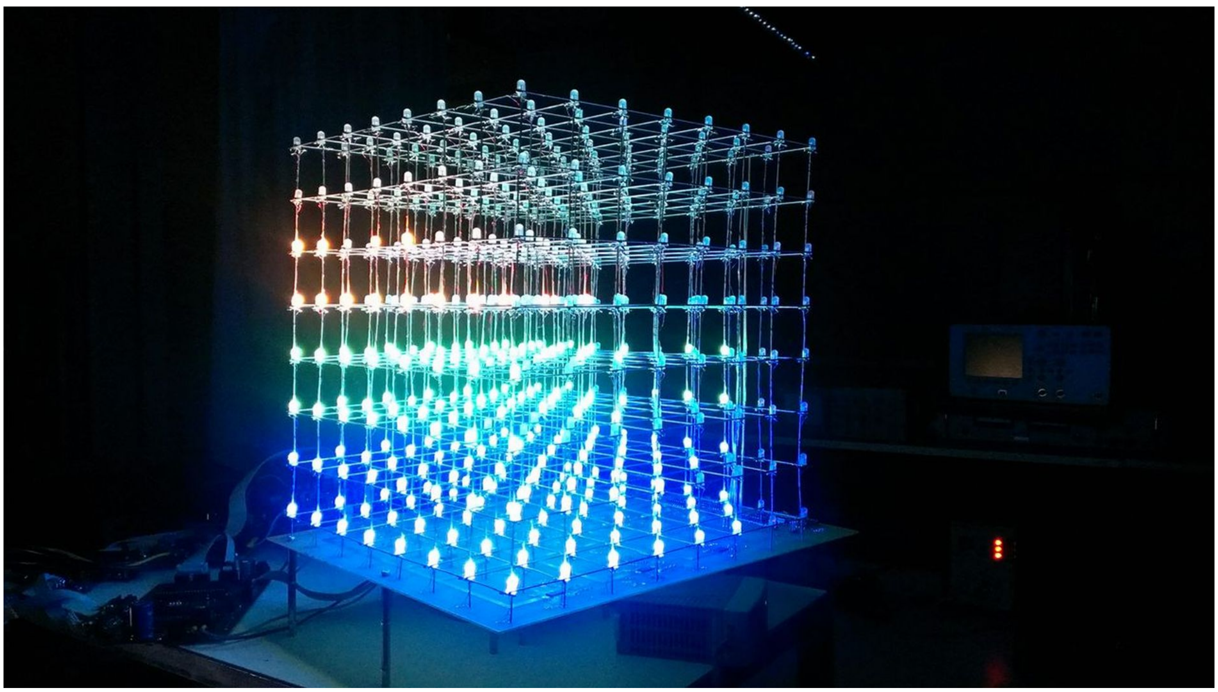
Berechnungsmethoden in der Elektrotechnik

ergänzender Beitrag zur Vorlesung
zum Thema

Einführung in die Elektrotechnik

Doz. Wolfgang Stuchlik
DLR Lampoldshausen, Abt. VEA

DHBW - MOS WiSe 2017



Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
74239 Hardthausen
Langer Grund
Wolfgang.Stuchlik@dlr.de

Inhaltsverzeichnis

1 Die Zweipoltheorie **5**
1.1 Die Idee . . . 5
1.2 Die Methode . . . 5
1.3 Das erste Beispiel . . . 6
1.4 Berechnung eines umfangreichen Netzwerkes . . . 8
1.5 Vereinfachung von Widerständen . . . 12
1.5.1 Ersatzwiderstand eines passiven Zweipols . . . 12
1.5.2 Widerstandsvereinfachung zur Bestimmung des Gesamtstroms . . . 13
1.5.3 Der gesuchte Widerstand zwischen den Punkten A und B . . . 14
1.6 Ein Beispiel aus der Praxis . . . 15

2 Das Überlagerungsverfahren **17**
2.1 Die Idee . . . 17
2.2 Das erste Beispiel . . . 17
2.3 Die Methode . . . 18
2.4 Berechnung eines umfangreichen Netzwerkes . . . 19
2.5 Ein Beispiel mit Stromeinspeisung . . . 21

3 Das Maschenstromverfahren **23**
3.1 Die Idee . . . 23
3.2 Die Methode . . . 23
3.3 Das erste Beispiel . . . 23
3.3.1 Die Lösung nach dem Additionsverfahren . . . 23
3.3.2 Die Lösung nach dem Gleichsetzungsverfahren . . . 24
3.3.3 Die Lösung nach dem Einsetzverfahren . . . 24
3.4 Ein Beispiel mit drei Maschen . . . 25

4 Der belastete Spannungsteiler **27**

5 Die Thévenin- und Norton-Theoreme **28**
5.1 Umwandlung einer Spannungs- in eine Stromquelle . . . 29
5.2 Umwandlung einer Strom- in eine Spannungsquelle . . . 30

6 Übungsaufgaben **31**
6.1 Aufgaben zur Zweipoltheorie . . . 31
6.1.1 Berechnen Sie die Leerlaufspannung, den Kurzschlussstrom und den inneren Widerstand . 31
6.1.2 Berechnen Sie den passiven Zweipol - den Ersatzwiderstand zwischen zwei Punkten 31
6.2 Aufgaben zum Überlagerungsverfahren . . . 34

7 Musterlösungswege **37**
7.1 Lösungen zur Zweipoltheorie . . . 37
7.1.1 Lösungsweg zur Aufgabe 3.1.1 a) . . . 37
7.1.2 Lösungsweg zur Aufgabe 3.1.1 b) . . . 39
7.1.3 Lösungsweg zur Aufgabe 1.5.2 . . . 41
7.1.4 Lösungsweg zur Aufgabe 1.5.3 . . . 41
7.2 Lösungen zum Überlagerungsverfahren . . . 42
7.2.1 Lösungsweg zur Aufgabe 5.2.c) . . . 42
7.2.2 Lösungsweg zur Aufgabe 5.2.d) . . . 43

8 Literaturempfehlungen **45**

Stichwortverzeichnis **46**

9 Abkürzungsverzeichnis **47**

Abbildungsverzeichnis

1 Der Grundstromkreis . . . 5
2 gesucht ist der Strom I_5 . . . 6
3 gesucht ist der Ersatzwiderstand R_i . . . 6
4 gesucht ist der Kurzschlussstrom der Quelle E_1 . . . 6
5 gesucht ist der Kurzschlussstrom der Quelle E_2 . . . 7
6 Einführung der Masche M . . . 8
7 Strom I und die Spannung U sind gesucht . . . 8
8 Im ersten Lösungsschritt teilen wir den passiven Zweipol vom aktiven. . . . 8
9 1. Schritt: Die Vereinfachung des Widerstandsnetzwerks in drei Schritten. . . . 9
10 Zwischenlösung: Ein Außenwiderstand R_a, der vom gesuchten Strom I durchströmt wird. . . . 9
11 3. Schritt: Erste Vereinfachung der Widerstände im aktiven Zweipol . . . 9
12 4. Schritt: Endgültige Vereinfachung der Widerstände, wir bestimmen den Innenwiderstand R_i. . . . 10
13 Der gesuchte Kurzschlussstrom. . . . 10
14 6. Schritt: Nur die erste Spannungsquelle bleibt aktiv. . . . 10
15 7. Schritt: gesucht wird der zweite Kurzschlussstrom des aktiven Zweipols . . . 11
16 8. Schritt: gesucht wird der dritte Kurzschlussstrom des aktiven Zweipols . . . 11
17 Gesucht ist der Ersatzwiderstand zwischen den Punkten A und B. . . . 12
18 Wir erkennen eine Sternschaltung, die in eine Dreieckschaltung transformiert werden muss. . . . 12
19 Drei virtuelle Widerstände müssen zusammengefasst werden . . . 12
20 Die Lösung steckt in den gleichen Potenzialen 13
21 Ein Umzeichnen der Schaltung bringt Sie auf den richtigen Lösungsweg. . . . 14
22 Die Bezeichnung der Widerstände kann frei gewählt werden. . . . 14
23 Wir erkennen eine Brückenschaltung . . . 14
24 Wir vereinfachen die rot gekennzeichnete Widerstandskombination: $R^* = R_6 + \frac{R_4 R_7}{R_4+R_7}$ . . . 14
25 klassisches Drehspulmesswerk . . . 15
26 ein übliches digitale Multimeter . . . 15
27 die Realität abstrahiert . . . 15
28 die Zweipolersatzschaltung . . . 15
29 der Spannungsteiler . . . 16
30 gesucht ist der Strom I_5 . . . 17
31 Die Spannungsquelle E_1 ist Ursache für die eingezeichneten Ströme. . . . 17
32 Die Spannungsquelle E_2 ist Ursache für die eingezeichneten Ströme. . . . 17
33 Die Richtung des Stromes I_2 wird frei festgelegt. . . . 19
34 Die Richtung des Stromes I_2 aus der Quelle E_1wird als positiv festgelegt. . . . 19
35 inverse Stromrichtung von I_2 . . . 20
36 Die Stromrichtung von I_2 . . . 20
37 Eine Schaltungsvariante . . . 21
38 Die Richtung des Stromes I_4 wird erst einmal grafisch frei festgelegt. . . . 21
39 Wir erkennen einen doppelten Stromteiler. Die einzige Energiequelle ist die Einströmung von I_0. 21
40 Wir betrachten den Strom I_4, der durch die Quelle E_1 hervorgerufen wird. . . . 22
41 Wir betrachten den Strom I_4, der durch die Quelle E_2 hervorgerufen wird. . . . 22
42 Drei physische Ströme sind in der Realität vorhanden. . . . 23
43 zwei Maschen bilden zwei virtuelle Ströme . . . 23
44 Der Strom I_2 ist gesucht, nach dem Maschenstrom I_A muss aufgelöst werden. . . . 23
45 Die Werte für die Spannungsquelle und die Widerstände sind bekannt. . . . 25
46 Es fließen sechs reelle Ströme, wir reduzieren es auf drei virtuelle. . . . 25
47 Die Schaltung in gedrehter und gespiegelter Ansicht abstrahiert. . . . 25
48 Drei Maschen ergeben drei Maschenströme und somit drei Maschengleichungen. . . . 25
49 belasteter Spannungsteiler mit Festwiderständen . . . 27
50 potentiometrischer, belasteter Spannungsteiler . . . 27
51 Der normierte Verlauf von U und I in Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{R_2}{R}$; R_a als Parameter . . . 27
52 Norton-Schaltung - resultierende Konstantstromquelle . . . 28
53 Thévenin-Schaltung - resultierende Konstantspannungsquelle . . . 28
54 Spannungsquelle wird zur Stromquelle . . . 29
55 Abtrennung der Spannungsquelle und R_i . . . 29

56 der Innenwiderstand bleibt gleich . . . 29
57 Zusammenführung mit der Schaltung . . . 29
58 Alle parallel liegenden Widerstände können durch R_i ausgedrückt werden. . . . 29
59 beide Stromquellen werden addiert . . . 29
60 Im Leerlauf der Stromquelle fließt der maximale Strom $I_0 = \frac{U_{AB}}{R_i}$ . . . 30
61 Die Wandlung: $\frac{I_0}{R_i} \rightarrow E_0$ . . . 30
62 $E_0 - E = E_{ges}$, $R_i + R_1 = R_{i_{ges}}$ . . . 30
63 Die Ersatzschaltung . . . 30
64 $E_1 = 1V, E_2 = 4V, R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, R_3 = 20\Omega$ . . . 31
65 gesucht sind die Ersatzgrößen des Ersatzgrundstromkreises . . . 31
66 Jede Kante hat einen Widerstand von 100Ω . . . 32
67 Die Symmetrie des Würfels . . . 32
68 Die beiden Potenzialniveaus des Würfels . . . 32
69 Die Widerstandsanordnung . . . 32
70 Jede Kante hat den Widerstand R . . . 33
71 Die Schnittebene des Würfels . . . 33
72 Die beiden Potenzialniveaus des Würfels . . . 33
73 Die Widerstandsanordnung . . . 33
74 Die dritte Schnittebene des Würfels . . . 34
75 Die dritte Schnittebene in Farbe . . . 34
76 Die Widerstandsanordnung . . . 34
77 Schaltung mit einer Konstantspannungsquelle und einer Einströmung . . . 34
78 Stromrichtungen mit Spannungsquelle E . . . 35
79 Stromrichtungen mit Stromquelle I_0 . . . 35
80 Schaltung ohne Einströmung . . . 36
81 Die Schaltung . . . 36
82 Die Schaltung . . . 36
83 Die Parallelschaltung bildet den R_i . . . 37
84 $I_{K_1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{1V}{5\Omega} = -0,2A$ . . . 37
85 $I_{K_2} = \frac{E_2}{R_1//R_2} = 4V\,\frac{15\Omega}{50\Omega^2} = +1,2A$ . . . 37
86 Die Leerlaufspannung ist die Differenz der beiden Spannungsabfälle E_1 und E_2. . . . 38
87 Der Spannungsabfall resultierend aus der Quelle E_1 über dem Widerstand R_3. . . . 38
88 Der Spannungsabfall resultierend aus der Quelle E_2 über dem Widerstand R_3. . . . 38
89 Die Ausgangsschaltung . . . 39
90 Der erste Ansatz zur Bestimmung von R_i . . . 39
91 Der Ersatzwiderstand $R_{AB} = R_i$ . . . 39
92 Die Ausgangsschaltung . . . 39
93 Der Ansatz zur Bestimmung des Kurzschlussstromes. . . . 39
94 Der wirksame Kurzschluss überbrückt R_2, R_3 und R_4. . . . 40
95 Wir transformieren die Widerstand-Stern- in eine Dreieckschaltung. . . . 40
96 Wir erkennen, dass der Widerstand R_{23} bei der Bestimmung von U_l keine Bedeutung besitzt. . . . 40
97 Wir verteilen die Spannung auf die symmetrische Schaltung. . . . 41
98 Die vereinfachte Schaltung und die Potenzialverhältnisse. . . . 41
99 eine weitere Vereinfachungen . . . 41
100 die Vereinfachungen . . . 41
101 die Vereinfachungsidee . . . 42
102 die resultierende Schaltung . . . 42
103 die erste Vereinfachung . . . 42
104 Teilstrom I_a durch Quelle E_1 . . . 42
105 Teilstrom I_b durch Quelle $E_2 - E_3$ . . . 42
106 Teilstrom I_a durch Quelle E_1 . . . 43
107 Der R_a wird bestimmt. . . . 43
108 Der R_i wird bestimmt. . . . 44
109 Teilstrom I_b durch Quelle E_2 . . . 44
110 Der R_a wird bestimmt. . . . 44
111 Der R_i wird bestimmt. . . . 44

1 Die Zweipoltheorie

1.1 Die Idee

Die Idee zu diesem Verfahren besteht darin, das die gesuchten Größen in einem Grundstromkreis berechnet werden. Die gesuchte Spannung ist die Größe, die an den Klemmen zwischen dem aktiven und passiven Zweipol anliegt und der Strom ist die Größe, die dem Gesamtstrom des Grundstromkreises entspricht. Diesen einfachen und überschaubaren Berechnungen geht eine intensive Vorarbeit voraus.

Alle aktiven Elemente, wie Spannungs- und Stromquellen, werden zu einem aktiven Zweipol zusammengefasst. Der Widerstand, über den die gesuchte Spannung abfällt bzw. der gesucht Strom hindurchfließt, entspricht dem Außenwiderstand R_a. Alle übrigen Widerstände der Schaltung werden zu einem resultierenden Widerstand zusammengefasst und bilden den Innenwiderstand R_i der Grundschaltung.

Für die noch zu bestimmenden Größen ergeben sich folgende einfache Formeln:

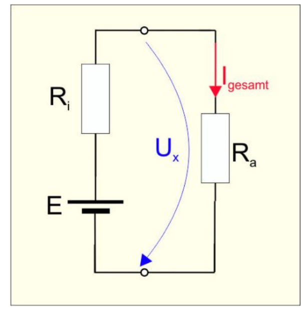


Abbildung 1: Der Grundstromkreis

$$R_i + R_a = R_{Gesamt}$$

$$\frac{U_x}{E} = \frac{R_a}{R_i+R_a}$$

$$U_x = E \cdot \frac{R_a}{R_i+R_a}$$

$$I_x = I_{Gesamt} = \frac{E}{R_{Gesamt}} = \frac{E}{R_i+R_a} \text{ aber auch: } I_x = \frac{U_x}{R_a}$$

1.2 Die Methode

Wie geht man vor, wenn nach der Zweipoltheorie ein Strom oder eine Spannung bestimmt werden soll?

1. Den Widerstand, durch den der gesuchte Strom fließt bzw. über den die gesuchte Spannung abfällt, wird als Außenwiderstand des Grundstromkreises definiert. Das gilt auch für Widerstandskombinationen.

   Wichtig ist bei diesem Vorgehen, dass keine Spannungs- oder Stromquelle in dieser resultierenden Kombination vorhanden ist. Wir sprechen letztendlich vom passiven Zweipol.

2. Wenn der Außenwiderstand bestimmt wurde, dann erfolgt die Bestimmung des Innenwiderstandes des aktiven Zweipols. Hierzu werden alle Spannungsquellen virtuell kurzgeschlossen und der Widerstand zwischen den Klemmen rechnerisch bestimmt. Wir bestimmen rechnerisch den Widerstand, wie er mit einem Ohmmeter elektrisch gemessen werden kann.

3. Der Kurzschlussstrom wird bestimmt, indem die Klemmen des aktiven Zweipols virtuell kurzgeschlossen werden. Je nach Anzahl der Spannungsquellen, wird der Teilkurzschlussstrom jeder verursachenden Spannungsquelle bestimmt. Jede Spannungsquelle wird als aktive Einzelquelle für sich betrachtet wird. Alle anderen vorhandenen Quellen werden überbrückt. Schritt für Schritt werden alle Quellen als aktiv betrachtet.

   Pro Quelle wird ein Kurzschlussstrom bestimmt, wobei das Vorzeichen der Fließrichtung beachtet werden muss. Die Summe aller Teilkurzschlussströme, unter Beachtung der Vorzeichen, bildet den gesuchten Kurzschlussstrom.

4. Die Ersatzspannung **E** der virtuellen Quelle unseres Grundstromkreises ist das Produkt aus:

   $E = I \cdot (R_i + R_a)$

5. Die gesuchte Spannung über dem Außenwiderstand ist das Produkt aus: $U_x = I \cdot R_a$
6. Alternativ können wir auch rechnen: $U_x = E \cdot \frac{R_a}{R_i+R_a}$

Wir betrachten erst einmal nur Spannungsquellen, um die Theorie besser zu verstehen und die Methode zu erlernen. Stromquellen werden nicht kurzgeschlossen, man entfernt sie virtuell, sodass ein unendlicher Widerstand im Netzwerk entsteht.

1.3 Das erste Beispiel

Gegeben ist folgende Schaltung. Gesucht ist der Strom I_5, der durch den Widerstand R_5 fließt.

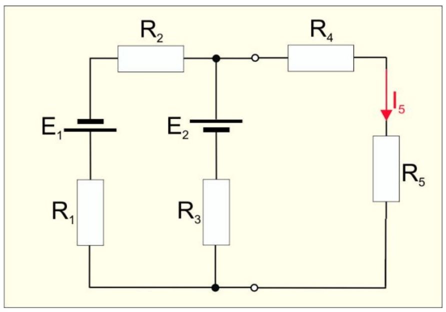


Abbildung 2: gesucht ist der Strom I_5

Wir erkennen sofort, dass der gesuchte Strom durch die Widerstände R_4 und R_5 gleich ist, so dass der Außenwiderstand, also unser passiver Zweipol, aus der Summe beider Widerstände gebildet werden kann.

Wir benutzen unsere Methode aus dem vorangegangenen Kapitel:

Bestimmung des passiven Zweipols: da wir nur den Strom I_5 suchen, können wir sagen $R_a = R_4 + R_5$.

Bestimmung des Innenwiderstandes des aktiven Zweipols: Dafür werden beide Spannungsquellen kurzgeschlossen und wir bilden den Ersatzwiderstand.

$$R_i = (R_1 + R_2) // R_3$$

$$R_i = \frac{(R_1+R_2) \cdot R_3}{(R_1+R_2+R_3)}$$

$$R_i = \frac{R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

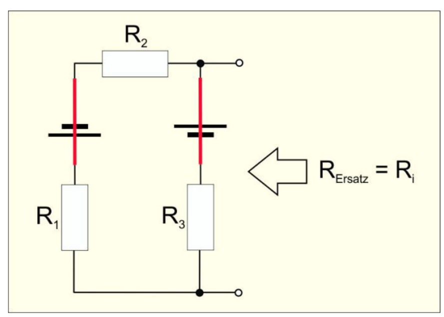


Abbildung 3: gesucht ist der Ersatzwiderstand R_i

Jetzt suchen wir den Kurzschlussstrom. Da wir recht gut erkennen, dass diese Schaltung zwei Spannungsquellen besitzt, müssen wir im nächsten Schritt die zwei möglichen Teilkurzschlussströme nacheinander bestimmen.

$$I_{K_1} = \frac{E_1}{R_1+R_2}$$

Wir erkennen aus der Grafik, dass der Widerstand R_3 keine Bedeutung für die Bestimmung des ersten Kurzschlussstromes besitzt. Der Strom fließt vom höheren zum niederen Potenzial. Wir haben uns mit der Spannungsquelle E_1 und der Stromflussrichtung festgelegt und definieren es als positiven Strombeitrag.

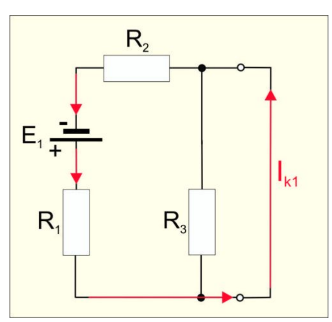


Abbildung 4: gesucht ist der Kurzschlussstrom der Quelle E_1

Die technische Stromrichtung geht vom höheren zum niederen Potenzial. Die Definition des Vorzeichens des ersten Stroms ist nachvollziehbar, jedoch willkürlich. Anschließend, bei der Bestimmung eines weiteren Kurzschlussstromes, muss man konsequent bleiben und bei Stromrichtungsänderungen am betrachteten Widerstand die entsprechenden Vorzeichen wechseln.

Werden, nach Vorlage der allgemeinen Lösung, konkrete Zahlenwerte benutzt, so kann es sein, dass unser Ergebnis für den gesuchten Strom negativ wird. Das bedeutet nur, dass die angenommene Stromrichtung nicht richtig war. Unser Ergebnis ist dadurch nicht falsch. Es ist daher notwendig, das Ergebnis richtig zu interpretierten.

$|I_{K_2}| = \frac{E_2}{R_3}$

Wir erkennen aus der Grafik, dass die Widerstände R_1 und R_2 keine Bedeutung für die Bestimmung des zweiten Kurzschlussstromes besitzen. Der Strom fließt vom höheren zum niederen Potenzial. Die Stromrichtung des zweiten Kurzschlussstromes ist jetzt physikalisch entgegengesetzt dem ersten Kurzschlussstrom, daher erhält dieser Strom ein negatives Vorzeichen.

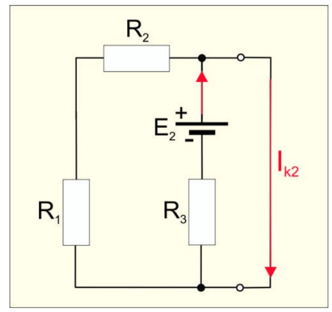


Abbildung 5: gesucht ist der Kurzschlussstrom der Quelle E_2

$I_{K_2} = -\frac{E_2}{R_3}$

Ergebnis: $I_K = I_{K_1} + I_{K_2}$

$I_K = \frac{E_1}{R_1+R_2} - \frac{E_2}{R_3}$

Aus den beiden berechneten Größen R_i und I_K können wir die Ersatzspannungsquelle bestimmen:

$E_{Ersatz} = E = R_i \cdot I_K.$

$E = \frac{R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot \left[\frac{E_1}{R_1+R_2} - \frac{E_2}{R_3}\right]$

Jetzt können wir unsere gesuchte Größe bestimmen, denn der Strom I_5 entspricht dem Gesamtstrom des Grundstromkreises.

$I_5 = \frac{E}{R_i+R_a}$

$I_5 = \frac{\frac{R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot \left[\frac{E_1}{R_1+R_2} - \frac{E_2}{R_3}\right]}{\left[\frac{R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} + (R_4+R_5)\right]}$

Die Lösung der Aufgabe: $I_5 = \frac{E_1R_3 - E_2 \cdot (R_1+R_2)}{(R_1+R_2)\cdot(R_3+R_4+R_5)+R_3(R_4+R_5)}$

Die Alternative

Es gibt einen zweiten Lösungsweg, indem die Leerlaufspannung U_l an den Klemmen zum aktiven Zweipol bestimmt wird.

Die Leerlaufspannung, so deutet schon die Bezeichnung darauf hin, ist die Spannung bei unendlichem großen Außenwiderstand. Das bedeutet, es fließt kein Gesamtstrom und die Leerlaufspannung U_l entspricht unser gesuchten Gesamtversorgungsspannung im Ersatzgrundstromkreis.

$$E_2 = -U_l + U_3$$
$$U_l = -E_2 + U_3$$
$$U_3 = I \cdot R_3 = \frac{E_1+E_2}{R_1+R_2+R_3} \cdot R_3$$
$$U_l = \frac{E_1 R_3 - E_2 \cdot (R_1+R_2)}{(R_1+R_2+R_3)} = E$$

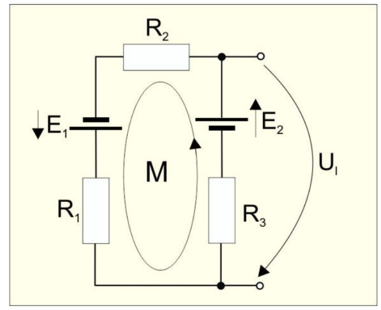


Abbildung 6: Einführung der Masche M

Es kann keine Empfehlung ausgesprochen werden, mit welcher Ersatzgröße man beginnen soll. De facto ist der Rechenaufwand immer konstant. Bei einfachen Netzwerken ist die Übersicht fast immer gegeben, da jeder Schritt der Abstraktion mittels Skizze nachvollziehbar ist. Jedoch weiß man aus eigener Erfahrung, dass jede aussagekräftige Skizze auch einen gewissen Zeitaufwand bedeutet. Die alternativen Methoden zur Zweipoltheorie, die nur auf Berechnungen (Maschen- und Knotenpunktgleichungen) basieren, sind daher vom Zeitaufwand etwas optimaler.

1.4 Berechnung eines umfangreichen Netzwerkes

Einfache Beispiele sollen die Theorie erklären, jedoch hat der Studierende oft das Gefühl, dass es anders einfacher und schneller geht. Warum sollte man ein Produkt zweier Zahlen mittels Logarithmus berechnen? Beim Potenzieren und Radizieren sieht es schon anders aus, vor allen Dingen, wenn der Exponent nicht ganzzahlig ist.

Gegeben ist die folgende Schaltung:

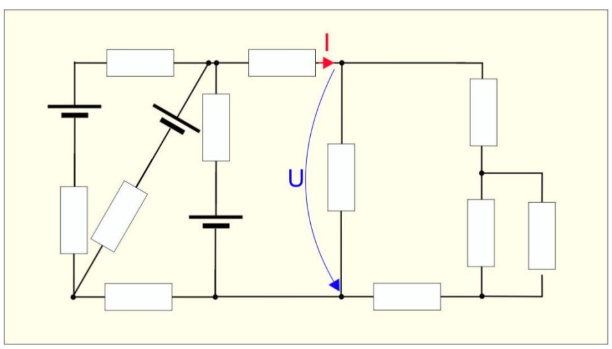


Abbildung 7: Strom I und die Spannung U sind gesucht

Aus diesem Grund werden wir jetzt eine komplexe Aufgabe lösen, jedoch mit den entsprechenden Skizzen jeden wichtigen Schritt dokumentieren. In der Praxis werden die helfenden Skizzen nicht verwendet.

Alle Spannungsquellen haben den symbolischen Wert E, alle Widerständen den Wert R.

Aufgabe: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Strom I und die Spannung U.

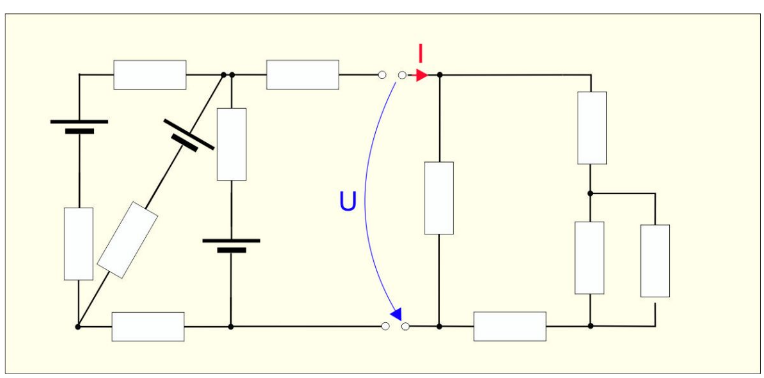


Abbildung 8: Im ersten Lösungsschritt teilen wir den passiven Zweipol vom aktiven.

Der passive Zweipol ist nicht nur ein Einzelwiderstand, sondern in unserem Fall eine Widerstandskombination. Unser Ziel ist es, aus dieser Anordnung einen Widerstand R_a zu bilden.

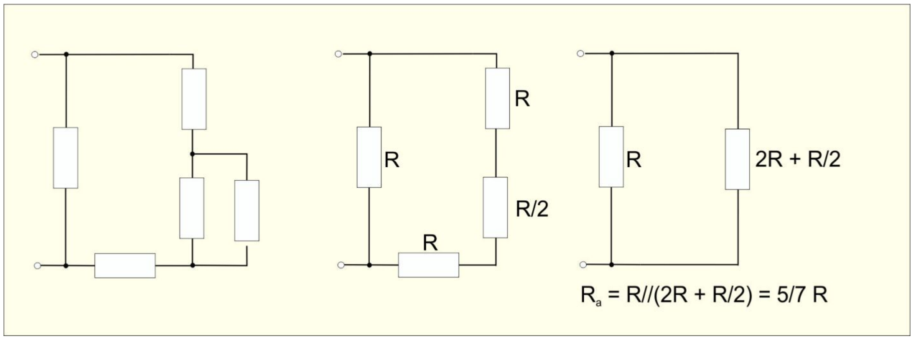


Abbildung 9: 1. Schritt: Die Vereinfachung des Widerstandsnetzwerks in drei Schritten.

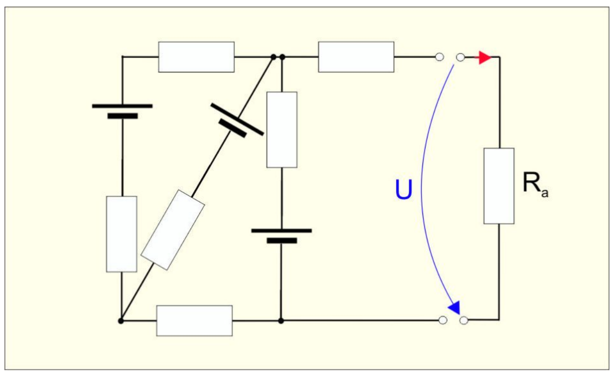


Abbildung 10: Zwischenlösung: Ein Außenwiderstand R_a, der vom gesuchten Strom I durchströmt wird.

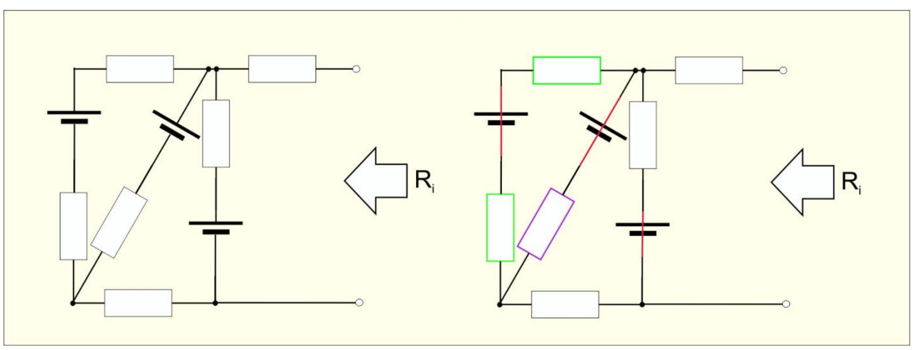


Abbildung 11: 3. Schritt: Erste Vereinfachung der Widerstände im aktiven Zweipol

Die grün markierten Widerstände können zusammengefasst werden. Bei der Bestimmung des Innenwiderstandes des aktiven Zweipols, müssen die Spannungsquellen kurzgeschlossen werden.

Die Spannungsquellen kurz schließen oder zu überbrücken ist ein Vorgang rein gedanklicher Natur. In der Praxis werden durch den Kurzschluss die Spannungsquellen (denken Sie an die Autobatterie, wo in kurzer Zeit ein sehr hoher Strom fließt und die Batterie gekocht wird) physisch zerstört, daher wird oft vom „virtuellem“ Kurzschluss gesprochen.

Letztendlich erhalten wir ein reines Widerstandsnetzwerk, was weiter vereinfacht werden kann. Unser Ziel ist es, dass wir zwischen die Klemmen hineinschauen und **einen** Ersatzwiderstand „sehen“. Der Ersatzwiderstand repräsentiert den wirksamen Widerstand, der messtechnisch ermittelt werden kann.

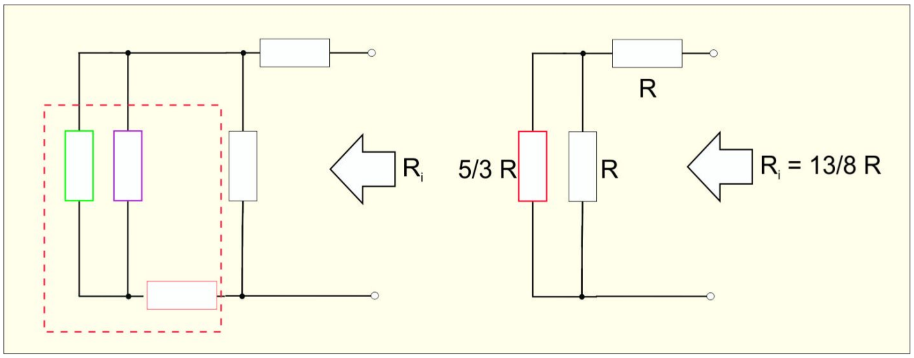


Abbildung 12: 4. Schritt: Endgültige Vereinfachung der Widerstände, wir bestimmen den Innenwiderstand R_i.

Wir haben bereits die beiden Größen des Ersatzgrundstromkreises $R_a = \frac{5}{7}R$ und $R_i = \frac{13}{8}R$ bestimmt.

Der alternative Lösungsweg wäre, wenn nur der Widerstand, über den die Spannung abfällt, als Außenwiderstand und somit als passiver Zweipol betrachtet wird. Dieser Lösungsweg ist jedoch nicht zu empfehlen, da der gesuchte Strom I durch den besagten Einzelwiderstand (passiven Zweipol) nur teilweise fließt. Für die Herangehensweise kann daher ein praktischer Ratschlag befolgt werden: Der gesuchte Strom bestimmt die Abgrenzung zwischen dem aktiven und passiven Zweipol. Wir suchen den unverzweigten Grundstromkreis und müssen Stromverzweigungen vermeiden.

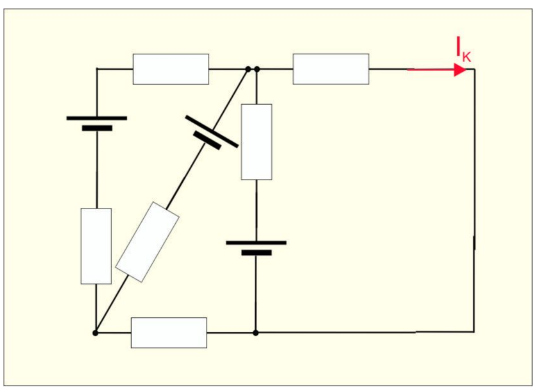


Abbildung 13: Der gesuchte Kurzschlussstrom.

Im fünften Lösungsschritt wird der Kurzschlussstrom des aktiven Zweipols gesucht.

Der Außenwiderstand R_a wird kurzgeschlossen. Es ergibt sich somit ein Maximalstrom, der durch die einzelnen Spannungsquellen generiert wird. Da wir drei Spannungsquellen besitzen, müssen wir nacheinander immer zwei Quellen abschalten und den jeweiligen Teilkurzschlussstrom ermitteln.

Durch das Kurzschließen der Spannungsquellen, ergeben sich neue Widerstandskombinationen, die beachtet werden müssen.

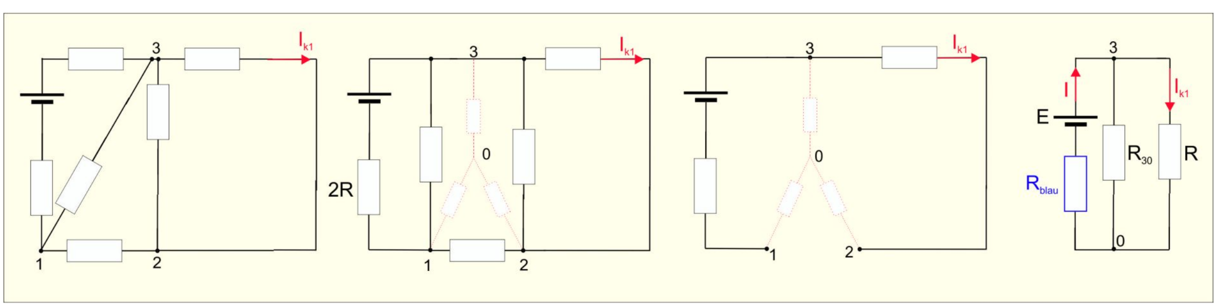


Abbildung 14: 6. Schritt: Nur die erste Spannungsquelle bleibt aktiv.

Um eine Widerstandsvereinfachung zu erreichen, muss die Dreieckschaltung in eine Sternschaltung transformiert werden. Die Werte der transformierten Widerstände R_{10}, R_{20} und R_{30} entsprechen nicht den Werten der physisch vorhandenen Widerständen. Wir erhalten den Wert für den ersten Teilkurzschlussstrom

I_{K_1}. Hier bietet sich der Lösungsweg an, indem der Gesamtstrom berechnet und anschließend die Stromteileregel angewendet wird.

$$I = \frac{E}{R_G}$$

$$R_G = R_{Blau} + R_{30}//R = R_{Blau} + \frac{R_{30} \cdot R}{R_{30}+R} = \frac{R_{Blau}(R_{30}+R)+(R_{30} \cdot R)}{R_{30}+R}$$

$$I_{K_1} = I \cdot \frac{R_{30}}{R_{30}+R} = \frac{E}{R_G} \cdot \frac{R_{30}}{R_{30}+R} = E \cdot \frac{R_{30}(R_{30}+R)}{[R_{Blau}(R_{30}+R)+(R_{30} \cdot R)](R_{30}+R)}$$

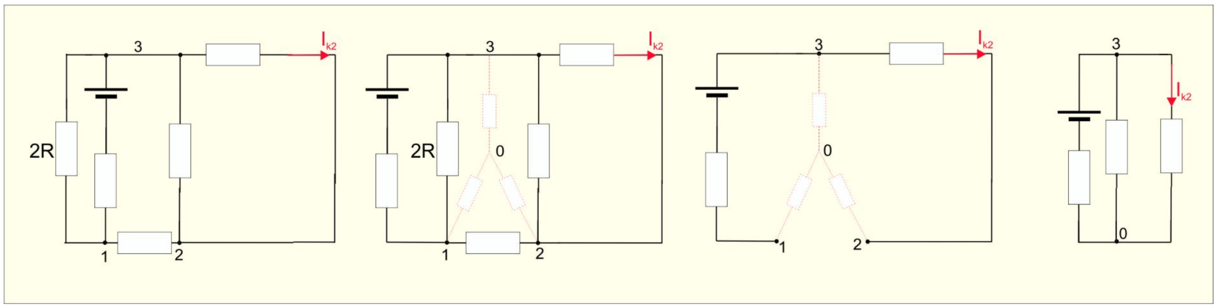


Abbildung 15: 7. Schritt: gesucht wird der zweite Kurzschlussstrom des aktiven Zweipols

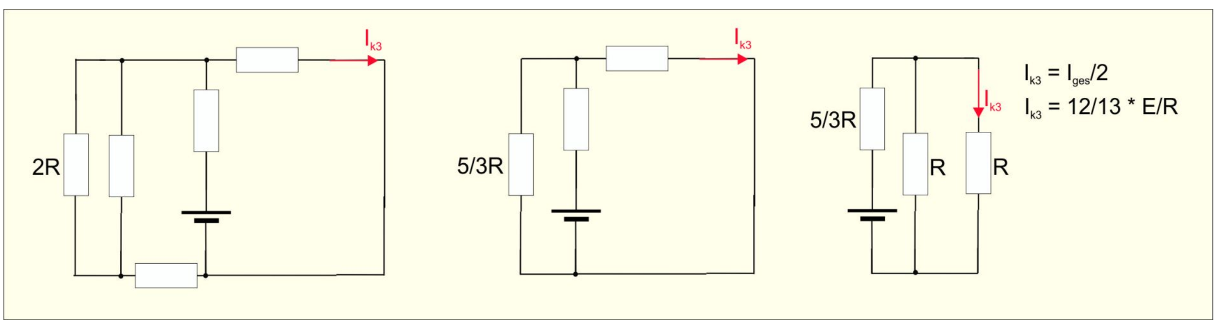


Abbildung 16: 8. Schritt: gesucht wird der dritte Kurzschlussstrom des aktiven Zweipols

Auch die dritte Spannungsquelle generiert einen Kurzschlussstrom, der ermittelt wird. Die Summe der drei Teilkurzschlussströme ergibt den Gesamt-Kurzschlussstrom für den Ersatzgrundstromkreis. Aus diesen Ersatzgrößen I_K und R_i kann die Leerlaufspannung U_l bestimmt werden, ohne das noch weitere zeitintensive Analysen notwendig sind.

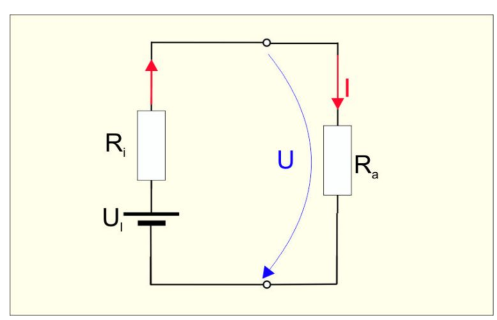
Somit gilt:

$$U_l = I_K \cdot R_i$$

Die allgemeinen Ergebnisse für diese Aufgabe lauten:

$$I = \frac{U_l}{R_i+R_a}$$

$$U = I \cdot R_a$$



1.5 Vereinfachung von Widerständen

1.5.1 Ersatzwiderstand eines passiven Zweipols

Der passive Zweipol wird durch folgende Widerstandsanordnung gebildet. Gesucht wird **ein Ersatzwiderstand**, der messtechnisch die gleichen Eigenschaften besitzt, wie diese vorgegebene Widerstandskombination.

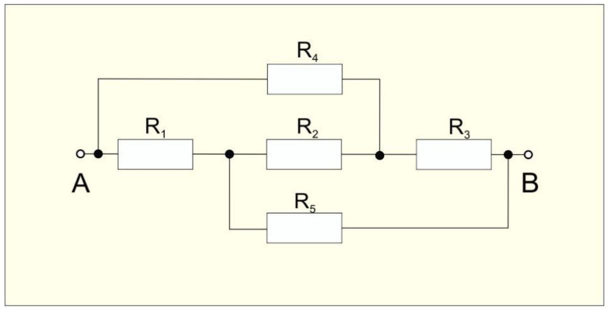


Abbildung 17: Gesucht ist der Ersatzwiderstand zwischen den Punkten A und B.

Aufgabe: Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand R_a zwischen den Klemmen A und B, wenn folgende Werte gegeben sind:

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega \text{ und } R_5 = 50\Omega$$

Lösungsprogramm:

1. Wir zeichnen die gegebene Schaltung der Widerstände etwas anders, um herauszufinden, ob sich eine Vereinfachung ergibt, die wir bereits beherrschen.

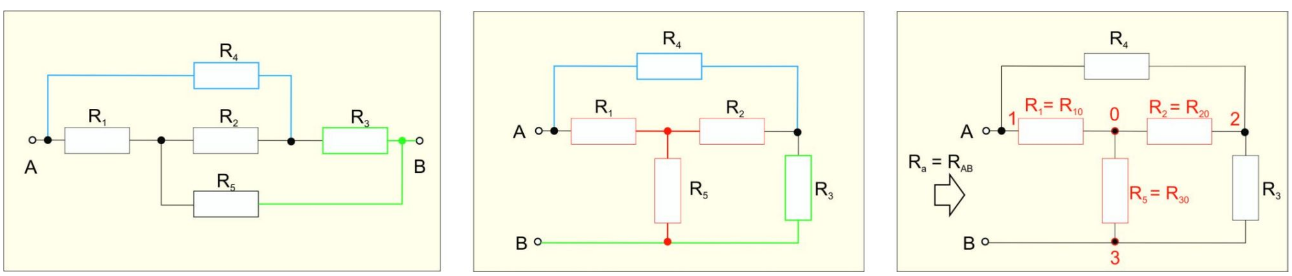


Abbildung 18: Wir erkennen eine Sternschaltung, die in eine Dreieckschaltung transformiert werden muss.

2. Mit den transformierten Widerständen sehen wir weitere Vereinfachungen.

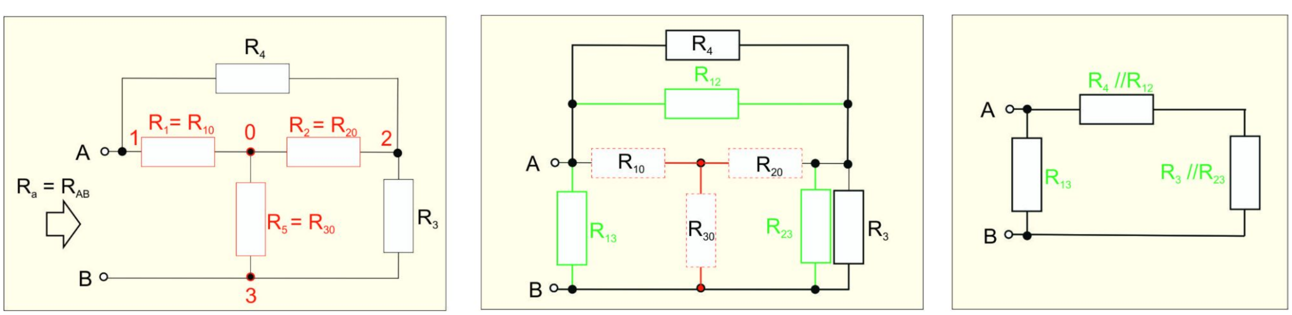


Abbildung 19: Drei virtuelle Widerstände müssen zusammengefasst werden

3. **Die allgemeine Lösung lautet:**

$$R_{AB} = R_a = R_{13}//[(R_4//R_{12}) + (R_3//R_{23})]$$

$$G_{12} = \frac{G_{10} \cdot G_{20}}{\Sigma G} = \frac{0{,}15}{0{,}17\Omega} \Rightarrow R_{12} = \frac{1}{G_{12}} = 1,13\Omega$$

$$G_{23} = \frac{G_{20} \cdot G_{30}}{\Sigma G} = \frac{0{,}07}{0{,}17\Omega} \Rightarrow R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = 2,43\Omega$$

$$G_{13} = \frac{G_{10} \cdot G_{30}}{\Sigma G} = \frac{0{,}12}{0{,}17\Omega} \Rightarrow R_{13} = \frac{1}{G_{13}} = 1,42\Omega$$

$$\Sigma G = G_{10} + G_{20} + G_{30} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{30}} = \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{50\Omega} = 0,17\frac{1}{\Omega}$$

4. **Die Zahlenrechnung**

$$R_4//R_{12} \rightarrow 40\Omega//1,13\Omega = 1,1\Omega$$

$$R_3//R_{23} \rightarrow 30\Omega//2,43\Omega = 2,25\Omega$$

$$(R_4//R_{12}) + (R_3//R_{23}) = 3,35\Omega$$

5. **Das Ergebnis:**

$$R_{AB} = R_a = R_{13}//3,35\Omega = 1,42\Omega//3,35\Omega = 0,997\Omega \approx 1\Omega$$

1.5.2 Widerstandsvereinfachung zur Bestimmung des Gesamtstroms

Aufgabe: Sie sollen den Strom dieser Schaltung messen.

Schätzen Sie den Wert des Stromes durch logisches Denken ab! Ein erster Blick verrät uns, dass wir mit Widerstandsvereinfachungen (Reihen - und Parallelschaltung) und Schaltungstransformationen (Stern- in Dreieck bzw. umgekehrt) nicht sehr weit kommen, bzw. werden die Lösungswege sehr umfangreich, unter Umständen führt es zu keiner Lösung. Fakt ist jedoch, dass der Gesamtstrom der Quotient aus der Gesamtspannung und dem Gesamtersatzwiderstand ist. Wie groß ist der Gesamtersatzwiderstand?

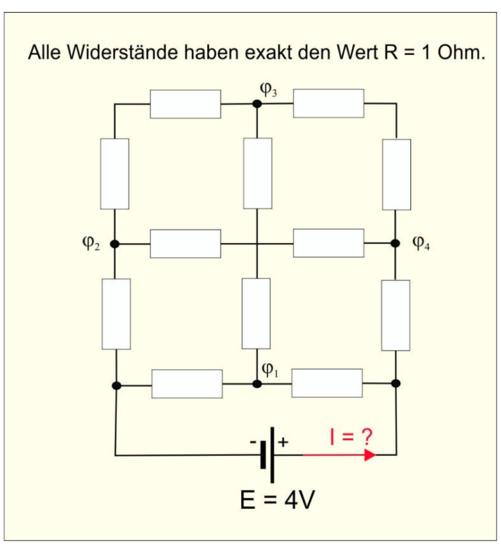


Abbildung 20: Die Lösung steckt in den gleichen Potenzialen ...

$$I = \frac{E}{R_{Gesamt}}$$

$$R_{Gesamt} = ?$$

$$R = 110\Omega \pm 2\Omega$$

Hinweis: Zwischen zwei gleichen Potenzialen φ kann kein Strom fließen - ergo: die entsprechenden Widerstände können weggelassen werden.

Die Lösung:

$$R_{Gesamt} = \frac{5}{4}R = \frac{5}{4} \cdot 110\Omega = 137,5\Omega$$

$$I = \frac{4V}{137{,}5\Omega} = 29,1mA$$

Der komplette Lösungsweg ist im Kapitel 6.1.3 dokumentiert.

1.5.3 Der gesuchte Widerstand zwischen den Punkten A und B

Gegeben ist folgende Schaltung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Ersatzwiderstandes zwischen den Klemmen A und B und die spezielle Lösung für die angegebenen Widerstandswerte.

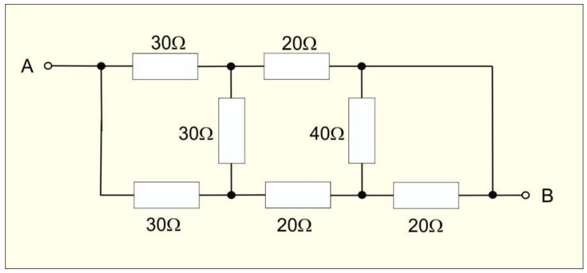


Abbildung 21: Ein Umzeichnen der Schaltung bringt Sie auf den richtigen Lösungsweg.

1. Lösungsschritt: Umbenennung der Bauelemente für die allgemeine Lösung

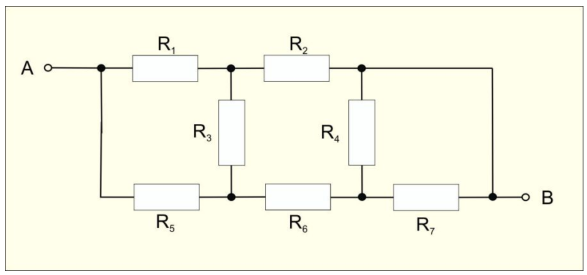


Abbildung 22: Die Bezeichnung der Widerstände kann frei gewählt werden.

2. Lösungsschritt: Das Umzeichnen

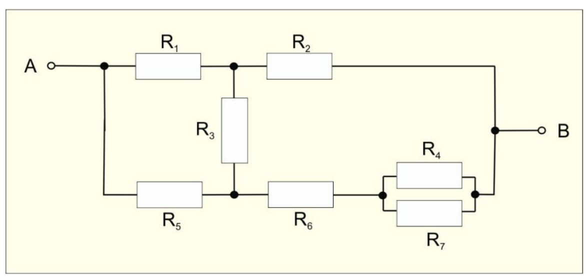


Abbildung 23: Wir erkennen eine Brückenschaltung

3. Lösungsschritt: Die Vereinfachung

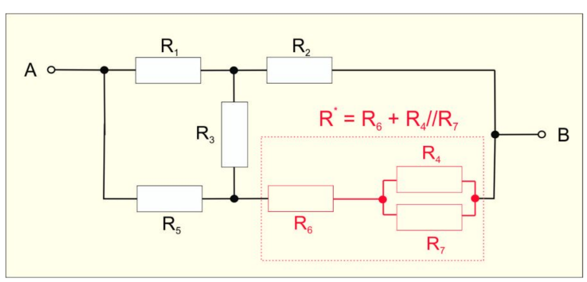


Abbildung 24: Wir vereinfachen die rot gekennzeichnete Widerstandskombination: $R^* = R_6 + \frac{R_4 R_7}{R_4 + R_7}$

Lösung: $R_{AB} = 27,73\Omega$ ⇒ siehe Kapitel 6.1.4 „Musterlösungswege“

1.6 Ein Beispiel aus der Praxis

Eine typische Ausgangssituation in der Praxis:

Die Spannung soll zwischen den Punkte A und B gemessen werden. Das Messwerk eines Voltmeters hat einen Endausschlag von 10 Volt. Der Innenwiderstand des Messwerks beträgt 5kΩ.

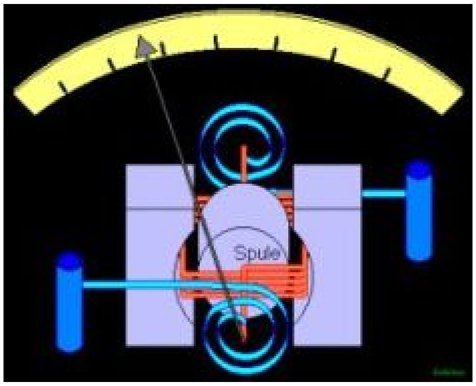


Abbildung 25: klassisches Drehspulmesswerk

Abbildung 26: ein übliches digitale Multimeter

Die Situation und die Fragen:

a) Was müssen wir bedenken, damit wir in der vorliegenden Schaltung die Spannung möglichst genau messen?

b) Die Spannungsquelle der Schaltung hat immerhin eine Spannung von 200V. Der Innenwiderstand der Spannungsquelle beträgt $R_1 = 5k\Omega$.

c) Zur Spannungsquelle ist ein Widerstand (Verbraucher) parallel geschaltet, der einen Wert von $R_2 = 5k\Omega$ besitzt.

d) **Frage:** Um wie viel Prozent ändert sich die Spannung zwischen den Anschlüssen A und B, wenn wir das Voltmeter anschließen?

Analyse der Schaltung:

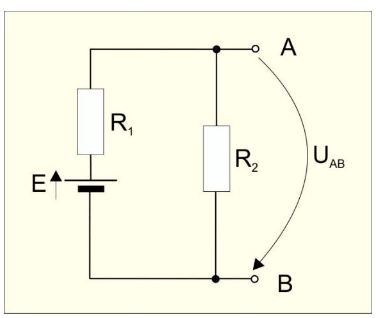


Abbildung 27: die Realität abstrahiert

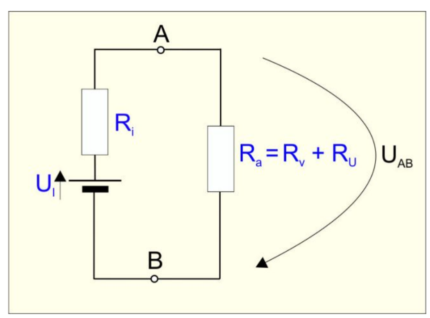


Abbildung 28: die Zweipolersatzschaltung

Wir berechnen die Ersatzgrößen U_l, R_i und I_K.

$$\frac{U_l}{E} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \text{ und somit: } U_l = E \cdot \left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right] = 200V \cdot \frac{1}{2} = 100V$$

$$I_K = \frac{E}{R_1} = \frac{200V}{5k\Omega} = 0,04A = 20mA$$

$$R_i = R_1 // R_2 \Rightarrow R_1 = R_2 = 5k\Omega \Rightarrow R_i = 2,5k\Omega$$

Wir müssen unser Messinstrument mit einem Vorwiderstand ergänzen. Das Messinstrument besitzt schon den Geräteinnenwiderstand R_U und der Vorwiderstand R_v muss noch ermittelt werden. Der Außenwiderstand (der passive Zweipol) besteht aus der Reihenschaltung von R_U und R_v.

$$R_a = R_U + R_v$$

Die Messbereichserweiterung eines Spannungsmessers kann nur durch einen Spannungsteiler über eine Reihenschaltung von Widerständen erfolgen. Wir definieren den Erweiterungsfaktor **p**.

$$p = \frac{U_{AB}}{U_U} = \frac{R_U + R_v}{R_U} = \frac{100V}{10V} = 10$$

$$R_v = R_U \left[p - 1 \right]$$

Das der Messbereichserweiterung dienende Schaltelement (der Vorwiderstand R_v) muss bei p-facher Erweiterung den (p - 1) - fachen Wert vom Messwerk fernhalten.

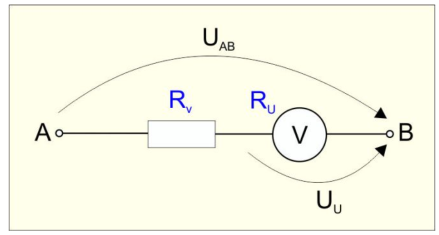


Abbildung 29: der Spannungsteiler

Damit wird $R_a = (10 - 1) \cdot R_U \Rightarrow R_v = 9 \cdot 5k\Omega = 45k\Omega$.

Um die Messung durchführen zu können, müssen $45k\Omega$ vorgeschaltet werden. Der Gesamtwiderstand der Messanordnung beträgt $R_a = 50k\Omega$

Frage: Um wie viel Prozent ändert sich die Klemmenspannung zwischen den Punkten A und B, gegenüber der Leerlaufspannung, nach Anschluss des Vorwiderstandes?

$$U_{AB} = U_l - \Delta U = U_l \cdot \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

$$\frac{U_l - \Delta U}{U_l} = \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

Es gilt nach Lit.[1] die Näherung für $0 < x << 1 : \frac{1}{x+1} \approx 1 - x$

x	exakt	Näherung	Fehler in %
0	1,000	1,00	0,00
0,01	0,990	0,99	-0,01
0,02	0,980	0,98	-0,04
0,03	0,971	0,97	-0,09
0,04	0,962	0,96	-0,16
0,05	0,952	0,95	-0,25
0,06	0,943	0,94	-0,36
0,07	0,935	0,93	-0,49
0,08	0,926	0,92	-0,64
0,09	0,917	0,91	-0,81
0,1	0,909	0,90	-1,00
0,11	0,901	0,89	-1,21
0,12	0,893	0,88	-1,44
0,13	0,885	0,87	-1,69
0,14	0,877	0,86	-1,96
0,15	0,870	0,85	-2,25

$$1 - \frac{U_{\Delta U}}{U_l} = \frac{1}{\frac{R_i}{R_a} + 1} \approx 1 - \frac{R_i}{R_a}$$

$$\frac{U_{\Delta U}}{U_l} \approx \frac{R_i}{R_a} = \frac{2{,}5k\Omega}{50k\Omega} = 0,05 \mathrel{\hat{=}} 5\%$$

2 Das Überlagerungsverfahren

2.1 Die Idee

Wirken in einem linearen physikalischen System mehrere Ursachen, so ergibt sich die Gesamtwirkung aus der Überlagerung der Einzelwirkungen, die von den Teilursachen herrühren. Die Proportionalität zwischen Ursache **U** und Wirkung **W** ergibt die Gleichung: $W = k \cdot U$

Die symbolische Größe **k** entspricht der Proportionalitätskonstanten.

Bei linearen Stromkreisen ist der Überlagerungsverfahren für Ströme und Spannungen anwendbar, jedoch nicht bei Leistungsbetrachtungen.

2.2 Das erste Beispiel

Wir nehmen das bereits bekannte Beispiel aus der Zweipoltheorie und lösen nach dem Verfahren der Überlagerung intuitiv nach dem Strom durch den Widerstand R_5 auf.

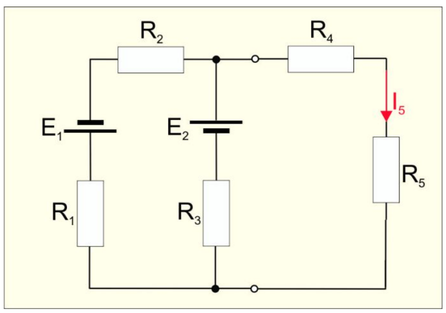


Abbildung 30: gesucht ist der Strom I_5

Wir geben unseren Größen Werte, damit diese exemplarische Lösung mit anderen Lösungen anderer Methoden, wie dem Zweipolverfahren, besser und leichter vergleichbar ist.

Es gelten:

$E_1 = 10V$ und $E_2 = 5V$

$R_1 = 10\Omega; R_2 = 20\Omega; R_3 = 30\Omega; R_4 = 40\Omega; R_5 = 50\Omega$

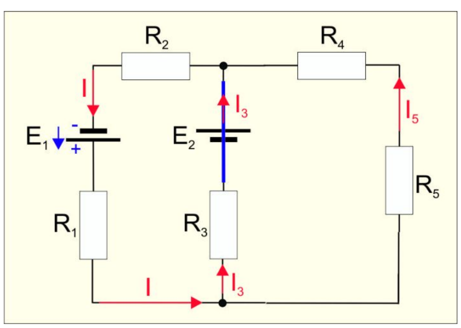


Abbildung 31: Die Spannungsquelle E_1 ist Ursache für die eingezeichneten Ströme.

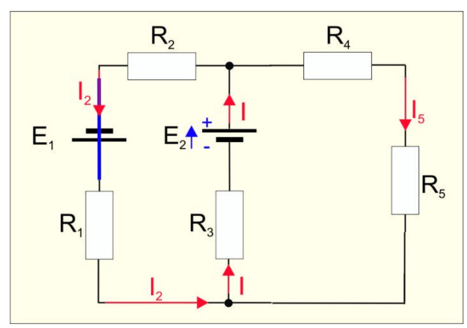


Abbildung 32: Die Spannungsquelle E_2 ist Ursache für die eingezeichneten Ströme.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Gesamtstroms, der nur von der Quelle E_1 erzeugt wird.

$$I = \frac{E_1}{R_{ges}}$$

$$R_{ges} = (R_1 + R_2) + R_3//(R_4 + R_5)$$

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \frac{R_3(R_4+R_5)}{R_3+R_4+R_5}$$

$$R_{ges} = \frac{R_1R_3+R_1R_4+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_4+R_2R_5+R_3R_4+R_3R_5}{R_3+R_4+R_5} = \frac{630\Omega^2}{120\Omega} = 52,5\Omega$$

$I = \frac{E_1}{R_{ges}} = \frac{10V}{52{,}5\Omega} = 190,48mA$

Wir wenden jetzt die Stromteilerregel an.

$\frac{I_5}{I} = \frac{R_3}{R_3+R_4+R_5}$

$I_5 = 190,48mA \cdot \frac{30\Omega}{120\Omega} = 47,62mA$

Im nächsten Schritt bestimmen wir auf die gleiche Art und Weise den Strom I_5, wenn nur die Spannungsquelle E_2 wirksam ist.

$I = \frac{E_2}{R_{ges}}$

$R_{ges} = R_3 + (R_1 + R_2)//(R_4 + R_5)$

$R_{ges} = R_3 + \frac{(R_1+R_2)\cdot(R_4+R_5)}{R_1+R_2+R_4+R_5}$

$R_{ges} = 30\Omega + \frac{30\Omega\cdot 90\Omega}{120\Omega} = 52,5\Omega$

$I = \frac{5V}{52{,}5\Omega} = 95,24mA$

$\frac{I_5}{I} = \frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_4+R_5}$

$I_5 = 95,24mA \cdot \frac{30\Omega}{120\Omega} = 0,0238mA$

Einen Sachverhalt müssen wir jedoch bedenken, denn der Strom, der durch die Spannungsquelle E_2 erzeugt wird, fließt entgegen dem Strom der Quelle E_2. Daraus folgt, dass wir die Differenz bilden müssen:

Ergebnis: $I_5 = I_{5_{E_1}} - I_{5_{E_2}} = 47,62mA - 23,8mA \approx 23,82mA$

Der Vergleich: Hier die Lösung nach der Zweipoltheorie (siehe Kapitel 1.3)

$I_5 = \frac{E_1 R_3 - E_2\cdot(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)\cdot(R_3+R_4+R_5)+R_3(R_4+R_5)}$

$I_5 = \frac{10V\cdot 30\Omega - 5V\cdot 30\Omega}{30\Omega\cdot 120\Omega + 30\Omega\cdot 90\Omega} = \frac{150V\Omega}{6300\Omega^2} = 23,8mA$

2.3 Die Methode

Wir fassen unsere Erkenntnisse aus dem ersten Beispiel zusammen und formulieren die Methode. Aber wir fassen auch unsere Erfahrungen zusammen und formulieren die Exklusionen der Methode.

Diese Methode ist **nur geeignet, wenn ....**

1. ... wir mehrere Energiequellen haben. Mit einer Spannungsquelle oder nur einer Stromquelle ist z.B. die Zweipoltheorie zu empfehlen, da keine Überlagerung von Strömen vorkommen kann.

2. ... wir einen Stromkreis mit Bauelementen mit nur linearer U/I-Charakteristik haben. Anders ausgedrückt, bei Dioden und Transistoren können und dürfen wir diese Methode nicht anwenden.

   In der Theorie der Gleichstromtechnik reduziert sich das auf den Ohmschen Widerstand. Der kapazitive Widerstand muss als unendlich angenommen werden, der induktive Widerstand als null.

3. .... wir Ströme und Spannungen bestimmen möchten. Bei resultierenden Größen, wie der elektrischen Leistung (Produkt aus der Spannung und dem Strom) oder der elektrischen Arbeit (Produkt aus Leistung und Zeit) ist dieses Verfahren nicht anwendbar.

Ergo ... worin besteht diese Methode?

1. Immer nur eine Energiequelle wird als wirksam betrachtet. Alle anderen Spannungsquellen werden virtuell kurz geschlossen, alle zusätzlichen Stromquellen erzeugen keine Stromeinspeisung.

   Die einzelne Energiequellen werden mathematisch nacheinander betrachtet. Die Bestimmung des resultierenden Gesamtwiderstandes R_{ges} differiert.

2. Nach der Stromteilerregel werden die Teilströme, bezogen auf die aktive Energiequelle, berechnet. Hierbei ist es von Vorteil, wenn wir uns bei Stromverzweigungen auf den Gesamtstrom beziehen.

3. Es muss festgehalten werden, in welche Richtung der jeweilige Teilstrom fließt.

4. Die Teilströme werden vorzeichenbehaftet addiert und ergeben den gesuchten Strom.

5. Ein resultierender negativer Strom bedeutet, dass unsere erste Annahme nicht richtig war. Unser grafischer Lösungsansatz ist nicht bindend. Wir beginnen mit einer logische Annahme, denn theoretisch liegen uns keine detaillierten Messdaten vor. Nur die praktische Messung der gesuchten Größen bestätigt unser theoretisches Ergebnis.

2.4 Berechnung eines umfangreichen Netzwerkes

Wir berechnen den Strom, der durch den Widerstand R_2 fließt.

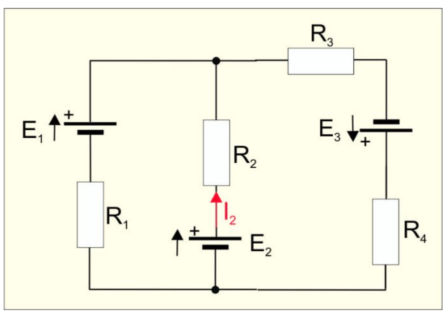


Abbildung 33: Die Richtung des Stromes I_2 wird frei festgelegt.

Gegeben:

$E_1 = 1V; E_2 = 2V; E_3 = 3V$

$R_1 = 10\Omega$

$R_2 = 20\Omega$

$R_3 = 30\Omega$

$R_4 = 40\Omega$

Der gesuchte Strom I_2 ist ein Teilstrom, daher bietet sich zur seiner Bestimmung die Anwendung der Stromteilerregel an.

Merksatz: Der Teilstrom einer Masche verhält sich zum Gesamtstrom, wie der nicht vom Teilstrom durchflossene Widerstand zur Summe aller Widerstände dieser Masche.

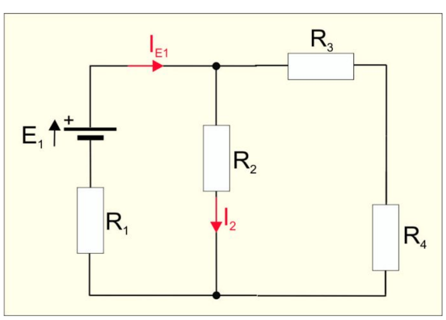


Abbildung 34: Die Richtung des Stromes I_2 aus der Quelle E_1wird als positiv festgelegt.

$$I_{E_1} = \frac{E_1}{R_{Gesamt}}$$

$$R_{Gesamt} = R_1 + [R_2//(R_3 + R_4)]$$

$$R_{Gesamt} = 10\Omega + \frac{20\Omega \cdot 70\Omega}{90\Omega}$$

$$R_{Gesamt} = 25,56\Omega$$

$$I_{E_1} = \frac{1V}{25,56\Omega} = 39,123mA$$

$$I_2 = I_{E_1} \cdot \frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4}$$

$$I_2 = 39,123mA \cdot \frac{70\Omega}{90\Omega} = 30,429mA$$

Der gesuchte Strom I_2 entspricht dem Gesamtstrom, wenn nur die Quelle E_2 aktiv ist. Wir müssen als nächsten Schritt den Gesamtersatzwiderstand dieser Schaltung bilden. Die Richtung des Stromes I_2 aus der Quelle E_2 wird als negativ festgelegt, bezogen auf die erste Annahme.

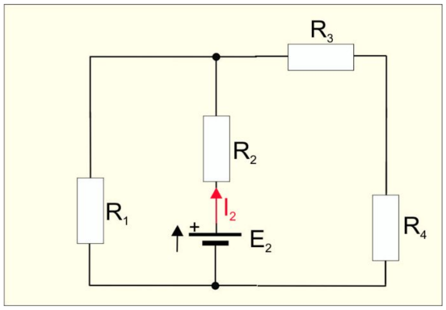


Abbildung 35: inverse Stromrichtung von I_2

$$I_{E2} = -\frac{E_2}{R_{Gesamt}}$$

$$R_{Gesamt} = R_2 + [R_1//(R_3 + R_4)]$$

$$R_{Gesamt} = 20\Omega + \frac{10\Omega \cdot 70\Omega}{80\Omega}$$

$$R_{Gesamt} = 28,75\Omega$$

$$-I_{E2} = -\frac{2V}{28{,}75\Omega} = -69,56mA$$

Der gesuchte Strom I_2 ist ein Teilstrom, daher bietet sich zur seiner Bestimmung wieder die Anwendung der Stromteilerregel an. Die Richtung des Stromes I_2 aus der Quelle E_3wird negativ festgelegt, bezogen auf die erste Annahme.

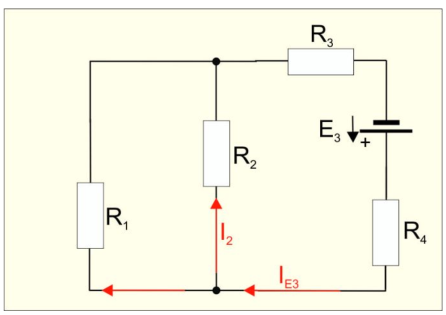


Abbildung 36: Die Stromrichtung von I_2

$$I_{E_3} = \frac{E_3}{R_{Gesamt}}$$

$$R_{Gesamt} = (R_3 + R_4) + (R_1//R_2)$$

$$R_{Gesamt} = 70\Omega + \frac{10\Omega \cdot 20\Omega}{30\Omega}$$

$$R_{Gesamt} = 76,67\Omega$$

$$I_{E_3} = \frac{3V}{76{,}67\Omega} = 39,129mA$$

$$-I_2 = I_{E3} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = -39,129mA \cdot \frac{10\Omega}{30\Omega} = -13,043mA$$

Das allgemeine Ergebnis: $I_2 = I_{2_{E1}} + I_{2_{E2}} + I_{2_{E3}}$

Das Ergebnis mit Zahlen: $I_2 = 30,429mA - 69,56mA - 13,043mA = -52,174mA$

Diskussion:

Wir erhalten einen negativen Betrag für die Stromstärke. Die Interpretation dieses negativen Vorzeichens lautet: Die technische Stromrichtung ist nicht wie in der Abbildung 29 angenommen, sondern wie in den Abbildungen 28, 30 und 31.

2.5 Ein Beispiel mit Stromeinspeisung

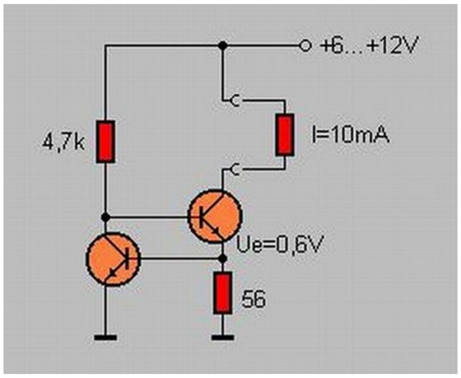


Abbildung 37: Eine Schaltungsvariante

Eine Autobatterie liefert konstant 12V. Wir nennen es eine Konstantspannungsquelle, damit die Bordelektronik elektrisch nominal versorgt wird. Nur während des Startens des Autos sinkt die Spannung auf unter 12V.

Was ist eine Konstantstromquelle?

Eine Konstantstromquellle liefert, weitgehend unabhängig von der Last, einen definierten Strom.

Wir berechnen den Strom, der durch den Widerstand R_4 fließt. Wir haben aus den letzten Beispielen die Spannungsquellen virtuell kurzgeschlossen und somit war pro Arbeits- bzw. Rechenschritt nur eine Energiequelle wirksam und hat daher nur einen Teilstrom erzeugt. Bei Stromquellen werden die Stromeinspeisungen durch einen unendlich hohen Widerstand symbolisiert, man schließt die Stromquelle nicht kurz, sondern lässt sie einfach weg. Das Ziel dieses Beispiel ist es, diese Methode zu verdeutlichen.

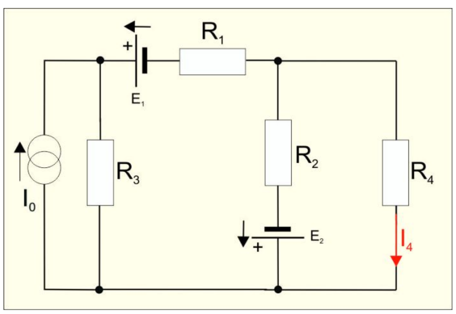


Abbildung 38: Die Richtung des Stromes I_4 wird erst einmal grafisch frei festgelegt.

Gegeben:

$E_1 = 1V; E_2 = 2V; I_0 = 100mA$

$R_1 = 10\Omega$

$R_2 = 20\Omega$

$R_3 = 30\Omega$

$R_4 = 40\Omega$

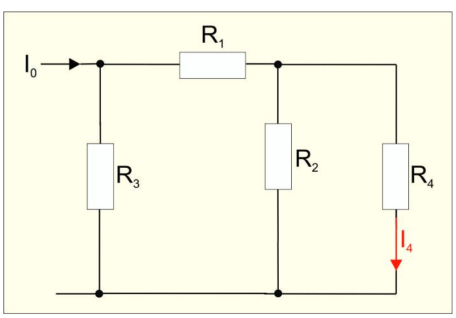


Abbildung 39: Wir erkennen einen doppelten Stromteiler. Die einzige Energiequelle ist die Einströmung von I_0.

$$\frac{I_0^1}{I_0} = \frac{R_3}{R^*}$$

$$R^* = R_3 + [R_1 + (R_2//R_4)]$$

$$R^* = 30\Omega + [10\Omega + \frac{800\Omega}{60\Omega}]$$

$$R^* = 53,34\Omega$$

$$I_0^1 = I_0 \cdot \frac{30\Omega}{53{,}34\Omega}$$

$$I_0^1 = 100mA \cdot \frac{30\Omega}{53{,}34\Omega} = 56,24mA$$

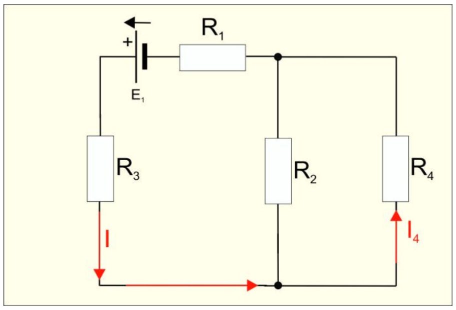


Abbildung 40: Wir betrachten den Strom I_4, der durch die Quelle E_1 hervorgerufen wird.

$$I_{E_1} = \frac{E_1}{R^*}$$
$$R^* = (R_1 + R_3) + (R_2 // R_4)$$
$$R^* = 40\Omega + \frac{800\Omega}{60\Omega}$$
$$R^* = 53,34\Omega$$
$$\frac{I_{4_{E_1}}}{I_{E_1}} = \frac{R_2}{R_2+R_4}$$
$$I_{4_{E_1}} = I_{E_1} \cdot \frac{20\Omega}{60\Omega}$$
$$I_{4_{E_1}} = 18,75mA \cdot \frac{1}{3} = 6,25mA$$

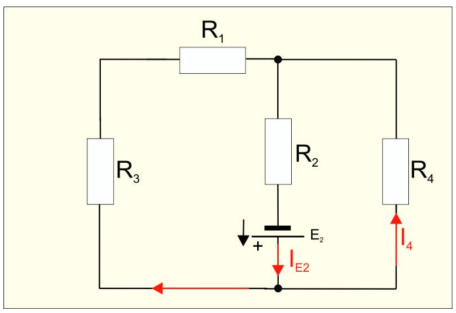


Abbildung 41: Wir betrachten den Strom I_4, der durch die Quelle E_2 hervorgerufen wird.

$$I_{E_2} = \frac{E_2}{R^*}$$
$$R^* = R_2 + [(R_1 + R_{3)} // R_4)$$
$$R^* = 20\Omega + \frac{1600\Omega}{80\Omega}$$
$$R^* = 40\Omega$$
$$\frac{I_{4_{E_2}}}{I_{E_2}} = \frac{R_2}{R_2+R_4}$$
$$I_{4_{E_2}} = \frac{2V}{40\Omega} \cdot \frac{20\Omega}{60\Omega}$$
$$I_{4_{E_2}} = 50mA \cdot \frac{1}{3} = \frac{50}{3}mA$$

Ergebnis: $I_4 = I_0^1 + I_{4_{E_1}} + I_{4_{E_2}}$

Diskussion: Wir definieren die dominante Stromrichtung, die von der Konstantstromquelle I_0 verursacht wird, als positiv. Aus den Skizzen erkennen wir, dass die beiden folgenden Teilströme, die den Widerstand R_4 durchströmen, eine inverse Stromrichtung besitzen. Aus diesem Grund werden sie mit einem negativen Vorzeichen bedacht.

$$I_4 = 56,24mA - 6,25mA - \frac{50}{3}mA \approx 33,3mA$$

3 Das Maschenstromverfahren

3.1 Die Idee

Es wird pro Masche nur ein virtueller Strom definiert. Wir erhalten eine reduzierte Anzahl von Strömen, gegenüber den reellen, physischen Strömen. Das Gleichungssystem wird dadurch drastisch reduziert und es können einfache algebraische Methoden zur Lösung herangezogen werden. Die einzige Bedingung besteht darin, dass ein virtueller Strom dem gesuchten physischen Strom entsprechen muss.

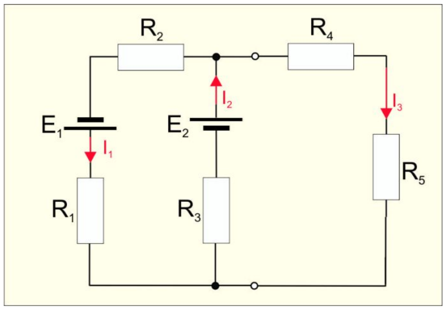


Abbildung 42: Drei physische Ströme sind in der Realität vorhanden.

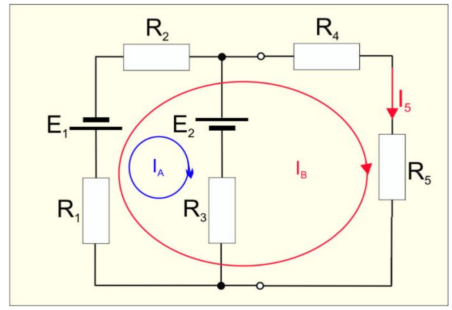


Abbildung 43: zwei Maschen bilden zwei virtuelle Ströme

3.2 Die Methode

- Benennung der Maschen und aufstellen der Maschengleichungen
- Maschenströme einzeichnen, alle Bauelemente müssen erfasst werden
- nach dem gesuchten Strom auflösen

3.3 Das erste Beispiel

Folgende Schaltung ist gegeben. Die allgemeine Lösung für die Berechnung des Stroms I_2 ist gesucht. Zur Wiederholung der möglichen Methoden, wird die Aufgabe entsprechend drei Mal exemplarisch durchgerechnet.

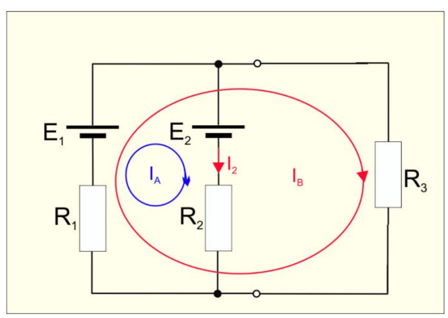


Abbildung 44: Der Strom I_2 ist gesucht, nach dem Maschenstrom I_A muss aufgelöst werden.

Aufstellen der Maschengleichungen:

$$M_1\textbf{:} \qquad E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + I_B R_1$$

$$M_2\textbf{:} \qquad E_1 = I_A R_1 + I_B(R_1 + R_3)$$

3.3.1 Die Lösung nach dem Additionsverfahren

$$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + I_B R_1 | \cdot -(R_1 + R_3)$$

$E_1 = I_A R_1 + I_B(R_1 + R_3)| \cdot R_1$

$(1)\ -(E_1 - E_2) \cdot (R_1 + R_3) = -I_A(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_3) - I_B R_1 \cdot (R_1 + R_3)$

$E_1 = I_A R_1 + I_B(R_1 + R_3)| \cdot R_1$

$(2)\ E_1 R_1 = I_A R_1^2 + I_B(R_1 + R_3) \cdot R_1$

Gleichung (1) wird zur Gleichung (2) addiert:

$E_1 R_1 - (E_1 - E_2) \cdot (R_1 + R_3) = I_A R_1^2 - I_A(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_3)$

$E_1 R_1 - E_1 R_1 - E_1 R_3 + E_2 R_1 + E_2 R_3 = I_A(R_1^2 - R_1^2 - R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_2 R_3)$

$E_1 R_3 - E_2 R_1 - E_2 R_3 = I_A(R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)$

$I_A = \frac{E_1 R_3 - E_2 R_1 - E_2 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} = \frac{E_1 R_3 - E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} = I_2$

3.3.2 Die Lösung nach dem Gleichsetzungsverfahren

$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + I_B R_1 \quad \Rightarrow \quad I_B = \frac{E_1 - E_2 - I_A(R_1 + R_2)}{R_1}$

$E_1 = I_A R_1 + I_B(R_1 + R_3) \quad \Rightarrow \quad I_B = \frac{E_1 - I_A R_1}{R_1 + R_3}$

$\frac{E_1 - E_2 - I_A(R_1 + R_2)}{R_1} = \frac{E_1 - I_A R_1}{R_1 + R_3}$

$[E_1 - E_2 - I_A(R_1 + R_2)](R_1 + R_3) = [E_1 - I_A R_1]R_1$

$E_1(R_1 + R_3) - E_2(R_1 + R_3) - I_A(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) = E_1 R_1 - I_A R_1^2$

$E_1(R_1 + R_3) - E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_1 = I_A(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) - I_A R_1^2$

$E_1(R_1 + R_3) - E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_1 = I_A[(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) - R_1^2]$

$I_A = \frac{E_1(R_1 + R_3) - E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) - R_1^2} = \frac{E_1 R_1 + E_1 R_3 - E_2 R_1 - E_2 R_3 - E_1 R_1}{R_1^2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1^2}$

$I_A = I_2 = \frac{E_1 R_3 - E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$

3.3.3 Die Lösung nach dem Einsetzverfahren

$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + I_B R_1$

$E_1 = I_A R_1 + I_B(R_1 + R_3)$

$I_B = \frac{E_1 - I_A R_1}{R_1 + R_3}$

$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + \frac{E_1 - I_A R_1}{R_1 + R_3} \cdot R_1$

$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) + \frac{E_1 R_1 - I_A R_1^2}{R_1 + R_3}$

$E_1 - E_2 = \frac{I_A[(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) + E_1 R_1 - I_A R_1^2}{R_1 + R_3}$

$$(E_1 - E_2)(R_1 + R_3) - E_1 R_1 = I_A[(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) - R_1^2]$$

$$I_A = \frac{(E_1 - E_2)(R_1 + R_3) - E_1 R_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) - R_1^2} = \frac{E_1 R_1 + E_1 R_3 - E_2 R_1 - E_2 R_3 - E_1 R_1}{R_1^2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1^2}$$

$$I_A = I_2 = \frac{E_1 R_3 - E_2 R_1 - E_2 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} = \frac{E_1 R_3 - E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

3.4 Ein Beispiel mit drei Maschen

Ziel dieses Beispiel ist es, ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu lösen. Aus diesem Grund wird die Cramer'sche Regel wiederholt und geübt.

Gegeben ist folgende Brückenschaltung:

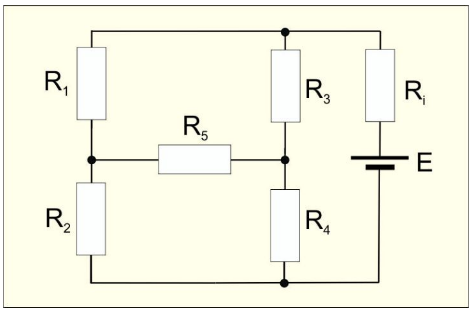


Abbildung 45: Die Werte für die Spannungsquelle und die Widerstände sind bekannt.

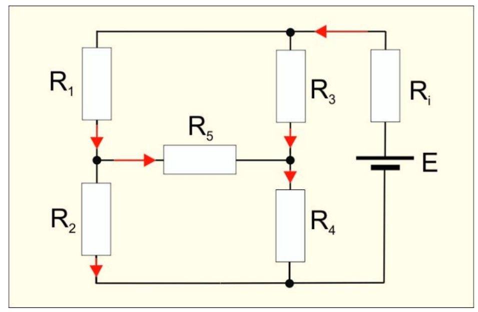


Abbildung 46: Es fließen sechs reelle Ströme, wir reduzieren es auf drei virtuelle.

Aufgabe: Gesucht ist die allgemeine Lösung für den Strom, der durch den Widerstand R_5 fließt. Die Werte der Widerstände sind am jeweiligen Bauelement gut ablesbar. Die Versorgungsspannung wird mittels digitaler Anzeige eingestellt und mit einem Voltmeter überprüft.

Wir erkennen drei Maschen. Den Maschenrichtungssinn definieren wir in Uhrzeigerrichtung. Desweiteren abstrahieren wir die Schaltung und bilden virtuelle Maschenströme passend zu den definieren Maschen A, B und C. Der gesuchte Strom durch den Widerstand R_5 entspricht dem Maschenstrom I_B.

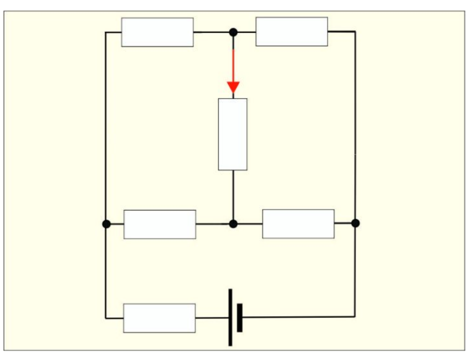


Abbildung 47: Die Schaltung in gedrehter und gespiegelter Ansicht abstrahiert.

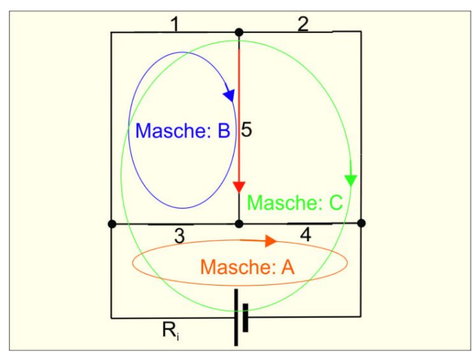


Abbildung 48: Drei Maschen ergeben drei Maschenströme und somit drei Maschengleichungen.

Aufstellen der Maschengleichungen:

$$M_A\text{: } E_1 = I_A(R_i + R_3 + R_4) - I_B R_3 + I_C R_i$$

$$M_B\text{: } 0 = -I_A R_3 + I_B(R_1 + R_5 + R_3) + I_C R_1$$

$$M_C\text{: } 0 = I_A R_i + I_B R_1 + I_C(R_1 + R_2 + R_i)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & -R_3 & R_i \\ -R_3 & (R_1 + R_3 + R_5) & R_1 \\ R_i & R_1 & (R_1 + R_2 + R_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & -R_3 & R_i & | & E \\ -R_3 & (R_1 + R_3 + R_5) & R_1 & | & 0 \\ R_i & R_1 & (R_1 + R_2 + R_i) & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_B = \frac{det(A_B)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & E & R_i \\ -R_3 & 0 & R_1 \\ R_i & 0 & (R_1 + R_2 + R_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & -R_3 & R_i \\ -R_3 & (R_1 + R_3 + R_5) & R_1 \\ R_i & R_1 & (R_1 + R_2 + R_i) \end{vmatrix}}$$

Lösung der Matrizen nach Sarrus:

$$\mathrm{det(A)} =$$

$$\begin{vmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & -R_3 & R_i & (R_i + R_3 + R_4) & -R_3 \\ -R_3 & (R_1 + R_3 + R_5) & R_1 & -R_3 & (R_1 + R_3 + R_5) \\ R_i & R_1 & (R_1 + R_2 + R_i) & R_i & R_1 \end{vmatrix}$$

$$[(R_i + R_3 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)(R_1 + R_2 + R_i) - R_3 R_1 R_i - R_3 R_1 R_i] -$$

$$R_i^2 (R_1 + R_3 + R_5) - R_1^2 (R_i + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_i) R_3^2 =$$

$$R_i(R_1R_5 + R_1R_2 + R_2R_3 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_iR_5) + R_3(R_1R_3 + R_3^2 + R_3R_5 + R_1R_5 + R_1R_2 + R_2R_5) + R_1^2(R_i + R_3 + R_4)$$

$$det(A_B) = \begin{vmatrix} (R_i + R_3 + R_4) & E & R_i & (R_i + R_3 + R_4) & E \\ -R_3 & 0 & R_1 & -R_3 & 0 \\ R_i & 0 & (R_1 + R_2 + R_i) & R_i & 0 \end{vmatrix}$$

$$= ER_1R_i + ER_3(R_1 + R_2 + R_i) = E(R_1R_i + R_1R_3 + R_2R_3 + R_iR_3$$

Lösung:

$$I_B = \frac{E(R_1R_i + R_1R_3 + R_2R_3 + R_iR_3)}{R_i(R_1R_5 + R_1R_2 + R_2R_3 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_iR_5) + R_3(R_1R_3 + R_3^2 + R_3R_5 + R_1R_5 + R_1R_2 + R_2R_5) + R_1^2(R_i + R_3 + R_4)}$$

$I_5 = I_B$

Wir vereinfachen den Ausdruck, indem wir $R_i = 0$ setzen:

$$I_5 = \frac{E(R_1R_3 + R_2R_3)}{R_3(R_1R_3 + R_3^2 + R_3R_5 + R_1R_5 + R_1R_2 + R_2R_5) + R_1^2(R_3 + R_4)}$$

Ist diese allgemeine Lösung plausibel?

Wir setzen die physikalischen Einheiten ein: $I_5[A] = \frac{E[V] \cdot R^2[\frac{V^2}{A^2}]}{R^3[\frac{V^3}{A^3}]} \rightarrow A$

4 Der belastete Spannungsteiler

Ein konstanter Arbeitswiderstand R_a liegt parallel zu einem konstanten Widerstand R_2, der wiederum mit dem Widerstand R_1 in Reihe liegt. Der resultierende Arbeitswiderstand R_a^* entspricht nicht mehr dem uns bekannten Widerstand R_a, sondern der Kombination aus $R_2//R_a$. Betrachten wir die Reihenschaltung aus R_1 und R_2 als variables Potentiometer der Größe **R**, so belastet der Arbeitswiderstand R_a diesen Spannungsteiler.

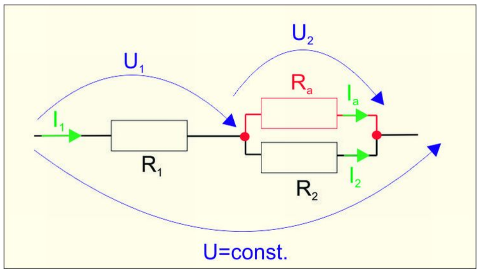


Abbildung 49: belasteter Spannungsteiler mit Festwiderständen

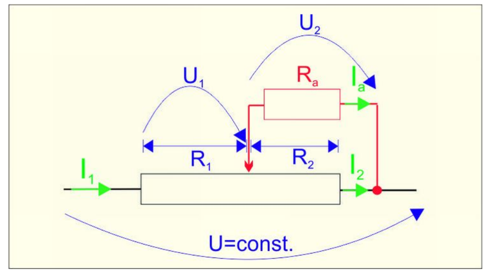


Abbildung 50: potentiometrischer, belasteter Spannungsteiler

Wir untersuchen diese Schaltung bezüglich des Strom- und Spannungsverhaltens, wenn wir den Teilwiderstand des Potentiometers R_2 variieren. Als Lösung werden wir die normierten Größen $\frac{I_a}{I_{max}}$, $\frac{U_2}{U}$ in Abhängigkeit von $\frac{R_2}{R}$ grafisch darstellen.

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2//R_a}{R_1+R_2//R_a} = \frac{R_2R_a}{[R_2+R_a]\cdot\left[R_1+\frac{R_2R_a}{R_2+R_a}\right]} = \frac{R_2R_a}{[R_2+R_a]\cdot\left[\frac{R_1(R_2+R_a)+R_2R_a}{R_2+R_a}\right]}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2R_a}{R_1R_2+R_1R_a+R_2R_a}$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$\nu = \frac{R_2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = \nu\cdot R \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R}{R_a} = const.$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2R_a}{R_1R_2+R_a(R_1+R_2)} = \frac{R_2R_a}{R_1R_2+R_aR} = \frac{\nu RR_a}{R_1R_2+R_aR} = \frac{\nu R_a}{\nu R_1+R_a} = \frac{\nu}{\nu\frac{R_1}{R_a}+1}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_a}+\frac{1}{\nu}}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{1}{\frac{R-R_2}{R_a}+\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\frac{R-\nu\cdot R}{R_a}+\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\frac{\nu(R-\nu R)+R_a}{\nu R_a}} = R_a\cdot\frac{\nu}{R(\nu-\nu^2)+R_a}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{\nu}{\frac{R}{R_a}\nu(1-\nu)+1} \qquad \Rightarrow I_a = \frac{U_2}{R_a} \qquad I_a = U\cdot\frac{1}{R_a}\left[\frac{\nu}{\frac{R}{R_a}\nu(1-\nu)+1}\right] = U\cdot\frac{\nu}{R(\nu-\nu^2)+R_a}$$

$$I_a = U\cdot\frac{\nu}{R(\nu-\nu^2)+R_a}$$

$$U_2 = U\cdot R_a\cdot\frac{\nu}{R(\nu-\nu^2)+R_a}$$

Der Verlauf von Spannung und Strom am Außenwiderstand R_a, in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{R_2}{R}$, unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor. In diesem Fall ist der Wert des Außenwiderstand R_a entscheidend für die Nichtlinearität.

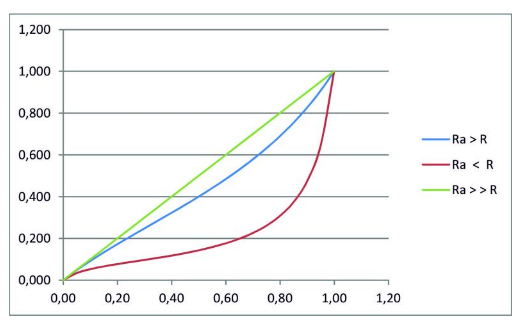


Abbildung 51: Der normierte Verlauf von U und I in Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{R_2}{R}$; R_a als Parameter

5 Die Thévenin- und Norton-Theoreme

Zusammenfassen von mehreren Spannungsquellen bei höherem Spannungsbedarf

- Spannungsquellen - die in Reihe geschaltet werden - addieren sich unter Beachtung der Vorzeichen (Richtungspfeil der Quelle beachten!). Die Innenwiderstände addieren sich!
- Spannungsquellen - die parallel geschaltet sind - werden in Stromquellen gewandelt. Die resultierenden Ströme werden unter Beachtung der Fließrichtung addiert.

Zusammenfassen von mehreren Spannungsquellen bei höherem Strombedarf

Wird mehr Strom vom Verbraucher benötigt, als eine einzelne Quelle liefern kann, sodass eine Parallelschaltung von Spannungsquellen erforderlich wird, so ist dies nur bedingt mit realen Quellen möglich. Es ist darauf zu achten, dass alle parallel geschaltete Spannungsquellen bezüglich der Spannung:

- den gleichen Betrag haben,
- das gleiche Vorzeichen (Polung) aufweisen,
- erdfrei sind oder am gleichen Pol geerdet sind. Bei mehr als einem Erdpunkt können geringe Differenzströme fließen (siehe Brummschleife) und
- Wechselspannungsquellen die gleiche Phase haben.

Werden diese Punkte nicht beachtet, so führt dies zu einem meist unerwünschten Stromfluss zwischen den Quellen. Je nach Stromhöhe und/oder Ausführung der Spannungsquelle kann dies zur Zerstörung einzelner Teilquellen führen.

Gemäß den Thévenin- und Norton-Theoremen lässt sich jede reale Spannungsquelle auch als eine reale Stromquelle ansehen. Welchen Begriff man verwendet, hängt davon ab, zu welcher Idealform das Verhalten der Quelle näher gesehen wird.

In der Theorie linearer elektrischer Netzwerke besagt das Norton-Theorem, dass jede mögliche Kombination von Spannungsquellen, Stromquellen und Widerständen bezüglich zweier Klemmen elektrisch äquivalent zu einer Parallelschaltung aus einer Stromquelle und einem Widerstand R ist. Diese Ersatzschaltung wird Ersatzstromquelle genannt.

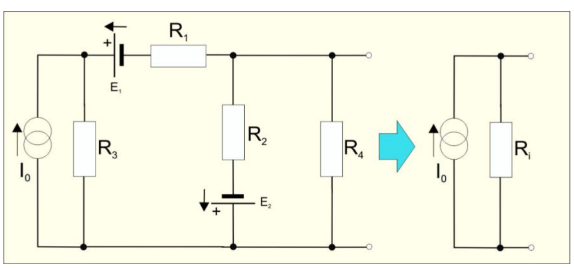


Abbildung 52: Norton-Schaltung - resultierende Konstantstromquelle

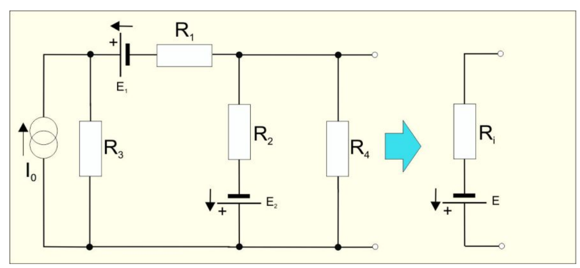


Abbildung 53: Thévenin-Schaltung - resultierende Konstantspannungsquelle

Frage:

In einer Black-Box befindet sich eine Norton-Schaltung, in einer zweiten eine Thévenin-Schaltung. Kann von außen festgestellt werden, wo die „Norton-Schaltung“ steckt?

Antwort:

Die Black-Box mit der Norton-Schaltung ist im Leerlauf wärmer, denn die Norton-Schaltung entspricht einer Stromquelle mit einem Parallelwiderstand. Es fließt immer ein Strom durch den Quellenwiderstand. Die elektrische Leistung am Widerstand wird in Wärme umgesetzt. $P_{Norton} = I_{Norton}^2 \cdot R_{Norton}$.

Die Thévenin-Schaltung nimmt im Leerlauf keine Leistung auf, da kein Stromfluss zustande kommen kann. Aus diesem Grund wird die „Thévenin-Schaltung“ nicht wärmer.

Die Äquivalenz zwischen den beiden Schaltung besteht nur bezüglich der Ausgangsklemmen.

Werden die Klemmen kurz geschlossen, dann fließt in der „Thévenin-Schaltung“ ein Strom: $I_K = \frac{E}{R_i}$. Somit wird die Leistung: $P_{Thvenin} = \frac{E^2}{R_i}$ umgesetzt.

Die Norton-Schaltung kann im Kurzschlussfall keine Leistung aufnehmen, da der Norton-Widerstand durch die Klemmen kurz geschlossen ist.

Die Leistung ist konstant! Die Leistung, die die Norton-Schaltung im Leerlauf aufnimmt, ist gleich groß der Leistung, die von der Thévenin-Schaltung im Fall des Kurzschlusses aufgenommen wird.

5.1 Umwandlung einer Spannungs- in eine Stromquelle

Die entscheidende Frage lautet: **Wann muss ich diese Wandlung vornehmen?** - Wenn Spannungsquellen parallel zur Schaltung und anderen Stromquellen wirken. Parallele Spannungsquellen sind immer ein Problem, denn zu viel Randbedingungen müssen vor dem praktischen Einsatz berücksichtigt werden. Bei mehreren Spannungsquellen die in Reihe geschaltet sind, ist deren Handhabung wesentlich einfacher.

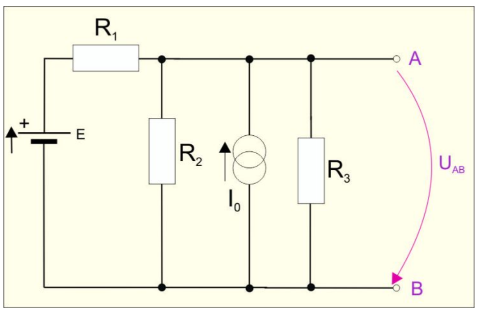


Abbildung 54: Spannungsquelle wird zur Stromquelle

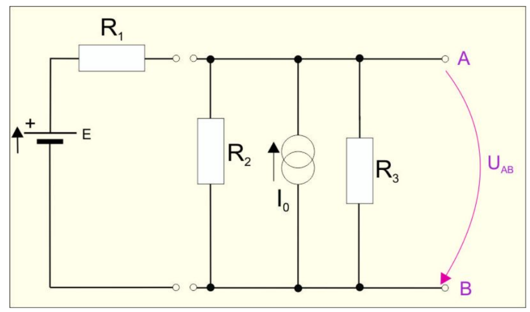


Abbildung 55: Abtrennung der Spannungsquelle und R_i

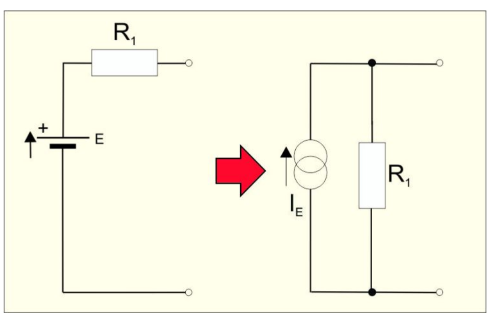


Abbildung 56: der Innenwiderstand bleibt gleich

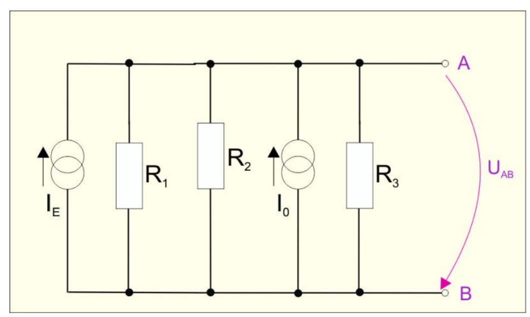


Abbildung 57: Zusammenführung mit der Schaltung

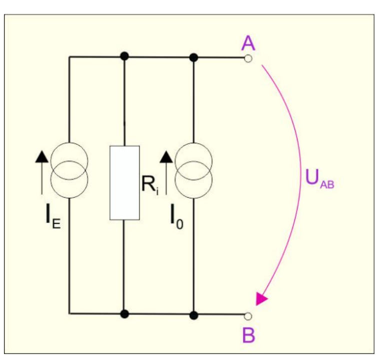


Abbildung 58: Alle parallel liegenden Widerstände können durch R_i ausgedrückt werden.

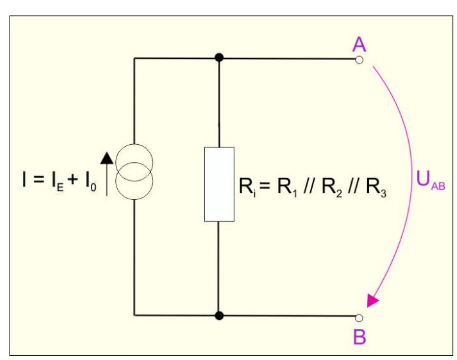


Abbildung 59: beide Stromquellen werden addiert

5.2 Umwandlung einer Strom- in eine Spannungsquelle

Die entscheidende Frage lautet: **Wann muss ich diese Wandlung vornehmen?** - Wenn Stromquellen zu anderen Strom- oder Spannungsquellen geschaltet werden. Eine Stromquelle kann theoretisch als Stromeinspeisung mit unendlich hohem Innenwiderstand betrachtet werden. Dieser Ansatz ist theoretisch akzeptabel, jedoch gibt es in der Praxis keine unendlichen Innenwiderstände oder Ohmschen Widerstände mit dem Wert null.

Die Wandlung einer reellen Stromquelle in eine Spannungsquelle erfolgt zum entsprechenden Analogon.

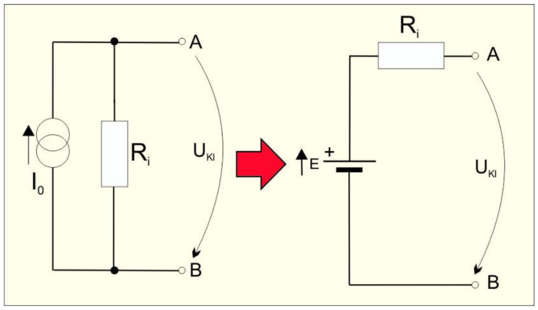


Abbildung 60: Im Leerlauf der Stromquelle fließt der maximale Strom $I_0 = \frac{U_{AB}}{R_i}$

$$U_{AB} = U_{Kl} = I_K \cdot R_i = E - I \cdot R_i$$

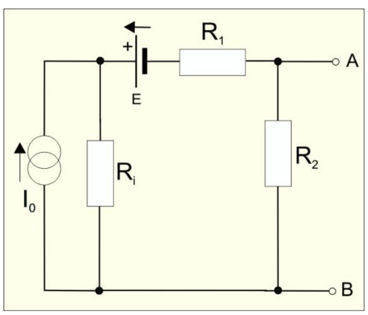


Abbildung 61: Die Wandlung: $\frac{I_0}{R_i} \rightarrow E_0$

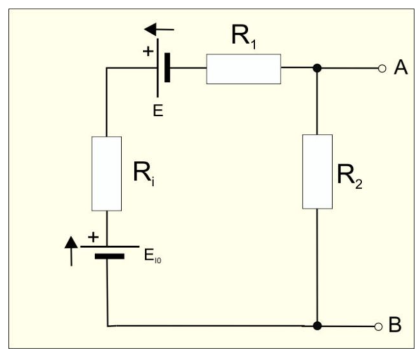


Abbildung 62: $E_0 - E = E_{ges}$, $R_i + R_1 = R_{i_{ges}}$

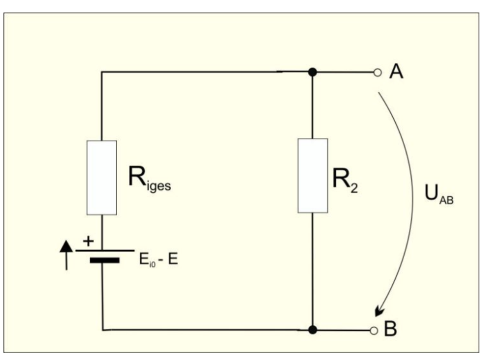


Abbildung 63: Die Ersatzschaltung

Das Ergebnis:

$$U_{AB} = (E_{I0} - E) \cdot \frac{R_2}{R_{iges} + R_2}$$

$$U_{AB} = E_{ges} \cdot \frac{R_2}{R_{iges} + R_2}$$

6 Übungsaufgaben

6.1 Aufgaben zur Zweipoltheorie

6.1.1 Berechnen Sie die Leerlaufspannung, den Kurzschlussstrom und den inneren Widerstand

a) Folgende Schaltung ist gegeben

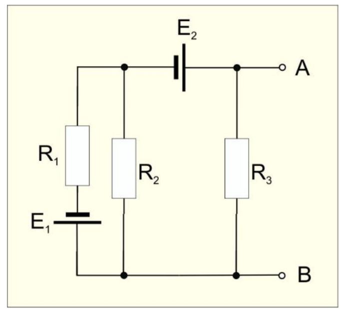


Abbildung 64: $E_1 = 1V, E_2 = 4V, R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, R_3 = 20\Omega$

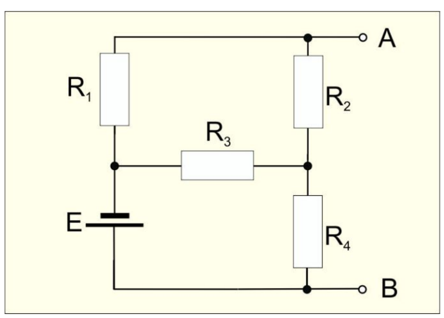
Lösungen:

$$R_i = 2,857\Omega$$

$$I_K = 1A$$

$$U_l = 2,858V$$

b) Folgende Schaltung ist gegeben



Gegeben:

$E = 1V$

$R_1 = 10\Omega$

$R_2 = 20\Omega$

$R_3 = 30\Omega$

$R_4 = 40\Omega$

Abbildung 65: gesucht sind die Ersatzgrößen des Ersatzgrundstromkreises

Lösungen:

$$R_i = 7,88\Omega$$

$$I_K = 0,1A$$

$$U_l = 0,788V$$

6.1.2 Berechnen Sie den passiven Zweipol - den Ersatzwiderstand zwischen zwei Punkten

a) Aufgabe: Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den Punkten A und F!

Folgende Anordnung von Widerständen ist gegeben:

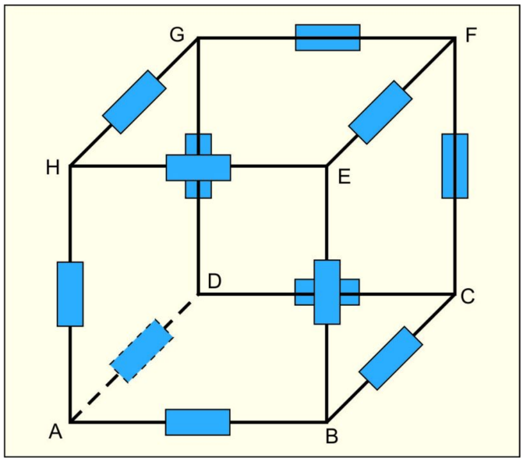


Abbildung 66: Jede Kante hat einen Widerstand von 100Ω

Lösungsansatz:

- Wir stellen fest, das vom Punkt A drei gleiche Widerstände zu den Punkten BDH gehen.
- Da der Würfel symmetrisch aufgebaut und jeder Widerstand gleich ist, so müssen die Potenziale BDH gleich sein.
- Sind die Potenziale BHD gleich, dann fließt kein Strom zwischen den Punkten, auch wenn sie miteinander elektrisch verbunden werden.
- Damit liegen die Widerstände zwischen den drei Punktepaaren AB, AD und AH parallel.

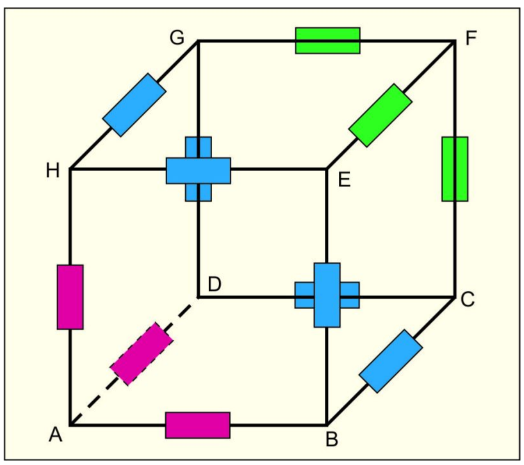


Abbildung 67: Die Symmetrie des Würfels

- Alle Betrachtungen für den Punkt A gelten auch für den Punkt F.
- Die in grüner Farbe dargestellten Widerstände liegen parallel, da die Punkte CEG auf dem gleichen Potenzial liegen, jedoch ist es nicht das Potenzial auf dem die Punkte BDH sind.
- Die Anschlüsse CEG können auch miteinander verbunden werden, da ohne Potenzial unterschied kein Strom fließen kann.
- Die verbleibende Frage ist, wie liegen die blauen Widerstände zu den beiden Potenzialen BDH und CEG.

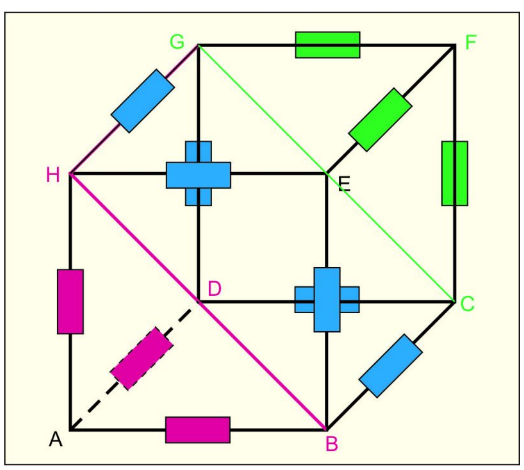


Abbildung 68: Die beiden Potenzialniveaus des Würfels

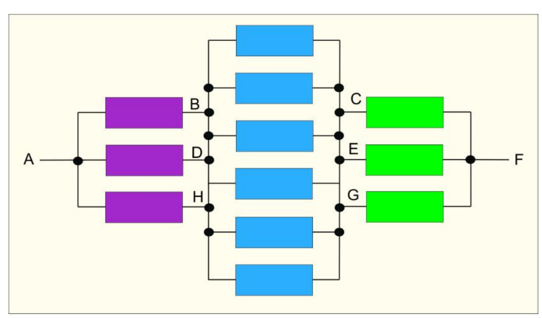


Abbildung 69: Die Widerstandsanordnung

Lösung: $R_{AF} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R = 83,34\Omega$

b) Aufgabe: Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den Punkten A und B!

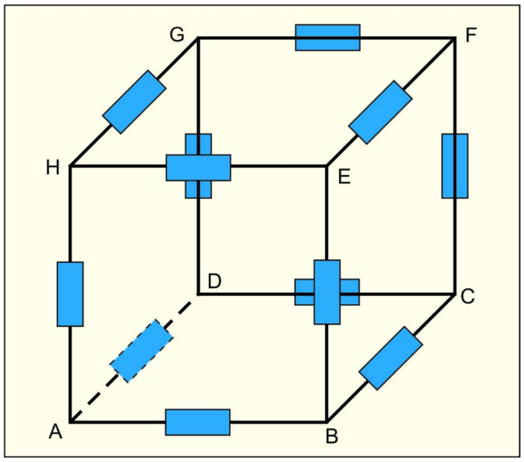


Abbildung 70: Jede Kante hat den Widerstand R

Lösungsansatz:

- Wir stellen fest, das vom Punkt A zwei gleiche Widerstände zu den Punkten D und H gehen.
- Da der Würfel symmetrisch aufgebaut und jeder Widerstand gleich ist, so müssen die Potenziale DH gleich sein.
- Sind die Potenziale DH gleich, dann fließt kein Strom zwischen den Punkten, auch wenn sie miteinander elektrisch verbunden werden.
- Damit liegen die Widerstände zwischen den Punktepaaren AD und AH parallel.
- Die gleiche Logik gilt auch für den Punkt B und deren Endpunkten C und E.

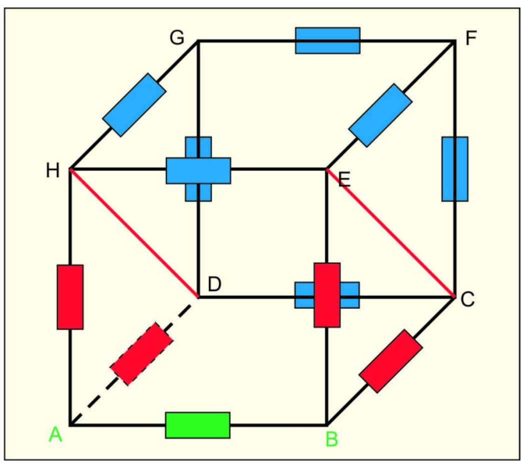


Abbildung 71: Die Schnittebene des Würfels

- Alle Betrachtungen für den Punkt A gelten auch für den Punkt B. Die Schnittebene des Widerstandswürfels ist anders, als bei der Aufgabe a).
- Die in grüner Farbe dargestellten Widerstand zwischen den Punkten A und B liegt parallel zur restlichen Anordnung.
- Durch die Anordnungssymmetrie gelten alle Schlussfolgerungen auch für die Punkte F und G.

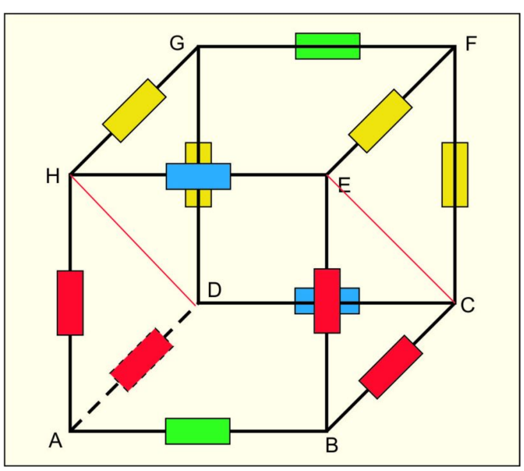


Abbildung 72: Die beiden Potenzialniveaus des Würfels

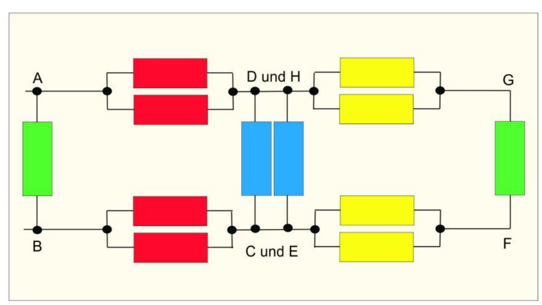


Abbildung 73: Die Widerstandsanordnung

Es gilt: $R^* = R_{Blau} // (R_{Gelb} + R_{Gruen})$

$$R^* = \frac{R}{2} // (\frac{R}{2} + R + \frac{R}{2}) = \frac{2}{5}R$$

$$R_{AB} = R_{Gruen} // (R_{Rot} + R^*) = R // (R + R^*)$$

Lösung: $R_{AB} = \frac{7}{12}R$

c) Aufgabe: Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den Punkten A und H!

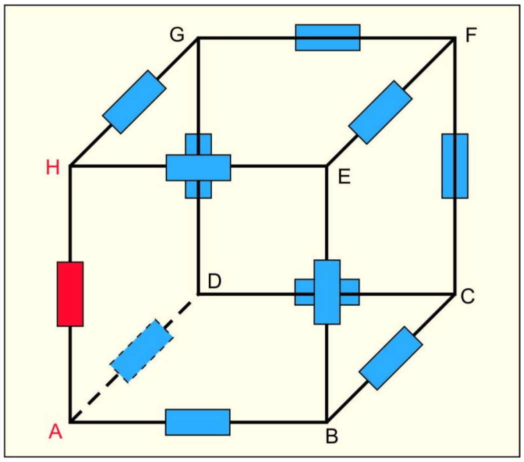


Abbildung 74: Die dritte Schnittebene des Würfels

- Alle Betrachtungen für den Punkt A gelten auch für den Punkt H.
- Die Schnittebene ergibt sich zwischen den Punkten E und G und zwischen B und D.
- Durch die Symmetrie der Anordnung hinter der Schnittebene können wir behaupten, dass B, D, E und G das gleiche Potenzial besitzen.
- Wenn B, D, E und G das gleiche Potenzial besitzen, dann können die Widerstände zwischen den Punkten BD und GE weggelassen werden.

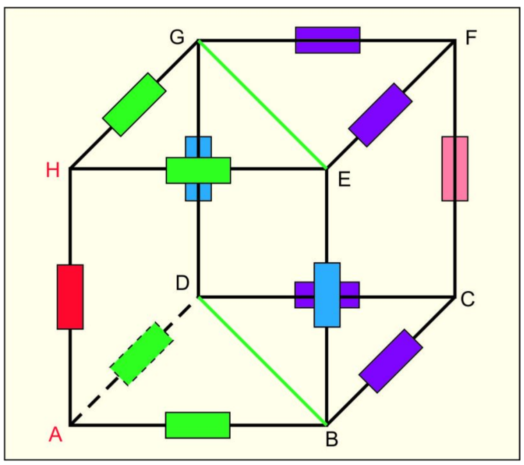


Abbildung 75: Die dritte Schnittebene in Farbe

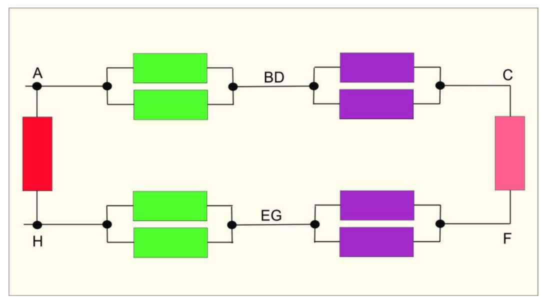
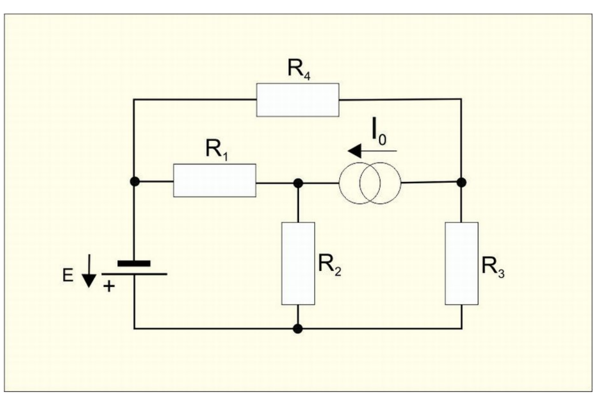


Abbildung 76: Die Widerstandsanordnung

$$R_{AH} = R//3R = \frac{R \cdot 3R}{4R} = \frac{3}{4}R$$

6.2 Aufgaben zum Überlagerungsverfahren

a) Berechnen Sie alle Ströme durch die Widerstände R_1 bis R_4. Die Einströmung durch die Konstantstromquelle beträgt: $I_0 = 0,1A$.



$R_1 = 15\Omega$

$R_2 = 10\Omega$

$R_3 = 22\Omega$

$R_4 = 33\Omega$

$E = 6,6V$

$I_0 = 0,1A$

Abbildung 77: Schaltung mit einer Konstantspannungsquelle und einer Einströmung

Lösungsweg:

- Die Stromquelle wird geöffnet, es findet keine Stromeinspeisung statt.
- Wir stellen fest: $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$.
- Die Spannung E liegt parallel über den beiden Widerstandkombinationen, d.h. $I_1 = I_2 = \frac{E}{I_1+I_2} = \frac{6{,}6V}{25\Omega} = 264mA \Rightarrow I_{a_{12}} = I_1 = I_2 = 264mA$
- Die Spannung E liegt parallel über den beiden Widerstandkombinationen, d.h. auch $I_3 = I_4 = \frac{E}{I_3+I_4} = \frac{6{,}6V}{55\Omega} = 120mA \Rightarrow I_{a_{34}} = I_3 = I_4 = 120mA$
- Die Spannungsquelle wird kurzgeschlossen und nur die Stromeinspeisung ist aktiv.

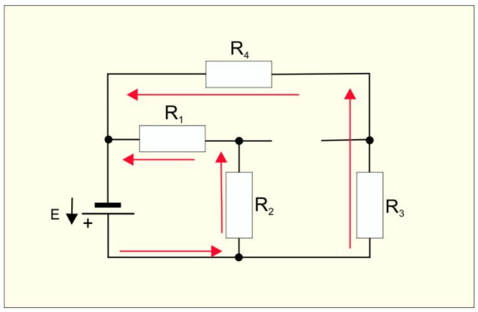


Abbildung 78: Stromrichtungen mit Spannungsquelle E

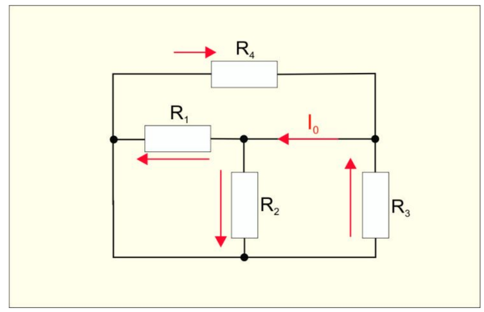


Abbildung 79: Stromrichtungen mit Stromquelle I_0

Lösungen für die Stromquellenschaltung:

- $I_1 = I_0 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 0,1A \cdot \frac{10\Omega}{25\Omega} = 40mA \Rightarrow I_{b_1}$
- $I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} = 0,1A \cdot \frac{15\Omega}{25\Omega} = 60mA \Rightarrow I_{b_2}$
- $I_3 = I_0 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = 0,1A \cdot \frac{33\Omega}{55\Omega} = 60mA \Rightarrow I_{b_3}$
- $I_4 = I_0 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} = 0,1A \cdot \frac{22\Omega}{55\Omega} = 40mA \Rightarrow I_{b_4}$

Wir stellen aus den beiden Skizzen fest:

Die Ströme $I_{1_a} + I_{1_b}$ sind in beiden Fällen gleichgerichtet, d.h. beide Ströme addieren sich.

Die Ströme $I_{2_a} - I_{2_b}$ fließen entgegengesetzt, d.h. wir subtrahieren den b- vom a-Betrag.

Die Ströme $I_{3_a} + I_{3_b}$ sind in beiden Fällen gleichgerichtet, d.h. beide Ströme addieren sich.

Die Ströme $I_{4_a} - I_{4_b}$ fließen entgegengesetzt, d.h. wir subtrahieren den b- vom a-Betrag.

Gesamtlösung:

$$I_1 = I_{1_a} + I_{1_b} = 264mA + 40mA = 304mA$$

$$I_2 = I_{2_a} - I_{2_b} = 264mA - 60mA = 204mA$$

$$I_3 = I_{3_a} + I_{3_b} = 120mA + 60mA = 180mA$$

$$I_4 = I_{4_a} - I_{4_b} = 120mA - 40mA = 80mA$$

b) Berechnen Sie alle Ströme durch die Widerstände R_1 bis R_4. Die Einströmung durch die Konstantstromquelle beträgt: $I_0 = 0A$.

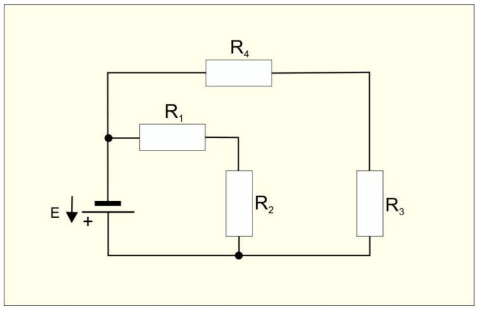


Abbildung 80: Schaltung ohne Einströmung

- Die Widerstände R_1 und R_2 werden zum Widerstand R_{12} zusammengefasst. $R_{12} = 25\Omega$
- Die Widerstände R_3 und R_4 werden zum Widerstand R_{34} zusammengefasst. $R_{34} = 55\Omega$
- $I_{ges} = \frac{E}{R_{12}//R_{34}} = \frac{6{,}6V}{17{,}1875\Omega} = 384mA$
- $I_1 = I_2 = I_{ges} \cdot \frac{R_{34}}{R_{12}+R_{34}} = 384mA \cdot \frac{55\Omega}{80\Omega} = 264mA$
- $I_3 = I_4 = I_{ges} - I_2 = 120mA$
- **alternativ:**

  $I_3 = I_4 = I_{ges} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12}+R_{34}} = 120mA \cdot \frac{55\Omega}{80\Omega} = 264mA$

c) Berechnen Sie den Strom I

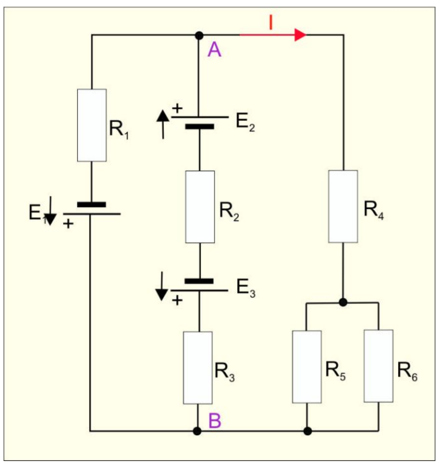


Abbildung 81: Die Schaltung

$E_1 = 48V; E_2 = 72V; E_3 = 18V$

$R_1 = 60\Omega$

$R_2 = 50\Omega$

$R_3 = 30\Omega$

$R_4 = 40\Omega$

$R_5 = R_6 = 80\Omega$

Lösung: $I = I_{E_1} + (-I_{E_{23}}) = 37{,}5mA$

d) Berechnen Sie den Srom I

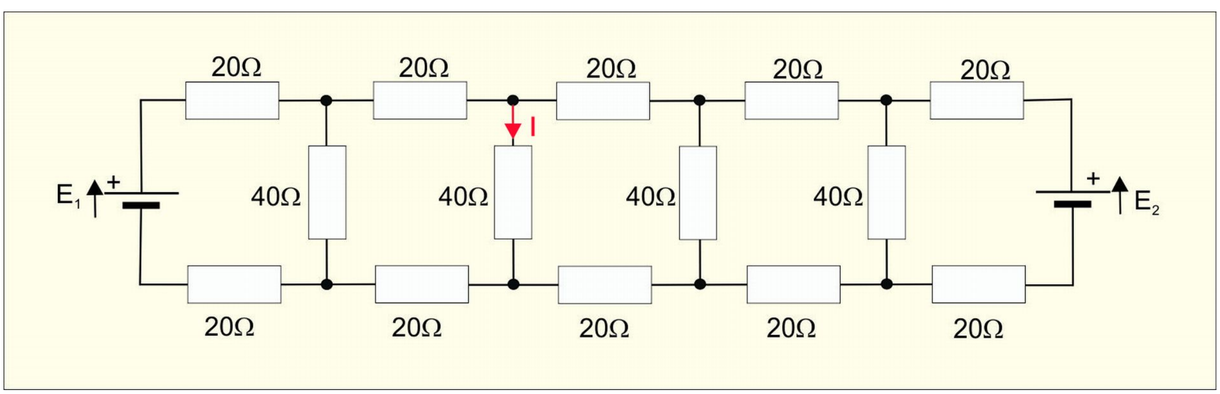


Abbildung 82: Die Schaltung

$E_1 = 80V; E_2 = 60V$

Lösung: $I = I_{E_1} + I_{E_2} = 373mA$

7 Musterlösungswege

7.1 Lösungen zur Zweipoltheorie

7.1.1 Lösungsweg zur Aufgabe 3.1.1 a)

Wir bestimmen den Innenwiderstand R_i, indem wir die Spannungsquellen kurzschließen. Wir erhalten eine Parallelschaltung dreier Widerstände.

Merksatz: Der Ersatzleitwert einer Parallelschaltung ist die Summe aller Einzelleitwerte. Der Ersatzwiderstand ist der reziproke Wert des Ersatzleitwertes.

Der Ersatzwiderstand entspricht dem gesuchten Innenwiderstand R_i!

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{(R_2R_3)+(R_1R_3)+(R_1R_2)}{R_1R_2R_3}$$

$$= \frac{200\Omega^2+100\Omega^2+50\Omega^2}{(5\cdot 10\cdot 20)\Omega^3}$$

$$R_i = 2,857\Omega$$

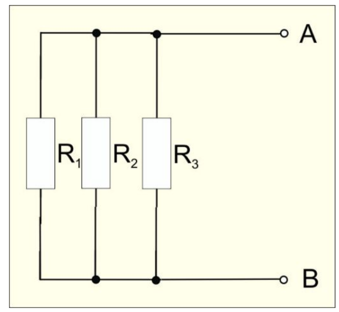


Abbildung 83: Die Parallelschaltung bildet den R_i

Wir bestimmen den Kurzschlussstrom. Da zwei Spannungsquellen vorhanden sind, werden zwei Teilkurzschlussströme generiert. Der Gesamtkurzschlussstrom ist die Summe der Teilkurzschlussstromströme.

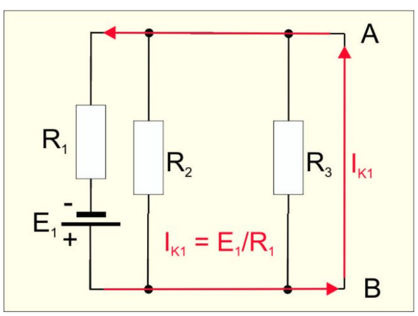


Abbildung 84: $I_{K_1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{1V}{5\Omega} = -0,2A$

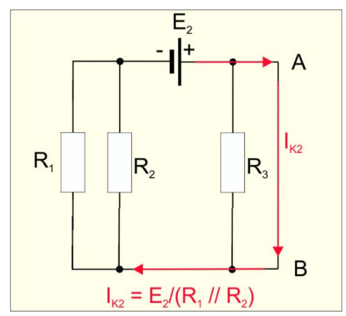


Abbildung 85: $I_{K_2} = \frac{E_2}{R_1//R_2} = 4V\frac{15\Omega}{50\Omega^2} = +1,2A$

Ergebnis für I_K: $I_{K_1} + I_{K_2} = 1\text{A}$

Da die Quelle E_2 eine höhere Spannung zur Verfügung stellt als E_1, aus diesem Grund wid die Stromrichtung von I_{K_2} als positiv angenommen.

Wir berechnen die letzte gesuchte Größe, die Leerlaufspannung an den Klemmen AB. Diese Spannung entspricht dem Spannungsabfall über dem Widerstand R_3.

Beide Spannungsquellen E_1 und E_2 generieren jeweils einen eigenen Strom durch den Widerstand R_3. Wir stellen fest, dass die Teilströme gegeneinander gerichtet sind, wenn wir den jeweiligen Stromfluss vom höheren zum niederen Potenzial einzeichnen. Zum Widerstand R_3 haben wir keinen weiteren endlichen Widerstand (Last frei und somit kein Stromfluss), denn wir suchen die Leerlaufspannung zwischen den Punkten A und B. Vergleichen Sie diese Abbildung mit der Abbildung 22.

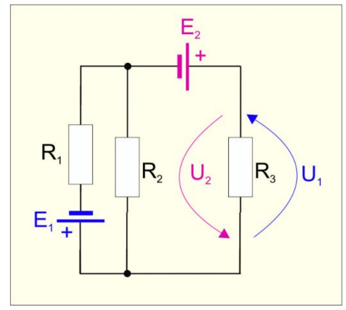


Abbildung 86: Die Leerlaufspannung ist die Differenz der beiden Spannungsabfälle E_1 und E_2.

Der angewendete Spannungsteiler mit der Quelle E_1:

$$\frac{U_1}{E_1} = \frac{R_2//R_3}{R_1+(R_2//R_3)}$$

$$R_2//R_3 = R_x$$

$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3} = \frac{200\Omega^2}{30\Omega} = 6,67\Omega$$

$$U_1 = E_1 \cdot \frac{R_x}{R_x+R_1} = 1V \cdot \frac{6{,}67\Omega}{11{,}67\Omega} = 0,572V$$

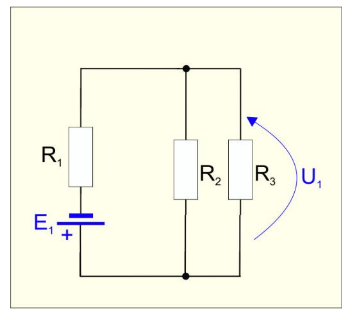


Abbildung 87: Der Spannungsabfall resultierend aus der Quelle E_1 über dem Widerstand R_3.

Der angewendete Spannungsteiler mit der Quelle E_2:

$$\frac{U_2}{E_2} = \frac{R_3}{R_3+(R_1//R_2)}$$

$$R_1//R_2 = R_y$$

$$R_y = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = \frac{50\Omega^2}{15\Omega} = 3,34\Omega$$

$$U_2 = E_2 \cdot \frac{R_3}{R_y+R_3} = 4V \cdot \frac{20\Omega}{23{,}34\Omega} = 3,43V$$

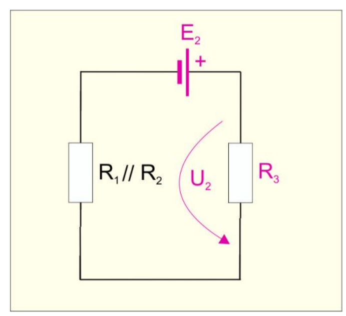


Abbildung 88: Der Spannungsabfall resultierend aus der Quelle E_2 über dem Widerstand R_3.

Lösung für U_l: $U_2 - U_1 = 3,43V - 0,572V = 2,858V$

Wir stellen fest, dass die Spannung U_2 größer ist als die Spannung U_1. Die resultierende Spannungsabfälle über dem Widerstand R_3 sind entgegen gerichtet, sodass wir die Differenz bilden müssen und die kleiner Spannung von der größeren subtrahieren.

7.1.2 Lösungsweg zur Aufgabe 3.1.1 b)

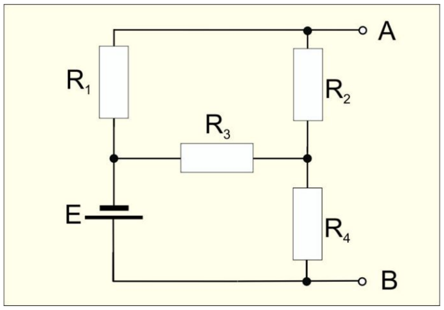


Abbildung 89: Die Ausgangsschaltung

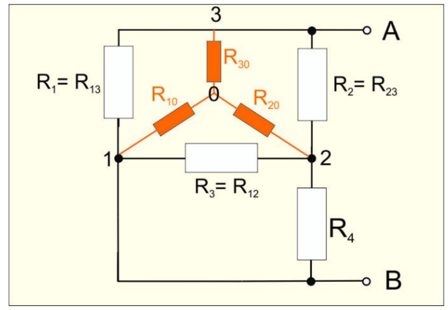


Abbildung 90: Der erste Ansatz zur Bestimmung von R_i

$$R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_3 \cdot R_1}{60\Omega} = \frac{300\Omega^2}{60\Omega} = 5\Omega$$

$$R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_3 \cdot R_2}{60\Omega} = \frac{600\Omega^2}{60\Omega} = 10\Omega$$

$$R_{30} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 \cdot R_2}{60\Omega} = \frac{200\Omega^2}{60\Omega} \approx 3,34\Omega$$

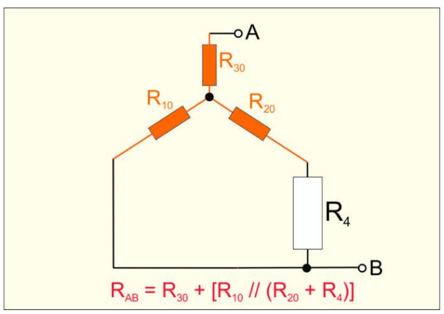


Abbildung 91: Der Ersatzwiderstand $R_{AB} = R_i$

$$R_{AB} = 3,34\Omega + [5\Omega // (10\Omega + 40\Omega)]$$

$$R_{AB} = 3,34\Omega + [5\Omega // (50\Omega)]$$

$$R_{AB} = 3,34\Omega + \frac{5 \cdot 50\Omega^2}{55\Omega}$$

$$R_{AB} = 7,88\Omega$$

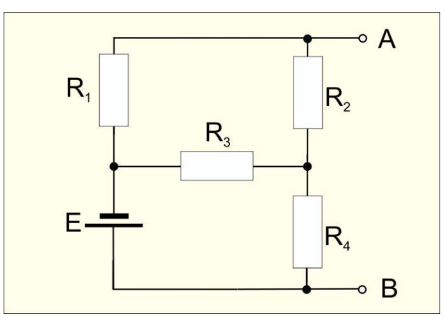


Abbildung 92: Die Ausgangsschaltung

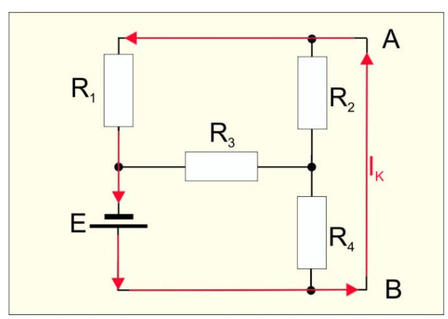


Abbildung 93: Der Ansatz zur Bestimmung des Kurzschlussstromes.

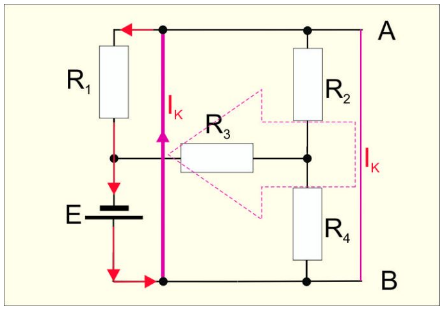


Abbildung 94: Der wirksame Kurzschluss überbrückt R_2, R_3 und R_4.

Der Widerstand R_1 liegt mit seinem oberen Anschluss galvanisch am Punkt A. Der Punkt B ist direkt mit dem Pluspol der Spannungsquelle verbunden. Der Kurzschluss zwischen den Punkten A und B kann grafisch so verschoben werden, dass erkennbar wird, dass die Widerstände R_2, R_3 und R_4 keine Bedeutung bei der Bestimmung des Kurzschlussstromes besitzen. Es gilt somit:

$$I_K = \frac{E}{R_1} = \frac{1V}{10\Omega} = 0,1A$$

Da bereits zwei von drei gesuchten Größen bekannt sind, können wir für die Leerlaufspannung U_l folgenden Ansatz formulieren: $U_l = R_i \cdot I_K$

$$U_l = R_i \cdot I_K = 7,88\Omega \cdot 0,1A = 0,788V$$ **Der alternative Lösungsweg für U_l:**

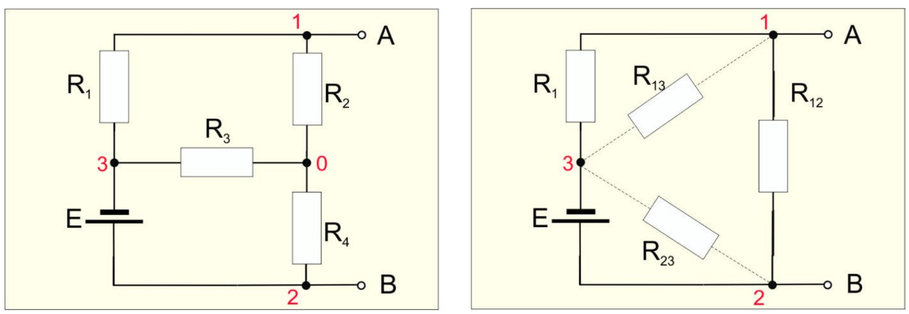


Abbildung 95: Wir transformieren die Widerstand-Stern- in eine Dreieckschaltung.

Die Spannungsquelle E wirkt direkt parallel zum Widerstand R_{23}. Damit ist die Spannung E gleichermaßen auch wirksam über der Parallelschaltung von R_1 und R_{13} in Reihe zum Widerstand R_{12}. Die gesuchte Leerlaufspannung U_l entspricht der Spannung zwischen den Punkten A und B und somit ist es der Spannungsabfall über R_{12}. Um die elektrische Sachlage weiter zu verdeutlichen, wird eine letzte helfende Skizze angefertigt.

Der weiter Lösungsweg:

Wir wenden den Spannungsteiler an und erhalten: $U_l = U_{AB} = U_{R_{12}} = E \cdot \frac{R_{12}}{R_{12}+(R_1//R_{13})}$

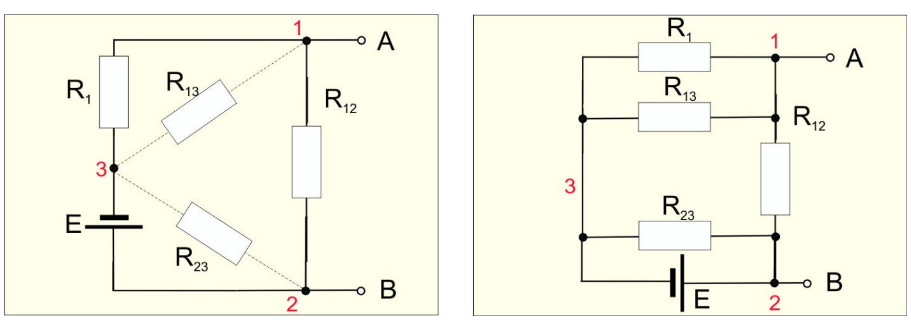


Abbildung 96: Wir erkennen, dass der Widerstand R_{23} bei der Bestimmung von U_l keine Bedeutung besitzt.

7.1.3 Lösungsweg zur Aufgabe 1.5.2

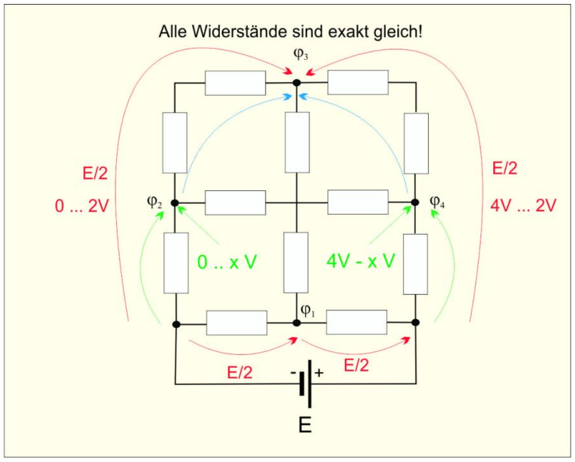


Abbildung 97: Wir verteilen die Spannung auf die symmetrische Schaltung.

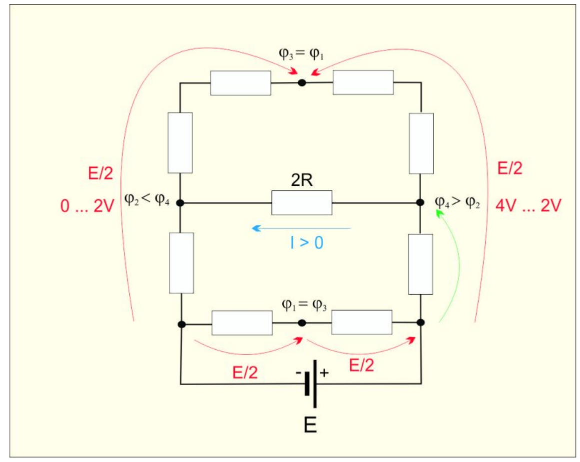


Abbildung 98: Die vereinfachte Schaltung und die Potenzialverhältnisse.

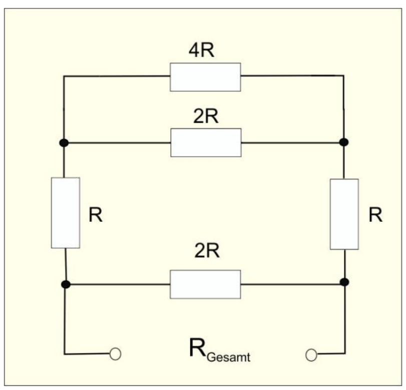


Abbildung 99: eine weitere Vereinfachungen

$$4R//2R \Rightarrow \frac{8R^2}{6R} = \frac{4}{3}R$$

$$\frac{4}{3}R + 2R = \frac{4R+6R}{3} = \frac{10}{3}R$$

$$\frac{10}{3}R//2R \Rightarrow \frac{20R^2}{16R} = \frac{5}{4}R$$

$$R_{Gesamt} = \frac{5}{4}R = \frac{5}{4} \cdot 110\Omega = 137,5\Omega$$

7.1.4 Lösungsweg zur Aufgabe 1.5.3

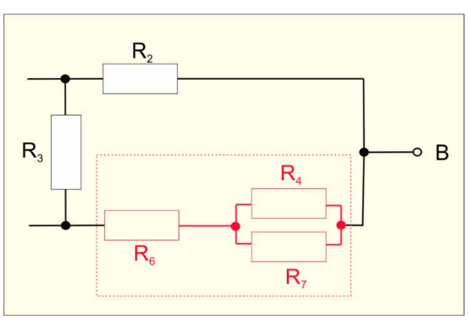


Abbildung 100: die Vereinfachungen

$$R^* = R_6 + \frac{R_4 R_7}{R_4+R_7} = 20\Omega + \frac{800\Omega^2}{60\Omega} = 33,34\Omega$$

Im nächste Schritt wird die Dreieckschaltung, bestehend aus R_1, R_3, R_5, in eine Sternschaltung umgewandelt.

$$\Sigma R = R_1 + R_3 + R_5 = 90\Omega$$

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{13}}{\Sigma R} = \frac{R_1 R_5}{\Sigma R} = \frac{900\Omega^2}{90\Omega} = 10\Omega$$

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{\Sigma R} = \frac{R_1 R_3}{\Sigma R} = \frac{900\Omega^2}{90\Omega} = 10\Omega$$
$$R_{30} = \frac{R_{13}R_{23}}{\Sigma R} = \frac{R_5 R_3}{\Sigma R} = \frac{900\Omega^2}{90\Omega} = 10\Omega$$

Es ergibt sich folgende Schaltung:

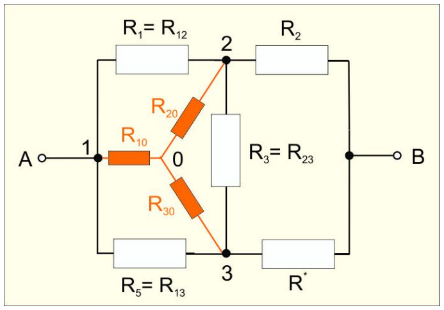


Abbildung 101: die Vereinfachungsidee

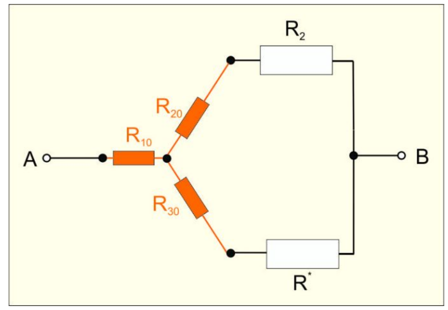


Abbildung 102: die resultierende Schaltung

$$R_{AB} = R_{10} + [(R_{20} + R_2) \,//\, (R_{30} + R^*)]$$
$$R_{AB} = 10\Omega + [(10\Omega + 20\Omega) \,//\, (10\Omega + 33,34\Omega)]$$
$$R_{AB} = 10\Omega + [30\Omega//43,34\Omega] = 10\Omega + \frac{30 \cdot 43,34}{73,34}\Omega = 27,73\Omega$$

7.2 Lösungen zum Überlagerungsverfahren

7.2.1 Lösungsweg zur Aufgabe 5.2.c)

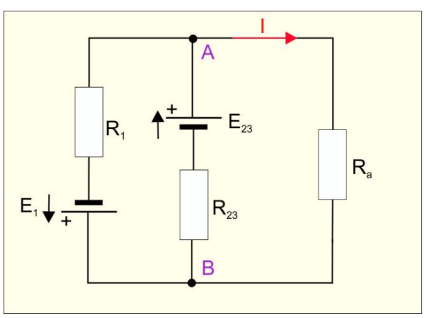


Abbildung 103: die erste Vereinfachung

$$R_a = R_4 + R_5//R_6 = 80\Omega$$
$$E_{23} = E_2 + E_3 = 72V + (-18V) = 54V$$
$$R_{23} = R_2 + R_3 = 80\Omega$$

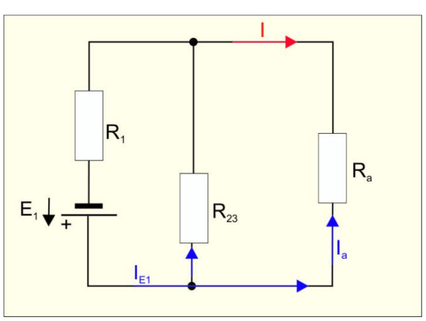


Abbildung 104: Teilstrom I_a durch Quelle E_1

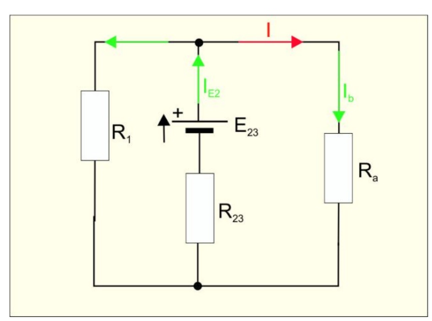


Abbildung 105: Teilstrom I_b durch Quelle $E_2 - E_3$

$I_{E_1} = \frac{E_1}{R_{ges}}$

$R_{ges} = R_1 + R_{23}//R_a = 60\Omega + 40\Omega = 100\Omega$

$I_{E_1} = \frac{48V}{100\Omega} = 480mA$

$I_a = I_{E_1} \cdot \frac{R_{23}}{R_{23}+R_a} = 480mA \cdot \frac{80\Omega}{160\Omega} = 240mA$

$I_{E_{23}} = \frac{E_{23}}{R_{ges}}$

$R_{ges} = R_{23} + R_1//R_a = 80\Omega + 60\Omega//80\Omega = 114.286\Omega$

$I_{E_{23}} = \frac{54V}{114{,}286\Omega} = 472,5mA$

$I_b = I_{E_{23}} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_a} = 472,5mA \cdot \frac{60\Omega}{140\Omega} = 202,5mA$

Lösung: $I = I_a + I_b = 240mA + (-202,5mA) = 37,5mA$

7.2.2 Lösungsweg zur Aufgabe 5.2.d)

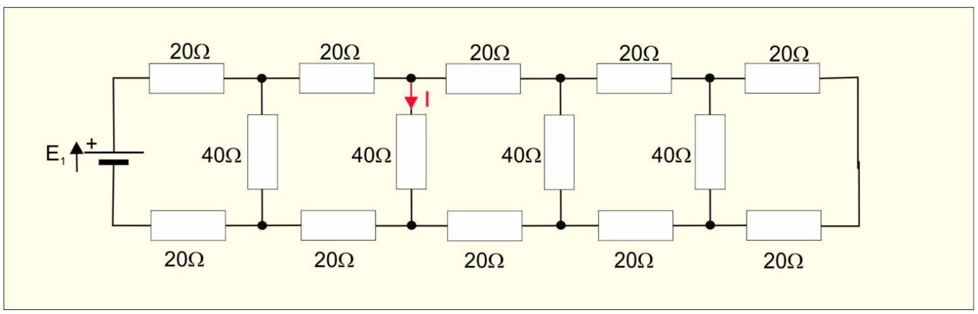


Abbildung 106: Teilstrom I_a durch Quelle E_1

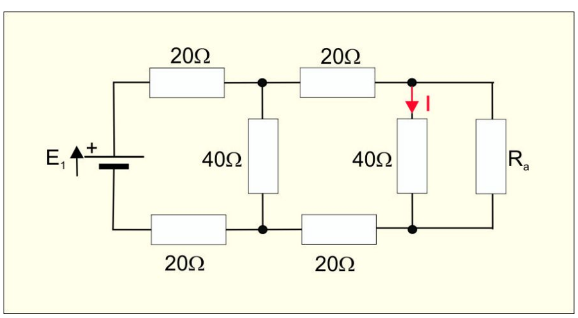


Abbildung 107: Der R_a wird bestimmt.

$R_a = [(40\Omega//40\Omega) + 2 \cdot 20\Omega]//40\Omega + 2 \cdot 20\Omega$

$R_a = 64\Omega$

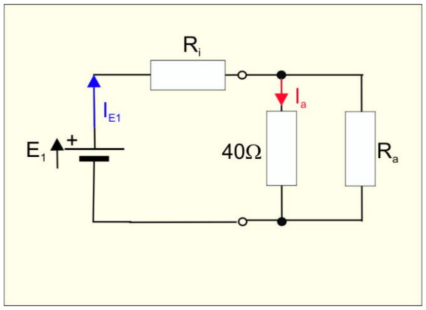


Abbildung 108: Der R_i wird bestimmt.

$$R_i = [(2 \cdot 20\Omega//40\Omega) + 2 \cdot 20\Omega]$$
$$R_i = 60\Omega$$

Stromteilerregel:

$$I_a = I_{E_1} \cdot \frac{R_a}{40\Omega + R_a} = \frac{E_1}{R_i + R_a//40\Omega} \cdot \frac{64\Omega}{104\Omega}$$
$$I_a = \frac{80V}{64{,}6\Omega} \cdot \frac{64\Omega}{104\Omega} = 762mA$$

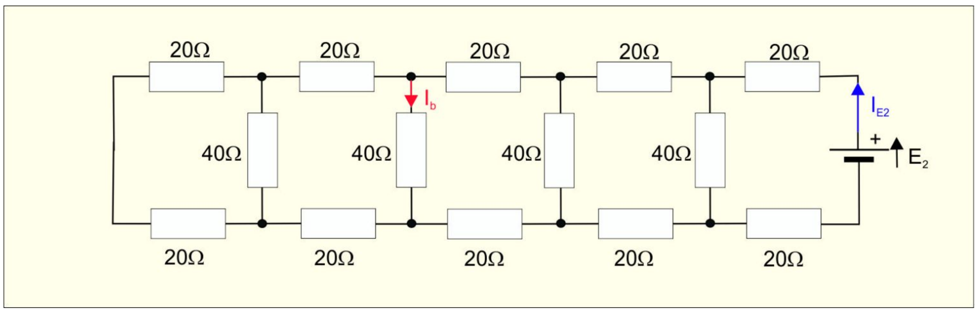


Abbildung 109: Teilstrom I_b durch Quelle E_2

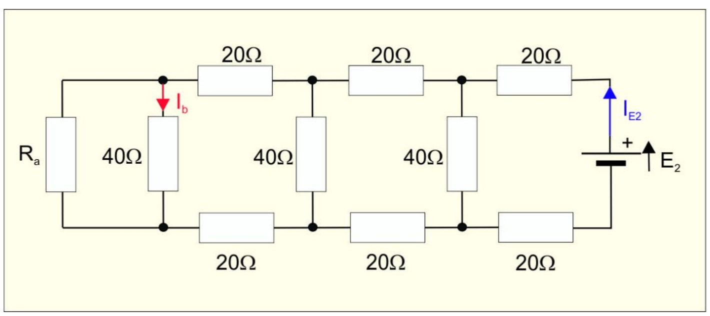


Abbildung 110: Der R_a wird bestimmt.

$$R_a = [2 \cdot 20\Omega//40\Omega] + 2 \cdot 20\Omega$$
$$R_a = 60\Omega$$

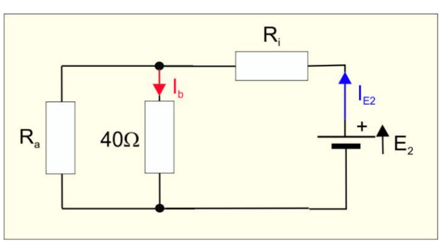


Abbildung 111: Der R_i wird bestimmt.

$$R_i = \{[(2 \cdot 20\Omega//40\Omega) + 2 \cdot 20\Omega]//40\Omega\} + 2 \cdot 20\Omega$$
$$R_i = 64\Omega$$

Stromteilerregel:

$$I_b = I_{E_2} \cdot \frac{R_a}{40\Omega + R_a} = \frac{E_2}{R_i + R_a//40\Omega} \cdot \frac{60\Omega}{100\Omega}$$
$$I_b = \frac{60V}{88\Omega} \cdot \frac{60\Omega}{100\Omega} = 409,1mA$$

Lösung:

$$I = I_a + I_b = I_{E_1} + I_{E_2} = 762mA + 409,1mA = 1,172A$$

8 Literaturempfehlungen

Literatur

[1] *Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.* - Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch

[2] *Grafe, Loose, Kühn* - Grundlagen der Elektrotechnik - Band I: Gleichspannungstechnik; 13. Auflage; Verlag Hüthig

[3] *Grafe, Loose, Kühn* - Grundlagen der Elektrotechnik - Band II: Wechselspannungstechnik; 9. Auflage; Verlag Hüthig

[4] *Küpfmüller, K* - Einführung in die theoretische Elektrotechnik; 5. Auflage; Springer Verlag

[5] *Lindner, H.* - Elektro-Aufgaben Band I: Gleichstrom; 20. Auflage; Fachbuchverlag Leipzig

[6] *Lunze, K.; Wagner, E.* - Einführung in die Elektrotechnik; 2. Auflage; Verlag Technik Berlin

[7] *Lunze, K.* - Einführung in die Elektrotechnik; 11. Auflage; Verlag Technik Berlin

[8] *Stuchlik, W.* - Mathematische Methoden zur Bestimmung von Strömen und Spannungen in Schaltungen mit passiven Bauelementen

Index

aktiven Zweipol, 5, 7
Außenwiderstand, 5–7, 16

Ersatzgrößen, 15
Ersatzspannungsquelle, 7
Ersatzwiderstand, 6

Gesamtstrom, 5, 7
Gesamtwiderstand, 16
Grundstromkreis, 5

Innenwiderstand, 5, 15

Klemmenspannung, 16
Kurzschlussstrom, 6

Leerlaufspannung, 7, 16

passiven Zweipol, 5

Spannungsquelle, 15
Spannungsquellen, 5, 6
Stromquellen, 6

Zweipol, 5
Zweipoltheorie, 5, 8

9 Abkürzungsverzeichnis

A	physikalische Einheit Ampere; 1A = 1000mA
E	Konstant-Spannungsquelle; E steht für elektro-motorische Kraft
G	Der Leitwert eines Ohmschen Widerstandes $G = \frac{1}{R}$
I	elektrischer Strom; in der Gleichstromtechnik eine konstante Größe
$I_{4_{E_1}}$	Der Strom der durch den Widerstand R_4 fließt, der von der Quelle E_1 verursacht wird.
$I_{4_{E_2}}$	Der Strom der durch den Widerstand R_4 fließt, der von der Quelle E_2 verursacht wird.
I_x	Die allgemeine Bezeichnung des unbekannten Stroms.
k	ein allgemeiner konstanter Faktor
M	Kennzeichnung einer Masche
R	allgemeines Symbol für den ohmschen Widerstand; Einheitswiderstand
$R_1//R_2$	Die Widerstände sind elektrisch parallel geschaltet. $\rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$
R_a	Außenwiderstand
R_{Gesamt}	Der Gesamtwiderstand einer Anordnung von Teilwiderständen
R_i	Innenwiderstand
R_U	Geräteinnenwiderstand des Spannungsmessers [auch Voltmeter genannt]
R_v	Vorwiderstand zum Voltmeter, um eine Überspannung für das Messgerät zu vermeiden
U	allgemeines Symbol für Spannung
U	Ursache; um den Unterschied zur Spannungssymbolik zu erkennen, wird es in Fettdruck dargestellt
U_l	Die Leerlaufspannung zwischen zwei Klemmen, wenn der Lastwiderstand unendlich ist
U_x	gesuchte Spannung
V	physikalische Einheit Volt; 1 V = 1000mV
W	Wirkung; um den Unterschied zur Maßeinheit Watt zu erkennen, wird es in Fettdruck dargestellt
Ω	Maßeinheit Ohm $1\Omega = \frac{1V}{1A}$