Elektrotechnik

Gleichstromtechnik

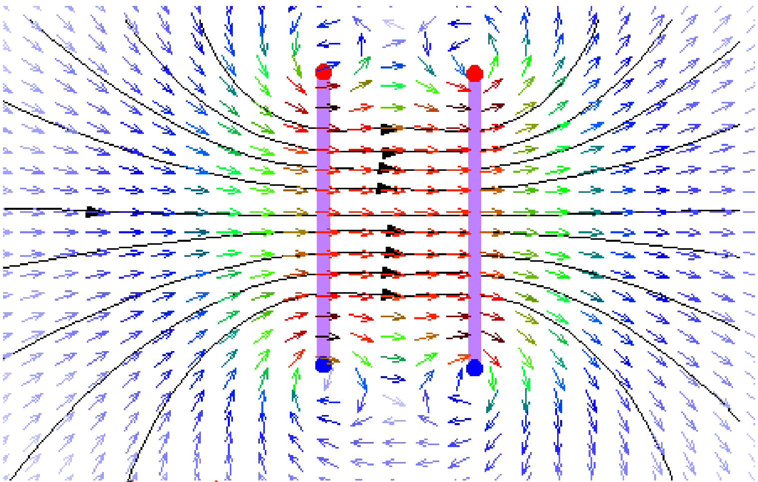
- 33 Stunden Vorlesung – inkl. Übungen
- Literaturempfehlung der DH BW MOS: Karl Küpfmüller, Theoretische Elektrotechnik; Springer Verlag - ISBN 10: 3540785892
- 7 … 8 Vorlesungstermine

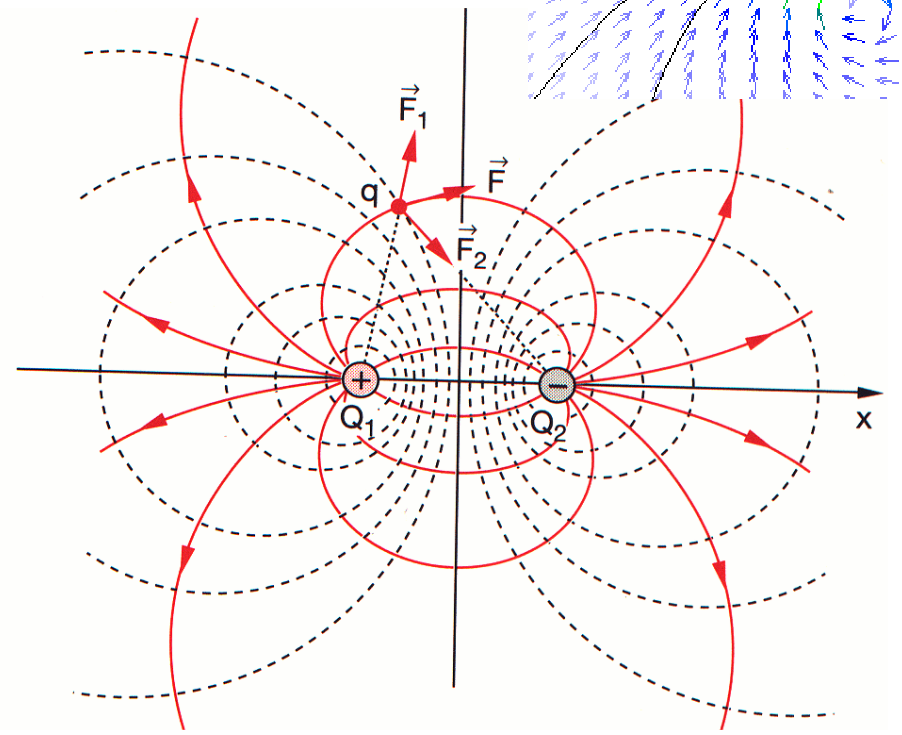
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{j}\,, \qquad \oint_K \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + I$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}, \qquad \oint_K \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho, \qquad \oint_A \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \oint_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0\,.$$





Inhaltsverzeichnis

Elektrotechnik (ET)

Starkstromtechnik	Schwachstromtechnik
Gleichstrom/Gleichspannung	Gleichstrom/Gleichspannung
Wechselstrom/Wechselspannung	Wechselstrom/Wechselspannung
Frequenz = 50 Hz (1 oder 3 Phasensysteme)	0 < Frequenz < ? GHz
Wirkungsgrad	Informationserzeugung
Energiegewinnung	Nachrichtengenerierung (Bild, Ton)
Energietransport	Nachrichtentechnik (Rund-u. Richtfunk)
Energietransformation	Informationstechnik (Schaltungstechnik)
Energieumsetzung (Umspannung)	Informationskodierung
Leistungsoptimierung	Informationsübertragung
Anwendungen:	Regelung
* Industrieanlagen * Sendeanlagen	Steuerung
* Maschinenbau	Anzeige, Kontrolle
* Kraftwerke	Energie? Leistung? Wirkungsgrad?

1. Grundbegriffe, elektrische Größen und Grundbeziehungen

1.1 Die Ladung

- Die elektrische Ladung kennzeichnet eine Eigenschaft der Materie.
- Die elektrische Ladung übt Kräfte auf andere elektrisch geladene Körper aus.
- Die elektrische Ladung wird von einem elektrischen Feld umgeben.
- Es wird zwischen positiven und negativen Ladungen unterschieden.
- Jede Ladung ist gequantelt. Die kleinste Ladung ist die Elementarladung **e^-**.
- In der Elektrotechnik unterscheiden wir Atome von geladenen Atomen = Ionen (Kationen, Anionen)

Die Maßeinheit ist das Coulomb (1C = 1As).

Naturkonstante **e^-** = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$As

1.2 Der elektrische Strom

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Die Maßeinheit ist das Ampere.

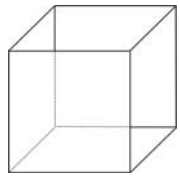
Frage: Wie viel Ladungen bewegen sich pro Sekunde durch einen Querschnitt eines Leiters, wenn der Strom I = 1A entspricht?

Antwort: N = $6{,}25 * 10^{18}$

physikalische Stromrichtung (Richtung des Elektronenimpulses, Bewegung der e^-)
technische Stromrichtung (Potenzialgefälle)

Frage: Wie schnell bewegen sich diese Ladungen, wenn als Leiter ein Kupferdraht mit einem Durchmesser von d = 1mm benutzt wird?

Antwort: N = $6{,}25 * 10^{18}$
Anzahl der Ladungsträger im Kupfer pro cm^3 = $8{,}6 * 10^{22}$



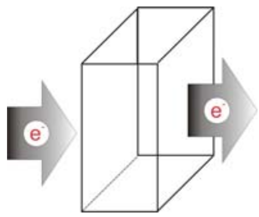
Wie groß ist das Volumen V, das für $6{,}25*10^{18}$ Elektronen benötigt wird?

$$V = \frac{6{,}25*10^{18}\,Elektronen}{8{,}6*10^{22}\,Elektronen/cm^3} = 7{,}3*10^{-5}\,cm^3$$

Gesucht ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger!

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$



$\Delta t = 1s$
Δl = ?

$\Delta V = \Delta l * A$

Querschnitt des runden Drahtes bei d = 1mm … $A = \frac{\pi}{4} d^2 = 7{,}8*10^{-3}\,cm^2$

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{A} = \frac{7{,}3*10^{-5}\,cm^3}{7{,}8*10^{-3}\,cm^2} = 9{,}36*10^{-3}\,cm$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{1s} = 9{,}36*10^{-3}\,\frac{cm}{s} = 93{,}6*10^{-3}\,\frac{mm}{s} = 93{,}6*10^{-6}\,\frac{m}{s}$$

(Gleichstromsystem!) Wie lang braucht ein Elektron vom Schalter zur Glühlampe, wenn die Stromleitung eine Länge von 10m besitzt?

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10m}{9{,}36*10^{-5}\,\frac{m}{s}} = 107000s = 1780\min = 29{,}6 Std.$$

1.3 Die Stromdichte

$$S = \frac{I}{A_{\perp}}$$

$$I = \int SdA \Rightarrow \iint \vec{S}(x)d\vec{A}$$

$$\int_{Hülle} SdA = 0 \Rightarrow \oint SdA = 0$$

$$Kontinuitätsgleichung$$

Die Kontinuitätsgleichung sagt aus, dass der Strom eine geschlossene Erscheinung ist und keine Quellen und Senken besitzt. Daher leitet sich auch der Begriff „Stromkreis“ ab.

1.4 Der I. Kirchhoffsche Satz („Knotenpunktregel“)

zwei Eigenschaften:

- geschlossener Kreis (sonst kann kein Strom fließen)
- Stoßen mehrere Ströme an einem Knotenpunkt aneinander, so ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme an einem folgenden Knotenpunkt (Stromverteilung).

$$\sum_{\Uparrow} I_{\nu} = \sum_{\Downarrow} I_{\mu}$$

Die Summe aller Ströme ist somit Null!

$$\sum_{\Uparrow} I_{\nu} + \sum_{\Downarrow} I_{\mu} = 0$$

Aufgabe: Längst einer 0,2km langen, zweiadrigen Kupferleitung – als Verbindung zwischen Generator und Verbraucher – soll der maximale Spannungsabfall 9V betragen.

a) Welche Stromdichte herrscht in der Leitung?

$\rho_{Cu}=17{,}8*10^{-3}\ \Omega mm^2/m$

$$S = \frac{dI}{dA} = \frac{I}{A} = \frac{U}{RA} = \frac{U}{\frac{\rho 2l}{A}A} = \frac{U}{\rho 2l}$$

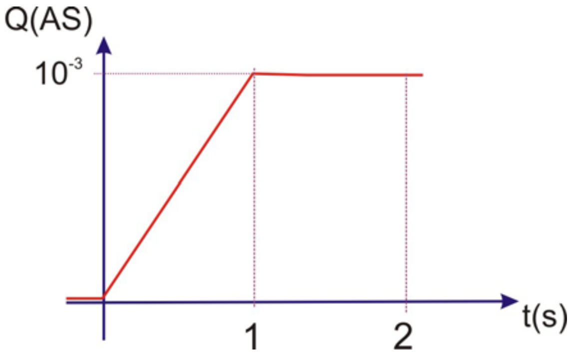
S = 1,26 A/mm²

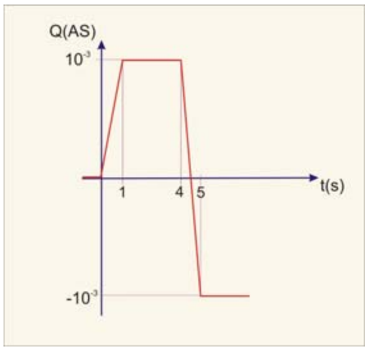
b) Wie und um wie viel % ändert sich die Stromdichte, wenn der Spannungsabfall um 20% kleiner werden soll?

Die Abmessungen der Leitung bleiben gleich, somit kann der Spannungsabfall nur durch eine verminderte Stromstärke erreicht werden.

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta U}{U} = -20\%$$

Aufgabe: Gegeben sind folgende Zeitverläufe einer elektrischen Ladung Q(t), die den betrachteten Querschnitt eines stromdurchflossenen Leiters passiert:





a) Berechnen Sie die Stromstärken für die einzelnen Zeitabschnitte.
b) Zeichnen Sie maßstabsgerecht die zugehörigen Zeitverläufe!

Strömungsgeschwindigkeit von Elektronen in Metallen:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{I}{n * e * A} = \frac{S}{n * e} = \frac{S}{Q}$$

1.5 Die Spannung

$$\frac{\Delta W_{A->B}}{Q} = const. = U$$

$$\frac{\Delta W_{+}}{Q} = E$$

$$\frac{\Delta W_{-}}{Q} = U$$

$$W_{zugeführt} = W_{abgeführt}$$

$$E_1 \Delta Q + ... + E_n \Delta Q = U_{AB} \Delta Q + ... + U_{YZ} \Delta Q$$

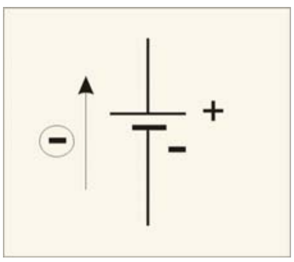
Die von der Ladung abgegebene Energie ist gleich der dieser Ladung insgesamt zugeführten Energie.

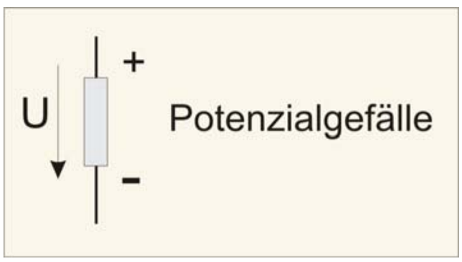
1.6 Der II. Kirchhoffsche Satz („Maschensatz“)

Summe der EMK ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle entlang dem Umlauf einer Masche.

$$\sum_{O} E_{\nu} = \sum_{O} E_{\mu}$$

Symbole der Spannungsquelle und der wirkenden Spannung am Verbraucher:





1.7 Widerstand und Leitwert

- Verbraucher
- Innenwiderstand einer Spannungskonstantquelle
- Innenwiderstand einer Stromkonstantquelle

Das Ohmsche Gesetz: Beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der Spannung und dem Strom.

$$\frac{U}{I} = const.$$

Diese Konstante wird Ohmscher Widerstand (der Kehrwert von R = dem Leitwert G) genannt.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{G}$$

der differentielle Widerstand: $r = \frac{du}{di}$

Dimensionsgleichung des Ohmschen Widerstandes: $R = \rho\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$

ρ = spezifischer Widerstand des Werkstoffes (κ – spezifischer Leitwert)

Materialkonstanten:

- spezifischer Widerstand von Kupfer bei 20°C = 0,0178Ωmm²/m
- spezifischer Widerstand von Aluminium bei 20°C = 0,029Ωmm²/m

1.8 Übungen: Berechnung von Widerständen

Größe	Zeichen	Einheit..............
Widerstand	R	Ω
spezifischer Widerstand	ρ	Ωmm²/m oder Ωm
Leitfähigkeit	κ	Sm/mm² oder S/m
Länge	l	m
Drahtquerschnitt	A	mm²
Durchmesser	d	mm

Formeln:

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

$$R = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

$$A = \pi\frac{d^2}{4}$$

Aufgaben:

(1) Welchen Gleichstromwiderstand hat eine **Telefonleitung** aus Kupfer von 4,5km Länge und 4mm Durchmesser?

Lösung: **R = 6,37Ω**

(2) Auf einem **Schiebewiderstand** sind 300m Konstantandraht (ρ = 0,5Ωmm²/m) von 0,4mm Durchmesser aufgewickelt. Wie groß ist der Widerstand der Wicklung?

Lösung: **R = 1193,6Ω**

(3) Eine **Spule** besteht aus 500 Windungen Aluminiumdraht von 0,5mm Durchmesser. Wie groß ist der Widerstand bei einer mittleren Windungslänge von 4cm?

Lösung: **R = 2,96Ω**

(4) Zu einem Motor führt eine 200m lange **Doppelleitung** aus Kupfer von 1,5mm² Querschnitt. Wie groß ist der Widerstand?

Lösung: **R = 4,75Ω**

(5) Ein **Stellwiderstand** hat 850 Windungen von 5cm Durchmesser aus 0,3mm dicken Nickeldraht (ρ = 0,43Ωmm²/m). Welchen Wert hat dieser Widerstand?

Lösung: **R = 817,1Ω**

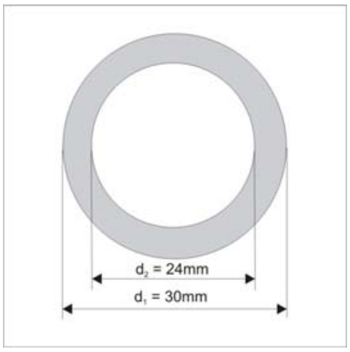
(6) Der Heizleiter eines elektrischen Kochers besteht aus 10m Chromnickeldraht von 0,45mm Durchmesser (ρ = 1,1 Ωmm²/m). Wie groß ist der Widerstand?

Lösung: **R = 69,2Ω**

(7) Welchen Widerstand hat ein aufgedampfter **Dünnfilm** von 10nm Dicke, 0,15mm Breite und 0,85mm Länge in der Längstrichtung beim spezifischen Widerstand $\rho = 5 \cdot 10^{-6}\Omega m$?

Lösung: **R = 2833Ω**

(8) Die Hülle eines **Bleimantelkabels** hat den gezeichneten Querschnitt.



Welchen Widerstand haben 50m der Bleiumhüllung (ρ = 0,21Ωmm²/m)?

Lösung: **R = 0,041Ω**

(9) Der Durchmesser eines **Zinkbandmantelkabels** (κ = 15 Sm/mm²) beträgt 1,5cm. Welchen Widerstand haben 100m der 0,3mm dicken Umhüllung?

Lösung: **R = 0,48Ω**

(10) Zwischen den beiden Platten eines Kondensators von 0,1m² Fläche befindet sich eine 4mm dicke Glasplatte (ρ = $10^{10}\Omega$m). Welchen Widerstand hat die Platte?

Lösung: **R = 400MΩ**

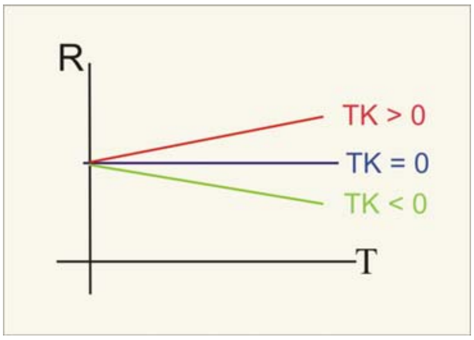
1.9 Temperaturabhängigkeit des Ohmschen Widerstandes

$$R_\vartheta = R_0(1+\alpha\Delta\vartheta)$$

$\alpha_{Metalle}$ etwa 0,4% pro Kelvin

Temperaturkoeffizient

TK > 0
TK = 0
TK < 0



Warmleiter …. Halbleiter
Kaltleiter …. Metalle (Metalle leiten gut im kalten Zustand)

1.10 Widerstand und Temperatur

Größe	Zeichen	Einheit
Widerstand bei 20°C (?)	R_0	Ω
Widerstand bei Endtemperatur	R_ϑ	Ω
Temperaturkoeffizient	α	1/K
Temperaturkoeffizient	β	(1/K)²
Temperaturdifferenz	$\Delta\vartheta$	K

Formeln:

$$R_\vartheta = R_0(1+\alpha\Delta\vartheta)$$
$$R_\vartheta = R_0(1+\alpha\Delta\vartheta+\beta\Delta\vartheta^2)$$

Aufgaben:

(11) Die Feldwicklung eines Elektromotors hat bei 20°C einen Widerstand von 500Ω (α = 0,0038 1/K). Welchen Widerstand hat sie im Betrieb bei 62°C?

Lösung: R = 580Ω

(12) Berechne den Widerstand einer Glühlampe mit einem Wolframdraht von 0,024mm Durchmesser und 30cm Länge (ρ = 0,055Ωmm²/m) bei Zimmertemperatur (20°C) und im glühenden Zustand bei 2300°C.

α = 0,0041 1/K
$\beta = 10^{-6}$ 1/K²

Lösung: R = 567Ω

(13) Bei welcher Temperatur verdoppelt sich der Widerstand eines Kupferdrahtes (α=0,0038 1/K). T_{Ref} = 20°C!

Lösung: T = 283 °C

(14) Ein Vorschaltwiderstand aus Nickeldraht hat bei 20°C den Anfangswert 350Ω. Bei welcher Temperatur erreicht er den Endwert 450Ω? (α=0,004 1/K)

Lösung: T = 91,4 °C

(15) Welche Temperatur hat ein Heizkörper, wenn er bei 20°C einen Strom von 2,9A und im Betrieb 0,5A aufnimmt? Betriebsspannung 220V und α=0,004 1/K!

Lösung: T = 1220°C

(16) Um wie viel Prozent nimmt der Widerstand eines von 20°C auf 80°C erwärmten Leiters aus Kupfer zu? (α=0,0038 1/K)

Lösung: Zunahme um 22,8%

(17) Auf wie viel Prozent vom ursprünglichen Wert sinkt die Stromstärke in der Wicklung eines Motors, wenn die Temperatur von 20°C auf 65°C zunimmt?

Lösung: Abnahme auf 85,4%

(18) Der Widerstand einer Telegrafenleitung (α=0,0038 1/K) ist bei 8°C 1,5Ω. Bei welcher Temperatur beträgt dieser 1,55Ω?

Lösung: ϑ = 16,8°C

(19) Welchen Widerstand hat der Kohlefaden (ρ = 39,6 Ωmm²/m) einer Glühlampe bei 20°C und bei Weißglut (1600°C), wenn der Faden 18cm lang und 0,6mm dick ist (α=- 0,0004 1/K)?

Lösung: R = 9,3Ω

(20) Welchen Widerstand hat eine Wolframlampe bei 20°C (α=0,0041 1/K), wenn sie im Betrieb (Fadentemperatur 2500°C) bei 220V einen Strom von 0,34A aufnimmt ($\beta=10^{-6}$ 1/K^2)?

Lösung:R = 37,4Ω

1.11 Die elektrische Leistung

$$P = UI$$
$$P = I^2 R$$
$$P = \frac{U^2}{R}$$

Betrachtungen der Extremwerte:

$$U = 0 \Rightarrow P = 0$$
$$I = 0 \Rightarrow P = 0$$
$$R_a = 0 \Rightarrow I_K = \frac{E}{R_i} \Rightarrow P = 0$$
$$R_a = \infty \Rightarrow U_l = E \Rightarrow P = 0$$

Wo ist die optimale Leistungsumsetzung?

$$\frac{R_a}{R_i} = x$$
$$\frac{U}{E} = \frac{R_a}{R_i + R_a}$$
$$U = E\frac{R_a}{R_i + R_a} = E\frac{x}{1+x}$$
$$I_K = \frac{E}{R_i}$$
$$I = \frac{E}{R_i + R_a} = \frac{E}{R_i}\frac{R_i}{R_i + R_a} = I_K\frac{1}{1+x}$$

Leistungsumsetzung im Kurzschlussfall = max. Leistung am Innenwiderstand der Energiequelle:
Dieses Szenario (Kurzschluss der Autobatterie) hat für den Ingenieur keinen praktischen Wert! Es dient nur der Ermittlung des theoretischen Leistungsmaximums bei endlicher und realer Energiequelle.

$$P_K = \frac{E^2}{R_i}$$

Leistungsumsetzung für $R_a > 0$

$$P_a = P_K \frac{x}{(1+x)^2}$$

Gesucht wird das Maximum (Wendepunkt der Funktion -> Maximum)

1. Ableitung bilden

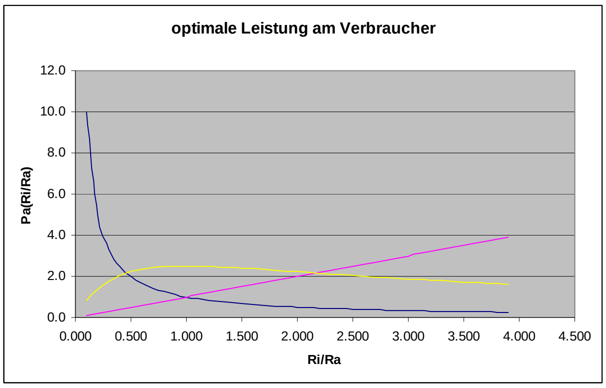
$$\frac{dP_a}{dx} = P_K \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4}$$
$$\frac{dP_a}{dx} = P_K \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

2. Wann ist die Ableitung = 0?

   Wenn der Zähler = 0 ist …. Nullstelle bei x = 1, d.h. $R_a = R_i$!

3. Welchen Wert kann die Leistung maximal annehmen?

$$P_a = P_K \frac{1}{4}$$



1.12 Energie - die Fähigkeit Arbeit zu verrichten

$$P = \frac{W}{t}$$
$$W = Pt$$
$$W = \int_0^t UIdt$$
$$W = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt$$

physikalische Einheit: 1 Ws = 1 J = 1Nm

Bereitstellung der Energie:

- Induktion (Generatoren – Antrieb der Turbinenwelle mittels Wasserkraft, Dampf oder Gas -> Gezeitenkraftwerk, Windkraftwerk, Atomkraftwerk)

- Elektrolyse – chemischer Prozess teilt eine elektrolytische Flüssigkeit, Anionen- und Kationenkonzentration bilden ein Potenzialfeld
- Galvanische Elemente – chemischer Prozess ist die Ursache
- Brennstoffzellen (Wasserstoff, Sauerstoffreaktion)

Ladung – Feldstärke – Spannung

$$W = UQ = U * I * t$$

$$W_{1\Rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} u(t) * i(t) dt$$

$$U_{1\Rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$U_{1\Rightarrow 2} = E * l$$

$$U_{1\Rightarrow 2} = \frac{F * l}{Q} = \frac{W_{1\Rightarrow 2}}{Q}$$

W ist die Arbeit, die benötigt wird, um die Ladung zwischen den Punkten 1 und 2 zu bewegen!

abschließendes Beispiel - der Blitzeinschlag und warum überlebte die lila Kuh?

Gegeben sind: die Ladung Q = 2000As (Blitz) und die Dauer des Blitzes (t=100ms)

Zusammentragen der Formeln - die Urgröße ist die Ladung!

$$Q$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \int_A S dA$$

$$S = \frac{dI}{dA}$$

Einführung des Materialleitwertes γ (elektrische Leitfähigkeit der Erde = 10^{-2}S/m)

$$\vec{E} = \frac{\vec{S}}{\gamma}$$

$$\int_L \vec{E} d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = U_{A\Rightarrow B}$$

$$U_{A\Rightarrow B}(I) = R_{A\Rightarrow B} I$$

Stichwort ***„Halbkugelerder“*** - die Fläche, die vom Strom durchströmt wird, ist eine Halbkugel (Gesamtstrom strömt durch die Fläche einer Halbkugel)

r_0 = Radius der Halbkugel innerhalb der Erdreichs (r_0 -> 0)
κ außerhalb des Erdreichs -> unendlich, d.h. I = 0
κ des Erdreichs: κ=10^{-2}S (Leitwert pro Meter -> γ =10^{-2}S/m)

Fläche einer Kugel: A= $4\pi r^2$

kritische Spannung für Menschen und Kühe: U > 60V

$$S(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$E(r) = \frac{S(r)}{\gamma} = \frac{I_{gesamt}}{4\pi\gamma r^2}$$

$$\varphi(r) = -\int_L \vec{E} d\vec{r} = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C$$

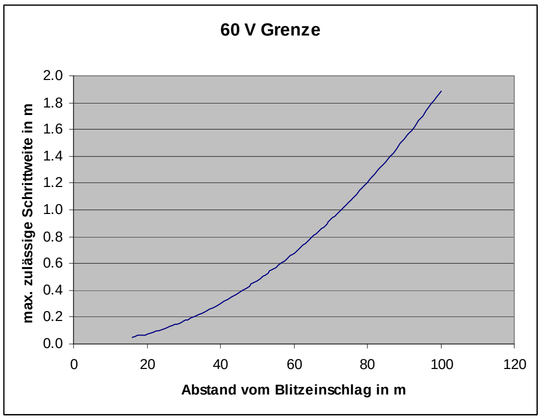
$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C$$

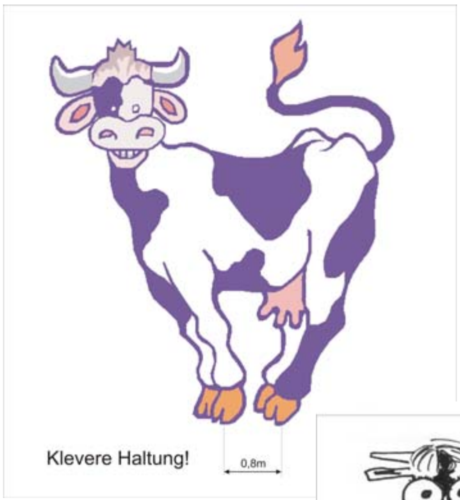
$$U = \varphi_{r_1} - \varphi_{r_2} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right] = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{\Delta r}{r_1 r_2}\right]$$

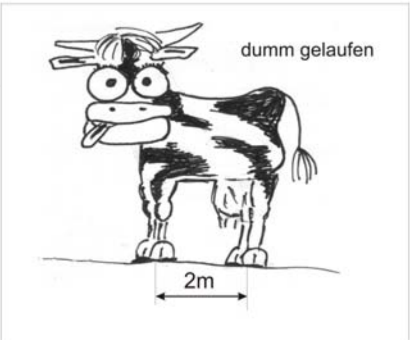
Frage! Wie groß darf maximal Δr sein, um die kritische Spannung (Potenzialunterschied der Erdberührungspunkte) nicht zu erzeugen?

$$\Delta r = \frac{U}{I} 2\pi\gamma [r_1 r_2] = \frac{V}{A}\frac{A}{Vm} m^2 = m$$

Lösung mit Zahlen:







2. Stromkreise

- Es werden lineare ohmsche Netzwerke betrachtet.
- Diese Netzwerke bestehen aus realen Energiequellen und Verbrauchern (linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung).

Ziel: Jede auftretende Teilgröße (Zweigstrom, Teilspannung) kann bestimmt werden.

Physikalische Grundlage:

1. Kirchhoffscher Satz – „Knotenpunktregel"
2. Kirchhoffscher Satz – „Maschensatz"

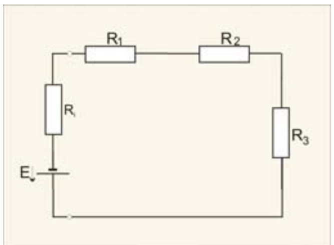
2.1 Der Spannungsteiler

Merksatz: Die Teilspannung verhält sich zur Gesamtspannung, wie der Teilwiderstand (über den die betrachtete Teilspannung abfällt) zum Gesamtwiderstand.

2.2 Übungen

1. Übung

$E = 10V$
$R_i = 0{,}1\Omega$
$R_1 = 100\Omega$
$R_2 = 51\Omega$
$R_3 = 2{,}7K\Omega$



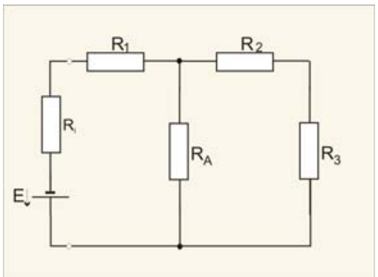
Gesucht sind die Spannungen:

U_{R1}, U_{R2}, U_{R3} und der maximal mögliche Strom I_K, sowie der Strom der durch den Widerstand R_2 fließt!

2. Übung

Wie groß ist die Spannung U_{RA}?

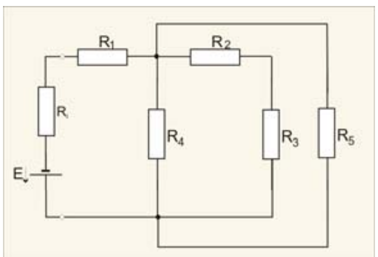
$E = 10V$
$R_i = 0{,}1\Omega$
$R_1 = 100\Omega$
$R_2 = 51\Omega$
$R_3 = 2{,}7K\Omega$
$R_a = 2{,}7K\Omega$



3. Übung

Wie groß ist die Spannung U_{R4}?

$E = 10V$
$R_i = 0{,}3\Omega$
$R_1 = 200\Omega$
$R_2 = 47\Omega$
$R_3 = 3{,}1K\Omega$



$R_4 = 1K\Omega$
$R_5 = 1K\Omega$

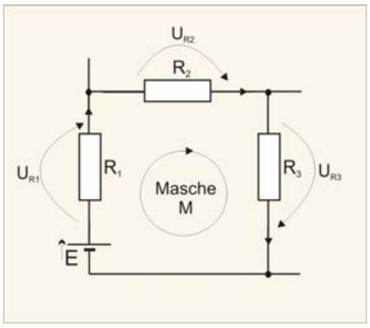
- Wie groß ist der maximal mögliche Strom I_K?
- Wie groß ist der Strom der durch den Widerstand R_1 fließt?
- Welche elektrische Leistung wird am Widerstand R_1 umgesetzt?
- Welche elektrische Leistung wird am Widerstand R_1 umgesetzt, wenn der Widerstand den 10fachen Wert annimmt. Randbedingungen angeben!
- Wie groß ist der Strom, der durch den Widerstand R_4 fließt?
- Wie groß ist der Strom, der durch den Widerstand R_2 fließt?

2.3 Vereinfachungen

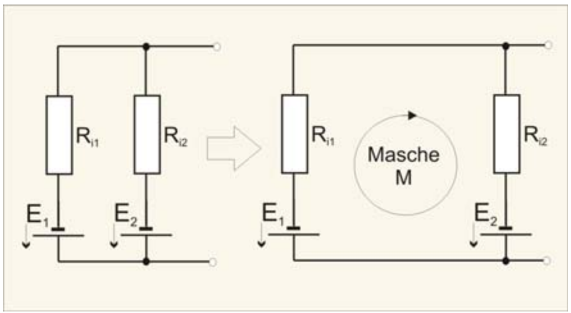
1. Zusammenfassen von mehreren Spannungsquellen

- Spannungsquellen - die in Reihe geschaltet werden - addieren sich unter Beachtung der Vorzeichen (Richtungspfeil der Quelle beachten!). Die Innenwiderstände addieren sich!
- Spannungsquellen - die parallel geschaltet sind - werden in Stromquellen gewandelt. Die resultierenden Ströme werden unter Beachtung der Fließrichtung addiert.

Alternative - Aufstellen einer Masche:



$$E = I_{R1}R_1 + I_{R2}R_2 + I_{R3}R_3$$
$$E = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3}$$



M: $E_2 - E_1 = -I_1 R_{i1} + I_2 R_{i2}$

Wird mehr Strom vom Verbraucher benötigt, als eine einzelne Quelle liefern kann, sodass eine Parallelschaltung von Spannungsquellen erforderlich wird, so ist dies nur bedingt mit realen Quellen möglich. Es ist darauf zu achten, dass alle parallel geschalteten Spannungsquellen bezüglich der Spannung:

- Den gleichen Betrag haben

- Das gleiche Vorzeichen (Polung) aufweisen
- Erdfrei sind oder am gleichen Pol geerdet sind. Bei mehr als einem Erdpunkt können geringe Differenzströme fließen (siehe Brummschleife)
- Wechselspannungsquellen die gleiche Phase haben

Werden diese Punkte nicht beachtet führt dies zu einem meist unerwünschten Stromfluss zwischen den Quellen. Je nach Stromhöhe und/oder Ausführung der Spannungsquelle kann dies zur Zerstörung einzelner Teilquellen führen.

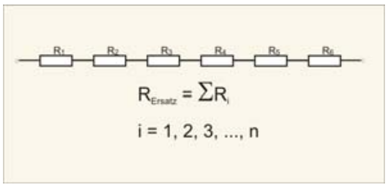
2. Zusammenfassung von mehreren Stromquellen

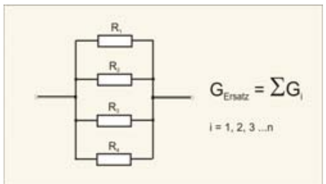
- Stromquellen - die in Reihe geschaltet sind - werden in Spannungsquellen gewandelt. Die resultierenden Spannungen werden unter Beachtung der Polarität addiert.

- Stromquellen - die parallel geschaltet werden - addieren sich unter Beachtung der Vorzeichen (Fließrichtung der Ströme beachten!).

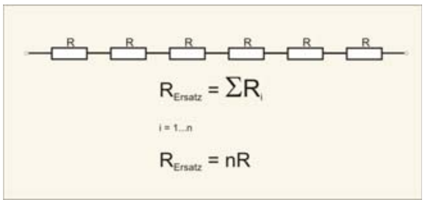
Gemäß den **Thévenin- und Norton-Theoremen** lässt sich jede reale Spannungsquelle auch als eine reale Stromquelle ansehen und umgekehrt.

3. Zusammenfassung von Widerständen

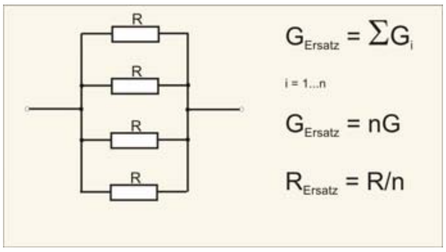




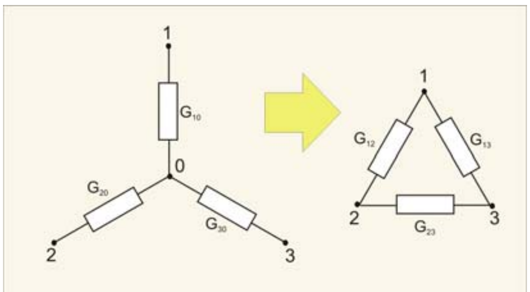
Reihenschaltung von gleichgroßen Widerständen:



Parallelschaltung von gleichgroßen Widerständen:



Wandlung von Stern- in Dreieckschaltung:



$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{\sum G}$$

$$G_{23} = \frac{G_{20}G_{30}}{\sum G}$$

$$G_{13} = \frac{G_{10}G_{30}}{\sum G}$$

$$\sum G = G_{10} + G_{20} + G_{30}$$

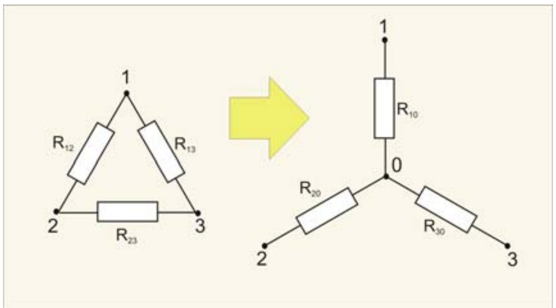
Wandlung von Dreieck- in Sternschaltung:

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{13}}{\sum R}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{\sum R}$$

$$R_{30} = \frac{R_{23}R_{13}}{\sum R}$$

$$\sum R = R_{12} + R_{23} + R_{13}$$



Beispiel:

Eine Sternschaltung besteht aus drei gleichen Widerständen mit R = 10Ω.

Wie würde die dazugehörige Dreieckschaltung zahlenmäßig aussehen?

$$\sum G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R}$$

$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{\sum G} = \frac{\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}}{\frac{3}{R}} = \frac{\frac{1}{R^2}}{\frac{3}{R}} = \frac{1}{3R} = \frac{1}{3*10\Omega}$$

$$R_{12} = \frac{1}{G_{12}} = 30\Omega$$

Eine Dreieckschaltung besteht aus drei gleichen Widerständen mit R = 30Ω.

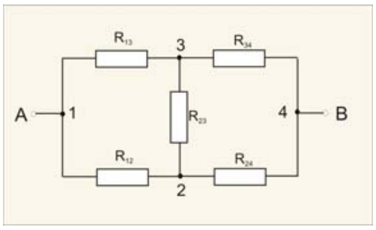
Wie würde die dazugehörige Sternschaltung zahlenmäßig aussehen?

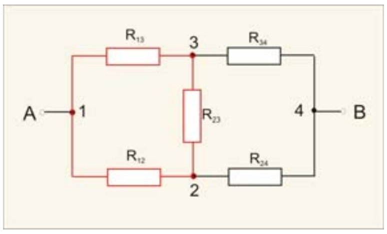
$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = R = 30\Omega$$

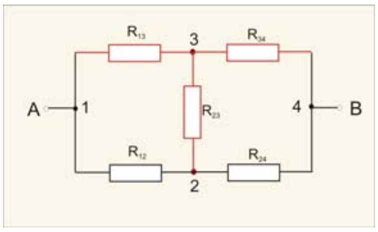
$$R_{10} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3} = 10\Omega$$

4. Übung

Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B!





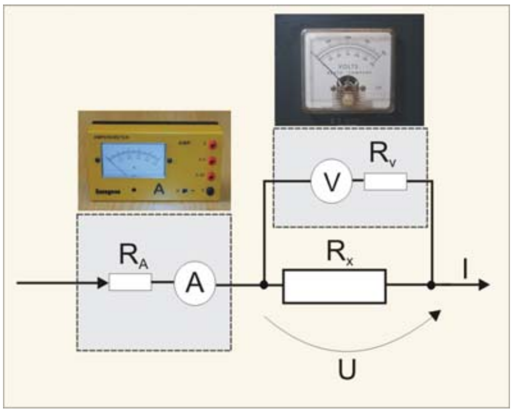


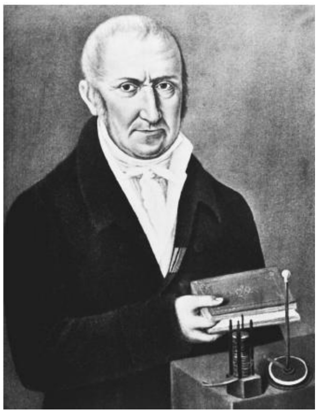
2.4 Messung von Widerständen

Größe	Zeichen
gemessene Spannung	U
gemessener Strom	I
zu messender Widerstand	R_x
Strom durch den Spannungsmesser	I_v
Widerstand des Strommessers	R_A
Widerstand des Spannungsmessers	R_v

Frage: Wie geht der Innenwiderstand des Messgerätes in die Widerstandsbestimmung ein?

Spannungsrichtige Schaltung

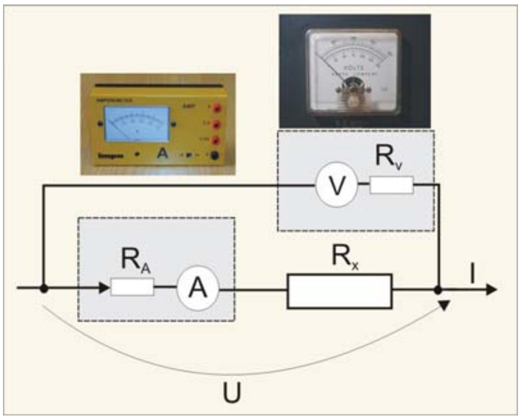




$$R_x = \frac{U}{I - I_v}$$

Merksatz: Nur bei relativ kleinen Widerständen (R_x << R_v) kann der durch das Voltmeter fließende Strom I_v vernachlässigt werden!

Stromrichtige Schaltung



$$R_x = \frac{U}{I} - R_A$$

Merksatz: Nur bei relativ großen Widerständen ($R_x >> R_A$) kann der Innenwiderstand des Amperemeters vernachlässigt werden.

Übungsaufgaben:

(1) Ein Widerstand wird spannungsrichtig gemessen. Das Amperemeter zeigt 185mA, das Voltmeter 14,3V an. Der Innenwiderstand des Voltmeters beträgt R_v = 14300Ω.

- Berechne R_x!
- Wie groß ist der Fehler, wenn der Spannungsmessstrom nicht berücksichtigt wird?
- Berechne den prozentualen Fehler!

Lösung:

$$F[\%] = 0{,}5$$

(2) Der genaue Wert eines Widerstandes beträgt 80Ω. Wie groß wird der relative Fehler [ΔR/R], wenn der Spannungsmessstrom nicht beachtet wird und der Spannungsmesser den Widerstand R_v = 1000Ω hat?

Lösung: $F_{rel} = -7{,}4\%$

(3) Es soll ein auf etwa 50Ω geschätzter Widerstand spannungsrichtig gemessen werden. Der Fehler bei Vernachlässigung des Spannungsmessstromes soll höchstens 3% betragen. Welchen Widerstand muss der Spannungsmesser wenigstens haben?

Lösung: $R_v = \dfrac{0{,}97 R_x}{0{,}03} = 1617\Omega$

(4) Ein Widerstand soll mit einem Spannungsmesser von 500Ω unter Nichtbeachtung des Spannungsmessungsstroms gemessen werden. Wie groß darf der zu messende Widerstand sein, wenn der Fehler gegenüber der korrekten Messung höchstens 2% ausmachen soll?

Lösung: $R_x = 0{,}02 R_v = 10\Omega$

(5) Der Widerstand eines Spannungsmessers hat den 45fachen Wert des zu prüfenden Widerstandes. Mit wie viel Prozent wird bei Nichtbeachtung des Spannungsmesserstromes der Widerstand des Prüflings zu gering gemessen?

Lösung:

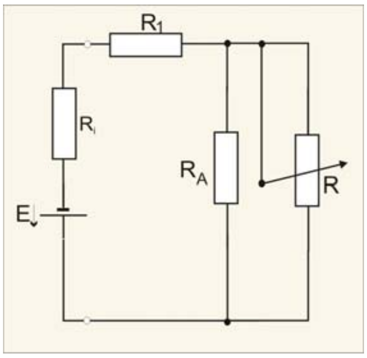
ohne Fehler -> $R_x = \dfrac{U}{I - I_v}$ **- mit Fehler ->** $R_x^{'} = \dfrac{U}{I}$

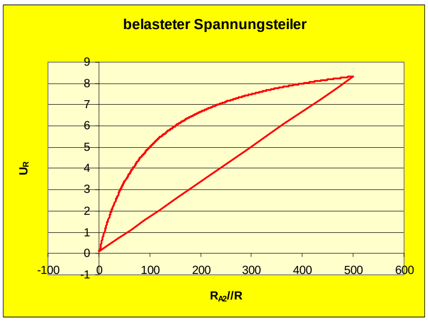
$F_{rel} = -2{,}17\%$

(6) Ein Widerstand ergab sich durch Strom-Spannungsmessung zu 352Ω. Bei genauerer Messung unter Berücksichtigung des Spannungsmesserstroms stellte sich ein Wert von 365Ω heraus. Welchen Widerstand hatte der Spannungsmesser?

Lösung: R_v = 9883Ω

2.5 Der belastete Spannungsteiler (… nur informativ …)





2.6 Übungen: Berechnungen im Grundstromkreis

Aufbau:

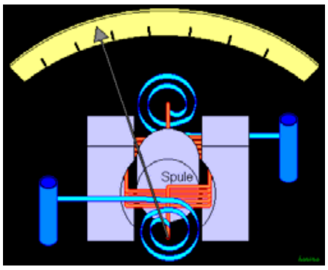
- Grundstromkreis mit einem Innenwiderstand **R_i** und einem Außenwiderstand **R_a** (Verbraucher).
- Die Klemmenspannung **U_k** ist die Spannung, die dem Verbraucher zur Verfügung steht.

Größe	Zeichen	Einheit...............
Quellenspannung - EMK	E	V
Innenwiderstand	R_i	Ω
Außenwiderstand/Verbraucher	R_a	Ω
Klemmenspannung	U_K	V
Gesamtwiderstand	R	Ω
Leerlaufspannung	U_l	V
Kurzschlussstrom	I_K	A
Gesamtstrom	I	A

Formeln:

$$E = U_i + U_a$$
$$E = I(R_i + R_a)$$
$$U_K = E - U_i$$
$$R = R_i + R_a$$
$$R = \sum R$$
$$I = \frac{E}{R_i + R_a}$$
$$I_K = \frac{E}{R_i}$$

(1) Durch ein Galvanometer von 0,05Ω Widerstand mit vorgeschaltetem Widerstand von 2Ω fließt ein Strom von 0,47A aus einem Element, dessen Quellenspannung 1,1V beträgt.



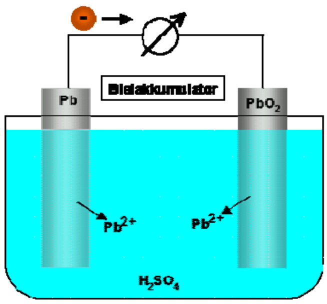
Wie groß sind der innere Widerstand des Elements und die Klemmenspannung?

Lösung(en): R_i = 0,29Ω; U_K=0,96V

(2) Bei welchem Verhältnis R_a:R_i haben I und U_K gerade die Hälfte bzw. ein Drittel ihrer Höchstwerte?

Lösung(en): ½ bei $R_a = R_i$

I= I_K/3 => $R_a = 2R_i$
U = U_i/3 => $R_a = R_i/2$



(3) Die Quellenspannung eines Bleiakkumulators ist 1,86V, sein innerer Widerstand R_i=0,005Ω. Zwölf Zellen werden in Reihe geschaltet und erzeugen im Verbraucher einen Strom von 6,55A.

Wie groß sind die Klemmenspannung und der Widerstand des Verbrauchers?

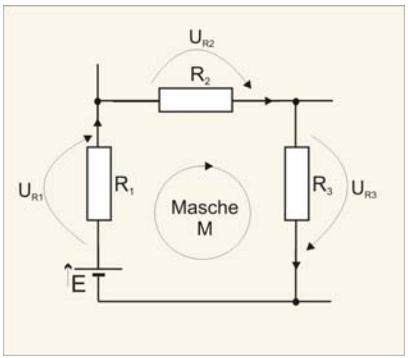
Lösung(en): R=3,34Ω; U_K=21,92V

3. Berechnung von Netzwerken

3.1 Berechnung von Netzwerken - einzelne Maschen

Vorgehensweise:

(1) Bestimmung der Masche(n)
(2) willkürliche Umlaufrichtung bestimmen
(3) Aufstellen der unabhängigen Maschengleichung(en)
(4) Knotenpunktanalyse durchführen



Knotenpunktsatz:

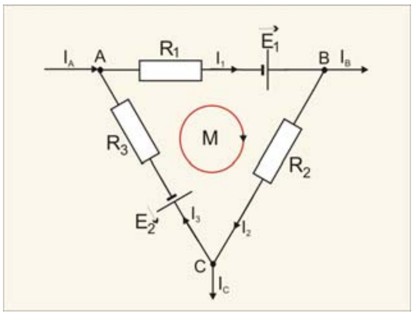
zufließende Ströme sind positiv
abfließende Ströme sind negativ

- Die Umlaufrichtung der Masche ist willkürlich, jedoch resultieren die Stromrichtungen daraus und somit auch die Richtung der Spannungsabfälle.
- Die Richtung der Spannungsquelle verläuft immer vom Pluspol zum Minuspol.
- Eine negative Stromrichtung im Ergebnis sagt aus, dass die eigentliche Richtung des Stromes der angenommenen Richtung entgegengerichtet ist.

(1) Gegeben sind:

I_A=2A
I_B=3A
R_1=2Ω
R_2=5Ω
R_3=1Ω
E_1=5V
E_2=10V

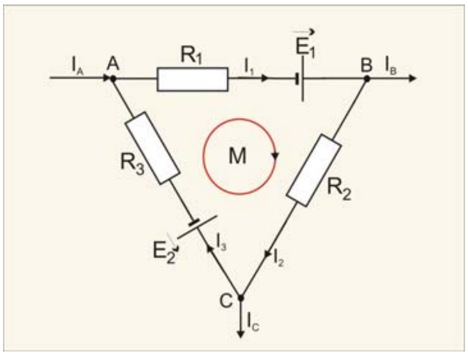
Gesucht sind: $I_1, I_2, I_3, I_C, U_1, U_2, U_3$



(2) Gegeben sind:

I_1=4A
I_2=4,8A
R_1=6Ω
R_2=6Ω
R_3=6Ω
E_1=12V
E_2=24V

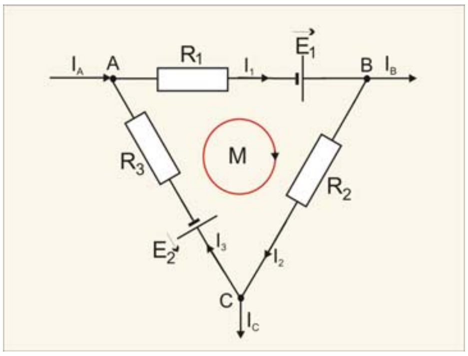
Gesucht sind: I_A, I_B, I_3, I_C, U_1, U_2, U_3



(3) Gegeben sind:

I_A=3A
I_1=2,5A
I_2=5A
R_1=2Ω
R_2=4Ω
E_1=12V
E_2=8V

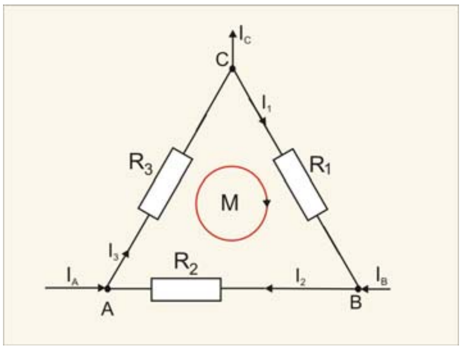
Gesucht sind: $I_3, I_B, I_C, R_3, U_1, U_2, U_3$



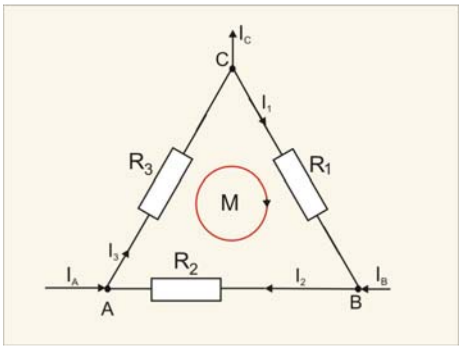
(4) Gegeben sind:

I_A=10A
I_B=4A
R_1=10Ω
R_2=15Ω
R_3=20Ω

Gesucht sind: I_c, I_1, I_2, I_3



(5) Gegeben sind:

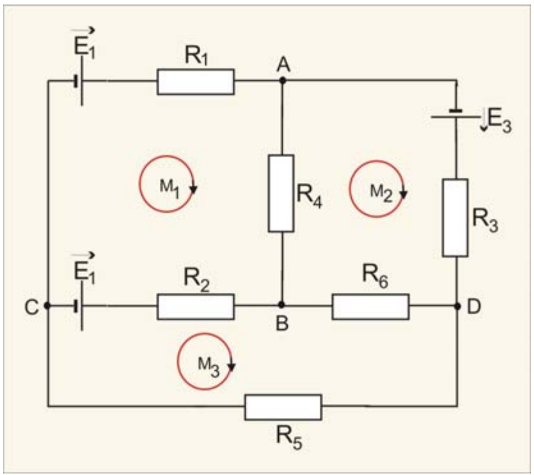


U_1= 20V
U_2=15V
R_1=20Ω
R_2=25Ω
R_3=50Ω

Gesucht sind alle Ströme!

3.2 Berechnungsmethoden für verzweigte Stromkreise

– Zweigstromanalyse
– Alternative Methoden
  - **Maschenstromanalyse**
  - **Knotenspannungsanalyse**
  - **Überlagerungssatz**
  - **Zweipoltheorie**



3.2 Berechnungsmethoden elektrischer Stromkreise

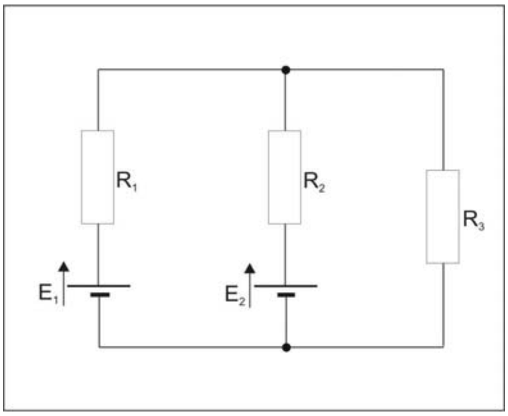
3.2.1 Zweigstromanalyse

Bestandteile eines Netzwerks (vermaschte Stromkreise statt Grundstromkreise):

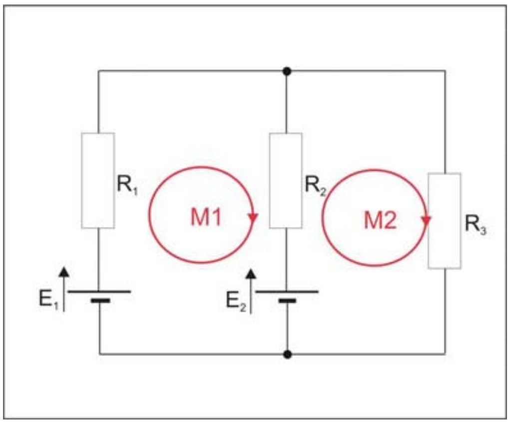
Zweige
\+ Knoten
\+ Maschen
\+ aktive Zweipole
\+ passive Zweipole
= Netze bzw. Netzwerke

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Ströme!

Gegeben sind alle Widerstände und alle Spannungen E.

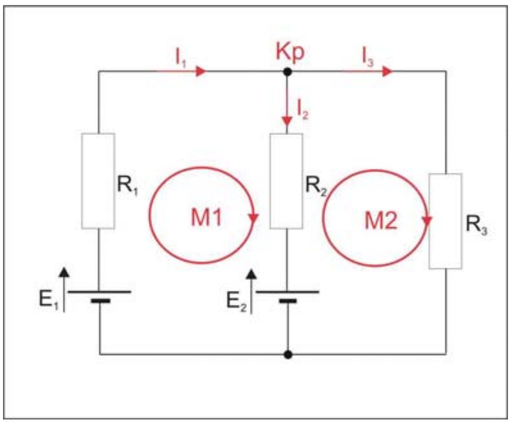


Rechenprogramm:



1. Einzeichnen der Maschen (Tipp: in Uhrzeigerrichtung)
2. Einzeichnen der Ströme in Richtung des Maschensinns (beginnend mit der Masche 1)
3. Aufstellen der Maschengleichungen
4. Aufstellen der Knotenpunktgleichung(en); Anzahl der unabhängigen Knoten = Anzahl der Knoten - 1
5. Eine Größe eliminieren – z.B. I_3 und I_3 durch den entsprechenden Ausdruck ersetzen.
6. Nach I_1 umstellen
7. Nach I_2 auflösen
8. I_1 aus der ersten Maschengleichung bestimmen!
9. I_3 aus der zweiten Maschengleichung bestimmen!
10. Die Werte in die Knotenpunktgleichung einsetzen und prüfen, ob die Gleichung erfüllt wird.

Maschengleichungen



M1: $E_1 - E_2 = I_1R_1 + I_2R_2$
M2: $E_2 = -I_2R_2 + I_3R_3$

Knotenpunktgleichung:

Kp: $0 = I_1 - I_2 - I_3$

$$I_3 = I_1 - I_2$$
$$E_2 = -I_2R_2 + I_3R_3$$
$$E_2 = -I_2R_2 + R_3\left(I_1 - I_2\right)$$
$$E_2 = -I_2R_2 + R_3I_1 - R_3I_2$$
$$E_2 + I_2R_2 + I_2R_3 = I_1R_3$$
$$I_1 = \frac{E_2 + I_2R_2 + I_2R_3}{R_3} = \frac{E_2 + I_2\left(R_2 + R_3\right)}{R_3}$$

I_2 bestimmen, I_1 in M1 einsetzen:

$$\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{I}_2\mathrm{R}_2$$
$$E_1 - E_2 = \frac{R_1}{R_3}\left[E_2 + I_2\left(R_2 + R_3\right)\right] + I_2R_2$$
$$\left(E_1 - E_2\right) - \frac{R_1}{R_3}E_2 = \frac{R_1}{R_3}I_2\left(R_2 + R_3\right) + I_2R_2$$
$$\left(E_1 - E_2\right) - \frac{R_1}{R_3}E_2 = I_2\left[\frac{R_1}{R_3}\left(R_2 + R_3\right) + R_2\right]$$
$$I_2 = \frac{\left(E_1 - E_2\right) - \frac{R_1}{R_3}E_2}{\frac{R_1}{R_3}\left(R_2 + R_3\right) + R_2} = \frac{E_1R_3 - E_2\left(R_1 + R_3\right)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Empfehlung: Ab jetzt mit Zahlenwerten operieren!

- I_1 bestimmen, indem I_2 in M1 eingesetzt wird!
- I_3 bestimmen, indem I_1 in M2 eingesetzt wird!
- Ist die Summe aller Ströme gleich Null? Ist die Knotenpunktgleichung erfüllt?

3.2.2 Zweipoltheorie

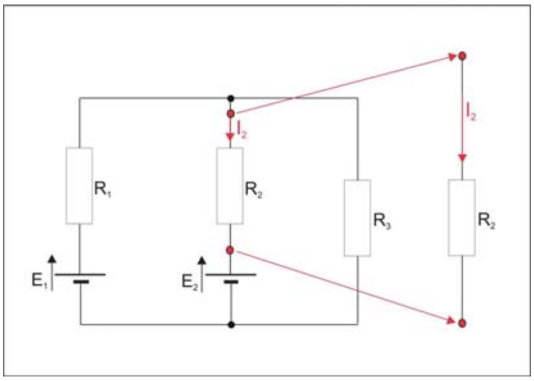
U_l, I_K, R_i - Lösung des Problems durch Bildung von Zweipolersatzgrößen

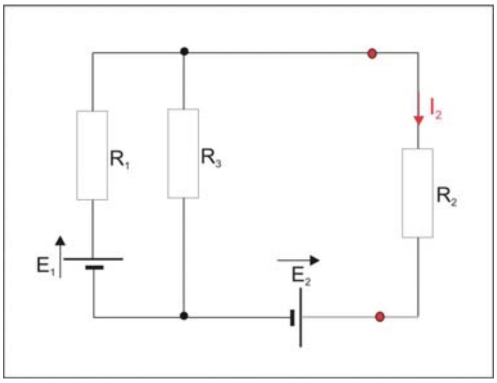
Reduzierung des Netzwerks auf den Grundstromkreis.

Das Netzwerk wird in einen aktiven und passiven Zweipol aufgespaltet. Der aktive Zweipol enthält alle Energiequellen und den resultierenden Innenwiderstand R_i.

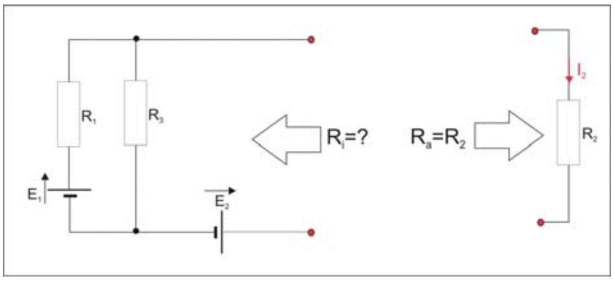
Der Kurzschlussstrom I_K ergibt sich aus der Beziehung $I_K = \frac{\sum E}{R_i}$; die Leerlaufspannung U_l aus der Annahme, dass der Außenwiderstand gegen unendlich strebt.

Der passive Zweipol besteht aus dem Widerstand, durch den der gesuchte Strom fließt oder über den die gesuchte Spannung abfällt.

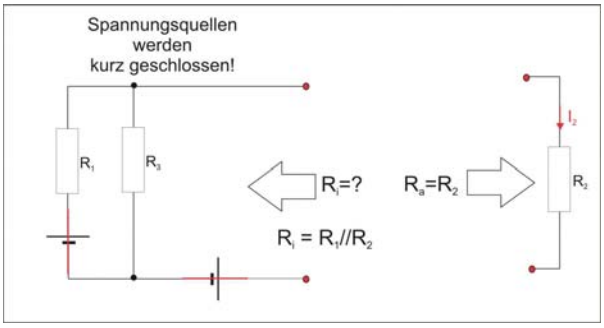




Gesucht ist der Strom durch den Widerstand R_2. Damit kann festgelegt werden, dass **$R_2 = R_a$** ist.



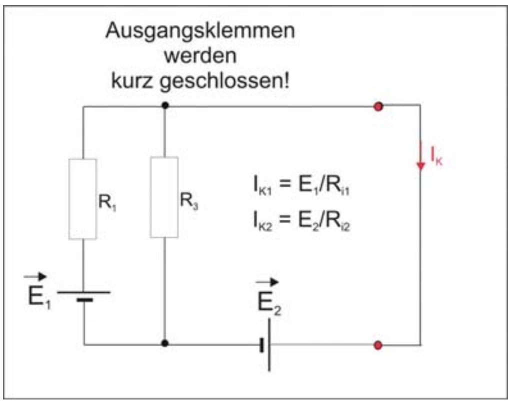
Um den Innenwiderstand des aktiven Zweipols bestimmen zu können, müssen die Spannungsquellen logisch (nicht physisch) kurzgeschlossen werden! Bei Stromquellen wird der Widerstand als unendlich angenommen (Stromquelle wird weggelassen).



Damit ergibt sich für den Innerwiderstand die Beziehung:

$$R_1 \,//\, R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = R_i$$

Für die Bestimmung des Kurzstromwiderstandes wird der Ausgang des aktiven Zweipols kurzgeschlossen.



$$I_K = I_{K_1} + I_{K_2}$$

$$I_K = \frac{E_1}{R_{i_1}} + \frac{E_2}{R_{i_2}} = \frac{E_1}{R_1} + \left[-\frac{E_2}{R_1 // R_3} \right]$$

$$I_K = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_1 R_3}(R_1 + R_3)$$

$$I_K = \frac{E_1 R_3 - E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3}$$

Auflösung nach $I = I_2$!

$$\frac{I}{I_K} = \frac{R_i}{R_i + R_a}$$

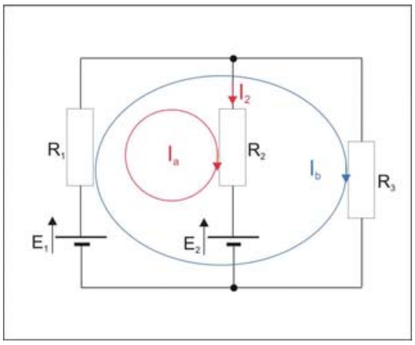
$$I = I_2 = I_K \frac{R_i}{R_i + R_2} = I_K \frac{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{\left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right) + R_2} = I_K \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)\left(\frac{R_1 R_3 + R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_3}\right)}$$

$$I_2 = \frac{E_1 R_3 - E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3} \frac{R_1 R_3}{R_1 R_3 + R_2 (R_1 + R_3)} = \frac{E_1 R_3 - E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

3.2.3 Maschenstromanalyse

Das Verfahren bedient sich fiktiver Ströme (im Gegensatz zu reellen physikalischen Strömen). Jeder Widerstand muss mindestens von einem Maschenstrom durchflossen werden. Ein fiktiver Strom wird so definiert, dass „er“ der gesuchten Größe entspricht.

In unserem Beispiel definieren wir zwei Maschenströme – $\mathbf{I_a}$ und $\mathbf{I_b}$.



Aufstellen der Maschengleichungen:

$$I_a (R_1 + R_2) + I_b R_1 = E_1 - E_2$$
$$I_a R_1 + I_b (R_1 + R_3) = E_1$$

Erste Gleichung wird mit R_1 erweitert
Zweite Gleichung mit $-(R_1+R_2)$

$$I_a R_1 (R_1 + R_2) + I_b R_1 R_1 = R_1 (E_1 - E_2)$$
$$-I_a R_1 (R_1 + R_2) - I_b (R_1 + R_3)(R_1 + R_2) = -E_1 (R_1 + R_2)$$

Gleichungen werden addiert und nach I_b aufgelöst:

$$I_b R_1^2 - I_b(R_1+R_3)(R_1+R_2) = R_1(E_1-E_2) - E_1(R_1+R_2)$$
$$I_b\left[R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)\right] = E_1R_1 - E_2R_1 - E_1R_1 - E_1R_2 = -E_2R_1 - E_1R_2$$
$$I_b = \frac{-E_2R_1 - E_1R_2}{R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)} = -\frac{E_2R_1 + E_1R_2}{R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)}$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$I_a(R_1+R_2) + I_bR_1 = E_1 - E_2$$
$$I_a(R_1+R_2) + \left[-\frac{E_2R_1+E_1R_2}{R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)}\right]R_1 = E_1 - E_2$$
$$I_a = \frac{E_1 - E_2 - \left[-\frac{E_2R_1+E_1R_2}{R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)}\right]R_1}{(R_1+R_2)}$$

$$I_a = \frac{E_1}{(R_1+R_2)} - \frac{E_2}{(R_1+R_2)} + \frac{R_1(E_2R_1+E_1R_2)}{(R_1+R_2)\left[R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)\right]}$$

Nenner:

$$(R_1+R_2)\left[R_1^2-(R_1+R_3)(R_1+R_2)\right] =$$
$$(R_1+R_2)\left[R_1^2-R_1^2-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right] =$$
$$(R_1+R_2)\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right]$$
$$I_a = \frac{E_1\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right] - E_2\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right] + R_1(E_2R_1+E_1R_2)}{(R_1+R_2)\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right]}$$
$$I_a = \frac{-E_1R_1R_2 - E_1R_1R_3 - E_1R_2R_3 + E_2R_1R_2 + E_2R_1R_3 + E_2R_2R_3 + E_2R_1^2 + E_1R_1R_2}{(R_1+R_2)\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right]}$$
$$I_a = \frac{-E_1R_3(R_1+R_2) + R_1(E_2R_3+E_2R_1) + R_2(E_2R_1+E_2R_3)}{(R_1+R_2)\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right]}$$
$$I_a = \frac{-E_1R_3(R_1+R_2) + (R_1+R_2)(E_2R_3+E_2R_1)}{(R_1+R_2)\left[-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right]}$$
$$I_a = \frac{-E_1R_3 + E_2(R_1+R_3)}{-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3}$$

Lösung.

$$I_2 = I_a = \frac{E_1R_3 - E_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

3.2.4 Überlagerungssatz

Wirken in einem linearen physikalischen System mehrere Ursachen, so ergibt sich die Gesamtwirkung aus der Überlagerung der Einzelwirkungen, die von den einzelnen Teilursachen herrühren.

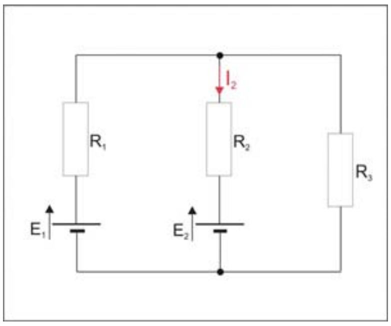
Die Proportionalität zwischen Ursache(U) und Wirkung(W) ergibt dir Gleichung:

$W = k*U$

k entspricht einer Proportionalitätskonstante

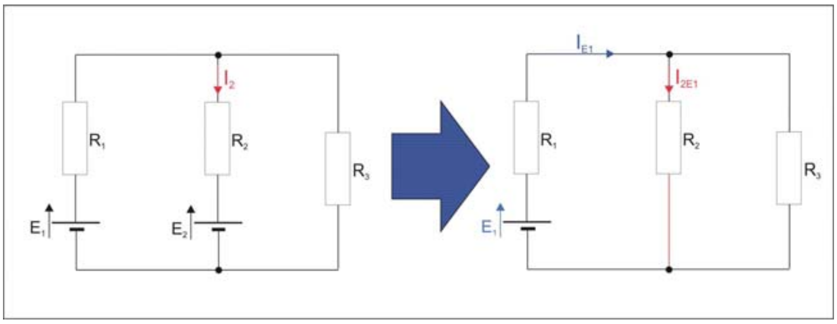
$W = k(U_1 + U_2 + U_3 + \ldots +U_n)$
$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n = kU_1 + kU_2 + kU_3 + \ldots + kU_n$

Bei linearen Stromkreisen ist der Überlagerungssatz für Ströme und Spannungen anwendbar, hingegen nicht für die Leistungen der Teilströme.



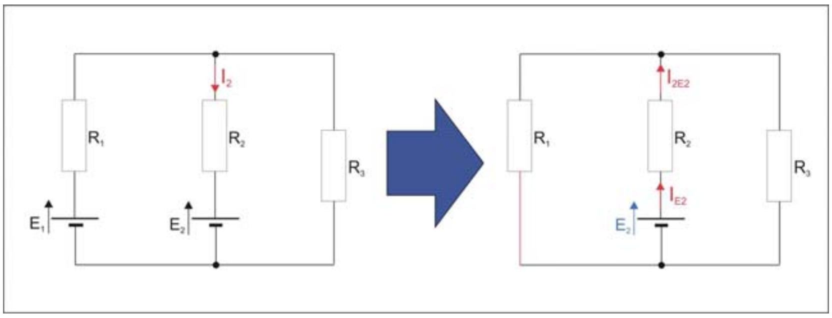
Rechenprogramm:

- Alle EMKs außer einer z.B. E_1 werden durch einen Kurzschluss ersetzt.
- Berechnen Sie den Strom im Zweig z, herrührend von dieser einen EMK – z.B. I_{zE1}.
- Dieser Vorgang wird mit jeder vorhandenen EMK wiederholt.
- Überlagern Sie alle Teilströme zum Gesamtstrom I_z, unter Beachtung der Vorzeichen.



$$\frac{I_{2_{E_1}}}{I_{E_1}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I_{E_1} = \frac{E_1}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$



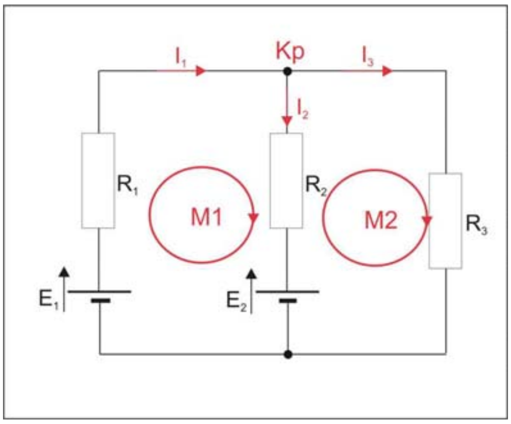
$$I_{2_{E_2}} = \frac{E_2}{R_2 + R_1 // R_3} = \frac{E_2(R_1 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3}$$

$$I_{E_2} = I_{2_{E_2}} = I_2 = I_{2_{E_1}} - I_{2_{E_2}} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} \frac{R_3}{(R_2 + R_3)} - \frac{E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{E_1 R_3 - E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

3.2.5 Knotenspannungsanalyse

Bei der Zweigstromanalyse müssen n Gleichungen – bei n Maschen aufgestellt werden. Zusätzlich benötigt man zum vollständigen Berechnen der Schaltung die Knotenpunktgleichungen, wobei k-1 Gleichungen (k = Anzahl der Knoten) benötigt werden.



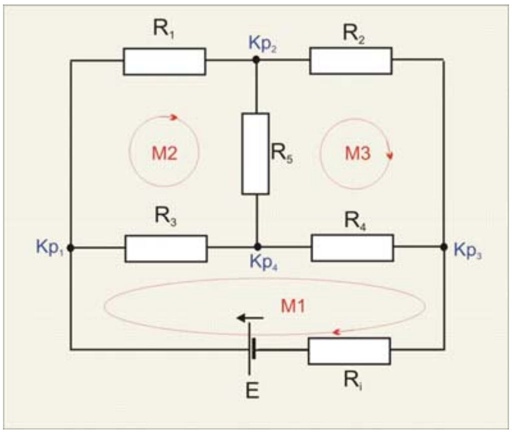
Maschengleichungen

M1: $E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$
M2: $E_2 = -I_2 R_2 + I_3 R_3$

Knotenpunktgleichung:

Kp: $0 = I_1 - I_2 - I_3$

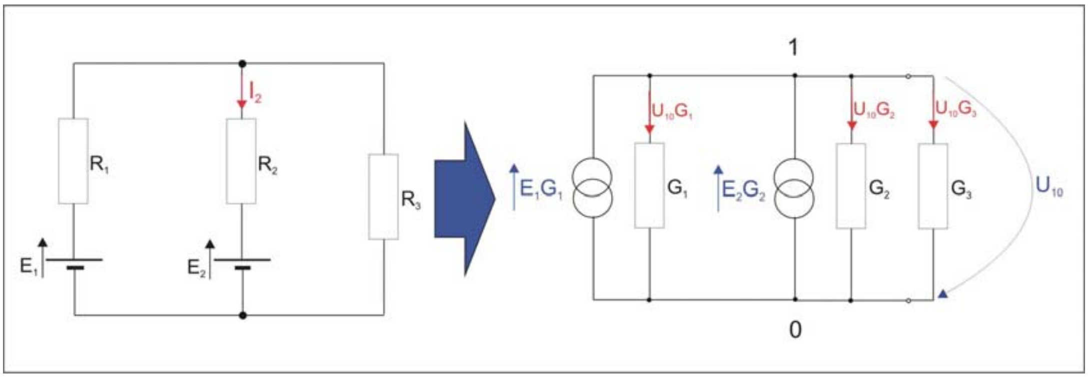
Bei Schaltungen mit drei oder mehr Maschen wird das Gleichungssystem recht umfangreich und der mathematische (Zeit-) Aufwand steigt recht schnell an (siehe Hausaufgabe).



$$E = I_3 * R_3 + I_4 * R_4 + I_g * R_g$$
$$0 = I_1 * R_1 + I_5 * R_5 - I_3 * R_3$$
$$0 = I_2 * R_2 - I_4 * R_4 - I_5 * R_5$$
$$0 = I_g - I_1 - I_3$$
$$0 = I_5 + I_3 - I_4$$
$$0 = I_2 + I_4 - I_g$$

1. Schritt –Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen

   Der Energieeintrag wird nur noch als Einströmung betrachtet.



Knotengleichung:

$$U_{10}\left(G_1+G_2+G_3\right)=E_1G_1+E_2G_2$$

2. Schritt – Aufstellen der Maschengleichung mit den transformierten Größen

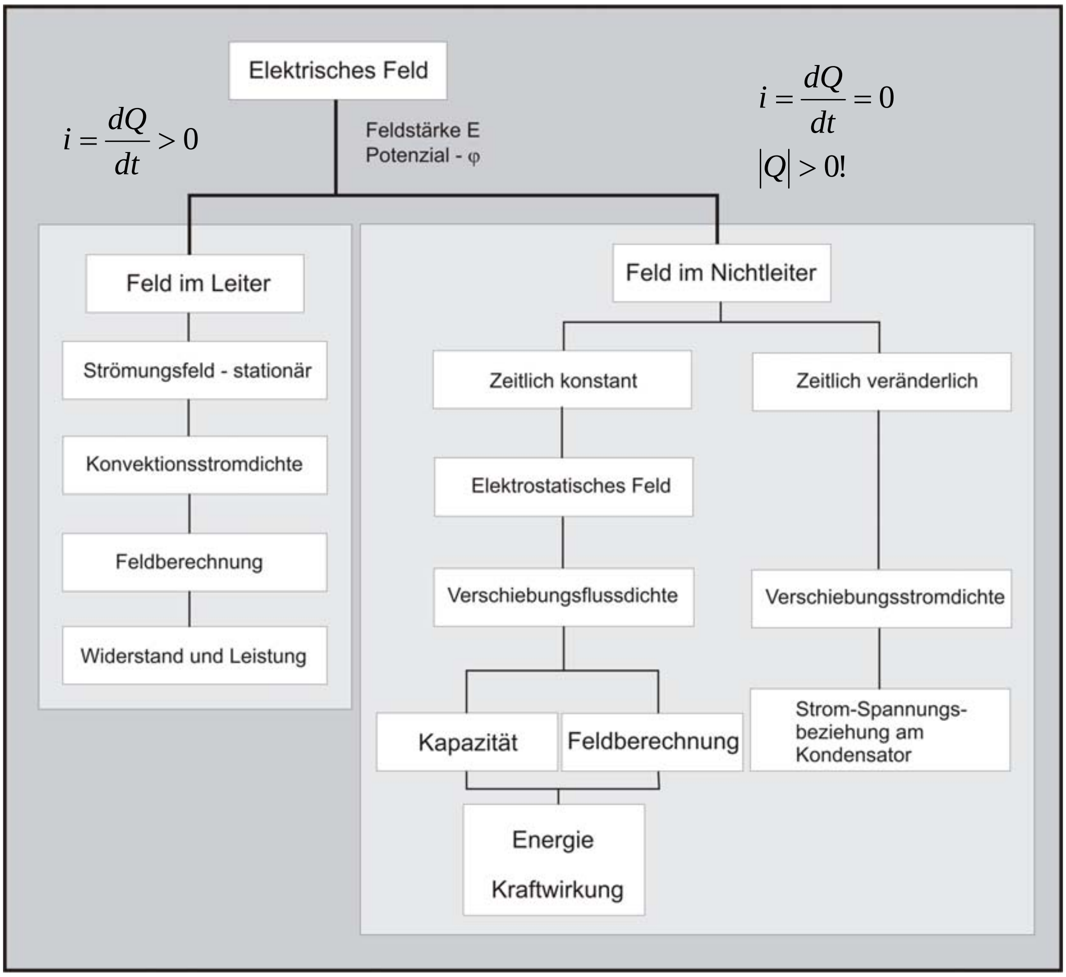
$$U_{10}-I_2R_2=E_2$$
$$I_2=\left(U_{10}-E_2\right)G_2$$
$$I_2=\left(\frac{E_1G_1+E_2G_2}{G_1+G_2+G_3}-E_2\right)G_2$$
$$I_2=\frac{E_1G_1-E_2\left(G_1+G_3\right)}{G_1+G_2+G_3}G_2$$

3. Schritt – Rücktransformation des Ergebnisses in die ursprüngliche Schaltung

4. Das Elektrische Feld

4.0 Der Überblick

Überblick über Begriffe und Probleme, die in dieser Thematik behandelt werden.



4.1 kleine Formelübersicht

Konvektionsstromdichte: $S = \kappa E$

Verschiebungsflussdichte: $D = \varepsilon E$

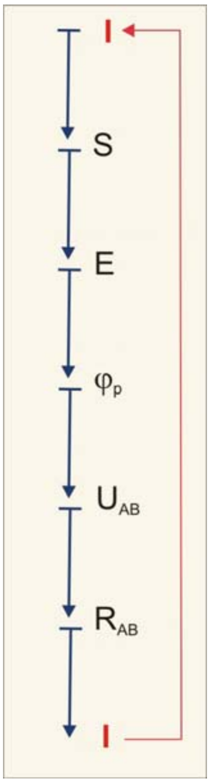
Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$

Verschiebungsstromdichte: $S_V = \frac{dD}{dt}$

-,

Schaltvorgänge am Kondensator: $i = C \frac{du_C}{dt}$

Rechenprogramm A



es ist ein ***Strom I*** gegeben; d.h. „wir“ sind im leitenden Medium

Berechnung der ***Stromdichte S*** für einen beliebigen Feldpunkt
Fläche -> Quadrat, Rechteck, Halbkugel, Kugel, Zylinder

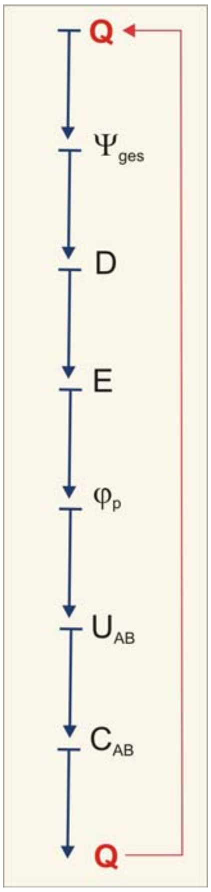
Berechnung der ***Feldstärke E*** für einen Feldpunkt

Berechnung des ***Potenzials*** φ_p in einem Feldpunkt

Die Differenz zwischen zwei Feldpunkten ist die ***Spannung*** U_{AB}

Der ***Widerstand*** R_{AB} ist der Quotient aus Spannung und dem Strom I

Rechenprogramm B



es ist eine ***Ladung Q*** (ein Ladungspaar +/-Q) gegeben - dQ/dt = 0

der ***Verschiebungsfluss*** $\Psi_{ges} = Q$

Verschiebungsflussdichte für einen beliebigen Punkt $D = \frac{d\Psi}{dA}$

Feldstärke für einen Feldpunkt $E = \frac{D}{\varepsilon}$

Potenzial im beliebigen Feldpunkt $\varphi_P = \int_0^P E ds$

Spannung zwischen zwei Potenzialpunkten $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

Kapazität $C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}}$

4.2 Die Beziehung zwischen Feldstärke, Potenzial und Spannung

Der Kugelerder - der klassische Blitzschutz (sehr stark abstrahiert!)

- Die Ladung Q_1 (negative Ladung) wird durch eine Entladung der Wolken erzeugt.
- Der Strom $i = dQ_1/dt_1$ fließt entlang eines Leiters (mit der Leitfähigkeit κ_1) in den Boden (+ Pol).
- Das Ende des Leiters [eine Metallkugel, die die Ladung (Energie) aufnimmt] muss so tief im Boden (Leitfähigkeit κ_2) sein, damit die Feldstärke nicht so konzentriert an der Erdoberfläche wirken kann -> die Potenzialdifferenz - 50V auf 80cm - darf an der Erdoberfläche nicht überschritten werden.
- Die Ladung ($Q_2 = i*t_2$) im Boden (κ_2) wird in einer Kugel mit dem Radius r_0 gespeichert [aufgefangen]. Der gesamte Strom i durchdringt die Kugelfläche!

Q

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$S = \frac{I}{A_{Kugel}}$$

$$A_{Kugel} = 4\pi r^2$$

U = 50 V
l = 0,8 m

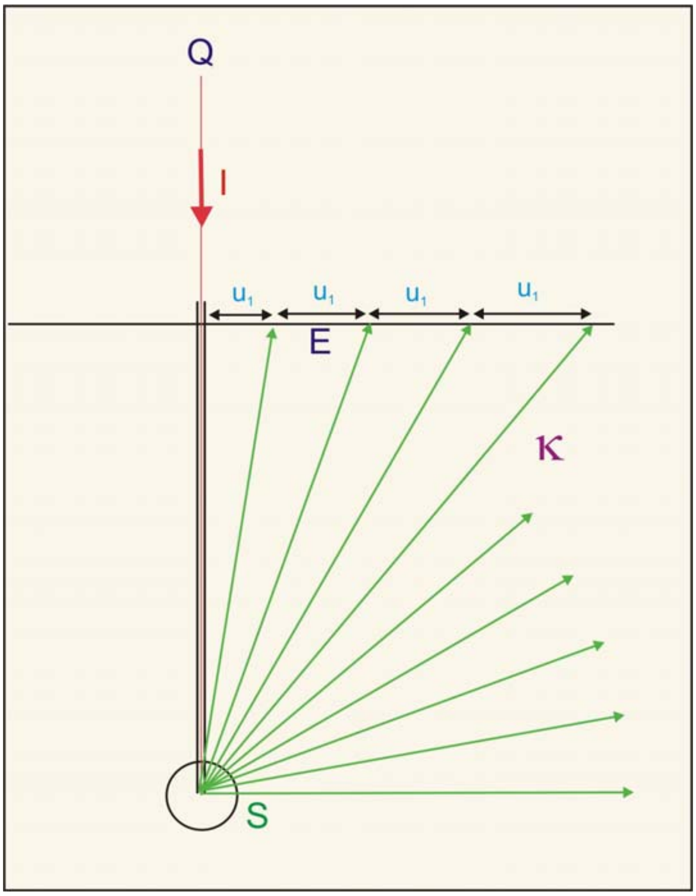
E = U/l = 62,5V/m

κ = 0,1 S/m

Q = 2000 As
t = 500ms

I = 2000 As/0,5s

I = 4000A



$$I = SA = S4\pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{S4\pi}} = \sqrt{\frac{I}{\kappa E 4\pi}} = \sqrt{\frac{4000A}{0{,}1\frac{S}{m}62{,}5\frac{V}{m}4\pi}} \approx ....m$$

4.3 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Die Ladungen werden im Leiter durch die Feldstärke (Feldkraft) bewegt.

erstes Beispiel

Zwischen zwei vertikal parallelen Platten (mit dem Abstand d) befinden sich zwei Werkstoffe mit den beiden Leitfähigkeiten κ_1 und κ_2.

$\kappa_2 = 2\kappa_1$

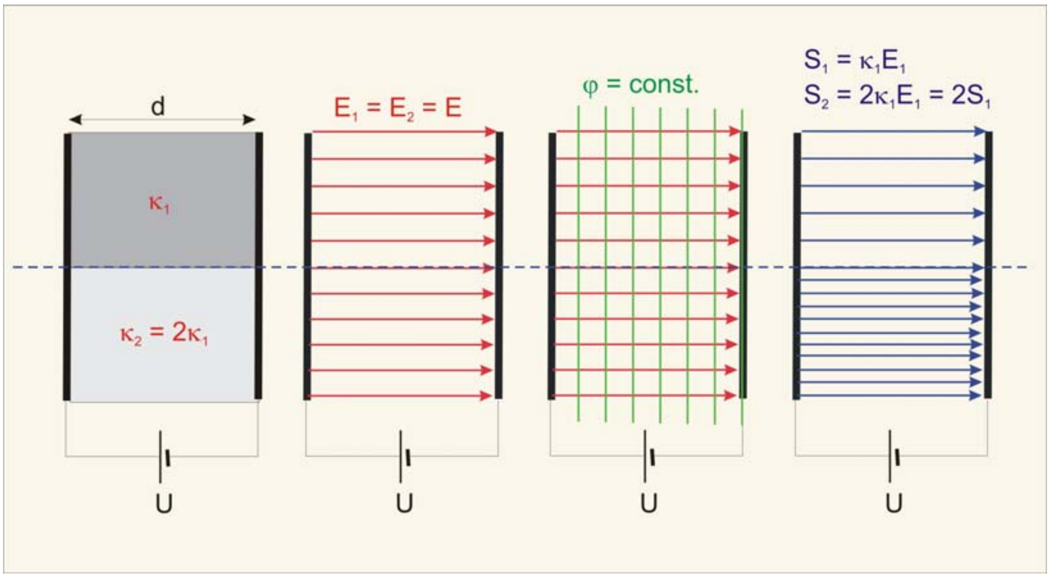
Zwischen den Platten fällt die Spannung U ab.

Gesucht sind:

das Potentialfeld, das Feldstärkefeld und das Strömungsfeld in einem Vertikalschnitt

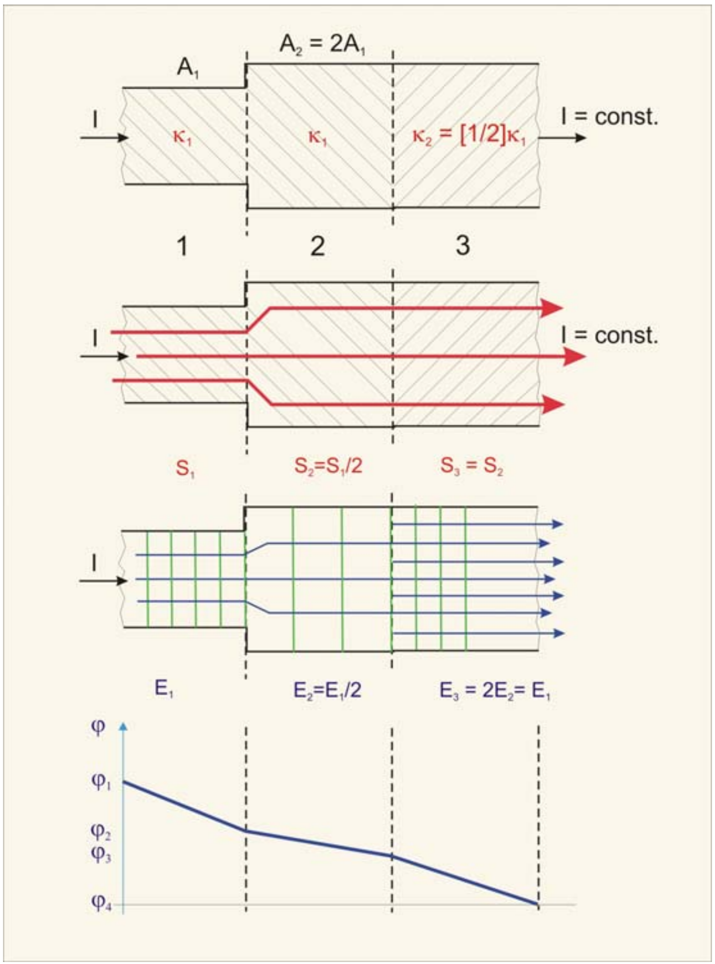
Lösung:

- U ist für beide Medien gleich, d.h. mit E = U/d ist auch die Feldstärke für beide Medien gleich.
- Die Ströme sind durch die unterschiedlichen Leitwerte ungleich.
- Da die Flächen gleich sind, sind die Stromdichten proportional den Strömen ungleich.
- Das Medium mit der doppelten Leitfähigkeit κ_2 hat einen größeren Strom ($2 \cdot I_{\kappa 1}$) und somit ist die Stromdichte $S_{\kappa 2}$ doppelt so groß, gegenüber $S_{\kappa 1}$.



zweites Beispiel

Es liegt eine Reihenschaltung beider Leiter vor, wobei der Leiter mit dem κ_1 Werte unterschiedliche Querschnitte aufweist.



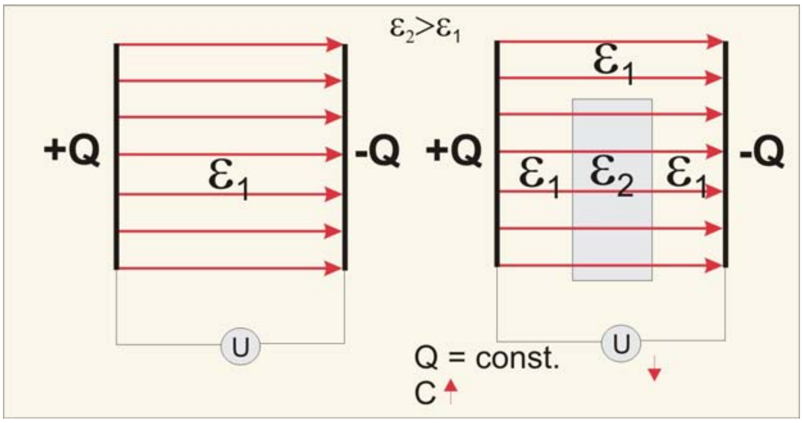
4.4 Das elektrostatische Feld

Das elektrische Feld der ruhenden elektrischen Ladung.

(1) Eine Ladung ist Quelle eines elektrostatischen Feldes. Ein solches Feld äußert sich in Kraftwirkungen auf elektrische Ladungen.
(2) Die Feldstärke E - im Punkt eines elektrostatischen Feldes - ist proportional der felderzeugenden Ladung Q.

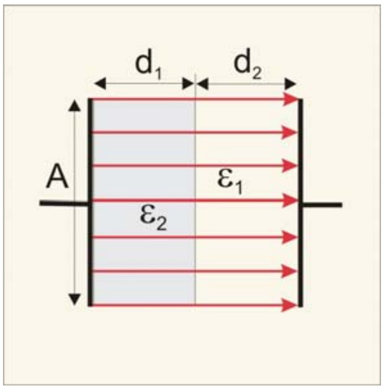
Nichtleiter im elektrischen Feld
Das Di-Elektrikum (Dielektrikum) - relativ und absolut

$\varepsilon_0 = 8{,}85 * 10^{-12}$ As/Vm
ε_r von Vakuum = 1 von Luft $1+6*10^{-6}$
ε_r von Keramik > 100
$C = \varepsilon_0\varepsilon_r A/d$
$CU = Q$
$U = Q/C$



Reihen- und Parallelschaltung zweier Dielektrika

Aufgabe 1:



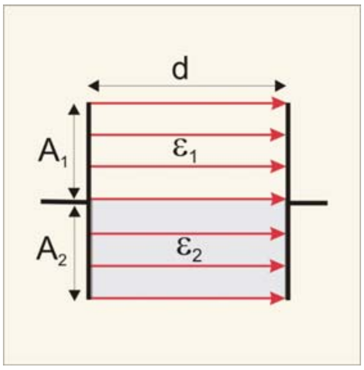
ε_1 und ε_2 sind in Reihe geschaltet
$A = A_1 = A_2$
$d_1 = d_2$, $(d_1 + d_2 = d)$

Wie groß ist die Gesamtkapazität?

Lösung:

$$C_{ges} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}} \frac{A}{d_1}$$

Aufgabe 2:



ε_1 und ε_2 sind parallel geschaltet
$A = A_1 + A_2$, $(A_1 = A_2)$
$d_1 = d_2 = d$

Wie groß ist die Gesamtkapazität?

Lösung:

$$C_{ges} = \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}\right] \frac{A_1}{d}$$

Der Verschiebungsfluss Psi Ψ

im Leiter Q -> I

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Aussage dieser Beziehung: Wie viel Elektronen geben ihren Energieimpuls pro Zeiteinheit weiter - es erfolgt kein Materialtransport!

$$\vec{S} = \frac{di}{dA}$$

Wie viel Energieimpulse durchströmen senkrecht eine Fläche?

im Nichtleiter Q -> I = 0

Q - wie viel Ladungsträger sind im Energiespeicher vorhanden?
Ψ - wie viel Ladungsträger werden - bedingt durch die Kraft der wirkenden Feldstärke - zum „anderen" Pol verschoben?

$\Delta Q = \Delta\Psi$

$$\vec{D} = \frac{d\Psi}{dA}$$

Wie viel positive Ladungsträger durchströmen senkrecht die Fläche eines Nichtleiters?

4.5 Energie- und Kraftwirkungen im elektrischen Feld

Energie eines Kondensators, die am Verbraucher R wirksam wird:

$$W = \int_0^\infty uidt = \int_0^\infty i^2 Rdt$$

$$i(t) = C\frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W = \int_0^\infty \frac{U_C^2}{R^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}Rdt = -\frac{\tau}{2}\frac{U_C^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{\tau U_C^2}{2R} = \frac{CU_C^2}{2}$$

$$W = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{QU_C}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Kräftewirkungen zweier Punktladungen

$F = q_2E_1 = q_1E_2$

Coulombsches Gesetz

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon a^2}$$ (a - Abstand der Punktladungen auf einer Ebene)

4.6 Ladungsbewegungen im Leiter und Nichtleiter

Konvektionsstrom S_k

In einem Kupferdraht ist die Dichte (der für den Leitungsstrom zur Verfügung stehenden Elektronen) n = $8{,}6 \cdot 10^{22}cm^{-3}$.

Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen, wenn die Stromdichte $10A/mm^2$ hoch ist?

$$\rho = n * q$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$dI = \frac{dQ}{dt} = nq\frac{dx}{dt}d\vec{A}$$

S_k = nqv = ρv (Raumladungsdichte * Driftgeschwindigkeit)

- n - Dichte der Ladungen (Anzahl der mit der Geschwindigkeit v bewegten Ladungsträger pro Volumen)
- ρ Raumladungsdichte; Dichte der Ladungsträger (Anzahl der bewegten Ladungsträger pro Volumen) multipliziert mit der Elementarladung

Lösung: v = 0,72 mm/s

Feldstrom

Ladungsträgerbewegung unter Einfluss der Feldstärke

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}\Delta U}$$

Aufgabe: Ein Elektron umkreist mit v= $2{,}2*10^7$ m/s eine positive Ladung. Wie groß muss der Radius der Umlaufbahn sein, damit das Elektron sich auf einer stabilen Bahn bewegen kann?

Coulombsche Anziehungskraft muss gleich der Zentrifugalkraft sein!

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}$$

e = $1{,}6 * 10^{-19}$ As
m = $9{,}11*10^{-35}$ Ws^3/cm^2
ε_0 = $8{,}86*10^{-12}$ As/Vm

Lösung: r = $5{,}2*10^{-10}$m

Diffusionsstrom - Diffusionsstromdichte

Eine Ladungsbewegung kann auch ohne elektrische Feldeinwirkung auftreten, wenn ein örtlicher Konzentrationsunterschied existiert. Die Natur hat das Bestreben diese Unterschiede auszugleichen.

für ein dreidimensionales System gilt:

$$S_D = -qD\left(i\frac{\delta n}{\delta x} + j\frac{\delta n}{\delta y} + k\frac{\delta n}{\delta z}\right)$$

Beispiel: Wie groß ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger bei eindimensionaler Diffusion?

D = Diffusionskonstante

$$nev = -eD\frac{dn}{dx}$$

$$v = -\frac{1}{n}D\frac{dn}{dx}$$

4.7 Grenzwerte des Kondensators

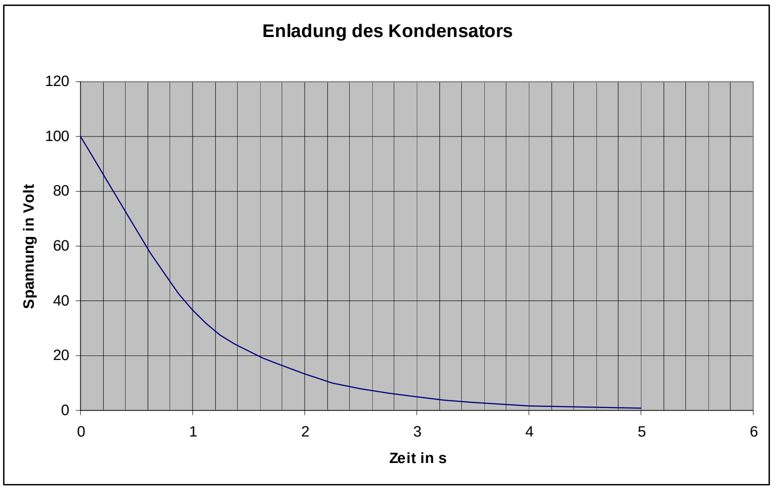
Die Energiefrage

Welche Energie kann maximal in einem Kondensator von 1 Farad Kapazität gespeichert werden, wenn er auf 100V aufgeladen wurde?

Die Energieübertragung erfolgt bei der Entladung des Kondensators über einen Lastwiderstand R.

Zeitkonstante τ = RC

Allgemeiner Ansatz:



$$W(t) = \int_0^\infty u(t)i(t)dt$$

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Da u(t) gegen Null konvergiert, kann das Integral von t=0 bis t bis unendlich sehr einfach gelöst werden.

$$W = \int_0^\infty \frac{u}{R}udt$$

$$W = \frac{1}{R}\int_0^\infty u^2dt = \frac{1}{R}\int_0^\infty \left[Ee^{-\frac{t}{\tau}}\right]^2 dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}}dt$$

$$W = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\right]\int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}}dt$$

$$W = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}\right]\left[e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]\Bigg|_0^\infty$$

Grenzwerte einsetzen:

Q = C*U (Q = C* E)

$$W = -\frac{E}{2}\frac{EC}{1}\left[\left(e^{-2\frac{\infty}{\tau}}\right)-\left(e^{-2\frac{0}{\tau}}\right)\right] = +E^2\frac{C}{2} = E\frac{EC}{2} = E\frac{Q}{2}$$

Lösung mit vorgegebenen Werten:

$$W = \frac{(100V)^2}{2} * 1\frac{As}{V} = 5000VAs = 5kWs$$

Die zweite Möglichkeit:

$$W = \int_0^{\infty} u(t)i(t)dt$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt}$$

$$W = C\int_0^{\infty} u\frac{du}{dt}dt \Rightarrow C\int_0^{E} udu = E^2\frac{C}{2} = E\frac{Q}{2}$$

Die Konstruktionsfrage

Wie groß muss ein 1 Farad Plattenkondensator sein, wenn der Plattenabstand 1cm betragen muss, da als Dielektrikum Luft verwendet wird?

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$$

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1\frac{As}{V} * 0{,}01m}{8{,}85 * 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}} = \frac{10^{-2}\,AsmVm}{8{,}85AsV} * 10^{12} = \frac{10}{8{,}85}10^9\,m^2$$

Bei quadratischem Plattenformat ergibt es eine Kantenlänge von:

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{10}{8{,}85}10^9}\,m = 33614m \approx 33km$$

Fazit: Ein Plattenkondensator mit der Kapazität von 1 Farad ist recht ungewöhnlich.

4. 8 Aufgaben zum Thema Elektrisches Feld

- Elektrische Feldstärke[E],
- Verschiebungsdichte[Ladungsdichte D],
- Ladungsmenge[Q],
- Kapazitäten [C]

$$\rho_{Cu} = 0{,}0178\Omega\frac{mm^2}{m}$$

$$\rho_{Alu} = 0{,}029\Omega\frac{mm^2}{m}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85*10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$$

(1) Welche elektrische Feldstärke besteht in einer Kupferleitung von 1,5cm Durchmesser, durch die ein Strom von 6A fließt?

(2) Welche elektrische Feldstärke besteht in einem Draht einer Spule mit 10.000 Windungen und einem mittleren Windungsdurchschnitt von 6,5cm, an deren Enden eine Spannung von 7,9V liegt?

(3) In einem Kupferdraht von 3mm Durchmesser herrscht in Längstrichtung eine Feldstärke von 45mV/m; welcher Strom fließt?

(4) Welche Dicke muss ein Aluminiumdraht haben, wenn im Innern bei einem Strom von 1A eine Feldstärke von 10mV/m herrschen soll?

(5) Ein Plattenkondensator ist mit einer Spannungsquelle von U = 450V verbunden Bei welchem Plattenabstand wird die Luftstrecke durchschlagen, wenn die Durchschlagfestigkeit der Luft 20kV/cm beträgt?

(6) In einem Plattenkondensator von 250cm^2 Oberfläche werden nacheinander folgende Isoliermaterialien eingeklemmt:

a) Polystyrol mit d=2mm und ε_r = 2,5
b) Piezolan mit d=2mm und ε_r = 800

Wie groß ist die Ladungsmenge auf den Platten, wenn die Spannung 900V beträgt?

(7) Die Ladung einer freistehenden Kugel von 8cm Durchmesser wurde zu 0,5*10^{-8}C bestimmt. Berechnen Sie:

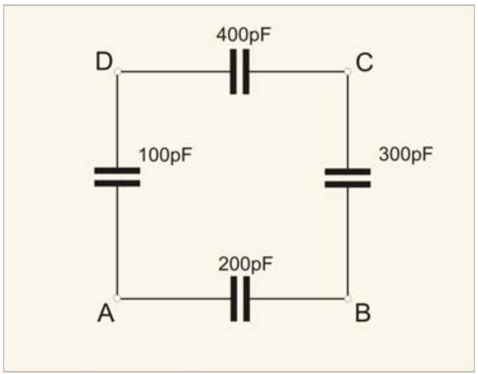
a) die Ladungsdichte
b) die Feldstärke an der Kugeloberfläche
c) die Spannung gegenüber dem Erdpotenzial

(8) Welche Ladungsmenge enthält ein Kondensator von 15cm Plattendurchmesser und 1mm Abstand, wenn die Platten in Azeton (ε_r=21,3) getaucht sind. Die Platten sind während des Eintauchvorgangs mit den Polen einer Batterie von 120V verbunden.

(9) Zwei Metallplatten von je 60cm^2 sind durch eine Schicht aus Phenolharz (ε_r=7,5) getrennt, die bei einer Ladung von 1,99*10^{-6}C durchgeschlagen wird.

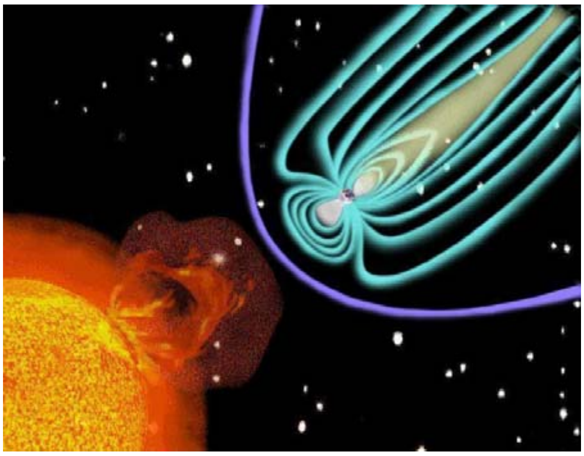
Wie groß ist die Durchschlagfestigkeit?

(10) Wie groß sind die Ersatzkapazitäten zwischen den Punkten:



5. Magnetismus

5.1 Das Erdmagnetfeld

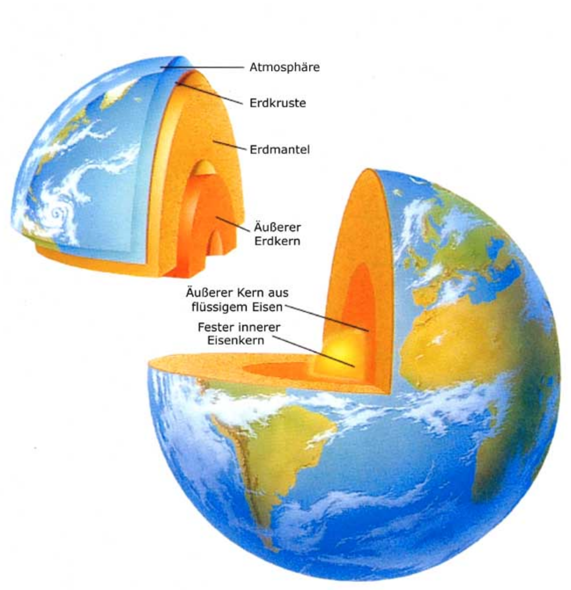


Die Sonne hat ein globales Magnetfeld, genauso wie fast alle Planeten.

Ausnahme hierbei sind die Venus und der Mars. Unser Mond hat auch kein globales Magnetfeld, Mond und Mars haben aber lokale Magnetfelder. Sie könnten Reste eines früher existierenden globalen Magnetfeldes sein.

Die Ursache dafür, dass **Venus** kein Magnetfeld hat, könnte ihre **langsame Rotation** [1]sein.

Von allen terrestrischen Planeten - also Merkur, Venus, Erde und Mars - hat die Erde das mit Abstand stärkste Magnetfeld. Die Begründung liegt wohl im flüssigen äußeren Erdkern, der nach bisherigen Erkenntnissen aus Eisen- und Nickellegierungen besteht.



Das **Magnetfeld[2] der Erde** hat zwei Magnetpole, die nicht identisch mit den Erdpolen sind, aber sie befinden sich in ihrer Nähe. Es handelt sich dabei um keine starren Punkte, denn sie verändern sich in ihrer Lage, das bedeutet, die magnetischen Pole werden im Laufe der Zeit verschoben.

Das Magnetfeld der Erde hat eine wichtige Schutzfunktion. Durch die Sonnenwinde, die von der Sonnenoberfläche durch das Sonnensystem geschickt werden, würde die Erdatmosphäre angegriffen werden.

Die Sonnenwinde werden aber nicht vollständig von der Magnetosphäre abgeblockt, denn über den Polen ist der Schutz des Magnetfeldes geringer als beispielsweise über dem Äquator. Dort kann es daher vorkommen, dass geladene Teilchen der Sonnenwinde mit atmosphärischen Gasen zusammentreffen, weshalb es über den Polen zu den bekannten Lichtspielen kommen kann, die als **Polarlichter** [3]bekannt sind.

5.2 Das magnetische Feld und Elektrizität

Die Wirkung des magnetischen Feldes kann in der Natur beobachtet werden. Faszinierend dabei sind die Kräftewirkungen auf bestimmte Stoffe. Die technische Nachbildung des magnetischen Feldes hat das Ziel,

---

[1] etwa 243 Erd-Tage; 225 Erdtage = ein Venusjahr; 92bar atmosphärischer Druck; mittlere Temperatur 450°C
[2] 30-60µT
[3] Das Polarlicht der Nordhalbkugel heißt Aurora borealis oder einfach auch Nordlicht. Das Polarlicht der Südhalbkugel wird als Aurora australis oder Südlicht bezeichnet.

die Kraftwirkungen gesteuert einzusetzen. Die technischen Kräfte sind jedoch bis zu 50.000mal höher, als die Kraftwirkungen in der Natur.

Die ersten Experimente:

Was erzeugt ein magnetisches Feld?

Ein stromdurchflossener Leiter wird von Magnetfeldlinien umgeben. Der Umlauf der Magnetfeldlinien hängt von der Stromflussrichtung ab.

Aufgabe: Machen Sie die magnetische Feldstärke sichtbar!

I = 0; Auf einer Platte liegen Eisenfeilspäne und Kompassnadeln. Der Strom durch den Leiter ist Null.

Ergebnis: Keine Ordnung bei den Spänen erkennbar, keine geregelte Kraftwirkung. Die Kompassnadeln richten sich in Nord-Süd Richtung aus.

I <> 0; Ein Strom wird eingeschaltet und erzeugt ein magnetisches Feld (rechte Hand Regel - der Daumen zeigt in Stromrichtung, die gekrümmten Finger symbolisieren den Verlauf der Feldlinien.

Ergebnis: Die Späne richten sich längst des Kreises um den Mittelpunkt des Leiters aus.
Die Kompassnadeln richten sich tangential zu den konzentrischen Kreisen aus.

Frage: Welches Drehmoment ist notwendig, um diese mechanische Arbeit zu verrichten?

$$M \sim H = c\frac{I}{r}$$

- Das Drehmoment ist direkt proportional zur Stromstärke. Je näher die Späne am Stromleiter sind, desto geringer ist die notwendige magnetische Feldstärke, um die Masse der Späne mechanisch zu bewegen.

- Die Kraft wirkt zur magnetischen Feldstärke in einem Winkel von 90°!

Setzt man $c=1/2\pi$, so steht im Nenner $l=2\pi r$, wobei l die Länge einer Feldlinie mit dem Radius r ist.

$$H = \frac{I}{l}$$
$$I = Hl$$

- Der Strom durch die von einer beliebigen magnetischen Feldlinie berandeten Fläche (Kreisfläche) ist das Produkt aus dem längst der Feldlinie konstanten Betrag H der magnetischen Feldstärke und der Länge l der betreffenden Feldlinie.

Die technischen Grenzen sind bei einem Leiter in Luft recht schnell erreicht, so dass die Frage auftauchte, womit könnte man die Magnetfeldstärke verstärken?

Lösung:

- n Faktor durch Verwendung von Wicklungen (nebeneinander und übereinander)
- statt Luft einen Eisenkörper zur Bündelung der Magnetfeldlinien verwenden
- geschlossener Eisenkreis (Transformator - keine Kraftübertragung)

- Kreis mit Luftspalt (elektrische Maschinen - Kraftübertragung im Luftspalt zwischen Rotor und Stator)

Eisen und/oder Dynamoblech ? Das Problem des Restmagnetismus, nach Abschaltung des Stroms -> Hysteresisschleife H = f(B)!

Aufgabe:

Durch einen Kupferdraht von 20m Länge und 2mm Durchmesser fließt ein Strom I = 15A.

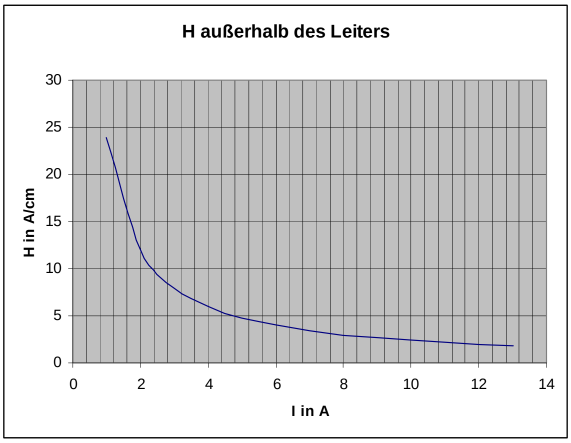
Wie ist der Verlauf der magnetischen Feldstärke innerhalb und außerhalb des Leiters?

$$I = Hl = H2\pi r$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

außerhalb des Leiters gilt: $r >= r_0$ (Außenradius des Leiters)

$$H_0 = \frac{I}{2\pi r_0} = \frac{15A}{2\pi 10^{-3} m} = 2390\frac{A}{m} = 23{,}9\frac{A}{cm}$$



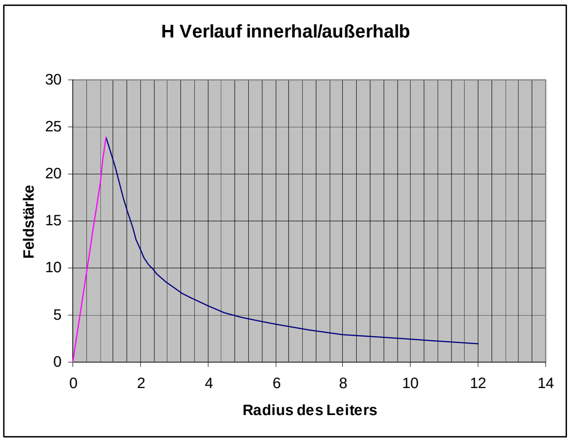
innerhalb des Leiters gilt: $r < r_0$

Innerhalb der Leiters sind die Feldlinien ebenfalls Kreise um den Leitermittelpunkt. Eine mit r berandete Fläche hat die Größe πr^2 durch die der Teilstrom

$$I_{in} = \frac{Ir^2}{r_0^2} = H2\pi r \text{ fließt.}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r_0^2} r$$

Im Leiter steigt die Feldstärkelinear an und hat das Maximum bei $r = r_0$.



5.2.1 Magnetische Feld- und Kenngrößen

magnetische Feldstärke H

Wenn man den Raum um den stromdurchflossenen, elektrisch isolierten Leiter mit Eisen füllt (Durchführung durch einen massiven Eisenkörper), ändert sich bei gleicher Stromstärke, weder der Feldlinienverlauf, noch die Richtung der Feldstärke.

Auch der Betrag von H bleibt konstant!

Trotzdem wissen wir, dass durch das Eisen (gegenüber der Luft) „etwas“ verändert wird. Nur die Feldstärke H allein ist nicht ausreichend das Feld zu beschreiben, daher benötigen wir eine zweite Größe.

magnetische Flussdichte - [mag.] **Induktion B** [volkstümlich: Magnetfeld]

Die magnetische Flussdichte B - magnetische Induktion (sie hat das Formelzeichen B und steht für die Flächendichte des magnetischen Flusses Φ, welcher durch ein bestimmtes Flächenelement A hindurch tritt. Das Formelzeichen B geht zurück auf den schottischen Physiker James Clerk Maxwell, der in seinen Aufzeichnungen die Buchstaben B, C und D für das magnetische und E, F und G für das elektrische Feld verwendete.) :

B = μH (B und H sind vektoriell gleichgerichtet)

μ [Ωs/m]
μ - magnetisch Durchlässigkeit des Stoffes (Permeabilität)

μ_0(Vakuum) und μ

Medium	μ_r	Einteilung
Supraleiter	**0**	**ideal diamagnetisch**
Blei, Zinn	<1 (ca. 0,999…)	diamagnetisch
Kupfer	$1–6{,}4\cdot10^{-6} = 0{,}9999936$	diamagnetisch
Vakuum	**1**	**(neutral)**
Platin	1,000257	paramagnetisch
Wasserstoff	$1+8\cdot10^{-9}$	paramagnetisch
Luft >1	(ca. $1+10^{-6}$)	paramagnetisch
Aluminium	>1	paramagnetisch
Kobalt	80–200	ferromagnetisch
Eisen	**300–10.000**	**ferromagnetisch**
Ferrite	4–15.000	ferromagnetisch

Aufgabe: Man berechne und zeichne für den stromdurchflossenen Leiter die magnetische Flussdichte. Luft und Kupfer sind unmagnetische Stoffe!

außerhalb des Leiters gilt:

$$B_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; r > r_0$$

an der Oberfläche des Leiters gilt:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}; r = r_0$$

$$B_0 = 3mT$$

im Leiter gilt:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r; r < r_0$$

magnetischer Fluss Φ

wenn B = Φ/A (B = Flussdichte, d.h. Fluss pro Fläche)

dann: Φ = BA [Vs = 1Wb]

allgemein: $\Phi = \int BdA$

Aufgabe: Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ innerhalb und außerhalb des stromdurchflossenen Leiters!

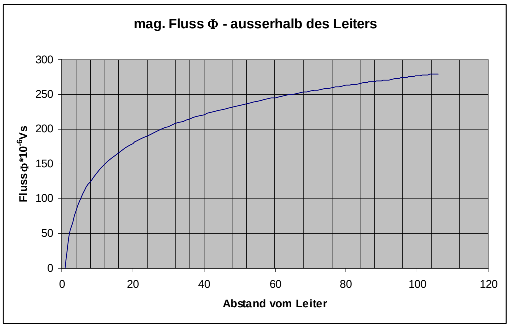
Die mittlere Flussdichte wird mit B = $B_0/2$ = $1{,}5*10^{-3}$ T angesetzt.
Die durchströmte Fläche ist gleich: A = $l*r_0$ = 20m * 1mm = $20^{-3}m^2$

im Innern des Leiters ist Φ = BA = $30*10^{-6}$Vs

dA = l*dr d.h.: dΦ = B*dA

$$\Phi = \int BdA = \int_{r_0}^{r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = \mu_0\frac{Il}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0} = 60\left(\ln\frac{r}{r_0}\right)10^{-6}Vs$$

für r = 1cm -> Φ = $138*10^{-6}$ Vs
für r = 10 cm -> Φ = $276*10^{-6}$ Vs
für r = 1m -> Φ = $414*10^{-6}$ Vs



5.2.2 Das Durchflutungsgesetz

Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhand zwischen der elektrischen Größe I und magnetischen Größe H. **Strom erzeugt ein Magnetfeld, ein Magnetfeld erzeugt Strom!**

$$\sum I = \sum Hl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots$$

Beispiel - ein Elektromagnet

Aufbau: festes Joch, Luftspalt, beweglicher Anker
Besonderheit: Die Blechlammellen haben nicht immer den gleichen Querschnitt!

Aus diesen Gründen sind das durchflutete Material und der Querschnitt nicht als homogen bzw. konstant zu betrachten. Die Durchflutung durch ΣI ist durch die Richtung der Einzelströme bestimmt. Hat eine Spule N in Reihe geschaltete Windungen, so wir N mal der Spulenstrom in gleicher Richtung durch die Fläche geführt. ΣI = NI

B = const. ist nur in einem geschlossenen Eisenkreis möglich. Die durchflutete Fläche müsste auch immer den gleichen Querschnitt besitzen.

Die Feldstärke längst der mittleren Feldlinie ist nicht konstant! Der Aufbau muss in die Einzelteile l_1, A_1, … zerlegt werden.

Durchflutungsgesetzt:

$$\oint \vec{H}ds = \sum_{O} I_\nu$$

Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke ist gleich der Durchflutung!

1. Maxwell'sche Gleichung in Integralform:

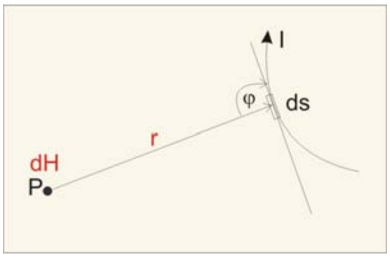
James Clerk Maxwell (* 13. Juni 1831 in Edinburgh; † 5. November 1879 in Cambridge) war Physiker. Er entwickelte einen Satz von Gleichungen, welche die Grundlagen der Elektrizitätslehre und des Magnetismus bilden. Maxwell wird im Allgemeinen als **der Naturwissenschaftler des 19. Jahrhunderts** angesehen, der den größten Einfluss auf die Physik des 20. Jahrhunderts hatte, indem er Beiträge zu den grundlegenden Naturmodellen lieferte. Einstein: Das Werk Maxwells ist „das Tiefste und Fruchtbarste, das die Physik seit Newton entdeckt hat".

$$\oint \vec{H} ds = \int \left(q\vec{v} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} \right) d\vec{A}$$

Strom = Konvektionsstrom + Verschiebungsstrom
s ist die Umrandung der Fläche A und ds in einer Rechtsschraube zu dA orientiert

qv - Strom der bewegten Ladung im Vakuum
D - Diffusionsstrom eines zeitlich sich ändernden elektrischen Feldes

5.2.3 Das Biot-Savartsche Gesetz (… informativ …)



Das Biot-Savartsche Gesetz ist die differentielle Form des Durchflutungsgesetzes. Mit diesem Gesetz kann die magnetische Feldstärke stromdurchflossener Leiter beliebiger Form bestimmt werden.

Durchflutungsgesetz: $\oint H ds = \sum_{O} I_{\nu}$

für eine Luftspule mit kreisförmigem, homogenen Feld gilt:

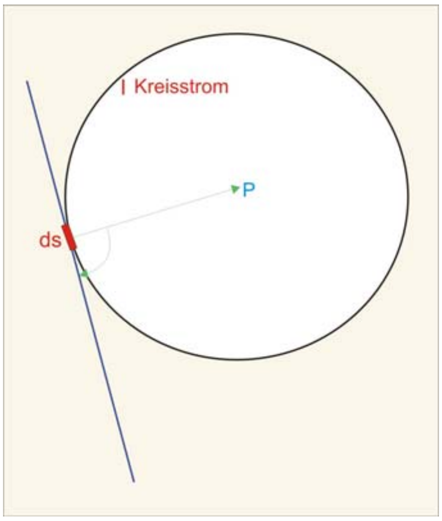
$$H = n\frac{I}{2\pi r}$$

nach Biot-Savart:

$$dH = \frac{1}{4\pi r^2} I ds \sin\varphi$$

Interpretation: Ein Leiterstück der Länge ds liefert für einen beliebigen Punkt in der Entfernung r den Betrag zur magnetischen Feldstärke dH.

Aufgabe:



Bestimmen Sie die Feldstärke H im Mittelpunkt des Kreises!

I = 10A
r = 10cm

Lösung: 50 A/m

Lösungsweg:

Das geschlossene Wegintegral $\oint ds$ ist der Umfang des Kreise $2\pi r$. Die Tangente wurde im Winkel von φ= 90° angelegt, d.h.:

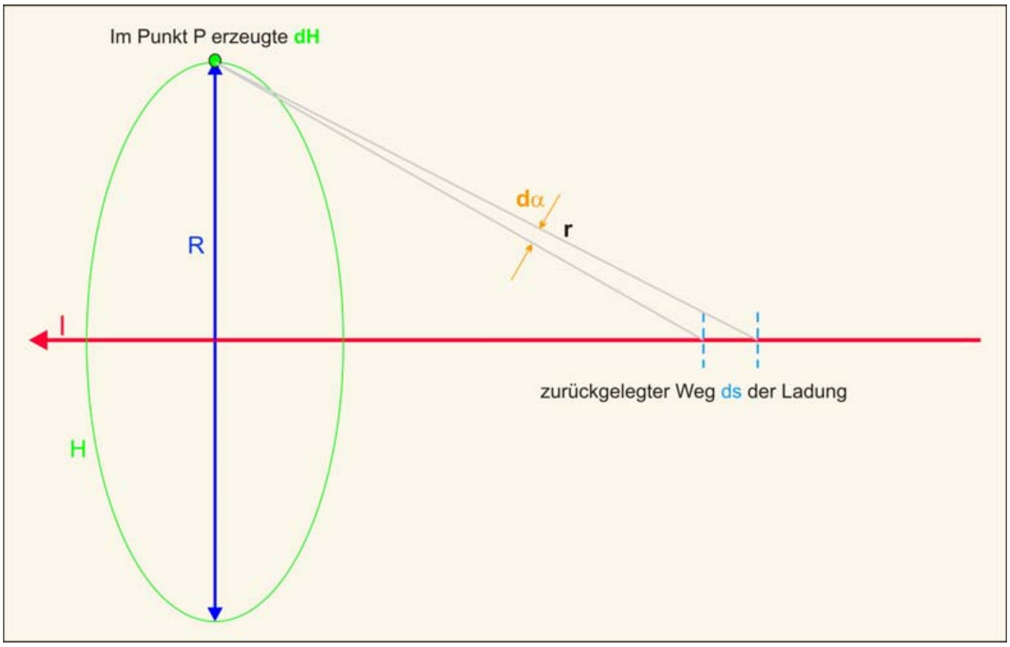
$$dH = \frac{1}{4\pi r^2} I ds \sin\varphi$$

$$dH = \frac{1}{4\pi r^2} 10A * 2\pi r \sin 90°$$

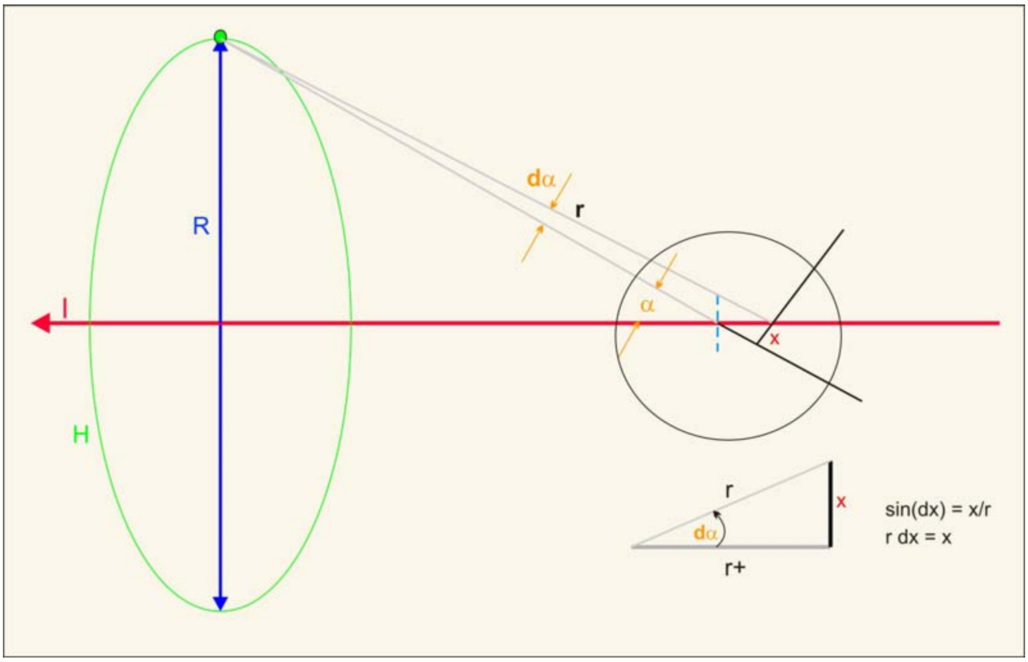
$$dH = \frac{I}{2r} = 50\frac{A}{m}$$

Wie kann man das Biot-Savart'sche Gesetz beweisen?

Modell – [unendlich] gerader elektrischer Leiter



Ermittlung der Größen aus der Grafik:

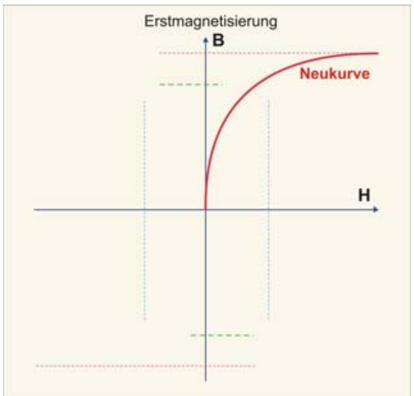


Für einen unendlich geraden Leiter ist n=1!

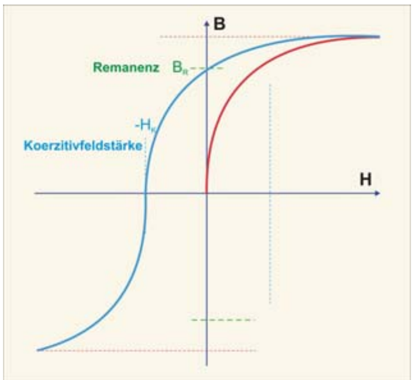
$$dH = \frac{Ids}{4\pi r^2} ds \sin\alpha$$
$$dH = \frac{Ids}{4\pi R \frac{ds}{d\alpha}} \sin\alpha$$
$$dH = \frac{I}{4\pi} \sin\alpha d\alpha$$
$$H = \int_{\alpha_1}^{180^\circ-\alpha_1} \frac{I}{4\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{180^\circ-\alpha_1} \sin\alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi} \cos\alpha_1$$
$$\alpha_1 = 0^\circ$$
$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

Das Biot-Savart-Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke H und der Stromdichte J (im magnetischen Feld, sonst S) her und erlaubt die räumliche Berechnung magnetischer Feldstärkenverteilungen aufgrund der Kenntnis der räumlichen Stromverteilungen. Hier wird das Gesetz als Beziehung zwischen der magnetischen Flussdichte B bzw. magnetischen Feldstärke H und der elektrischen Stromdichte J behandelt.

5.2.4 Magnetische Hysterese und Energie im Magnetfeld



Durch einen Strom wir ein Magnetfeld mit der magnetischen Feldstärke H aufgebaut.
Auf das ferromagnetische Material wirkt die Feldstärke, die eine Kraft innerhalb des Materials wirken lässt. Die Elementarmagneten werden magnetisch gleich ausgerichtet. Bis zu einem finalen Punkt sind alle Elementarmagneten ausgerichtet. Eine Strom- bzw. Feldstärkeerhöhung hat keine Wirkung mehr - das Material ist magnetisch gesättigt.

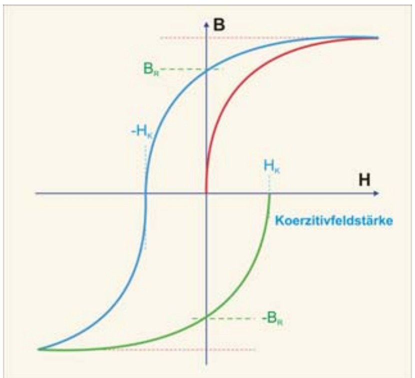


Wird der Strom verringert, so nimmt die Feldstärke ab. Mit Abnahme der Feldstärke, gehen fast alle Elementarmagneten in die Ursprungslage zurück, da keine mechanische Kraft mehr von außen auf sie wirkt.

Obwohl der Strom= 0 ist und somit auch keine Feldstärke vorhanden ist, haben wir Magnetismus!

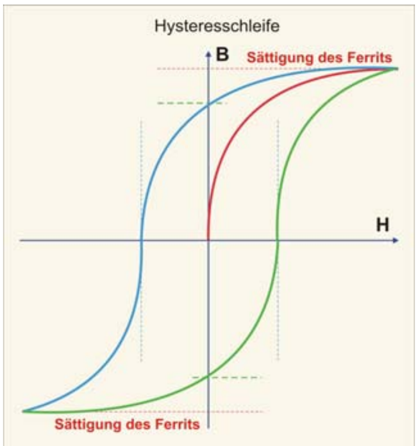
Der verbleibende Magnetismus wird Remanenz genannt.

Um den Magnetismus auf Null zu fahren, benötigen wir eine zusätzliche negative Kraft, die die trägen Elementarmagneten in den Urzustand bewegt. Diese Kraft die dafür benötigt wird heißt: Koerzitivkraft. Die benötigte Kraft wird über die negative Feldstärke (und über die negative Stromstärke = Richtungsänderung!) erzeugt.



- Zu einem Feldstärkewert gibt es Zwei B Werte (magnetische Flussdichte)!
- Die B Werte sind von der Vorgeschichte abhängig.
- Steigende Magnetisierung erzeugt kleineren B Wert, fallende Magnetisierung einen höheren Wert.
-

Alle ferromagnetischen Stoffe haben diese Hysterese Eigenschaft.



Je Größer der Flächeninhalt der Hystereseschleife, desto größer die mechanischen Bewegungen im Werkstoff. Dadurch wird der Werkstoff warm, die Wärmeabgabe ist oft störend (Materialbelastung, Wärmekonvektion, Energieentzug). Solche Materialen werden als harte Stoffe bezeichnet, die für die Herstellung von Dauermagneten verwendet werden.

Weiche Materialien (Dynamobleche in Lamellenbauweise) werden vorzugsweise in elektrischen Maschinen eingesetzt. Weiche Materialien haben eine geringe Hysteresefläche, eine geringe Remanenz und eine geringe notwendige Koerzitivkraft.

5.2.5 Weißsche Bezirke - Theorie der Elementarmagneten

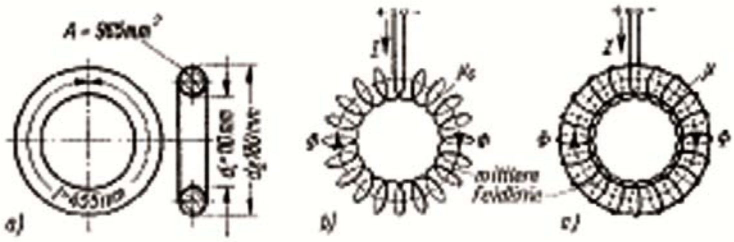
Eine physikalische Deutung des Einflusses der Materie auf die magnetische Flussdichte B hat bereits Ampere [André-Marie Ampère (* 20. Januar 1775 in Poleymieux-au-Mont-d'Or bei Lyon, Frankreich; † 10. Juni 1836 in Marseille) war ein französischer Physiker und Mathematiker] durch elementare Ringströme im Material zu erklären versucht. Diese wurden tatsächlich durch die im Bohrsche [Niels Henrik David Bohr (* 7. Oktober 1885 in Kopenhagen; † 18. November 1962 in Kopenhagen)] Atommodell den Atomkern umkreisenden Elektronen gefunden. Jedes Atom stellt demnach einen atomaren Ringstrom mit einem Magnetfeld dar. Dieser „Bahnmagnetismus" der Ringströme ist für den Ferromagnetismus nicht ausschlaggebend.

Die magnetischen Eigenschaften der Ferromagnetika und der Verlauf der Magnetisierungskurve erklären sich vielmehr durch die Tatsache, dass im Material bezirksweise atomare Magnete, die durch die Wirkung des Elektronenspins zustande kommen, ohne äußere Erregung bereits ausgerichtet sind(spontan magnetisierte Bezirke, Weißsche Bezirke). Die Trennwände zwischen diesen Bezirken nennt man Blochwände. Bei äußeren Feldstärken vergrößern sich bevorzugte Bezirke auf Kosten der Nachbarbezirke(Blochwandverschiebungen) und drehen sich schließlich mit ihrem Magnetisierungsvektor in Richtung der äußeren Feldstärke ein (Drehprozesse). Bei entsprechend hoher Feldstärke H gibt es keine zusätzliche Erhöhung durch Materialeinwirkung mehr (Sättigung), und bei Abschalten von H sind nicht alle beim Aufmagnetisieren erfolgten Prozesse reversibel (Remanenz). Es gehört also eine entgegen gerichtete Feldstärke ($-H_c$) dazu, dass nach außen (makroskopisch) kein Feld B wirksam wird (koerzitive Feldstärke). Bei einer bestimmten Temperatur verliert das Ferromagnetikum seine besonderen magnetischen Eigenschaften, da die thermische Energie der Magnetisierung in den Weißschen Bezirken zunichte macht: Curie-Temperatur [Pierre Curie (* 15. Mai 1859 in Paris; † 19. April 1906 in Paris)] - (bei Eisen etwa 770°C).

Aufgabe: Man berechne die magnetischen Feldgrößen H, B und Φ im Innern einer Luftspule (Ringform).

Stromstärke:	I = 15A
Cu-Leitung mit der Länge:	l=20
Durchmesser der Leitung:	$d = 2 * r_0 = 2mm$
Permeabilität:	$\mu = \mu_0$

Die magnetischen Feldlinien im Inneren der Spule sind Kreise. Der mittlere Durchmesser einer Drahtwicklung ist, wenn d_a=180mm und d_i =110mm ist:



$$d_m = \frac{d_a - d_i}{2} + 2r_o = \frac{(180-110)mm}{2} + 2*1mm = 37mm$$

Damit ergeben sich aus 20m Leiterlänge N=(20*10^3mm)/(π*37mm) = 172 Windungen.
Die mittlere Länge einer Feldlinie im Innern des Kreisringes beträgt:

$$l = \frac{\pi(d_a + d_i)}{2} = \pi * 145mm = 0{,}455m$$

$$H = \frac{N*I}{l} = \frac{172*15A}{0{,}455m} = 5670\frac{A}{m}$$

$$B = \mu_0 H = 0{,}4*\pi*10^{-6}\frac{\Omega s}{m}*5670\frac{A}{m} = 7{,}1*10^{-3}T$$

$$\Phi = B*A$$

$$A = \frac{\pi*(35mm)^2}{4} = 0{,}965*10^{-3}m^2$$

$$\Phi = 6{,}85*10^{-6}Vs$$

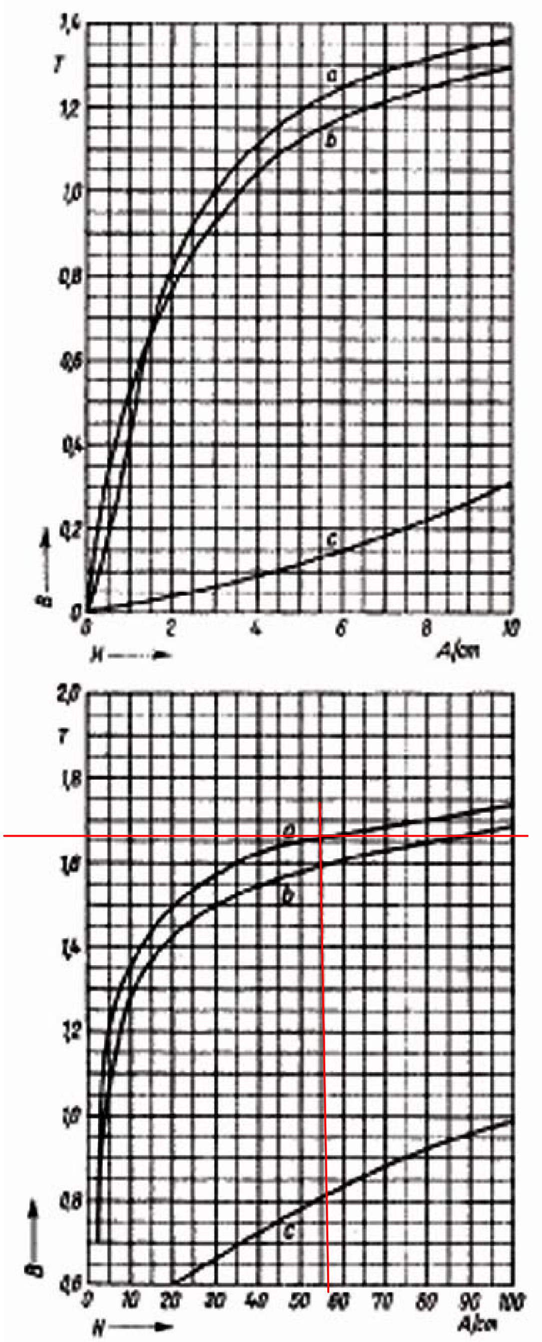
Aufgabe: Die gleiche Spule hat einen kompakten Kern aus Gussstahl. Wie verändern sich die Feldgrößen?

Der gesamte magnetische Fluss geht durch den Kern.

$H_{Guss} = H_{Luft}$ = 5670 A/m

B_{Guss} = 1,66 T; siehe Magnetisierungskurve B = f(H) für Gussstahl

Φ_{Guss} = 1,6*10^{-3} Vs



a) Gussstahl, b) lädiertes Blech, c) Gusseisen

Energie im homogenen Magnetfeld, bei konstanten Feldgrößen:

$$W_m = \frac{1}{2}BHV$$

$$W_m = [VAs] = [J]$$

differentielle Energie für ein Volumenelement

$$dW_m = \frac{1}{2}BHdV$$

$$W_m = \int dW_m = \frac{1}{2}\int BHdV$$

5.2.6 Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz verkoppelt magnetische und elektrische Größen!

Induktionsgesetz für Ruhe- und Bewegungsinduktion

$$u_{ind} = \oint E_i ds = -\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{A(t)} B(t)dA\right)$$

$$\Psi(t) = \sum \Phi_i(t)$$

Induktion = Ableitung des Allgemeinen aus dem Besonderen (Aufbau eines Atoms/Moleküls -> die Welt ist aus Atomen/Molekülen aufgebaut und besitzt die gleichen Eigenschaften)

Induktionseffekt(e):

(1) bewegter Leiter im Magnetfeld

(2) Flussänderung in einer Leiterschleife

Wenn ein Magnetfeld (z.B. Magnetstab) sich relativ (in einem Winkel von 90°) zu einer Spule bewegt, entsteht in dieser Spule (mit N Windungen) eine Spannung.

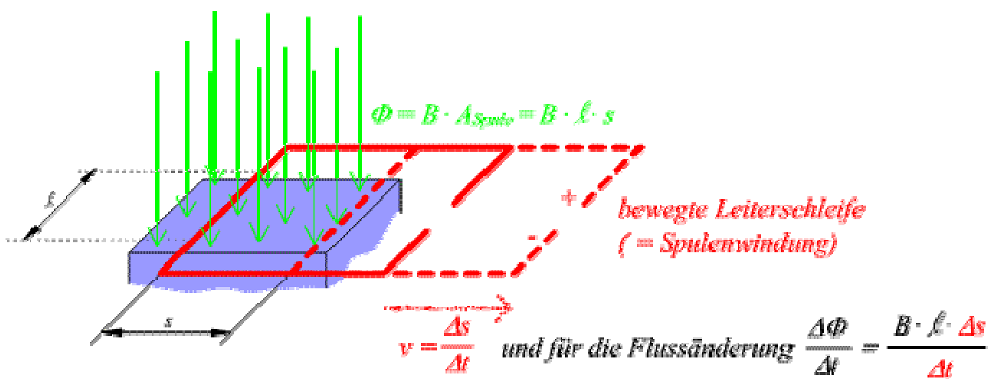
$U_{ind} = -N\ [d\Phi/dt]$

Die in einer Spule induzierte Spannung ist umso größer, je rascher sich die Spule im Magnetfeld bewegt (Geschwindigkeit!), je mehr Windungen die Spule besitzt, desto stärker ist das Magnetfeld.

$U_{ind} = v*B*b$

Allgemein ist die induzierte Spannung proportional zur Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule und zur Windungszahl der Induktionsspule.

U_{ind} - induzierte Spannung
N - Windungszahl
$d\Phi$ - Änderung des magnetischen Flusses
dt - Zeitintervall
B - Induktion
b - die entscheidende Länge des Leiters im Magnetfeld, in der die Lorentzkraft auf die Ladung wirkt



$$U_{ind} = \frac{1}{q_0}\oint F_L ds = \frac{1}{q_0}(q_0 vB)b = vBb$$

$$U_{ind} = vBb = \frac{dl}{dt}bB$$

$$U_{ind} = -\frac{dA}{dt}B = -\frac{BdA}{dt}$$

Aufgabe „Ruheinduktion“:

Gegeben sei eine offene Leiterschleife mit der Fläche A in der z Ebene (e_z). Sie wird von einem zeitveränderlichem Manetfeld B(t) durchsetzt.

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_y + e_z)0{,}1T\cos\omega t$$

A = 0,1m²
$\omega = 314s^{-1}$

Fragen:

(a) Welche Spannung $u_{AB}(t)$ wird induziert? Stellen Sie B(t) und u_{AB} grafisch dar!
(b) Welcher Strom i(t) würde fließen, wenn die Klemmen AB mit einem Widerstand abgeschlossen wären?

Lösungsweg:

Zustand der Ruheinduktion (feste Lage zwischen Spule und Magnetfeld) - dA = e_zdA

$$u_{ind} = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t}dA = -\int_s \frac{1}{\sqrt{2}}(e_y + e_z)0{,}1T\cos\omega t * e_z dA$$

$$u_{ind} = \frac{0{,}1T}{\sqrt{2}}A\omega\sin\omega t = \frac{0{,}1Vs}{\sqrt{2}m^2}0{,}1m^2 * 314s^{-1}\sin\omega t = 2{,}23V\sin\omega t$$

Lösung: $u_{ind} = 2{,}23V\sin\omega t$

$i_{AB} = u_{ind}/R$

- für dΦ/dt < 0: i_{ind} ist gleichgerichtet mit der Spannung u_{ind} (Netzwerkmodellierung)
- für dΦ/dt > 0 sind i_{ind} und u_{ind} entgegengerichtet (induktiver Spannungsabfall ist -dΦ/dt - dann stimmen die Richtungen überein)

Aufgabe „Bewegungsinduktion“:

Gegeben sei ein Flussbett mit leitendem Wasser (κ = 5 S/m), das mit konstanter Geschwindigkeit v durch ein senkrecht auftreffendes Magnetfeld B strömt. Beiderseits des Flussbettes befinden sich zwei gut leitende Elektroden.

Fragen:

(a) Welche Spannung u_{AB} entsteht zwischen den Elektroden?

(b) Welche Leistung wird an den Verbraucher geliefert?

Lösungsweg:

v und B stehen senkrecht zueinander, daher ergibt sich die Lorentz-Feldstärke:

$$E_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$u_{AB} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{s}$$

$$u_{AB} = \int_0^L \left(ve_x \times Be_y\right) e_z\, ds = vBL$$

s und E_{ind} sind in einer Richtung!

B = $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T (Wirkung des Erdmagnetfeldes auf den Fluss)
v = 10km/h (Strömungsgeschwindigkeit)
L = 300m (Breite des Flusses)

$P = I^2 R_L = U_{AB}{}^2 R_L$

$$R_i = \frac{L}{\kappa b h} = 3\Omega$$

Strom durch den Lastwiderstand R_L:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_i + R_L}$$ mit einem $R_L = 300\Omega$ ist $U_{AB} = 41\text{mV} / 303\Omega = 0{,}136$ mA

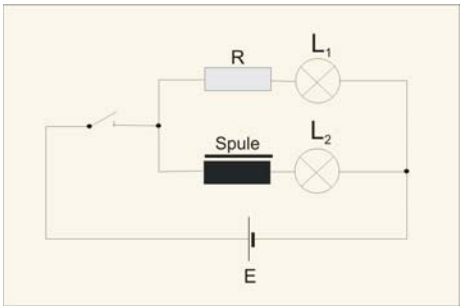
Lösung:

(a) $U_{AB} = 41$mV
(b) P = 5,5 µW

5.2.7 Selbst- und Gegeninduktion

Selbstinduktion

Nach dem Schließen des Schalters leuchtet Lampe L_1 sofort. Nach „kurzer" Zeit leuchtet dann auch Lampe L_2. Wie ist dieser Effekt zu erklären?



Im Einschaltmoment baut sich in der Spule ein Magnetfeld auf. Ein sich aufbauendes Magnetfeld ist ein sich veränderndes Magnetfeld. Dieses veränderliche Magnetfeld induziert einen Strom, der nach der Lenzschen Regel der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt. Beim Ausschalten wiederholt sich der Vorgang der Selbstinduktion mit veränderten Vorzeichen.

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[Li(t)\right] = -L\frac{di}{dt}$$

L = Induktivität (Selbstinduktivität)

Eine reale Induktivität besteht aus der Reihenschaltung von R und L

$$u = u_R + u_L = i(t)R + L\frac{di}{dt}$$

Eine Induktivität im Zusammenspiel mit einem Widerstand verleiht dem Strom gegenüber der Spannung Trägheitscharakter. Maßgebend ist für die Stromänderung eine Zeitkonstante τ:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

u(0) = 0 -> 1

Wie ist der Verlauf des Stroms?
Reihenschaltung von Induktivitäten

$$u_{gesamt} = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots + L_n\frac{di}{dt}$$

$$L_{ers} = \sum_{\nu=1}^{n} L_\nu$$

Parallelschaltung von Induktivitäten

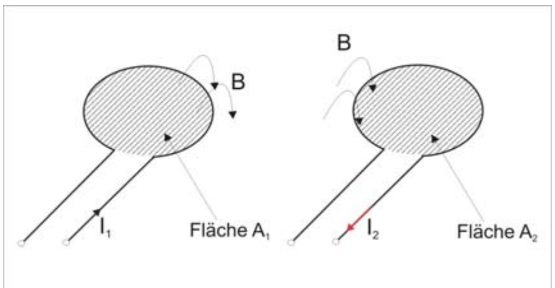
$$i_{gesamt} = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n$$

$$\frac{u_{AB}}{L_{ers}} = \frac{u_{AB}}{L_1} + \frac{u_{AB}}{L_2} + \frac{u_{AB}}{L_3} + \ldots + \frac{u_{AB}}{L_n}$$

$$\frac{1}{L_{ers}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

$$\frac{1}{L_{ers}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{L_\nu}$$

Gegeninduktion - (Gleichspannungen und –ströme lassen sich nicht transformieren))



$$M_{21} = \frac{\Psi_{A_2}(I_1)}{I_1} = \int_{A_2} \frac{B_2(I_1)dA}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{A_1}(I_2)}{I_2}$$

Induktionsfluss: $\Psi = w\Phi$