Grundlagen der Elektrotechnik
ausgewählte Kapitel

ergänzende Beiträge zur Vorlesung
zum Thema

Berechnungen im elektrischen Feld

Doz. Wolfgang Stuchlik
DLR Lampoldshausen, Abt. VEA

DHBW - MOS WiSe 2017

Abbildung 1: Werner von Siemens

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
74239 Hardthausen
Langer Grund
Wolfgang.Stuchlik@dlr.de

Inhaltsverzeichnis

1 Das elektrische Feld **4**
1.1 Begriffe, Größen und Arbeitsgebiete . . . 4
1.2 Die wichtigsten Größen im elektrischen Feld . . . 5
1.3 Das elektrische Feld im leitenden Medium . . . 5
1.3.1 Parallelkonfiguration von leitenden Materialien . . . 6
1.3.2 Übungsaufgaben . . . 6
1.3.3 Konfiguration mit diversen Materialien und Querschnitten . . . 7
1.3.4 Übungsaufgaben . . . 8
1.3.5 Das Strömungsfeld in der Praxis - die Elektrolyse . . . 10
1.4 Elektrolytischer Leitungsmechanismus . . . 11
1.5 Das elektrische Feld im nichtleitenden Medium . . . 11
1.5.1 Geschichtliches . . . 11
1.5.2 Das zeitlich veränderliche elektrische Feld . . . 12
1.5.3 Das zeitlich konstante elektrische Feld . . . 15
1.6 Der Kondensator als Energiequelle . . . 18
1.7 Die Größe PSI . . . 19
1.8 Das Coulombsche Gesetz . . . 20

2 Aufgaben **21**
2.1 Feldstärke in einer Spule . . . 21
2.2 Feldstärke und Stromfluss im Draht . . . 21
2.3 Der Strömungswiderstand - Teil 1 . . . 21
2.4 Der Strömungswiderstand - Teil 2 . . . 22
2.5 Der Strömungswiderstand - Teil 3 . . . 23
2.6 Durchschlagfestigkeit eines Kondensators . . . 24
2.7 Ladungsaufbau mit unterschiedlichen Dielektrika . . . 24
2.8 Die elektrisch freistehende Kugel . . . 25
2.9 Ladungsmenge eines Kondensators . . . 26
2.10 Bestimmung der Durchschlagsfestigkeit . . . 26
2.11 Bestimmung von Ersatzkapazitäten . . . 26

3 Werner von Siemens **28**
3.1 Lebenslauf . . . 28
3.2 Die selbsterregte Dynamomaschine von Siemens . . . 29

4 Abkürzungsverzeichnis **32**

5 Literaturverzeichnis **33**

Abbildungsverzeichnis

1 Werner von Siemens . . . 1
2 Überblick über die Thematik des elektrischen Feldes . . . 4
3 Rechenprogramm für das Strömungsfeld $\frac{dQ}{dt} \neq 0$ . . . 5
4 Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten . . . 6
5 Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten und Leitungsquerschnitten . . . 7
6 Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten und konstanten Leitungsquerschnitten. . . . 8
7 Der Verlauf der einzelnen Größen. . . . 9
8 Der Verlauf der Spannung. . . . 9
9 Die Leidener Flasche . . . 11
10 Rechenprogramm für $\frac{dQ}{dt} = 0$ . . . 12
11 Schaltung zur Aufladung eines Kondensators . . . 12
12 Spannungsverlauf am Kondensator für zwei Zeitkonstanten - Aufladung . . . 14
13 Schaltung zur Entladung eines Kondensators . . . 14
14 Spannungsverlauf am Kondensator für zwei Zeitkonstanten - Entladung . . . 15
15 Das Dielektrikum verändert die Kapazität und die Spannung . . . 16
16 Dielektrikum parallel geschichtet . . . 16
17 Dielektrikum sequentiell angeordnet . . . 18
18 Die Kraftwirkungen geladener Elemente . . . 20
19 Strömungswiderstand in Form eines Bügels . . . 21
20 Strömungswiderstand - Bezeichnung der aktiven Flächen . . . 23
21 Kondensatorenschaltung . . . 26
22 Siemens Denkmal an der TU Berlin . . . 28
23 Aufbau und Querschnitt der Dynamomaschine von 1866 . . . 29
24 Ersatzschaltbild eines selbsterregten Gleichstromgenerators - Nebenschlussprinzip . . . 30

1 Das elektrische Feld

1.1 Begriffe, Größen und Arbeitsgebiete

Die physikalische Grundlage des elektrischen Feldes (Lit.-Ref.1) ist die existierende Ladung Q. Ist keine Ladung vorhanden, dann kann sich auch kein elektrisches Feld bilden. Die Unterscheidung, ob ein elektrisches Feld in einem leitenden oder nichtleitenden Medium wirksam wird, liegt in den beiden Möglichkeiten:

- $i(t) = \frac{dQ}{dt} \neq 0$? oder
- $i(t) = \frac{dQ}{dt} = 0$?

Die markanteste Kennzeichnung des Mediums, bezüglich der elektrischen Eigenschaften, liegt in den Größe κ und ε. Die Größe κ steht für die leitende Eigenschaft, die Größe ε für die isolierende Wirkung des Mediums zwischen den Ladungen.

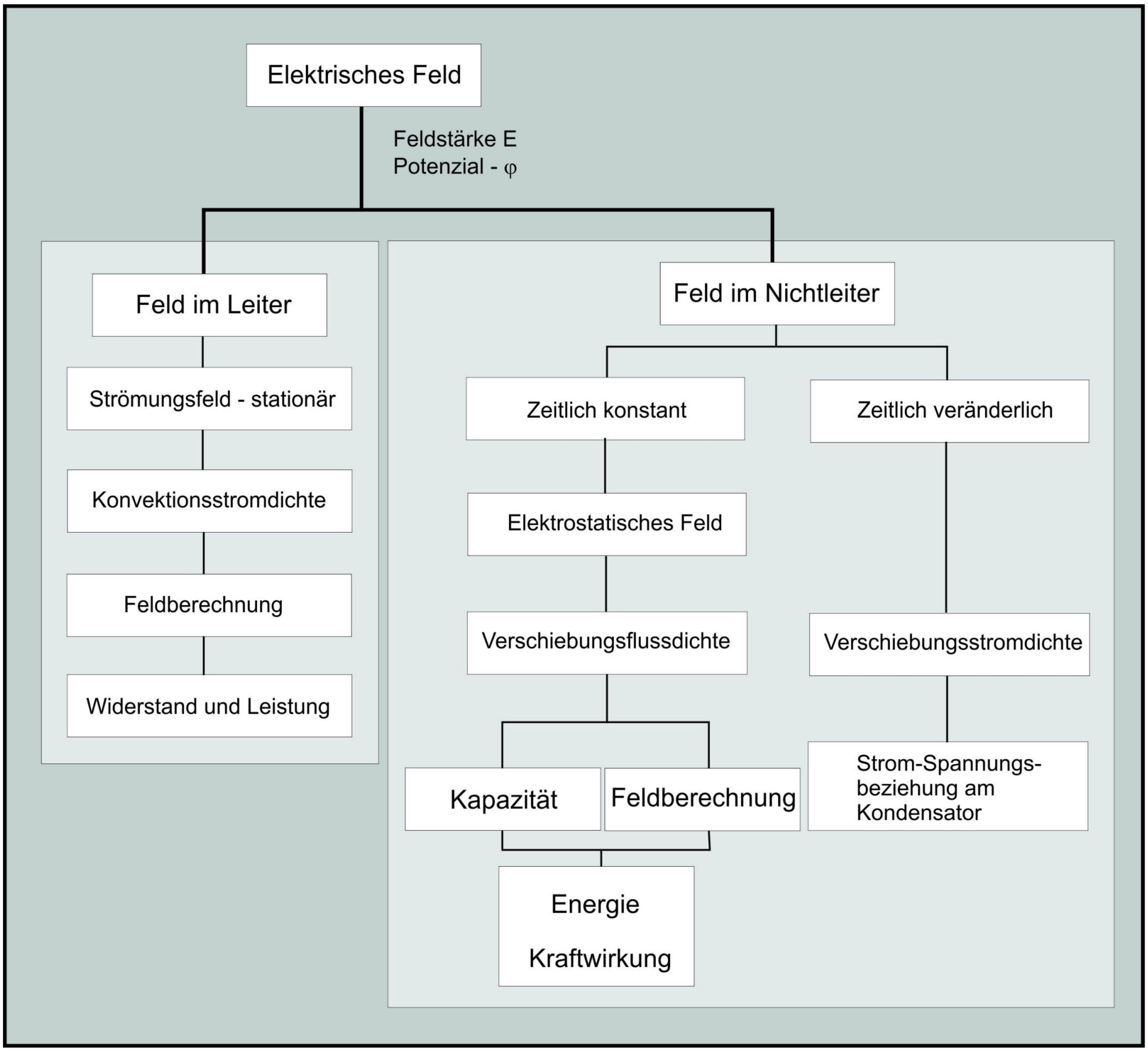


Abbildung 2: Überblick über die Thematik des elektrischen Feldes

1.2 Die wichtigsten Größen im elektrischen Feld

Elektrische Feldstärke $\vec{E}$

$\vec{\mathrm{E}} = \frac{d\varphi}{ds} \qquad \Rightarrow \varphi = \int_0^L \vec{E} d\vec{s}$

$\vec{E} = \frac{\vec{S}}{\kappa} \Rightarrow$ elektrischer Leitwert des Mediums: κ

Konvektionsstromdichte S: $\Rightarrow \vec{S} = \kappa * \vec{E}$

Verschiebungsflussdichte D: $\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon * \vec{E} \Rightarrow$ Dielektrizitätskonstante: ε [1]

Verschiebungsstromdichte S_v: $\Rightarrow \vec{S_v} = \frac{d\vec{D}}{dt}$

Die Kapazität: $\Rightarrow C = \frac{Q}{U}$

Der Kondensator C

Die Bemessungsgleichung des Kondensators

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{d}}$

Die Differentialgleichung des Kondensatorstroms

$\mathrm{i(t)} = C\frac{du_C}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad u_C = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

1.3 Das elektrische Feld im leitenden Medium

Der Zusammenhang aller Größen (Lit.-Ref.2):

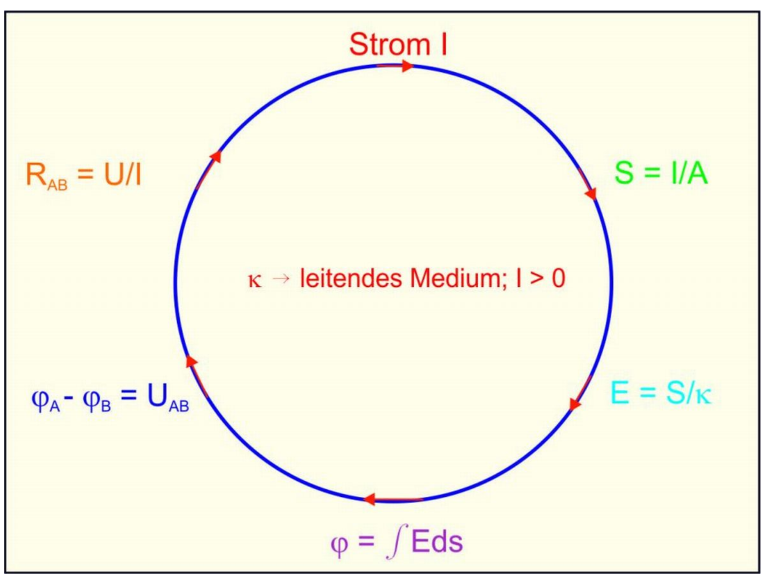


Abbildung 3: Rechenprogramm für das Strömungsfeld $\frac{dQ}{dt} \neq 0$

These: Die Ladungen werden im Leiter durch die Feldstärke (Feldkraft) bewegt.

[1] Ist das Produkt aus $\varepsilon = \varepsilon_0 * \varepsilon_r$. Die Größe ε_0 ist die absolute Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

1.3.1 Parallelkonfiguration von leitenden Materialien

Zwischen zwei vertikal parallelen Platten (mit dem Abstand d) befinden sich zwei Werkstoffe mit den beiden Leitfähigkeiten κ_1 und κ_2; mit der Randbedingung: $\kappa_2 = 2\kappa_1$. Zwischen den Platten fällt die Spannung U ab.

Gesucht sind:

das Feldstärkefeld, das Potenzialfeld und das Strömungsfeld in einem grafischen Vertikalschnitt

Lösung:

- U ist für beide Medien gleich, d.h. mit E = U/d ist auch die Feldstärke für beide Medien gleich.
- Die Ströme sind durch die unterschiedlichen Leitwerte ungleich.
- Da die Flächen gleich sind, sind die Stromdichten proportional den Strömen gleich. Das Medium mit der doppelten Leitfähigkeit κ_2 hat einen größeren Strom $(2 * I_{\kappa_1})$ und somit ist die Stromdichte S_{κ_2} doppelt so groß, gegenüber S_{κ_1} .

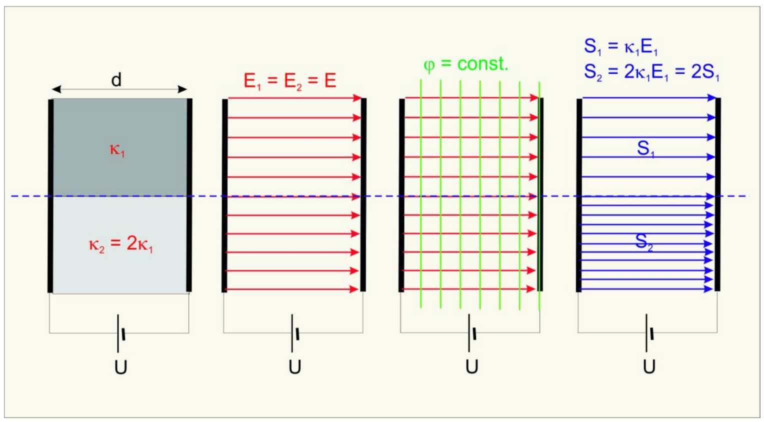


Abbildung 4: Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten

1.3.2 Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Welche Feldstärke besteht in einer Kupferleitung (der Querschnitt hat die ideale Form eines Kreises) von d = 1,5mm Durchmesser, durch die ein Strom von I = 6A fließt?

$E = \frac{U}{l}$

$R = \rho\frac{l}{A}$

$U = R * I$

$E = \rho\frac{l}{A}\frac{1}{l} * I$

$E = 0,0178\Omega\frac{mm^2}{m}\frac{1}{\frac{\pi}{4}*d^2} * 6A$

$E = 0,0178\Omega\frac{mm^2}{m}\frac{1}{\frac{\pi}{4}*(1,5*10^{-3}m)^2} * 6A$

$E = 0,604\frac{mV}{m}$

Aufgabe 2:

Welche Dicke muss ein Aluminiumdraht haben, wenn im Innern, bei einem Strom von I = 1A, eine Feldstärke von $10\frac{mV}{m}$ herrschen soll?

$$\rho_{Alu} = 0,029\Omega\frac{mm^2}{m}$$

$$R = \rho\frac{4l}{\pi d^2} \Rightarrow U = R * I$$

$$E = 4 * \rho\frac{l}{\pi}\frac{1}{d^2} * I\frac{1}{l}$$

$$d = \sqrt{\frac{4\rho I}{\pi E}} = \sqrt{\frac{40{,}029}{\pi 10}10^3}mm = 1,92mm$$

1.3.3 Konfiguration mit diversen Materialien und Querschnitten

Es liegt eine Reihenschaltung von zwei Leiterwerkstoffen vor, wobei der Leiter mit dem κ_1 Wert unterschiedliche Querschnitte aufweist.

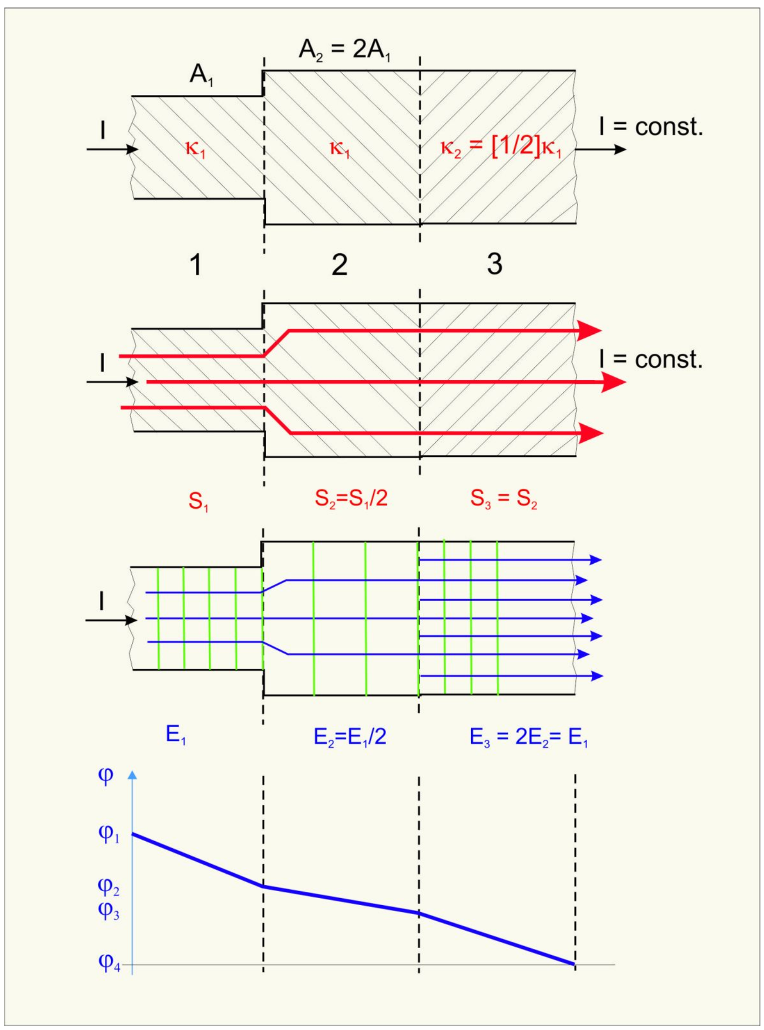


Abbildung 5: Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten und Leitungsquerschnitten

Interpretation der Abbildung 5

Die Wirkung der einzelnen Größen kann mittels Feldlinien dargestellt werden. Diese Feldlinien sind, wie in der Grafik dargestellt, in der Natur nicht existent, sie helfen nur die Wirkungen zu verstehen. Auch zwischen den gezeichneten Feldlinien haben wir die gleichen Zustände und Wirkungen, wie auf den entsprechenden Feldlinie selbst.

- Der Strom I ist in einer Reihenschaltung immer gleich. Der Betrag des Gesamtstroms wird durch den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung bestimmt.
- Die Stromdichte ist primär unabhängig vom Betrag des Widerstandes des Leiterwerkstoffs. Der Leiterwerkstoff bestimmt die Stromstärke. Für die Stromdichte ist es relevant, wie homogen der Leiterwerkstoff ist und welche Fläche der Strom orthogonal durchströmt.
- Bei konstantem Strom und vergrößerter Fläche wird die Stromdichte nach der Definition $\left(S = \frac{dI}{dA}\right)$ kleiner.
- Die elektrische Feldstärke $E = \frac{S}{\kappa}$ ist direkt proportional der Stromdichte bei konstantem κ.
- Orthogonal zu den Feldlinien der elektrischen Feldstärke werden im ersten Segment, in gleichen Schritten, Äquipotenziallinien φ eingezeichnet. Die resultierende Skizze zeigt Quadrate.
- Diese grafische Methode wird in den Segmenten 2 und 3 wiederholt, wobei erst die Linien für die elektrische Feldstärke eingezeichnet werden. Da $E = \frac{S}{\kappa}$ entspricht, muss für das veränderliche κ im Segment 3 die Anzahl der Feldstärkelinien angepasst werden.
- Die Festlegung der Anzahl von Feldlinien bezieht sich auf das Segment 1. Im Segment 3 ist die Größe der Quadrate gleich der im Segment 1.
- Die Anzahl der orthogonalen, grünen Linien entspricht den Äquipotenziallinien.
- Die Anzahl dieser Linien pro Segment entspricht, vom Betrag aus gesehen, einem virtuellen Potenzialabfall. Die Richtung des Potenzialabfalls ergibt sich auch der Stromrichtung.
- Da im zweiten Segment die Anzahl der Linien nur der Hälfte des Segmentes 1 entspricht, ist der Potenzialabfall nur halb so hoch.
- Im Segment 3 ist die Anzahl der Äquipotenziallinien gleich dem im Segment 1, woraus sich der gleiche Potenzialabfall wie im Segment 1 ergibt.

1.3.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist ein aus drei verschiedenen elektrisch leitenden Materialien zusammengesetzter Leiter. Der Querschnitt des Leiters ist quadratisch und der Werkstoff homogen. Das Verhältnis von den einzelnen Leitfähigkeiten sei: $\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 = 1 : 2 : 3$.

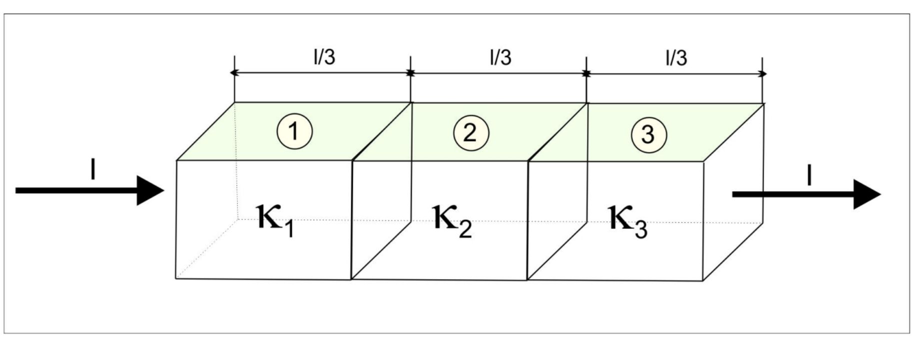


Abbildung 6: Das Strömungsfeld mit unterschiedlichen Leitwerten und konstanten Leitungsquerschnitten.

Skizzieren Sie das Feldstärke- und Strömungsfeld. Wie verläuft die Spannung als Funktion der Wegstrecke? Geben Sie den Verlauf rein quantitativ an.

Lösungsansatz

- Der Strom durch alle drei Werkstoffe ist gleich, da eine reine Reihenschaltung vorliegt.
- Da die drei Materialien homogen sind und die gleiche Flächengröße besitzen, muss die Stromdichte konstant sein.
- Wenn in allen drei Abschnitten die Stromdichte gleich ist, dann gilt:$S_1 = \kappa_1 \cdot E_1 = S_2 = \kappa_2 \cdot E_2 = S_3 = \kappa_3 \cdot E_3$
- $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ bzw. $\frac{E_1}{E_3} = \frac{\kappa_3}{\kappa_1}$ und $\frac{E_2}{E_3} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}$
- Die Beträge der Feldstärke ändern sich an den Trennflächen sprunghaft.
- Die Äquipotenziallinien werden orthogonal zu den Feldlinien gezeichnet und bilden Quadrate.

Damit gilt:

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{E_1}{E_3} = \frac{3}{1} = 3$

$\frac{E_2}{E_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Die Anzahl der Feldlinien (man achte darauf, das es keine halben Feldlinien gibt) ist proportional der quantitativen Aussage unserer Feldstärkeverhältnisse. Daraus ergeben sich folgende grafische Relationen:

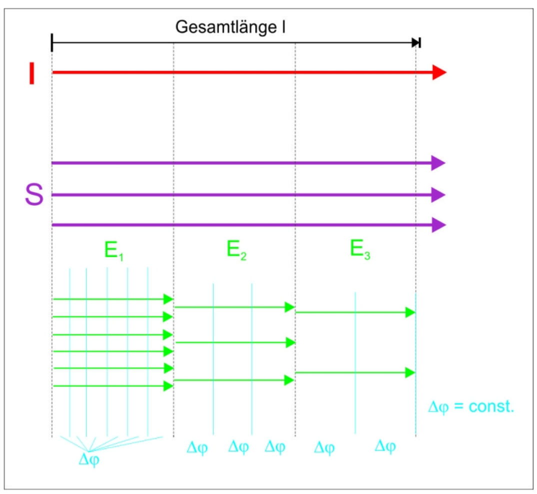


Abbildung 7: Der Verlauf der einzelnen Größen.

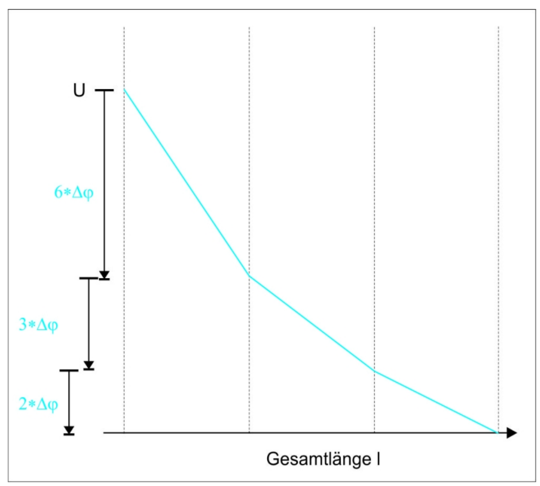


Abbildung 8: Der Verlauf der Spannung.

Der Verlauf der Spannung hat an den Trennflächen jeweils einen Knick, denn es ändert sich die Steilheit: $\frac{d\varphi}{dx} = -E_x$. Die Größe x repräsentiert die Weglänge $0 \leq x \leq l$.

Aufgabe 2:

Zwischen zwei elektrisch geladenen Platten, mit der Fläche $A = 4 \cdot 10^3 cm^2$, befindet sich ein Elektrolyt mit der Leitfähigkeit $\kappa = 5 \cdot 10^{-2} \frac{S}{cm}$. Der Plattenabstand beträgt d = 20cm.

Berechnen Sie den Strom, die Stromdichte, die elektrische Feldstärke und den Spannungsabfall des Elektrolyten. Die Leistungsaufnahme von P = 700W muss beachtet werden.

$$P = I^2 \cdot R$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{\frac{d}{\kappa \cdot A}}} = \sqrt{\frac{750VA \cdot 5 \cdot 10^{-2} \frac{A}{Vcm} \cdot 4 \cdot 10^3 cm^2}{20cm}} = 86,6A$$

$S = \frac{I}{A} = \frac{86{,}6A}{4 \cdot 10^3 cm^2} = 21,65 \cdot 10^{-3} \frac{A}{cm^2}$

$E = \frac{S}{\kappa} = \frac{21{,}65 \cdot 10^{-3} \frac{A}{cm^2}}{5 \cdot 10^{-2} \frac{A}{Vcm}} = 0,433 \frac{V}{cm}$

$U = E \cdot d = 0,433 \frac{V}{cm} \cdot 20cm = 8,66V$

Aufgabe 3:

Gegeben sind zwei gleich große, quadratische Metallplatte, die sich gegenüberstehen. Zwischen den Platten befindet sich ein Elektrolyt mit homogener Leitfähigkeit von $\kappa = 5 \cdot 10^{-2} \frac{S}{cm}$. In dieser Anordnung soll eine elektrische Leistung von P = 1kW umgesetzt werden.

a) Wie groß müssen die Flächen der Elektroden sein, wenn der Plattenabstand mit d = 30cm vorgeschrieben wird. Die Feldstärke ist mit $E = 0,6 \frac{V}{cm}$ festgelegt.

$P = \frac{E^2 \cdot d^2}{\frac{d}{\kappa \cdot A}}$

$A = \frac{P}{\kappa \cdot E^2 \cdot d} = \frac{10^3 VA}{5 \cdot 10^{-2} \frac{A}{Vcm} \cdot 36 \cdot 10^{-2} \frac{V^2}{cm^2} \cdot 30cm} = 1,852 \cdot 10^3 \cdot cm^2 \Rightarrow$ Kantenlänge der Platten $\approx 43cm$

b) Berechnen Sie den Strom und die Spannung!

$U = E \cdot d = 0,6 \frac{V}{cm} \cdot 30cm = 18V$

$I = S \cdot A = \kappa \cdot E \cdot A = 5 \cdot 10^{-2} \frac{A}{Vcm} \cdot 6 \cdot 10^{-1} \frac{V}{cm} \cdot 1,852 \cdot 10^3 \cdot cm^2 = 55,6A$

c) Geben Sie die allgemeine Beziehung zwischen Leistungsdichte (Leistung pro Volumenelement), Feldstärke und Stromdichte an.

$P = \kappa \cdot E^2 \cdot d \cdot A$

$V = d \cdot A$

$\frac{P}{V} = \kappa \cdot E^2 = \frac{S^2}{\kappa}$

1.3.5 Das Strömungsfeld in der Praxis - die Elektrolyse

Mit der Bewegung von Ionen werden nicht nur Ladungen transportiert, sondern auch Massen. Die transportierte Ladung ist von der Wertigkeit w des Ions und somit von der relativen Atom- bzw. Molekülmasse A abhängig. Bei N an der Elektrode ankommenden Ionen ist somit die Ladung: $Q = N \cdot w \cdot e^-$. Bei N ankommenden Ionen ist die Masse $m = N \cdot A \cdot m_0$.

$$m = \frac{m_0}{e^-} \cdot \frac{A}{w} \cdot Q$$

Die mit dem Strom transportierte Masse kann nach Abgabe der Ladung:

- an der Elektrode haften bleiben, wobei die Metalle an der Katode und z.B. der Sauerstoff an der Anode abgeschieden werden.
- als Gas an den Elektroden hochsteigen oder sich in fester Form in der Lösung absetzen
- chemisch mit der Elektrode oder den Elektrolyten reagieren.

Anwendungen der Elektrolyse:

- Galvanotechnik [Vernickeln, Verchromen, Vergolden, Herstellung von Schallplattenmatrizen]
- Elektrolytische Metallgewinnung [Elektrolytkupfer], Schmelzflusselektrolyse [Aluminium]

1.4 Elektrolytischer Leitungsmechanismus

Ausgehend vom Bohrschen Atommodell ist jede Schale mit einer bestimmten Anzahl von Elektronen gesättigt. Kommen neue Elektronen hinzu, so müssen sie auf der nähst höheren Schale Platz nehmen. Die chemische Aktivität eines Stoffes wird durch die Elektronen der äußeren Schale bestimmt. Ist die äußere Schale gesättigt, so ist das chemische Element reaktionsträge. Fehlen dem chemischen Element einige wenige Elektronen bis zur Sättigung, so ist das Element sehr reaktionsfreudig. Das Element behält seine Stoffcharakteristik, wirkt jedoch nach außen nicht mehr elektrisch neutral. Aus dem Atom bzw. Molekül ist ein Ion geworden. Durch den Elektronenüberschuss wird das Element negativ geladen. Andere Elemente besitzen nur wenige Elektronen auf der Außenschale und geben sie recht einfach ab, da jedes Element bemüht ist eine voll besetzte Außenschale zu bekommen. Daher wirken diese Elemente nach außen positiv geladen. Eine Ionenverbindung wird erst elektrisch leitfähig, wenn die Ionen in Bewegung geraten. Hierzu müssen die Ionenverbindung aufgespalten werden. Diesen Vorgang nennt man Dissoziation und Stoffe mit getrennten Ionen nennt man Elektrolyte.

Die Aufspaltung kann in Wasser erfolgen. Legt man mittels metallischer Elektroden eine Spannung über eine derart wässrige elektrolytische Strecke, so ist ein elektrischer Stromfluss möglich. In Elektrolyten fließt der Strom von der Elektrode mit der positiver Polarität (Anode) zur Elektrode mit der negativen Polarität (Katode). Da die Ionen den Ladungstransport übernehmen, spricht man von **Ionenleitfähigkeit**.

Der Strom wird durch die Bewegung positiver und negativer Ladungen hervorgerufen. Wir haben eine bipolare/bidirektionale Stromleitung. Die positiven Ionen bewegen sich mit dem Strom zur Katode, die negativen Ionen entgegen der positiven Stromrichtung zur Anode. Aus diesem Grund nennt man die positiven Ionen Kationen und die negativen Anionen.

Für die Leitfähigkeit ist charakteristisch:

- Die Leitfähigkeit eines Elektrolyten ist innerhalb eines bestimmten Spannungsbereichs konstant. Es gilt das Ohmsche Gesetz.
- Der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes ist negativ; der Widerstand wird mit zunehmender Temperatur kleiner.
- Aufgrund des Widerstandes entsteht ein Spannungsabfall als Folge der für die Ladungsbewegung erforderliche Energie, die als Wärme in Erscheinung tritt.

1.5 Das elektrische Feld im nichtleitenden Medium

1.5.1 Geschichtliches

Das zentrale Bauelement dieser speziellen Thematik ist der Kondensator. Die Geburtsstunde dieser Technik (Lit.-Ref.5) haben wir einem Zufall zu verdanken. Die **„Leidener Flasche“** ist die älteste Bauform eines Kondensators. Die Kapazität betrug ≈ 5 nF.

Sie besteht aus einem Glasgefäß, das innen und außen mit Metallfolie, meist aus Aluminium, belegt ist. Das Glas wirkt als Isolator, später „Dielektrikum“ genannt. Das Prinzip der „Leidener Flasche“ wurde unabhängig voneinander 1745 von Ewald Jürgen Georg von Kleist in Cammin (Pommern) und ein Jahr später von dem Physiker Pieter van Musschenbroek in Leiden gefunden, als sie bei Laborversuchen mit Anordnungen von Gläsern und Metallteilen elektrische Stromschläge erlitten. Die „Leidener Flasche“ und ähnliche Laborgeräte wurden in der Folge vornehmlich zur publikumswirksamen Demonstration von Stromschlägen (auch als „Kleistscher Stoß“ bekannt geworden) eingesetzt. Bei später zunehmenden Kenntnissen über das Wesen der Elektrizität wurde der Aufbau auch als Energiequelle für komplexere Experimente eingesetzt.

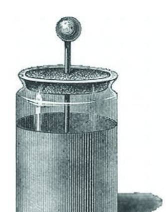


Abbildung 9: Die Leidener Flasche

Benjamin Franklin verband eine „Leidener Flasche“ über eine Metallschnur mit einem Drachen, den er in den Himmel steigen ließ. Es gelang ihm mit diesem gefährlichen Experiment, Ladung von Gewitterwolken auf die „Leidener Flasche“ zu übertragen. Er prägte den Begriff **„electrical condenser“**.

Der Zusammenhang aller Größen:

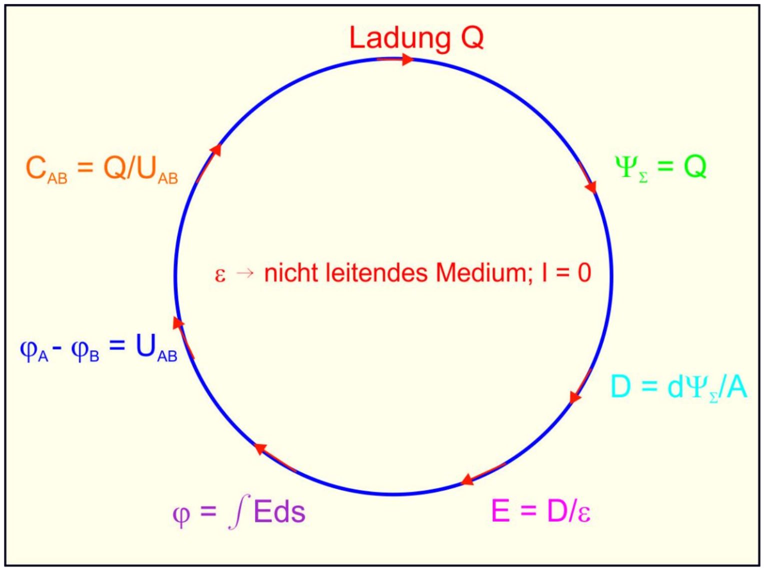


Abbildung 10: Rechenprogramm für $\frac{dQ}{dt} = 0$

1.5.2 Das zeitlich veränderliche elektrische Feld

Betrachtet man die Aufladung eines Kondensators, dann sind die Strom-Spannungsbeziehungen im zeitlich veränderlichen Feld gut erklärbar. Folgende drei Thesen werden mathematisch bewiesen:

- Die Spannung kann sich über einem Kondensator nie sprunghaft ändern, wenn die angelegte Spannung einer Sprungfunktion $[t = -0 \rightarrow E = 0; t = +0 \rightarrow E = 100\%]$ entspricht.
- Der Strom, der durch einen Kondensator fließt, ändert seinen Wert nach einer fallenden e-Funktion und konvergiert gegen Null, wenn der Kondensator aufgeladen ist.
- Der Kondensator C und ein in Reihe geschalteter Widerstand R bilden die Zeitkonstante τ.

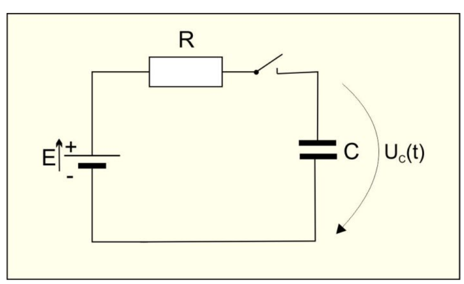


Abbildung 11: Schaltung zur Aufladung eines Kondensators

Aufstellen der Maschengleichung: $E = U_R(t) + U_C(t)$

Die Gleichung muss nach $U_C(t)$ aufgelöst werden, wobei U_R unbekannt und nicht von Interesse ist.

$E = i(t)R + U_C(t)$

$i(t) = C\frac{d}{dt}U_C$

$E = RC\frac{d}{dt}U_C + U_C \Rightarrow RC = \tau$

$E = \tau\frac{d}{dt}U_C + U_C$

$E - U_C = \tau\frac{d}{dt}U_C$

$\frac{1}{\tau}dt = \frac{1}{(E-U_C)}dU_C$

$\int \frac{1}{\tau}dt = \int \frac{1}{(E-U_C)}dU_C$

Lösung des unbestimmten Integrals (Lit.-Ref.4): $\frac{t}{\tau} + C_1 = -ln(E - U_C) + C_2$

$C = C_2 - C_1$

$\frac{t}{\tau} = -ln(E - U_C) + C$

Wie groß ist die Integrationskonstante C zum Zeitpunkt t=0?

Anfangsbedingung muss definiert werden: Zum Zeitpunkt t=0 fällt keine Spannung über dem Kondensator ab! Die Anfangsenergie des Systems ist zum Zeitpunk t=0 Null.

$C = \frac{t}{\tau} + ln(E - U_C) \Rightarrow t(0) = 0$ und $U_C = 0$ bei t=0

$C = ln(E)$

$\frac{t}{\tau} = -ln(E - U_C) + ln(E)$

$-\frac{t}{\tau} = ln(E - U_C) - ln(E)$

$-\frac{t}{\tau} = ln\left[\frac{(E-U_C)}{E}\right]$

$-\frac{t}{\tau} = ln\left(1 - \frac{U_C}{E}\right)$

$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{U_C}{E}$

$-U_C = E(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$

$U_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

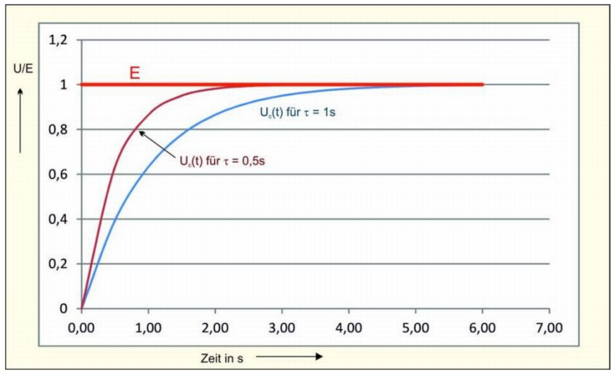


Abbildung 12: Spannungsverlauf am Kondensator für zwei Zeitkonstanten - Aufladung

Betrachten wir die gleiche Anordnung der Bauelemente. Der Kondensator ist **zum Zeitpunkt t=0** auf den Wert E geladen und wird, über dem Widerstand R **ab dem Zeitpunkt t=0**, entladen.

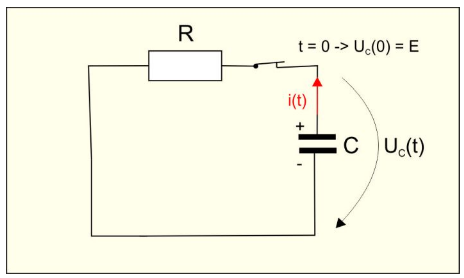


Abbildung 13: Schaltung zur Entladung eines Kondensators

Aufstellen der Maschengleichung: $0 = U_R(t) + U_C(t)$

Auflösung nach $U_C(t)$:

$0 = i(t)R + U_C$

$i(t) = C\frac{d}{dt}U_C$

$0 = RC\frac{d}{dt}U_C + U_C$

$0 = \tau\frac{d}{dt}U_C + U_C$

$-\tau\frac{d}{dt}U_C = U_C$

$\frac{1}{U_C}dU_C = -\frac{1}{\tau}dt$

$\int\frac{1}{U_C}dU_C = -\int\frac{1}{\tau}dt$

Lösung des unbestimmten Integrals (Lit.-Ref.4): $ln(U_C) + C_1 = -\frac{t}{\tau} + C_2$

Intergrationskonstante $C = C_2 - C_1$

$ln(U_C) = -\frac{t}{\tau} + C$

Für den Zeitpunkt t=0 ist C: $\Rightarrow C = ln(U_C) + \frac{t(0)}{\tau} = ln(E)$

$ln(U_C) = -\frac{t}{\tau} + ln(E)$

$ln(U_C) - ln(E) = -\frac{t}{\tau}$

$ln\left(\frac{U_C}{E}\right) = -\frac{t}{\tau}$

$\left(\frac{U_C}{E}\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}$

$U_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

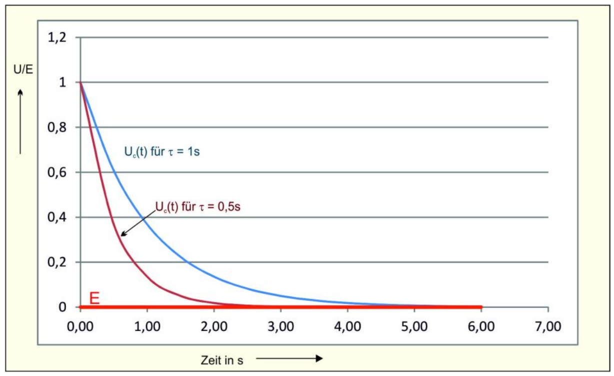


Abbildung 14: Spannungsverlauf am Kondensator für zwei Zeitkonstanten - Entladung

1.5.3 Das zeitlich konstante elektrische Feld

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der ruhenden elektrischen Ladung.

- Die elektrische Ladung ist die Quelle eines elektrostatischen Feldes. Auf die elektrische Ladungen wirken Kräfte. Gleichnamig geladene Körper stoßen einander ab, ungleichnamig geladene Körper ziehen sich an. Es gilt für zwei Punktladungen folgende Beziehung (Lit.-Ref.3):

  $$F = Q_1 E_2 = Q_2 E_1$$

- Die Feldstärke E, im Punkt eines elektrostatischen Feldes, ist proportional der felderzeugenden Ladung Q.

Dielektrikum absolut: $\varepsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Dielektrikum relativ für das Vakuum $\varepsilon_r = 1$

Dielektrikum relativ für Luft $\varepsilon_r = 1,000006$

Dielektrikum relativ für Keramik $\varepsilon_r > 100$

Bemessungsgleichung des Kondensators: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r * \frac{A}{d}$

Wird in ein homogenes Dielektrikum ein weiteres eingeführt, so verändert sich bei konstanter Ladung die Spannung U zwischen den geladenen Flächen.

$$C * U = Q$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

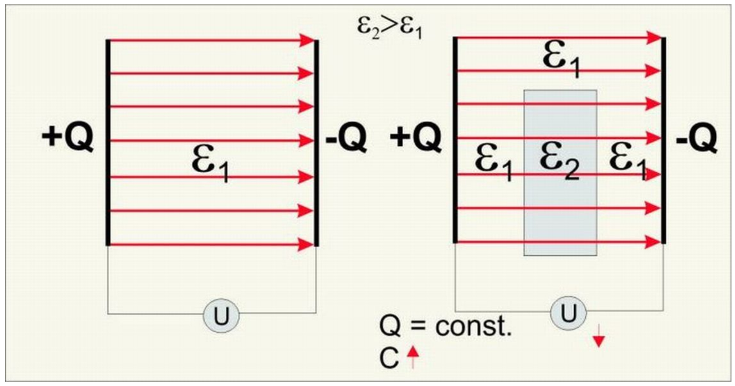


Abbildung 15: Das Dielektrikum verändert die Kapazität und die Spannung

Bei konstanter Ladung wird die Spannung zwischen den geladenen Flächen kleiner, wenn die Dielektrizität vergrößert wird. Der Wert der Dielektrizität ist direkt proportional zur Kapazität des Kondensators.

Parallelschaltung zwei unterschiedlicher Dielektrika

Aufgabe: Es soll die Gesamtkapazität eines Plattenkondensators bestimmt werden. Gegeben sind zwei unterschiedliche Dielektrika. Die Breite der Platten ist konstant und wird mit „b“ symbolisiert. Der Abstand der Platten ist auch konstant und wird mit dem Buchstaben „d“ in der Berechnungsformel dargestellt.

Die Gesamthöhe h ist die Summe der beiden Dielektrikaschichten $h = h_1 + h_2$. Wobei h_1 die Schichthöhe des Dielektrikums mit der Konstanten ε_1 darstellt. Analog gilt für die Höhe $h_2 \Rightarrow \varepsilon_2$.

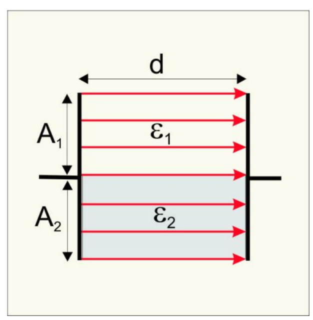


Abbildung 16: Dielektrikum parallel geschichtet

Lösungsansatz: Die Einzelkapazitäten einer Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich zur Gesamtkapazität.

Hypothese: Wir nehmen die Größe h_1 als Variable (Messgröße) an.

$$\mathrm{C} = C_1 + C_2$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A_2}{d}$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{b*h_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{b*h_2}{d}$$

$$h_2 = h - h_1$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{b*h_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{b*(h-h_1)}{d}$$

$C = \varepsilon_0 \frac{b}{d} \left[\varepsilon_1 * h_1 + \varepsilon_2 * (h - h_1)\right]$

Für den Sonderfall $A = A_1 + A_2$ bei $A_1 = A_2$ gilt:

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A}{2d} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A}{2d}$

$C = \varepsilon_0 [\varepsilon_1 + \varepsilon_2] \frac{A}{2d}$

Anwendungsgebiete in der Praxis:

- Füllstandsmessung von elektrisch nichtleitendem Granulat - die Höhe h_1 ist das Maß für die Füllhöhe. Die Dielektrizitätskonstante ε_1 ist der Wert für das Granulat (allgemein auch Schüttgut genannt). Die Dielektrizitätskonstante ε_2 ist der Wert von Luft, dem Volumenanteil, der nicht vom Granulat belegt wird.
- Abstandsmessung, wobei für ε_2 die Dielektrizitätskonstante von Luft angenommen werden kann und das ist in der industriellen Messtechnik die entscheidende Variable (Messgröße). Der Wert für die Dielektrizitätskonstante ε_1 ist der Wert einer elektrisch schützenden Folie.
- Qualitätskontrolle und Materialprüfung von Isoliermaterial in der Hochspannungstechnik; Risse und Lufteinschlüsse sind über das kapazitive Messverfahren erkennbar.

Reihenschaltung von zwei unterschiedlicher Dielektrika

Lösungsansatz: Die „Leitwerte“ der Einzelkapazitäten einer Reihenschaltung von Kondensatoren addieren sich zum resultierenden „Leitwert“ der Gesamtkapazität.

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A}{d_1} * \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A}{d_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A}{d_2}}$

$d = d_1 + d_2$

praktische Nebenbedingung: Die Breite des Dielektrikums 2, mit ε_2, soll die einzige Variable im endgültigen Ausdruck für die resultierende Kapazität C sein. Oft entspricht dieses Dielektrikum dem Wert von Luft(Luftpolster). In der industriellen Messtechnik können mit diesem Verfahren Abstände (speziell Unwuchten von Wellen und Achsen) im μm-Bereich gemessen werden.

$d_1 = d - d_2$

$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A}{d - d_2} * \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A}{d_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 * \frac{A}{d - d_2} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 * \frac{A}{d_2}}$

$C = \frac{\varepsilon_0^2 A^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{[d_2(d - d_2)] \varepsilon_0 A \left[\frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 (d - d_2)}{[d_2(d - d_2)]}\right]}$

$C = \frac{\varepsilon_0^2 A^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_0 A [\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 (d - d_2)]}$

$C = \frac{\varepsilon_0 A \varepsilon_1 \varepsilon_2}{[\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 (d - d_2)]}$

$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{[\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 (d - d_2)]} * b * h$

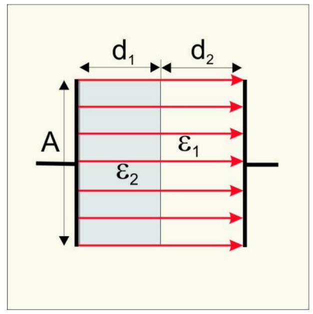


Abbildung 17: Dielektrikum sequentiell angeordnet

Sonderfall: Gesucht ist die Lösung, wenn wir für $d_1 = d_2$ annehmen können.

$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{[\varepsilon_1 \frac{d}{2} + \varepsilon_2 \frac{d}{2}]} * b * h$

$C = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} * 2 \frac{A}{d}$

1.6 Der Kondensator als Energiequelle

$$W = \int_0^\infty uidt$$

Welche elektrische Arbeit wird am Verbraucher R umgesetzt?

$W = \int_0^\infty i^2 R dt$

$i(t) = C \frac{dU}{dt}$

$\frac{dU}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ergo $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \Rightarrow \qquad E = U_c(0)$

$W = \int_0^\infty \frac{U^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}} R dt$

$W = -\frac{\tau U^2}{2R} e^{-2\frac{t}{\tau}} |_0^\infty$

$W = \frac{\tau U^2}{2R} = \frac{CU^2}{2}$

$W = \frac{CU^2}{2}$

$W = \frac{QU}{2}$

$W = \frac{Q^2}{2C}$

Aufgabe: Welche elektrische Energie kann maximal in einem Kondensator mit einer Kapazität von 1F gespeichert werden? Der Kondensator wurde auf eine Spannung von U = 100V aufgeladen.

Lösungsansatz: Die Übertragung der gespeicherten Energie auf den Verbraucher R erfolgt durch die Entladung.

Lösung:

$W = \frac{U^2}{2}C$

$W = \frac{(100V)^2}{2} 1\frac{As}{V} = 5kWs$

Welche elektrische Leistung wird in einer Stunde umgesetzt?

$P = \frac{W}{t} = \frac{5000Ws}{3600s} \approx 1,88W$

Aufgabe: Konstruieren Sie einen Kondensator mit einer Kapazität von 1F. Der Abstand der quadratischen Platten soll d=1cm betragen. Das Dielektrikum soll Luft sein.

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{d}$

$\varepsilon_0 \varepsilon_1 = 8,854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$a = \sqrt{A}$

$a = \sqrt{\frac{d*C}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}$

$a = \sqrt{\frac{10^{-2}m*1\frac{As}{V}}{8,854*10^{-12}\frac{As}{Vm}}} = \sqrt{\frac{10^{10}m^2}{8,854}}$

$a \approx 33607m = 33,607km$

Fazit: Ein Kondensator mit $\varepsilon_1 = 1$ und mit der Kapazität von C = 1F ist mechanisch gesehen sehr ungewöhnlich. Über 33km den Plattenabstand auf exakt 1cm zu garantieren, ist eine sehr hohe Herausforderung.

Es wird das Dielektrikum verändert und der Abstand der geladenen Flächen zueinander.

Als Dielektrikum wird Kunststofffolie verwendet mit einer Schichtdicke von $d = 1\mu m$ und einem $\varepsilon_r = 1000$

Es soll die Kantenlänge der quadratischen Kondensatorflächen berechnet werden:

$a = \sqrt{\frac{10^{-6}m*1\frac{As}{V}}{8,854*10^{-12}*1000\frac{As}{Vm}}} = \sqrt{\frac{10m^2}{8,854}}$

$a \approx 1m$

1.7 Die Größe PSI

Verschiebungsfluss Ψ PSI

$\frac{dQ}{dt} = 0$

- Die Größe Q: Wie viel Ladungsträger sind im Energiespeicher enthalten?
- Die Größe Ψ: Wie viel Ladungsträger werden, bedingt durch die Kraftwirkung der Feldstärke, zum

„anderen“ Pol verschoben?

Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$

$$\vec{D} = \frac{d\Psi}{dA}$$

Wie viel positive Ladungsträger durchströmen senkrecht die Fläche des Nichtleiters?

1.8 Das Coulombsche Gesetz

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon a^2}$$

a ist der Abstand zweier Punktladungen auf einer Ebene

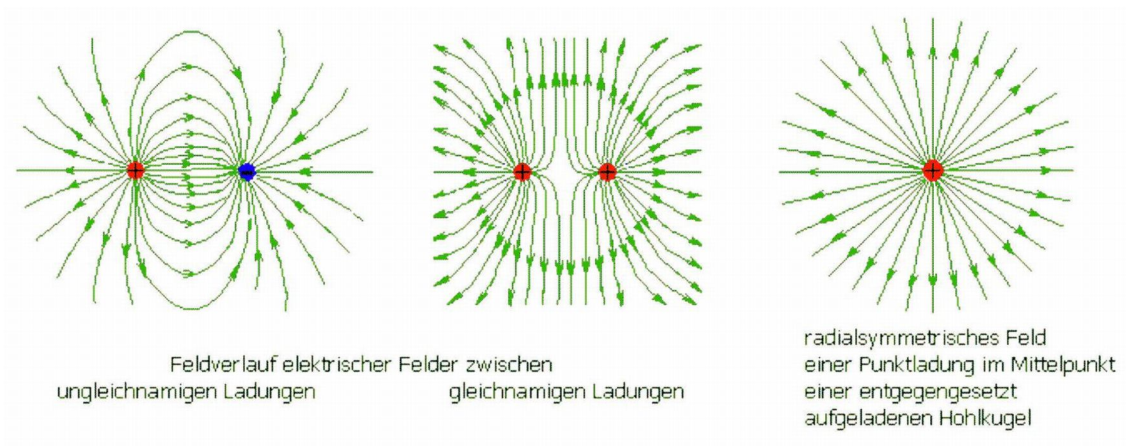


Abbildung 18: Die Kraftwirkungen geladener Elemente

praktische Anwendungen der Elektrostatik

- Elektrofilter; auch: EGR (Elektrische Gasreinigung), Elektrostaubfilter, Elektrostat (engl.: ESP electrostatic precipitator) sind Anlagen zur Abscheidung von Partikeln aus Gasen. Da es sich streng genommen um keinen Filter im klassischen Sinne handelt, ist die wissenschaftlich korrekte Bezeichnung Elektroabscheider oder Elektrostaubabscheider.
- elektrostatisch unterstütztes Farbspritzen; Hierbei wird der Sprühnebel elektrostatisch aufgeladen (auf ca. 40 kV) und auf das geerdete Werkstück gespritzt. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass der Lackverlust, gegenüber dem konventionellem Verfahren, gering bleibt und der Lack gleichmäßig verteilt wird.
- Fixierung von Papierblättern auf Flachbettplottern bzw. X-Y-Schreibern

2 Aufgaben

2.1 Feldstärke in einer Spule

Welche Feldstärke besteht in einem Draht einer Spule mit 10.000 Windungen und einem mittleren Windungsdurchschnitt von 6,5cm, an denen eine Spannung von U=7,9V anliegt?

Lösungsansatz:

$E = \frac{d\varphi}{ds} \Rightarrow E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{U}{l}$

Bestimmung der wahren Drahtlänge:

$l = u \cdot n$ $\Rightarrow u$ entspricht dem mittleren Umfang der Windungen, n entspricht der Anzahl der Windungen

$l = 2\pi r n = 2\pi \frac{d_m}{2} n = \pi d_m n$

$E = \frac{7{,}9V}{\pi \cdot 65 \cdot 10^{-3} m 10^4} = 3,86\frac{mV}{m}$

2.2 Feldstärke und Stromfluss im Draht

In einem Kupferdraht mit einem Durchmesser von d=3mm, herrscht in Längsrichtung eine Feldstärke von $E = 45\frac{mV}{m}$. Welcher Strom fließt durch den Draht?

$E = \frac{U}{l} = \frac{R \cdot I}{l} = \rho I \frac{l}{l \cdot A}$

$I = \frac{A \cdot E}{\rho}$

$I = \frac{\pi \cdot d^2 45 \cdot 10^{-3} V Am}{4 \cdot 0{,}0178 mm^2 V m}$

$I = \frac{\pi \cdot 9mm^2 45 \cdot 10^{-3} V Am}{4 \cdot 0{,}0178 mm^2 V m}$

$I = 17,87A$

2.3 Der Strömungswiderstand - Teil 1

Gegeben ist ein Strömungswiderstand in Form eines „Bügels“.

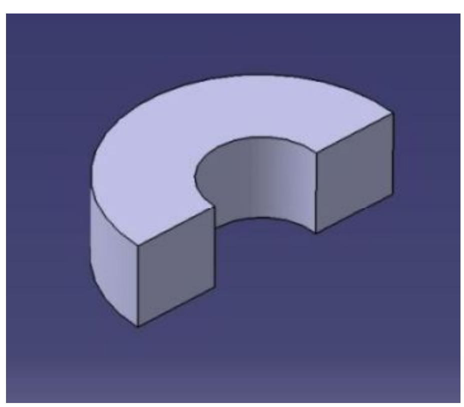


Abbildung 19: Strömungswiderstand in Form eines Bügels

Berechnen Sie die allgemeine Lösung für den Widerstandswert R, wenn die elektrische Feldstärke an den Vorder- und Seitenflächen wirkt.

Gegebene Größen: Die Geometrie und der Werkstoff des Strömungswiderstandes sind bekannt.

Lösungsansatz: Die Feldlinien verlaufen zwischen den geladenen Flächen parallel.

$E = \frac{U}{l}$ $\Rightarrow$ Die Größe l entspricht der Breite des Bügels und somit der Feldlänge.

$$U = E \cdot l$$

$$S = \frac{I}{A(r)} = \kappa \cdot E$$

$$I(r) = \kappa \cdot E \cdot A(r)$$

$$I(r) = \kappa \cdot E \cdot \frac{\pi}{2}\left(r_a^2 \; - \; r_i^2\right)$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot l}{\kappa \cdot E \cdot \frac{\pi}{2}\left(r_a^2 \; - \; r_i^2\right)}$$

Lösung:

$$R = \frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot \pi} \frac{1}{\left(r_a^2 \; - \; r_i^2\right)}$$

Die Alternative:

Die Größe b entspricht der Breite des Bügels und somit der Feldlänge l.

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{b}{\frac{1}{2}\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{2 \cdot b}{\kappa \cdot \pi} \frac{1}{(r_a^2 - r_i^2)}$$

2.4 Der Strömungswiderstand - Teil 2

Gegeben ist ein Strömungswiderstand in Form eines „Bügels“.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung für den Widerstandswert R, wenn die elektrische Feldstärke an den Stellflächen wirkt.

Gegebene Größen: Die Geometrie und der Werkstoff des Strömungswiderstandes sind bekannt.

Lösungsansatz: Die Feldlinienlängen sind vom Radius abhängig.

$$dA = dr \cdot b$$

$$E = \frac{U}{l}$$

$$S(r) = \frac{dI}{dA} = \kappa * E(r) = \kappa \frac{U}{\pi \cdot r} \Rightarrow \text{Halbkreislänge} = \pi \cdot r$$

$dI = \kappa \frac{U}{\pi \cdot r} \cdot dA$

$dI = \kappa \frac{U}{\pi \cdot r} \cdot b \cdot dr$

$I = \int \kappa \frac{U}{\pi \cdot r} \cdot b \cdot dr$

$I = \kappa \frac{U}{\pi} \cdot b \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr$

$I = \kappa \frac{U}{\pi} \cdot b \cdot ln(r)|_{r_i}^{r_a} = \kappa \frac{U}{\pi} \cdot b[ln(r_a - ln(r_i)]$

$I = \kappa \frac{U}{\pi} \cdot b \cdot ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$

$R = \frac{U}{I}$

$R = \frac{U \cdot \pi}{\kappa \cdot U \cdot b \cdot ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$

$R = \frac{\pi}{\kappa \cdot b \cdot ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$

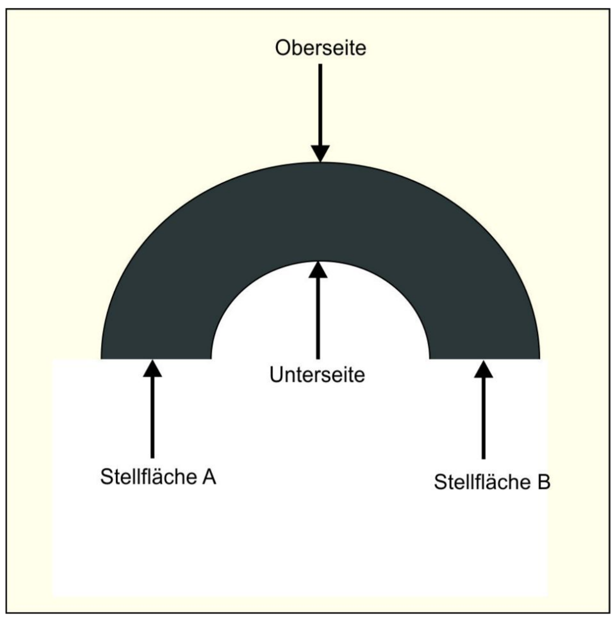


Abbildung 20: Strömungswiderstand - Bezeichnung der aktiven Flächen

2.5 Der Strömungswiderstand - Teil 3

Gegeben ist ein Strömungswiderstand in Form eines „Bügels“.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung für den Widerstandswert R, wenn die elektrische Feldstärke an der Unter- und Oberseite des Bügels wirkt.

Gegebene Größen: Die Geometrie und der Werkstoff des Strömungswiderstandes sind bekannt.

Lösungsansatz: Die Feldlinien verlaufen zwischen den geladenen Flächen nicht parallel - eher strahlenförmig.

Die durchströmte Fläche ist $dA = dr\cdot$ Breite des Bügels.

- Idee: betrachten wir es als Parallelschaltung von Widerständen mit der Fläche $dA = b \cdot dr$
- Die Länge der Widerstandsscheibe mit der Fläche dA ist gleich: $l = \frac{u}{2} = \pi \cdot r$
- Die Einzelwerte werden aufsummiert (integrieren) und letztendlich wird der Kehrwert des Gesamtleitwerts gebildet.

$dG = \kappa \frac{dA}{l} = \kappa \frac{b \cdot dr}{\pi \cdot r}$

$G = \int_{r_i}^{r_a} \kappa \frac{b \cdot dr}{\pi \cdot r} = \kappa \frac{b}{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr$

$G = \kappa \frac{b}{\pi} ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)$

$R = \frac{1}{G} = \frac{\pi}{\kappa \cdot b} \frac{1}{ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$

2.6 Durchschlagfestigkeit eines Kondensators

Ein Plattenkondensator ist mit einer Spannungsquelle von U = 450V verbunden. Bei welchem Plattenabstand wird die Luftstrecke durchschlagen, wenn die Durchschlagfestigkeit der Luft $E = \frac{20kV}{cm}$ beträgt?

Welche Beziehung führt zur Lösung?

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$

$C * U = Q$

$E = \frac{U}{l}$

Lösung:

$l = \frac{U}{E}$

$l = \frac{450V}{20\frac{kV}{cm}}$

$l = \frac{450V}{2*10^4 V} cm$

$l = 225 * 10^{-4} cm$

$l = 0,0225\ cm$

$l = 0,225\ mm$

2.7 Ladungsaufbau mit unterschiedlichen Dielektrika

An einem Plattenkondensator wird das Dielektrikum verändert. Bestimmen Sie die Ladung, die gespeichert werden kann, wenn die Spannung über den Platten auf konstant U = 900V gehalten wird.

Gegeben sind folgende Werte:

- wirksame Fläche des Kondensators $A = 250\ cm^2$
- Abstand der Kondensatorplatten d = 2 mm
- absolute Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
- Dielektrikum vor der Modifikation $\varepsilon_{1_a} = 2,5$
- Dielektrikum nach der Modifikation $\varepsilon_{1_b} = 800$

Lösung:

$Q = C * U$

$Q_a = \varepsilon_0 \varepsilon_{1_a} \frac{A}{d} * U$

$= 8,85 * 10^{-12} \frac{As}{Vm} * 2,5 * \frac{250*10^{-4}m^2}{2*10^{-3}m} * 900V$

$= 0,249 * 10^{-6}As$

$Q_a = 0,249\mu C$

$Q_b = \frac{\varepsilon_{1_b}}{\varepsilon_{1_a}} Q_a = 7,968 * 10^{-5}C = 79,68\mu C$

2.8 Die elektrisch freistehende Kugel

Eine von Luft umgebende, elektrisch freistehende Kugel speichert eine Ladung von $Q = 5 * 10^{-9}C$. Der Durchmesser der Kugel beträgt 80mm.

1. Frage: Wie groß ist die Ladungsdichte der Kugel?

Lösungsansatz: Welche geladene Oberfläche wirkt auf die Umgebung? Verschiebungsflussdichte $\Psi \Rightarrow$ bezogen auf die Oberfläche der geladenen Kugel!

$D = \frac{Q}{A} \Rightarrow \frac{\Psi}{A}$

Oberfläche der Kugel: $A = 4 * \pi * r^2$

$D = \frac{5*10^{-9}C}{4*\pi*r^2}$

$D = 0,248 \frac{\mu C}{m^2}$

2. Frage: Wie groß ist die wirksame elektrische Feldstärke, die durch diese geladene Kugel hervorgerufen wird?

$E = \frac{D}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{0,248 \frac{\mu C}{m^2}}{8,85*10^{-12} \frac{As}{Vm}}$

$E = 28022 \frac{As}{m^2} \frac{Vm}{As} = 28,022 \frac{kV}{m}$

2.9 Ladungsmenge eines Kondensators

Frage: Welche Ladungsmenge enthält ein Kondensator, der einen Plattendurchmesser von d= 15cm besitzt? Der Abstand der Platten beträgt 1mm. Am Kondensator ist eine Spannung von U = 120V messbar. Der Wert für die relative Dielektrizitätskonstante beträgt $\varepsilon_r = 21,3$ (Aceton als Dielektrikum).

Lösungshinweis: Plattendurchmesser? $\Rightarrow$ Kreisform $\Rightarrow A = \frac{\pi}{4}d^2$

$$d = 150mm$$

$$A = \frac{\pi}{4}(150 * 10^{-3}m)^2 = 0,0177\ m^2$$

$$Q = C * U = \varepsilon_0 * \varepsilon_1 \frac{A}{d} * U$$

$$Q = 8,85 * 10^{-12} \frac{As}{Vm} * 21,3 \frac{0,0177m^2}{10^{-3}m} * 120V$$

$$Q = 0,4 * 10^{-3}As = 400nC$$

2.10 Bestimmung der Durchschlagsfestigkeit

Zwei Metallplatten von je $60cm^2$ sind durch eine Schicht aus Phenolharz ($\varepsilon_r = 7,5$) getrennt, die bei einer Ladung von $Q = 1,99 * 10^{-6}C$ durchschlagen wird.

Frage: Wie groß ist die Durchschlagfestigkeit dieser Anordnung?

$$C * U = Q$$

$$\frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 * \varepsilon_1 * A}$$

$$\frac{U}{d} = \frac{1,99 * 10^{-6} AsVm}{8,85 * 10^{-12} As * 7,5 * 60 * 10^{-4}m^2}$$

$$\frac{U}{d} \approx 5000 \frac{kV}{m}$$

2.11 Bestimmung von Ersatzkapazitäten

Frage: Wie groß sind die Ersatzkapazitäten zwischen den Punkten A bis D?

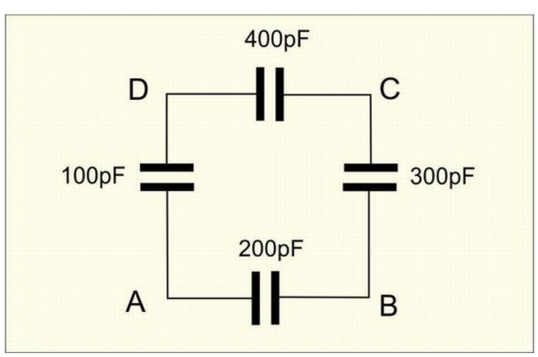


Abbildung 21: Kondensatorenschaltung

Mögliche Kombinationen:

- AB Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{AB}$ = 200pF + Reihenschaltung
- AC Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{AC}$ = Reihenschaltung + Reihenschaltung
- AD Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{AD}$ = 100pF + Reihenschaltung
- BC Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{BC}$ = 300pF + Reihenschaltung
- BD Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{BD}$ = Reihenschaltung + Reihenschaltung
- CD Lösungsansatz: $\Rightarrow C_{CD}$ = 400pF + Reihenschaltung

Die Ergebnisse gerundet und ohne Nachkommastelle angeben!

Fall AB: 200pF + Reihenschaltung $\Rightarrow$ $C_{AB} = 200pF + \left[\frac{(100*300*400)pF^3}{(100*400+100*300+300*400)pF^2}\right] \approx 263pF$

Fall AC: $C_{AC} = \left[\frac{(200*300)pF^2}{(200+300)pF}\right] + \left[\frac{(100*400)pF^2}{(100+400)pF}\right] = 200pF$

Fall AD: 100pF + Reihenschaltung $\Rightarrow$ $C_{AD} = 100pF + \left[\frac{(200*300*400)pF^3}{(200*300+200*400+300*400)pF^2}\right] \approx 192pF$

Fall BC: 300pF + Reihenschaltung $\Rightarrow$ $C_{BC} = 300pF + \left[\frac{(100*200*400)pF^3}{(100*200+100*400+200*400)pF^2}\right] \approx 357pF$

Fall BD:$C_{BD} = \left[\frac{(100*200)pF^2}{(100+200)pF}\right] + \left[\frac{(300*400)pF^2}{(300+400)pF}\right] \approx 238pF$

Fall CD: 400pF + Reihenschaltung $\Rightarrow$ $C_{CD} = 400pF + \left[\frac{(100*200*300)pF^3}{(100*200+100*300+200*300)pF^2}\right] \approx 454pF$

3 Werner von Siemens

geboren am 13. Dezember 1816 in Lenthe;

gestorben am 6. Dezember 1892 in Berlin

3.1 Lebenslauf

Ernst Werner Siemens, 1888 geadelt, wurde am 13. Dezember 1816 in Lenthe geboren. Er war einer der Begründer der Elektrotechnik und ein erfolgreicher Industrieller. Er gründete zusammen mit Johann Georg Halske am 12. Oktober 1847 die „Telegraphen Bau-Anstalt von Siemens & Halske“ - die heutige Siemens AG. Das Unternehmen entwickelte sich innerhalb weniger Jahrzehnte von einer kleinen Werkstatt zu einem der weltweit größten Elektrounternehmen. Siemens entstammte einem alten Goslarer Stadtgeschlecht. Nach dem Umzug der Familie im Jahre 1823 nach Mecklenburg, blieb seinen Eltern der wirtschaftliche Erfolg versagt. Siemens wurde anfangs privat unterrichtet, besuchte ein Jahr die Bürgerschule im Mecklenburgischen Schönberg, bekam drei Jahre Unterricht von einem Hauslehrer und besuchte schließlich für drei Jahre das Katharineum zu Lübeck. Er verließ das Gymnasium 1834 vorzeitig ohne Abschluss. Er wollte gerne einen praktisch-wissenschaftlichen Beruf ergreifen, doch erlaubte die wirtschaftliche Situation der Eltern kein Studium.

Abbildung 22: Siemens Denkmal an der TU Berlin

Auf den Rat seines Lehrers Ferdinand von Bültzingslöwen bewarb er sich beim Ingenieurkorps der preußischen Armee in Berlin, wurde jedoch abgewiesen; daraufhin bewarb er sich bei der Artillerie in Magdeburg und wurde angenommen. Im Herbst 1835 wurde Siemens als Offiziersanwärter für drei Jahre an die Berliner Artillerie- und Ingenieurschule kommandiert. Hier bekam er eine umfassende Ausbildung auf naturwissenschaftlichen Gebieten – wie Mathematik, Physik, Chemie, Geometrie und Ballistik und hörte nebenher Vorlesungen an der Berliner Universität. Diese Ausbildung beendete er 1838 als Artillerie-Leutnant.

Leutnant Werner Siemens tat Dienst in Magdeburg und anschließend in der Garnison Wittenberg, wo er wegen der Teilnahme als Sekundant bei einem Duell zu fünf Jahren Festungshaft verurteilt wurde. Seine Zelle in der Zitadelle Magdeburg gestaltete er zum Labor um und entwickelte dabei ein Verfahren zur elektrischen Galvanisierung. Er wurde begnadigt und 1842 zur Artilleriewerkstatt in Berlin versetzt. Im gleichen Jahr gelang es Werner Siemens einen Teelöffel aus Neusilber, mit Hilfe des aus Batterien stammenden Gleichstromes, mit einem Überzug wahlweise aus Silber oder Gold zu versehen. Für dieses Verfahren bekam er ein Patent, das er an einen Juwelier verkaufte.

Ende 1846 entwickelte er den elektrischen Zeigertelegrafen. Im Jahr darauf erfand er ein Verfahren, um Drähte mit einer nahtlosen Umhüllung aus Guttapercha[2] zu versehen. Dieses Verfahren bildet bis heute die Grundlage zur Herstellung isolierter Leitungen und elektrischer Kabel.

Im Schleswig-Holsteinischen Krieg unterstützte er 1848 die Kieler Bürgerwehr bei der Verteidigung des Kieler Hafens gegen dänische Seestreitkräfte, durch die Belagerung der Festung Friedrichsort. Außerdem entwickelte er funktionsfähige ferngezündete Seeminen, die vor dem Kieler Hafen ausgelegt wurden und die dänische Marine darin hinderten, die Stadt aus der Nähe zu beschießen. Er blieb beim Militär bis Juni 1849 und versuchte immer wieder mit Erfindungen zusätzlich Geld zu verdienen.

1857 entwickelte Siemens die Ozonröhre, die elektrisch erzeugtes Ozon zur Reinigung von Trinkwasser verwendet. Im gleichen Jahr formulierte er das Gegenstromprinzip.

[2] Die oder auch das Guttapercha oder Gutta (malaiisch: getah „Gummi“, percha „Baum“) ist der eingetrocknete Milchsaft des im malaiischen Raum heimischen Guttaperchabaumes (Palaquium gutta). Guttapercha steht chemisch dem Kautschuk nahe.

1866 entdeckte er 15 Jahre nach dem Dänen S. Hjorth und fünf Jahre nach dem Ungarn A. Jedlik als dritter das dynamoelektrische Prinzip und baute eine Dynamomaschine. Werner Siemens war allerdings der erste, der der Selbsterregung eine große Bedeutung für die Erzeugung elektrischer Energie voraussagte. Siemens glaubte fest an den Siegeszug der elektrischen Energie, der mit der Dynamomaschine möglich erschien. Aber es gab noch zu wenig praktikable Anwendungen, um der neuen Technologie zum Durchbruch zu verhelfen.

Am 6. Dezember 1892 erlag Werner von Siemens in Berlin einer Lungenentzündung.

3.2 Die selbsterregte Dynamomaschine von Siemens

Es handelt sich um diejenige Dynamomaschine (Lit.-Ref.6), einen umgebauten Kurbelinduktor mit Doppel-T-Anker aus dem Jahr 1856, an der Werner Siemens 1866 das von ihm vorgeschlagene dynamo-elektrische Prinzip demonstrierte; er hatte die Permanent-Magnete vollständig durch Elektromagnete und ein Weicheisenjoch ersetzt. Die Maschine leitete ein neues Zeitalter der Elektrotechnik ein. Sie war auf der Weltausstellung in Paris 1867 ausgestellt, auf der Werner Siemens mit dem Orden der Französischen Ehrenlegion ausgezeichnet wurde.

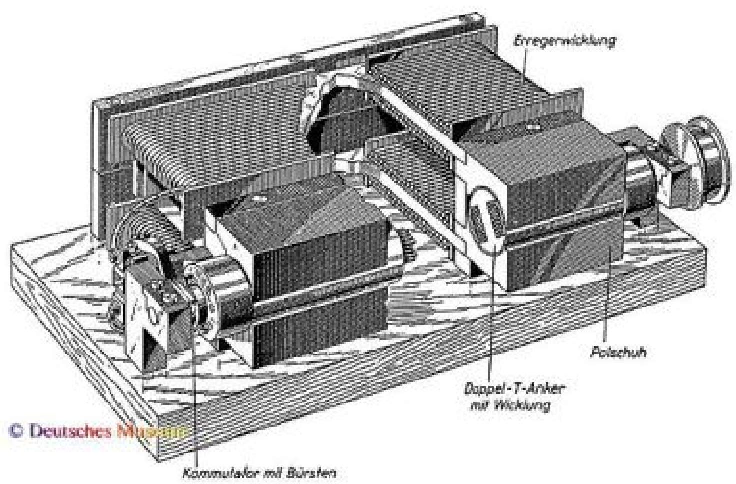


Abbildung 23: Aufbau und Querschnitt der Dynamomaschine von 1866

Um das notwendige Magnetfeld zu erzeugen, kann zwischen vier Möglichkeiten gewählt werden:

- Einsatz eines Dauermagneten oder auch Permanent-Magnet genannt
- Erzeugung des Magnetfelds über einen Stromfluss I_{Feld} – ein Teilstrom des Ankerstroms wird für die Magnetfelderzeugung abgezweigt. Diese Betriebsart nennt man „Nebenschlussmaschine".
- Wird der komplette Ankerstrom für die Erzeugung des Magnetfelds verwendet, so nennt man die Betriebsart - „Reihenschlussmaschine". Die Anker- und die Feldwicklung liegen in Reihe. Die Aussage, dass der ganze Ankerstrom verwendet wird ist nicht ganz korrekt, denn zur Feldwicklung wird ein Parallelwiderstand geschaltet, der die Stromstärke reguliert. Nur ein Teil des gesamten Ankerstroms fließt somit durch die Feldwicklung.
- Die vierte Betriebsart ist die fremderregte Maschine. Ankerstrom und Feldstrom kommen aus getrennten Quellen und sind voneinander unabhängig.

Der selbsterregte Gleichstromgenerator ist eine Sonderform der Nebenschlussmaschine. Die Feldwicklung des Generators wird durch die vom Generator selbst erzeugte Spannung gespeist. Dies ist nur deshalb möglich, weil durch die Remanenz des Eisens, auch bei $I_{Feld} = 0$, ein magnetisches Feld vorhanden ist.

Betrachten wir das Grundprinzip im Detail und stellen wir ein mathematisches Modell auf.

elektrische Größen:

- I_F ... der konstante Feldstrom, dient zum Aufbau des magnetischen Feldes in dem der Anker rotiert und dadurch ein Strom induziert wird
- U_Q ... ist die Spannung, die vom Generator durch Induktion (Bewegungsinduktion) erzeugt wird
- R_F ... der ohmsche Widerstand der realen Feldspule, die das Magnetfeld aufbaut, indem der Anker rotiert
- R_A ... der ohmsche Widerstand der Ankerwicklung
- L_A ... die Induktivität der Ankerwicklung: $L = \mu \cdot n^2 \frac{A}{l}$
- L_F ... die Induktivität der Feldspule
- I_F... $\frac{U_A}{R_F}$
- i_F ... der zeitveränderliche Feldstrom
- $U_A = I_F \cdot R_F$ für $\Rightarrow R_A << R_F$ und $L_A << L_F$

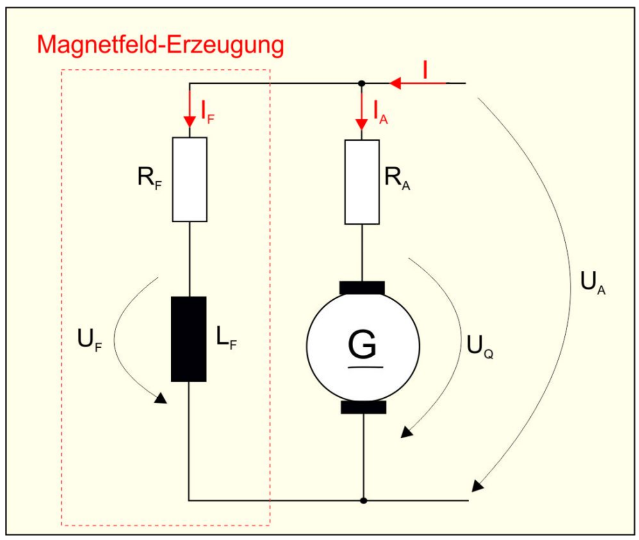


Abbildung 24: Ersatzschaltbild eines selbsterregten Gleichstromgenerators - Nebenschlussprinzip

Annahmen: bei konstanter Drehzahl und $R_A \approx 0$

Somit gilt für den Erregerkreis:

$$U_Q = L_F \frac{di_F}{dt} + i_F R_F$$

$$\frac{di_F}{dt} = \frac{1}{L_F}(U_Q - i_F R_F)$$

$$di_F = \frac{1}{L_F}(U_Q - i_F R_F)dt$$

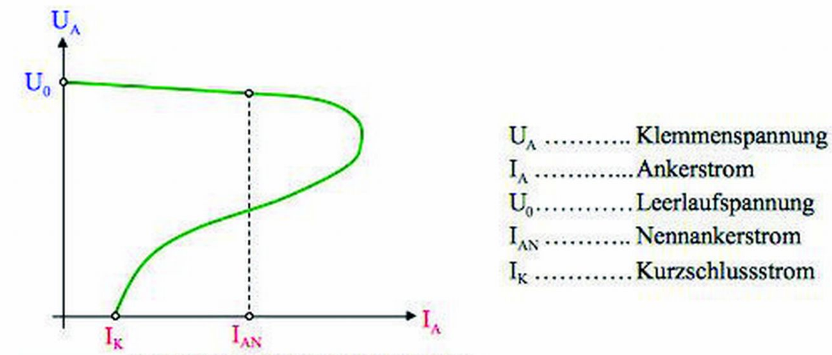
$$i_F = \int \frac{1}{L_F}(U_Q - i_F R_F)dt$$

$$i_F = \frac{1}{L_F} \int (U_Q - i_F R_F)dt$$

$$U_Q > i_F R_F \Rightarrow \frac{di_F}{dt} > 0$$

Der Feldstrom $i_F(t)$ nimmt solange zu, bis die Quellspannung $U_Q = i_F(t) \cdot R_F = I_F \cdot R_F$ ist. Dieser Zustand entspricht dem stationären Betriebspunkt. In der Praxis darf der Ankerwiderstand R_A nicht vernachlässigt werden. Bei Belastung des Generators wird durch $I_A \cdot R_A$ das Feld geschwächt und daraus folgt letztendlich, dass die Quellenspannung U_Q kleiner wird.

Der Vorteil von solchen Nebenschlussmaschinen besteht darin, dass sie vom Aufbau einfacher sind, als fremderregte Maschinen. Jedoch muss beachtet werden, dass eine Nebenschlussmaschine von der Last abhängig ist. Das Erregerfeld kann nicht konstant sein, wenn die Last variiert.



Kennlinie eines Nebenschlussgenerators

4 Abkürzungsverzeichnis

A elektrisch wirksame Fläche eines Kondensators

C Die Kapazität eines Kondensators

d Abstand der geladenen Kondensatorflächen - Länge der Feldstärkelinien.

d Abstand zwischen den elektrischen Anschlüssen im Strömungsfeld, Länge der Feldstärkelinien: : $E = \frac{U}{d}$

E EMK - Elektromotorische Kraft; Energiequelle

E elektrische Feldstärke

i(t) Zeitfunktion des elektrischen Stroms

l Abstand zwischen den elektrischen Anschlüssen im Strömungsfeld: $E = \frac{U}{l}$

Q elektrische Ladung

U Spannung am Verbraucher

5 Literaturverzeichnis

Lit.-Ref.1 Küpfmüller, K.; „Einführung in die theoretische Elektrotechnik"; 5. Auflage; Springer Verlag

Lit.-Ref.2 Lunze, K.; Wagner, E.; „Einführung in die Elektrotechnik"; 2. Auflage; Verlag Technik Berlin

Lit.-Ref.3 Lunze, K.; „Einführung in die Elektrotechnik"; 11. Auflage; Verlag Technik Berlin

Lit.-Ref.4 Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; „Taschenbuch der Mathematik"; Verlag Harri Deutsch

Lit.-Ref.5 Wikipedia - 2012; Stichwort „Leidener Flasche"

Lit.-Ref.6 Deutsches Museum München - Text und Bild der historischen Dynamomaschine