

Aktive Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Christian Hesse
aus: Hildesheim

eingereicht am: 20.10.2016
mündliche Prüfung am: 12.12.2016

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Michael Sinapius
Prof. Dr.-Ing. Sabine Langer
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne

2016

Kurzfassung

Gegenstand der vorliegenden Dissertation ist die Reduktion der strukturbedingten Schalleinstrahlung in, als Kavitäten bezeichnete, akustische Innenräume. Diese soll unter Einsatz von Energiewandlern erzielt werden, welche die relevanten Schwingungsanteile sensieren und entsprechende Gegenkräfte in die Struktur einleiten, um diese zu minimieren. Untersucht wird die Möglichkeit, mit rein strukturbasierter Sensorik die an der Schalleinstrahlung beteiligten Schwingungsformen zu quantifizieren und diese für eine Reduktion der Ordnung eines mathematischen Modells der physikalischen Regelstrecke nutzbar zu machen. Ziel ist es somit, eine globale Reduktion der Schalleinstrahlung mit aktiven Mitteln zu erreichen, bei der eine Beruhigung im gesamten Kavitätsvolumen erfolgt.

Um dieser Frage nachzugehen, werden mithilfe analytischer und numerischer Methoden die Schalleinstrahlungsmoden untersucht. Diese stellen die strukturellen Schnelleverteilungen dar, welche voneinander unabhängig Schall in einen Innenraum abstrahlen. Diese Methoden ermöglichen es, die Charakteristik der Schalleinstrahlungsmoden im Frequenzbereich zu untersuchen. Insbesondere die numerischen Verfahren lassen phänomenologische Studien bezugnehmend auf eine Vielzahl von Schalleinstrahlungsproblemen zu. Dabei müssen jedoch gewisse Randbedingungen hinsichtlich der Modellparameter eingehalten werden, um mit den analytischen Vorhersagen zu korrelieren. Aus generischen Modellen der Fluid-Struktur-Interaktion im Rahmen der analytischen Untersuchungen geht hervor, dass die Schalleinstrahlungsmoden in frequenzunabhängiger Form berechnet werden können. Dies ist für experimentelle Reglerimplementierungen von Bedeutung, welche Einschränkungen hinsichtlich der Signalverarbeitung unterlegen sind. Des Weiteren werden mit den numerischen Methoden phänomenologische Studien mit Bezug auf die Schalleinstrahlungsmoden in räumlich diskretisierten bzw. modal gekoppelten Modellen durchgeführt. Die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden kann anhand einer numerischen Konvergenzstudie mit einer zunehmenden räumlichen Auflösung bestätigt werden.

Um die Vorhersagen der analytischen sowie numerischen Untersuchungen zu überprüfen, wird ein experimenteller Versuchsträger aufgebaut, bestehend aus einer ebenen Platte, gekoppelt an eine quaderförmige Kavität. An diesem wird die Vorhersage der akustischen Energie im Fluid anhand der Vermessung der Strukturschwingungen mithilfe der frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden validiert. Anschließend wird ein Regler mit dem Ziel ausgelegt, diese Energie zu unterdrücken. Die Implementierung auf einem Echtzeitsystem liefert damit einen globalen Regelungserfolg, was anhand akustischer Schalldruckmessungen bestätigt wird. Am experimentellen Versuchsträger werden darüber hinaus strukturelle Mechanismen untersucht, welche sich für die Reduktion der Schalleinstrahlung verantwortlich zeigen.

Abstract

The subject of this dissertation is the structural sound radiation into enclosed spaces, i.e. cavities. For its reduction, active components are used for measuring the relevant structural vibration and counteracting force introduction. This study addresses the feasibility of quantifying the most relevant vibration modes for the sound radiation using structure-based sensors. This is done in order to use these modes for a so called order reduction of the mathematical model representing the control path. The aim consists in achieving a global reduction of sound radiation throughout the entire cavity volume.

In order to address this question, the radiation modes are examined using analytical and numerical methods. They represent the structural velocity patterns which radiate sound into the enclosure, however being independent from one another. The proposed methods enable the characterisation of the radiation modes in the frequency domain. The numerical methods in particular enable phenomenological studies for a multiplicity of sound radiation problems. In order for the numerical results to correlate with the analytical predictions some boundary conditions regarding the model parameters need to be complied with.

In the context of the analytical studies, it can be concluded for generic models of fluid-structure-interaction, that the radiation modes can be calculated disregarding the frequency dependence. This is especially significant for practical control implementations, which are subject to restrictions regarding the signal processing. In addition, phenomenological studies in relation to the radiation modes in spatially discretised as well as modally coupled models are conducted using the proposed numerical methods. The frequency independence can be confirmed for these numerical models through convergence studies with an increasing spatial resolution.

In order to confirm the analytical as well as numerical predictions, an experimental setup is assembled, consisting of a flat plate coupled to a cuboid cavity. This setup is used to validate the prediction of the acoustical energy in the fluid, using structural vibration measurements and the frequency-independent radiation modes. Additionally, a controller is synthesized in order to reduce this energy. An implementation of this controller on a real-time system yields a global reduction of sound radiation, as confirmed by sound pressure measurements inside the cavity. The experimental setup is also used for the investigation of structural mechanisms, responsible for the sound radiation reduction.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in den Jahren 2012 bis 2016.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Michael Sinapius für die gewissenhafte Betreuung. Im Rahmen vieler spannender Diskussionen haben Sie mit Ihrer Begeisterung stets für die notwendige Motivation gesorgt. Weiterhin möchte ich mich bedanken bei Prof. Dr.-Ing. Sabine Langer für das Anfertigen des Zweitgutachtens und bei Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Darüber hinaus gilt mein Dank den Kollegen der Abteilung Adaptronik am DLR und insbesondere dem Abteilungsleiter Prof. Dr.-Ing. Hans Peter Monner. Das angenehme Arbeitsklima, insbesondere auch im Transferzentrum in Hamburg, hatte wesentlichen Anteil an der Anfertigung dieser Arbeit. Aus dem Kreise der Kollegen möchte ich mich besonders bei Dipl.-Ing. Veatriki Papantoni und Dr.-Ing. Juan Miguel Vivar Perez für die vielen Anregungen und die Unterstützung bedanken. Für die Hilfestellung bei den experimentellen Arbeiten gilt mein Dank Dr.-Ing. Stephan Algermissen und Dipl.-Ing. Thomas Haase. In diesem Zuge sei auch Dr. rer. nat. Michael Rose gedankt, der insbesondere mit Blick auf die Themenfindung entscheidende Impulse gegeben hat.

Von Herzen danke ich meiner Familie und insbesondere meinen Eltern, Rita und Michael Hesse, sowie meiner Lebensgefährtin Franziska Rätzlaff für den Rückhalt und die bedingungslose Unterstützung auf meinem Bildungs- und Lebensweg.

Hamburg, im Dezember 2016

Christian Hesse

Inhaltsverzeichnis

1. Herausforderungen dünnwandiger Flächenstrukturen	1
2. Zielsetzung und Hypothesen	3
3. Stand des Wissens zur aktiven Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten	7
3.1. Begriffsdefinitionen	7
3.1.1. Akustische potentielle Energie	7
3.1.2. Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung	8
3.1.3. Strukturelle Schalleinstrahlungsmoden	9
3.2. Praktische Implementierungen der Schalleinstrahlungsreduktion in Kavitäten	10
3.3. Frequenzabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden in Kavitäten	14
3.4. Ordnungsreduktion gekoppelter Fluid-Struktur-Interaktionssysteme	17
3.5. Sensorkonzepte für globale Regelungsverfahren	20
3.6. Fazit mit Bezug auf die Hypothesen	23
4. Schalleinstrahlungsmoden in analytischer Formulierung	25
4.1. Randintegralgleichung der Schalleinstrahlung	25
4.2. Analytische Formulierung der akustischen potentiellen Energie	27
4.3. Analytische Berechnung der Schalleinstrahlungsmoden	28
4.4. Frequenzunabhängige Schalleinstrahlungsmoden	33
5. Singulärvektoren von Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung	39
5.1. Numerische Modellierung gekoppelter Fluid-Struktur-Systeme	39
5.2. Harmonische Formulierung der Impedanzmatrix der Innenraumabstrahlung	40
5.3. Singulärwertzerlegung der Impedanzmatrix der Innenraumabstrahlung	41
5.4. Konvergenzstudie der harmonischen Singulärvektoren	43
5.5. Ausweichende Singulärwerte	49
6. Singulärvektoren durch Modenkopplung der Teilsysteme	53
6.1. Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung durch Modenkopplung der Teilsysteme	53
6.2. Modellreduktion durch entkoppelte Eigenvektoren	55
6.2.1. Analytische Modellreduktion	55
6.2.2. Numerische Modellreduktion	57
6.2.3. Vergleich der analytischen und numerischen Kopplungsmatrix	58
6.3. Konvergenz der modalen Kopplungstheorie	62
6.4. Abhängigkeit der Singulärvektoren von der Modenanzahl	66
6.5. Einfluss des Diskretisierungsgrades auf akustische Eigenvektoren	67

7. Experimentelle Regelung der Schalleinstrahlung in Kavitäten	71
7.1. Modellbasierter Reglerentwurf unter Berücksichtigung der Kavitätsdynamik	71
7.1.1. Identifikation zeitdiskreter Zustandsraummodelle	71
7.1.2. Erweiterung des Streckenmodells	73
7.1.3. Schallstrahlungsfilter der Innenraumeinstrahlung	74
7.1.4. \mathcal{H}_∞ -Reglersynthese	75
7.2. Beschreibung des Versuchsträgers	78
7.3. Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen	81
7.3.1. Verifikation der Streckenmodelle	81
7.3.2. Verifikation der Schallstrahlungsfilter	83
7.3.3. Störgrößenunterdrückung der Regelung	85
8. Perspektiven aktiver Maßnahmen der Schalleinstrahlungsminderung	91
A. Anhang	97
A.1. Herleitung der Green'schen Funktion	97
A.2. Validierung der Randintegralgleichung	98
A.3. Zusammenhang zwischen Schalleinstrahlungsmoden und akustischen Eigenformen	101
A.4. Modellreduktion des gekoppelten Gleichungssystems durch Eigenwertzerlegung des gekoppelten Systems	103
A.5. Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen	105
A.6. Akustische Eigenvektoren irregulärer Kavitäten	111
Literaturverzeichnis	115

Nomenklatur

Dieses Verzeichnis gibt einen Überblick über die verwendeten Formelzeichen und Symbole. Dabei werden die nachfolgenden Konventionen verwendet. Skalare sind durch dünn gedruckte kursive Buchstaben gekennzeichnet, z.B. E , ω . Kleine fett gedruckte Buchstaben bezeichnen Vektoren, z.B. \mathbf{p} , $\boldsymbol{\phi}$. Matrizen werden durch große fett gedruckte Buchstaben dargestellt, z.B. \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Phi}$. Klein gedruckte tiefgestellte Indizes bezeichnen Laufindizes, z.B. u_j , σ_k . Dagegen werden groß gedruckte Indizes zur Unterscheidung verwendet, beispielsweise bezeichnen \mathbf{K}_F und \mathbf{K}_S die Steifigkeitsmatrix von Fluid und Struktur.

Symbole

$\mathbf{0}$	Nullmatrix
\mathcal{A}	Systemmatrix eines ZRM
\mathbf{B}	Modale Kopplungsmatrix
\mathcal{B}	Eingangsmatrix eines ZRM
$B_{j,i}$	Modaler Kopplungsfaktor der j -ten Fluid- und i -ten Struktureigenform
\mathcal{C}	Ausgangsmatrix eines ZRM
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathcal{C}_E	Erweiterte Ausgangsmatrix eines ZRM
\mathcal{C}_F	Akustische Dämpfungsmatrix
\mathcal{C}_S	Strukturelle Dämpfungsmatrix
$\check{\mathcal{C}}$	Dämpfungsmatrix in modalen Koordinaten
D	Biegesteifigkeit
\mathcal{D}	Durchgangsmatrix eines ZRM
\mathcal{D}_E	Erweiterte Durchgangsmatrix eines ZRM
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
E	E-Modul
E_P	Akustische potentielle Energie
F_S	Abtastfrequenz
\mathbf{G}	ZRM der Sekundärstrecke
\mathbf{G}_E	ZRM der erweiterten Strecke
\mathcal{G}	GREEN'sche Funktion
$J_{\hat{m}}$	\hat{m} -te BESSELFunktion erster Art
\mathcal{K}	Reglermodell
\mathbf{K}_F	Akustische Steifigkeitsmatrix

\mathbf{K}_{FS}	Gekoppelte struktur-akustische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_S	Strukturelle Steifigkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}$	Steifigkeitsmatrix in modalen Koordinaten
L_X	Länge in \bar{x} -Richtung
L_Y	Länge in \bar{y} -Richtung
L_Z	Länge in \bar{z} -Richtung
\mathbf{M}_F	Akustische Massematrix
\mathbf{M}_{FS}	Gekoppelte struktur-akustische Massematrix
\mathbf{M}_S	Strukturelle Massematrix
$\tilde{\mathbf{M}}$	Massematrix in modalen Koordinaten
\mathbb{N}	Menge der positiven natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null
O_R	Schallharte Fluidoberfläche
O_S	Strukturoberfläche
\mathbf{P}	Generalisiertes Streckenmodell
Q	Akustische Quellstärke
R	Zylinderradius
\mathcal{R}	Transfermatrix der Schallstrahlungsfilter
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbf{S}	Sensitivität
S_j	Filterfunktion von Quadratwurzel der j -ten Schalleinstrahlungseffizienz
T	Abtastintervall
\mathbf{T}_{ZW}	Gewichtetes Streckenmodell
V_F	Fluidvolumen
\mathbf{W}_j	Wichtungsfaktor
$Z_{j,i}$	Modaler Impedanzfaktor der j -ten Fluid- und i -ten Struktureigenform
\mathbf{Z}	Modale Impedanzmatrix
c_F	Schallgeschwindigkeit im Fluid
\mathbf{d}	Störgrößenvektor
\mathbf{e}	Fehlergrößenvektor
f	Kontinuierlicher Frequenzparameter
\mathbf{f}_F	Akustischer Kraftanregungsvektor
\mathbf{f}_S	Strukturelle Kraftanregungsvektor
$\tilde{\mathbf{f}}$	Modaler Kraftanregungsvektor
h	Strukturdicke
i, j, k, l, m, n, u, v	Laufindizes
j	Imaginäre Einheit
k_F	Anzahl der akustischen Knoten
k_S	Anzahl der strukturellen Freiheitsgrade

$\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}, \hat{u}, \hat{v}$	Laufindizes im ZYLINDERMODELL
\mathbf{n}	Normalenvektor auf der Struktur
n_F	Anzahl der Fluidmoden
n_S	Anzahl der Strukturmoden
n_U	Anzahl der Ausgangsgrößen
n_X	Anzahl der Zustände
n_Y	Anzahl der Eingangsgrößen
p	Komplexe Schalldruckamplitude
\bar{p}	Momentanwert des Schalldrucks
\mathbf{p}	Vektor der Performance-Ausgänge
\mathbf{p}	Vektor der Schalldrücke
\mathbf{q}_F	Vektor der akustischen modalen Freiheitsgrade
$q_{F,j}$	j -ter akustischer modaler Freiheitsgrad
$q_{S,i}$	i -ter struktureller modaler Verschiebungsfreiheitsgrad
\mathbf{q}_S	Vektor der strukturellen modalen Verschiebungsfreiheitsgrade
$\bar{q}_{S,i}$	i -ter struktureller modaler Schnellefreiheitsgrad
$\bar{\mathbf{q}}_S$	Vektor der strukturellen modalen Schnellefreiheitsgrade
\mathbf{r}	Führungsgrößenvektor
\bar{r}	Radialkoordinate im zylindrischen Koordinatensystem
$\bar{\mathbf{r}}_0$	Koordinatenvektor akustischer Quellen
$\bar{\mathbf{r}}_F$	Koordinatenvektor im Fluid
$\bar{\mathbf{r}}_S$	Koordinatenvektor auf der Struktur
s_j	Schalleinstrahlungseffizienz mit Index j
t	Kontinuierlicher Zeitparameter
\mathbf{u}	Stellgrößenvektor
\mathbf{u}	Vektor der Strukturauslenkungen
u_j	Schalleinstrahlungsmode mit Index j
\mathbf{u}_j	j -te Schalleinstrahlungsmode in vektorieller Form
\mathbf{v}	Vektor der Strukturschnellen
v_N	Normale Komponente der Strukturschnelle
\mathbf{w}	Eingang des gewichteten Streckenmodells
\bar{x}	Abszisse im kartesischen Koordinatensystem
\mathbf{x}	Zustandsvektor
\bar{y}	Ordinate im kartesischen Koordinatensystem
\mathbf{y}	Vektor der Sensorausgänge
\mathbf{y}_E	Vektor der erweiterten Schnelleausgänge
\bar{z}	Applikate im kartesischen sowie zylindrischen Koordinatensystem
\mathbf{z}	Ausgang des gewichteten Streckenmodells
z	Zeitdiskrete LAPLACE-Variable

Γ	Diagonalmatrix der Volumennormalisierungsfaktoren
Γ_j	Volumennormalisierungsfaktor der j -ten akustische Eigenform
$\tilde{\Pi}$	Modale Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung
Π	Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung
Φ	Akustische Eigenvektormatrix
Φ_j	j -te akustische Eigenform
Ψ	Strukturelle Eigenvektormatrix
Ψ_C	Matrix der Rechtseigenvektoren des gekoppelten Gleichungssystems
$\hat{\Psi}_C$	Matrix der Linkseigenvektoren des gekoppelten Gleichungssystems
Ψ_i	i -te strukturelle Eigenform
Σ	Diagonalmatrix der Singulärwerte
Y	Matrix der Linkssingulärvektoren
\tilde{Y}	Matrix der Linkssingulärvektoren in modalen Koordinaten
E	Matrix der Rechtssingulärvektoren
δ	DIRAC'sche Delta-Funktion
γ	Obere Schranke der \mathcal{H}_∞ -Norm
$\gamma_{k,m}$	Parallelitätsindex des k -ten und m -ten Singulärvektors
κ	Wellenzahl
κ_j	Resonanzwellenzahl mit Index j
λ_C	Indikator für Kopplungsstärke
$\mu_{k,m}$	Logarithmischer Fehler von Parallelitätsindex des k -ten und m -ten Singulärvektors
μ	Querkontraktionszahl
$\mu_{k,j}$	Normalisiertes Skalarprodukt der k -ten und j -ten Eigenform
ν	Parameter der diskreten Zeitabtastung
ω	Kontinuierlicher Kreisfrequenzparameter
ω_j	Eigenkreisfrequenz der j -ten akustischen Eigenform
$\tilde{\Phi}$	Auf die Interaktionsfläche reduzierte, akustische Eigenvektormatrix
$\hat{\psi}_{C,l}$	l -ter Linkseigenvektor des gekoppelten Gleichungssystems
$\psi_{C,l}$	l -ter Rechtseigenvektor des gekoppelten Gleichungssystems
ρ_S	Strukturdichte
ρ_F	Fluiddichte
σ_k	k -ter Singulärwert
$\bar{\sigma}_k$	Sortierter, k -ter Singulärwert
σ_k	Singulärwert mit Index k
θ	Winkelkoordinate im zylindrischen Koordinatensystem
$\tau_{\hat{m},\hat{n}}$	\hat{n} -ter Extremwert der \hat{m} -ten BESSELFunktion
v_k	Singulärvektor mit Index k
\tilde{v}_k	Modaler Singulärvektor mit Index k

- ζ_F Viskoser, modaler Dämpfungsgrad einer Kavität
 ζ_j Viskoser, modaler Dämpfungsgrad der j -ten akustischen Eigenform
 ζ_S Viskoser, modaler Dämpfungsgrad einer Struktur

Operatoren

- $|\cdot|$ Betrag
 $\log(\cdot)$ Dekadischer Logarithmus
 \in Element von
 $\|\cdot\|_F$ FROBENIUS-Norm
 $f[\cdot]$ Funktion einer diskreten Veränderlichen
 $f(\cdot)$ Funktion einer kontinuierlichen Veränderlichen
 \forall für alle
 $\{\cdot\}^H$ Hermitischer Operator
 $\|\cdot\|_\infty$ \mathcal{H}_∞ -Norm
 $\{\cdot\}^*$ Komplexe Konjugation
 ∇^2 LAPLACE-Operator
 $\exp(\cdot)$ Natürliche Exponentialfunktion
 $\frac{\partial f}{\partial(\cdot)}$ Partielle Ableitung nach (\cdot)
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt
 $\sup(\cdot)$ Supremum
 $\{\cdot\}^T$ Transposition
 $F_L(\cdot, \cdot)$ Untere lineare Fraktionaldarstellung

Abkürzungen

- ANC Active Noise Control
 ANSYS[®] Finite-Elemente-Software der Firma Ansys, Inc.
 ANVC Active Noise and Vibration Control
 APE Akustische Potentielle Energie
 ASAC Active Structural Acoustic Control
 AVC Active Vibration Control
 FEM Finite-Elemente-Methode
 IIE Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung
 LFR Linear Fractional Representation
 LSV Laser Scanning Vibrometer
 MATLAB[®] Matrixbasiertes Berechnungsprogramm der Firma The MathWorks, Inc.
 MIMO Multiple Input Multiple Output
 TBL Turbulent Boundary Layer
 ZRM Zustandsraummodell

1. Herausforderungen dünnwandiger Flächenstrukturen

Den stetig steigenden Anforderungen an das Strukturverhalten in technischen Anwendungen, im Speziellen Gewicht, Festigkeit oder Steifigkeit, begegnen viele Industriezweige mit dem Einsatz dünnwandiger Flächenstrukturen. Diese vereinen eine hohe Steifigkeit mit einem vergleichsweise geringen Eigengewicht. Auch der zunehmende Einsatz von Leichtbau- und Verbundwerkstoffen trägt zu dieser Entwicklung bei. Derartige vibrationsanfällige Strukturen können die Ursache in der Entstehung von unerwünschtem Luftschall sein. Umgekehrt kann auch Luftschall die Quelle von strukturellen Vibrationen sein. Da auf diese Weise entstehender Lärm insbesondere auch negative Auswirkungen für die Gesundheit des Menschen birgt, kommt der Schwingungs- und Schallstrahlungsreduktion eine hohe Bedeutung zu.

Das Schalldämmmaß flächiger Strukturen ist im Wesentlichen durch deren Masse bestimmt, weswegen Leichtbaustrukturen in der Regel eine niedrige Schalldämmung aufweisen. Passive Methoden zur Schwingungs- und Schallstrahlungsreduktion machen sich diesen Zusammenhang durch eine gezielte Einbringung von Masse zu Nutze. Da dieser Ansatz der ursprünglich formulierten Anforderung nach Leichtbaustrukturen widerspricht, rücken zunehmend aktive Methoden zur Schwingungs- und Schallstrahlungsreduktion in das Interesse von Forschung und Industrie. Konträr zu den passiven Methoden bieten diese insbesondere im niederfrequenten Schallbereich (< 500 Hz) ein hohes Potential zur Erhöhung der Schalldämmung. Ansätze zur aktiven Struktur-Akustik-Regelung (ASAC, engl.: *active structural acoustic control*) beruhen in der Regel auf Größen, welche einen Energietransport in das akustische Fernfeld beschreiben. Tatsächlich steht die strukturelle Vibration in vielen Anwendungsgebieten wie beispielsweise der Schalleinstrahlung in Flugzeugkabine oder Fahrgastzelle jedoch in Interaktion mit dem umschlossenen akustischen Medium. Es findet dabei ein Energieaustausch statt, welcher im verwendeten Reglergesetz Berücksichtigung finden muss. In der Vibroakustik wird einer Interaktion der Teilsysteme Struktur und Fluid in der Regel in Form einer Interaktion von entkoppelten Eigenvektoren (auch Moden genannt) Rechnung getragen. Demnach konzentriert sich die Energie im gekoppelten System entweder in der Struktur oder im akustischen Medium, nicht jedoch in beiden Systemen gleichzeitig. Es lassen sich sogenannte Schalleinstrahlungsmoden der Struktur ableiten. Diese stellen orthogonale Schwingungsverteilungen der Struktur dergestalt dar, dass ihr Beitrag zum akustischen Feld im Innenraum voneinander entkoppelt ist. Eine aktive Reduktion der Amplituden dieser Schalleinstrahlungsmoden führt damit zu einer Minderung der Schalleinstrahlung in den Innenraum. Es stellt sich dabei die Frage, ob diese Schalleinstrahlungsmoden zu einer Reduktion der Modellordnung eines Reglers geeignet sind. Letzteres ist notwendig, da die Echtzeitfähigkeit des Reglers eine wesentliche Anforderung an ein aktives System darstellt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im nachfolgenden Kapitel 2 wird ein Überblick über die Hypothesen und die Zielsetzung der Arbeit gegeben. Anschließend wird in Kapitel 3 der aktuelle Stand der Forschung mit Bezug auf die Forschungsfragen reflektiert. Nachdem der Forschungsbedarf herausgestellt ist, widmen sich die Kapitel 4 bis 7 der Bearbeitung der offenen Fragestellungen. Abschließend gibt Kapitel 8 eine Zusammenfassung und zeigt Perspektiven der aktiven Maßnahmen zur Reduktion der Schalleinstrahlung auf.

2. Zielsetzung und Hypothesen

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die aktive Unterdrückung der strukturbedingten Schalleinstrahlung in abgeschlossene Innenräume, auch Kavitäten genannt. Das Transmissionsverhalten externer Störquellen über eine flächige Struktur in eine Kavität, schematisch dargestellt in Abbildung 2.1, ist dabei von einer Interaktion der Teilsysteme Struktur und Fluid geprägt. Dabei bewirkt eine Anregung durch eine strukturelle Kraft oder akustischen Luftschall eine Schwingungsantwort der Struktur in Form von Körperschall. In Fahr- oder Flugzeugen resultieren derartige Kraftanregungen beispielsweise durch Unwuchten im Antriebsstrang und Luftschallanregungen durch die Umströmung. Der Körperschall in der Struktur regt seinerseits das interne Fluid zu Schwingungen an, welche sich aufgrund von Reflektionen an den Kavitätsrändern ortsabhängig konstruktiv bzw. destruktiv überlagern. Hierbei findet ein Austausch von Schwingungsenergie zwischen den in Kontakt stehenden Teilsystemen Struktur und Fluid statt. Der Leitgedanke dieser Arbeit ist, dass sich eine globale aktive Beruhigung des Teilsystems Fluid bei Schwingungserregung der benachbarten Struktur experimentell nachweisen lässt. Diese soll auch bei stochastischer Anregung möglich sein, welche sich beispielsweise bei einer turbulenten Umströmung ergibt.

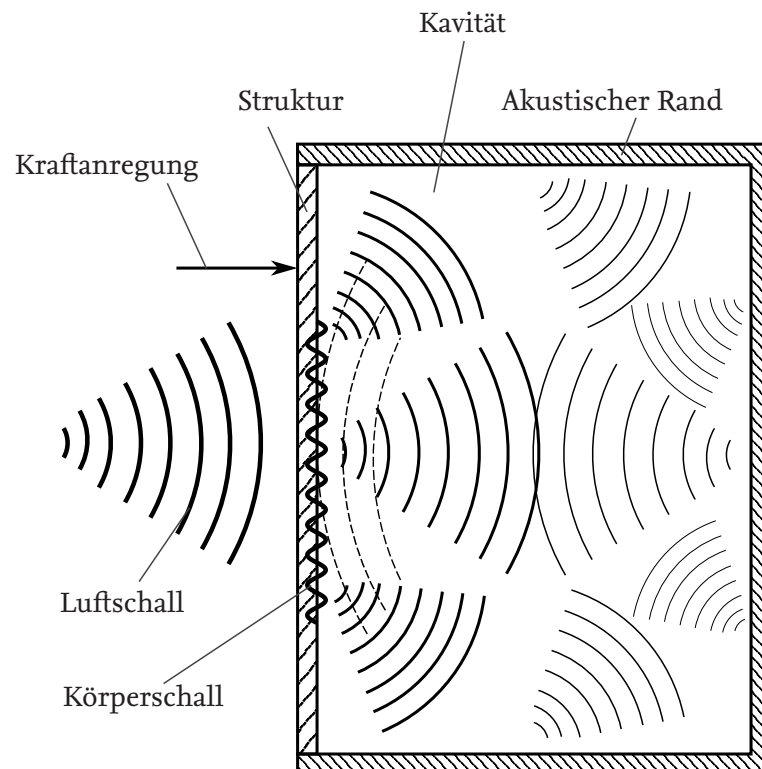


Abbildung 2.1.: Transmission akustischer sowie struktureller Störquellen über flächige Struktur in die Kavität und Interaktion der Teilsysteme

Zu dem Zweck der Reduktion der Schalleinstrahlung in die Kavität werden strukturelle Aktuatoren und Sensoren auf der Bauteiloberfläche verwendet. Diese Energiewandler sollen mit einem entsprechenden Regelungsgesetz eine Anpassung der Strukturschwingung bewirken, sodass eine Reduktion der Schalldrücke im gesamten Fluidvolumen erreicht wird. Um die strukturbedingte Schalleinstrahlung mit struktureller Sensorik zu reduzieren, reicht eine alleinige Regelung der normalen Schwingungskomponente (Strukturschnelle) auf der Struktur an einigen lokalen Stellen nicht aus. Letztere kann eine Verstärkung der Schwingung abseits der Beruhigung und damit der Schalldrücke im akustischen Fluid zur Folge haben. Vielmehr muss die von der Frequenz abhängige Schwingungscharakteristik (Dynamik) der Fluidkavität im Regelungsgesetz Berücksichtigung finden, um die Schalldrücke in der gesamten Kavität zu reduzieren. Dies lässt sich durch eine Gewichtung der an den Sensoren gemessenen Strukturschnellen basierend auf Schalleinstrahlungsmoden erreichen. Die Schalleinstrahlungsmoden stellen Eigenvektoren der struktur-akustischen Impedanz dar, welche die Strukturschnellen zur akustischen Energie in der Fluidkavität in Beziehung setzt. Diese Impedanz kann als Widerstand verstanden werden, welchen das akustische Fluid der Anregung durch die Strukturschwingung entgegensetzt. Eine Minimierung der Amplituden der Schalleinstrahlungsmoden führt dementsprechend zu einer globalen Reduktion der Schalleinstrahlung in die Kavität.

Das Aufstellen eines geeigneten Regelungsgesetzes, welches die geforderten Anpassungen veranlasst, geschieht auf Grundlage eines mathematischen Modells der Regelstrecke. Letztere bildet das physikalische Übertragungsverhalten von den Aktuatoren zu den Sensoren ab. Da derzeitige Systeme zur Signalverarbeitung Begrenzungen hinsichtlich der Modellordnung aufweisen, ist die Eigenschaft der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden von einiger Signifikanz, da damit der Berechnungsaufwand reduziert werden kann. Zielsetzung dieser Arbeit ist es, diese Frequenzunabhängigkeit mit analytischen und numerischen Methodiken zu beweisen sowie einen experimentellen Nachweis der aktiven Reduktion der Schalleinstrahlung durch Nutzung der frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden zu erbringen.

Die nachfolgenden Hypothesen umreißen die Fragestellungen, welche mit dieser Arbeit untersucht werden sollen:

Forschungshypothese Die strukturbedingte Schalleinstrahlung in Kavitäten kann in Form von frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden formuliert werden. Diese Frequenzunabhängigkeit ermöglicht eine Reduktion der Modellordnung von Reglern, welche eine aktive Minimierung der Schalleinstrahlung in Innenräume unter experimentellen Bedingungen zum Ziel hat.

Arbeitshypothese 1 Die strukturellen Schalleinstrahlungsmoden entsprechen einer Untermenge der entkoppelten akustischen Kavitätsmoden, welche orthogonal auf der Interaktionsfläche sind. Da die Kavitätsmoden unabhängig von der Frequenz sind, gilt dies auch für die Schalleinstrahlungsmoden.

Arbeitshypothese 2 Die akustische Energie im Innenraum lässt sich durch räumliche Diskretisierung in Abhängigkeit der strukturellen Oberflächenschnelle darstellen. Die aus dieser in Matrixschreibweise vorliegenden Impedanzbeziehung ab-

geleiteten Eigenvektoren entsprechen den analytisch berechneten Schalleinstrahlungsmoden.

Arbeitshypothese 3 Die Impedanzbeziehung lässt sich anhand einer Modenkopplung der Teilsysteme Struktur und Fluid berechnen. Aus der modalen Beschreibung abgeleitete Eigenvektoren konvergieren mit zunehmender Modenanzahl gegen die räumlich diskretisierten.

Arbeitshypothese 4 Die strukturelle Schalleinstrahlung in Kavitäten kann mit aktiven Maßnahmen breitbandig und global reduziert werden. Die globale Unterdrückung unter stochastischer Anregung lässt sich experimentell belegen.

Das nachfolgende Kapitel reflektiert den Stand der Wissenschaft in Bezug auf die vorliegenden Forschungsfragen.

3. Stand des Wissens zur Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten

Dieses Kapitel beschreibt den aktuellen Stand der Forschung bezüglich der zuvor formulierten Forschungsfragen. Dabei leitet sich die Aufteilung des Kapitels gemäß der im vorangegangenen Kapitel aufgestellten Hypothesen ab. Um diese greifbarer zu machen, erfolgen zunächst einige Definitionen der in dieser Arbeit verwendeten Begrifflichkeiten. Da die **Forschungshypothese** insbesondere auf die experimentelle Umsetzbarkeit abzielt, wird anschließend ein Überblick über praktische Implementierungen bezüglich der aktiven Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten gegeben. Im Anschluss wird gesichertes und ungesichertes Wissen über die Schalleinstrahlungsmoden gemäß **Arbeitshypothese 1** vorgestellt. Dabei wird herausgestellt, dass eine gekoppelte harmonische Formulierung gemäß **Arbeitshypothese 2** bisher nicht in der Literatur dokumentiert ist. Bezüglich **Arbeitshypothese 3** werden anschließend Verfahren zur Reduktion der Modellordnung gekoppelter Systeme motiviert und vorgestellt. Weiterhin wird ein Überblick über Ansätze zur Reduktion von Modellordnung und Sensoranzahl gegeben, da die Implementierbarkeit der zu erarbeitenden Regelungsgesetze Anspruch von **Arbeitshypothese 4** darstellt. Abschließend werden die wesentlichen Erkenntnisse aus der Literatur mit Bezug auf die aufgestellten Hypothesen zusammengefasst.

3.1. Begriffsdefinitionen

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über verwendete Begrifflichkeiten für das Problem der akustischen Innenraumeinstrahlung. Letzteres ist in Abbildung 3.1 schematisch abgebildet. Dabei ist ein Fluidvolumen V_F von strukturellen Rändern umgeben. An der Oberfläche O_S befindet sich eine schwingungsfähig gelagerte Struktur. Es tritt eine Interaktion zwischen der schwingenden Struktur und dem akustischen Fluid auf. Die Druckverteilung im Fluid entlang der Interaktionsfläche O_S stellt eine mechanische Flächenlast gegenüber der Struktur dar. Des Weiteren muss die Kontinuität der normalen Struktur- sowie Fluidschnelle entlang der Interaktionsfläche O_S gewährleistet sein, wonach sich die normalen Schnellekomponenten von Fluid und Struktur einander entsprechen [Pur08]. Die Oberfläche O_R stellt hingegen einen schallharten Rand dar, an welchem sich die normale Schnellekomponente des Fluids zu Null ergibt.

3.1.1. Akustische potentielle Energie

Die in dieser Arbeit betrachtete Zielgröße für die Reduktion der Schalleinstrahlung in ein allseitig abgeschlossenes, fluid-gefülltes Volumen V_F ist das zeitliche Mittel der frequenzabhängigen akustischen potentiellen Energie (APE). Die APE berechnet sich aus dem Volumenintegral der fre-

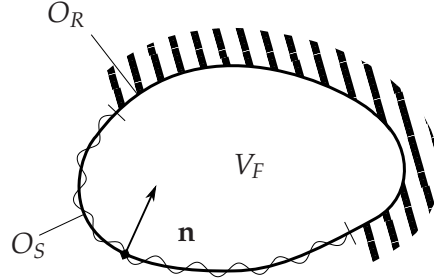


Abbildung 3.1.: Problem der akustischen Innenraumeinstrahlung

quenzabhängigen Amplitudenquadrate des Schalldrucks $p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F c_F^2} \int_{V_F} |p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)|^2 dV, \quad (3.1)$$

mit der Dichte ρ_F des akustischen Mediums sowie der Schallgeschwindigkeit c_F [NE92]. Der Koordinatenvektor $\bar{\mathbf{r}}_F$ beschreibt Punkte in der akustischen Domäne V_F und ω die Kreisfrequenz der zeit-harmonischen Anregung. Diese APE soll nachfolgend in Abhängigkeit von der normalen strukturellen Schwingungskomponente auf O_S beschrieben werden.

3.1.2. Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung

Die Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung (IIE) $\mathbf{\Pi}(\omega)$ beschreibt den frequenzabhängigen Widerstand eines fluid-gefüllten Volumens V_F gegen eine strukturelle Anregung an dessen Rand O_S . Die Impedanz kann resultierend aus einer räumlichen Diskretisierung von Struktur und Fluid in einer Matrixdarstellung formuliert werden, wobei der Vektor der normalen, frequenzabhängigen Strukturschnelle zu $\mathbf{v}(\omega)$ geschrieben wird. Die IIE stellt einen Zusammenhang zwischen einer Energiegröße, in diesem Fall der APE, und dem Quadrat der Strukturschnelle $\mathbf{v}(\omega)$ auf O_S zu

$$E_P(\omega) = \mathbf{v}^H(\omega) \mathbf{\Pi}(\omega) \mathbf{v}(\omega) \quad (3.2)$$

her. Es sei im Vorgriff erwähnt, dass die Beschreibung der IIE in der Literatur üblicherweise in Abhängigkeit der modalen Schnelleamplitude $\bar{\mathbf{q}}_S(\omega)$ als

$$E_P(\omega) = \bar{\mathbf{q}}_S^H(\omega) \tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega) \bar{\mathbf{q}}_S(\omega) \quad (3.3)$$

vorliegt. Dabei erfolgt die als Assemblierung bezeichnete Berechnung der Matrixeinträge durch die Kalkulation von Kopplungsfaktoren der entkoppelten Moden. Zusätzlich zur räumlichen Diskretisierung beinhaltet diese Formulierung Fehler durch die Beschreibung der Modeninteraktion der Teilsysteme Fluid und Struktur. Dieser Ansatz der modalen Interaktion wird in Kapitel 3.4 im Detail diskutiert.

Die IIE wird in Analogie zum Fehlerkriterium in der Regelungstechnik in einigen Studien [CH98, Joh04] auch Fehlergewichtungsmatrix (engl.: *error weighting matrix*) genannt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird der Term IIE verwendet. Physikalisch betrachtet besitzt diese die Einheit einer spezifischen Impedanz multipliziert mit Fläche und Zeit ($\text{Pa s}^2 \text{m}$).

3.1.3. Strukturelle Schalleinstrahlungsmoden

Die Schalleinstrahlungsmoden beschreiben die orthogonalen Schnelleverteilungen einer Struktur in der Form, dass ihr Beitrag zur APE in der Kavität voneinander entkoppelt ist. In der Literatur werden diese stets durch iterative Dekompositionsverfahren (bspw. Singulärwertzerlegung) der modal assemblierten IIE $\tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega)$ berechnet. Unter der Voraussetzung, dass die IIE reell und symmetrisch ist, entspricht die Singulärwertzerlegung einer Eigenwertzerlegung und lässt sich zu

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega) = \tilde{\mathbf{Y}}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\tilde{\mathbf{Y}}^T(\omega) \quad (3.4)$$

durchführen. Dabei enthält die Diagonalmatrix $\mathbf{\Sigma}(\omega)$ die Singulärwerte σ_k auf der Hauptdiagonalen in absteigender Amplitude. Die Spalten der Matrix $\tilde{\mathbf{Y}}$ enthalten die Singulärvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_k$ in modalen Koordinaten. Letztere werden in der Literatur durch Multiplikation mit der strukturellen Modalmatrix in harmonische Koordinaten überführt und als Schalleinstrahlungsmoden (bzw. *principle velocity patterns* [Joh04]) bezeichnet. In dieser Arbeit sollen die Schalleinstrahlungsmoden darüber hinaus in einer analytischen Formulierung berechnet und mit den numerisch berechneten Singulärvektoren verglichen werden. Aus diesem Grund werden die Schalleinstrahlungsmoden aus der analytischen Definition gemäß **Arbeitshypothese 1** in der vorliegenden Arbeit begrifflich von den Singulärvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_k$ der IIE getrennt verstanden.

Ein wesentlicher Vorteil der Singulärwertzerlegung besteht darin, dass sie die bestmögliche Niedrig-rangapproximation der Ursprungsmatrix $\tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega)$ erlaubt [DR06, S. 152f.]. Es ist bei der Zerlegung einer $(K \times K)$ -Matrix möglich, eine reduzierte Anzahl $A \ll K$ Singulärwerte zu behalten, während jene Singulärwerte mit kleiner Amplitude vernachlässigt werden. Zu diesem Zweck werden in $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)$ alle Spalten mit Index größer als A und in $\mathbf{\Sigma}(\omega)$ die Einträge auf der Hauptdiagonalen oberhalb von A entfernt. Die zu Grunde liegende Singulärwertzerlegung der $(K \times K)$ -Matrix $\tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega)$ ist dabei in einem Frequenzschritt zu

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,A} & \cdots & v_{1,K} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ v_{K,1} & \cdots & v_{K,A} & \cdots & v_{K,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_{A,A} & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \sigma_{K,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{K,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,A} & \cdots & v_{K,A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,K} & \cdots & v_{K,K} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

anschaulich gegeben. Dabei gilt für die Singulärwerte $\sigma_{1,1} > \sigma_{A,A} \gg \sigma_{K,K}$. Die rekonstruierte Matrix $\tilde{\mathbf{\Pi}}_A$ minimiert [SKKR02] zu

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_A = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ v_{K,1} & \cdots & v_{K,A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_{A,A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{A,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,A} & \cdots & v_{K,A} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

die FROBENIUS-Norm $\|\tilde{\mathbf{\Pi}} - \tilde{\mathbf{\Pi}}_A\|_F$ für alle Matrizen vom Rang A [DR06, S. 49.]. Sie entspricht damit der genauesten Approximation der Ursprungsmatrix $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ durch eine Matrix mit Rang A . Unter

Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit von $\tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega)$ lässt sich die Rekonstruktion zu

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_A(\omega) = \tilde{\mathbf{Y}}_A(\omega)\mathbf{\Sigma}_A(\omega)\tilde{\mathbf{Y}}_A^T(\omega) \quad (3.7)$$

schreiben. Diese Niedrigrangapproximation lässt sich für die Singulärvektoren der IIE verwenden, da in Schallabstrahlungsphänomenen häufig in bestimmten Frequenzbereichen eine begrenzte Anzahl von Singulärwerten dominant sind. Eine weitreichendere Bedeutsamkeit würde den Schalleinstrahlungsmoden darüber hinaus zukommen, wenn sich eine begrenzte Anzahl von ihnen für eine Niedrigrangapproximation über den gesamten Frequenzbereich nutzen ließe. Als Voraussetzung dafür müssten die Schalleinstrahlungsmoden eine Unabhängigkeit von der Frequenz aufweisen.

3.2. Praktische Implementierungen der Schalleinstrahlungsreduktion in Kavitäten

Da sich die **Forschungshypothese** auf die experimentelle Nachweisbarkeit der globalen Reduktion der Schalleinstrahlung bezieht, legt dieser Abschnitt besonderes Augenmerk auf praktische Implementierungen. Dazu werden zunächst gängige Ansätze der aktiven Schallstrahlungsreduktion vorgestellt und voneinander abgegrenzt. Die Einordnung erfolgt anhand der verwendeten Aktuatorik sowie Sensorik. Anspruch der vorliegenden Arbeit ist die alleinige Verwendung von struktureseitigen Energiewandlern und einer daraus resultierenden Reduktion der in Kapitel 3.1.1 definierten APE.

Fachliteratur [FG07] zum Thema ASAC grenzt diesen Ansatz in der direkten Beeinflussung einer Leistungs- bzw. Energiegröße von weiteren aktiven Lärminderungsmaßnahmen ab:

- ANC: Mit der aktiven Lärmkontrolle (engl.: *active noise control*) wird eine Unterdrückung akustischer Feldgrößen (bspw. Schalldruck, Schallgradient) unter Verwendung akustischer Sensorik (bspw. Mikrofone) sowie Aktuatorik (bspw. Lautsprecher) bezweckt.
- AVC: Die aktive Vibrationskontrolle (engl.: *active vibration control*) hat die Beeinflussung struktureller Schwingungsgrößen (bspw. Beschleunigung, Vibrationsschnelle) mithilfe struktureller Sensorik (bspw. Beschleunigungssensoren) und Aktuatorik (bspw. Piezokeramiken, elektrodynamische Körperschallwandler) zum Ziel.
- ANVC: Auf eine Unterdrückung akustischer Feldgrößen unter Einsatz von struktureller Aktuatorik zielt dagegen die aktive Lärm- und Vibrationskontrolle (engl.: *active noise and vibration control*) ab.

Einen Überblick über praktische Implementierungen aktiver Kontrolle der Schalleinstrahlung in Kavitäten gibt Tabelle 3.1. Diese Studien haben gemein, dass sie die aktive Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten zum Ziel haben. Dabei sind die in den jeweiligen Studien verwendete Aktuatorik und Sensorik aufgelistet, mit welcher die Schalltransmission in Kavitäten unterschiedlicher Geometrien reduziert werden soll. Die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Regelkonzepte zielen auf die Unterdrückung von lokalen Größen ab. Aus diesem Grund genügen diese Studien nicht der in der **Forschungshypothese** postulierten globalen Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten. Sie sind nach der zuvor erfolgten Definition den Regelkonzepten ANC, AVC sowie ANVC zuzuordnen.

Tabelle 3.1.: Literatur zu experimentellen Untersuchungen der Regelung von struktureller Schalleinstrahlung in Kavitäten

Veröffentlichung	Aktuatorik	Fehlersensorik	Regelkonzept	Versuchsträger
SILCOX ET AL. [SLF90]	4 Lautsprecher bzw. 1-2 elektrodynamische Erreger	10 bzw. 1-2 Mikrofone	ANC, ANVC	Generische Zylinderschale mit eingeschlossenem Fluid
PAN ET AL. [PH91]	1 elektrodynamischer Erreger	1 Mikrofon	ANVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
FULLER ET AL. [FSHS92]	1-2 piezoelektrische Aktuatoren	1-2 Mikrofone	ANVC	Generische Zylinderschale (mit und ohne Boden)
BALACHANDRAN ET AL. [BSP96]	2 piezoelektrische Aktuatoren	1 Mikrofon	ANVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
PALUMBO ET AL. [PP97]	2-16 piezoelektrische Aktuatoren	18 Mikrofone	ANVC	Douglas DC-9 Hecksektion
PADULA ET AL. [PPK ⁺ 98]	4 piezoelektrische Aktuatoren, 14 piezoelektrische Aktuatoren	8 Mikrofone, 18 Mikrofone	ANVC, ANVC	Komposit-Zylinder, Douglas DC-9 Hecksektion
KIM ET AL. [KB99]	1 elektrodyn. Erreger bzw. Lautspr.	11 Mikrofone	ANC, ANVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
KIM ET AL. [KB00]	1 elektrodyn. Erreger bzw. Lautspr.	11 Mikrofone	ANC, ANVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
GREWAL ET AL. [GZL01]	6 piezoelektrische Aktuatoren	12 Beschleunigungssensoren, 3 Mikrofone	AVC, ANVC	Bombardier Dash-8
SONG ET AL. [SHLH03]	2 piezoelektrische Aktuatoren	2 piezoelektrische Sensoren	AVC	Modell einer PKW-Fahrgastzelle
AL-BASSYIOUNI ET AL. [ABB06]	1 piezoelektrischer Aktuator	1 Mikrofon	ANVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
LANE ET AL. [LJFC06]	1 bzw. 8 aktive Vibrationsabsorber	1 bzw. 12 Mikrofone	ANVC	Komposit-Zylinder
GRIFFIN ET AL. [GLL08]	1 Lautsprecher	1 Mikrofon	ANC	Trägerrakete
DE OLIVEIRA ET AL. [ODSS ⁺ 08, OJG ⁺ 09]	1 elektrodynamischer Erreger	1 Beschleunigungssensor	AVC	Modell einer PKW-Fahrgastzelle
WHITMER [Whi09]	5 elektrodynamische Erreger	5 bzw. 9 Beschleunigungssensoren	AVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
GRIFFIN ET AL. [GWA13]	6 elektrodynamische Erreger	12 Mikrofone	ANVC	Boeing 767 Hecksektion
JANDA [Jan14]	4 piezoelektrische Aktuatoren	5 Beschleunigungssensoren	AVC	Platte mit quaderförmiger Kavität
LI ET AL. [LWHQ15]	1 elektrodynamischer Erreger	1 Mikrofon bzw. Beschleunigungssensor	ANVC, AVC	Platte mit trapezförmiger Kavität

Von besonderer Relevanz für die Fragestellung der vorliegenden Arbeit ist darüber hinaus die Dissertation von CAZZOLATO [Caz99], weswegen dieser Arbeit eine ausführliche Beschreibung zukommt. In [Caz99] wird zum einen eine Sensierung im akustischen Fluid mithilfe von Energiedichtesensoren und zum anderen eine Gewichtung von struktureller Sensorik mit Schalleinstrahlungsmoden zur Beeinflussung einer globalen akustischen Größe untersucht. Es werden jeweils numerische sowie experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Die Energiedichte stellt eine Größe dar, deren aktive Reduktion einen größeren räumlichen Bereich beruhigt als beispielsweise ein lokaler Schalldruck. Dies gelingt durch die Einbeziehung einer zweiten Schalldruckmessung pro Raumrichtung und einer damit verbundenen Abschätzung des Schalldruckgradienten. Eine aktive Kontrolle der experimentell gemessenen Energiedichte kann somit zu einer Schallunterdrückung in einer Kavität führen, wenn die Netzdichte entsprechend fein gewählt wird. Die **Forschungshypothese** bezieht sich entgegen der akustischen Sensierung auf die Verwendung von strukturellen Oberflächensensoren, weswegen der zweite Teil von CAZZOLATOS Dissertation [Caz99] besonders relevant ist. Darin werden an einer gekrümmten Aluminiumschale mit einer angekoppelten quaderförmigen Luftkavität zunächst an einem numerischen Modell die Singulärvektoren und -werte der modal assemblierten IIE gemäß Kapitel 3.1.3 berechnet. Entgegen der in **Arbeitshypothese 1** postulierten Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden, sind die Singulärvektoren bei CAZZOLATO abhängig von der Frequenz. Als potentielle Fehlerquellen bei der Berechnung der IIE und der daraus resultierenden frequenzabhängigen Singulärvektoren kann auf eine geringe Anzahl an entkoppelten Eigenvektoren (100 Struktur- und 30 Fluidmoden) und eine unzulängliche Feinheit der Diskretisierung des numerischen Modells hingewiesen werden. Bereits die entkoppelten Eigenvektoren der Teilsysteme weisen gemäß [Caz99, Tab. A.2] Abweichungen der Volumennormalisierungsfaktoren bis 16,5 % gegenüber analytisch berechneten auf. Weiterhin wird das Kopplungsintegral durch [Caz99, Gl. 2.103] in eine Summenform gebracht. Um eine experimentelle Reduktion der APE in der Luftkavität mit struktureller Sensorik zu erhalten, werden die Singulärvektoren der IIE bei einer Normalisierungsfrequenz festgehalten. Dies führt jedoch dazu, dass bei einer aktiven Kontrolle einzelner Singulärvektoren abseits jener Normalisierungsfrequenz eine breitbandige Anhebung der APE erreicht wird. Diese Tatsache dokumentiert eine eindeutige Verletzung der Orthogonalität der strukturellen Schalleinstrahlungsmoden bezüglich der APE.

Weiterhin sollen in [CH97, Caz99] die in der numerischen Studie gewonnenen Erkenntnisse anhand einer experimentellen Untersuchung bestätigt werden. Dabei wird ein Sensierungskonzept der strukturellen Moden implementiert, bei welchem die Sensoren quasi-eindimensional entlang der Schalenmitte angeordnet sind. Dieses Sensorkonzept wird zum einen mit sieben diskreten Beschleunigungssensormessungen und zum anderen kontinuierlich mit geformten Polyvinylidenfluorid-Foliensensoren (kurz: PVDF) erreicht. Es werden die Beiträge der Strukturmoden zu den zwei ersten Singulärvektoren der IIE unabhängig voneinander sensiert und gesteuert. Die frequenzabhängige Gewichtung der Schalleinstrahlungseffizienzen wird mithilfe von Bandpassfiltern erreicht, deren Charakteristiken nicht vergleichend dargestellt werden. Ob eine fehlerhafte Frequenzcharakteristik dieser Bandpassfilter die Problematik der Anhebung der APE abseits der Normalisierungsfrequenz in experimentellen Anregungen weiter verschärfen kann, wird in [Caz99] nicht untersucht. Des Weiteren wird eine Steuerung frequenzweise unter monofrequenter Anregung untersucht und aus dieser anschließend eine breitbandige Charakteristik der Unterdrückung abgeleitet. Ein derartiger Zusammenhang zwischen monofrequenter und breitbandiger Unterdrückung kann

jedoch aufgrund von Kausalitäts- sowie Kohärenzbedingung der Sensorsignale nicht unmittelbar hergestellt werden [MH12, Mis14]. Wegen der fehlerbehafteten Sensorik, nicht orthogonalen Schalleinstrahlungsmoden sowie einem stark überschätzenden Reglergesetz, wird das aktive System von CAZZOLATO dem mit der **Forschungshypothese** geforderten globalen und breitbandig wirksamen Reduktionssystem nicht gerecht.

KIM und BRENNAN [KB00] untersuchen die aktive Kontrolle von harmonischer und stochastischer Schalltransmission in eine quaderförmige Kavität experimentell. Die APE im Fluid wird dabei als Zielfunktion der aktiven Unterdrückung mithilfe von diskreten Druckmessungen im Fluid quantifiziert. Dabei werden zehn Mikrofone in eindimensionaler Reihe angeordnet. Abweichend zu den in Tabelle 3.1 dokumentierten experimentellen Untersuchungen wird dabei nicht die Kontrolle der lokalen Mikrofonausgänge bezweckt, sondern die APE als Summe der Quadrate der Schalldruckamplituden berechnet sowie deren Unterdrückung abgeschätzt. Die Summierung von Schalldruckquadraten diskreter Mikrofonmessungen über die Kavität ist dabei nicht mit der Quantifizierung über umgebende Strukturschnellen gleichzusetzen. Da insbesondere mit einer eindimensionalen Reihe von Mikrofonen nur eine beschränkte Anzahl von akustischen Eigenformen detektiert werden kann, ist damit die Sensierung auf resonante Effekte in einer Raumrichtung beschränkt. Die aktive Unterdrückung ist aus akustischer Sicht nur unter der Voraussetzung sehr langwelliger Wellenanteile erfolgversprechend. Dies liegt in der Verwendung diskreter Sensorik begründet, wobei abseits der Mikrofonpositionen bei kurzwelligen akustischen Wellen eine Erhöhung der Schalldrücke resultieren kann. Darüber hinaus erfolgt die Schätzung und aktive Unterdrückung der APE nicht in Echtzeit. Es werden lediglich die Übertragungsfunktionen gemessen und anschließend die Regelkräfte unter der Annahme einer Optimalsteuerung berechnet. Da die Kausalitätsbedingung bei der Steuerung vernachlässigt wird, kann die breitbandig dargestellte Störgrößenunterdrückung nicht für spektral weiße Anregungssignale erwartet werden [Mis14]. Eine globale, breitbandige Beruhigung der akustischen Kavität gemäß der **Forschungshypothese** wird damit nicht gezeigt.

Einen generalisierten Ansatz zur Sensierung der orthogonalen Anteile am globalen Fehlerkriterium der APE untersuchen HILL ET AL. in theoretischer [HTS09] sowie experimenteller Form [HTI12]. Dabei wird das Ziel verfolgt, die Messung und aktive Unterdrückung der APE ohne Kenntnis der Struktur dynamik durchzuführen. Zu diesem Zweck werden auf der Oberfläche einer ebenen, rechteckigen Platte 16 Beschleunigungssensoren angebracht und die Transferfunktion zu direkt darüber angebrachten Mikrofonen im Inneren der Kavität abgeschätzt. Diesem Vorgehen liegt die Annahme zu Grunde, dass jede diskrete Oberflächenmessung auf der Struktur einem akustischen Elementarstrahler entspricht. Zur Schätzung der Transferfunktionen wird die GREEN'sche Funktion der allseitig geschlossenen Kavität verwendet. Aus den Transferfunktionen von den Beschleunigungssensoren zu den Mikrofonen werden anschließend durch eine orthonormale Transformation (Singularwertzerlegung) die orthogonalen Elementarstrahlerverteilungen berechnet. Die daraus resultierenden frequenzabhängigen Singularwerte in [HTS09, Abb. 1] werden anhand der Singularvektoren über der Frequenz sortiert. Die Singularwerte verlaufen nicht kontinuierlich über der Frequenz, was eine Verletzung der Orthogonalität der Singularvektoren nahelegt. Es ist zu vermuten, dass diese in der geringen räumlichen Auflösung des Netzes aus Beschleunigungssensoren begründet liegt. Zwar kann in vielen schmalbandigen Frequenzbereichen eine globale Reduktion der APE im Experiment nachgewiesen werden, jedoch ist der Regelungserfolg nicht als breitbandig zu be-

werten. In einigen breiten Frequenzbändern folgt aufgrund der Verletzung der Orthogonalität nur eine geringe Reduktion bzw. sogar eine Erhöhung der APE, welche mit bis zu 10 dB nicht unerheblich ausfällt.

Eine globale Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten unter stochastischer Anregung ist damit nicht in der Literatur dokumentiert. Insbesondere die in [Caz99] beschriebene Frequenzabhängigkeit der Singulärvektoren der IIE hat einen entscheidenden Anteil an dieser Tatsache. Diese Eigenschaft wird im nachfolgenden Kapitel untersucht und hinterfragt.

3.3. Frequenzabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden in Kavitäten

Die Schalleinstrahlungsmoden in Kavitäten beschreiben die Schnelleverteilungen einer Struktur, welche entkoppelt voneinander zur APE beitragen. In der Literatur werden diese aus der IIE in modalen Koordinaten gemäß Kapitel 3.1.2 berechnet. Die modale IIE kann dabei durch Kopplung der analytischen sowie numerischen Eigenwerte und -vektoren der entkoppelten Teilsysteme an der Interaktionsfläche assembliert werden. Numerische Algorithmen, wie beispielsweise die Singulärwertzerlegung, werden anschließend angewendet, um gemäß Kapitel 3.1.3 von der Frequenzparametrisierte Singulärvektoren zu berechnen. Eine wesentliche Reduktion dieser IIE würde resultieren, wenn sie sich durch Zerlegung in frequenzunabhängige Singulärvektoren in einem breitbandigen Frequenzbereich diagonalisieren ließe, da dies eine Niedrigrangapproximation gemäß Kapitel 3.1.3 ermöglichen würde. Die Singulärvektoren müssten dafür eine breitbandige Orthogonalität in Bezug auf die IIE erfüllen. Dieser Abschnitt reflektiert den Stand der Wissenschaft bezüglich der Eigenschaften dieser Singulärvektoren. Besonderes Augenmerk gilt dabei der Frequenzabhängigkeit sowie dem Zusammenhang der Singulärvektoren zu den entkoppelten akustischen Eigenformen.

SNYDER und TANAKA [ST93] beschreiben die Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen in Kavitäten auf einem modalen Interaktionsmodell basierend. Hier wird die IIE durch eine analytische Berechnung der Kopplungsintegrale assembliert. Das untersuchte Modell entspricht einer rechteckigen Platte, gekoppelt an eine quaderförmige Kavität. Die Kopplungsbeziehung basiert auf den Plattenmoden im Vakuum und den akustischen Moden mit schallharter Berandung. Die auf diese Weise modal assemblierte IIE wird durch eine frequenzabhängige orthonormale Transformation in die Schalleinstrahlungsmoden überführt. In der Veröffentlichung wird nicht beschrieben, bei welcher Frequenz die Schalleinstrahlungsmoden in [ST93, Abb. 14-15] dargestellt sind. Auch auf eine Unabhängigkeit von der Frequenz wird nicht hingewiesen. Die dargestellten Schalleinstrahlungsmoden weisen eine Ähnlichkeit zu den akustischen Eigenformen an der Interaktionsfläche auf. Sie enthalten darüber hinaus mit der Abbildung der strukturellen Randbedingungen auch Unterschiede. Für die modale Kopplung von Struktur und Fluid werden jeweils 30 Moden der Teilsysteme verwendet. Aufgrund der schwachbesetzten IIE [SH94] erscheint es unwahrscheinlich, dass derart wenige Moden die physikalische Fluid-Struktur-Interaktion korrekt abbilden [JHS98].

CAZZOLATO und HANSEN [CH98] beschreiben die numerische Implementierung von aktiver Kontrolle der Schalleinstrahlung in unregelmäßig geformte Kavitäten basierend auf strukturellen Fehlersensoren. Die Struktur wird dabei durch einen versteiften Zylinder mit einem innenliegenden

Boden gebildet. Die Kavität umfasst das Volumen zwischen Boden und Zylinder. Numerische Modelle für die Teilsysteme Struktur und Fluid werden entkoppelt voneinander einer Modalanalyse unterzogen und anschließend an der Interaktionsfläche die modalen Kopplungsfaktoren berechnet, welche für die Assemblierung der modalen IIE benötigt werden. Dazu werden 50 akustische Moden und 400 strukturelle Eigenvektoren der tieffrequentesten Eigenwerte verwendet. Struktur sowie Fluid werden mit Elementen mit linearen Ansatzfunktionen diskretisiert, welche bei der numerischen Integration über gekrümmte Interaktionsflächen unzureichende Genauigkeit bieten [ZT00]. Eine Validierung des modal reduziert gekoppelten Systems mit einem vollständig gekoppelten System wird nicht dargestellt. Eine korrekte Abbildung der physikalischen Fluid-Struktur-Kopplung erscheint daher mindestens fragwürdig.

Die APE wird in [CH98], basierend auf strukturellen Schnellmessungen, mithilfe der IIE quantifiziert. Mittels einer Singulärwertzerlegung der IIE werden die orthogonalen Schalleinstrahlungsmoden in die resonante Kavität beschrieben. Die resultierenden Singulärwerte sowie Singulärvektoren sind dabei abhängig von der Frequenz. Des Weiteren wird in [CH98] eine begrenzte Anzahl von Schalleinstrahlungsmoden für die Steuerung im tieffrequenten Bereich (< 500 Hz) verwendet. Die Schalleinstrahlungsmoden werden zu diesem Zweck bei einer Normalisierungsfrequenz festgehalten. Da die Singulärwerte der IIE jedoch nur schmalbandig dominant sind und die Singulärvektoren des komplexen Zylindermodells stark mit der Frequenz variieren, kann mit einzelnen Schalleinstrahlungsmoden die IIE nicht über einen weiten Frequenzbereich diagonalisiert werden. Auch angepasste Filter, welche die Frequenzcharakteristik der Schalleinstrahlung (Singulärwerte) abbilden sollen, lassen sich damit nicht in ihrer Ordnung reduzieren. Ursprung dieser Annahme sind die Schallstrahlungsfilter der Fernfeldabstrahlung [EJ93], bei denen die Singulärwerte die Frequenzcharakteristik von Hochpassfiltern annehmen und in einem begrenzten Frequenzbereich eine Filterreduktion durchgeführt werden kann [GCCV00]. Diese Filterreduktion kann nicht reziprok auf die Schalleinstrahlungsmoden angewendet werden. Abseits der Normalisierungsfrequenz resultiert eine Erhöhung der APE, welche auf eine Verletzung der Orthogonalität der Singulärvektoren hinweist. Darüber hinaus bleibt eine praktische Implementierung der aktiven Unterdrückung mithilfe der berechneten Singulärvektoren aus.

Eine alternative Formulierung der Schalleinstrahlungsmoden in [CH99] basiert auf der Separation der diagonalen und der voll besetzten Teilmatrizen der gemäß [CH98] modal assemblierten IIE. Dies ist möglich unter der Annahme, dass die gesamte Fluiddomäne, im Gegensatz zu einer Subdomäne, betrachtet wird. Die Folgerung aus diesem alternativen Ansatz ist, dass nur die Dynamik der Kavität für die Auslegung eines Regelungssystems benötigt wird, weil die Schalleinstrahlungsmoden den akustischen Moden an der Koppelfläche entsprechen. Da die Kavitätsmoden ihrerseits nur über das gesamte Fluidvolumen orthogonal sind, jedoch nicht entlang der Interaktionsfläche, sind die resultierenden Schalleinstrahlungsmoden nicht orthogonal bezüglich der APE in der Kavität. Die IIE wird demnach nicht bzw. nur in geringer Bandbreite der Frequenz von den Kavitätsmoden diagonalisiert. Letzteres ist eine notwendige Voraussetzung für eine Reduktion der Modellordnung und damit verbundene aktive Anwendungen in Echtzeit.

Für einen generischen Zylinder mit eingeschlossener akustischer Kavität werden die Schalleinstrahlungsmoden in der Dissertation von JOHNSON [Joh04] beschrieben. Diese werden dazu verwendet, eine Optimierung des Lagenaufbaus von Faserverbundstrukturen durchzuführen. Ziel der

Optimierung ist eine Anpassung der struktur-akustischen Kopplung, um eine minimale Schalleinstrahlung in die Kavität zu erhalten. Die hier als prinzipielle Schnelleverteilungen (engl.: *principle velocity patterns*) bezeichneten Schalleinstrahlungsmoden resultieren auch in [Joh04] aus einer Singulärwertzerlegung der modal assemblierten IIE, welche die APE in der Kavität in Abhängigkeit von Modenamplituden der normalen Strukturschnellekomponente quantifiziert. Im numerischen Modell wird eine räumliche Diskretisierung durch Elemente mit linearen Ansatzfunktionen vorgenommen. Zur modalen Kopplung der Teilsysteme Struktur und Fluid sowie zur Assemblierung der IIE werden in [Joh04] 500 Strukturmoden verwendet. Die Anzahl der akustischen Fluidmoden wird nicht benannt. Die Schalleinstrahlungsmoden werden in [Joh04, Abb. 4.5-4.6] bei einer Frequenz von 147 Hz dargestellt, da bei dieser Frequenz die Optimierung des Lagenaufbaus durchgeführt wird. Des Weiteren weist JOHNSON darauf hin, dass die Singulärvektoren bei anderen Frequenzen berechnet wurden, welche Eigenfrequenzen sowie nicht-resonanten Frequenzen des Fluids entsprechen. Dabei wird eine Ähnlichkeit der Singulärvektoren beschrieben. Eine Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren wird darüber hinaus nicht schlüssig bewiesen. [Joh04, Abb. 4.2] zeigt die Verläufe der aus einer Singulärwertzerlegung resultierenden Singulärwerte über der Frequenz. Dieser Verlauf legt entgegen der aufgestellten Vermutung der Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren ein anderes Verhalten nahe. So korrespondieren beispielsweise die Maxima im ersten sortierten Singulärwert zu akustischen Eigenvektoren mit verschiedenen axialen modalen Indizes. Dieses Verhalten illustriert eine Änderung der Singulärvektoren mit der Frequenz, da die Maxima in den Singulärwerten nach [CH99] den entkoppelten akustischen Eigenfrequenzen entsprechen. Die Singulärvektoren an diesen Maxima korrespondieren dabei zu den entsprechenden Fluidmoden an der Interaktionsfläche [CH99]. Auch in dieser Arbeit wird, wie zuvor in [CH98] keine Validierung der APE basierend auf der modalen Interaktionstheorie gegen eine vollständig gekoppelte harmonische Analyse dargestellt. Daher muss bei JOHNSON die Abbildung der breitbandigen physikalischen Fluid-Struktur-Kopplung abseits der definierten Optimierungsfrequenz in Frage gestellt werden.

BAGHA und MODAK [BM15] stellen ein Konzept zur Echtzeit-Identifikation des Streckenmodells einer an ein akustisches Fluid angekoppelten Rechteckplatte basierend auf einem Kalman-Filter vor. Die dazu berechneten Schalleinstrahlungsmoden resultieren aus einer Singulärwertzerlegung der IIE, assembliert durch modale Kopplung von Fluid und Struktur. Die Schalleinstrahlungsmoden werden dabei als frequenzabhängig beschrieben. Diese Frequenzabhängigkeit wird mit einem Verweis auf die Schallstrahlungsmoden in das Fernfeld plausibilisiert. Letztere basieren auf einer Diskretisierung der schwingenden Oberfläche mit Elementarstrahlern und der daraus berechneten Schallstrahlungsresistanz [EJ93, GCCV00, FG07]. Die Frequenzabhängigkeit der Schallstrahlungsmoden in das akustische Fernfeld resultiert dabei aus der Abhängigkeit der Schallstrahlungsresistanz zwischen den Elementarstrahlern von der Frequenz. Wegen der modenselektiven Art der struktur-akustischen Kopplung im Fall der Schalleinstrahlung in eine Kavität ist dieser Vergleich jedoch nicht angemessen. Im Verlauf der Singulärwerte in [BM15, Abb. 2] fällt darüber hinaus die Abwesenheit diverser akustischer Eigenfrequenzen auf, so beispielsweise die akustische Starrkörpermode bei 0 Hz. Es liegt daher der Schluss nahe, dass nicht ausreichend entkoppelte strukturelle Eigenformen für die Kopplung verwendet wurden.

Der Stand des Wissens dokumentiert, dass die Frequenzabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden

den als Konsens der wissenschaftlichen Gemeinschaft gesehen wird. Die Schalleinstrahlungsmoden sind über die Singulärvektoren hinaus weder in analytischer noch in harmonischer Formulierung veröffentlicht. Verfahren zur Ordnungsreduktion, wie die für die Assemblierung der IIE verwendete modale Kopplungstheorie beinhalten einige Einschränkungen verglichen mit der vollständigen Kopplungsanalyse. Diese Einschränkungen finden bei der Berechnung der Singulärvektoren bisher keine Berücksichtigung und sollen im nachfolgenden Kapitel geklärt werden.

3.4. Ordnungsreduktion gekoppelter Fluid-Struktur-Interaktionssysteme

Zur Beschreibung der Interaktion zweier Teilsysteme muss eine Integration von Ansatzfunktionen über die Interaktionsfläche beider Medien durchgeführt werden [ZT00]. Bei generischen Topologien können die Ansatzfunktionen als Eigenformen analytisch aufgestellt und das Integral berechnet werden. Zu diesen analytisch beschreibbaren Systemen zählen eine Rechteckplatte mit quaderförmiger Kavität [PHB90] sowie eine zylindrische Schale mit eingeschlossenem Fluid [PRWM82]. Komplexere Geometrien lassen sich nicht analytisch beschreiben und es muss eine numerische Integration durchgeführt werden. Eine häufig verwendete Simulationsmethode zur Beschreibung von struktureller Interaktion mit einem vollständig eingeschlossenen Fluid ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die Notwendigkeit von konformen Netzen an der Interaktionsfläche resultiert dabei, insbesondere in der dreidimensionalen Fluidomäne, in einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden. Da für die Regelung verwendete, aktuelle Signalverarbeitungssysteme eine derart hohe Anzahl an Freiheitsgraden nicht verarbeiten können, wird das Erfordernis nach geeigneten Verfahren zur Ordnungsreduktion motiviert.

Räumliche Diskretisierungen von Differentialgleichungssystemen mithilfe der FEM liefern die Repräsentationen von Steifigkeit, Dämpfung und Masse des Systems in Matrixform. Beinhalten diese Gleichungssysteme eine Interaktion von Freiheitsgraden, so resultieren daraus unsymmetrische Systemmatrizen. Dies ist beispielsweise bei der Interaktion der Freiheitsgrade der strukturellen Verschiebung und des Schalldrucks der Fall [ZT00]. Diese Tatsache verkompliziert die zuvor motivierte Ordnungsreduktion, da im Gegensatz zu Systemen mit symmetrischen Matrizen die Berechnung von Links- und Rechtseigenvektoren notwendig wird. Zur Reduktion gekoppelter Gleichungssysteme mit unsymmetrischen Systemmatrizen eignen sich insbesondere die Ordnungsreduktion mithilfe gekoppelter Eigenvektoren [Lef07, Pur08] sowie die modale Kopplungstheorie basierend auf entkoppelten Eigenvektoren [DF00, FG07]. Die gekoppelten Eigenvektoren erlauben eine Überführung der Systemmatrizen in einen Unterraum, welche durch Links- und Rechtsmultiplikation erzielt wird. Der resultierende Unterraum besitzt dabei die Dimension der Anzahl an verwendeten Eigenvektoren. Die Tatsache, dass diese Eigenvektoren über das gesamte Gebiet von Struktur und Fluid orthogonal sind, verhindert eine Beschreibbarkeit von Schalleinstrahlungsmoden, welche allein auf der Strukturoberfläche orthogonal sind. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit die modale Kopplungstheorie verwendet, deren Gültigkeitsbereich nachfolgend diskutiert werden soll. Als eine weitere effiziente Möglichkeit der Ordnungsreduktion sei an dieser Stelle auf die Krylov-Unterraum-Verfahren [Gri97, Pur08] verwiesen.

Die modale Kopplungstheorie ist für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse, weil Ansätze

zur Beschreibung der Schalleinstrahlungsmoden, analytisch sowie numerisch, darauf aufbauen. Sie beschreibt die Möglichkeit, eine Ordnungsreduktion von gekoppelten Differentialgleichungssystemen auf Basis von Eigenformen der entkoppelten Teilsysteme durchzuführen. Eine Ordnungsreduktion wird in der Literatur als valide verstanden, unter der Annahme, dass eine schwache Kopplung der Teilsysteme vorliegt. Dies bedeutet, dass sich der Großteil der Energie im gekoppelten System entweder in der Struktur oder dem Fluid konzentriert und nicht in beiden Systemen gleichzeitig [ST93]. Demnach kann das strukturelle Schwingungsverhalten basierend auf den *in vacuo* Moden und das akustische Verhalten basierend auf den Moden einer allseitig abgeschlossenen Kavität ausgedrückt werden. Hierbei ist häufig von fluid- bzw. strukturdominierten Moden des gekoppelten Systems die Rede [FG07], wobei diese im Vergleich zu den entkoppelten Moden nur geringe Änderungen der Eigenformen erfahren. Lediglich die Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems ändern sich im Vergleich zu den entkoppelten Systemen.

ATALLA und BERNHARD [AB94] führen eine dimensionslose Größe λ_C zu

$$\lambda_C = \frac{\rho_{FCF}}{\rho_S h \omega} \quad (3.8)$$

für den Zweck einer Klassifizierung der Kopplungsstärke eines vibroakustischen Systems ein. Darin beschreiben die Skalare ρ_S und h entsprechend die Strukturichte und eine charakteristische Dicke der Struktur. Die Autoren geben an, dass ein Wert $\lambda_C > 1$ eine starke Kopplung bedeutet, während $\lambda_C < 1$ für eine schwache Kopplung steht. Diese dimensionslose Größe ist sensitiv auf die Fluidparameter, was insbesondere in Abbildung 3.2 ersichtlich wird. Die Kopplung der dabei gewählten Leichtbaustruktur mit dem Medium Luft ist oberhalb von ca. 20 Hz als schwach anzusehen, wohingegen mit dem Medium Wasser eine starke Kopplung über den gesamten betrachteten Frequenzbereich resultiert. Da darüber hinaus die allgemeinen Dimensionen von Struktur und Fluid vernachlässigt werden, kann λ_C nicht als umfassender Indikator angesehen werden. So kann z.B. eine flache Kavität selbst bei einem Medium geringer Dichte wie Luft einen signifikanten Einfluss auf die Strukturodynamik ausüben [Des98]. Der Einfluss von Kreuzkopplungen zwischen einzelnen Struktur- und Akustikmoden und insbesondere deren Vernachlässigung bei der schwachen Kopplung wird von SUM und PAN in [SP00] gezeigt. Eine Sensitivitätsanalyse von Parametern wie der Dicke von Aluminiumplatten und der Kavitätstiefe beschreiben SCARPA ET AL. [SC99, Sca00]. Dabei wird nur der Einfluss auf die Änderung der Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems untersucht, nicht auf die gekoppelten Eigenformen bzw. die Gültigkeit einer schwachen Kopplung. Bei der modalen Kopplung werden in der Regel Modensätze der Teilsysteme aus einem begrenzten Frequenzbereich untersucht. Dieser Frequenzbereich entspricht dabei üblicherweise jenem, welcher hinsichtlich der Kopplung untersucht werden soll. Die Auswirkungen der Vernachlässigung von hochfrequenten Modenanteilen der entkoppelten Systeme auf die Schalleinstrahlungsmoden bzw. deren Frequenzabhängigkeit gemäß dem vorangegangenen Kapitel ist nicht in der Literatur zu finden.

Die modale Kopplung von analytisch berechneten Eigenvektoren ist von SNYDER und HANSEN in [SH94] dokumentiert. Mit den modal gekoppelten Modellen werden die Mechanismen einer aktiven Optimalsteuerung der APE durch akustische und strukturelle Aktuatoren untersucht. Mit strukturellen Regelkräften sorgen die zwei Mechanismen der modalen Unterdrückung und Umstrukturierung für eine Reduktion der APE. Modale Unterdrückung basiert auf der Verminderung

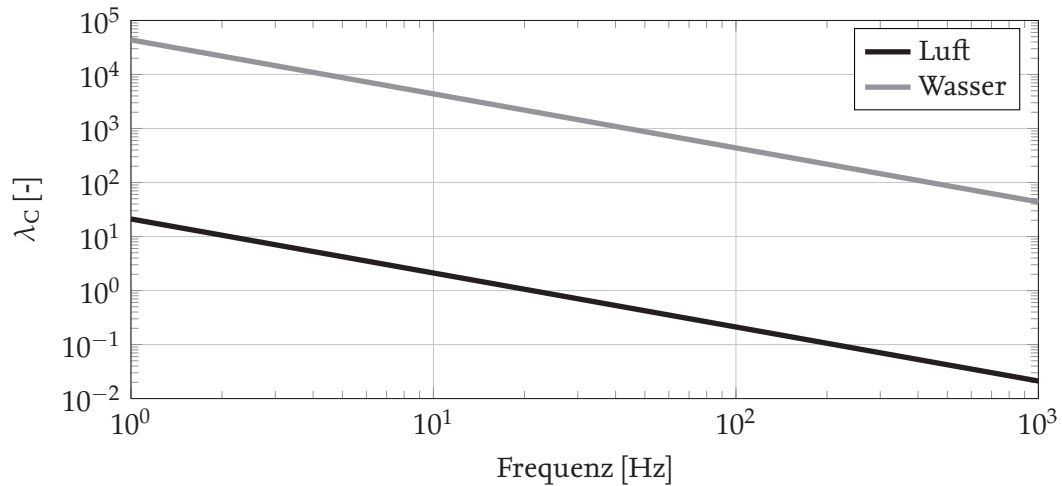


Abbildung 3.2.: Dimensionslose Größe λ_C über der Frequenz für die Interaktion einer Aluminiumplatte ($\rho_S = 2700 \text{ kg/m}^3$, $h = 2 \text{ mm}$) mit den Fluidmedien Luft ($\rho_F = 1,204 \text{ kg/m}^3$, $c_F = 343 \text{ m/s}$) und Wasser ($\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_F = 1484 \text{ m/s}$)

der Amplitude struktureller Moden, welche effizient mit den internen Fluidmoden koppeln. Modale Umstrukturierung basiert dagegen auf der Tatsache, dass eine Fluideigenform häufig mit mehreren strukturellen Eigenformen koppelt. Wenn das der Fall ist, kann eine dominante Schwingungseigenform in eine weniger dominante überführt werden, um eine möglichst ineffiziente Kopplung an das interne Schallfeld zu erhalten. Äquivalente Mechanismen der Unterdrückung werden in [CF92] für die Reduktion der akustischen Fernfeldleistung dokumentiert. Praktische Implementierungen und Untersuchungen dieser Zusammenhänge werden darüber hinaus nicht durchgeführt. Auch eine Beschreibung der Schalleinstrahlungsmoden oder eine Validierung der modalen Interaktionstheorie werden dabei vorgestellt.

LEFÈVRE [Lef07] beschreibt einen auf der FEM basierten Ansatz zur gleichzeitigen Analyse von elektromechanischer sowie vibroakustischer Kopplung in Zeit- und Frequenzbereich mithilfe verteilter piezoelektrischer Aktuatoren. Dabei wird durch die Einführung des Geschwindigkeitspotentials als akustischen Freiheitsgrad eine Symmetrisierung des gekoppelten Gleichungssystems erreicht. Es wird die Modellreduktion basierend zum einen auf den gekoppelten Eigenvektoren von Fluid und Struktur und zum anderen den Eigenvektoren der entkoppelten Teilsysteme diskutiert. Die Simulationsmethodik zur Berechnung des gekoppelten Systems wird durch den Vergleich mit einem Referenzmodell validiert, welches aus analytisch gekoppelten Eigenvektoren besteht. Zusätzlich wird ein modellbasierter Regler abgeleitet und in die Simulation mit einbezogen. Dabei wird die Bedeutung der Aktuatorpositionen für die Regelgüte sowie die Optimierung mithilfe gradientenbasierter und evolutionärer Algorithmen diskutiert. Ein Regelungsansatz mit optimierten Aktuatorpositionen wird anhand einer Rechteckplatte gekoppelt an eine quaderförmige Kavität demonstriert. Als Zielgrößen der Regelung werden vier lokale Druckwerte in der Kavität verwendet. Die Unterdrückung lokaler Schalldrücke führt jedoch nicht notwendigerweise zu einer globalen Reduktion der Schalleinstrahlung in die Kavität, da abseits der Druckmikrofone hohe Schalldruckgradienten erzeugt werden. Im Sinn des Lehrbuchs von FAHY [FG07] stellt dies einen ANVC-Ansatz dar.

Die Schalleinstrahlungsmoden werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, weswegen eine globale Reduktion der Schalleinstrahlung nicht erzielt wird. Darüber hinaus werden in dem als Referenz verwendeten Modell der analytischen Eigenvektorkopplung hochfrequente Moden abgeschnitten. Daraus entstehende Fehler in der Vorhersage der Transferpfade werden nicht untersucht. Zuvor erwähnte Ansätze zur Beschreibung der modalen Interaktion verwenden als entkoppelte akustische Eigenvektoren jene der allseitig geschlossenen Kavität. In [Lef07] werden dagegen akustische Eigenvektoren mit schallweichen Randbedingungen im Bereich der Plattenoberfläche verwendet. Es wird nicht untersucht, wie sich dies auf die resultierende Approximation des gekoppelten Systems auswirkt.

RINGWELSKI [Rin11] stellt einen Ansatz für die simultane Kopplung von piezoelektrischem Aktuator, Leichtbaustruktur, Regelalgorithmus sowie dem umgebenden externen und dem eingeschlossenen internen Fluid für die Auslegung von aktiven Regelungssystemen vor. Die Kopplung von internem und externem Fluid wird durch Verbinden der FEM mit der Randelementemethode erreicht. Der Ansatz wird an einer Akustikbox mit eingeschlossenem Fluid sowie einer flexiblen Wand validiert. Des Weiteren wird als Anwendung die Reglerauslegung an einem Fahrzeugmotor demonstriert. Als Regelungsstrategie kommt eine direkte Schnellerückführung zum Einsatz, was gemäß dem Kapitel 3.2 einen AVC-Ansatz darstellt. Es findet keine globale akustische Kostenfunktion Anwendung. Die Unterdrückung diskreter Strukturschnellen führt nicht notwendigerweise zu einer globalen Reduktion der Schallabstrahlung, da die Regelkräfte einen Anstieg der Vibrationspegel in nicht beobachteten Bereichen nach sich ziehen können. Das modale Kopplungsmodell, welches als Referenz zur Validierung der numerischen Simulation verwendet wird, enthält die ersten 20 entkoppelten akustischen und strukturellen Moden. Die Kopplungsintegrale der analytischen Moden werden zudem in numerischer Form durch die GAUSS'schen Quadraturformeln [SS66] gelöst. Ein Vergleich mit analytisch berechneten Kopplungsintegralen bzw. die Konvergenz der Referenzlösung wird nicht vorgestellt.

Es ist ersichtlich, dass mit dem Stand der Forschung die Schalleinstrahlung in Kavitäten um verschiedene zusätzliche Aspekte in numerischer Form erweitert werden kann. An dieser Stelle seien beispielhaft die gleichzeitige Simulation von Innen- und Außenraumabstrahlung und die ganzheitliche Betrachtung mit eingebundenem Regelungsgesetz erwähnt. Allen Verfahren zur Ordnungsreduktion ist gemein, dass sie eine Approximation einer komplexeren Lösung darstellen und nur bei Verwendung von hinreichend vielen Ansatzfunktionen, seien dies gekoppelte oder entkoppelte Eigenvektoren, gegen die physikalische Realität konvergieren. Eine Validierung der numerischen Eigenvektorkopplung in Form eines Abgleichs mit einer Kopplung in analytischer Form kann dabei nicht der Literatur entnommen werden. Auch Implikationen für die Schalleinstrahlungsmoden, bei der Berechnung unter Zuhilfenahme der modalen Interaktionstheorie sowie deren Frequenzunabhängigkeit werden mit dem Stand der Forschung nicht abgebildet.

3.5. Sensorkonzepte für globale Regelungsverfahren

Entscheidendes Kriterium für die Implementierbarkeit aktiver struktur-akustischer Systeme ist die Anzahl der Fehlersensoren und der damit verbundene Aufwand für die Signalverarbeitung. Regelungsansätze, welche auf der Verwendung von Schalleinstrahlungsmoden basieren, fordern in der

Literatur (z. B. [CH98]) den Einsatz von 100 bis mehreren 100 diskreten Sensoren auf der Strukturoberfläche. Eine derartige Menge an Sensordaten kann von aktuellen Signalverarbeitungssystemen nicht in Echtzeit verarbeitet werden. Bei der Verwendung von Modalfiltern ist darüber hinaus die Kenntnis der Strukturmoden a priori erforderlich, welche bei komplexen Strukturen einen zusätzlichen Identifikationsaufwand bedeuten.

Zur Reduktion der notwendigen Anzahl an Sensoren bei der aktiven Minimierung der Fernfeldabstrahlung, stellen TANAKA und SNYDER [TS02] eine Reduktion von Schallstrahlungsclustern als Regelungsansatz von mittlerer Stellautorität vor. Die Regelung der strukturellen Eigenformen wird als Ansatz geringer Autorität bezeichnet, da die Strukturmoden nicht orthogonal bezüglich der strukturellen Schallabstrahlung sind. Eine hohe Autorität wird bei Regelung der orthogonalen Schallstrahlungsmoden selbst erreicht. Zur Unterdrückung von Schallstrahlungsclustern werden die strukturellen Moden nach der relativen Phase von diskreten Messungen eingeteilt. Die Intention ist es, die ersten vier Schallstrahlungsmoden einer rechteckigen Platte ins Fernfeld anhand der relativen Phasenlage an den Sensororten individuell zu quantifizieren und die Stellgröße für jede Schallstrahlungsmoden unabhängig voneinander anzupassen. Dabei werden vier Vibrationssensoren in den Ecken einer ebenen, rechteckigen Platte verwendet. Eine Erweiterung des Ansatzes der Schallstrahlungscluster für die aktive Reduktion der Schalleinstrahlung in eine Kavität stellt [TK06] anhand numerischer Untersuchungen vor. Hier soll nicht mit struktureller, sondern mit akustischer Sensorik die APE abgeschätzt und geregelt werden. Diese alternativen Schalleinstrahlungscluster basieren auf vier diskreten akustischen Punktsensoren, welche sich in den vier der Platte abgewandten Ecken einer Rechteckkavität befinden. Abgesehen von einem Offset von etwa 20 dB kann in der APE eine qualitative Übereinstimmung der Systemdynamik gezeigt werden. Die Aktuierung der vier Schallstrahlungscluster führt mit einer Optimalsteuerung zu einer breitbandigen Reduktion der APE. Auch hier fehlt eine globale Sensierung der strukturellen Schallabstrahlung, da die Schallstrahlungscluster wegen der geringen räumlichen Auflösung nur eine Annäherung an die tatsächliche APE darstellt. Dieser Ansatz führt zu einer einfachen Implementierung für generische Topologien (z.B. ebene Platte). Eine Einschränkung muss dabei in der Beschränkung auf sehr langwellige akustische Eigenformen identifiziert werden. Diese ist in der geringen räumlichen Auflösung begründet. In der Veröffentlichung wird der Frequenzbereich daher auf $f = 0 \dots 200$ Hz beschränkt. Für komplexe Geometrien, welche über die untersuchte Rechteckkavität hinausgehen, ist der Ansatz aus diesem Grund sowie dem verwendeten Sensierungsansatz nicht geeignet.

LI und CHENG [LC10] stellen synthetisierte struktur-akustische Sensoren auf Basis eines Clusters von miteinander verbundenen piezoelektrischen PVDF-Foliensensoren vor. Anhand eines generischen Zylinders mit Bodenpartition wird ein evolutionäres Optimierungsverfahren für die Platzierung der Sensoren angewendet. Hierbei wird die Güte der Optimierung durch die Reduktion der APE gebildet; Fehlersignal für die Optimalsteuerung sind jedoch die lokalen Sensorausgänge. Die Sensoren werden damit auf die Reduktion der globalen Schalleinstrahlung synthetisiert. Die Optimierung wird dabei, durch die Verwendung einer einzigen Designfrequenz, auf tonale Signalanteile beschränkt. Des Weiteren zeigt sich die Wirksamkeit der Optimierung lediglich in den fluiddominierten Resonanzen. In den strukturdominierten Eigenformen wird eine identische bzw. höhere globale Unterdrückung der APE im nicht optimierten Fall durch zufällig platzierte Aktuatoren erreicht.

Einen Ansatz zur Reduktion von parallel zu messenden Sensordaten stellt die Erweiterung der generalisierten Regelstrecke [MAM12] dar. Bei dieser wird das Übertragungsmodell von den Regelaktuatoren zu diskreten Beschleunigungssensoren, welches in Form eines Zustandsraummodells gegeben ist, um sequentiell gemessene, zusätzliche Ausgänge ergänzt. Diese erweiterten Ausgänge können beispielsweise die normale Strukturschnellekomponente einer Vermessung mithilfe eines Laser Scanning Vibrometers (LSV) beinhalten. In [MAM12] kann durch die Verwendung dieser sogenannten erweiterten Strecke unter Einsatz eines Regelungsansatzes eine globale Reduktion der Strukturschwingung einer Windschutzscheibe gezeigt werden. Diese Schwingungsreduktion geht mit einer lokalen Schalldruckreduktion im Fahrzeuginnenraum einher. Eine der erweiterten Strecke nachgeschaltete Filterung mit Schallstrahlungsfiltren der Fernfeldabstrahlung wird darüber hinaus in [AMU⁺10] dokumentiert. Dabei sind die frequenzabhängigen Schallstrahlungsfiltren gemäß [GCCV00] bei einer Normalisierungsfrequenz fixiert. Die mithilfe der Schallstrahlungsresistenzmatrix berechnete abgestrahlte Schallleistung kann dabei mit einer Schallintensitätssondenmessung validiert werden. Darüber hinaus liefern die fixierten Schallstrahlungsmoden einen fehlerbehafteten frequenzabhängigen Schallleistungsausgang, welcher im geregelten Fall in einer Erhöhung der Schallabstrahlung in bestimmten Terzbändern resultiert. Wird die breitbandige, abgestrahlte Schallleistung betrachtet, so liefern in [AMU⁺10] globale Maßnahmen zur Schwingungsreduktion (AVC) die größten Reduktionen. Dementsprechend wird die globale Schallstrahlungsreduktion mit einer derartigen Regelung nur indirekt erzielt; das volle Potential der Schallstrahlungsmoden kann darüber hinaus nicht ausgenutzt werden.

BAGHA und MODAK [BM15] stellen einen Sensierungsansatz zum Abschätzen der APE in Kavitäten vor, welcher auf der Nutzung eines Kalman-Filters basiert. Ziel der Untersuchung ist eine Reduktion der notwendigen strukturellen Sensoren, wenn die globale APE aktiv unterdrückt werden soll. In einer numerischen Studie zeigt sich dabei, dass sich Kalman-Filter dazu eignen, insbesondere die Kavitätsdynamik in den Resonanzfrequenzen vorherzusagen. Es werden lediglich fünf piezoelektrische Sensoren benötigt. In Kombination mit einem optimalen Regelungsansatz lässt sich mit piezoelektrischen Aktuatoren eine Reduktion der spektral gefärbten Signalanteile erreichen. Die Dimension der betrachteten Rechteckkavität ist dabei dergestalt, dass im berücksichtigten Frequenzbereich bis 550 Hz nur zwei akustische Resonanzen in der einer Platte abgewandten Raumrichtung vorherrschen. Darüber hinaus ist lediglich ein Singulärvektor über den Frequenzbereich notwendig, was eine starke Vereinfachung für eine Reglerimplementierung darstellt. Die Wirksamkeit des Ansatzes wurde in der Simulation unter einer Addition von zusätzlichem Sensorrauschen auf die Fehlersignale gezeigt. Darüber hinaus fehlt eine praktische Implementierung.

In diesem Abschnitt beschriebene Verfahren zur Reduktion der notwendigen Sensoranzahl für Regelungskonzepte machen deutlich, dass die Reduktion einer globalen akustischen Zielfunktion bisher nicht in einer praktischen Implementierung nachgewiesen werden konnte. In dieser Arbeit wird nachfolgend das Konzept der erweiterten Regelstrecke verwendet, um in Kombination mit den frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden die globale Schalleinstrahlungsreduktion in Kavitäten nachzuweisen. Grund für diese Auswahl ist das Potential, große Strukturbereiche gepaart mit einem feinen Oberflächennetz in einem Streckenmodell mit vergleichsweise geringer Modellordnung zu beobachten.

3.6. Fazit mit Bezug auf die Hypothesen

Die aktive Beeinflussung diverser lokaler akustischer sowie struktureller Sensorsignale mit dem Ziel der aktiven Schalleinstrahlungsreduktion in Kavitäten kann der Literatur entnommen werden und ist bereits in experimentellen Studien gemäß Kapitel 3.2 dokumentiert. Insbesondere analytische sowie numerische Untersuchungen zu Konzepten wie den Schalleinstrahlungsmoden machen darüber hinaus deutlich, dass derartige lokale Unterdrückungen nicht zu einer globalen Beruhigung der Schalleinstrahlung in Kavitäten über breite Frequenzbänder ausreichen. Dabei weist der Stand der Forschung eine lückenhafte Dokumentation der Eigenschaften der Schalleinstrahlungsmoden auf und auch eine Umsetzung ihrer aktiven Unterdrückung in experimenteller Form kann der Literatur nicht entnommen werden.

Auf die in Kapitel 2 beschriebenen Hypothesen lassen sich folgende Erkenntnisse aus dem Stand des Wissens ableiten:

Arbeitshypothese 1 Die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden findet in der aktuellen Literatur keine Berücksichtigung. Die Fixierung derselben bei einer Normalisierungsfrequenz stellt den Kompromiss vieler Veröffentlichungen zur Implementierung von Schallstrahlungsfiltren dar. Es zeigt sich selbst bei der Verwendung von einfachen Fluid-Struktur-Systemen, beispielsweise Rechteckplatte mit quaderförmiger Kavität, eine Abhängigkeit der Singulärvektoren von der Frequenz. Diese scheint dem Stand des Wissens nach in zwei Arten der Diskretisierung begründet zu liegen. Diese sind mit Namen die räumliche Diskretisierung der interagierenden Domänen mithilfe der FEM sowie die Beschreibung des gekoppelten Systems durch die Interaktion von entkoppelten Eigenvektoren. Ein expliziter Zusammenhang zwischen den entkoppelten akustischen Eigenformen und den Schalleinstrahlungsmoden kann nicht der Literatur entnommen werden; es wird lediglich eine Ähnlichkeit beschrieben. Um die Diskretisierungen als Fehlerquelle auszuschließen, sollen die Schalleinstrahlungsmoden in Kapitel 4 anhand analytisch beschreibbarer Eigenformen des Teilsystems der akustischen Kavität quantifiziert werden.

Arbeitshypothese 2 Eine Untersuchung der Grenzen der räumlichen Diskretisierung unter Verwendung der FEM ist unabhängig von der Interaktion entkoppelter Moden motiviert. Dazu ist eine Formulierung der APE in quadratischer Abhängigkeit zur harmonischen (nicht wie in der Literatur üblich der modalen) Strukturschnelle sowie eine anschließende Singulärwertzerlegung notwendig. Erstere kann gemäß Kapitel 3.3 nicht dem Stand der Wissenschaft entnommen werden. Aus diesem Grund wird eine harmonische Formulierung in Kapitel 5 hergeleitet und die daraus mithilfe einer Singulärwertzerlegung abgeleiteten Singulärvektoren in Abhängigkeit vom Grad der Diskretisierung untersucht. Diese Singulärvektoren werden mit den analytisch beschriebenen Schalleinstrahlungsmoden aus **Arbeitshypothese 1** verglichen.

Arbeitshypothese 3 Da die harmonische Formulierung in einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden resultiert, wird eine Ordnungsreduktion für komplexe, beliebig geformte (und damit nicht analytisch beschreibbare) Kavitäten motiviert. Numerisch berechnete Eigenvektoren beinhalten darüber hinaus die Fehlerquelle aus der räumlichen Diskretisierung. Der Stand der Forschung in Kapitel 3.4 zeigt auf, dass die Verwendung der modalen Interaktionstheorie und die damit verbundene Annahme einer schwachen Kopplung nicht ausreichend für die Abbildung der postulierten Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren ist. Erst die Verwendung ausreichend vieler entkoppelter Eigenvektoren für die Interaktion resultiert in einer hinreichend genauen Vorhersage der APE. Darüber hinaus ist zu erwarten, dass auch die Singulärvektoren bei einer Berechnung mithilfe der modalen Kopplungstheorie von der Anzahl der verwendeten Moden abhängen. Eine Relation zwischen der Modenanzahl und den Singulärvektoren, als auch deren Frequenzunabhängigkeit, ist mit dem Stand der Literatur nicht abgebildet. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 6 untersucht.

Arbeitshypothese 4 Dem Mangel an experimentellen, auf Schalleinstrahlungsmoden basierten Reglerimplementierungen soll mit einem reduzierten Sensorkonzept gemäß Kapitel 3.5 begegnet werden. Das Konzept der erweiterten Regelstrecke bietet durch die Integration zusätzlicher Oberflächenschnellen das Potential für eine Reduktion der notwendigen Anzahl an diskreten Fehlersensoren. Aufgrund der fehlerbehafteten Schallstrahlungsresistanz, welche eine Fixierung der Schallstrahlungsmoden in das Fernfeld auf eine Frequenz zur Folge hat, konnte mit diesem Konzept bisher keine globale akustische Zielfunktion mit aktiven Maßnahmen reduziert werden. Diese Wissenslücke soll in Kapitel 7 mithilfe der frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden für die aktive Reduktion der Schalleinstrahlung in eine Kavität geschlossen werden.

4. Schalleinstrahlungsmoden in analytischer Formulierung

Nachdem im vorangestellten Kapitel der Forschungsbedarf bezüglich der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden herausgestellt wurde, ist der Beweis derselben, am Beispiel generischer Kavitätsgeometrien, Ziel des vorliegenden Abschnitts. Es wird zu diesem Zweck zunächst eine allgemeine Formulierung der struktur-akustischen Impedanz im Fall der Innenraumeinstrahlung vorgestellt. Daraus lassen sich für zwei generische, analytisch beschreibbare Modelle die Schalleinstrahlungsmoden ableiten. Die Formulierung basiert nicht auf einer Interaktion von Moden der Teilsysteme Fluid und Struktur und einer anschließenden Singulärwertzerlegung. Vielmehr wird der Beitrag der Strukturschwingungen zu den internen akustischen Moden reduziert auf die Interaktionsfläche betrachtet. Dabei können aufgrund der analytischen Betrachtungsweise die in diskretisierten Formulierungen inhärenten Fehler ausgeschlossen werden.

4.1. Randintegralgleichung der Schalleinstrahlung

Es ist das Ziel dieses Abschnitts, die strukturbedingte Schalleinstrahlung in eine Kavität gemäß Abbildung 3.1 zu beschreiben. Darin ist das Volumen V_F mit dem Fluid Luft gefüllt. Die Gasteilchen in dem akustischen Medium führen dabei Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage aus. Die Grundlage zur Berechnung der wellenförmigen Ausbreitung von Luftschall wird durch die akustische Wellengleichung [FG07, S. 8ff.] gebildet. Demnach lässt sich der von Ort $\bar{\mathbf{r}}_F$ und Zeit t abhängige Schalldruck $\bar{p}(\bar{\mathbf{r}}_F, t)$ zu

$$\nabla^2 \bar{p}(\bar{\mathbf{r}}_F, t) - \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 \bar{p}(\bar{\mathbf{r}}_F, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

bestimmen, mit dem LAPLACE-Operator ∇^2 [BSMM05, S. 677]. Die Beschreibung mithilfe eines harmonischen Zeitansatzes

$$\bar{p}(\bar{\mathbf{r}}_F, t) = p(\bar{\mathbf{r}}_F) \exp(j\omega t) \quad (4.2)$$

erlaubt unter der Voraussetzung von stationären Schwingungen eine Trennung der Variablen $\bar{\mathbf{r}}_F$ und t sowie eine Transformation in den Frequenzbereich, wobei $p(\bar{\mathbf{r}}_F)$ für die komplexe Amplitude des Schalldrucks steht. In Gleichung (4.2) beschreibt $\exp(\cdot)$ die natürliche Exponentialfunktion und j die imaginäre Einheit. Durch Einsetzen des Ansatzes aus Gleichung (4.2) in Gleichung (4.1) ergibt sich die dreidimensionale homogene HELMHOLTZ-Gleichung zu

$$(\nabla^2 + \kappa^2) p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = 0. \quad (4.3)$$

Darin beschreibt das Skalar κ die frequenzabhängige Wellenzahl $\kappa = \omega/c_F$. Der Schalldruck $p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ im Inneren einer Kavität gemäß Abbildung 3.1, mit internen akustischen Quellen der Quellstär-

ke $Q(\bar{\mathbf{r}}_0, \omega)$ am Ort $\bar{\mathbf{r}}_0$, erfüllt dagegen die inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung

$$(\nabla^2 + \kappa^2) p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = -Q(\bar{\mathbf{r}}_0, \omega). \quad (4.4)$$

Die Lösung dieser inhomogenen HELMHOLTZ-Gleichung kann auf Basis einer GREEN'schen Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ zu

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = \int_{O_S} \left[p(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \frac{\partial \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial p(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \right] dO + \int_{V_F} Q(\bar{\mathbf{r}}_0, \omega) \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_0, \omega) dV \quad (4.5)$$

bestimmt werden [NE92, S.280], wobei der Vektor $\bar{\mathbf{r}}_S$ Punkte auf der Strukturoberfläche O_S beschreibt. Die GREEN'sche Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ erfüllt dabei die alternative inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung [NE92, FG07]

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = -\delta(\bar{\mathbf{r}}_F - \bar{\mathbf{r}}_S), \quad (4.6)$$

mit der dreidimensionalen DIRAC'schen Delta-Funktion $\delta(\bar{\mathbf{r}}_F - \bar{\mathbf{r}}_S)$. Die Kontinuität der normalen Struktur- und Fluidschnelle am Rand O_S wird durch eine NEUMANN-Randbedingung der Form

$$\frac{\partial p(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega\rho_F \mathbf{v}^T(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \mathbf{n} = -j\omega\rho_F v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \quad (4.7)$$

gewährleistet. Entspricht die normale Schnelle dagegen $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = 0$, so wird damit ein schallharter Rand bezeichnet. Dieser entspricht der Fläche O_R in Abbildung 3.1. Mithilfe einer modalen Entwicklung soll jeder Term in Gleichung (4.5) durch akustische Eigenformen mit derartigen schallharten Rändern ausgedrückt werden. Auch die GREEN'sche Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ erfüllt damit die schallharten Randbedingungen, weswegen sich ihre normale Ableitung am Rand zu Null ergibt. Dies führt für den Schalldruck auf

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = j\rho_F\omega \int_{O_S} v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) dO + \int_{V_F} Q(\bar{\mathbf{r}}_0, \omega) \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_0, \omega) dV. \quad (4.8)$$

Unter Vernachlässigung zusätzlicher akustischer Quellen in der Kavität kann der Ausdruck zu

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = j\rho_F\omega \int_{O_S} v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) dO. \quad (4.9)$$

in eine Randintegralgleichung umgeformt werden. Diese wird als KIRCHHOFF-HELMHOLTZ-Integralgleichung in vereinfachter Form bezeichnet. Die Herleitung einer geeigneten GREEN'schen Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ für die akustischen Eigenformen mit schallharten Rändern ist in Kapitel A.1 gegeben. Ein Vergleich der exakten Lösung mit der Randintegralgleichung unter Verwendung dieser GREEN'schen Funktion wird in Kapitel A.2 anhand eines eindimensionalen Beispiels durchgeführt. Daraus lässt sich ableiten, dass die Abbildung des Schalldruckverlaufs innerhalb einer Kavität mit der Randbedingung einer strukturellen, normalen Schnelle $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ hinreichend genau ist. Nachfolgend wird der beschriebene Ansatz verwendet, um die interne APE in der Kavität basierend auf der normalen Strukturschnelle $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ zu quantifizieren.

4.2. Analytische Formulierung der akustischen potentiellen Energie

Zunächst wird die Theorie der Berechnung der APE in Abhängigkeit der normalen Strukturschnelle beschrieben. Anschließend soll diese an zwei speziellen Modellen konkretisiert werden. Ausgangspunkt der Untersuchung ist dabei die APE in der Druckabhängigkeit, wie sie in Kapitel 3.1.1 definiert ist. Die APE soll im vorliegenden Kapitel als quadratische Funktion der umgebenden Strukturschnelle am Rand O_S ausgedrückt werden. Dies lässt sich durch die zuvor beschriebene Randintegralgleichung erreichen.

Der ortsabhängige akustische Schalldruck $p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ lässt sich zu diesem Zweck als Linearkombination von orthogonalen Ansatzfunktion $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F)$ als

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{F,j}(\omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \quad (4.10)$$

ausdrücken, mit $q_{F,j}(\omega)$ als Amplitude der j -ten Ansatzfunktion. Diese Ansatzfunktionen $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F)$ werden auch als akustische Eigenformen bezeichnet. Mit Gleichung (4.10) kann die APE in einem Fluidvolumen V_F gemäß Gleichung (3.1) zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F c_F^2} \int_{V_F} \left(\sum_{j=1}^{\infty} q_{F,j}(\omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_{F,k}(\omega) \Phi_k(\bar{\mathbf{r}}_F) \right) dV \quad (4.11)$$

geschrieben werden. Die akustischen Eigenformen im Volumen V_F genügen unter der Annahme einer gleichverteilten mittleren Fluidichte der Bedingung der gegenseitigen Orthogonalität. Demzufolge lässt sich die Substitution

$$\int_{V_F} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \Phi_k(\bar{\mathbf{r}}_F) dV = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq j \\ \Gamma_j, & \text{für } k = j \end{cases} \quad (4.12)$$

durchführen, worin mit $\Gamma_j = \int_{V_F} \Phi_j^2(\bar{\mathbf{r}}_F) dV$ der Volumennormalisierungsfaktor der j -ten Eigenform bezeichnet wird. Aufgrund der Unabhängigkeit von $q_{F,j}(\omega)$ gegenüber dem Ort $\bar{\mathbf{r}}_F$, lässt sich die APE demnach zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F c_F^2} \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j |q_{F,j}(\omega)|^2 \quad (4.13)$$

umschreiben.

Die Übertragungsfunktion von der normalen Strukturschnelle $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ zum akustischen Schalldruck $p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ wird mithilfe der KIRCHHOFF-HELMHOLTZ-Integralgleichung nach Gleichung (4.9) berechnet. Eine GREEN'sche Funktion, welche schallharte Randbedingungen gemäß Gleichung (4.7) mit $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = 0$ erfüllt, wird in Kapitel A.1 hergeleitet. Unter Einführung einer finiten Impedanz an den Kavitätswänden [NE92, S. 314ff.], kann die GREEN'sche Funktion zu

$$\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F | \bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S)}{\Gamma_j (\kappa_j^2 + 2j\zeta_j \kappa_j \kappa - \kappa^2)} \quad (4.14)$$

um eine zusätzliche Dämpfung erweitert werden. Das modale Dämpfungsverhältnis der akustischen Eigenform mit dem Index j wird durch ζ_j repräsentiert. In Gleichung (4.14) beschreibt das

Skalar κ_j die resonante Wellenzahl der j -ten akustischen Eigenform. Substitution von Gleichung (4.10) und (4.14) in Gleichung (4.9) liefert einen Ausdruck für die frequenzabhängige modale Amplitude $q_{F,j}(\omega)$ mit dem Index j

$$q_{F,j}(\omega) = \frac{j\omega\rho_F}{\Gamma_j(\kappa_j^2 + 2j\zeta_j\kappa_j\kappa - \kappa^2)} \int_{O_S} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S) v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) dO. \quad (4.15)$$

Dieser Ausdruck wird in Gleichung (4.13) eingesetzt und die APE ergibt sich zu

$$E_P(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\omega) \left| \int_{O_S} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S) v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) dO \right|^2. \quad (4.16)$$

In Gleichung (4.16) ist die Schalleinstrahlungseffizienz $s_j(\omega)$ der j -ten Eigenform substituiert als

$$s_j(\omega) = \frac{\rho_F c_F^2}{4\Gamma_j} \left| \frac{j\omega}{\omega_j^2 + 2j\zeta_j\omega_j\omega - \omega^2} \right|^2. \quad (4.17)$$

Gleichung (4.16) beschreibt die APE in der akustischen Domäne V_F in Abhängigkeit von der normalen Schnelle $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ auf der Strukturoberfläche O_S . Genauer wird eine Linearkombination gebildet von den Beiträgen der Strukturschnelle $v(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ zu den akustischen, auf die Interaktionsfläche reduzierten Eigenformen $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S)$. Im Fall der Summierung über eine unendliche Anzahl an Eigenformen wird die APE physikalisch korrekt berechnet. Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, gibt es jedoch Frequenzbereiche, in denen nur bestimmte Eigenformen zur APE beitragen. Darüber hinaus sind die Eigenformen $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F)$ orthogonal über dem Volumen V_F , nicht jedoch über der Fläche O_S . Reduziert auf O_S tragen sie daher nicht unabhängig voneinander zur internen APE bei. Im folgenden Kapitel soll aus diesem Grund gezeigt werden, dass es möglich ist, derart unabhängig abstrahlende Schalleinstrahlungsmoden aus den Eigenformen zu erhalten.

4.3. Analytische Berechnung der Schalleinstrahlungsmoden

Die zuvor beschriebene allgemeine Formulierung der APE in Abhängigkeit der normalen Strukturschnelle wird nun für zwei spezielle Modelle der Fluid-Struktur-Interaktion angewendet, deren Eigenformen und Eigenfrequenzen sich analytisch bestimmen lassen. Ziel dieses Abschnitts ist es, die zwei Modelle vorzustellen sowie deren akustische Eigenformen herzuleiten. Anschließend werden die Eigenschaften der Eigenformen reduziert auf die Fläche der Interaktion untersucht. Aus den Eigenformen werden die resultierenden Schalleinstrahlungsmoden berechnet.

Quaderförmige Kavität gekoppelt an Rechteckplatte

Das erste generische Modell, welches einer analytischen Betrachtung unterzogen werden soll, ist das einer strukturellen, ebenen Rechteckplatte der Abmessungen $(L_X \times L_Y)$, welche an eine quaderförmige Kavität angekoppelt ist. Das Modell ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Platte befindet sich in der Ebene $\bar{z} = 0$ und ist im Kontakt mit der $(L_X \times L_Y \times L_Z)$ messenden Fluidkavität. Das gekoppelte Modell wird nachfolgend als QUADERMODELL bezeichnet.

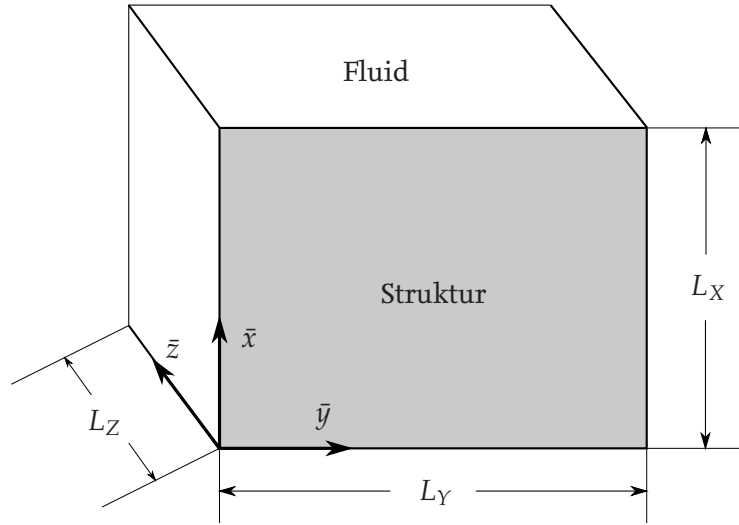


Abbildung 4.1.: Modell einer Rechteckplatte (grau) mit angekoppelter quaderförmiger Kavität (weiß)

Es wird angenommen, dass sich die Eigenformen $\Phi_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nach Gleichung (4.10) für das QUADER-MODELL als separierbare Funktionen der drei Raumrichtungen zu

$$\Phi_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Phi_{X,j}(\bar{x})\Phi_{Y,j}(\bar{y})\Phi_{Z,j}(\bar{z}) \quad (4.18)$$

ausdrücken lassen. Die schallharten Randbedingungen sind zu

- $\frac{\partial \Phi_{X,j}(\bar{x}=0)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \Phi_{X,j}(\bar{x}=L_X)}{\partial \bar{x}} = 0,$
- $\frac{\partial \Phi_{Y,j}(\bar{y}=0)}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \Phi_{Y,j}(\bar{y}=L_Y)}{\partial \bar{y}} = 0$
- $\frac{\partial \Phi_{Z,j}(\bar{z}=0)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Phi_{Z,j}(\bar{z}=L_Z)}{\partial \bar{z}} = 0$

gegeben. Lösen der homogenen HELMHOLTZ-Gleichung gemäß Gleichung (4.3) mit diesen Randbedingungen führt auf die Eigenformen

$$\Phi_{l,m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \cos\left(\frac{l\pi\bar{x}}{L_X}\right) \cos\left(\frac{m\pi\bar{y}}{L_Y}\right) \cos\left(\frac{n\pi\bar{z}}{L_Z}\right) \quad (4.19)$$

sowie die akustischen Eigenfrequenzen

$$\omega_{l,m,n} = c_F \pi \sqrt{\left(\frac{l}{L_X}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_Y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_Z}\right)^2}, \quad (4.20)$$

mit den modalen Indizes $l, m, n \in \mathbb{N}_0$. Auswerten von Gleichung (4.12) für die akustischen Eigenformen aus Gleichung (4.19) liefert die Volumennormalisierungsfaktoren $\Gamma_{l,m,n}$ für die quaderförmige Kavität

$$\Gamma_{l,m,n} = \frac{L_X L_Y L_Z}{8} \epsilon_l \epsilon_m \epsilon_n \quad (4.21)$$

mit

$$\epsilon_l, \epsilon_m, \epsilon_n = \begin{cases} 2 & , l, m, n = 0 \\ 1 & , l, m, n \neq 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Aus Gleichung (4.19) wird ersichtlich, dass sich die akustischen Eigenformen $\Phi_{l,m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Big|_{\bar{z}=0}$, reduziert auf die Interaktionsfläche O_S , unabhängig vom modalen Index n ergeben. Um die Eigenschaften der Eigenformen an der strukturellen Oberfläche zu untersuchen, wird das L^2 -Skalarprodukt [BSMM05, S. 660] betrachtet, welches sich für zwei ortsabhängige Funktionen f und g zu

$$\langle f, g \rangle = \int_{O_S} f(\bar{\mathbf{r}}_S) g^*(\bar{\mathbf{r}}_S) dO \quad (4.23)$$

berechnet. Der Operator $\{\cdot\}^*$ definiert dabei die komplexe Konjugation. Die akustischen Eigenformen an der Interaktionsfläche werden zu $u_{l,m}(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi_{l,m,n} \Big|_{\bar{z}=0}$ umgeschrieben. Auswerten des L^2 -Skalarprodukts für diese Untermenge der akustischen Eigenformen liefert

$$\left| \frac{\langle u_{l_1, m_1}, u_{l_2, m_2} \rangle}{\sqrt{\langle u_{l_1, m_1}, u_{l_1, m_1} \rangle} \sqrt{\langle u_{l_2, m_2}, u_{l_2, m_2} \rangle}} \right| = \begin{cases} 0 & , \text{für } l_1 \neq l_2 \text{ oder } m_1 \neq m_2 \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Das Skalarprodukt der, auf die Interaktionsfläche reduzierten, akustischen Eigenformen ergibt sich zu Null, im Fall ungleicher modaler Indizes (l, m) . Diese Menge an akustischen Eigenformen ist demnach orthogonal. Bei gleichen modalen Indizes (l, m) ergibt sich das Skalarprodukt dagegen zu Eins, was bedeutet, dass die Eigenformen parallel sind und dementsprechend eine identische Oberflächenverteilung der Schalldrücke besitzen. Die strukturellen Schalleinstrahlungsmoden $u_{l,m}(\bar{x}, \bar{y})$ als Untermenge der akustischen Eigenformen mit den Indizes (l, m) können im Fall der Schalleinstrahlung in die quaderförmige Kavität zu

$$u_{l,m}(\bar{x}, \bar{y}) = \cos\left(\frac{l\pi\bar{x}}{L_X}\right) \cos\left(\frac{m\pi\bar{y}}{L_Y}\right) \quad (4.25)$$

geschrieben werden. Da die akustischen Eigenformen frequenzunabhängig sind, gilt dies ebenfalls für die Schalleinstrahlungsmoden. Die Schalleinstrahlungseffizienzen lassen sich in diesem Fall zusammensetzen aus jenen der Fluidmoden nach Gleichung (4.17), welche an der Interaktionsfläche der jeweiligen Schalleinstrahlungsmode entspricht. Da Fluidmoden mit identischen Indizes (l, m) und verschiedenen Indizes n zu jeweils einer Schalleinstrahlungsmode beitragen, kann Gleichung (4.17) zu

$$s_{l,m}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_F c_F^2}{4\Gamma_{l,m,n}} \left| \frac{j\omega}{\omega_{l,m,n}^2 + 2j\zeta_{l,m,n}\omega_{l,m,n}\omega - \omega^2} \right|^2 \quad (4.26)$$

geschrieben werden. Die APE lässt sich entsprechend mit Gleichung (4.25) sowie Gleichung (4.26) zu

$$E_P(\omega) = \sum_{l,m=0}^{\infty} s_{l,m}(\omega) |\langle u_{l,m}, v_N(\omega) \rangle|^2 \quad (4.27)$$

formulieren. Es zeigt sich demnach im Fall der quaderförmigen Fluidkavität, dass die akustischen Eigenformen, reduziert auf die Interaktionsfläche O_S , entweder orthogonal oder parallel sind. Daraus folgen von der Frequenz unabhängige Schalleinstrahlungsmoden $u_{l,m}(\bar{x}, \bar{y})$. Der folgende Abschnitt prüft diese Aussagen für ein zweites Interaktionsmodell.

Zylinderschale gekoppelt an zylindrisches Fluid

Das zweite generische Modell der Fluid-Struktur-Interaktion ist das einer zylindrischen Schale, welche an das davon eingeschlossene Fluid angekoppelt ist. Die Betrachtung erfolgt in Zylinderkoordinaten $(\bar{r}, \theta, \bar{z})$, mit der Radialkoordinate \bar{r} und der Winkelkoordinate θ . Die Schale erstreckt sich dabei über die Mantelfläche des Zylinders ($\bar{r} = R$), wie in Abbildung 4.2 dargestellt. In den Ebenen $\bar{z} = 0$ und $\bar{z} = L_Z$ ist das eingeschlossene akustische Fluid schallhart begrenzt. Dieses zweite Modell wird nachfolgend als ZYLINDERMODELL bezeichnet.

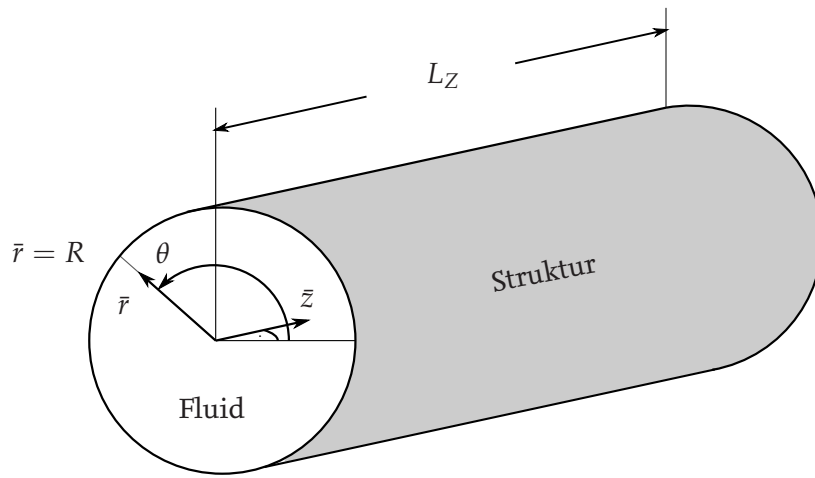


Abbildung 4.2.: Modell einer Zylinderschale (grau) mit innenliegender, nach außen abgeschlossener Kavität (weiß)

Auch für das ZYLINDERMODELL können die Eigenformen durch Separation der Funktionen in den Raumrichtungen zu

$$\Phi_j(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = \Phi_{R,j}(\bar{r})\Phi_{\theta,j}(\theta)\Phi_{Z,j}(\bar{z}) \quad (4.28)$$

beschrieben werden. Die schallharten Randbedingungen

- $\frac{\partial \Phi_{R,j}(\bar{r}=R)}{\partial \bar{r}} = 0,$
- $\frac{\partial \Phi_{Z,j}(\bar{z}=0)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Phi_{Z,j}(\bar{z}=L_Z)}{\partial \bar{z}} = 0$

führen dabei durch Lösen der homogenen HELMHOLTZ-Gleichung auf die Eigenformen

$$\Phi_{\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = \cos\left(\frac{\hat{l}\pi\bar{z}}{L_Z}\right) J_{\hat{m}}\left(\tau_{\hat{m}, \hat{n}} \frac{\bar{r}}{R}\right) \{\sin(\hat{m}\theta) + \cos(\hat{m}\theta)\}. \quad (4.29)$$

Darin werden die axialen, umlaufenden und radialen Indizes entsprechend durch $\hat{l}, \hat{m}, \hat{n} \in \mathbb{N}_0$ beschrieben. In Gleichung (4.29) beschreibt $J_{\hat{m}}$ die \hat{m} -te BESSELFUNKTION erster Gattung [BSMM05, S. 527]. Das Skalar $\tau_{\hat{m}, \hat{n}}$ ist die \hat{n} -te Nullstelle der ersten Ableitung der \hat{m} -ten BESSELFUNKTION nach der Radialkoordinate \bar{r} , so dass gilt

$$\frac{\partial J_{\hat{m}}(\tau_{\hat{m}, \hat{n}})}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (4.30)$$

Die akustischen Eigenfrequenzen der zylindrischen Kavität berechnen sich zu

$$\omega_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}} = c_F \sqrt{\tau_{\hat{m},\hat{n}}^2 + \left(\frac{\hat{l}\pi}{L_Z}\right)^2}. \quad (4.31)$$

Das Oberflächenintegral aus Gleichung (4.12) für die akustischen Eigenformen aus Gleichung (4.29) liefert die Volumennormalisierungsfaktoren $\Gamma_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}}$ für die zylindrische Kavität

$$\Gamma_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}} = \left(1 - \frac{\hat{m}^2}{\tau_{\hat{m},\hat{n}}^2}\right) \frac{J_{\hat{m}}^2(\tau_{\hat{m},\hat{n}})}{2} \pi R^2 L_Z \epsilon_{\hat{l}} \quad (4.32)$$

mit

$$\epsilon_{\hat{l}} = \begin{cases} 2 & , \hat{l} = 0 \\ 1 & , \hat{l} \neq 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Aus Gleichung (4.29) wird deutlich, dass die auf die Interaktionsfläche reduzierten Fluideigenformen $\Phi_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}} \Big|_{\bar{r}=R}$ mit gegebenen Indizes \hat{l} und \hat{m} und unterschiedlichen Indizes \hat{n} , sich um einen von \hat{n} abhängigen Faktor voneinander unterscheiden. Die Fluideigenformen, reduziert auf die Interaktionsfläche, werden zu $u_{l,m}(\theta, \bar{z}) = \Phi_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}} \Big|_{\bar{r}=R}$ umgeschrieben. Analog zur quaderförmigen Kavität, lässt sich das L^2 -Skalarprodukt der akustischen Eigenformen entlang der Interaktionsfläche nach Gleichung (4.23) berechnen zu

$$\left| \frac{\langle u_{\hat{l}_1,\hat{m}_1,\hat{n}_1}, u_{\hat{l}_2,\hat{m}_2,\hat{n}_2} \rangle}{\sqrt{\langle u_{\hat{l}_1,\hat{m}_1,\hat{n}_1}, u_{\hat{l}_1,\hat{m}_1,\hat{n}_1} \rangle} \sqrt{\langle u_{\hat{l}_2,\hat{m}_2,\hat{n}_2}, u_{\hat{l}_2,\hat{m}_2,\hat{n}_2} \rangle}} \right| = \begin{cases} 0 & , \text{für } \hat{l}_1 \neq \hat{l}_2 \text{ oder } \hat{m}_1 \neq \hat{m}_2 \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.34)$$

Gleichung (4.29) verdeutlicht die Abhängigkeit der zylindrischen Kavitätsmoden an der Interaktionsfläche ($\bar{r} = R$) vom radialen modalen Index \hat{n} . Diese Abhängigkeit steht im Kontrast zur quaderförmigen Kavität, wo die Kavitätsmoden unterschiedlicher Indizes n an der Interaktionsfläche identische Amplituden besitzen. Dies bedeutet, dass die akustischen Eigenformen an der Interaktionsfläche Vielfache voneinander sein und unterschiedliche Vorzeichen besitzen können. Dennoch ist ihre Oberflächenverteilung entweder orthogonal oder parallel, was durch Gleichung (4.34) verdeutlicht wird. Diese Eigenschaft haben beide betrachteten Interaktionssysteme gemein.

Die Schalleinstrahlungsmoden sowie -effizienzen werden demnach umgeschrieben zu

$$u_{\hat{l},\hat{m}}(\theta, \bar{z}) = \cos\left(\frac{\hat{l}\pi\bar{z}}{L_Z}\right) \{ \sin(\hat{m}\theta) + \cos(\hat{m}\theta) \}, \quad (4.35)$$

und

$$s_{\hat{l},\hat{m}}(\omega) = \sum_{\hat{n}=0}^{\infty} \frac{\rho_F c_F^2}{4\Gamma_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}}} \left| \frac{j\omega \alpha_{\hat{m},\hat{n}}}{\omega_{l,m,n}^2 + 2j\zeta_{l,m,n} \omega_{l,m,n} \omega - \omega^2} \right|^2. \quad (4.36)$$

Die Faktoren $\alpha_{\hat{m},\hat{n}}$ aus Gleichung (4.36) werden dabei als Verhältnisse der akustischen Eigenformen mit identischen Indizes (\hat{l}, \hat{m}) an der Interaktionsfläche zu

$$\alpha_{\hat{m},\hat{n}} = \frac{J_{\hat{m}}(\tau_{\hat{m},\hat{n}})}{J_{\hat{m}}(\tau_{\hat{m},\hat{n}=0})} \quad (4.37)$$

substituiert.

Auch im Fall des ZYLINDERMODELLS lassen sich demnach die Schalleinstrahlungsmoden unabhängig von der Frequenz formulieren. Die APE lässt sich in diesem Fall zu

$$E_P(\omega) = \sum_{\hat{l}, \hat{m}=0}^{\infty} s_{\hat{l}, \hat{m}}(\omega) \left| \langle u_{\hat{l}, \hat{m}}, v_N(\omega) \rangle \right|^2 \quad (4.38)$$

beschreiben. Der nachfolgende Abschnitt gibt einen Überblick über die Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen der zwei betrachteten Systeme.

4.4. Frequenzunabhängige Schalleinstrahlungsmoden

Dieser Abschnitt stellt die zuvor hergeleiteten Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen für das QUADERMODELL sowie das ZYLINDERMODELL dar. Für das akustische Medium werden dabei eine Dichte von $\rho_F = 1,204 \text{ kg/m}^3$ sowie eine Schallgeschwindigkeit von $c_F = 343 \text{ m/s}$ verwendet. Es wird ein konstantes akustisches Dämpfungsverhältnis für alle Moden von $\zeta_{l,m,n} = 0,01$ angenommen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass keine Materialparameter von der Struktur benötigt werden, um die Schalleinstrahlung in die Kavitäten zu beschreiben. Gemäß Gleichung (4.27) und Gleichung (4.38) wird lediglich die komplexwertige Schnelle $v_N(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ auf der Strukturoberfläche als Randbedingung für das akustische Medium benötigt. Eine modale Entwicklung der Struktur-schwingung entfällt dementsprechend.

Quadermodell

Zur Berechnung der Schalleinstrahlungsmoden für das in Kapitel 4.3 beschriebene QUADERMODELL, wird eine Platte der Dimension $(L_X \times L_Y) = (0,6 \times 0,8) \text{ m}^2$ verwendet. Die zu untersuchende Kavität hat eine Tiefe von $L_Z = 0,42 \text{ m}$. Die Maße sind im Hinblick auf einen experimentellen Versuchsträger gewählt, welcher im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet wird.

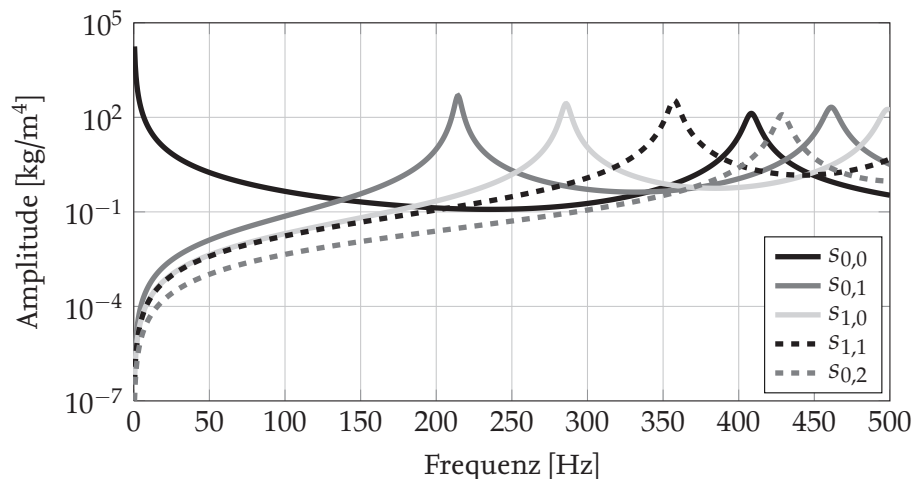


Abbildung 4.3.: Fünf Schalleinstrahlungseffizienzen des QUADERMODELLS

Die resultierenden Effizienzen der ersten fünf Schalleinstrahlungsmoden aus Gleichung (4.26) für

die Schalleinstrahlung in die quaderförmige Kavität zeigt Abbildung 4.3. Diese verlaufen kontinuierlich über der Frequenz und zeigen diverse Resonanzen. Letztere treten an den akustischen Eigenfrequenzen auf, deren Eigenformen zur jeweiligen Schalleinstrahlungsmode gemäß Gleichung (4.25) korrespondieren. Die aus Gleichung (4.20) für die vorliegende Kavität resultierenden akustischen Eigenfrequenzen unterhalb von 500 Hz listet Tabelle 4.1 auf.

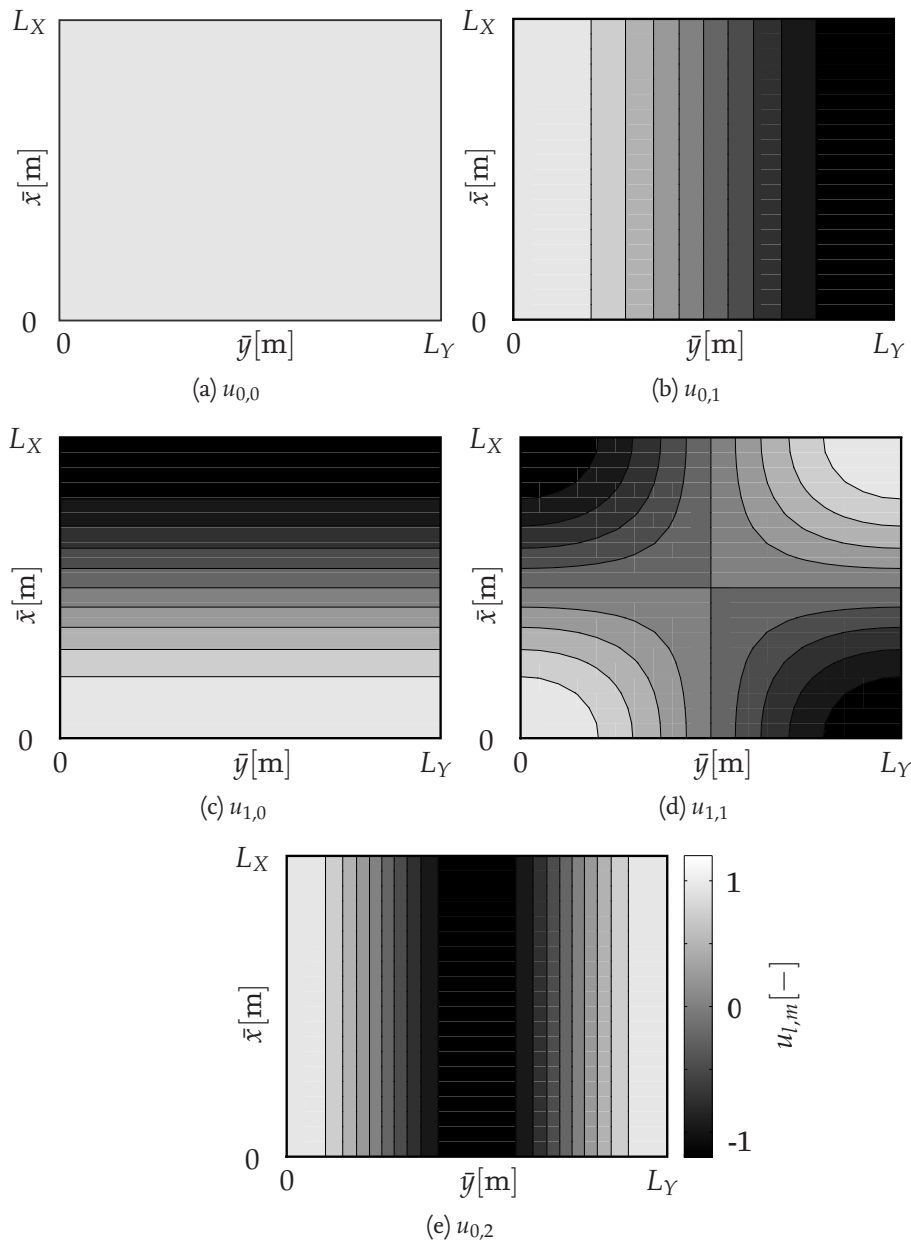


Abbildung 4.4.: Fünf Schalleinstrahlungsmoden des QUADERMODELLS

Fünf Schalleinstrahlungsmoden für das QUADERMODELL nach Gleichung (4.25) sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Diese entsprechen, wie in Kapitel 4.3 beschrieben, den akustischen Eigenformen reduziert auf die Interaktionsfläche. Die Eigenfrequenzen der akustischen Moden decken sich mit den Maxima der jeweiligen Schalleinstrahlungseffizienz. Eine Mehrzahl von Maxima pro Schall-

Tabelle 4.1.: Akustische Eigenfrequenzen und zugehörige modale Indizes der quaderförmigen Kavität

(l, m, n)	Eigenfrequenz $\omega_{l,m,n}/(2\pi)$
(0, 0, 0)	0 Hz
(0, 1, 0)	214,37 Hz
(1, 0, 0)	285,83 Hz
(1, 1, 0)	357,29 Hz
(0, 0, 1)	408,33 Hz
(0, 2, 0)	428,75 Hz
(0, 1, 1)	461,18 Hz
(1, 0, 1)	498,43 Hz

einstrahlungseffizienz tritt bei parallelen Eigenformen entlang der Interaktionsfläche auf. Diese parallelen Eigenformen weisen identische Indizes (l, m) und unterschiedliche Indizes n auf.

Diese Beobachtung lässt sich anhand des folgenden Beispiels verdeutlichen. Die Maxima der Schalleinstrahlungseffizienz zur Schalleinstrahlungsmode $u_{0,0}$ entsprechen 0 Hz und 408,33 Hz. Diese Frequenzen korrespondieren zu den akustischen Eigenformen mit den modalen Indizes $(l, m, n) = (0, 0, 0)$ sowie $(l, m, n) = (0, 0, 1)$. Diese beiden akustischen Eigenformen sind auf der Plattenoberfläche ($\bar{z} = 0$) identisch, was aus Gleichung (4.19) ersichtlich wird. Eine ausführliche Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den akustischen Eigenformen und den Schalleinstrahlungsmoden sowie deren Schalleinstrahlungseffizienzen ist in Kapitel A.3 gegeben.

Die frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden diagonalisieren dementsprechend den Ausdruck der APE gemäß Gleichung (4.27) für alle Frequenzen. Beim gegebenen QUADERMODELL beschreiben die ersten fünf Schalleinstrahlungsmoden einen Großteil der Schallenergie im untersuchten Frequenzbereich. Sie genügen damit einer Ordnungsreduktion des Ausdrucks der APE äquivalent zu einer in Kapitel 3.1.3 beschriebenen Niedrigrangapproximation.

Zylindermodell

Das betrachtete ZYLINDERMODELL besitzt die Abmessungen $(R \times L_Z) = (0.5 \times 3) \text{ m}^2$. Die Schalleinstrahlungseffizienzen $j = 1 \dots 6$ sowie $7 \dots 12$ in die zylindrische Kavität gemäß Gleichung (4.36) zeigen Abbildung 4.5 und Abbildung 4.6. Es zeigt sich dabei im Fall der zylindrischen Kavität eine höhere Dichte an Moden im betrachteten Frequenzbereich als im Fall der quaderförmigen Kavität. Diese Tatsache liegt im höheren Volumen im Fall der Zylinderkavität begründet. Dementsprechend müssen im Fall des ZYLINDERMODELLS mehr Eigenformen der Kavität berücksichtigt werden, um in einem breiten Frequenzbereich eine Reduktion der Modellordnung analog zu einer in Kapitel 3.1.3 beschriebenen Niedrigrangapproximation zu erreichen. Mehrfache Resonanzen der Schalleinstrahlungseffizienzen treten im ZYLINDERMODELL bei Vielfachen des radialen modalen Indexes \hat{n} auf. Zu den akustischen Eigenformen korrespondierende akustische Eigenfrequenzen nach Gleichung (4.31) zeigt Tabelle 4.2. Dabei sind die Eigenformen mit $\hat{n} = 0$ und $\hat{n} = 1$ gegenübergestellt. Die Eigenformen mit identischen Indizes \hat{l} und \hat{m} lassen sich dabei jeweils derselben Schalleinstrahlungsmode zuordnen.

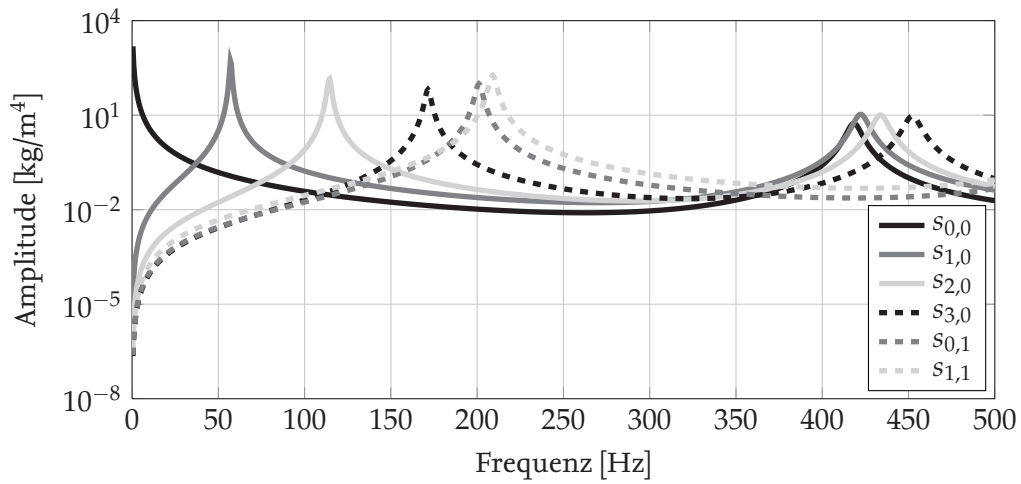


Abbildung 4.5.: Schalleinstrahlungseffizienzen 1 bis 6 des ZYLINDERMODELLS

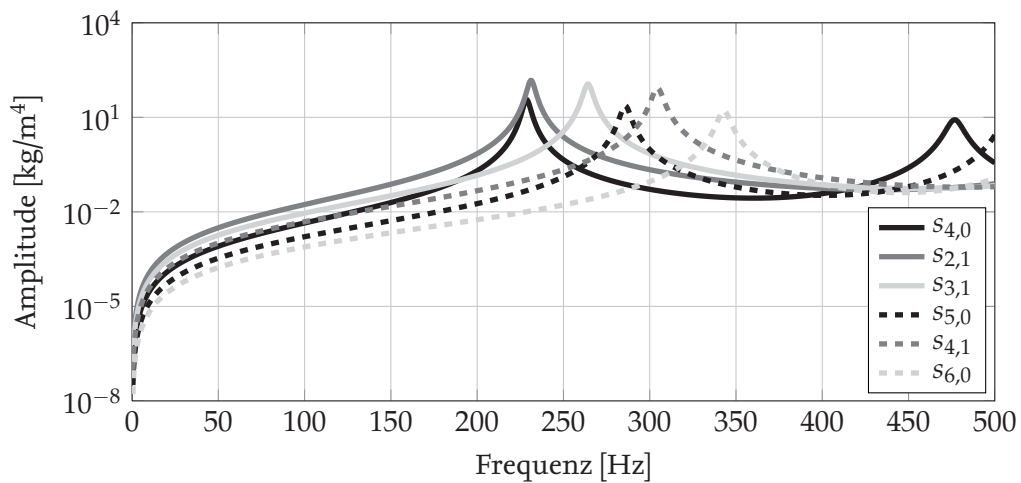


Abbildung 4.6.: Schalleinstrahlungseffizienzen 7 bis 12 des ZYLINDERMODELLS

Die ersten sechs Schalleinstrahlungsmoden der zylindrischen Schale nach Gleichung (4.35) stellt Abbildung 4.7 in abgerollter Form über dem Umfang dar. Analog zur Rechteckplatte entsprechen diese einer Untermenge der, an der Interaktionsfläche orthogonalen, akustischen Eigenformen.

Die akustischen Eigenvektoren $\Phi_{0,0,0}$ und $\Phi_{0,0,1}$, welche sich Schalleinstrahlungsmode $u_{0,0}$ zuordnen lassen, sind Vielfache voneinander und unterscheiden sich um den Faktor $\alpha_{0,1}$. Diese Tatsache wird mit Gleichung (4.29) deutlich. Eine Abbildung dieser Eigenformen ist in Kapitel A.3 gegeben. Auch im Fall des ZYLINDERMODELLS setzen sich die Schalleinstrahlungseffizienzen als Summe aus den Effizienzen der akustischen Eigenformen zusammen.

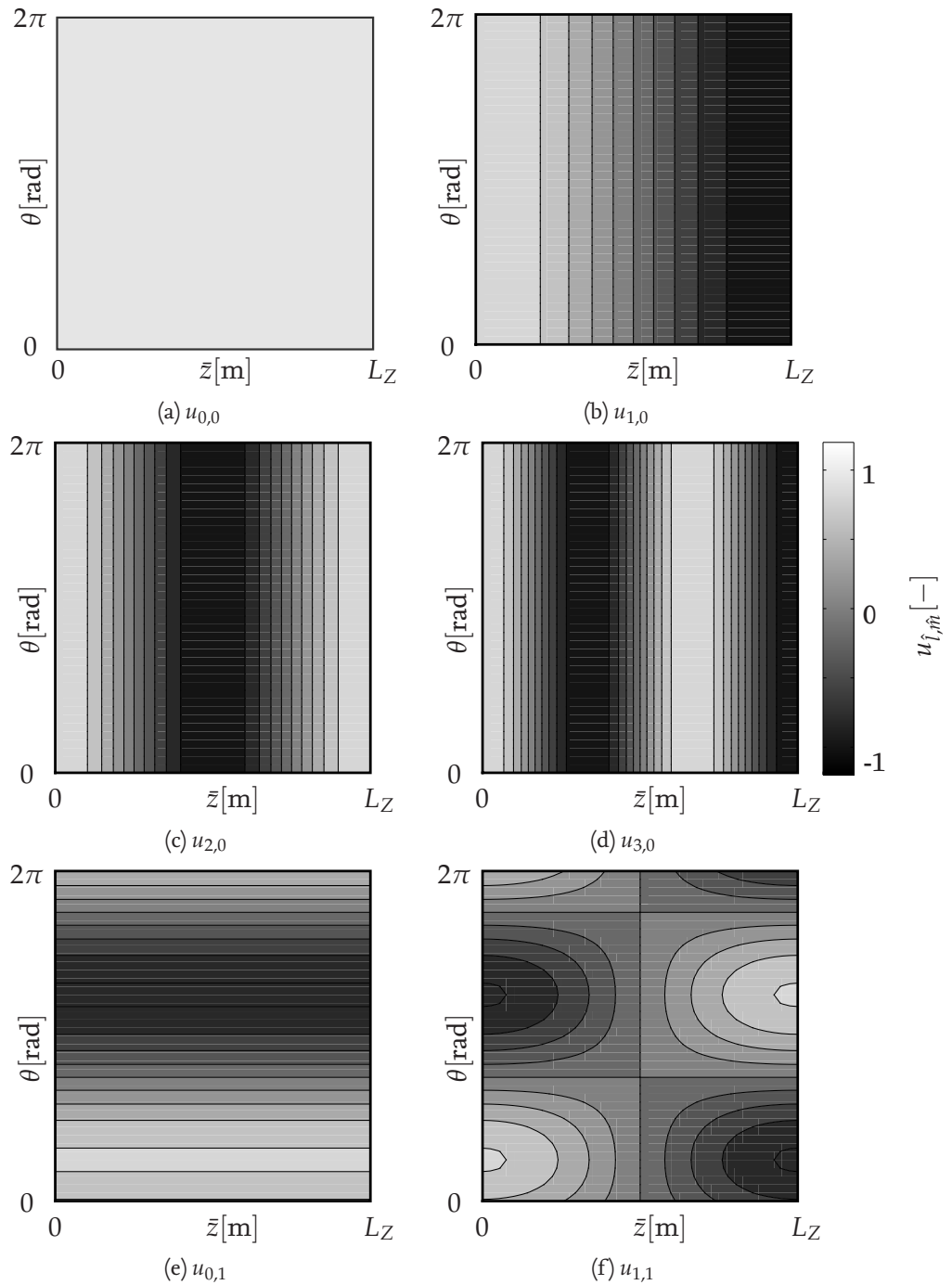


Abbildung 4.7.: Sechs Schalleinstrahlungsmoden des ZYLINDERMODELLS

Tabelle 4.2.: Akustische Eigenfrequenzen und zugehörige modale Indizes der zylindrischen Kavität

$(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n})$	Eigenfrequenz $\omega_{\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}} / (2\pi)$	$(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n})$	Eigenfrequenz $\omega_{\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}} / (2\pi)$
(0, 0, 0)	0 Hz	(0, 0, 1)	418, 32 Hz
(1, 0, 0)	57, 17 Hz	(1, 0, 1)	422, 21 Hz
(2, 0, 0)	114, 34 Hz	(2, 0, 1)	433, 67 Hz
(3, 0, 0)	171, 50 Hz	(3, 0, 1)	452, 11 Hz
(0, 1, 0)	201, 00 Hz	(0, 1, 1)	582, 09 Hz
(1, 1, 0)	208, 97 Hz	(1, 1, 1)	584, 89 Hz
(4, 0, 0)	228, 67 Hz	(4, 0, 1)	476, 74 Hz
(2, 1, 0)	231, 24 Hz	(2, 1, 1)	593, 22 Hz
(3, 1, 0)	264, 22 Hz	(3, 1, 1)	606, 83 Hz
(5, 0, 0)	285, 83 Hz	(5, 0, 1)	506, 65 Hz
(4, 1, 0)	304, 45 Hz	(4, 1, 1)	625, 40 Hz
(6, 0, 0)	343, 00 Hz	(6, 0, 1)	540, 97 Hz

Zusammenfassung

Dieses Kapitel leitet für die APE in Kavitäten eine analytische Formulierung her, welche in quadratischer Abhängigkeit von der, sie umgebenden, normalen Strukturschnelle steht. Aus dieser Formulierung kann die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden am Beispiel analytisch beschreibbarer Kavitätsgeometrien bewiesen werden. Diese entsprechen einer an der Interaktionsfläche orthogonalen Untermenge der akustischen Eigenformen. Die **Arbeitshypothese 1** kann dementsprechend für QUADERMODELL und ZYLINDERMODELL als erwiesen betrachtet werden. Die in diesem Kapitel vorgestellte analytische Formulierung der Schalleinstrahlungsmoden setzt damit die Grundlage für anschließende Untersuchungen und wird für die zwei verwendeten Modelle als Referenz verwendet. Gemein ist den zwei betrachteten Modellen, dass sie konstante Integrationsgrenzen in den jeweiligen drei Raumrichtungen besitzen und sich der jeweilige Integrand bei der Bildung des Skalarproduktes entsprechend Gleichung (4.24) und Gleichung (4.34) in ein Produkt der von den Koordinaten abhängigen Terme zerlegen lässt. Kavitäten, welche diese zwei Bedingungen nicht erfüllen, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit als irreguläre Kavitäten verstanden. Bei derartigen irregulär geformten Kavitäten können die Schalleinstrahlungsmoden durch numerische Diskretisierungsverfahren und eine anschließende Singulärwertzerlegung bestimmt werden. Die Berechnung numerischer Singulärvektoren, welche sich aus einer räumlichen Diskretisierung der jeweiligen Modelle ergibt, soll im nachfolgenden Kapitel anhand einer harmonischen Formulierung unter Verwendung der FEM erfolgen. Dabei wird zunächst das Erreichen der Güte im Vergleich zur analytischen Vorhersage geprüft.

5. Singulärvektoren von Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung

Die IIE wird in diesem Kapitel mithilfe der FEM in einer numerischen Formulierung unter Verwendung eines harmonischen Zeitansatzes vorgestellt. Darauf aufbauend werden die Singulärvektoren sowie -werte in räumlich diskretisierter Form aus einer iterativen Singulärwertzerlegung berechnet. Für diese Berechnung wird das zuvor vorgestellte QUADERMODELL verwendet. Auf eine äquivalente Auswertung für das ZYLINDERMODELL wird aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden in der harmonischen Formulierung verzichtet. Es werden aus der räumlichen Diskretisierung folgende Implikationen mit Bezug zur Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren im Vergleich mit den analytisch beschriebenen Schalleinstrahlungsmoden abgeleitet.

5.1. Numerische Modellierung gekoppelter Fluid-Struktur-Systeme

Das vibroakustische Verhalten eines gekoppelten Systems aus Struktur und Fluid gemäß Abbildung 3.1 mit gegebenen Randbedingungen lässt sich mathematisch in Form von Differentialgleichungen beschreiben und approximativ berechnen. In dieser Arbeit wird die FEM für eine Diskretisierung der Differentialgleichungen angewendet. Dabei werden Struktur und Fluid in entsprechende Elemente eingeteilt und ihre jeweiligen Masse, Dämpfung und Steifigkeit in Matrixform assembliert. Diese Matrizen sind quadratisch und spärlich besetzt. Die Genauigkeit der Approximation ist dabei abhängig von der Art der Ansatzfunktionen und Anzahl der Finiten Elemente. Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über die Diskretisierung des gekoppelten Differentialgleichungssystems.

Das Gleichungssystem eines entkoppelten Fluidvolumens V_F ergibt sich aus einer räumlichen Diskretisierung der inhomogenen HELMHOLTZ-Gleichung nach Gleichung (4.4) zu [ZT00]

$$[-\omega^2 \mathbf{M}_F + j\omega \mathbf{C}_F + \mathbf{K}_F] \mathbf{p}(\omega) = \mathbf{f}_F(\omega). \quad (5.1)$$

Bei einer Verwendung von k_F Knoten, stehen $\mathbf{M}_F, \mathbf{C}_F, \mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{k_F \times k_F}$ entsprechend für die Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix des akustischen Fluids. Der Vektor \mathbf{f}_F enthält dabei die akustische Anregung im Fluid und \mathbf{p} beschreibt die Freiheitsgrade des Schalldrucks.

Analog zum akustischen Gleichungssystem in Matrixform, lässt sich ein strukturelles Gleichungssystem zu [ZT00]

$$[-\omega^2 \mathbf{M}_S + j\omega \mathbf{C}_S + \mathbf{K}_S] \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}_S(\omega) \quad (5.2)$$

formulieren. Mit der Anzahl k_S der strukturellen Freiheitsgrade, beschreiben $\mathbf{M}_S, \mathbf{C}_S, \mathbf{K}_S \in \mathbb{R}^{k_S \times k_S}$ die Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix der Struktur. Die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{f}_S beinhalten die

strukturellen Verschiebungsfreiheitsgrade und die Anregung auf der Struktur.

Für den Zweck der Kopplung der zwei Systeme müssen die zusätzliche Last der Schalldrücke auf der Struktur sowie die Kontinuität der normalen Schnelle an der Interaktionsfläche berücksichtigt werden. Das gekoppelte Gleichungssystem aus Fluid und Struktur stellt sich demnach zu

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{FS} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{FS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\omega) \\ \mathbf{p}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_S(\omega) \\ \mathbf{f}_F(\omega) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

dar [ZT00, S. 549f.]. Die Matrizen $\mathbf{M}_{FS} \in \mathbb{R}^{k_F \times k_S}$ und $\mathbf{K}_{FS} \in \mathbb{R}^{k_S \times k_F}$ beschreiben die Kopplung der strukturellen und akustischen Freiheitsgrade über der Interaktionsfläche. Die Beziehung dieser zwei Matrizen zueinander lautet [Pur08]

$$\mathbf{M}_{FS} = -\rho_F \mathbf{K}_{FS}^T. \quad (5.4)$$

Da die Kopplungsmatrizen in Gleichung (5.3) auf den Nebendiagonalen angeordnet sind, ergibt sich ein unsymmetrisches Gleichungssystem.

Mit Gleichung (5.3) steht eine Formulierung zur Verfügung, welche mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung gegen die physikalische Realität konvergiert. Diese diskretisierte Formulierung des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems wird im folgenden Abschnitt verwendet, um die APE in Abhängigkeit der normalen Strukturschnelle an der Interaktionsfläche abzubilden.

5.2. Harmonische Formulierung der Impedanzmatrix der Innenraumabstrahlung

Die mit Gleichung (3.1) eingeführte Energiegröße der APE wird in diesem Abschnitt in harmonischer Form in Abhängigkeit der strukturellen Oberflächenschnellen formuliert. Dabei wird das gekoppelte Gleichungssystem in der diskretisierten Formulierung gemäß Kapitel 5.1 verwendet. Die APE lässt sich durch räumliche Diskretisierung von Gleichung (3.1) zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F} \mathbf{p}^H(\omega) \mathbf{M}_F \mathbf{p}(\omega). \quad (5.5)$$

umschreiben. Darin entspricht die Matrix \mathbf{M}_F der akustischen Massematrix gemäß Gleichung (5.3). Aus Gleichung (5.3) folgt unter Vernachlässigung von Anregungstermen ($\mathbf{f}_F(\omega) = \mathbf{0}$) im akustischen Fluid für den Schalldruck $\mathbf{p}(\omega)$ eine Beziehung

$$\mathbf{p}(\omega) = \omega^2 [\mathbf{K}_F + j\omega \mathbf{C}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F]^{-1} \mathbf{M}_{FS} \mathbf{u}(\omega). \quad (5.6)$$

zur Auslenkung $\mathbf{u}(\omega)$ der Struktur. Durch Umschreiben der Strukturauslenkung $\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{v}(\omega) / j\omega$ folgt der Schalldruck $\mathbf{p}(\omega)$ in den Knoten der Kavität in Abhängigkeit der sie umgebenden Strukturschnelle $\mathbf{v}(\omega)$ zu

$$\mathbf{p}(\omega) = \omega [j(\mathbf{K}_F + j\omega \mathbf{C}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F)]^{-1} \mathbf{M}_{FS} \mathbf{v}(\omega) \quad (5.7)$$

$$= \mathbf{\Omega}(\omega) \mathbf{v}(\omega). \quad (5.8)$$

Insbesondere im dreidimensionalen Fluid folgt dabei eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden und damit eine hohe Dimension des Ausdrucks $(\mathbf{K}_F + j\omega\mathbf{C}_F - \omega^2\mathbf{M}_F)$, welcher in jedem diskreten Frequenzschritt invertiert werden muss. Um den Aufwand der Invertierung zu reduzieren, wird eine Diagonalisierung dieses Terms motiviert. Da die Eigenvektoren des entkoppelten Fluids über dem Kavitätsvolumen orthogonal sind (siehe Gleichung (4.12)), eignen sie sich für diese Diagonalisierung. Im Vorgriff sei erwähnt, dass eine Formulierung der APE basierend auf einer derartigen modalen Entwicklung der Kavitätsmoden in Kapitel 6.1 beschrieben wird.

In diesem Kapitel wird zunächst eine vollständige Invertierung des zuvor beschriebenen Ausdrucks durchgeführt, um die modale Entwicklung der Kavitätsmoden als Fehlerquelle auszuschließen. Dazu kann mit Gleichung (5.8) die räumlich diskretisierte Formulierung der APE aus Gleichung (5.5) umformuliert werden zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F} \mathbf{v}^H(\omega) \mathbf{\Omega}^H(\omega) \mathbf{M}_F \mathbf{\Omega}(\omega) \mathbf{v}(\omega) \quad (5.9)$$

$$= \mathbf{v}^H(\omega) \mathbf{\Pi}(\omega) \mathbf{v}(\omega). \quad (5.10)$$

Diese Gleichung stellt eine quadratische Funktion in Abhängigkeit der, das Fluid umgebenden, Strukturschnelle dar. Die Matrix $\mathbf{\Pi}(\omega)$ beschreibt dabei die IIE gemäß Kapitel 3.1.2 in harmonischen Koordinaten.

Die in diesem Abschnitt definierte IIE enthält durch die räumliche Diskretisierung inhärente Fehler. Ungenauigkeiten aufgrund der Beschreibung von Modeninteraktionen, wie sie in der Literatur gemäß Kapitel 3.2 beschrieben sind, enthält sie darüber hinaus nicht. Aus diesem Grund kann der Einfluss der Netzfeinheiten auf die Singulärvektoren der IIE in dieser Form isoliert untersucht werden. Die Berechnung dieser orthogonalen Vektoren auf Basis einer iterativen Singulärwertzerlegung der IIE sowie ein Vergleich mit den Schalleinstrahlungsmoden wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

5.3. Singulärwertzerlegung der Impedanzmatrix der Innenraumabstrahlung

Dieser Abschnitt beschreibt die Zerlegung der frequenzabhängigen IIE $\mathbf{\Pi}(\omega)$ in ihre Singulärwerte und -vektoren. Da es sich um ein von der Frequenz parametrisiertes Singulärwertproblem handelt, müssen die Singulärwerte entsprechend im Frequenzbereich sortiert werden. Diese Notwendigkeit liegt in der Tatsache begründet, dass für jeden diskreten Frequenzschritt Singulärvektoren berechnet werden und die entsprechenden Singulärwerte sich im resultierenden Frequenzverlauf schneiden können. Die Singulärvektoren eines beliebigen Frequenzschrittes lassen sich demnach nicht mehr eindeutig einem Singulärwert eines anderen Frequenzschrittes mit gleichem Index zuordnen. Zum Zweck einer Sortierung im Frequenzverlauf kann nach JOHNSON [Joh04] die Orthogonalität der Singulärvektoren verwendet werden. Diese muss jedoch über den gesamten Frequenzbereich eindeutig erhalten bleiben. Diese Tatsache soll im Anschluss an die Zerlegung sowie Sortierung untersucht werden.

Die IIE $\mathbf{\Pi}(\omega)$ aus Gleichung (5.10) lässt sich frequenzweise zerlegen [BSMM05, S. 293f.] zu

$$\mathbf{\Pi}(\omega) = \mathbf{Y}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) \mathbf{\Xi}^H(\omega), \quad (5.11)$$

wobei $\mathbf{\Sigma}(\omega)$ eine Diagonalmatrix ist, mit den Singulärwerten $\sigma_k(\omega)$ auf der Hauptdiagonalen. Die Matrizen $\mathbf{Y}(\omega)$ und $\mathbf{\Xi}(\omega)$ enthalten dabei in ihren Spalten die Links- und Rechtssingulärvektoren. Unter der Voraussetzung einer reellen und symmetrischen Matrix $\mathbf{\Pi}(\omega)$, was nach Gleichung (5.10) der Fall ist, ergibt sich

$$\mathbf{\Pi}(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\mathbf{Y}^T(\omega). \quad (5.12)$$

Die Singulärwertzerlegung der reellen, symmetrischen Matrix $\mathbf{\Pi}(\omega)$ ist damit äquivalent zum Eigenwertproblem, da die Singulärwerte den Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Pi}^T(\omega)\mathbf{\Pi}(\omega)$ entsprechen [DR06, S. 148]. Die Spalten der Matrix $\mathbf{Y}(\omega)$ enthalten dabei die Singulärvektoren $\mathbf{v}_k(\omega)$. Diese Singulärwertzerlegung wird über den zu betrachtenden Frequenzbereich für jeden Frequenzschritt durchgeführt und liefert so für jede Frequenz die Singulärwerte in absteigender Reihenfolge ihres Betrags. Die Singulärwertzerlegung wird in MATLAB® auf Basis der Funktion `svd.m` durchgeführt. Dabei wird die Matrix zunächst zu einer Bidiagonalmatrix reduziert und anschließend deren Singulärwerte mithilfe der QR-Zerlegung berechnet [GR70].

Das Vorgehen bei der Sortierung eines Singulärvektors $\mathbf{v}_k(\omega)$ stellt Abbildung 5.1 in schematischer Form dar. Aufgrund der Orthogonalität der Singulärvektoren sollte sich jedes Skalarprodukt eines Singulärvektors $\mathbf{v}_k(\omega)$ mit einer Spalte der Singulärvektormatrix $\mathbf{Y}(\omega)$ zu Null ergeben. Einzige Ausnahme ist, wenn das Skalarprodukt eines Singulärvektors mit sich selbst gebildet wird. Um den Singulärwertverlauf über der Frequenz zu sortieren, muss voranschreitend das Frequenzinkrement i erhöht und das Skalarprodukt des zugehörigen Singulärwerts mit allen m Spalten der Matrix $\mathbf{Y}(\omega_i)$ gebildet werden. Der resultierende Zeilenvektor sollte lediglich einen von Null verschiedenen Eintrag beim Index $\bar{m}(\omega_i) = \bar{m}$ beinhalten. Bei diesem handelt es sich um die Position, an welche der Singulärwert verschoben werden muss. Aufgrund der räumlichen Diskretisierung und daraus resultierenden Abweichungen in der Berechnung der Singulärvektoren, wird es in der Realität mehrere von Null verschiedene Einträge geben. Die Zuordnung erfolgt daher auf Basis des Maximums eines Korrelationskriteriums.

Der als Korrelationskriterium verwendete Parallelitätsindex $\gamma_{k,m}(\omega)$ des k -ten und m -ten Singulärvektors ist als Skalarprodukt zu

$$\gamma_{k,m}(\omega) = \langle \mathbf{v}_k(\omega_0), \mathbf{v}_m(\omega) \rangle \quad (5.13)$$

definiert. Da die Singulärvektoren $\mathbf{v}_k(\omega)$ in der MATLAB®-Funktion `svd.m` bereits nach der Euklidischen Norm [BSMM05, S. 266] normalisiert werden, entspricht das Korrelationskriterium dem *Modal Assurance Criterion* [All03]. Der zu sortierende Singulärvektor mit Index k wird zunächst bei einer Normalisierungsfrequenz ω_0 berechnet und anschließend für alle diskreten Frequenzinkremente miteinander verglichen. Im Fall der in dieser Arbeit postulierten Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden muss der Parallelitätsindex $\gamma_{k,m}(\omega)$ im gesamten Frequenzbereich den Wert Eins annehmen. Die Einhaltung dieser Bedingung wird im nächsten Schritt anhand einer Konvergenzstudie mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung untersucht. Die auf diese Weise sortierten Größen Singulärwert und Singulärvektor werden nachfolgend mit $\bar{\sigma}_k(\omega)$ und $\bar{\mathbf{v}}_k(\omega)$ bezeichnet.

Die Begriffe Singulärwert und Singulärvektor der IIE werden in den folgenden Abschnitten stellvertretend für die in Kapitel 4 verwendeten Begriffe Schalleinstrahlungseffizienz und Schalleinstrahlungsmode verwendet. Erstere stellen die numerisch berechneten äquivalenten Größen dar und sollten bei ausreichend feiner Diskretisierung identisch zu Letzteren sein. Nach der Hypothese der

Frequenzunabhängigkeit müssen die bei einer beliebigen Frequenz berechneten Singulärvektoren die IIE für alle Frequenzen diagonalisieren. Diese Tatsache wird nachfolgend für ein Modell mit zunehmender Netzfeinheit untersucht.

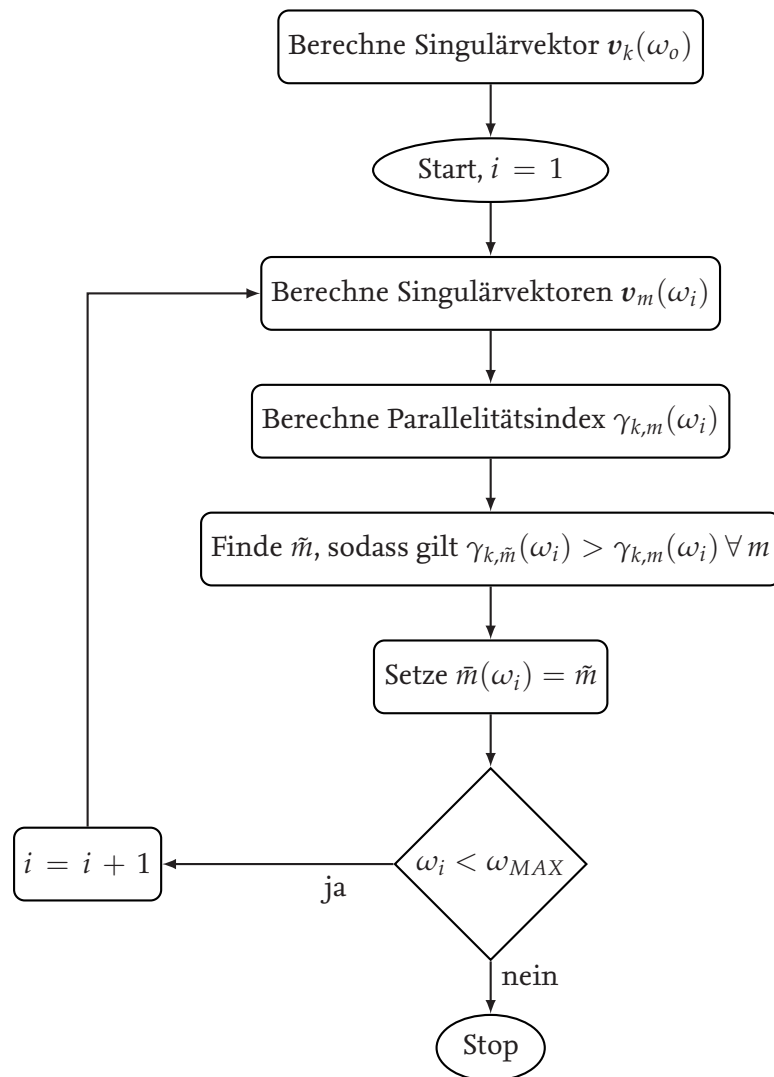


Abbildung 5.1.: Schematisches Vorgehen bei der Sortierung eines Singulärvektors $v_k(\omega)$

5.4. Konvergenzstudie der harmonischen Singulärvektoren

In diesem Abschnitt wird die Frequenzabhängigkeit der zuvor definierten Singulärvektoren untersucht. Betrachtet wird dazu das QUADERMODELL gemäß Kapitel 4.4. Die Eigenschaften von Struktur und Fluid sind in Tabelle 5.1 aufgetragen. Die Dimensionen und Materialparameter entsprechen denen des analytischen QUADERMODELLS. Die Modellierung erfolgt mithilfe der Finite-Elemente-Software ANSYS®. Es werden die vier Modelle \mathbb{P}_1 bis \mathbb{P}_4 verwendet, welche zum einen die Elemente SHELL181 und FLUID30 mit linearen Ansatzfunktionen und zum anderen SHELL281 und FLUID220 mit quadratischen Ansatzfunktionen berücksichtigen. Bei den Strukturelementen SHELL181 [Koh13,

S. 586] und SHELL281 [Koh13, S. 654] handelt es sich um 4- bzw. 8-knotige Schalenelemente. Zur Vernetzung des Fluids werden die Volumenelemente FLUID30 [Koh13, S. 430] und FLUID220 [Koh13, S. 294] mit 8 bzw. 20 Knoten verwendet. Ein Finite Elemente Modell ist in Abbildung 5.2 am Beispiel von Modell \mathbb{P}_1 abgebildet. Die Modelle \mathbb{P}_2 bis \mathbb{P}_4 weisen entsprechend Tabelle 5.2 feinere Netze auf.

Das Kapitel A.5 stellt einen Vergleich der numerisch berechneten Eigenfrequenzen der entkoppelten Teilsysteme mit den analytisch berechneten, beispielhaft für die Modelle \mathbb{P}_2 und \mathbb{P}_3 , dar. Dabei weist insbesondere das Modell \mathbb{P}_3 mit quadratischen Ansatzfunktionen eine hohe Genauigkeit auf. In den Modellen mit geringerer räumlicher Auflösung wird für diese Untersuchung der resultierende Fehler toleriert, da die Konvergenz der Formulierung zu untersuchen ist und ein Zusammenhang zwischen Ungenauigkeiten im Modell sowie den Singulärvektoren explizit analysiert werden sollen.

Tabelle 5.1.: Struktur- und Fluideigenschaften der Finite Elemente Modelle

Platte	
E-Modul E :	74000 MPa
Querkontraktionszahl μ :	0,3
Dichte ρ_S :	2700 kg/m ³
Dimension ($L_X \times L_Y$):	(0,6 × 0,8) m ²
Materialdicke h :	0,002 m
Fluid	
Dichte ρ_F :	1,204 kg/m ³
Schallgeschwindigkeit c_F :	343 m/s
Tiefe L_Z :	0,42 m

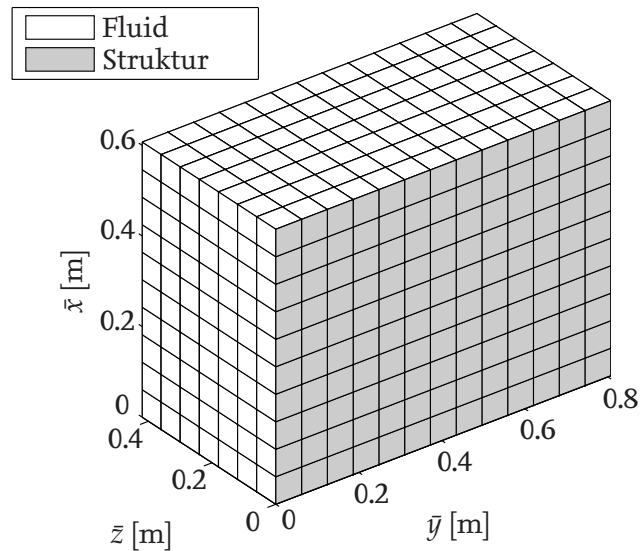
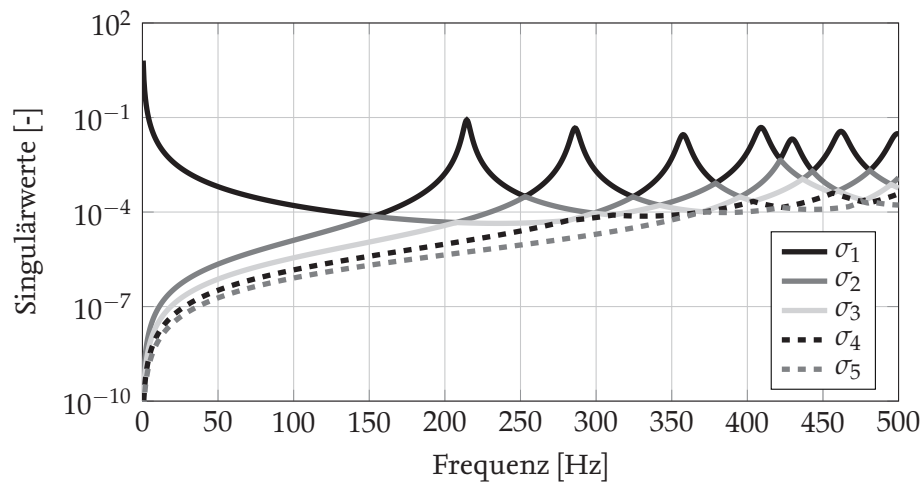
Aus ANSYS[®] werden die Masse-, Steifigkeits- sowie Kopplungsmatrizen gemäß Gleichung (5.3) nach MATLAB[®] exportiert. Die aus ANSYS[®] exportierten Systemmatrizen werden für die Berechnung der IIE $\Pi(\omega)$ nach Gleichung (5.10) verwendet. Es wird dabei für das Fluid eine viskose, der Steifigkeit proportionale Dämpfung zu

$$\mathbf{C}_F = \frac{2\zeta_F}{\omega} \mathbf{K}_F \quad (5.14)$$

mit dem konstanten Dämpfungsverhältnis $\zeta_F = 0,01$ angenommen [CZKH02]. Bis zu einer Frequenz von 500 Hz wird in Frequenzschritten von 0,5 Hz die IIE $\Pi(\omega)$ berechnet und gemäß Gleichung (5.12) eine Singulärwertzerlegung durchgeführt. Die Singulärwerte $\sigma_k(\omega)$ für $k = 1 \dots 5$

Tabelle 5.2.: Verwendete Finite Elemente Modelle für die Konvergenzstudie

Modell	Struktureller Elementtyp	Akustischer Elementtyp	Anzahl der Elemente
\mathbb{P}_1	SHELL181	FLUID30	10 × 13 × 7
\mathbb{P}_2	SHELL181	FLUID30	21 × 28 × 15
\mathbb{P}_3	SHELL281	FLUID220	21 × 28 × 15
\mathbb{P}_4	SHELL281	FLUID220	27 × 36 × 19

Abbildung 5.2.: Finite Elemente Modell des gekoppelten QUADREMODELLS (Modell IP_1)Abbildung 5.3.: Unsortierte Singulärwerte 1 bis 5 der IIE für Modell IP_2 über der Frequenz

gemäß Gleichung (5.12) sind in Abbildung 5.3 für Modell IP_2 dargestellt. Diese können sich, entgegen den analytischen Schalleinstrahlungseffizienzen in Abbildung 4.3, im Frequenzverlauf nicht schneiden, da sie frequenzweise in absteigender Reihenfolge sortiert werden. Sie sind damit nicht in allen Frequenzschritten den Singulärvektoren aus dem ersten Frequenzschritt zuzuordnen. Eine Sortierung gemäß der in Kapitel 5.3 beschriebenen Methodik ist notwendig und wird im Folgenden durchgeführt.

Die ersten fünf sortierten Singulärwerte $\bar{\sigma}_k(\omega)$ der IIE, ebenfalls für Modell IP_2 , sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Diese verlaufen kontinuierlich über der Frequenz, in Übereinstimmung mit den in Kapitel 4 beschriebenen Schalleinstrahlungseffizienzen. Der erste Singulärwert ist jedoch nicht mehr notwendigerweise der dominanteste über den gesamten betrachteten Frequenzbereich. Die Singulärwerte enthalten Maxima bei den Frequenzen, an denen die entsprechende Fluidresonanz auftritt. Es können mehrere Maxima pro Singulärwert auftreten, wenn Fluidresonanzen mit

identischer Form an der Interaktionsfläche existieren. Dieses Verhalten ist identisch zu den analytischen Schalleinstrahlungsmoden in Kapitel 4.4. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich die unterschiedliche Größenordnung der in Abbildung 5.3 bzw. Abbildung 5.4 dargestellten Singulärwerte, im Vergleich zur Schalleinstrahlungseffizienz in Abbildung 4.3, aus einer unterschiedlichen Normalisierung der Singulärvektoren $v_k(\omega)$ bzw. $\bar{v}_k(\omega)$ erklärt. Die MATLAB[®]-Funktion `svd.m` verwendet zur Normalisierung der Singulärvektoren die Euklidische Norm [BSMM05, S. 266]; die akustischen Eigenformen sind dagegen durch die Maximumnorm normalisiert [BSMM05, S. 267].

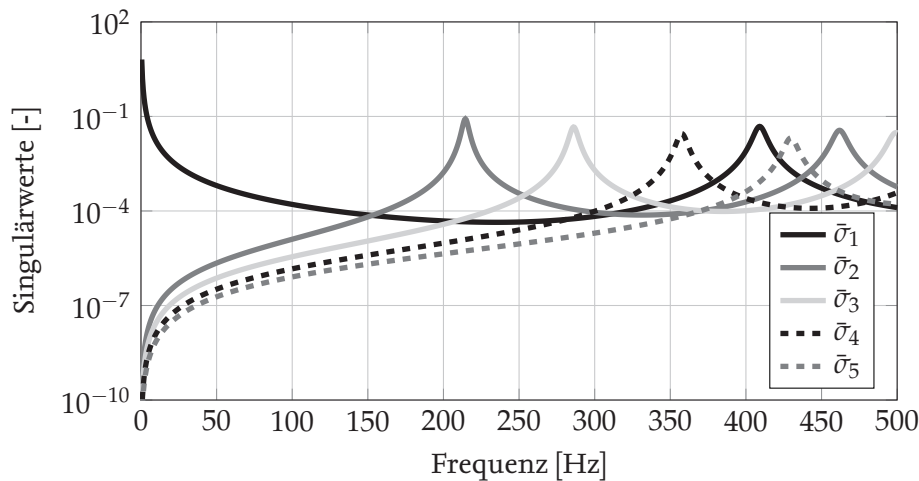


Abbildung 5.4.: Sortierte Singulärwerte 1 bis 5 der IIE für Modell \mathbb{P}_2 über der Frequenz

Im vorangegangenen Abschnitt wurde mit Gleichung (5.13) der Parallelitätsindex als Korrelationskriterium der Singulärvektoren über der Frequenz vorgestellt. Dieser wird anschließend zur Bestimmung ihrer Frequenzabhängigkeit in Abhängigkeit des Diskretisierungsgrades ausgewertet. Die Parallelitätsindizes $\gamma_{k,\bar{m}}(\omega)$ der ersten fünf sortierten Singulärvektoren für die vier verwendeten Modelle zeigt Abbildung 5.5 über der Frequenz. Dabei steht das Skalar $\bar{m} = \bar{m}(\omega)$ für den gemäß der Sortierung nach Abbildung 5.1 verschobenen, von der Frequenz abhängigen Index. Als Normalisierungsfrequenz für die Berechnung der Parallelität nach Gleichung (5.13) wird 0,5 Hz verwendet. Wie zuvor beschrieben, bedeutet eine Parallelität gleich Eins, dass sich der Singulärvektor nicht mit der Frequenz ändert. Es wird dabei eine Konvergenz des Parallelitätsindexes gegen diesen Wert mit einer steigenden Netzfeinheit der Modelle deutlich. Diese Konvergenz ist für alle Singulärvektoren über den gesamten betrachteten Frequenzbereich erkennbar. Des Weiteren wird eine Ähnlichkeit im Verlauf von $\gamma_{1,\bar{m}}$ sowie $\gamma_{5,\bar{m}}$ deutlich. Während für die übrigen Singulärvektoren eine breitbandige Korrelation größer 0,998 gewährleistet ist, sinken die zwei vorher genannten Parallelitätsindizes abseits der Normalisierungskreisfrequenz schmalbandig auf bis zu 0,7 ab. Die Tatsache, dass dieses Absinken bei den gleichen Frequenzen geschieht, lässt eine Abhängigkeit der zwei Singulärvektoren vermuten.

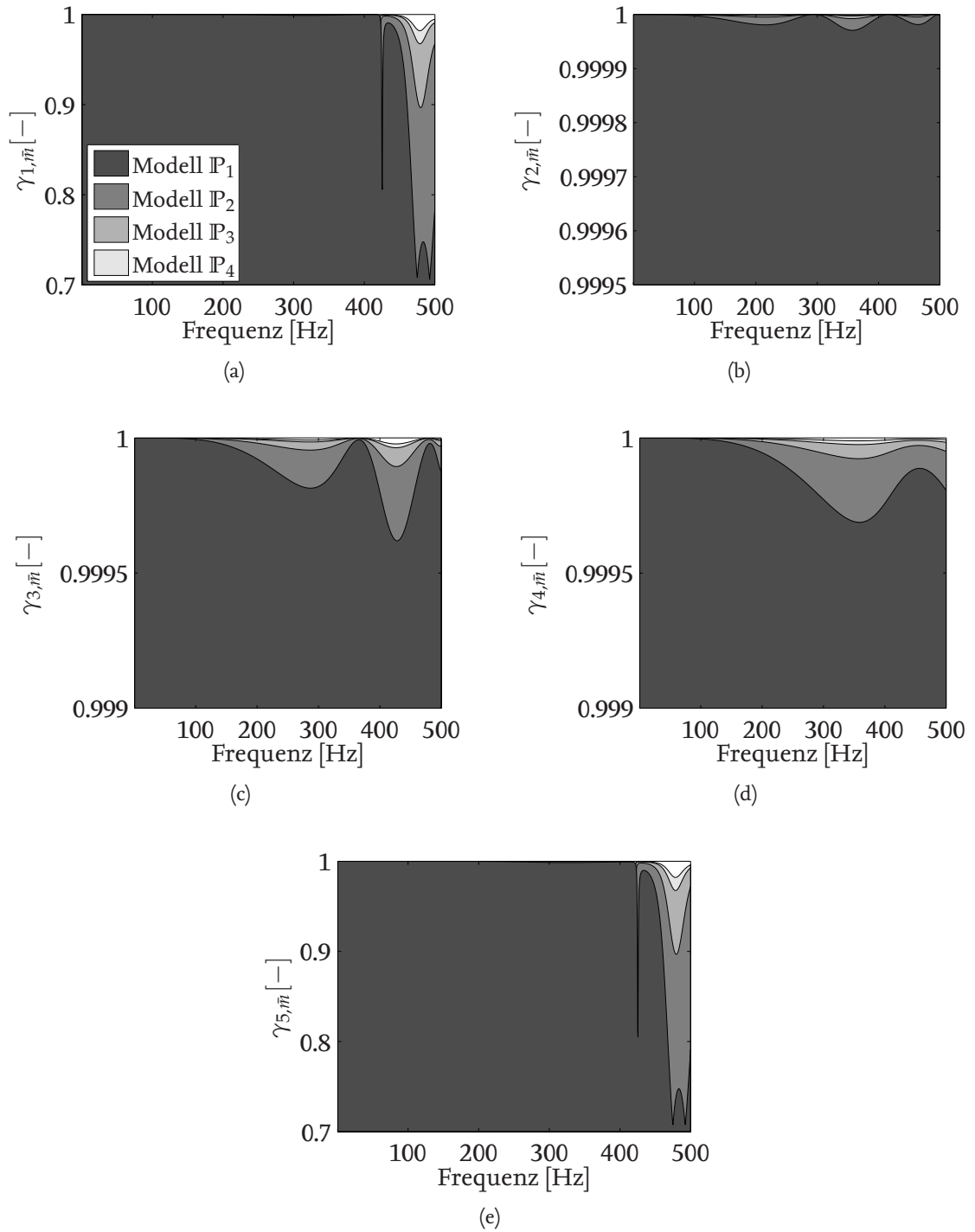


Abbildung 5.5.: Parallelitätsindizes der Singulärvektoren 1 bis 5 über der Frequenz

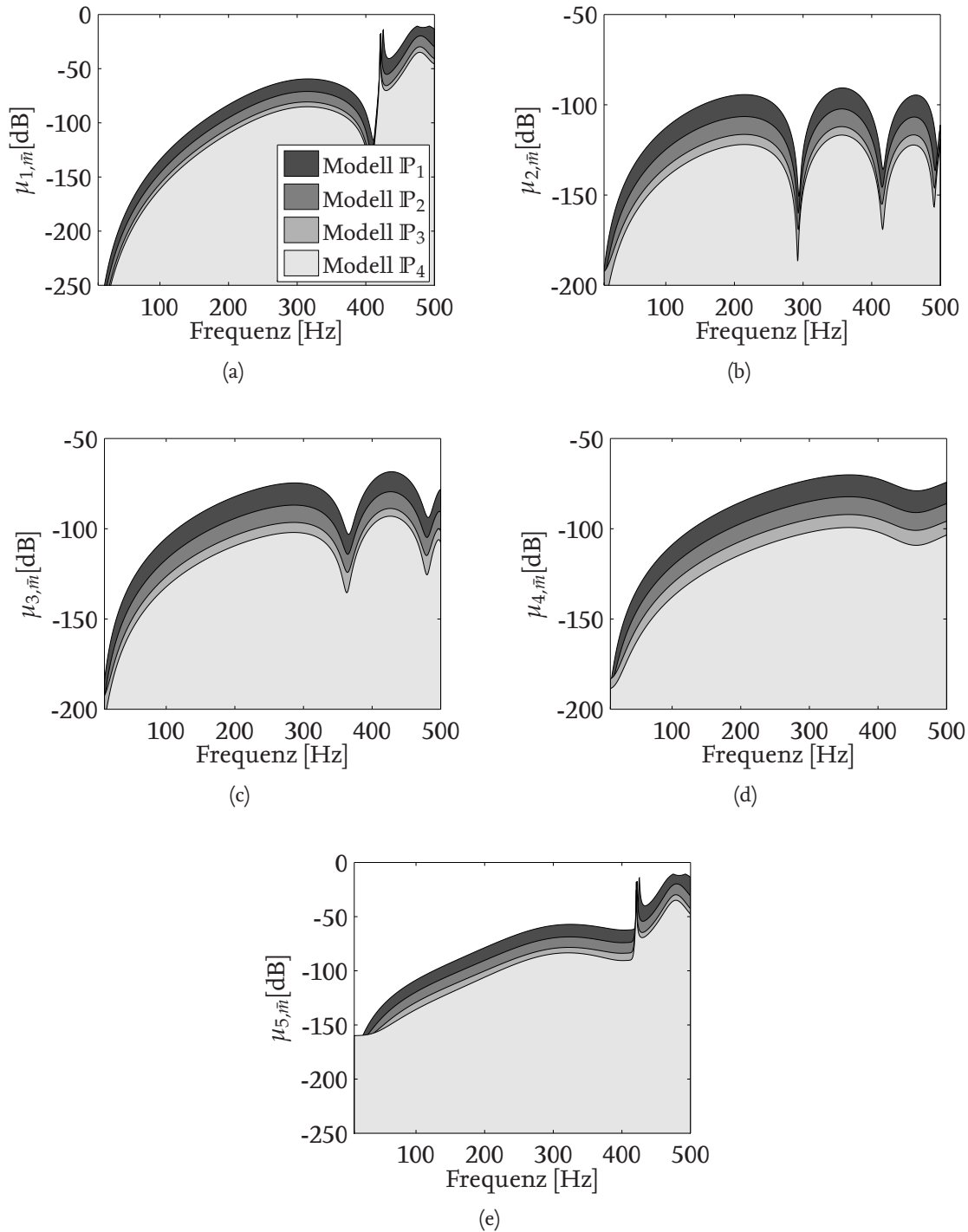


Abbildung 5.6.: Logarithmischer Fehler der Parallelitätsindizes für die Singulärvektoren 1 bis 5 über der Frequenz

Um die Größenordnung der Abweichung der Parallelitätsindizes von einem Wert Eins genauer aufzuzeigen, wird diese logarithmisch betrachtet. Der logarithmische Fehler der Parallelitätsindizes ist

dabei zu

$$\mu_{k,\bar{m}}(\omega) = 20 \log(1 - \gamma_{k,\bar{m}}(\omega)) \text{ dB} \quad (5.15)$$

definiert und in Abbildung 5.6 für die Singulärvektoren $\bar{v}_1(\omega)$ bis $\bar{v}_5(\omega)$ dargestellt. Auch wenn die Größenordnung des Fehlers, mit Ausnahme der Singulärvektoren $\bar{v}_1(\omega)$ und $\bar{v}_5(\omega)$, für die Modelle \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 bereits sehr gering ist, wird eine stetige Abnahme des Fehlers mit zunehmender Feinheit der räumlichen Diskretisierung über den gesamten Frequenzbereich deutlich. Eine Diagonalisierung der IIE gemäß Gleichung (5.12) mit bei einer Normalisierungsfrequenz fixierten Singulärvektoren ist damit nur unter Einhaltung einer ausreichend feinen räumlichen Auflösung mit hinreichender Genauigkeit durchzuführen. Für Singulärvektoren $\bar{v}_1(\omega)$ und $\bar{v}_5(\omega)$ offenbart sich darüber hinaus eine Änderung der Frequenz, bei der eine schmalbandige Frequenzabhängigkeit auftritt. Dies wird, wie zuvor beschrieben, durch den starken Fehler der Parallelitätsindizes deutlich. Zusätzlich ist zu erkennen, dass die Frequenz der Einbrüche der Parallelitätsindizes $\gamma_{1,\bar{m}}(\omega)$ und $\gamma_{5,\bar{m}}(\omega)$ mit einer Annäherung der sortierten Singulärwerte $\bar{\sigma}_1(\omega)$ sowie $\bar{\sigma}_5(\omega)$ in Abbildung 5.4 übereinstimmt. Der Frequenzbereich scheint dabei von einer starken Änderung der Singulärvektoren geprägt zu sein, welche im nachfolgenden Abschnitt unter Verwendung einer feineren Frequenzauflösung untersucht werden soll.

5.5. Ausweichende Singulärwerte

In Abbildung 5.4 scheinen sich die Singulärwerte $\bar{\sigma}_1(\omega)$ und $\bar{\sigma}_5(\omega)$ bei einer Frequenz von ca. 422 Hz und einer Frequenzauflösung von 0,5 Hz zu schneiden. Dieser schmalbandige Frequenzbereich geht entsprechend Abbildung 5.5 mit einer starken Änderung der Singulärvektoren einher. Wird der Frequenzbereich von 421 bis 422,5 Hz dagegen mit einem Inkrement von 0.001 Hz aufgelöst, so zeigt sich gemäß Abbildung 5.7 für Modell \mathbb{P}_2 , dass die Singulärwerte $\bar{\sigma}_1(\omega)$ und $\bar{\sigma}_5(\omega)$ sich bei einer Annäherung ausweichen. Das Phänomen des Ausweichens von parametrisierten Eigenwerten ist vielfach in der Literatur bekannt [Lei74, Liu02]. LEISSA [Lei74] untersucht das Ausweichen beispielsweise anhand von Rechteckplatten, deren Eigenwerte in Abhängigkeit ihres Seitenverhältnisses parametrisiert sind. Dieses Phänomen wird mit der folgenden Aussage beschrieben: „An vielen Stellen der Literatur über Eigenwertprobleme der mathematischen Physik kommen Kurven vor, die sich nähern, aber bevor sie sich schneiden, wieder auseinander laufen. Der Verfasser postuliert, dass dieses unschöne Verhalten durch die Approximation in der Erfassung der physikalischen Wirklichkeit verursacht werden kann“ [Lei74, S.111]. Die Existenz ausweichender Eigenwerte wurde darüber hinaus auch für kontinuierliche Systeme bewiesen [PM86]. Dennoch scheint LEISSA’s Begründung auch für das vorliegende Problem der Singulärwerte im räumlich diskretisierten Fall zu gelten, da sich die analytischen Schalleinstrahlungseffizienzen $s_{0,0}$ und $s_{0,2}$ nach Gleichung (4.36), welche in Abbildung 4.3 abgebildet sind, eindeutig schneiden. Auch das mit dem Ausweichen einhergehende Phänomen der Änderung der Eigenvektoren ist in der Literatur bekannt [Pie88]. Die sortierten Singulärvektoren $\bar{v}_1(\omega)$ und $\bar{v}_5(\omega)$ sind in Abbildung 5.8 für verschiedene Frequenzschritte in einem Schnitt bei $x = 0,314$ m dargestellt. Die ausgewählten Frequenzschritte entsprechen dabei drei Frequenzen im Bereich der ausweichenden Singulärwerte sowie der Normalisierungsfrequenz von 0,5 Hz. Zusätzlich zu den Kavitätseigenformen an der Interaktionsfläche, sind in den Singulärvektoren die strukturellen Randbedingungen an den Positionen $\bar{y} = 0$ m sowie $\bar{y} = 0,8$ m zu erkennen. Insbesondere im lokalen Maximum bzw. Minimum des jeweiligen Singulärwertes, welches einer

Frequenz von ca. 421,8 Hz entspricht, weisen die Singulärvektoren eine hohe Änderung auf. Darüber nähern sie sich dem jeweils anderen Singulärvektor in der Normalisierungsfrequenz an. Sie zeigen demnach ein Verhalten, welches einem Schneiden der Singulärwerte entspricht. Mit keinem der in dieser Arbeit verwendeten Modelle \mathbb{P}_1 bis \mathbb{P}_4 konnte belegt werden, dass sich die numerisch berechneten Singulärvektoren im vorliegenden Frequenzintervall schneiden, wie es analytisch anhand der Schalleinstrahlungseffizienzen vorhergesagt wurde.

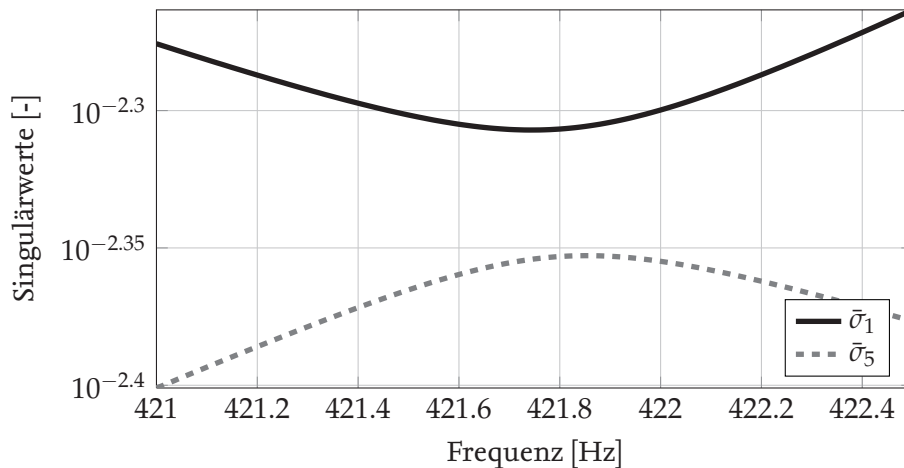


Abbildung 5.7.: Sortierte Singulärwerte 1 und 5 der IIE für Modell \mathbb{P}_2 über der Frequenz

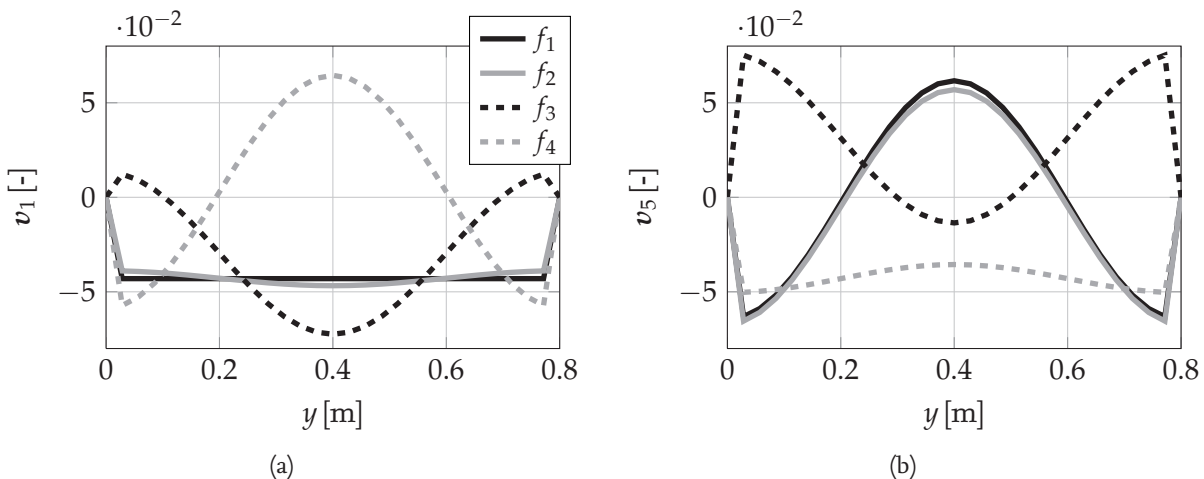


Abbildung 5.8.: Singulärvektoren 1 (links) und 5 (rechts) für Modell \mathbb{P}_2 im Schnitt $x = 0,314$ m ($f_1 = 0,5$ Hz; $f_2 = 420$ Hz; $f_3 = 421,8$ Hz; $f_4 = 423,5$ Hz)

Das Ausweichen der Singulärwerte stellt eine schmalbandige Verletzung der Frequenzunabhängigkeit der numerisch berechneten Singulärvektoren dar. Da dieses Verhalten in Schnittpunkten der Singulärwerte auftritt, und damit nicht in resonanten Frequenzbereichen, resultiert ein geringer Einfluss auf die Vorhersage der APE. Durch Fixierung der Singulärvektoren bei einer Normalisierungsfrequenz kann ein Schneiden der Singulärwerte erzwungen werden. Die Sinnhaftigkeit einer derartigen Annahme ist vom jeweiligen Problem der Schalleinstrahlung abhängig.

Zusammenfassung

Das vorliegende Kapitel leitet eine Formulierung der APE in quadratischer Abhängigkeit von der harmonischen Strukturschnelle auf der Grundlage der FEM her. Diese erlaubt gemäß der **Arbeitshypothese 2** eine neuartige Untersuchung der numerischen Schalleinstrahlungsmoden in Form der Singulärvektoren, welche losgelöst von einer Modenkopplung der Teilsysteme durchführbar ist. Letztere Methode entspricht dem gemäß Kapitel 3.3 in der Literatur üblichen Vorgehen bei der Berechnung der Singulärvektoren. Des Weiteren kann diese Formulierung ein wichtiges Werkzeug darstellen, welches es ermöglicht, die Schalleinstrahlungsmoden und deren Frequenzunabhängigkeit für komplexe Schalleinstrahlungsmodelle zu untersuchen, deren entkoppelte akustische Eigenvektoren und -frequenzen sich nicht gemäß Kapitel 4 analytisch beschreiben lassen. Für die harmonische Formulierung nach **Arbeitshypothese 2** lässt sich dabei die Aussage treffen, dass die Frequenzunabhängigkeit der numerisch berechneten Singulärvektoren für das hier betrachtete QUADERMODELL in Konvergenz gezeigt werden kann. Auch bei der Verwendung feiner Diskretisierungsgrade sowie quadratischer Ansatzfunktionen führt die gegenseitige Annäherung von Singulärwerten mindestens zu einer schmalbandigen Frequenzabhängigkeit, wenn nicht sogar zu einem Ausweichen der Singulärwerte. Die Konvergenz der numerischen Singulärvektoren ist jedoch über den gesamten Frequenzbereich zu beobachten und gibt damit keinen Anlass, die mit **Arbeitshypothese 1** postulierte Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden in Frage zu stellen. Für praktische Implementierungen ist folglich abzuwägen, ob die Frequenzabhängigkeit der numerisch berechneten Singulärvektoren für den vorliegenden Fall zu berücksichtigen ist, oder ob der schmalbandige Genauigkeitsverlust zu Gunsten einer geringeren Modellordnung toleriert werden kann.

Das folgende Kapitel befasst sich mit der Fragestellung, ob die IIE in Form von entkoppelten Eigenvektoren der Teilsysteme in ihrer Ordnung reduzieren lässt. Im Fokus steht dabei die Frage, wie sich die Ordnungsreduktionen auf die Genauigkeit bei der Berechnung von APE bzw. der Singulärvektoren und insbesondere deren Frequenzunabhängigkeit auswirkt.

6. Singulärvektoren durch Modenkopplung der Teilsysteme

Bisher wurde lediglich die Kavität in Form einer modalen Entwicklung im Zuge der analytischen Betrachtung berücksichtigt. Dieses Kapitel führt eine zusätzliche modale Entwicklung der Strukturschwingung durch und untersucht die Kopplung von Moden der Teilsysteme. Dabei wird das Ziel verfolgt, die IIE auf Basis von analytischen Eigenformen bzw. numerisch berechneten Eigenvektoren der entkoppelten Teilsysteme zu quantifizieren. Aus dieser modal assemblierten IIE werden analog zur harmonischen Formulierung die Singulärvektoren durch eine Singulärwertzerlegung berechnet. Es werden Ungenauigkeiten untersucht, welche sich durch das Abschneiden von hochfrequenten Modenanteilen ergeben. Diese werden in vergleichender Form für die analytische sowie numerische Modenkopplung aufgezeigt. Aufgrund des Potentials zur Reduktion der Modellordnung ist insbesondere die numerische, entkoppelte Betrachtung auch für komplexe Modellgeometrien geeignet.

6.1. Impedanzmatrix der Innenraumeinstrahlung durch Modenkopplung der Teilsysteme

Der in diesem Abschnitt beschriebene Ansatz zur Formulierung der IIE $\Pi(\omega)$ basiert auf einer Interaktion von entkoppelten Eigenformen bzw. -vektoren. Diese Modeninteraktion wird in diesem Abschnitt zunächst in ihrer Theorie beschrieben. Sie wird anschließend durch die bekannten Ansatzfunktionen der Eigenformen auf den analytischen Fall und durch räumliche Diskretisierung auf den numerischen Fall unter Verwendung von Eigenvektoren erweitert.

Zusätzlich zur in Kapitel 4.2 eingeführten modalen Entwicklung des Kavitätsfluids werden strukturelle modale Freiheitsgrade $\bar{q}_{S,i}(\omega)$ durch

$$v(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{q}_{S,i}(\omega) \Psi_i(\bar{\mathbf{r}}_S) \quad (6.1)$$

eingeführt. Die Freiheitsgrade $\bar{q}_{S,i}(\omega)$ beschreiben die modalen Schnelleamplituden der Struktur und erfüllen im Frequenzbereich

$$\bar{q}_{S,i}(\omega) = j\omega q_{S,i}(\omega), \quad (6.2)$$

mit den modalen Verschiebungsamplituden $q_{S,i}(\omega)$. Die akustischen modalen Freiheitsgrade $q_{F,j}$ sind mit

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{F,j}(\omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \quad (6.3)$$

bereits aus Gleichung (4.10) bekannt. Die APE berechnet sich mithilfe der modalen Entwicklung gemäß Gleichung (4.13) zu

$$E_P(\omega) = \frac{1}{4\rho_F c_F^2} \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j |q_{F,j}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} L_j |q_{F,j}(\omega)|^2. \quad (6.4)$$

Dabei wird äquivalent zu Gleichung (4.13) die Eigenschaft der gegenseitigen Orthogonalität der akustischen Eigenformen $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F)$ ausgenutzt. Es wird zusätzlich die Substitution

$$L_j = \frac{\Gamma_j}{4\rho_F c_F^2} \quad (6.5)$$

durchgeführt. Die akustischen modalen Freiheitsgrade $q_{F,j}(\omega)$ sind in Abhängigkeit der strukturellen modalen Schnellefreiheitsgrade $\bar{q}_{S,i}(\omega)$ gemäß

$$q_{F,j}(\omega) = Z_{j,i}(\omega) \bar{q}_{S,i}(\omega) \quad (6.6)$$

zu formulieren. Die Elemente in $Z_{j,i}(\omega)$ beschreiben dabei die Impedanz zwischen der akustischen Eigenform mit dem Index j und der strukturellen Eigenform mit dem Index i . Zur Bestimmung dieser Impedanzfaktoren $Z_{j,i}(\omega)$ wird in diesem Abschnitt die in Gleichung (4.14) eingeführte GREEN'sche Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F | \bar{\mathbf{r}}_F, \omega)$ verwendet.

Durch Einsetzen von Gleichungen (6.1), (6.3) sowie (4.14) in die mit Gleichung (4.9) definierte KIRCHHOFF-HELMHOLTZ-Integralgleichung ergibt sich

$$q_{F,j}(\omega) = j\omega\rho_F \frac{\bar{q}_{S,i}(\omega)}{\Gamma_j(\kappa_j^2 + 2j\zeta_j\kappa_j\kappa - \kappa^2)} \int_{O_S} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S) \Psi_i(\bar{\mathbf{r}}_S) dO. \quad (6.7)$$

Aus Gleichung (6.7) können von der Frequenz unabhängige modale Kopplungsfaktoren $B_{j,i}$ zu

$$B_{j,i} = \int_{O_S} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_S) \Psi_i(\bar{\mathbf{r}}_S) dO. \quad (6.8)$$

substituiert werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass Gleichung (6.7) eine zu Gleichung (6.6) identische Form besitzt. Demzufolge kann die modale Impedanz $Z_{j,i}(\omega)$ zu

$$Z_{j,i}(\omega) = \frac{j\omega\rho_F}{\Gamma_j(\kappa_j^2 + 2i\zeta_j\kappa_j\kappa - k^2)} B_{j,i} \quad (6.9)$$

definiert werden. Für die APE folgt durch Einsetzen der Gleichung (6.7) in Gleichung (6.4)

$$E_P(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j |Z_{j,i}(\omega) \bar{q}_{S,i}(\omega)|^2. \quad (6.10)$$

Die auf diese Weise erhaltene Darstellung der APE ist abhängig von den quadratischen Modenamplituden $\bar{q}_{S,i}(\omega)$ der Struktur. Bei der Verwendung einer endlichen Anzahl von n_F Fluidmoden und n_S Strukturmoden lassen sich die Kopplungsfaktoren $B_{j,i}$ sowie die modale Impedanz $Z_{j,i}(\omega)$ in Matrixschreibweise als $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_S}$ sowie $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n_F \times n_S}$ formulieren. Zusätzlich wird die Diagonalmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$ eingeführt, welche auf der Hauptdiagonalen die Terme L_j und Nullen auf allen Nebendiagonalen enthält. Die APE ergibt sich daraus zu

$$E_P(\omega) = \bar{\mathbf{q}}_S^H(\omega) \mathbf{Z}^H(\omega) \mathbf{L} \mathbf{Z}(\omega) \bar{\mathbf{q}}_S(\omega) = \bar{\mathbf{q}}_S^H(\omega) \tilde{\mathbf{\Pi}}(\omega) \bar{\mathbf{q}}_S(\omega). \quad (6.11)$$

Anhand der modalen IIE $\tilde{\Pi}(\omega)$ lässt sich gemäß Kapitel 5.3 eine Zerlegung in die Singulärwerte sowie -vektoren erreichen. Man erhält damit auch im Fall der Modeninteraktion ein von der Frequenz parametrisiertes Singulärwertproblem. Die Auswirkungen der Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl an Eigenformen auf die Gültigkeit der Formulierung werden anschließend untersucht. Als Vergleichsreferenz dient dabei die in Kapitel 5 vorgestellte harmonische Formulierung. Diese stellt die Grenze dar, gegen die das modale Interaktionsmodell mit zunehmender Anzahl an entkoppelten Eigenformen konvergiert. Das nachfolgende Kapitel spezifiziert die Theorie der modalen Interaktion für analytisch berechnete Eigenformen und numerische Eigenvektoren.

6.2. Modellreduktion durch entkoppelte Eigenvektoren

Die Theorie zur Beschreibung der modalen IIE $\tilde{\Pi}(\omega)$, basierend auf den Moden der Teilsysteme, wird in diesem Abschnitt spezifiziert auf analytische Eigenformen und numerische Eigenvektoren. Dabei werden die analytisch beschreibbaren Modelle QUADERMODELL sowie ZYLINDERMODELL aus Kapitel 4.3 verwendet.

6.2.1. Analytische Modellreduktion

Die analytischen Eigenformen der akustischen Domäne wurden für die zwei Modelle bereits in Kapitel 4 vorgestellt. Dieses Kapitel stellt für beide Systeme die Berechnung der strukturellen Eigenformen und -frequenzen vor. In Kombination mit den analytischen Eigenfrequenzen und -formen der jeweiligen akustischen Domäne erlauben diese eine analytische Auswertung des Oberflächenintegrals der Kopplungsterme gemäß Gleichung (6.8). Die auf diese Weise berechneten modalen struktur-akustischen Kopplungsterme $B_{j,i}$ sind die Grundlage für einen anschließenden Vergleich mit diskretisierten numerischen Modellen.

Quadermodell

Die Eigenformen und -frequenzen einer ebenen Rechteckplatte gemäß Abbildung 4.1 ergeben sich aus einer modalen Entwicklung der homogenen Plattendifferentialgleichung [Lei69, S. 41ff.]. Die strukturellen Eigenkreisfrequenzen, mit der Randbedingung der allseitig gelenkigen Lagerung, lassen sich analytisch zu

$$\omega_{u,v} = \left[\left(\frac{u\pi}{L_X} \right)^2 + \left(\frac{v\pi}{L_Y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho_s h}} \quad (6.12)$$

berechnen, mit den modalen Indizes $u, v \in \mathbb{N}$. Darin beschreibt das Skalar D die Biegesteifigkeit der Platte zu

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (6.13)$$

mit dem E-Modul E , der Querkontraktionszahl μ und der Plattendicke h . Die zugehörigen Eigenformen ergeben sich zu

$$\Psi_{u,v}(\bar{x}, \bar{y}) = \sin\left(\frac{u\pi\bar{x}}{L_X}\right) \sin\left(\frac{v\pi\bar{y}}{L_Y}\right). \quad (6.14)$$

Auswerten des Oberflächenintegrals aus Gleichung (6.8) ergibt für die struktur-akustischen Kopplungsterme

$$B_{(l,m)(u,v)} = \int_{O_S} \Phi_{l,m}(\bar{\mathbf{r}}_S) \Psi_{u,v}(\bar{\mathbf{r}}_S) dO \quad (6.15)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ für } l = u, m = v \\ \frac{L_X L_Y}{\pi^2} \left(\frac{1 - (-1)^{u+l}}{u^2 - l^2} \right) \left(\frac{1 - (-1)^{v+m}}{v^2 - m^2} \right) uv & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (6.16)$$

Ein von Null verschiedener Kopplungsterm $B_{(l,m)(u,v)}$ tritt beim QUADERMODELL dementsprechend auf, wenn die entkoppelten Eigenformen in den beiden Raumrichtungen unterschiedliche modale Indizes aufweisen.

Zylindermodell

Dieser Abschnitt betrachtet eine strukturelle Zylinderschale mit einfach aufgelagerten Rändern in den Ebenen $\bar{z} = 0$ sowie $\bar{z} = L_Z$ gemäß Abbildung 4.2. Die analytische Berechnung der Eigenfrequenzen erfolgt auf Basis der charakteristischen Gleichung [Lei73, S. 44ff.]. Letztere entspricht im Fall der Zylinderschale einer bikubischen Gleichung, welche Konstanten der DONNELL-MUSHTARI-Theorie sowie modifizierende Konstanten gemäß der verwendeten Schalentheorie enthält. Die Lösung der charakteristischen Gleichung resultiert in sechs Eigenfrequenzen, welche den Eigenformen in radialer, tangentialer und axialer Richtung zugeordnet werden müssen. Eine Vereinfachung ist möglich, wenn lediglich die radiale Komponente benötigt wird [Soe80]. Letzteres ist der Fall, da gemäß Gleichung (6.8) ausschließlich die normale Komponente der Strukturschnelle zur Kopplung beiträgt. Demnach lassen sich die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{\hat{u},\hat{v}}$ der Struktur zu

$$\omega_{\hat{u},\hat{v}}^2 = \frac{\left[\frac{Eh\eta_{\hat{u}}^4}{R^2 L_Z^4 \left(\frac{\hat{v}^2}{R^2} + \frac{\eta_{\hat{u}}^2}{L_Z^2} \right)^2} + D \left(\frac{\hat{v}^2}{R^2} + \frac{\eta_{\hat{u}}^2}{L_Z^2} \right)^2 \right]}{\rho_S h}, \quad (6.17)$$

berechnen, mit den strukturellen modalen Indizes $\hat{u} \in \mathbb{N}$ sowie $\hat{v} \in \mathbb{N}_0$. Die Skalare $\eta_{\hat{u}}$ beschreiben die Nullstellen der analogen Balkengleichung mit identischen Randbedingungen [Soe80]. Für einfach aufgelagerte Ränder gilt $\eta_{\hat{u}} = \hat{u}\pi$. Die Biegesteifigkeit D entspricht jener der ebenen Platte gemäß Gleichung (6.13). Die strukturellen Eigenformen $\Psi_{\hat{u},\hat{v}}(\theta, \bar{z})$ des Zylinders berechnen sich zu

$$\Psi_{\hat{u},\hat{v}}(\theta, \bar{z}) = \sin\left(\frac{\hat{u}\pi\bar{z}}{L_Z}\right) \{\cos(\hat{v}\theta) + \sin(\hat{v}\theta)\}. \quad (6.18)$$

Die modalen Kopplungsterme $B_{(\hat{l},\hat{m},\hat{n})(\hat{u},\hat{v})}$ lassen sich aus dem Oberflächenintegral gemäß Gleichung (6.8) analytisch berechnen. Diese ergeben sich für das ZYLINDERMODELL zu

$$B_{(\hat{l},\hat{m},\hat{n})(\hat{u},\hat{v})} = \begin{cases} 2J_{\hat{m}}(\tau_{\hat{n},\hat{m}}) L_Z R \hat{u} \frac{(1 - (-1)^{\hat{u}+\hat{l}})}{\hat{u}^2 - \hat{l}^2}, & \text{ für } \hat{m} = \hat{v}, \frac{\hat{u}+\hat{l}}{2} \notin \mathbb{N} \\ 0, & \text{ sonst.} \end{cases} \quad (6.19)$$

Bei der Modenkopplung des ZYLINDERMODELLS existieren von Null verschiedene Kopplungsterme bei identischen umlaufenden Indizes sowie bei Kombinationen von geraden und ungeraden axialen Indizes. Es sei angemerkt, dass diese Kopplungsbeziehung bedeutend selektiver ist, als im Fall des QUADERMODELLS.

6.2.2. Numerische Modellreduktion

Die zuvor hergeleiteten analytischen Kopplungsterme sollen mit numerisch berechneten Kopplungstermen verglichen werden. Zu diesem Zweck wird eine räumliche Diskretisierung der strukturellen und akustischen Teilsysteme gemäß Kapitel 5 sowie eine numerische Eigenwertzerlegung durchgeführt.

Die strukturelle und akustische modale Entwicklung der räumlich diskretisierten, entkoppelten Teilsysteme wird als Linearkombination zu

$$u(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = \mathbf{u}(\omega) = \sum_{i=1}^{n_S} q_{S,i}(\omega) \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{q}_S(\omega) \quad (6.20)$$

sowie

$$p(\bar{\mathbf{r}}_F, \omega) = \mathbf{p}(\omega) = \sum_{j=1}^{n_F} q_{F,j}(\omega) \boldsymbol{\phi}_j = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}_F(\omega) \quad (6.21)$$

gleichermaßen durchgeführt [Pur08]. Darin beschreiben $\boldsymbol{\psi}_i$ und $\boldsymbol{\phi}_j$ die entkoppelten strukturellen und akustischen Eigenvektoren sowie $q_{S,i}$ und $q_{F,j}$ die jeweiligen modalen Amplituden. Es wird die Anzahl n_S an Struktureigenvektoren und n_F an Fluideigenvektoren verwendet. Die Matrizen $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{k_F \times n_F}$ und $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{k_S \times n_S}$ enthalten gleichermaßen die akustischen sowie strukturellen Eigenvektoren in ihren Spalten. Diese Eigenvektoren resultieren aus den ungedämpften, generalisierten Eigenwertproblemen zu

$$\mathbf{K}_S \boldsymbol{\psi}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}_S \boldsymbol{\psi}_i \quad (6.22)$$

sowie

$$\mathbf{K}_F \boldsymbol{\phi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}_F \boldsymbol{\phi}_j. \quad (6.23)$$

In ANSYS® erfolgt diese Zerlegung der Systemmatrizen in Eigenvektoren und -werte mithilfe eines angepassten BLOCK LANCZOS-Verfahrens [GLS94]. Die resultierenden Eigenvektoren der Teilsysteme werden dabei derart normiert, dass eine Links- und Rechtsmultiplikation der jeweiligen Massmatrix mit der Eigenvektormatrix die Einheitsmatrix ergibt.

Die Substitution der entkoppelten modalen Entwicklung aus Gleichung (6.20) und Gleichung (6.21) in der gekoppelten Gleichung (5.3) ergibt

$$(-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}} + j\omega \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{q}(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}(\omega), \quad (6.24)$$

mit dem Vektor der modalen Freiheitsgrade

$$\mathbf{q}(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_S(\omega) \\ \mathbf{q}_F(\omega) \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

und der modalen Anregung

$$\tilde{\mathbf{f}}(\omega) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_S(\omega) \\ \mathbf{f}_F(\omega) \end{Bmatrix}. \quad (6.26)$$

Die Systemmatrizen des modal reduzierten Differentialgleichungssystems in Gleichung (6.24) sind zu

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{B} & \mathbf{E}_F \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{C}_S \mathbf{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_F \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_S & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_F \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

substituiert. Darin sind die Diagonalmatrizen

$$\mathbf{\Lambda}_S = \begin{bmatrix} \omega_{S,1}^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_{S,n_S}^2 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

und

$$\mathbf{\Lambda}_F = \begin{bmatrix} \omega_{F,1}^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_{F,n_F}^2 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

enthalten, welche die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen der Teilsysteme auf der Hauptdiagonalen enthalten. Die Einheitsmatrizen \mathbf{E}_S sowie \mathbf{E}_F haben die Dimensionen $(n_S \times n_S)$ und $(n_F \times n_F)$ gleichermaßen. Die Matrix der modalen Kopplung ergibt sich dabei aus der räumlichen Diskretisierung von Gleichung (6.8) zu

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_{FS} \mathbf{\Psi}. \quad (6.32)$$

Darin entspricht die Matrix \mathbf{K}_{FS} der struktur-akustischen Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (5.3). Unter der Voraussetzung, dass die Dämpfung als Vielfaches von Masse- bzw. Steifigkeitsmatrix geschrieben wird, enthält das auf diese Weise erhaltene reduzierte Differentialgleichungssystem in Gleichung (6.24) nun auf den Hauptdiagonalen Diagonalmatrizen. Aufgrund der vollen Besetzung von \mathbf{B} entspricht diese Art der Modellreduktion jedoch keiner Diagonalisierung des gesamten Gleichungssystems. Eine derartige Diagonalisierung auf Basis der gekoppelten Eigenvektoren ist in Kapitel A.4 beschrieben. Die mit Gleichung (6.32) erhaltene modale Kopplungsmatrix wird im folgenden Abschnitt mit den zuvor definierten analytischen Definitionen verglichen, da sie das Flächenintegral aus Gleichung (6.8) approximiert.

6.2.3. Vergleich der analytischen und numerischen Kopplungsmatrix

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich der zuvor analytisch und numerisch berechneten Kopplungsmatrix \mathbf{B} vorgestellt. Dieser Vergleich erfolgt für QUADERMODELL sowie ZYLINDERMODELL. Die analytische Kopplungsmatrix ergibt sich aus einer endlichen Betrachtung der Kopplungsterme nach Gleichung (6.16) sowie Gleichung (6.19). Die numerische Eigenwertzerlegung wird in ANSYS® gemäß Kapitel 6.2.2 durchgeführt. Die strukturelle und akustische Eigenvektormatrix $\mathbf{\Psi}$ und $\mathbf{\Phi}$ sowie die struktur-akustische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{FS} werden für beide Modelle nach MATLAB® exportiert und die modale Kopplungsmatrix \mathbf{B} nach Gleichung (6.32) berechnet. Im Fall des QUADERMODELLS wird für die numerische Untersuchung das in Kapitel 5.4 vorgestellte Modell \mathbb{P}_2 verwendet. Das numerische ZYLINDERMODELL wird nachfolgend vorgestellt.

Tabelle 6.1.: Übersicht über verwendetes modales Interaktionsmodell $\mathbb{P}_{2,M}$ des QUADERMODELLS

Modell	struktureller Elementtyp	akustischer Elementtyp	Anzahl der Strukturmoden n_S	Anzahl der Fluidmoden n_F	Grenzfrequenz f_G
$\mathbb{P}_{2,M}$	SHELL181	FLUID30	58	40	1000 Hz

Quadermodell

Für das numerische QUADERMODELL sind die Anzahlen der verwendeten Moden der Teilsysteme in Tabelle 6.1 für das verwendete modal reduzierte System $\mathbb{P}_{2,M}$ aufgelistet. Die Struktur der modalen Kopplungsmatrix \mathbf{B} des QUADERMODELLS ist in Abbildung 6.1 vergleichend für den analytischen sowie numerischen Fall aufgetragen. Die modalen Indizes (u, v) sowie (l, m) im analytischen Fall sind durch eine aufsteigende Sortierung der Eigenfrequenzen zu i und j umgeformt abgebildet. In beiden Fällen werden dabei alle Eigenvektoren verwendet, deren Eigenfrequenzen unterhalb einer Grenzfrequenz $f_G = 1000$ Hz liegen. Die numerisch für Modell $\mathbb{P}_{2,M}$ berechnete Kopplungsmatrix in Abbildung 6.1b weist im Gegensatz zur analytisch nach Gleichung (6.16) berechneten keine spärliche Besetzung auf. Aufgrund von Fehlern, resultierend aus der räumlichen Diskretisierung, existieren Kopplungsterme mit kleiner Amplitude, welche in der analytischen Formulierung gleich Null sind. Einträge in Abbildung 6.1b mit entsprechend hoher Amplitude (> 0 dB) korrelieren jedoch mit den von Null verschiedenen Einträgen aus der analytischen Formulierung. Des Weiteren wird deutlich, dass im diskretisierten Modell weniger strukturelle Moden im betrachteten Frequenzbereich bis 1000 Hz enthalten sind. Dies liegt in der Konvergenz der Eigenfrequenzen mit zunehmend feiner räumlicher Auflösung begründet (siehe Tabelle A.3). Die Eigenfrequenzen werden bei grober Auflösung überschätzt und konvergieren bei Erhöhung gegen die analytischen Werte.

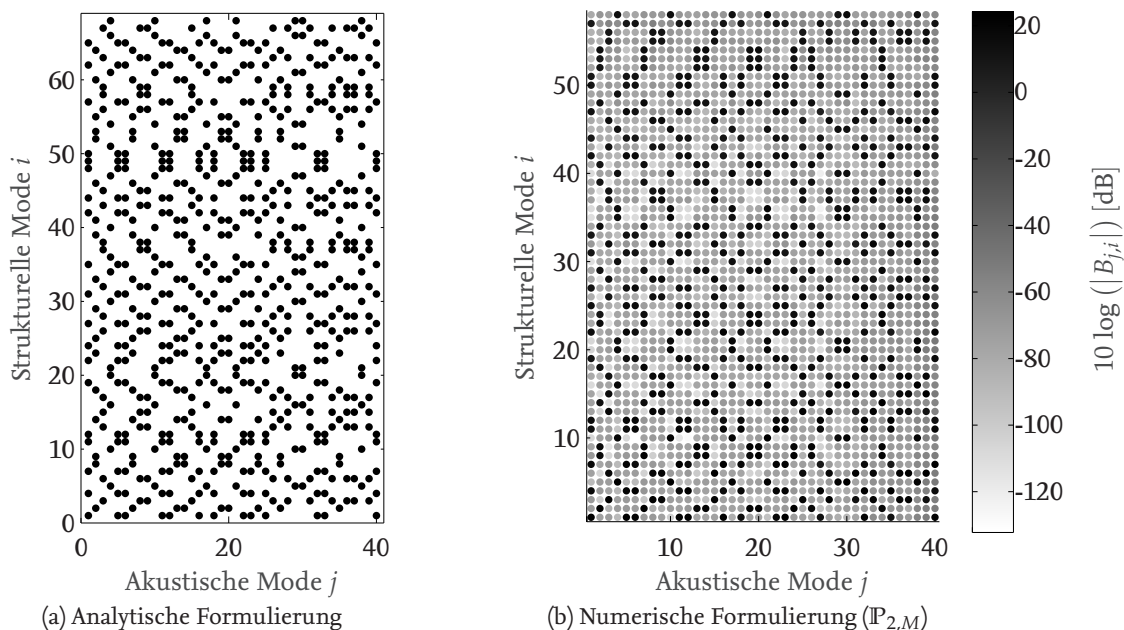


Abbildung 6.1.: Struktur der modalen Kopplungsmatrix im Fall des QUADERMODELLS

Zylindermodell

Das für die numerischen Untersuchungen vernetzte ZYLINDERMODELL ist in Abbildung 6.2 erkennbar. Der Übersichtlichkeit halber sind dabei die Zylinderschale (Abbildung 6.2a) und die Kavität (Abbildung 6.2b) getrennt voneinander aufgetragen. Die Modellierung sowie Eigenwertzerlegung gemäß Kapitel 6.2.2 erfolgt in ANSYS®. Eine Übersicht über verwendete strukturelle und akustische Materialparameter des numerischen Modells gibt Tabelle 6.2. An der Interaktionsfläche, der Mantelfläche des Zylinders, weisen Fluid und Struktur koinzidente Knoten auf, da an diesen die Interaktion definiert wird. Das Modell wird mit Elementen vernetzt, welche zum einen lineare Ansatzfunktionen (FLUID30 und SHELL181) und zum anderen quadratische Ansatzfunktionen (FLUID220 und SHELL281) aufweisen. Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen sind insbesondere für die Vernetzung gekrümmter Flächen, wie sie im Beispiel des Zylinders vorliegen, geeigneter [Koh13]. Dennoch werden an dieser Stelle Elemente mit linearen Ansatzfunktionen ebenfalls betrachtet, da deren Verwendung für derartige Probleme in der Literatur [CH98, Joh04] nicht ungewöhnlich sind.

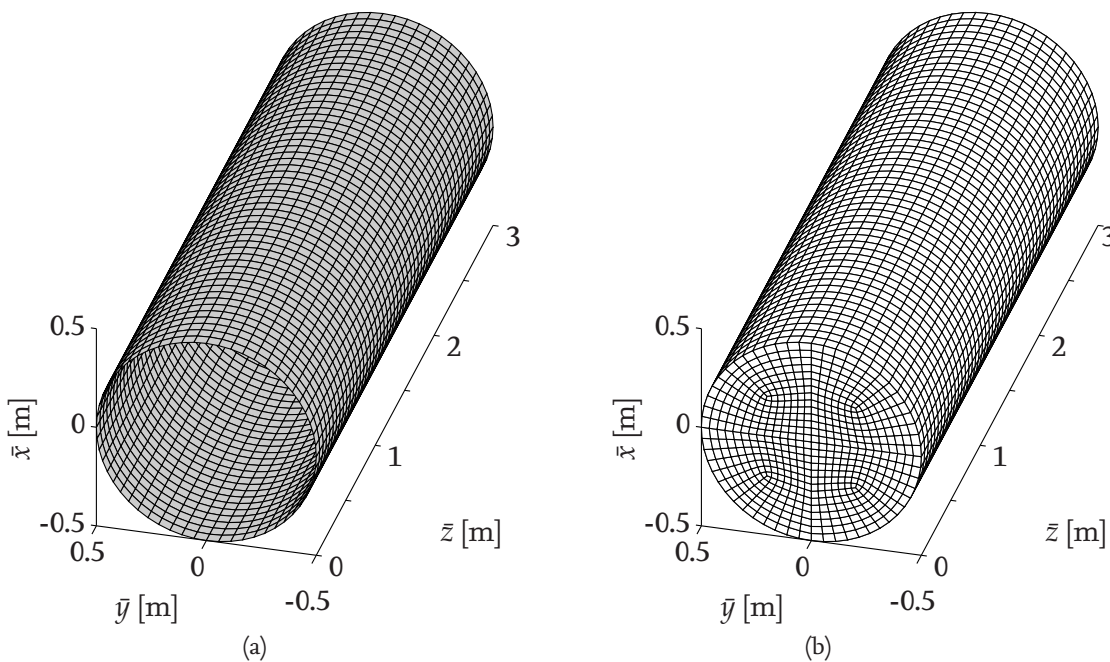


Abbildung 6.2.: Finite Elemente Modell der Zylinderschale (links) und der eingeschlossenen Kavität (rechts)

Ein Überblick über die verwendeten, gemäß Kapitel 6.2.2 modal reduzierten Modelle des Zylinders, ist in Tabelle 6.3 gegeben. Die Netze der Teilsysteme entsprechen dabei, sowohl bei linearen als auch quadratischen Ansatzfunktionen, jeweils den in Abbildung 6.2 dargestellten. Ein Vergleich der Eigenfrequenzen der numerischen Modelle für Struktur sowie Fluid mit analytischen Formulierungen ist in Kapitel A.5 gegeben. Für die akustische Kavität zeigt sich dabei eine gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen. Die numerischen Eigenfrequenzen der entkoppelten Zylinderschale weisen Abweichungen zu den analytisch berechneten auf, insbesondere bei niedrigen umlaufenden modalen Indizes. Bei höheren umlaufenden Indizes fallen die Unterschiede dagegen niedriger aus. Die Abweichungen werden in dieser Arbeit toleriert, da bereits die unterschiedlichen

Schalentheorien unterschiedliche Eigenfrequenzen liefern [Lei73, Soe80].

Tabelle 6.2.: Struktur- und Fluideigenschaften der zylindrischen Finite Elemente Modelle

Zylinderschale	
E-Modul E :	74000 MPa
Querkontraktionszahl μ :	0.3
Dichte ρ_S :	2700 kg/m ³
Radius R :	0.5 m
Länge L_Z :	3 m
Materialdicke h :	0.002 m
Netz:	52 (axial) x 55 (radial)
Viskoser, modaler Dämpfungsgrad ζ_S :	0.01
Fluid	
Dichte ρ_F :	1,204 kg/m ³
Schallgeschwindigkeit c_F :	343 m/s
Anzahl Elemente:	30576
Viskoser, modaler Dämpfungsgrad ζ_F :	0

Abbildung 6.3 zeigt für das ZYLINDERMODELL die Struktur der analytisch sowie numerisch berechneten modalen Kopplungsmatrix \mathbf{B} . Bei der Berechnung der Kopplungsterme finden alle Eigenvektoren der Teilsysteme mit unikalener Eigenfrequenz unterhalb von 500 Hz Berücksichtigung. Die numerische Kopplungsmatrix folgt aus Modell \mathbb{Z}_1 gemäß Tabelle 6.3. Es werden quadratische Elementansatzfunktionen verwendet. Die analytisch nach Gleichung (6.19) berechnete Kopplungsmatrix weist aufgrund der selektiven Kopplungsbedingung eine wesentlich spärlichere Besetzung im Vergleich zum QUADERMODELL auf. Im vorliegenden Frequenzbereich existieren lediglich 18 von Null verschiedene Kopplungsterme. Äquivalent zum QUADERMODELL ist die numerische Kopplungsmatrix hierbei in Abbildung 6.3b voll besetzt und besitzt Einträge geringer Größenordnung. Von Null verschiedene Kopplungsterme der analytischen Formulierung sind in der numerischen Formulierung als Einträge mit hoher Amplitude (> 0 dB) wiederzufinden. Diese entsprechen jedoch nicht zwangsweise den Struktur- bzw. Fluidmoden mit identischen Indizes, was in der Konvergenz der numerischen Eigenfrequenzen gegen die analytischen begründet liegt.

Die Struktur der numerisch berechneten modalen Kopplungsmatrix offenbart für die zwei betrachteten Systeme eine generelle Abbildung der analytischen Kopplungsterme. Insbesondere im Fall des ZYLINDERMODELLS zeigt sich eine sehr spärliche Besetzung der Kopplungsmatrix. Ein Großteil der Einträge in der numerischen Kopplungsmatrix enthält dabei Terme von vernachlässigbarer Größenordnung. Diese fehlerhaften Einträge resultieren aus der räumlichen Diskretisierung. Da diese Einträge geringer Amplitude vernachlässigbare Informationen über die Art der Kopplung enthalten, erhärtet sich damit der in **Arbeitshypothese 3** formulierte Verdacht, dass für eine genaue Darstellung der Interaktion sehr viele Eigenformen der Teilsysteme benötigt werden. Aus diesem Grund sowie der selektiveren Kopplungsbedingung wird im folgenden Abschnitt die Konvergenz der modalen Interaktionstheorie mit zunehmender Anzahl an entkoppelten Eigenformen am Bei-

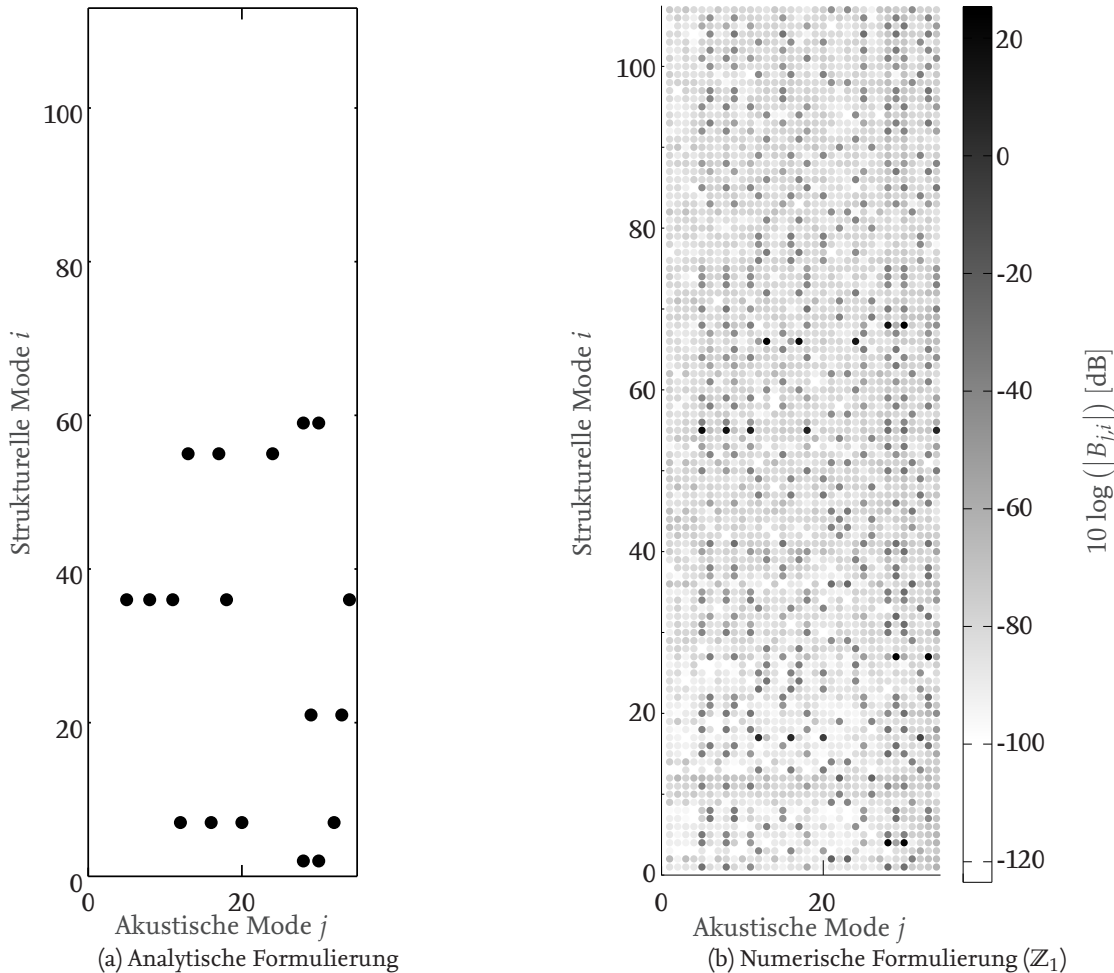


Abbildung 6.3.: Struktur der modalen Kopplungsmatrix im Fall des ZYLINDERMODELLS

spiel des ZYLINDERMODELLS untersucht.

6.3. Konvergenz der modalen Kopplungstheorie

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich der modalen Kopplungstheorie für die numerischen Eigenvektoren aus Kapitel 6.2 mit der Simulation des vollständig gekoppelten, harmonischen Modells nach Gleichung (5.3) durchgeführt. Aufgrund der zuvor dargestellten selektiven Kopplungsbedingung im Fall des ZYLINDERMODELLS, erscheint es logisch, dass mehr Moden der entkoppelten Teilsystem verwendet werden müssen, als im betrachteten Frequenzbereich liegen. Aus diesem Grund wird eine Konvergenzstudie mit der Anzahl der Eigenvektoren durchgeführt, wobei jeweils die vollständige harmonische Analyse als Referenz verwendet wird. Es wird im Folgenden der Frequenzbereich von $f = 0,5 \dots 300$ Hz mit einer Frequenzauflösung von 0,5 Hz betrachtet.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass ANSYS® für die hier verwendeten akustischen Finiten Elemente vom Typ FLUID30 und FLUID220 keine Dämpfung in Form einer Multiplikation der Steifigkeitsmatrix gemäß Gleichung (5.14) ermöglicht. Aus diesem Grund wird in der harmonischen sowie

Tabelle 6.3.: Übersicht über verwendete modale Interaktionsmodelle \mathbb{Z}_i sowie harmonisches Referenzmodell \mathbb{Z}_R des ZYLINDERMODELLS

Modell	struktureller Elementtyp	akustischer Elementtyp	Anzahl der Strukturmoden n_S	Anzahl der Fluidmoden n_F	Grenzfrequenz f_G
\mathbb{Z}_1	SHELL281	FLUID220	214	54	500 Hz
\mathbb{Z}_2	SHELL281	FLUID220	600	326	1000 Hz
\mathbb{Z}_3	SHELL281	FLUID220	1830	2257	2000 Hz
\mathbb{Z}_4	SHELL281	FLUID220	3655	10000	5000 Hz
\mathbb{Z}_5	SHELL181	FLUID30	1361	1889	2000 Hz
\mathbb{Z}_R	SHELL281	FLUID220	-	-	-

modal reduzierten Analyse eine ungedämpfte Fluiddomäne betrachtet. Da es sich hierbei um eine allgemeine Betrachtung der Konvergenz der modalen Kopplungstheorie handelt, ist diese Vereinfachung zu tolerieren ohne die Allgemeingültigkeit zu verletzen.

Zur Auswertung der APE in der Kavität wird eine strukturelle Punktkraftanregung an der Position $\{ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z} \} = \{ 0,5 \text{ m} \ 0 \text{ m} \ 1,5 \text{ m} \}$ in normaler Richtung betrachtet. Im Fall der gekoppelten harmonischen Analyse wird zunächst die Antwort für die Schalldrücke $\mathbf{p}(\omega)$ ermittelt und anschließend die APE durch numerische Integration mit den GAUSS'schen Quadraturformeln [SS66] über das Volumen gemäß Gleichung (5.5) berechnet. Für die modale Interaktionstheorie werden die Antworten der strukturellen modalen Freiheitsgrade $\mathbf{q}_S(\omega)$ gemäß Gleichung (6.24) gelöst und die APE nach Gleichung (6.11) berechnet. Die Gleichung (6.11) macht dabei den Zusammenhang zwischen Berechnung der APE und der Singulärvektoren deutlich, da in beiden Fällen die modal assemblierte IIE verwendet wird. Die Anzahl der verwendeten Struktur- sowie Fluidmoden ist für die fünf betrachteten Interaktionssysteme in Tabelle 6.3 aufgetragen. Die resultierende Antwort der APE ist in Abbildung 6.4 abhängig von den zur Diskretisierung verwendeten Elementtypen aufgetragen. Daraus ist zu entnehmen, dass die Verwendung linearer Elemente im modalen Interaktionsmodell \mathbb{Z}_5 zu einer Verfälschung der APE im betrachteten Frequenzbereich führt. Die Verwendung von quadratischen Elementen bei identischem Frequenzbereich der Modenberücksichtigung (Modell \mathbb{Z}_3) führt dagegen zu einer besseren Übereinstimmung mit der gekoppelten harmonischen Analyse.

Es soll der Einfluss untersucht werden, welchen die Anzahl der verwendeten Eigenvektoren beim modalen Interaktionsmodell auf die Abbildung der gekoppelten Antwort hat. Als Referenz dient dabei wie schon zuvor die gekoppelte harmonische Analyse in ANSYS®. Es werden die Modelle \mathbb{Z}_1 bis \mathbb{Z}_4 mit quadratischen Ansatzfunktionen gemäß Tabelle 6.3 verwendet. In Abbildung 6.5a ist ein Vergleich des mittleren, quadratischen Strukturschnellepegels aufgetragen. Dabei wird das harmonische Referenzmodell \mathbb{Z}_R mit den modalen Interaktionsmodellen \mathbb{Z}_1 bis \mathbb{Z}_4 verglichen. Bei Letzteren wird jeweils die obere Grenzfrequenz f_G variiert, ab der die Eigenvektoren abgeschnitten werden. In der Strukturantwort äußern sich Abweichungen hauptsächlich in geringen Änderungen der Eigenfrequenzen. Einen Vergleich der APE aus dem harmonischen Referenzmodell und den modalen Interaktionsmodellen \mathbb{Z}_1 bis \mathbb{Z}_4 zeigt Abbildung 6.5b. Ab einer oberen Grenzfrequenz von $f_G = 2000$ Hz zeigt sich dabei eine annehmbare Übereinstimmung. Werden dagegen weniger Eigenvektoren berücksichtigt, zeigt sich in der akustischen Antwort ein Abschneiden von Eigen-

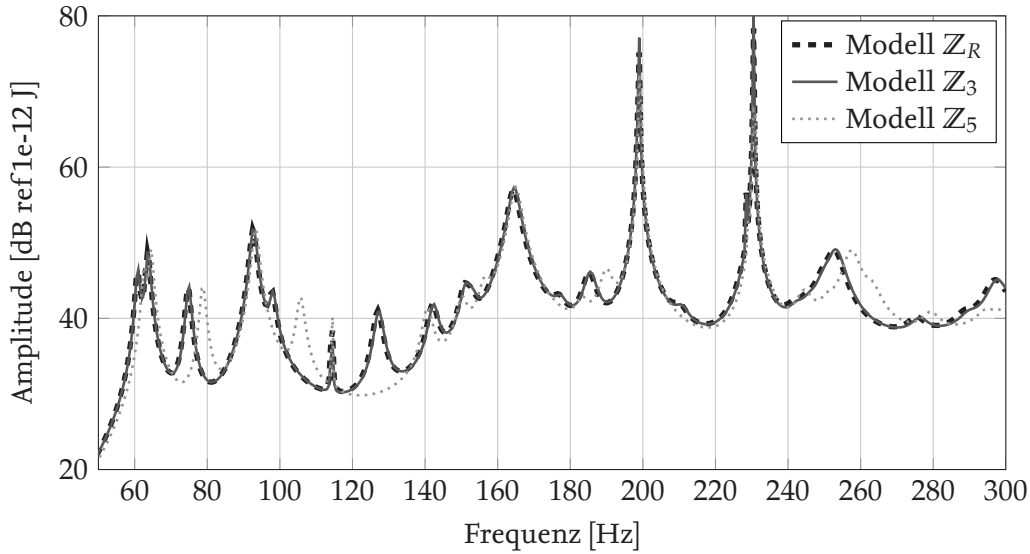
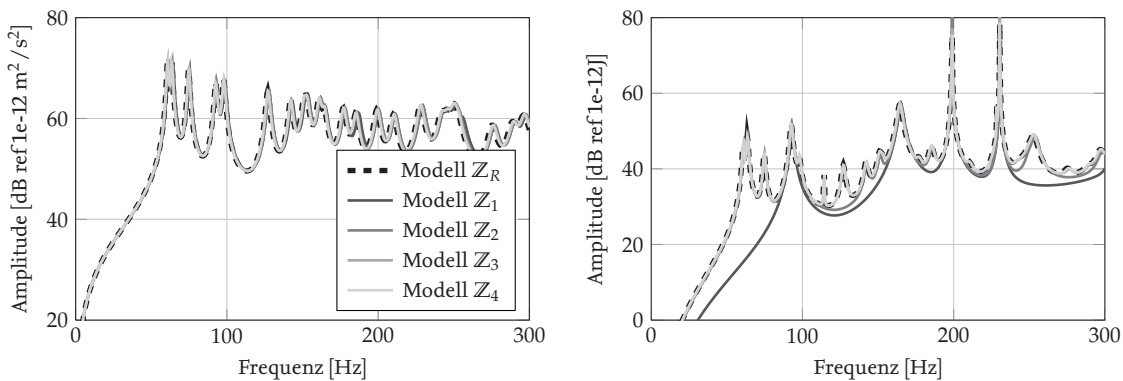


Abbildung 6.4.: Vergleich des Pegels der APE in der Kavität in Folge einer strukturellen Punktkraftanregung

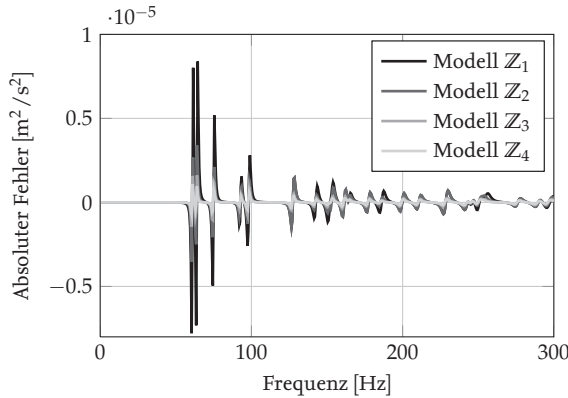
frequenzen. Dieses Abschneiden beschränkt sich dabei nicht auf hochfrequente Anteile der akustischen Kavitätsdynamik. Insbesondere tieffrequente Anteile der gekoppelten Antwort werden falsch vorhergesagt. Die starke Verfälschung der akustischen Antwort wird durch die selektive Kopplung der strukturellen und akustischen Eigenvektoren bedingt, bei der weit im Frequenzbereich auseinander liegende Eigenformen einen Kopplungsterm enthalten können. Die Selektivität kann auch anhand der analytischen Kopplungsbedingung illustriert werden, welche mit Gleichung (6.19) gegeben ist. Aufgrund der Anregung durch eine Punktkraft auf der Struktur, wird die gekoppelte Antwort in der Strukturdomäne gemäß Abbildung 6.5a weniger stark verfälscht als in der Kavität.



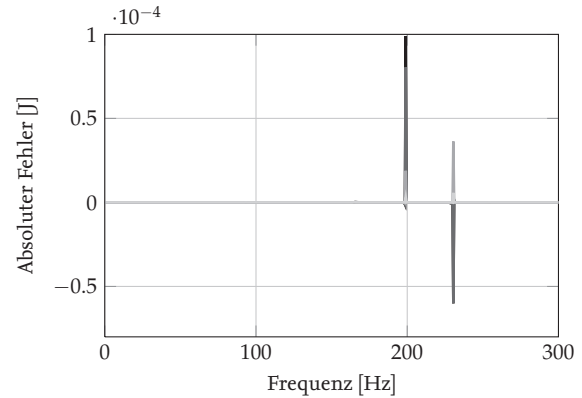
(a) Mittlerer quadratischer Schnellepegel der strukturellen Antwort

(b) Akustischer potentieller Energiepegel in der Kavität

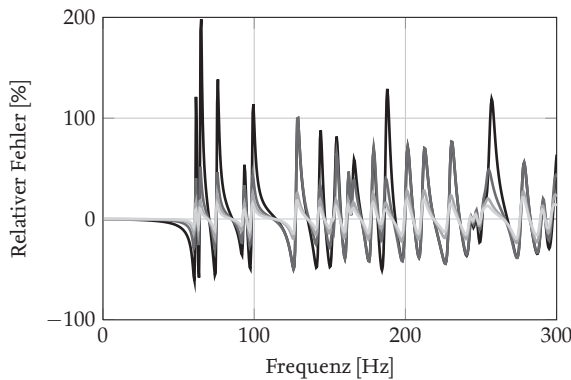
Abbildung 6.5.: Konvergenz der modalen Kopplungstheorie gegen die gekoppelte harmonische Analyse mit der Anzahl der verwendeten Struktur- und Fluidmoden



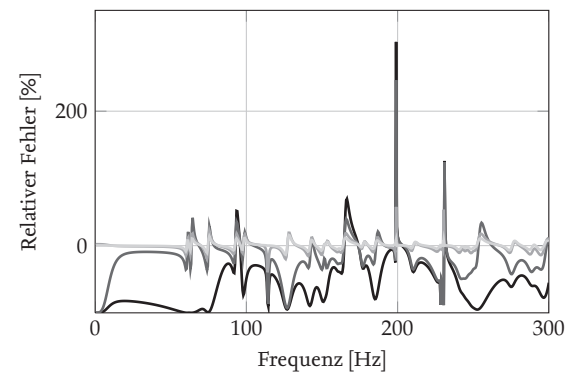
(a) Absoluter Fehler für mittlere quadratische Schnelle der Struktur



(b) Absoluter Fehler für akustische potentielle Energie in der Kavität



(c) Relativer Fehler für mittlere quadratische Schnelle der Struktur



(d) Relativer Fehler für akustische potentielle Energie in der Kavität

Abbildung 6.6.: Konvergenz der modalen Kopplungstheorie gegen die gekoppelte harmonische Analyse mit der Anzahl der verwendeten Struktur- und Fluidmoden

Einen Vergleich von relativem und absolutem Fehler [BSMM05, S. 815] bei der Berechnung der modal reduzierten Antwort gegenüber der harmonischen Lösung des Referenzmodells Z_R zeigt Abbildung 6.6 über der Frequenz. Die Abweichungen in der strukturellen Antwort durch eine Änderung der strukturellen Eigenfrequenzen werden hier besonders deutlich; diese werden sowohl im relativen als auch im absoluten Fehler sichtbar. Ein Abschneiden von Eigenfrequenzen kann in der strukturellen Antwort nicht beobachtet werden. Auf der akustischen Seite resultieren wenige verwendete Eigenvektoren ($f_G \leq 1000$ Hz, Z_1 und Z_2) dagegen insbesondere in einem hohen relativen Fehler über den gesamten betrachteten Frequenzbereich. Hierbei wird im relativen Fehler die selektive Art der Modenkopplung deutlich, welche über weit im Frequenzbereich auseinander liegende Moden einen signifikanten Fehler erzeugen kann. Der hohe relative Fehler der APE unterhalb von 100 Hz resultiert beispielsweise aus einer Vernachlässigung der Kopplung der akustischen $(0, 0, 0)$ -Mode mit der strukturellen $(1, 0)$ -Mode. Nach Kapitel A.5 entsprechen die Eigenfrequenzen dieser Moden $7,74 \cdot 10^{-7}$ Hz für die Kavität und $1495,63$ Hz für die Struktur. Ein hoher absoluter Fehler ist dagegen insbesondere in den zwei akustischen, ungedämpften Resonanzen dokumentiert. Darüber hinaus offenbart sich eine Konvergenz der Abweichungen gegen Null mit zunehmender Anzahl an

berücksichtigten Moden; diese wird über den gesamten betrachteten Frequenzbereich deutlich.

Die betrachtete Konvergenzstudie macht deutlich, dass ausreichend Eigenvektoren der entkoppelten Systeme bei der modalen Interaktionstheorie berücksichtigt werden müssen. Es ist zu erwarten, dass sich der Fehler bei der Vorhersage der APE ebenfalls negativ auf die Berechnung der Singulärvektoren der IIE auswirkt. In der Praxis ist die Wahl der zu betrachtenden Anzahl an Moden getrieben von den Faktoren der Approximationsgenauigkeit und dem Grad der Ordnungsreduktion. Die Menge der berücksichtigten Moden mag im Vergleich zur modalen Entwicklung ungekoppelter Systeme hoch erscheinen, die Anzahl der Freiheitsgrade wird am Beispiel von \mathbb{Z}_3 jedoch von 181685 auf 4087 verringert. Im nächsten Abschnitt wird der Einfluss hochfrequent abgeschnittener Modenanteile auf die Singulärvektoren der IIE untersucht.

6.4. Abhängigkeit der Singulärvektoren von der Modenanzahl

Das vorangegangene Kapitel hat die Notwendigkeit der Berücksichtigung ausreichend vieler entkoppelter Moden bei der Berechnung der APE aufgezeigt. Anhand des analytischen QUADERMODELLS soll das Verständnis der Singulärvektoren der IIE, bei der Berechnung mit der modalen Interaktionstheorie, erweitert werden. Die analytische Formulierung wird dabei zu dem Zweck verwendet, den Einfluss des Abschneidens hochfrequenter Modenanteile losgelöst von der räumlichen Diskretisierung aufzuzeigen.

Die modale IIE $\tilde{\Pi}(\omega)$ aus Gleichung (6.11) wird mit den analytischen Kopplungstermen $B_{(l,m)(u,v)}$ gemäß Gleichung (6.16) in Matrixform berechnet. Die Singulärwertzerlegung der IIE in modalen Koordinaten führt dabei nach Kapitel 5.3 auf

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \tilde{\mathbf{Y}}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\tilde{\mathbf{Y}}^T(\omega) \quad (6.33)$$

mit der Dimension der modalen Singulärvektormatrix $\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$. Die Spalten von $\tilde{\mathbf{Y}}$ werden durch Multiplikation mit der strukturellen Eigenvektormatrix $\mathbf{\Psi}$ zu

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{\Psi}\tilde{\mathbf{Y}}(\omega) \quad (6.34)$$

in harmonische Koordinaten transformiert [Joh04, S. 41]. Die Singulärvektormatrix $\mathbf{Y}(\omega)$ enthält in ihren Spalten die Singulärvektoren $\mathbf{v}_k(\omega)$.

Abbildung 6.7 zeigt die sukzessive Approximation der Singulärvektoren $\mathbf{v}_1(\omega)$ sowie $\mathbf{v}_2(\omega)$ in einem Schnitt der Platte in $\bar{x} = 0,3$ m mit zunehmender Anzahl für die Modenkopplung verwendeter Eigenformen. Diese sind bei einer Frequenz von 0,5 Hz dargestellt und auf die Maximumnorm normalisiert [BSMM05, S. 267]. Die angegebene Modenanzahl v_{MAX} gibt dabei die Obergrenze für den in der Kopplungsmatrix nach Gleichung (6.16) verwendeten strukturellen modalen Index v in \bar{y} -Richtung an. Es zeigt sich dabei eine Konvergenz der Singulärvektoren gegen die analytisch mit Gleichung (4.25) definierten Schalleinstrahlungsmoden, welche ebenfalls in Abbildung 6.7 dargestellt sind. Deutlich wird dabei die sinusförmige räumliche Verteilung, welche aus den strukturellen Ansatzfunktionen gemäß Gleichung (6.14) resultiert. Die dargestellten Singulärvektoren sind nicht ausreichend gegen die analytische Formulierung der Schalleinstrahlungsmoden konvergiert. Hohe Änderungen der räumlichen Verteilung werden durch Berücksichtigung verhältnismäßig weniger zusätzlicher Modenanteile erzielt. Da für das ZYLINDERMODELL gemäß Gleichung (6.19) mit Aus-

nahme der selektiveren Kopplungsbedingung identische Aussagen resultieren, sind diese an dieser Stelle nicht sondiert dargestellt.

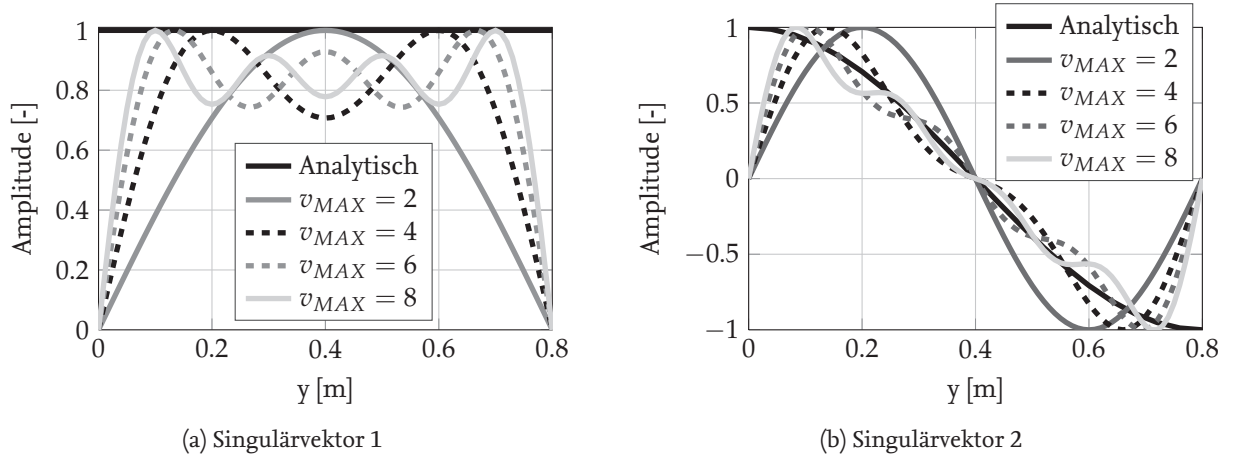


Abbildung 6.7.: Konvergenz der Singulärvektoren der Rechteckplatte mit der Anzahl gekoppelter Struktur- und Fluidmodenpaare im Schnitt $\bar{x} = 0,3$ m

Der vorliegende Abschnitt macht deutlich, dass ebenso wie für die Berechnung der APE, auch für die Berechnung der Singulärvektoren der IIE ausreichend viele hochfrequente Modenanteile verwendet werden müssen um eine korrekte Abbildung der akustischen Eigenformen auf der Interaktionsfläche zu gewährleisten. Dies kann durch eine räumliche Diskretisierung zusätzlich erschwert werden. Aus diesem Grund wird nachfolgend der Einfluss der Netzfeinheit auf die akustischen Eigenvektoren auf der Interaktionsfläche untersucht.

6.5. Einfluss des Diskretisierungsgrades auf akustische Eigenvektoren

Die Voraussetzung für frequenzunabhängige Schalleinstrahlungsmoden wird in Kapitel 4 auf Basis von analytisch berechneten akustischen Eigenformen gezeigt. Diese besteht in der Notwendigkeit von parallelen bzw. orthogonalen Eigenformen auf der Interaktionsfläche. Dieser Abschnitt befasst sich mit der Gültigkeit dieser Voraussetzung im Fall von räumlich diskretisierten Modellen, untersucht am Beispiel des QUADERMODELLS.

Die akustischen Eigenvektoren und -werte werden gemäß Kapitel 6.2.2 für die numerischen Modelle \mathbb{P}_1 bis \mathbb{P}_4 der Rechteckkavität losgelöst von der strukturellen Platte berechnet. Die auf die Interaktionsfläche reduzierten Eigenvektoren $\tilde{\Phi}$ resultieren gemäß Gleichung (6.32) aus der Multiplikation der numerischen Eigenvektoren Φ mit der gekoppelten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{FS} zu

$$\tilde{\Phi} = \mathbf{K}_{FS} \Phi. \quad (6.35)$$

Dabei enthalten die Zeilen von $\tilde{\Phi}$ die Eigenvektoren $\tilde{\phi}_k$ auf der Interaktionsfläche. Als Indikator für die Korrelation der, auf die Interaktionsfläche reduzierten, Eigenvektoren wird $\mu_{k,j}$ als norma-

lisieretes Skalarprodukt zu

$$\mu_{k,j} = \frac{\langle \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_j \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_k \rangle} \sqrt{\langle \tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_j \rangle}} \quad (6.36)$$

definiert. Gemäß Kapitel 4 muss sich das Skalarprodukt $\mu_{k,j}$ zu Null (orthogonale Eigenvektoren) bzw. Eins (parallele Eigenvektoren) ergeben, damit die Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren der IIE gewährleistet ist.

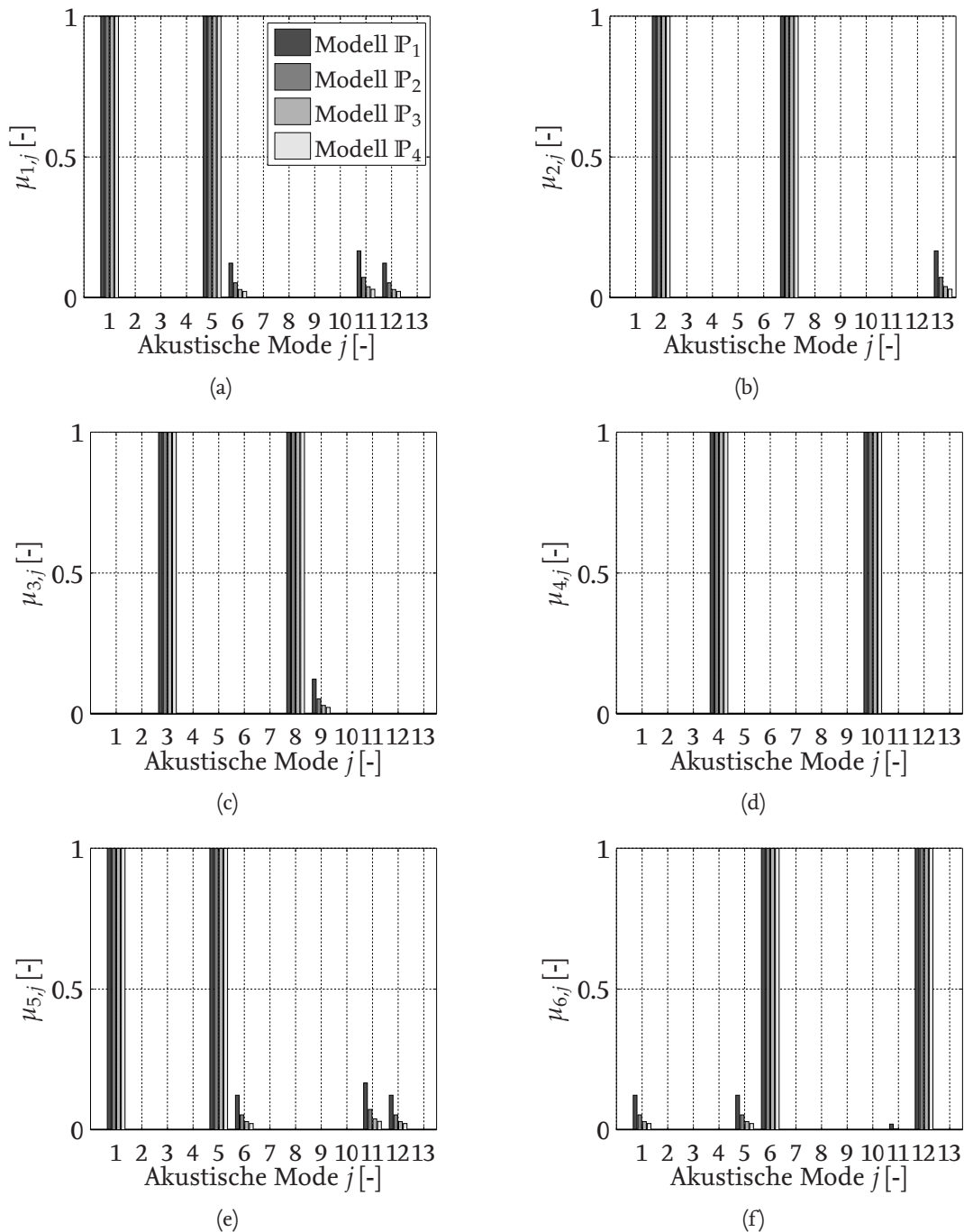


Abbildung 6.8.: Skalarprodukte der akustischen, auf die Interaktionsfläche reduzierten, Eigenvektoren

Abbildung 6.8 stellt das Skalarprodukt $\mu_{k,j}$ exemplarisch für die sechs ersten Eigenvektoren der Modelle \mathbb{P}_1 bis \mathbb{P}_4 dar. Alle Modelle offenbaren dabei parallele Eigenvektoren. Der erste Eigenvektor, welcher der $(0, 0, 0)$ -Eigenform entspricht, ist beispielsweise parallel zum fünften Eigenvektor ($(0, 0, 1)$ -Eigenform). Diese Tatsache wird in Kapitel A.3 anhand der analytischen Eigenformen diskutiert. Einige Eigenvektorkombinationen weisen von Null und Eins verschiedene Werte von $\mu_{k,j}$ auf, welche mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung gegen Null konvergieren. Dies ist exemplarisch für den ersten und sechsten ($(0, 2, 0)$ -Eigenform) Eigenvektor der Fall.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass der erste und sechste akustische Eigenvektor ebenfalls in den Singulärvektoren $\bar{v}_1(\omega)$ und $\bar{v}_5(\omega)$ enthalten sind, deren Singulärwerte sich gemäß Abbildung 5.7 ausweichen. Es ist daher zu erwarten, dass der Effekt des Ausweichens nicht auftritt, wenn sich das Skalarprodukt der Eigenvektoren an der Interaktionsfläche identisch zu Null berechnet. Da sich eine Konvergenz des Skalarproduktes gegen Null zeigt, müsste eine höhere räumliche Auflösung als in Modell \mathbb{P}_4 verwendet werden. Mit den in dieser Arbeit verwendeten numerischen Modellen konnte ein Skalarprodukt identisch Null für diese beiden Singulärvektoren nicht erzielt werden.

Zusammenfassung

Eine Methode zur Berechnung der APE und der Singulärvektoren der IIE wird in diesem Kapitel basierend auf der modalen Interaktionstheorie beschrieben. Letztere macht sich die Kopplung von Eigenvektoren an der Interaktionsfläche zu Nutze, welche entkoppelt voneinander berechnet werden können. Die Berechnung kann dabei analytisch oder numerisch erfolgen. Diese mit **Arbeitshypothese 3** geforderte Kopplungsmethode stellt sich aufgrund der Reduktion der Modellordnung als eine effiziente Berechnungsmöglichkeit von APE sowie Singulärvektoren dar. Es zeigt sich dabei, dass der Auswahl der Frequenzbereiche der Modenberücksichtigung besondere Aufmerksamkeit gelten muss, da diese Berechnungsart eine Näherung darstellt und gegen die in Kapitel 5 beschriebene harmonische Formulierung konvergiert. Darüber hinaus wird eine Konvergenz mit zunehmender Anzahl an Moden der Teilsysteme in der Berechnung der APE als auch der Singulärvektoren deutlich. Die im Gegensatz zur analytischen Kopplungsmatrix volle Besetzung der Kopplungsmatrix im Fall der räumlichen Diskretisierung verkompliziert die Auswertung dieser Zusammenhänge, da zum einen der Speicheraufwand für die Kopplungsterme erhöht und zum anderen die Interpretation der Kopplungsmechanismen erschwert wird. Die entkoppelten, numerischen Eigenvektoren der Kavität an der Oberfläche der Struktur bilden die in Kapitel 4 aufgestellte Forderung nach orthogonalen bzw. parallelen Eigenformen an der Interaktionsfläche in Konvergenz ab. Unter der Voraussetzung der Verwendung ausreichend vieler Eigenformen der Teilsysteme, bietet diese Methode damit das Potential für weitreichende Untersuchungen bezüglich der Frequenzunabhängigkeit für beliebig geformte Innenräume.

Im nachfolgenden Kapitel wird eine praktische Implementierung der Sensierung von Schallstrahlungsfiltren vorgestellt, welche sich die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden zu Nutze macht. Der experimentelle Versuchsträger entspricht dabei dem in den analytischen und numerischen Studien verwendeten QUADERMODELL.

7. Experimentelle Regelung der Schalleinstrahlung in Kavitäten

Die zuvor analytisch berechneten Schalleinstrahlungsmoden werden in diesem Kapitel für die strukturbasierte Sensierung der APE in einer Kavität sowie deren aktive Regelung verwendet. Zu diesem Zweck wird zunächst die Identifikation eines mathematischen Streckenmodells vorgestellt, welches das physikalische Übertragungsverhalten von den Aktuatoren zu den Sensoren abbildet. Aus den Schalleinstrahlungsmoden sowie -effizienzen werden Schallstrahlungsfilter abgeleitet, sodass die Energie des Ausgangssignals der APE entspricht. Aufbauend auf dem Streckenmodell mit Schallstrahlungsfiltern lässt sich unter Verwendung eines Feedback-Regelungsansatzes ein Reglermodell ableiten. Die vorgestellte Methodik wird anschließend an einem experimentellen Versuchsträger verwendet, um die globale Reduktion der Schalleinstrahlung in eine Kavität zu vermessen. Dieser Versuchsträger orientiert sich am QUADERMODELL. Abschließend erfolgt eine Auswertung des breitbandigen Regelungserfolgs und der Mechanismen, welche sich für die Schalleinstrahlungsreduktion verantwortlich zeigen.

7.1. Modellbasierter Reglerentwurf unter Berücksichtigung der Kavitätsdynamik

Aktive Maßnahmen zur Reduktion der strukturbedingten Schallab- bzw. -einstrahlung setzen in der Regel ein Mehrgrößensystem (MIMO, engl.: *Multiple Input Multiple Output*) voraus. Dieser Abschnitt beschreibt zunächst die Systemidentifikation von mathematischen Zustandsraummodellen. Das Grundmodell soll dabei das Übertragungsverhalten von den Stör- sowie Regelaktuatoren zu den parallel messbaren Beschleunigungssensoren auf der Strukturoberfläche abbilden. Anschließend wird die Erweiterung des Modells um zusätzliche, sequentiell gemessene Strukturschnelleausgänge mithilfe eines LSV erläutert. Diesen erweiterten Oberflächenschnellen werden Schallstrahlungsfilter nachgeschaltet, welche aus den Schalleinstrahlungsmoden sowie -effizienzen generiert werden. Die Ausgänge der Schallstrahlungsfilter sollen als Zielgröße für die Unterdrückung durch einen Regler verwendet werden.

7.1.1. Identifikation zeitdiskreter Zustandsraummodelle

Dieser Abschnitt erläutert die Systemidentifikation der physikalischen Regelstrecke. Letztere bildet den Pfad von den Aktuatoren zu den Sensoren ab und soll in Form eines mathematischen Zustandsraummodells abgebildet werden. Die Methodik zur Systemidentifikation soll auf Zeitdaten als Eingangsgrößen anwendbar und für Mehrgrößensysteme geeignet sein. Diese Anforderungen werden von den Unterraum-Methoden der Systemidentifikation (engl.: *subspace method*) erfüllt [Kat06]. Die-

se basieren auf den stabilen, numerischen Algorithmen der QR-Zerlegung sowie Singulärwertzerlegung. Vorteil der Unterraum-Methode gegenüber klassischen Identifikationsalgorithmen wie z.B. der Methode der Minimierung von Vorhersagefehlern (PEM, engl.: *Prediction Error Method*) ist, dass die Identifikationsaufgabe nicht als Optimierungsaufgabe formuliert werden muss und dementsprechend kein lokales Minimum gefunden wird [Kat06].

Es erfolgt zunächst eine Definition der Streckenmodelle, welche in Form von Zustandsraummodellen identifiziert werden. Diese Arbeit beschränkt sich im Folgenden auf die Verwendung von linearen, zeitinvarianten und zeitdiskreten Zustandsraummodellen. Diese werden an äquidistanten, diskreten Zeitpunkten $\nu \in \mathbb{N}_0$ mit zeitlichem Abtastintervall T zu

$$\mathbf{x}[\nu + 1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[\nu] + \mathbf{B}\mathbf{u}[\nu] \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{y}[\nu] = \mathbf{C}\mathbf{x}[\nu] + \mathbf{D}\mathbf{u}[\nu] \quad (7.1b)$$

abgebildet. Darin ist die Zustandsraumdarstellung der Strecke $\mathbf{G}[z]$ definiert zu

$$\mathbf{G}[z] = \left[\mathbf{C}(\mathbf{E}z - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \quad (7.2)$$

mit der zeitdiskreten LAPLACE-Variable $z = \exp(j\omega T)$ und der Einheitsmatrix \mathbf{E} . Die in der Strecke $\mathbf{G}[z]$ enthaltenen vier Matrizen haben die folgenden Bezeichnungen und Dimensionen:

- \mathbf{A} : Systemmatrix [$n_X \times n_X$]
- \mathbf{B} : Eingangsmatrix [$n_X \times n_U$]
- \mathbf{C} : Ausgangsmatrix [$n_Y \times n_X$]
- \mathbf{D} : Durchgangsmatrix [$n_Y \times n_U$].

Die Vektoren sind folgendermaßen benannt:

- \mathbf{x} : Zustandsvektor [$n_X \times 1$]
- \mathbf{u} : Eingangsvektor [$n_U \times 1$]
- \mathbf{y} : Ausgangsvektor [$n_Y \times 1$].

Dabei beschreiben die Skalare n_X , n_U und n_Y entsprechend die Anzahl von Zuständen, Eingangs- sowie Ausgangsgrößen. Bei der zeitdiskreten Darstellung wird der Zustandsvektor nicht in Abhängigkeit von der kontinuierlichen Zeit t betrachtet, sondern an äquidistanten Zeitinkrementen ν . Vorteil dieser Methode ist die Echtzeitfähigkeit von Ausgang und Regelung. In der kontinuierlichen Darstellung muss dagegen eine Zeitintegration durchgeführt werden [Lun12, S. 419ff.]. Bei der Identifikation von zeitdiskreten Zustandsraummodellen aus kontinuierlichen Systemen muss mithilfe eines Ansatzes wie Zero-Order-Hold oder Tustin genähert werden. Dafür muss die Abtastfrequenz des Zustandsraummodells 6...20 mal so hoch sein wie die höchste im System vorkommende Frequenz um eine ausreichende Genauigkeit der zeitdiskreten Strecke zu gewährleisten [Lun12, S. 410]. Dieses Vorgehen entfällt bei der Systemidentifikation diskreter Zustandsraummodelle mithilfe der Unterraum-Verfahren.

Ansatz der Unterraum-Identifikation eines zeitdiskreten Zustandsraummodells ist die Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}[\nu+1] \\ \mathbf{y}[\nu] \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}[\nu] \\ \mathbf{u}[\nu] \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

nach der Matrix Θ für jeden Zeitschritt ν durch Bildung ihrer Pseudoinversen. Die Eingangs- und Ausgangsgrößen $\mathbf{u}[\nu]$ und $\mathbf{y}[\nu]$ sind dabei direkt aus der Messung bekannt, wohingegen die Zustandsgrößen $\mathbf{x}[\nu]$ nicht direkt messbar sind. Zur Bestimmung der Zustände werden die Eingangs- und Ausgangsgrößen in Block-HANKEL-Matrizen angeordnet und sequentiell einer QR- sowie Singulärwertzerlegung unterzogen. Die Matrizen des Zustandsraummodells lassen sich anschließend mithilfe einer erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix berechnen [Kat06, S. 9f.]. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der orthogonalen Dekomposition (ORT) nach Katayama [Kat06, S. 256ff.] verwendet. Es sei im Vorgriff erwähnt, dass damit eine genaue Modellbildung der Regelstrecke ermöglicht wird (siehe Kapitel 7.3.1).

Besonderes Augenmerk liegt bei den Unterraum-Methoden zur Systemidentifikation auf der möglichen Instabilität der resultierenden Zustandsraummodelle. Diese macht eine anschließende Eliminierung instabiler Zustände notwendig. Die Stabilität wird durch die Eigenwerte λ_k der Systemmatrix \mathbf{A} bestimmt. Für asymptotische Stabilität muss gelten

$$|\lambda_k| < 1 \quad \forall k. \quad (7.4)$$

Die Eigenwerte λ_k der Systemmatrix \mathbf{A} müssen sich demnach für alle k innerhalb des Einheitskreises der komplexen Ebene befinden. Als Grenze für instabile Zustände hat sich bei der Modellbildung und Reglersynthese in der vorliegenden Arbeit ein Wert von 0,998 bewährt.

Für eine Quantifizierung der Schalleinstrahlung schwingender Strukturen werden in der Regel feinere Sensornetze benötigt, als mit Beschleunigungssensoren abgedeckt werden können. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt eine Erweiterung des identifizierten Zustandsraummodells um zusätzliche Ausgänge vorgestellt. Letztere resultieren aus der sequentiellen Vermessung mithilfe eines LSV.

7.1.2. Erweiterung des Streckenmodells

Da das Netz aus parallel zu vermessenden Beschleunigungssensoren in der Regel nicht fein genug für eine Messung und Beeinflussung der Schalleinstrahlung über einen weiten Frequenzbereich ist, wird das identifizierte Streckenmodell um zusätzliche Schnelleausgänge erweitert. Zur Erweiterung des Streckenmodells wird jeder Stör- sowie Regelaktuator separat angeregt und das Übertragungsverhalten zu allen LSV-Punkten vermessen. Die Güte des erweiterten Streckenmodells ist dabei abhängig von der Systemmatrix \mathbf{A} des Grundmodells. Dies bedeutet, dass Struktureigenformen, welche vom initialen Sensornetz aufgrund mangelnder räumlicher Auflösung nicht beobachtet werden können, auch im erweiterten Streckenmodell nicht enthalten sind.

Um neue Schnelleausgänge $\mathbf{y}_E[\nu]$ für das Modell $\mathbf{G}[z]$ zu generieren, müssen erweiterte Zustandsraummatrizen \mathbf{C}_E sowie \mathbf{D}_E gefunden werden. Das Vorgehen orientiert sich an dem von MISOL ET AL. [MAM12] vorgestellten und hat die gemessene Übertragungsfunktion vom Struktureingang

zu den erweiterten Schnelleausgängen $\mathbf{y}_E[v]$ als Grundlage. Durch Fixierung von Systemmatrix \mathcal{A} sowie Eingangsmatrix \mathcal{B} des ursprünglich identifizierten Modells, kann die Übertragungsfunktion $\mathbf{H}[z_k]$ zu

$$\mathbf{H}[z_k] = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_E & \mathcal{D}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{E}z_k - \mathcal{A}]^{-1} \mathcal{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

für $k \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Dieses Gleichungssystem kann für jeden diskreten Frequenzschritt z_k nach den unbekanntenen Matrizen \mathcal{C}_E und \mathcal{D}_E aufgelöst werden. Hinzufügen der zusätzlichen Matrizen zum Zustandsraummodell $\mathbf{G}[z]$ gemäß Gleichung (7.2) liefert die erweiterte Regelstrecke \mathbf{G}_E zu

$$\mathbf{x}[v+1] = \mathcal{A}\mathbf{x}[v] + \mathcal{B}u[v] \quad (7.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_E[v] \\ \mathbf{y}[v] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_E \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} \mathbf{x}[v] + \begin{bmatrix} \mathcal{D}_E \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} u[v], \quad (7.6b)$$

mit

$$\mathbf{G}_E[z] = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C}_E & \mathcal{D}_E \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right]. \quad (7.7)$$

Die erweiterte Regelstrecke $\mathbf{G}_E[z]$ erlaubt eine Abschätzung der erweiterten Oberflächenschnellen $\mathbf{y}_E[v]$ anhand der Vermessung der Beschleunigungssensoren $\mathbf{y}[v]$ in Echtzeit. Dem feinen Netz der Oberflächenschnellen werden im anschließenden Kapitel Schallstrahlungsfiler nachgeschaltet, deren Aufgabe im Abschätzen der APE im Fluid besteht.

7.1.3. Schallstrahlungsfiler der Innenraumeinstrahlung

Die Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen liegen nach Kapitel 4 in analytischer Formulierung vor. Durch räumliche Diskretisierung und Abschneiden hochfrequenter Modenanteile entstehende Ungenauigkeiten sind nach Kapitel 5 sowie Kapitel 6 anhand der Singulärvektoren und -werte bekannt. Eine Ableitung von Schallstrahlungsfilern, welche die Frequenzcharakteristik der Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen im experimentellen Anwendungsfall abbilden, ist Anspruch des vorliegenden Abschnitts.

Aufgrund der zeitlichen und räumlichen Art der Diskretisierung des Modells der Regelstrecke, ist eine Auswertung der Schalleinstrahlungsmoden an diskreten Messpunkten notwendig. Diese Messpunkte entsprechen den im vorangegangenen Abschnitt an das Streckenmodell angehängten, erweiterten Oberflächenschnellen $\mathbf{y}_E[v]$. Die resultierenden Schalleinstrahlungsmoden lassen sich demnach zu $u_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \mathbf{u}_j$ in vektorieller Form schreiben. Die nach Gleichung (4.17) vorliegenden Schalleinstrahlungseffizienzen werden weiterhin an diskreten Frequenzschritten ausgewertet. Die Quadratwurzel jeder Schalleinstrahlungseffizienz $\sqrt{s_j[z]}$ wird als minimalphasiges Filter $S_j[z]$ mithilfe der ROBUST CONTROL TOOLBOX [BCPS05] modelliert. Die rechteckige Transfermatrix des

Schallstrahlungsfilters $\mathcal{R}[z]$ wird zu

$$\mathcal{R}[z] = \begin{bmatrix} S_1[z] & & & \mathbf{0} \\ & S_2[z] & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & S_{n_R}[z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n_R}^T \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

berechnet. Aus Gleichung (7.8) wird der Vorteil der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden \mathbf{u}_j deutlich. Die Systemmatrix eines einzelnen Filters $S_j[z]$ besitzt bei der Verwendung einer Modellordnung n_X die Dimension $[n_X \times n_X]$. Dementsprechend hat die Systemmatrix des Schallstrahlungsfilters $\mathcal{R}[z]$ bei Berücksichtigung von n_R Schalleinstrahlungsmoden die Dimension $[n_R n_X \times n_R n_X]$. Damit resultiert ein Modell von geringer Größenordnung. Im Fall frequenzabhängiger Schalleinstrahlungsmoden, würde diese Dimension mit einer zusätzlichen Modellordnung addiert werden. Diese zusätzliche Ordnung richtet sich nach dem angepassten Filter, welches für die Schalleinstrahlungsmoden an jedem diskreten Sensorausgang ausgelegt würde. Die notwendige Filterordnung dieses zusätzlichen Filters wäre dabei vom Grad der Änderung der Schalleinstrahlungsmoden mit der Frequenz bestimmt. Insbesondere aufgrund der hohen Anzahl diskreter Sensorausgänge kann diese Ordnung dabei einige 100 bis 1000 betragen.

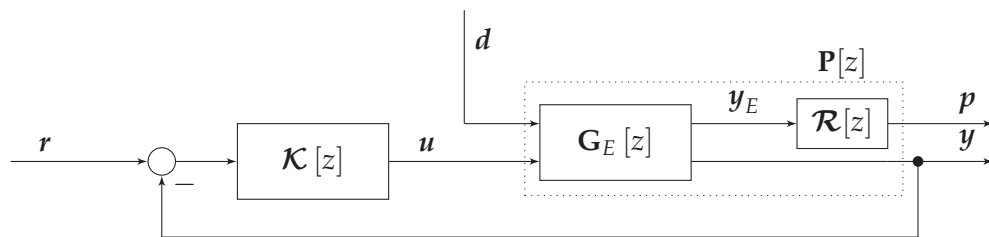
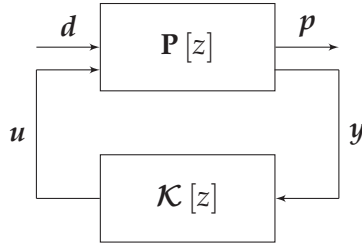


Abbildung 7.1.: Prinzipskizze für die Regelung der Schallstrahlungsfiler

Die Abhängigkeit der Ein- und Ausgänge vom diskreten Abtastparameter ν wird nachfolgend zu Gunsten der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Die Schnelleausgänge $y_E[\nu]$ der erweiterten Strecke $G_E[z]$ werden gemäß Abbildung 7.1 mit den Schallstrahlungsfilttern $\mathcal{R}[z]$ multipliziert. Diese Multiplikation führt zu Ausgängen p , deren Signalenergie der APE der einzelnen Schalleinstrahlungsmoden entspricht. Weiterhin beschreiben d die Störgrößen, y die Ausgänge der Beschleunigungssensoren, r die Führungsgrößen sowie u die Stellgrößen. Die Übertragungsfunktion des auf diese Weise erhaltenen Modells $\mathbf{P}[z]$ soll mithilfe eines geeigneten Reglers $\mathcal{K}[z]$ reduziert werden. Zu diesem Zweck wird im folgenden Abschnitt die \mathcal{H}_∞ -Reglersynthese vorgestellt.

7.1.4. \mathcal{H}_∞ -Reglersynthese

Dieser Abschnitt stellt die \mathcal{H}_∞ -Regelung basierend auf dem generalisierten Streckenmodell $\mathbf{P}[z]$ in Abbildung 7.2 dar. Letzteres setzt sich gemäß des vorangegangenen Kapitels aus dem erweiterten Streckenmodell $G_E[z]$ mit nachgeschaltetem Schallstrahlungsfiler $\mathcal{R}[z]$ zusammen. Die \mathcal{H}_∞ -Regelung ist der Gruppe der robusten Regelungsverfahren zugehörig, wobei sich die Robustheit auf Unsicherheiten im Streckenmodell bezieht. Vorteile sind dabei eine hohe Regelgüte bei hinreichend hoher Stabilität der geschlossenen Regelstrecke.

Abbildung 7.2.: Generalisierte Regelstrecke $\mathbf{P}[z]$

Die Übertragungsfunktionen des Systems in Abbildung 7.2 ergeben sich zu

$$\begin{Bmatrix} p \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{P}[z] \begin{Bmatrix} d \\ u \end{Bmatrix} \quad (7.9a)$$

$$u = \mathcal{K}[z] y. \quad (7.9b)$$

Die generalisierte Regelstrecke $\mathbf{P}[z]$ ist dabei in folgender Form als Zustandsraumdarstellung gegeben

$$\mathbf{P}[z] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}[z] & \mathbf{P}_{12}[z] \\ \mathbf{P}_{21}[z] & \mathbf{P}_{22}[z] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{array} \right]. \quad (7.10)$$

Die Abhängigkeit des Performance-Ausgangs p vom Störungs-Eingang d kann durch Elimination der Ausgänge y sowie Eingänge u in eine untere lineare Fraktionaldarstellung (LFR, engl.: *linear fractional representation*) überführt werden [ZD98]:

$$p = F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])d \quad (7.11)$$

Diese LFR lässt sich zu

$$F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z]) = \mathbf{P}_{11}[z] + \mathbf{P}_{12}[z] \mathcal{K}[z] (\mathbf{E} - \mathbf{P}_{22}[z] \mathcal{K}[z])^{-1} \mathbf{P}_{21}[z] \quad (7.12)$$

schreiben. Das Ziel der \mathcal{H}_∞ -Regelungsauslegung ist es, einen Regler $\mathcal{K}[z]$ zu finden, so dass der Term $F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])$ hinsichtlich der \mathcal{H}_∞ -Norm minimiert wird. Die \mathcal{H}_∞ -Norm von $F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])$ ist definiert zu

$$\|F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])), \quad (7.13)$$

wobei $\bar{\sigma}(\cdot)$ der maximale Singulärwert der Matrix $F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])$ ist. Der Operator $\sup(\cdot)$ in Gleichung (7.13) beschreibt das Supremum [BSMM05, S. 623]. Die \mathcal{H}_∞ -Norm stellt demnach den Maximalwert des größten Singulärwerts über dem Frequenzbereich dar und kann grafisch abgelesen werden oder mit einer HAMILTON-Matrix [ZD98, S. 55ff.] iterativ bestimmt werden. In der optimalen \mathcal{H}_∞ -Regelung wird die \mathcal{H}_∞ -Norm zu Null gesetzt, was sich numerisch jedoch aufwendig gestaltet [ZD98]. Aus diesem Grund wird der suboptimale Fall betrachtet.

Ziel des Reglerentwurfs der suboptimalen \mathcal{H}_∞ -Regelung ist eine Minimierung des Systemausgangs p bzw. das Erreichen eines Suboptimums in dem eine Schranke γ zu

$$\|F_L(\mathbf{P}[z], \mathcal{K}[z])\|_\infty < \gamma \quad (7.14)$$

unterschieden wird, sowie eine Stabilisierung des Regelkreises. Die Lösung der suboptimalen Reglersynthese wird in MATLAB[®] mithilfe der *Robust Control Toolbox* durchgeführt [BCPS05]. Voraussetzungen, welche die generalisierte Regelstrecke $\mathbf{P}[z]$ gemäß Gleichung (7.10) erfüllen muss, können in kontinuierlicher Form [ZD98, S. 288] sowie diskreter Form [IG91] der Literatur entnommen werden. Letztere schreiben sich zu

1. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_2)$ sind stabilisierbar und $(\mathcal{C}_2, \mathcal{A}_1)$ sind detektierbar,
2. \mathcal{D}_{12} und \mathcal{D}_{21} haben vollen Rang,
3. $\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 - z\mathbf{E} & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{12} \end{bmatrix}$ hat vollen Spaltenrang für alle z ,
4. $\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 - z\mathbf{E} & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} \end{bmatrix}$ hat vollen Zeilenrang für alle z .

Auf der Grundlage dieser Zustandsraumdarstellung erfolgt die Reglersynthese durch die Lösung von zwei algebraischen RICATTI-Gleichungen. Die mathematischen Einzelheiten dieser Vorgehensweise finden sich in [DGKF89, IG91] sowie im Buch von ZHOU und DOYLE [ZD98]. Aufstellen und Lösen der RICATTI-Gleichungen wird mit der MATLAB[®]-Funktion `hinfsyn.m` durchgeführt, welche gleichzeitig eine Überprüfung der getroffenen Annahmen durchführt.

Wie zuvor beschrieben, soll die \mathcal{H}_∞ -Norm der geschlossenen Regelstrecke minimiert werden. Durch die Einführung von vier frequenzabhängigen Wichtungsfilttern $\mathbf{W}_j[z]$, können dabei zusätzliche Randbedingungen der Ein- und Ausgänge des Streckenmodells berücksichtigt werden. Das verwendete Wichtungsschema ist in Abbildung 7.3 aufgetragen. Die Berechnung der Wichtungsfilterfunktionen wird dabei auf Grundlage zweier Variablen durchgeführt, welche die Werte der Stellgrößen sowie Störgrößenreduktion repräsentieren [AS10]. Die Wichtungsfiltter \mathbf{W}_P sowie \mathbf{W}_D entsprechen dabei Konstanten, da Maxima der Übertragungsfunktion im gesamten Frequenzbereich reduziert werden sollen. Die Filter \mathbf{W}_R und \mathbf{W}_U setzen sich dagegen aus Hochpass- sowie Tiefpassfiltern zusammen. Hochpassfilter dienen der Vermeidung von Reglerantworten auf Gleichanteile in den Sensorsignalen. Dagegen wird mit den Tiefpassfiltern die Anregung von Eigenfrequenzen außerhalb der Reglerbandbreite verhindert.

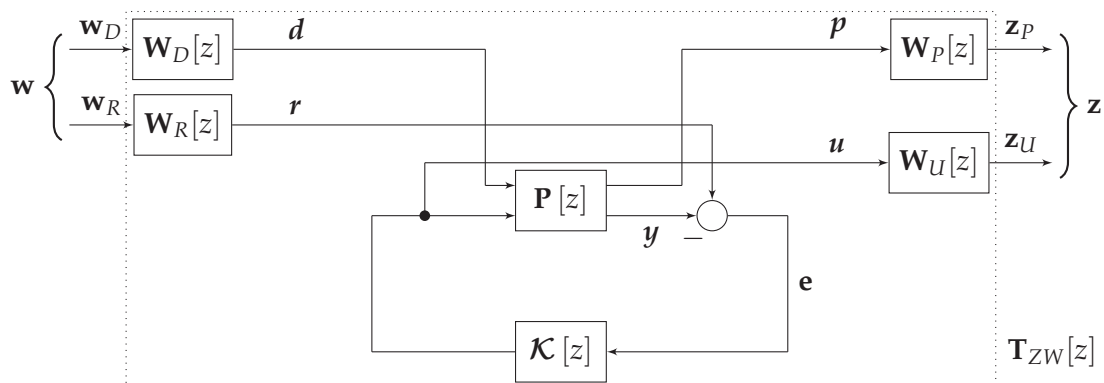


Abbildung 7.3.: Geschlossener Regelkreis mit Wichtungsschema

Die nach Abbildung 7.3 zusammengefasste Transferfunktion $\mathbf{T}_{ZW}[z]$ beschreibt das Übertragungsverhalten vom Eingang \mathbf{w} zum Ausgang \mathbf{z} . Im folgenden Abschnitt wird die Frequenzabhängigkeit der Modelle zugunsten der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Damit lässt sich das gewichtete Streckenmodell \mathbf{T}_{ZW} zu

$$\mathbf{T}_{ZW} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_P (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12} \mathcal{K} \mathbf{S} \mathbf{P}_{21}) \mathbf{W}_D & \mathbf{W}_P \mathbf{P}_{12} \mathcal{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_R \\ -\mathbf{W}_U \mathcal{K} \mathbf{S} \mathbf{P}_{21} \mathbf{W}_D & \mathbf{W}_U \mathcal{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

mit der Sensitivität \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} + \mathbf{P}_{22} \mathcal{K}]^{-1} \quad (7.16)$$

schreiben. Der Term $\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12} \mathcal{K} \mathbf{S} \mathbf{P}_{21}$ stellt das geschlossene Streckenmodell vom Störungs-Eingang \mathbf{d} zum Performance-Ausgang \mathbf{p} dar. Das bei der Reglersynthese verfolgte Ziel ist demnach mit

$$\|\mathbf{T}_{ZW}\|_{\infty} < \gamma \quad (7.17)$$

die Reduktion der \mathcal{H}_{∞} -Norm vom gewichteten Streckenmodell \mathbf{T}_{ZW} unterhalb eine Schranke γ .

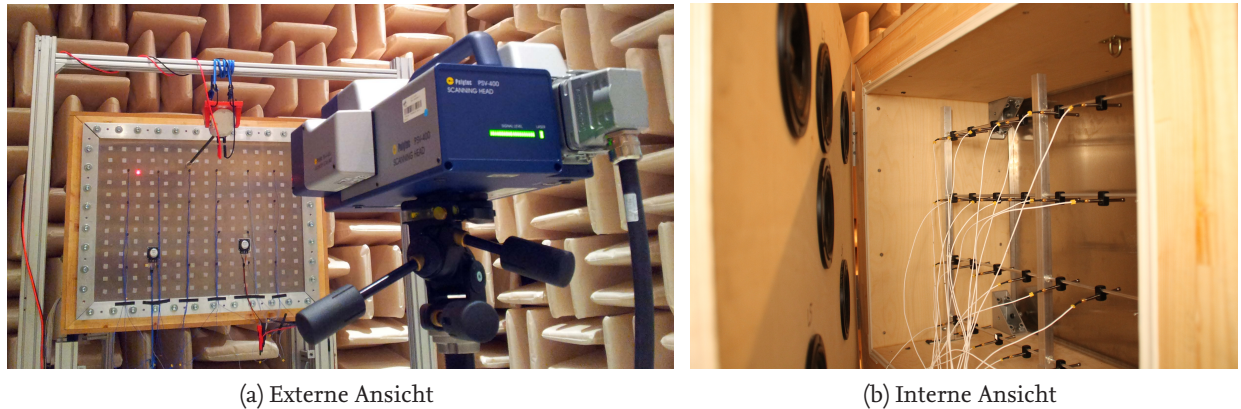
In diesem Abschnitt wurde die Reglersynthese des erweiterten Streckenmodells mit Berücksichtigung der Kavitätsdynamik in Form von Schallstrahlungsfiltern vorgestellt. Es wird dabei der Ansatz verfolgt, die Schalleinstrahlung in die Kavität mit struktureller Sensorik zu quantifizieren. Dabei wird der Vorteil herausgestellt, welcher sich aus der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden ergibt. Eine Wichtung der Signalein- und -ausgänge ermöglicht es, zusätzliche Randbedingungen zu berücksichtigen. Die Methodik soll an einem experimentellen Versuchsträger beispielhaft vorgestellt und der globale Regelungserfolg ausgewertet werden. Zu diesem Zweck widmet sich der nachfolgende Abschnitt dem Versuchsaufbau und der verwendeten Mess- sowie Regelungshardware.

7.2. Beschreibung des Versuchsträgers

Dieser Abschnitt beschreibt den Versuchsaufbau und die Durchführung sowie Randbedingungen der experimentellen Untersuchungen. Der Versuchsträger orientiert sich dabei am QUADERMODELL, deren Schalleinstrahlungsmoden bereits in analytischer Form aus Kapitel 4.3 bekannt sind. Abbildung 7.4 stellt den Versuchsträger in einer externen als auch einer internen Ansicht dar. Dieser wird aus den Komponenten der passiven Struktur, dem aktiven Regelungssystem sowie der zusätzlichen Messhardware gebildet. Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über die einzelnen Komponenten und deren Funktionen.

Die passive Struktur setzt sich zusammen aus

- einer rechteckigen Aluminiumplatte: diese stellt den schallabstrahlenden Prüfkörper dar und besitzt die Maße $(L_X \times L_Y) = (0,6 \times 0,8) \text{ m}^2$ und eine Dicke von $h = 0,002 \text{ m}$. Die Platte ist am Rand in 0,015 m dicken Aluminiumprofilen eingespannt. Es sei erwähnt, dass ein Abgleich von Eigenformen und -frequenzen mit den im analytischen und numerischen Modell eingeführten Randbedingungen nicht Anspruch dieser Arbeit ist. Aus diesem Grund entfällt eine exakte Nachbildung der allseitigen Einspannung.



(a) Externe Ansicht

(b) Interne Ansicht

Abbildung 7.4.: Experimenteller Versuchsaufbau der ebenen Rechteckplatte mit angekoppelter quaderförmiger Kavität

- einer Holzbox: diese stellt die Begrenzung der akustischen Kavität dar, welche durch die Strukturschwingung der Platte angeregt wird und besitzt eine Tiefe von $L_Z = 0,42$ m. Eine exakte Nachbildung der schallharten Kavitätsrandbedingung ist damit nicht gegeben; durch Absorptionsprozesse entlang der Kavitätsränder bedingte Dämpfungseffekte werden anhand einer finiten Randimpedanz gemäß Gleichung (4.14) berücksichtigt.
- der Primäranregung: ein elektrodynamischer Körperschallwandler, welcher entkoppelt zu Platte und Kavität aufgehängt ist und erstere zu Vibrationen anregt. Das breitbandige Anregungssignal d der Primäranregung wird über das Echtzeitsystem generiert. Dieses wird als Zufallssignal mithilfe eines in [Alg10, S. 44ff.] beschriebenen *Peak-Factor-Minimization* Algorithmus hinsichtlich seines Energieeintrags in die Struktur optimiert.

Das aktive Regelungssystem wird gebildet durch

- ein Echtzeitsystem: zur Signalverarbeitung wird ein Echtzeitsystem der Firma dSPACE eingesetzt. Dieses setzt sich aus einem Analog/Digital-Wandler, einem Prozessor und einem Digital/Analog-Wandler zusammen. Die Systemidentifikation und Implementierung von Reglermodellen lässt sich über MATLAB[®]-Skripte sowie Blöcke in SIMULINK[®] durchführen.
- Beschleunigungssensoren: zur parallelen Messung der normalen Strukturbeschleunigung y werden 24 Beschleunigungssensoren verwendet. Diese sind mit Wachs auf der Plattenoberfläche befestigt.
- Tiefpass-Filter: zur Wahrung des Abtasttheorems nach SHANNON und Vermeidung von damit verbundenen *Aliasing*-Effekten werden Tiefpass-Filter vor der Analog/Digital- bzw. Rekonstruktionsfilter nach der Digital/Analog-Wandlung verwendet [AB06, S. 184ff.].
- Körperschallwandler: Inertialaktuatoren liefern den sekundären Eingang u in die Struktur. Diese Ansteuersignale werden vom Echtzeitsystem bereitgestellt.
- Leistungsverstärker: die leistungsarmen, durch das Echtzeitsystem bereitgestellten Ansteuersignale u erfahren eine Pegelanhebung durch zusätzliche Leistungsverstärker. Der eingestell-

te Verstärkungsfaktor wird in allen folgenden Experimenten konstant gehalten, weshalb der Wert nicht weiter thematisiert wird.

Ein Überblick über die verwendeten Hardware-Komponenten und verwendete Einstellungen des aktiven Regelungssystems ist in Tabelle 7.1 gegeben. Abbildung 7.5 stellt darüber hinaus schematisch die Positionen von Primäranregung, Sensoren und Aktuatoren auf der Plattenoberfläche dar.

Tabelle 7.1.: Hardware Komponenten des aktiven Regelungssystems

Gerät	Typ	Sonstiges
Echtzeitsystem	dSPACE DS1006	Abtastfrequenz $F_S = 1$ kHz
Beschleunigungssensor	PCB PIEZOTRONICS 352A24	Masse $m_B = 0,8$ g
Tiefpassfilter	KEMO Card Master 255G	Eckfrequenz $F_C = 1$ kHz, Verminderung 24 dB/Oktave
Inertialaktuator	VISATON EX45	Masse $m_A = 60$ g

Zusätzlich zur Messhardware des Regelungssystems sind Systeme zur Messung der erweiterten Strecke sowie der APE in der Kavität notwendig. Diese zusätzliche Messhardware ist in Tabelle 7.2 aufgelistet. Das LSV dient dabei der Aufzeichnung der normalen Strukturschnelle y_E an diskreten Punkten. Diese sind Ausgangspunkt der Erweiterung der Regelstrecke, wie in Kapitel 7.1.2 beschrieben. Es wird dazu ein Netz aus 13×15 Punkten ausgewertet. Zusätzlich werden 32 Mikrofone in der Kavität über ein Frontend aufgezeichnet. Diese dienen der Erfassung der Schalldrücke $\mathbf{p}(\omega)$ innerhalb der Kavität für den unregelmäßigen sowie geregelten Fall. Des Weiteren werden sie zur Abschätzung der APE sowie deren Reduktion verwendet. Dazu lassen sich die Positionen in sequentieller Messreihenfolge entlang der \bar{z} -Achse verschieben.

Tabelle 7.2.: Zusätzliche Messhardware für strukturelle und akustische Messungen

Gerät	Typ
Laser Scanning Vibrometer	POLYTECH OFV-055 (Scan-Kopf), POLYTECH OFV-3001-S (Controller)
Mikrofone	PCB PIEZOTRONICS T130D21
Frontend	NATIONAL INSTRUMENTS PXI-1042Q

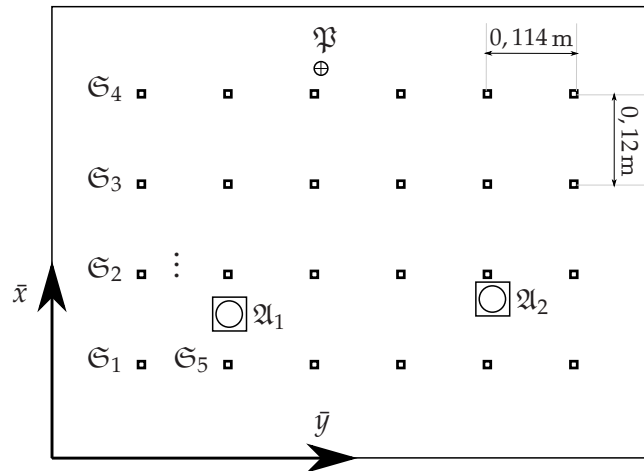


Abbildung 7.5.: Positionen von Primaraktuatoren (\mathfrak{P}), Sekundaraktuatoren (\mathfrak{A}_m) und Sensoren (\mathfrak{S}_n)

7.3. Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen

Die in Kapitel 7.1 vorgestellten Methoden zum modellbasierten Reglerentwurf werden am Versuchsträger gemäß Kapitel 7.2 angewendet um eine Reduktion der APE mit experimentellen Daten zu belegen. Zunächst erfolgt eine Validierung der identifizierten Regelstrecke $\mathbf{G}[z]$ sowie der erweiterten Regelstrecke $\mathbf{G}_E[z]$. Anschließend wird die Vorhersage der Schallstrahlungsfiler mit Schalldruckmessungen im Innenraum plausibilisiert. Die Störgrößenreduktion sowie die Mechanismen der Unterdrückung der APE werden abschließend vorgestellt.

7.3.1. Verifikation der Streckenmodelle

Die Streckenmodelle werden gemäß Kapitel 7.1.1 mithilfe der Unterraum-Methode identifiziert. Die Validierung derselben erfolgt durch einen Vergleich der Singulärwerte mit der aufgezeichneten Übertragungsfunktion von den Aktuatoren zu den Beschleunigungssensoren. Die Singulärwerte, berechnet mithilfe der MATLAB[®]-Funktion **sigma.m**, geben dabei einen Wert für das Übertragungsverhalten vom Eingang zum Ausgang an. Die Anwendbarkeit auf verschiedenartige Modelle wie Transferfunktionen, Zustandsraummodelle oder Frequenzgänge ermöglicht dabei einen flexiblen Vergleich. Eine Validierung jedes einzelnen Transferpfades ist damit nicht notwendigerweise gegeben. Dennoch lassen sich die übergeordneten Tendenzen in den Singulärwerten als zuverlässige Gütekriterien in der Abbildung der Modelle werten.

Einen beispielhaften Vergleich der Singulärwerte für eine identifizierte Regelstrecke $\mathbf{G}[z]$ mit dem gemessenen Frequenzgang zeigt Abbildung 7.6. Für die Identifikation der Strecke wurde eine Anzahl von $n_X = 150$ Zuständen verwendet. Diese Menge ist für die vorliegende Problemstellung ausreichend, um das Übertragungsverhalten mit hinreichender Genauigkeit abzubilden.

Eine Erweiterung der Modellstrecke für den experimentellen Versuchsträger um die zusätzlichen Ausgänge \mathbf{y}_E des LSV wird nach dem in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Verfahren durchgeführt. Abbildung 7.7 zeigt einen Vergleich der Singulärwerte für die erweiterte Strecke $\mathbf{G}_E[z]$ mit dem gemessenen Frequenzgang zu den Messpunkten des LSV. Die Abschätzung der Oberflächenschnellen anhand der Beschleunigungssensoren stimmt hinreichend genau mit den gemessenen Schnellen

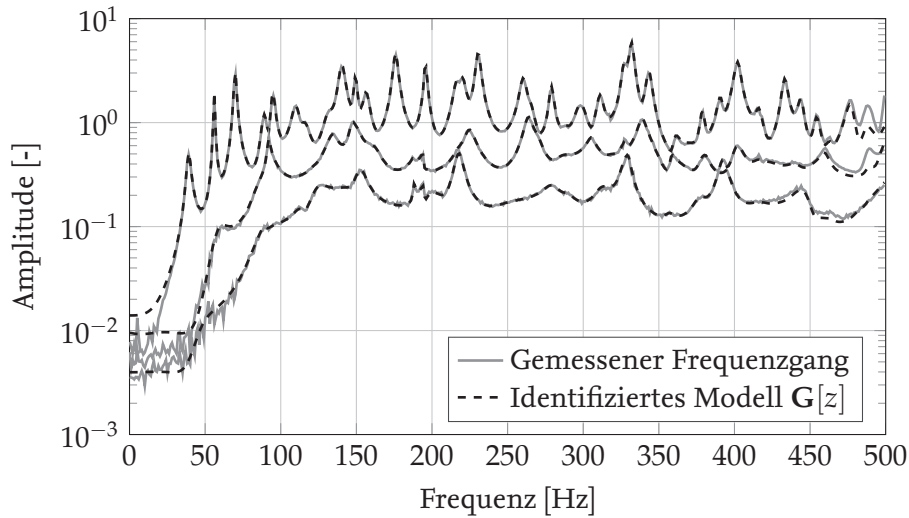


Abbildung 7.6.: Vergleich der Singulärwerte einer identifizierten Regelstrecke mit den Singulärwerten der Übertragungsfunktion

überein. Die Verwendung der erweiterten Strecke erscheint für die Vorhersage der APE mit entsprechenden Schallstrahlungsfiltren geeignet zu sein. Da alle Strukturresonanzen beobachtet werden können, ist auch die Wahl des Netzes von Beschleunigungssensoren als ausreichend zu bewerten.

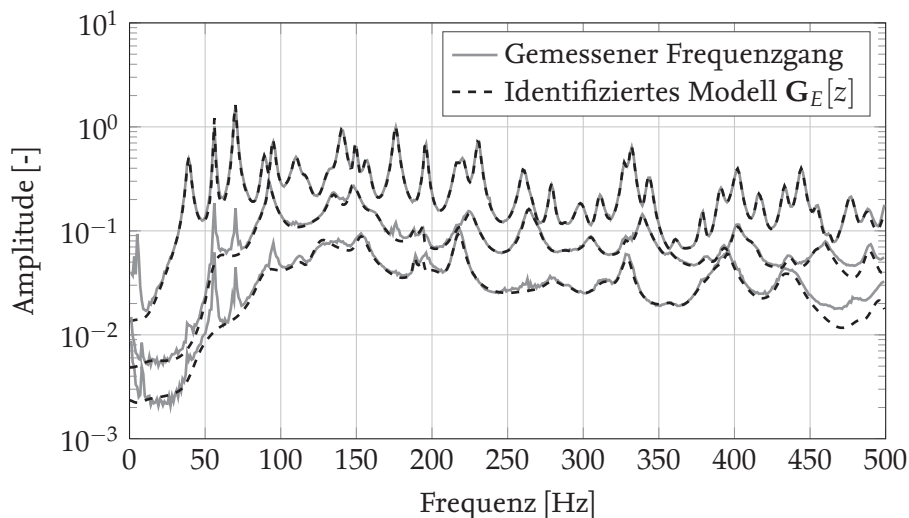


Abbildung 7.7.: Vergleich der Singulärwerte der erweiterten Regelstrecke mit den Singulärwerten der Übertragungsfunktion

Die auf diese Weise erhaltenen und validierten Streckenmodelle $G[z]$ und $G_E[z]$ werden im nächsten Schritt durch die Erweiterung um entsprechende Schallstrahlungsfiltren für die Abschätzung der APE und deren aktive Reduktion verwendet. Dazu wird im nachfolgenden Abschnitt zunächst die Güte der Vorhersage untersucht.

7.3.2. Verifikation der Schallstrahlungsfilter

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich der gemessenen APE mit der Vorhersage durch die Schallstrahlungsfilter durchgeführt. Zu diesem Zweck sind die folgenden zwei Schritte notwendig: Zunächst muss durch eine Vermessung des akustischen Innenraums eine geeignete Referenz für die APE quantifiziert werden; in einem zweiten Schritt werden die Schallstrahlungsfilter gemäß der in Kapitel 7.1.3 vorgestellten Methodik ausgelegt. Voraussetzung der Auslegung ist die Kenntnis der akustischen Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungsverhältnisse, welche sich im experimentellen Versuchsträger einstellen und die in einem separaten Messdurchgang ermittelt werden müssen. In dem auf diese Weise erhaltenen Streckenmodell $\mathbf{P}[z]$ entspricht die Summe aus den Signalenergien der Performance-Ausgänge \mathbf{p} im optimalen Fall der APE aus der Referenzmessung.

Um eine Referenz für die Güte der Abschätzung der APE zu erhalten, wird diese bei einer strukturellen Anregung durch den Primäraktuator über eine Anzahl von $K = 192$ Schalldruckmessungen \mathbf{p} in der Kavität vermessen. Diese Anzahl wird durch eine sequentielle Vermessung der 32 Mikrofone an sechs Positionen entlang der \bar{z} -Achse erzielt. Die APE im Referenzfall berechnet sich aus den Schalldruckmessungen zu

$$E_{P,R}(\omega) = \frac{L_X L_Y L_Z}{4\rho_F c_F^2 K} \mathbf{p}^H(\omega) \mathbf{p}(\omega) \quad (7.18)$$

durch räumliche Diskretisierung von Gleichung (3.1). Diese stichprobenartige Lösung der Integralgleichung wird als MONTE-CARLO-Methode [BSMM05, S. 806ff.] bezeichnet.

Aufgrund von Fertigungstoleranzen im experimentellen Versuchsaufbau und temperaturbedingten Schwankungen der Materialparameter sowie Randbedingungen kann es zu Abweichungen der analytisch bestimmten akustischen Eigenkreisfrequenzen, Eigenformen und modalen Dämpfungsverhältnisse kommen. Davon sind auch die Schalleinstrahlungsmoden und -effizienzen des QUADERMODELLS gemäß Gleichung (4.25) sowie Gleichung (4.26) betroffen. Aus diesem Grund sollen für die Auslegung der Schallstrahlungsfilter die akustischen Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungsverhältnisse experimentell identifiziert werden. Dabei wird zunächst das interne Fluid durch einen Lautsprecher angeregt. Eine Lautsprecheranregung wird hier gegenüber einer strukturellen Anregung bevorzugt, da sich mit ihr die fluiddominierten Moden isoliert von den strukturdominierten Moden anregen und so die akustischen Eigenfrequenzen gesondert identifizieren lassen. Aus den Maxima der so erhaltenen Frequenzgänge vom Lautsprecher zu den Mikrofonen werden die Eigenfrequenzen ermittelt. Das modale Dämpfungsverhältnis der jeweiligen Eigenform bestimmt sich aus der Methode der halben Leistungsbandbreite [DHR05]. Die Schalleinstrahlungsmoden werden darüber hinaus durch Gleichung (4.25) als unverändert gegenüber dem analytischen QUADERMODELL angenommen. Die Gültigkeit dieser Annahme soll im Folgenden durch einen Vergleich mit der APE $E_{P,R}(\omega)$ im Referenzfall bestätigt werden.

Die identifizierten Eigenfrequenzen und Dämpfungsverhältnisse sind in Tabelle 7.3 aufgelistet. Hier stellen sich Abweichungen zu den analytisch bestimmten Eigenfrequenzen dar, welche mit einer maximalen Diskrepanz von 12, 11 Hz als gering zu bewerten sind. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die akustische Starrkörpermode bei 0 Hz nicht messtechnisch erfasst werden kann. Da sie jedoch insbesondere eine starke Kopplung zur (1, 1)-Eigenform der Struktur aufweist (siehe Gleichung (6.16)), kann sie bei der Auslegung der Schallstrahlungsfilter nicht vernachlässigt werden.

Tabelle 7.3.: Experimentell identifizierte und analytische akustische Eigenfrequenzen

(l, m, n)	Exp. Frequenz	Analyt. Frequenz	Dämpfungsverhältnis
(0, 0, 0)	0 Hz	0 Hz	1 %
(0, 1, 0)	211,9 Hz	214,37 Hz	2,65 %
(1, 0, 0)	288,1 Hz	285,83 Hz	1,19 %
(1, 1, 0)	369,4 Hz	357,29 Hz	1,60 %
(0, 0, 1)	417,5 Hz	408,33 Hz	0,90 %
(0, 2, 0)	429,4 Hz	428,75 Hz	0,80 %
(0, 1, 1)	461,3 Hz	461,18 Hz	0,88 %
(1, 0, 1)	497,5 Hz	498,43 Hz	0,69 %

Der Einfluss der Änderung ihrer Eigenfrequenz sowie modalen Dämpfung hat sich dabei als gering herausgestellt, sodass an dieser Stelle eine Eigenfrequenz von 0 Hz sowie modale Dämpfung von 1 % weiterhin verwendet werden.

Mit den identifizierten Modaldaten werden Schallstrahlungsfilter gemäß Kapitel 7.1.3 ausgelegt und an die erweiterte Regelstrecke angehängt. Die Quadratwurzel der frequenzabhängigen Schalleinstrahlungseffizienz $\sqrt{s_{l,m}[z]}$ wird mithilfe der MATLAB[®]-Funktion `fitmagfrd.m` in ein zeitdiskretes, minimalphasiges Zustandsraummodell überführt. Diesem Verfahren liegt die Lösung eines logarithmischen TSCHEBYSCHEFF-Approximationsproblems zu Grunde [BV04, S. 629]. Bei der Identifikation hat sich eine Anzahl von vier Zuständen bewährt. Es werden fünf Schallstrahlungsfilter berücksichtigt, da sich in den analytischen Untersuchungen in Kapitel 4 gezeigt hat, dass diese Menge den Großteil der Schallenergie im untersuchten Frequenzbereich beschreibt und damit für eine Niedrigrangapproximation der IIE genutzt werden kann. Das resultierende Schallstrahlungsfilter $\mathcal{R}[z]$ hat bei einer Berücksichtigung von $n_R = 5$ Schalleinstrahlungsmoden die Modellordnung $n_R n_X = 20$. Einen Vergleich zwischen den Schalleinstrahlungseffizienzen und den Singulärwerten des identifizierten Schallstrahlungsfilters $\mathcal{R}[z]$ zeigt Abbildung 7.8. Hier lässt sich nur ein minimaler Unterschied ausmachen.

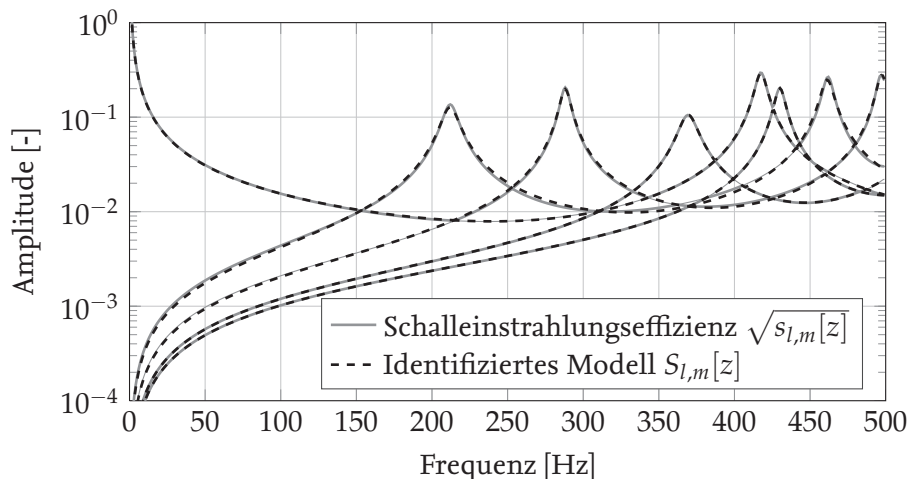


Abbildung 7.8.: Vergleich der Singulärwerte von Quadratwurzel der Schalleinstrahlungseffizienzen mit den identifizierten Zustandsraummodellen (4. Ordnung)

Mit dem Schallstrahlungsfilter $\mathcal{R}[z]$ kann die APE basierend auf den Strukturschnellen y_E abgeschätzt werden. Eine Vorhersage lässt sich dabei aus dem Frequenzgang von $\mathbf{P}_{11}[z]$ nach Gleichung (7.10) generieren. Einen Vergleich dieser Vorhersage mit der Referenz $E_{P,R}(\omega)$ gemäß Gleichung (7.18) zeigt Abbildung 7.9. Da dabei der Amplitudengang vom Primäreingang d zur APE betrachtet wird, ist die APE ebenso wie in folgenden Abbildungen in der Einheit J/V angegeben. Eine qualitative Übereinstimmung der Kavitätsdynamik im betrachteten Frequenzbereich kann dabei erkannt werden. Diese wird insbesondere im Bereich der akustischen Eigenfrequenzen sichtbar. Abseits dieser Bereiche treten einige Abweichungen auf, insbesondere in Bereichen von Minima der APE. Da sich die \mathcal{H}_∞ -Regelung auf die Maxima der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich konzentriert, sollten sich diese Abweichungen nicht negativ auf die Störgrößenunterdrückung auswirken. Im Anschluss an die Reglersynthese und die akustische Vermessung des geschlossenen Regelkreises stellt sich diese Annahme im nachfolgenden Abschnitt als valide heraus.

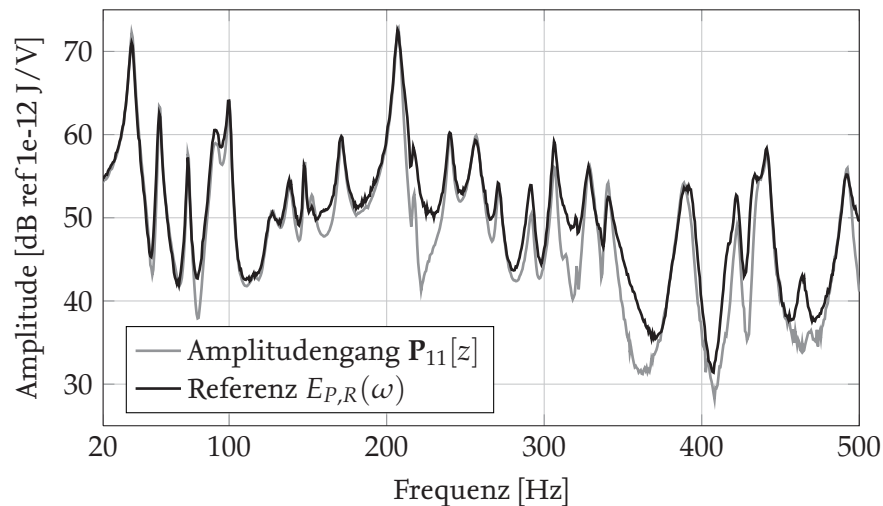


Abbildung 7.9.: Vergleich der mit Mikrofonarray gemessenen und der durch Schallstrahlungsfilter vorhergesagten Amplitudengänge von Primäranregung zur APE

Unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen ist die in diesem Kapitel beschriebene Vorhersage der Schallstrahlungsfilter als hinreichend genau zu bewerten. Die Annahme der gegenüber dem analytischen Modell unveränderten akustischen Eigenformen stellt hier die bedeutendste Vereinfachung dar. Die Vorhersage könnte beispielsweise durch ein geeignetes *Model Updating* experimentell gemessener Fluidmoden bedeutend verbessert werden. Wegen der grundlegenden Art der Untersuchung werden die Abweichungen bei der Vorhersage der APE im nachfolgenden Abschnitt toleriert. Ein Vergleich des hier dargestellten mit dem nach Kapitel 3.3 in der Literatur üblichen Verfahren, bei dem frequenzabhängige Singulärvektoren bei einer Normalisierungsfrequenz fixiert werden, offenbart Abweichungen in der Vorhersage, welche die hier beschriebenen deutlich übersteigen (siehe bspw. [Caz99, Abb. 6.7-6.9]).

7.3.3. Störgrößenunterdrückung der Regelung

Der Beleg einer aktiven Unterdrückung der APE in der Kavität mit experimentellen Daten ist Anspruch des vorliegenden Abschnitts. Zu diesem Zweck werden die im vorangegangenen Abschnitt

erzeugten und validierten Zustandsraummodelle der Regelstrecke verwendet. Das mithilfe der in Kapitel 7.1.4 beschriebenen Reglersynthese erzeugte Reglermodell $\mathcal{K}[z]$ wird auf dem Echtzeitsystem implementiert, um den geschlossenen Regelkreis zu erhalten. Die Quantifizierung der APE im offenen und geschlossenen Regelkreis erfolgt dabei nach Gleichung (7.18) unter Zuhilfenahme der Mikrofonmessungen. Neben der globalen Unterdrückung der APE werden auch die strukturellen Mechanismen mithilfe des LSV untersucht, welche für deren Reduktion verantwortlich sind.

Das Vorgehen bei der Reglersynthese für das identifizierte Streckenmodell $\mathbf{P}[z]$ ist dabei wie folgt: Zunächst werden die Parameter zur Stellgrößen- sowie Störgrößenunterdrückung für die Wichtungsfiler gemäß Abbildung 7.3 gewählt. Anschließend wird ein Reglermodell $\mathcal{K}[z]$ mit der Funktion **hinfosyn.m** in MATLAB[®] identifiziert und auf dem Echtzeitsystem in Form von SIMULINK[®]-Blöcken implementiert. Anschließend wird das Modell auf Stabilität getestet und die Filterkoeffizienten auf iterative Weise bestimmt.

Die Stabilität hat sich im Fall der Schallstrahlungsfilter $\mathcal{R}[z]$ insbesondere im Bereich der schmalbandigen Maxima in den Bereichen um die Fluidresonanzen als sensitiv erwiesen. Vorgreifend sei an dieser Stelle angemerkt, dass diese Sensitivität der Grund für die unterschiedliche Frequenzcharakteristik der APE in Abbildung 7.9 sowie Abbildung 7.10 im Fall des offenen Regelkreis ist. Die Implementierung des Reglermodells ergab, dass der Sekundäraktuator schmalbandige Resonanzen anregte, welche im ursprünglichen Streckenmodell aufgrund der Position des Primäraktuators nicht enthalten waren. Aus diesem Grund wurde der Primäraktuator minimal verschoben, was eine Abwandlung der Frequenzcharakteristik ergab. Da diese Strukturresonanzen nahe der Stabilitätsgrenze lagen, bestimmt die Stabilität bei dem verwendeten Regelungsansatzes im Wesentlichen die maximal zu erreichende Störgrößenreduktion.

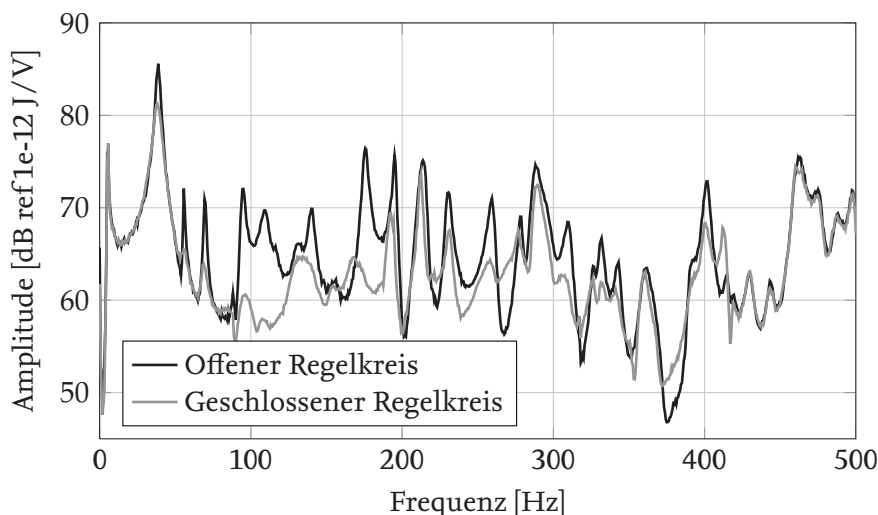


Abbildung 7.10.: Vergleich des Amplitudengangs von der Primäranregung zur in der Kavität abgeschätzten APE im unregelten sowie geregelten Fall

Einen Vergleich der APE der Messungen im offenen und geschlossenen Regelkreis zeigt Abbildung 7.10 für ein beispielhaftes, stabiles Reglermodell $\mathcal{K}[z]$. Dabei stellt sich im geschlossenen Regelkreis eine Reduktion über nahezu den gesamten betrachteten Frequenzbereich dar. Schmalbandige Ausnahmen treten beispielsweise bei 270 Hz sowie 412 Hz auf. Wird die Differenz der APE im

offenen und geschlossenen Regelkreis mithilfe der Trapezformel [BSMM05, S. 926f.] über der Frequenz integriert, ergibt sich eine Reduktion von 2,14 dB. Eine maximale, schmalbandige Reduktion von 14,31 dB wird bei 176,3 Hz erzielt.

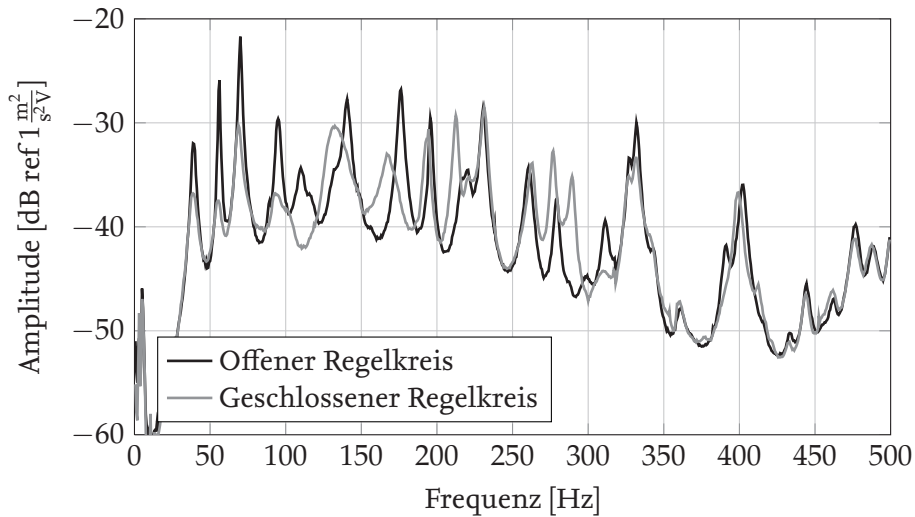


Abbildung 7.11.: Vergleich des Amplitudengangs von der Primäranregung zur mittleren quadratischen Strukturschnelle im unregulierten sowie geregelten Fall

Der Reduktion der APE steht die in Abbildung 7.11 aufgezeigte mittlere quadratische Strukturschnelle im offenen sowie geschlossenen Regelkreis gegenüber. Im Gegensatz zur APE weist diese keine Reduktion über den gesamten Frequenzbereich auf. Dieser Fakt ist aus der Literatur zu Unterdrückung der akustischen Fernfeldabstrahlung bekannt und liegt in einer Umstrukturierung der strukturellen Betriebsschwingform begründet [FHS91]. Die Schalleinstrahlung wird dementsprechend nicht allein durch eine Unterdrückung der strukturellen Betriebsschwingform eingestellt. Diese Umstrukturierung wird nachfolgend gesondert anhand der LSV-Messung untersucht.

Abbildungen 7.12 sowie 7.13 zeigen ausgewählte Betriebsschwingformen der Platte im offenen und geschlossenen Regelkreis. Bei einer Frequenz von 38,75 Hz ist lediglich die (1,1)-Eigenform der Platte an der Schallabstrahlung beteiligt. Die aus der Regelung resultierende Reduktion der APE ist hier in der Unterdrückung dieser einen Eigenform begründet. Diese Tatsache wird durch nahezu identische Pegel der Unterdrückung in APE (Abbildung 7.10) und Strukturschnelle (Abbildung 7.11) von ≈ 5 dB bestätigt. Auf der anderen Seite ist bei 95 Hz eine Umstrukturierung der Betriebsschwingform deutlich. Eine volumenverschiebende Eigenform, ähnlich einer (1,3)-Eigenform, wird in eine nicht volumenverschiebende Eigenform umgewandelt. Letztere ähnelt dabei einer (2,2)-Eigenform. Die Klasse der volumenverschiebenden Platteneigenformen zeichnet sich nach [Pre65] durch ungerade Indizes in beiden Raumrichtungen aus und weist häufig eine weniger starke Kopplung an interne akustische Kavitäten auf. Eine Reduktion der Kopplung an die interne Kavität zeigt sich bei der vorliegenden Frequenz auch in Abbildung 7.14, welche einen Vergleich der Schalldruckverteilungen im Innenraum darstellt. Dabei wird eine globale Unterdrückung der Schalldrücke im Kavitätsumfang ersichtlich. Es stehen bei dieser Frequenz Reduktionen von 11,56 dB in der APE sowie 7,37 dB in der mittleren, quadratischen Strukturschnelle gegenüber.

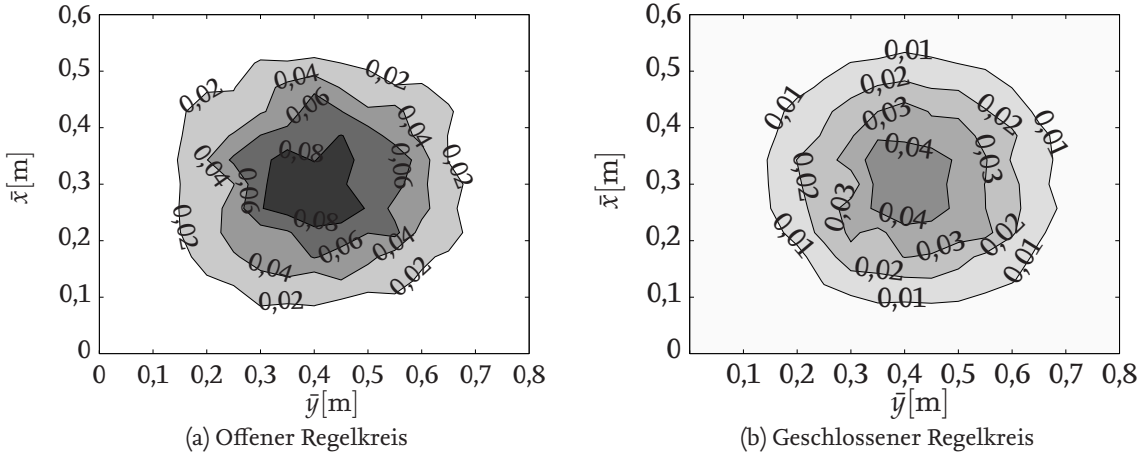


Abbildung 7.12.: Frequenzgang von der Primäranregung zur Schnelle der Platte bei 38,75 Hz (Einheit: $\text{m}/(\text{s V})$)

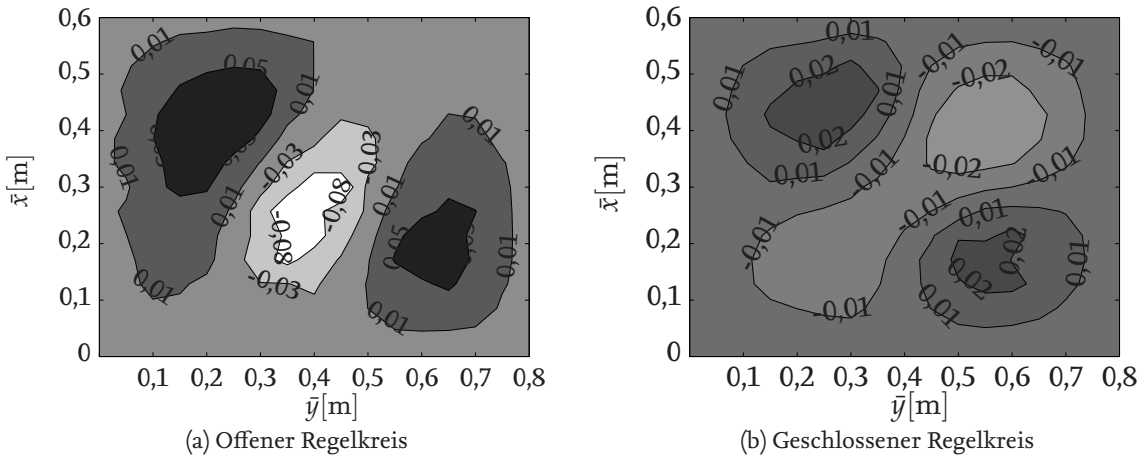


Abbildung 7.13.: Frequenzgang von der Primäranregung zur Schnelle der Platte bei 95 Hz (Einheit: $\text{m}/(\text{s V})$)

Eine weitere Schalldruckverteilung in der Kavität bei 176,3 Hz ist in Abbildung 7.15 dargestellt. Bei dieser Frequenz wird ein Maximum der Unterdrückung der APE erreicht. Die dynamische Antwort der Kavität auf die strukturelle Anregung ist bei dieser Frequenz von der akustischen $(0, 1, 0)$ -Eigenform dominiert. Dies wird deutlich durch die Knotenlinie bei $\bar{y} = 0,4 \text{ m}$. Der Reduktion der APE steht eine Strukturschnellereduktion von 11,01 dB gegenüber. Auch hier zeigt sich eine Kombination der Mechanismen modale Unterdrückung sowie Umstrukturierung für die Reduktion der APE verantwortlich. Dabei ist ein globaler Regelerfolg erkennbar, da die Schalldrücke im gesamten Kavitätswolumen reduziert werden.

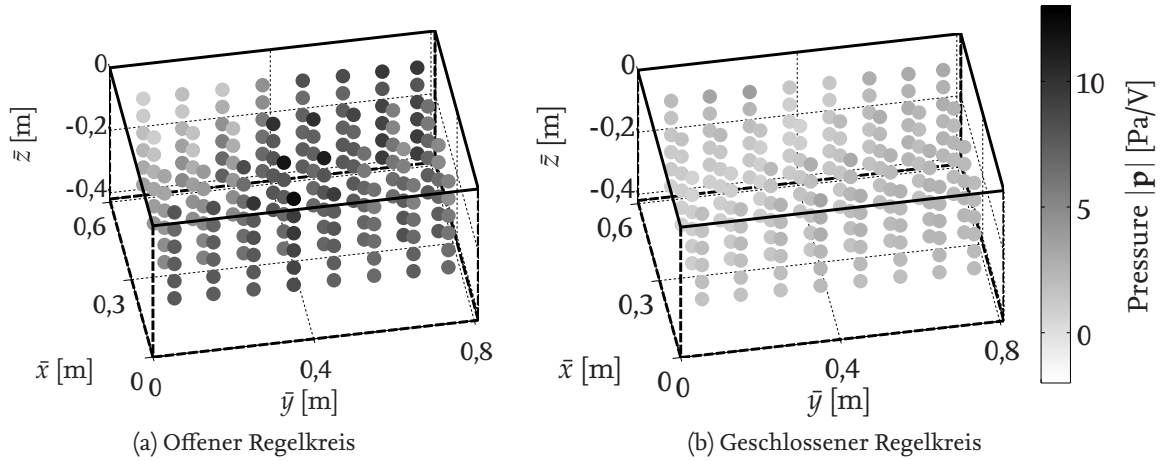


Abbildung 7.14.: Amplitudengang von der Primäranregung zur Schalldruckverteilung in der Kavität bei der Frequenz 95 Hz

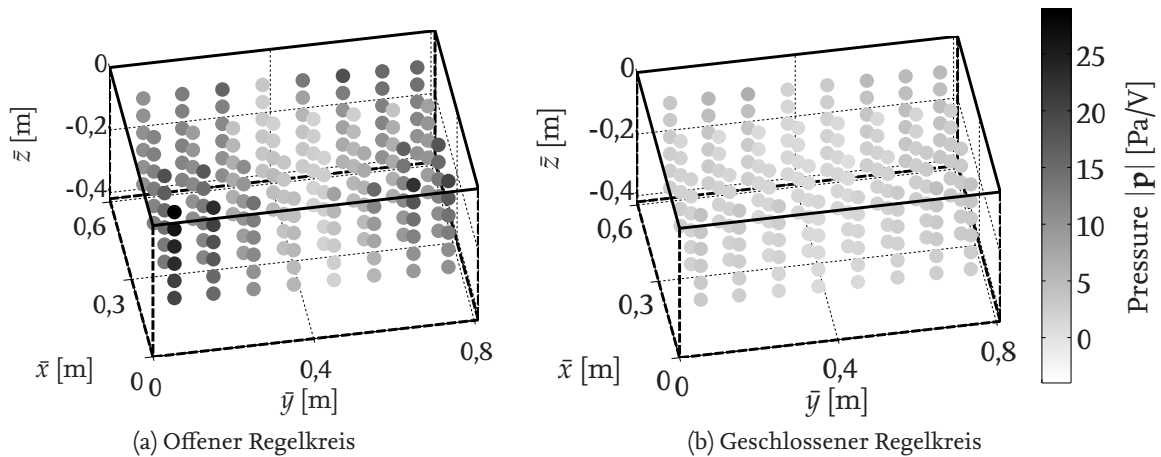


Abbildung 7.15.: Amplitudengang von der Primäranregung zur Schalldruckverteilung in der Kavität bei der Frequenz 176,3 Hz

Zusammenfassung

Dieses Kapitel stellt eine Methode zur Identifikation eines erweiterten Streckenmodells und Schallstrahlungsfiltren für experimentelle Untersuchungen vor. Des Weiteren wird eine Reglersynthese durchgeführt um die Ausgänge der Schallstrahlungsfiltren an einem experimentellen Versuchsträger aktiv zu unterdrücken. Die Verwendung der, aus den frequenzunabhängigen Schalleinstrahlungsmoden berechneten, Schallstrahlungsfiltren führt dabei zu einer validen Vorhersage der APE. Bezugnehmend auf **Arbeitshypothese 4** lässt sich festhalten, dass eine breitbandige, globale Reduktion der strukturellen Schallabstrahlung in einen akustischen Innenraum mit diesem Kapitel experimentell mit einer frequenzintegrierten Unterdrückung von 2,14 dB und einer maximalen Unterdrückung von 14,31 dB belegt ist. Die Struktur erfährt dabei eine stochastische Primäranregung. Durch die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden kann der Schallstrahlungsfiltren

mit einer geringen Modellordnung ausgelegt werden. Die Breitbandigkeit der Störgrößenunterdrückung beschränkt sich wegen der Verwendung des gewählten Regelungsansatzes auf spektral gefärbte Signalanteile. Weiterhin wurden die aus analytischen Untersuchungen bekannten strukturellen Mechanismen der modalen Reduktion und Umstrukturierung im Experiment bestätigt. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methodik zur breitbandigen Auslegung der Schallstrahlungsfiler bildet damit die Grundlage für weitreichende Untersuchungen zur aktiven Schalleinstrahlungsminderung. Das nachfolgende Kapitel fasst die Erkenntnisse dieser Dissertation zusammen und zeigt Perspektiven für Regelungssysteme auf, welche sich aus der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden ergeben.

8. Perspektiven aktiver Maßnahmen der Schalleinstrahlungsminderung

Gegenstand der vorliegenden Dissertation ist die aktive Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten. Es wird dabei die **Forschungshypothese** verfolgt, dass die Schalleinstrahlung in Form von orthogonalen Schalleinstrahlungsmoden formuliert werden kann, welche unabhängig von der Frequenz sind. Diese Frequenzunabhängigkeit soll gezielt für die Ordnungsreduktion eines mathematischen Modells der physikalischen Regelstrecke bei der Implementierung experimenteller Regler nutzbar gemacht werden.

Es ergibt sich entsprechend den analytischen, numerischen und experimentellen Methodiken eine dreigeteilte Gliederung der Arbeit. Zunächst wird die Frequenzunabhängigkeit der strukturellen Schalleinstrahlungsmoden an den generischen, analytischen Interaktionssystemen des QUADER- und ZYLINDERMODELLS vorgestellt. Anschließend erfolgen phänomenologische Untersuchungen bezüglich der numerischen Diskretisierung der generischen Interaktionsmodelle. Dabei wird zwischen räumlicher sowie modaler Diskretisierung unterschieden. Letztere ergibt sich unter Verwendung der modalen Interaktionstheorie durch die Kopplung diskreter Modenanteile. Der dritte Teil beschäftigt sich mit experimentellen Implementierungen, bei denen zunächst die Vorhersage der APE mithilfe der Schalleinstrahlungsmoden validiert und anschließend die aktive Reduktion derselben untersucht wird. Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit gemäß der in Kapitel 2 aufgestellten Arbeitshypothesen zusammen und zeigt Perspektiven für künftige Forschungsaktivitäten auf.

Bei der Untersuchung generischer, analytischer Modelle der Schalleinstrahlung konnte im Rahmen der **Arbeitshypothese 1** gezeigt werden, dass die Randintegralgleichung für die Quantifizierung der APE in Abhängigkeit von der, die Kavität umgebenden, Strukturschnelle geeignet ist. Für diese Quantifizierung bildet die GREEN'sche Funktion auf Basis der akustischen Eigenformen mit schallharten Randbedingungen die Grundlage. Durch eine gezielte Ausnutzung der Orthogonalität bzw. Parallelität der entkoppelten akustischen Eigenformen, reduziert auf die strukturelle Oberfläche, können für die generischen Modelle die Schalleinstrahlungsmoden hergeleitet werden. Letztere entsprechen einer Untermenge der an der Strukturoberfläche orthogonalen Kavitäteeigenformen und sind damit unabhängig von der Frequenz. Die Schalleinstrahlungseffizienzen setzen sich darüber hinaus aus der Summe der Effizienzen der an der Strukturoberfläche parallelen Kavitäteeigenformen zusammen. Der Beweis der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden ist in [HVPS17] erstmalig dokumentiert. Bei den verwendeten QUADER- und ZYLINDERMODELLEN zeigt sich die Gemeinsamkeit, dass sich die Eigenformen der Kavitäten in von den jeweiligen Raumrichtungen abhängige Funktionen separieren lassen. An dieser Stelle sind weitergehende Untersuchungen für Kavitätsmodelle motiviert, welche eine derartige Separation nicht zulassen. Möglicherweise ließe sich in diesem Fall durch den Einsatz von geeigneten Diskretisierungsverfahren eine Frequen-

zunabhängigkeit zeigen. Es ist darüber hinaus denkbar, dass für irregulär geformte Kavitäten die Frequenzunabhängigkeit nicht breitbandig, sondern in begrenzten Frequenzbereichen ausgenutzt werden kann. Methodiken, mit welchen diese Zusammenhänge untersucht werden können, wurden mit den nachfolgenden zwei Arbeitshypothesen aufgestellt und untersucht.

Der Bezug der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden zu räumlich diskretisierten Modellen wurde mit der **Arbeitshypothese 2** adressiert. Dabei wird die IIE in harmonischen Koordinaten assembliert und daraus die Singulärvektoren berechnet. Ein Sortierungsalgorithmus wurde präsentiert, welcher eine Untersuchung von Orthogonalität und Frequenzabhängigkeit dieser numerischen Singulärvektoren ermöglicht. Die räumliche Diskretisierung des QUADERMODELLS sowie eine anschließende Singulärwertzerlegung der IIE in der aufgestellten harmonischen Formulierung zeigt auf, dass die Frequenzunabhängigkeit der Singulärvektoren von der verwendeten räumlichen Auflösung bei der Vernetzung abhängt. Diese Tatsache erschwert die Untersuchung insbesondere für komplexere Geometrien. Eine systematische Erhöhung der Netzfeinheit verdeutlicht dabei die Konvergenz gegen die am analytischen Beispiel getroffenen Aussagen.

Des Weiteren wurde das Phänomen des Ausweichens von Singulärwerten in schmalbandigen Frequenzbereichen aufgedeckt und untersucht, welches bereits aus ähnlichen Disziplinen bei parametrisierten Eigenwertproblemen bekannt ist. Sich annähernde Singulärwerte laufen dabei bei feiner Frequenzauflösung knapp vor dem Schnittpunkt auseinander. Die korrespondierenden Singulärvektoren erfahren in diesem Frequenzbereich eine starke Änderung. Oberhalb der Frequenz, bei welcher das Ausweichen auftritt, verhalten sich die Singulärvektoren entsprechend, als hätten sich die Singulärwerte geschnitten. Dieses Verhalten wurde analytisch anhand der Schalleinstrahlungseffizienzen vorhergesagt. Es wird die Vermutung aufgestellt, dass sich dieses Verhalten der Singulärwerte aus der Diskretisierung der physikalischen Realität ergibt. Es bleibt darüber hinaus ungeklärt, ob das Ausweichen bei einer bestimmten Feinheit der Vernetzung oder durch die Verwendung höherer Ansatzfunktionen verhindert werden kann.

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass die harmonische Formulierung der IIE, welche im Rahmen der **Arbeitshypothese 2** aufgestellt wurde, eine große Anzahl an akustischen Freiheitsgraden notwendig macht. Die räumliche Diskretisierung komplexerer Modelle wie beispielsweise das ZYLINDERMODELL resultieren daher in Systemmatrizen hoher Dimensionen. Diese Tatsache verdeutlicht die Notwendigkeit von Verfahren der Ordnungsreduktion, um Aussagen bezüglich der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden an derartigen Modellen abzuleiten. Ein derartiges Verfahren wurde im Rahmen der folgenden Arbeitshypothese untersucht.

Für die Bearbeitung der **Arbeitshypothese 3** wurde die aus der Literatur bekannte modale Interaktionstheorie zur Assemblierung der IIE aufgegriffen, um ihre Singulärvektoren zu untersuchen. Dabei wurde herausgestellt, dass bei Verwendung der modalen Interaktionstheorie sowohl bei analytischen Eigenformen als auch bei numerischen Eigenvektoren ausreichend viele Moden der Teilsysteme zu berücksichtigen sind, um die Kopplung physikalisch korrekt abzubilden. Diese Notwendigkeit ist einer selektiven Kopplungsbedingung und einer damit einhergehenden spärlichen Besetzung der Kopplungsmatrix geschuldet. Bei Verwendung der numerischen Eigenvektoren zeigt sich diese spärliche Besetzung der Kopplungsmatrix nicht offensichtlich, da Matrixeinträge geringer Amplitude existieren und eine vollständige Besetzung zur Folge haben. Insbesondere die aus einer Singulärwertzerlegung der modal entwickelten IIE resultierenden Singulärvektoren zei-

gen sich sensitiv auf abgeschnittene Modenanteile. Bei Verwendung einer hinreichenden Menge von Moden der Teilsysteme resultiert dabei eine Konvergenz gegen die analytisch beschriebenen Schalleinstrahlungsmoden. Die mit **Arbeitshypothese 1** vorgestellte Voraussetzung für frequenzunabhängige Schalleinstrahlungsmoden (parallele bzw. orthogonale Eigenformen an der Strukturoberfläche) kann anhand der entkoppelten numerischen Eigenvektoren ebenfalls in Konvergenz abgebildet werden. Letztere ist für das QUADERMODELL eindeutig gegeben. Abgesehen von einer aufgrund der strukturellen Krümmung notwendigen, feineren räumlichen Auflösung sind für das ZYLINDERMODELL äquivalente Resultate zu erwarten, sodass dieses nicht gesondert untersucht wurde.

Die verwendete Methodik deckt damit das Potential auf, irregulär geformte Kavitäten gemäß Kapitel A.6 zu untersuchen. Eine Voruntersuchung am Beispiel einer mit einer quaderförmigen Kavität gekoppelten, gekrümmten Schale, legt dabei zusätzlichen Forschungsbedarf nahe. Durch eine systematische Erhöhung der Netzfeinheit und eine anschließende Singulärwertzerlegung kann an diesem Beispiel die Frequenzunabhängigkeit nicht schlüssig bewiesen werden. Dabei werden gängige Diskretisierungsarten mithilfe von Elementen linearer bzw. quadratischer Ansatzfunktionen verwendet. Zur Klärung dieser Frage eignen sich möglicherweise räumliche Diskretisierungen unter Einsatz der Polynom-FEM [EPB07] oder Spektralelementmethode [SP94], bei denen die Ordnung der Ansatzfunktionen über Zwei hinaus geht. Die mit **Arbeitshypothese 3** betrachtete modale Interaktionstheorie ist mit letzteren Methoden kombinierbar.

Der Bezug der Erkenntnisse, hinsichtlich der Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden, zu experimentellen Anwendungen wurde mit **Arbeitshypothese 4** ergründet. In Kapitel 7 wird dazu eine Methodik zur Identifikation von Schallstrahlungsfiltren vorgestellt, welche sich die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden zu Nutze macht. Der verwendete \mathcal{H}_∞ -Regelungsansatz ist dabei robust gegen Unsicherheiten im Streckenmodell, welche bei der Abbildung der APE unweigerlich auftreten. Diese Unsicherheiten sind in Fertigungstoleranzen des Versuchsträgers und in variierenden, unsicheren Materialparametern begründet. An einem am QUADERMODELL orientierten Versuchsträger wird dabei unter stochastischer struktureller Anregung die globale Reduktion der Schalleinstrahlung in eine Kavität mit experimentellen Daten belegt. Als strukturelle Mechanismen für die aktive Reduktion der Schalleinstrahlung zeigen sich dabei die modale Unterdrückung sowie Umstrukturierung verantwortlich. Ein Vergleich der hier vorgestellten aktiven Reduktion der APE mithilfe von Schallstrahlungsfiltren und unterschiedlichen AVC-Regelungskonzepten ist darüber hinaus in [HPA16] am Beispiel des experimentellen QUADERMODELLS gegeben. Mit der Vibrationskontrolle wird dabei die Unterdrückung der Beschleunigungssensoren bzw. erweiterten Streckenausgänge der LSV-Messungen bezweckt. Darin zeigt sich, dass der Einsatz von Schallstrahlungsfiltren die höchste Reduktion der APE in der Kavität und damit der globalen Schalleinstrahlung erzielt.

Die erarbeitete Methodik zur aktiven, experimentellen Reduktion der Schalleinstrahlung sollte hinsichtlich komplexer, akustischer Anregungsarten untersucht werden. Als solche seien beispielhaft ebene Wellen, das diffuse Schallfeld sowie die turbulente Grenzschicht (TBL, engl.: *turbulent boundary layer*) genannt. Das Potential für die aktive Kontrolle der Schalleinstrahlung wurde in dieser Arbeit durch die Verwendung einer stochastischen Anregung aufgezeigt. Darüber hinaus kann bei der Anregung durch ein diffuses Schallfeld oder eine TBL der Störpfad aufgrund einer Vielzahl

unkorrelierter Quellen nicht in Form von Eingängen im Streckenmodell berücksichtigt werden. In diesem Fall lässt sich die Störung beispielsweise additiv zu den Stellgrößen ausdrücken [Alg10]. Darüber hinaus sollten ebenfalls strukturelle Auswirkungen in die Betrachtung mit einbezogen werden, welche sich z.B. aus dem Vorhandensein von Versteifungselementen oder Krümmungen ergeben. Einflüsse der Versteifungen werden von LE MOYNE ET AL. [LMTT05] im Fall der Fernfeldabstrahlung den Kategorien Vibrations-, Quell- sowie Hinderniseffekt zugeordnet. Während der Einfluss auf die Vibrationen im Identifikationsprozess gemäß **Arbeitshypothese 4** abgebildet wird, müssen die übrigen zwei Effekte direkt in der Berechnung von den Schalleinstrahlungsmoden sowie -effizienzen berücksichtigt werden. Weiterhin ließe sich die breitbandige Störgrößenunterdrückung möglicherweise unter Einhaltung von Kohärenz- und Kausalitätsbedingungen durch den Einsatz einer Steuerung erhöhen [MH12, Mis14]. Gegebenenfalls ließen sich mithilfe einer Steuerung auch Einschränkungen bezüglich der Störgrößenunterdrückung umgehen, welche in der vorliegenden Arbeit aufgrund des gewählten Regelungsgesetzes maßgeblich von der Stabilität der Regelstrecken begründet sind. Des Weiteren ist bei der Identifikation der Schallstrahlungsfiler-Ausgänge das Erzielen einer höheren Güte bei der Vorhersage der APE motiviert, wobei ein Erfolg mit den gängigen Methoden zum *Model Updating* [FM95, DM12] realistisch zu bewerten ist.

Als wesentliche Erkenntnis der Arbeit kann festgehalten werden, dass eine breitbandige, globale Reduktion der Schalleinstrahlung experimentell bewiesen wurde. Dies gelingt durch die Ausnutzung der analytisch bewiesenen Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden. Darüber hinaus lassen sich einige offene Fragen und wissenschaftliche Themenstellungen identifizieren, welche für zukünftige Untersuchungen aussichtsreich erscheinen. Neben den offenen Fragestellungen aus den in dieser Arbeit aufgestellten und untersuchten Hypothesen sollen im nachfolgenden Abschnitt losgelöste Aspekte benannt werden, deren Ergründung in Zukunft motiviert ist.

Eine Vielzahl an Publikationen befasst sich mit der aktiven Reduktion der Schallab- bzw. -einstrahlung an einzelnen, isolierten Platten und Schalen. An dieser Stelle seien beispielhaft [EJ93, GCCV00] genannt. Darüber hinaus werden im Fall der Fernfeldabstrahlung, z.B. von SCHILLER [Sch07], dezentralisierte Regelungseinheiten an periodisch versteiften Platten betrachtet. Aus Sicht der Implementierbarkeit versprechen diese dezentralisierten Regelungseinheiten einen geringeren Aufwand für die Signalverarbeitung. Dieser Vorteil wird durch die Missachtung des Übersprechverhaltens zwischen den Einheiten erkauft. Eine Untersuchung der Schalleinstrahlungscharakteristik einzelner, gekrümmter Schalen in eine zylindrische Kavität wird von HENRY ET AL. [HC01] durchgeführt. Dabei zeigt sich, dass insbesondere Strukturmoden mit axialen modalen Indizes geringer Ordnung effizient an die Kavität gekoppelt sind. Eine Auslegung von dezentralisierten Regelungseinheiten für derartige Schalen und eine Untersuchung des Einflusses der Vernachlässigung des Übersprechverhaltens könnte einen wesentlichen Beitrag zur Implementierbarkeit von aktiven Verfahren an versteiften Strukturen leisten, wie sie am Beispiel von Flugzeugrümpfen vorliegen. Dabei ist insbesondere ein Fokus auf die Platzierung von Sensoren und Aktuatoren sinnvoll.

Die Signifikanz der Aktuator- und Sensorpositionen im Auslegungsprozess aktiver Strukturen hat die wissenschaftliche Gemeinschaft bereits erkannt. Für die Schallabstrahlung in das Fernfeld wird diese beispielsweise von BEVAN [Bev01] untersucht. Methoden zur Optimierung der Aktuatorpositionen, mit denen die Reduktion der Schalleinstrahlung in Kavitäten unter diversen Primäranre-

gungen (Diffusfeld, multitonale Monopolerregung) bezweckt wird, sind in [HRMS15a, HRMS15b] beschrieben. In zukünftigen Arbeiten ist ein ganzheitlicher Auslegungsprozess von aktiven Strukturen anzustreben, welcher die Positionierung von Aktuatoren und Sensoren, deren Einfluss auf die Strukturodynamik sowie das verwendete Reglergesetz umfasst. Bezüglich des Reglergesetzes hat sich in den experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit gezeigt, dass die aktiven Elemente auf der Strukturoberfläche einen geringen Einfluss auf die Schalleinstrahlungsmoden ausüben, da diese im Wesentlichen durch die entkoppelten akustischen Eigenformen bestimmt werden. Abgesehen von der Abwandlung der Strukturodynamik zeigte sich dennoch eine valide Vorhersage der APE. Diese Tatsache ändert sich möglicherweise bei einer akustischen Interaktion mit porösen, schallabsorbierenden Medien [Dav04]. Auch eine gleichzeitige Berücksichtigung der Schallein- sowie -abstrahlung lässt sich gemäß MARBURG [Mar05, MDHS06, Mar06] in Form von frequenzunabhängigen, wenn auch komplexwertigen Schallstrahlungsmoden berücksichtigen und ließe sich in einen ganzheitlichen Auslegungsprozess aktiver Strukturen integrieren.

Über diese wissenschaftlichen Forschungsschwerpunkte hinaus sind einige praktische Aspekte der Implementierung aktiver Schallreduktionssysteme für zukünftige Arbeiten sinnvoll. Hierzu zählt der Umgang mit zeitlich variablen Streckenmodellen. Dünnwandige Flächenstrukturen sind im Betrieb häufig hohen Druck- sowie Temperaturschwankungen ausgesetzt. Diese Änderungen der Betriebszustände gehen mit einer Änderung der Strukturodynamik einher. Auch die Anwesenheit von Personen in den Kavitäten kann zu einer abweichenden Frequenzcharakteristik des Fluids beitragen. Zur Anpassung an variable Zustände sind adaptive Filter geeignet. Diese lassen eine Berücksichtigung von erweiterten Streckenmodellen nicht zu, da diese die Forderung einer Identität der Performance- und Sensor-Ausgänge stellen [Ell01].

Eine Implementierung von Schallstrahlungsfiltren ohne erweitertes Streckenmodell, basierend direkt auf den Beschleunigungssensorausgängen, wie sie BÜHMANN [BH15] für die Fernfeldabstrahlung vorschlägt, wurde am Versuchsträger der vorliegenden Arbeit getestet. Dabei sorgte die geringe räumliche Auflösung bei der Vorhersage der APE zu einer fehlerbehafteten Frequenzcharakteristik, welche die Resonanzen unterhalb 50 Hz stark überschätzte. Ein auf dieser Grundlage ausgelegter \mathcal{H}_∞ -Regler konzentriert sich dabei stark auf die überschätzten Resonanzen und gewährleistet somit keine breitbandige Reduktion der Schalleinstrahlung. Adaptive Steuerungsansätze sind unter Einhaltung von Kausalitäts- sowie Kohärenzbeschränkungen möglicherweise geeigneter für derartig simplifizierte Schallstrahlungsfiltren ohne erweitertes Streckenmodell.

A. Anhang

A.1. Herleitung der Green'schen Funktion

In diesem Abschnitt wird die GREEN'sche Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ basierend auf den Kavitätsmoden mit schallharten Randbedingungen hergeleitet. Grundlage der Herleitung sind die homogene HELMHOLTZ-Gleichung aus Gleichung (4.3) und die akustischen Eigenformen $\Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F)$ entsprechend Gleichung (4.10). Die Lösung der homogenen HELMHOLTZ-Gleichung kann in Form einer Überlagerung der akustischen Eigenformen zu

$$\nabla^2 \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) + \kappa_j^2 \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) = 0 \quad (\text{A.1})$$

geschrieben werden. Die akustischen Eigenformen genügen den NEUMANN-Randbedingungen gemäß Gleichung (4.7) mit $v_N(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = 0$. Damit kann auch die GREEN'sche Funktion $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ in Abhängigkeit der Eigenformen zu

$$\mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \quad (\text{A.2})$$

sowie aufgrund der Unabhängigkeit von $g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega)$ gegenüber dem Koordinatenvektor $\bar{\mathbf{r}}_F$ im Fluid durch

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \nabla^2 \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \quad (\text{A.3})$$

ausgedrückt werden. Gleichung (A.1) eingesetzt in Gleichung (A.3) ergibt

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\bar{\mathbf{r}}_F|\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) = - \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j^2 g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F). \quad (\text{A.4})$$

Die inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung aus Gleichung (4.6) lässt sich mit Gleichung (A.4) nun schreiben als

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j^2 g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) + \kappa^2 \sum_{j=0}^{\infty} g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) = -\delta(\bar{\mathbf{r}}_F - \bar{\mathbf{r}}_S). \quad (\text{A.5})$$

Durch Multiplikation mit den akustischen Eigenformen $\Phi_k(\bar{\mathbf{r}}_F)$ sowie Integration über das Volumen V_F für jede Kombination der Indizes j und k , unter Berücksichtigung der gegenseitigen Orthogonalität der akustischen Eigenformen (Gleichung (4.12)), ergibt sich

$$g_j(\bar{\mathbf{r}}_S, \omega) \Gamma_j(\kappa_j^2 - \kappa^2) = \int_{V_F} \Phi_j(\bar{\mathbf{r}}_F) \delta(\bar{\mathbf{r}}_F - \bar{\mathbf{r}}_S) dV. \quad (\text{A.6})$$

Aufgrund der sogenannten Ausblendeigenschaft der DIRAC'schen Delta-Funktion [NE92, S. 277] entspricht die rechte Seite dieses Ausdrucks

$$\int_{V_F} \Phi_j(\mathbf{r}_F) \delta(\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_S) dV = \Phi_j(\mathbf{r}_S) \quad (\text{A.7})$$

Damit gilt

$$g_j(\mathbf{r}_S, \omega) = \frac{\Phi_j(\mathbf{r}_S)}{\Gamma_j(\kappa_j^2 - \kappa^2)} \quad (\text{A.8})$$

sowie für die GREEN'sche Funktion gemäß Gleichung (A.2)

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_F | \mathbf{r}_S, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Phi_j(\mathbf{r}_S) \Phi_j(\mathbf{r}_F)}{\Gamma_j(\kappa_j^2 - \kappa^2)}. \quad (\text{A.9})$$

A.2. Validierung der Randintegralgleichung

In diesem Abschnitt wird eine Validierung der Randintegralgleichung gemäß Gleichung (4.9) bei der Berechnung auf Grundlage einer GREEN'schen Funktion vorgestellt. Zu diesem Zweck wird die eindimensionale homogene HELMHOLTZ-Gleichung gemäß Gleichung (4.3) zu

$$\frac{\partial^2 p(\bar{z}, \omega)}{\partial \bar{z}^2} + \kappa^2 p(\bar{z}, \omega) = 0 \quad (\text{A.10})$$

betrachtet. Dabei sollen an den Rändern die Bedingungen

$$\frac{\partial p(\bar{z} = 0, \omega)}{\partial \bar{z}} = -j\omega\rho_F v_0(\omega) \quad (\text{A.11})$$

sowie

$$\frac{\partial v(\bar{z} = L_Z, \omega)}{\partial \bar{z}} = -j\omega\rho_F v_L(\omega) \quad (\text{A.12})$$

in Form von NEUMANN-Randbedingungen eingehalten werden. Durch $v_0(\omega)$ bzw. $v_L(\omega)$ wird dabei eine normale Schnelle am Rand vorgegeben. Eine exakte Lösung des Randwertproblems kann für den Schalldruckverlauf $p_E(\bar{z}, \omega)$ zu

$$p_E(\bar{z}, \omega) = \frac{j\omega\rho_F}{\kappa \sin(\kappa L_Z)} (v_L - v_0 \cos(\kappa L_Z)) \cos(\kappa \bar{z}) - j\mathcal{C}_F \rho_F v_0 \sin(\kappa \bar{z}) \quad (\text{A.13})$$

bestimmt werden.

Eine alternative Lösung soll auf Basis einer GREEN'schen Funktion gefunden werden, welche die folgende inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung erfüllt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + \kappa^2 \right) \mathcal{G}(\bar{z} | \gamma, \omega) = -\delta(\bar{z} - \gamma), \quad (\text{A.14})$$

worin die Randvariable $\gamma = [0, L_Z]$ entspricht. Die modale Entwicklung der GREEN'schen Funktion mit n_F schallhart berandeten Eigenformen $\Phi_j = \cos(\kappa_j \bar{z})$ liefert

$$\mathcal{G}(\bar{z} | \gamma, \omega) = \sum_{j=0}^{n_F} g_j(\omega) \cos(\kappa_j \gamma). \quad (\text{A.15})$$

Die modal entwickelte Schalldrucklösung $p_G(\bar{z}, \omega)$ ergibt sich damit zu

$$p_G(\bar{z}, \omega) = j\omega\rho_F \sum_{j=0}^{n_F} \frac{(v_0 - v_L(-1)^j)}{\Gamma_j(\kappa_j^2 - \kappa^2)} \cos(\kappa_j\bar{z}). \quad (\text{A.16})$$

Die Längennormalisierungsfaktoren Γ_j entsprechen

$$\Gamma_j = \frac{L_Z}{2} \epsilon_j \quad (\text{A.17})$$

mit

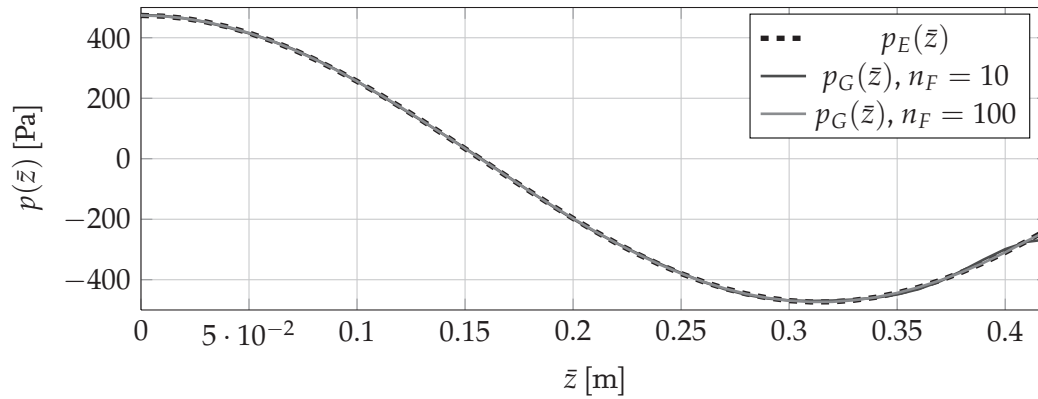
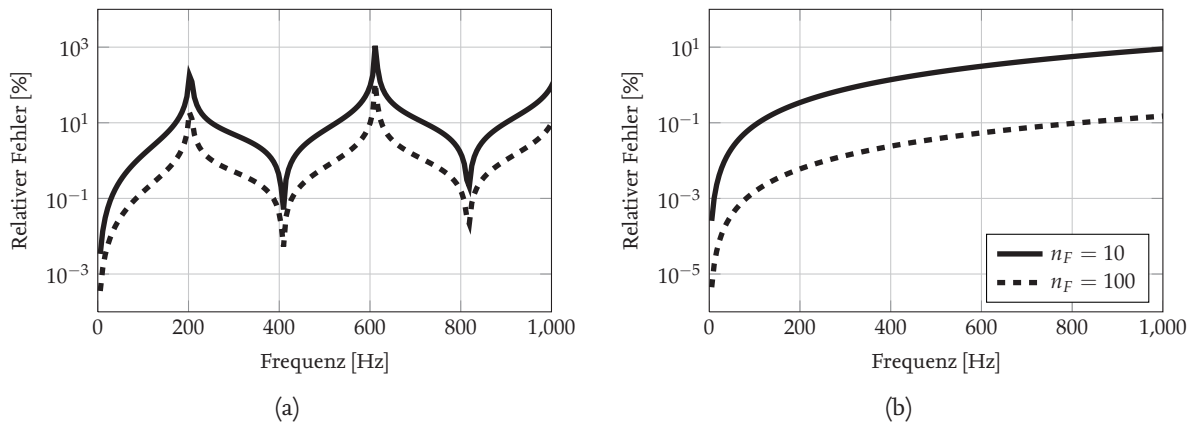
$$\epsilon_j = \begin{cases} 2 & , j = 0 \\ 1 & , j \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Die für das Minimalbeispiel verwendeten Fluideigenschaften und Randbedingungen sind in Tabelle A.1 aufgelistet. Den resultierenden relativen Fehler bei einem Vergleich von modal entwickelter mit der exakten Lösung stellt Abbildung A.2 über der Frequenz dar. Dabei wird die Schnellerandbedingung über der Frequenz konstant gehalten. An der Stelle $\bar{z} = L_Z$, an welcher eine von Null verschiedene Schnelle vorgegeben wird, resultiert dabei ein hoher Fehler. Diese Tatsache ist bereits von JAYACHANDRAN ET AL. [JHS98] für einen diskreten Frequenzschritt bekannt. Über der Frequenz betrachtet fällt auf, dass der Fehler insbesondere in den Antiresonanzen maximal wird. In den akustischen Resonanzen entstehen dagegen Einbrüche im Fehler. Um ein globales Fehlermaß zu erhalten, werden $p_E(\bar{z}, \omega)$ und $p_G(\bar{z}, \omega)$ mit einer Auflösung von 0,001 m berechnet und über der Länge \bar{z} integriert (mittels Trapezformel [BSMM05, S. 926f.]). Daraus resultiert nach Abbildung A.2b ein geringer Fehler im gesamten Frequenzbereich, sodass die räumliche Verteilung des Schalldrucks mit wenigen akustischen Eigenformen hinreichend genau abgebildet wird.

Tabelle A.1.: Fluideigenschaften

Fluid	
Dichte ρ_F :	1,204 kg/m ³
Schallgeschwindigkeit c_F :	343 m/s
Tiefe L_Z :	0,42 m
Schnelle v_0	0 m/s
Schnelle v_L	1j m/s
Wellenzahlaufösung $\Delta\kappa$	0,1 m ⁻¹

Nachfolgend wird der Einfluss der Anzahl der akustischen Eigenformen n_F auf die Güte der modal entwickelten Lösung untersucht. Zu diesem Zweck zeigt Abbildung A.3 die Konvergenz des relativen Fehlers. JAYACHANDRAN ET AL. [JHS98] stellt diese Konvergenz bis zu einer Modenanzahl von $n_F = 10$ dar. Daraus wird abgeleitet, dass der Fehler gegen eine endliche Zahl konvergiert. Dieses Verhalten wird auf das GIBBS'sche Phänomen diskontinuierlicher Funktionen [Smi97, S. 218] zurückgeführt. Sowohl an der Stelle $\bar{z} = L_Z$ als auch über die Länge \bar{z} integriert wird in Abbildung A.3 deutlich, dass der Fehler nicht endgültig gegen Null konvergiert. Wie von GIBBS gezeigt, konvergiert die modal entwickelte Lösung jedoch dergestalt, dass die Fehlerenergie Null entspricht.

Abbildung A.1.: Räumlicher Verlauf der Schalldrücke bei $k = 10 \text{ m}^{-1}$ Abbildung A.2.: Relativer Fehler der modal entwickelten Lösung an der Stelle $\bar{z} = L_Z$ (links) sowie über \bar{z} integriert (rechts)

Da sich die vorliegende Arbeit nicht auf die alleinige Lösung an der Stelle der Diskontinuität konzentriert, sondern eine globale Lösung gemäß Abbildung A.3b, lässt sich die Qualität der Lösung als hinreichend bewerten.

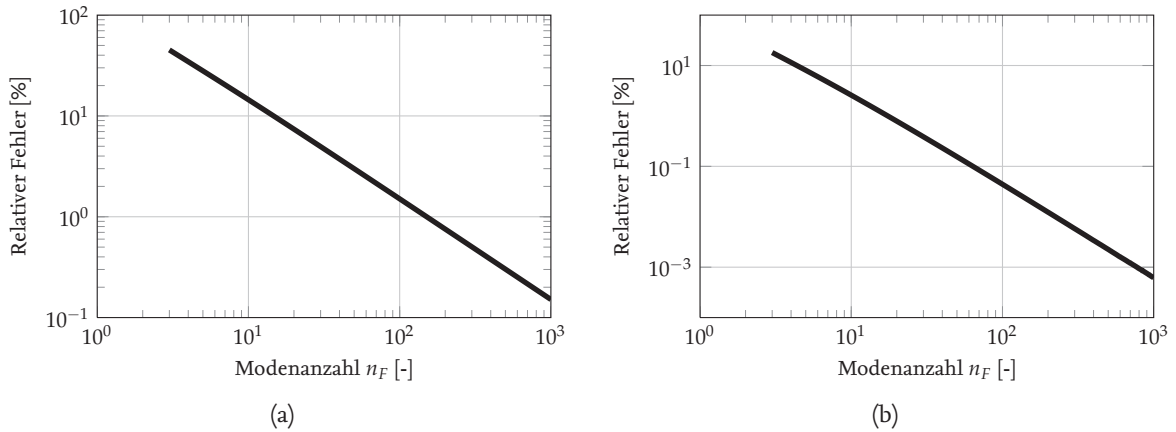


Abbildung A.3.: Konvergenz des relativen Fehlers mit der Modenzahl n_F an der Stelle $\bar{z} = L_Z$ (links) sowie über \bar{z} integriert (rechts) bei $f = 546$ Hz

A.3. Zusammenhang zwischen Schalleinstrahlungsmoden und akustischen Eigenformen

Dieser Abschnitt gibt einen anschaulichen Überblick über den Zusammenhang der in Kapitel 4.3 berechneten Schalleinstrahlungsmoden sowie den entkoppelten akustischen Eigenformen. Letztere resultieren aus der analytischen Betrachtung in Kapitel 4.

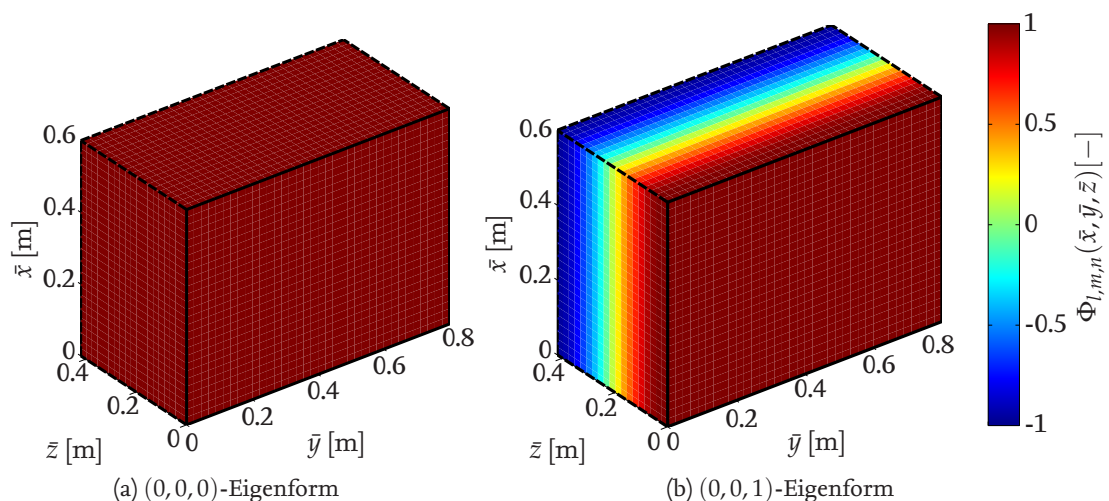


Abbildung A.4.: Akustisches Eigenvektorpaar der Rechteckkavität, parallel an der Strukturoberfläche ($\bar{z} = 0$)

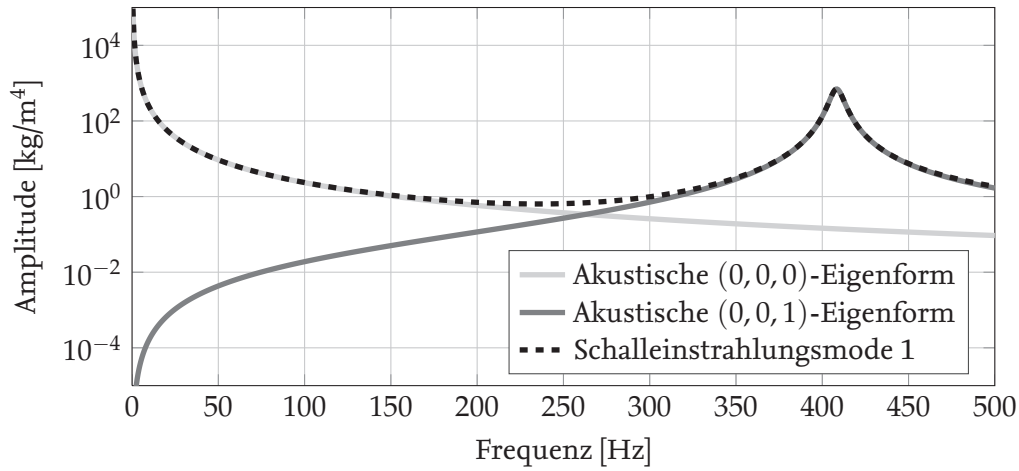


Abbildung A.5.: Vergleich der Schalleinstrahlungseffizienzen der akustischen (0,0,0)- und (0,0,1)-Eigenformen sowie der Schalleinstrahlungsmode 1 im Fall einer quaderförmigen Kavität

Für die Schalleinstrahlung im QUADERMODELL, sind die akustischen Eigenformen mit Indizes $(l, m, n) = (0, 0, 0)$ sowie $(0, 0, 1)$ in Abbildung A.4 dargestellt. Diese besitzen entsprechend Gleichung (4.24) parallele Eigenvektoren entlang der Interaktionsfläche in der Ebene mit $\bar{z} = 0$. Die Eigenfrequenzen können Tabelle 4.1 entnommen werden und sind zu 0 Hz sowie 408,33 Hz gegeben. Die entsprechenden Schalleinstrahlungseffizienzen zeigt Abbildung A.5. Die Summe der einzelnen Schalleinstrahlungseffizienzen der akustischen Moden ergibt jene der Schalleinstrahlungsmode.

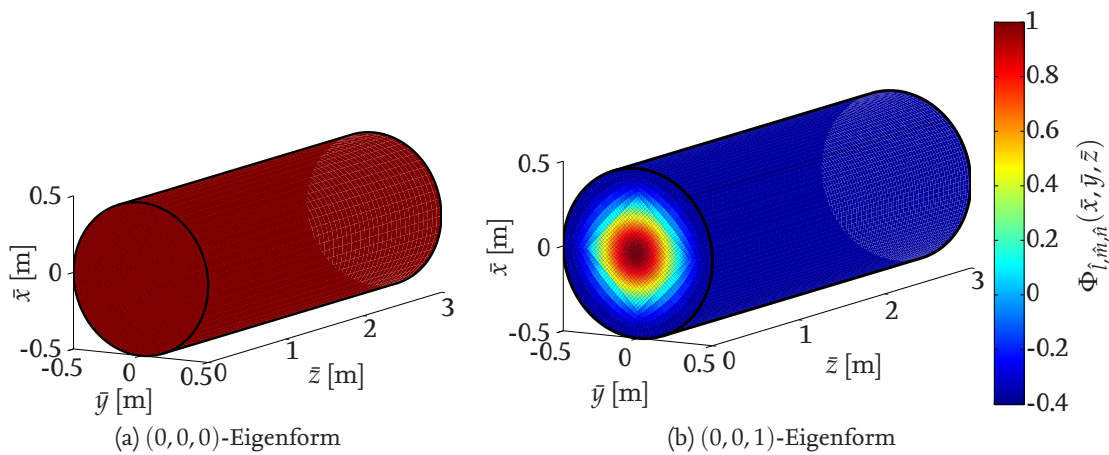


Abbildung A.6.: Akustisches Eigenvektorpaar der Zylinderkavität, parallel an der Strukturoberfläche ($\bar{r} = 0,5\text{ m}$)

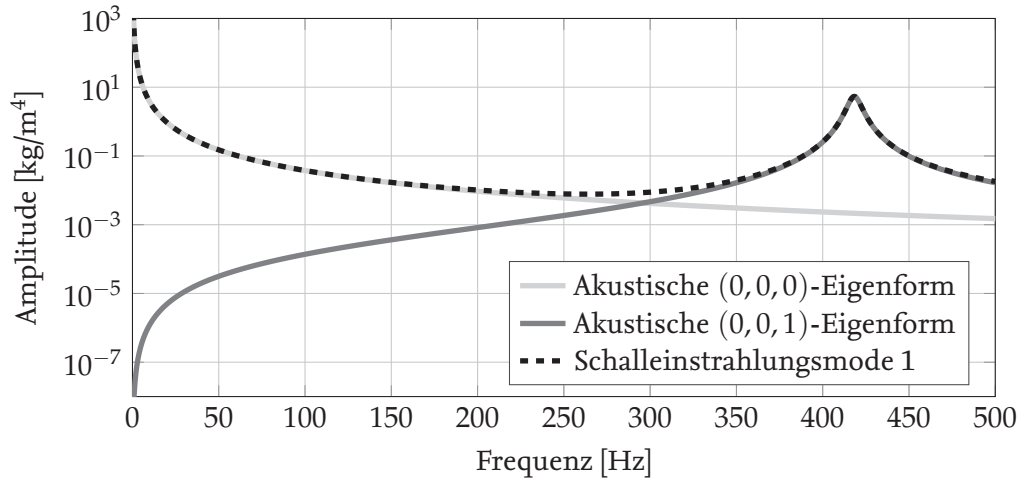


Abbildung A.7.: Vergleich der Schalleinstrahlungseffizienzen der akustischen (0,0,0)- und (0,0,1)-Eigenformen sowie der Schalleinstrahlungsmode 1 im Fall einer zylindrischen Kavität

Analog dazu sind in Abbildung A.6 akustische Eigenformen mit den Indizes $(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}) = (0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$ für das ZYLINDERMODELL dargestellt. Die entkoppelten akustischen Eigenformen an der Strukturoberfläche ($\bar{r} = R$) sind nach Gleichung (4.34) ebenfalls parallel, die Amplitude ist jedoch nicht identisch. Das Vielfache der Eigenformen an der Strukturoberfläche ergibt sich nach Gleichung (4.37) zu

$$\alpha_{0,1} = \frac{J_0(\gamma_{0,1})}{J_0(\gamma_{0,0})} \approx -0.4027. \tag{A.19}$$

Die Eigenfrequenzen der zwei Eigenformen liegen gemäß Tabelle 4.2 bei 0 Hz sowie 418,32 Hz. Die Schalleinstrahlungseffizienzen setzen sich auch beim ZYLINDERMODELL aus der Summe der Effizienzen der akustischen Eigenformen zusammen, was durch Abbildung A.7 anschaulich wird.

A.4. Modellreduktion des gekoppelten Gleichungssystems durch Eigenwertzerlegung des gekoppelten Systems

Alternativ zu den entkoppelten Eigenvektoren nach Kapitel 6.2 kann ein Satz orthogonaler Eigenvektoren aus dem gekoppelten Differentialgleichungssystem generiert werden. Diese Methode bietet den Vorteil, dass die Kontinuität der Fluid- und Strukturschnelle entlang der Interaktionsfläche nicht verletzt wird. Es werden demnach weniger gekoppelte Eigenvektoren benötigt, um das vollständig harmonisch gekoppelte Differentialgleichungssystem abzubilden. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem mit Fluid-Struktur-Interaktion aus Gleichung (5.3) ergibt sich unter Vernachlässigung von Dämpfung und rechter Seite zu

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{FS} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{FS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{A.20}$$

Aufgrund der unsymmetrischen Systemmatrizen ergeben sich individuelle Links- und Rechtseigenvektoren [Pur08]. Das Rechtseigenwertproblem des gekoppelten Systems lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{FS} \\ \mathbf{0} & \rho_F^{-1} \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{C,l} = \omega_{C,l}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{FS}^T & \rho_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{C,l}. \quad (\text{A.21})$$

Darin beschreibt $\boldsymbol{\psi}_{C,l}$ den l -ten Rechtseigenvektor des gekoppelten Systems und $\omega_{C,l}$ die entsprechende gekoppelte Eigenkreisfrequenz. Um eine Transformation des gekoppelten Gleichungssystems in den modalen Raum durchzuführen, müssen zusätzlich die Linkseigenvektoren berechnet werden. Das Linkseigenwertproblem ergibt sich zu

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{C,l}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{FS} \\ \mathbf{0} & \rho_F^{-1} \mathbf{K}_F \end{bmatrix} = \omega_{C,l}^2 \hat{\boldsymbol{\psi}}_{C,l}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{FS}^T & \rho_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

mit dem l -ten Linkseigenvektor $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{C,l}$. Die knotenweisen Freiheitsgrade können zu

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_C} q_{C,i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{CS} \\ \boldsymbol{\Psi}_{CF} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}_C \mathbf{q}_C \quad (\text{A.23})$$

formuliert werden. Dabei ist n_C die Anzahl der gekoppelten Moden und \mathbf{q}_C der Vektor der modalen Amplituden. Die Eigenvektormatrix $\boldsymbol{\Psi}_C$ setzt sich dementsprechend aus dem strukturellen Anteil $\boldsymbol{\Psi}_{CS}$ und dem akustischen Anteil $\boldsymbol{\Psi}_{CF}$ zusammen. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem aus Gleichung (5.3) kann mit Gleichung (A.23) geschrieben werden zu

$$\left(-\omega^2 \hat{\mathbf{M}} + j\omega \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_C(\omega) = \mathbf{f}(\omega), \quad (\text{A.24})$$

mit dem Vektoren der modalen Amplituden \mathbf{q}_C sowie den modalen Anregungen

$$\mathbf{f}(\omega) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_C \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_S(\omega) \\ \rho_F^{-1} \mathbf{f}_F(\omega) \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Die Systemmatrizen des reduzierten Differentialgleichungssystems in Gleichung (A.24) sind zu

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_C^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{FS}^T & \rho_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_C, \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_C^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho_F^{-1} \mathbf{C}_F \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_C \quad (\text{A.27})$$

sowie

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_C^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{FS} \\ \mathbf{0} & \rho_F^{-1} \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_C \quad (\text{A.28})$$

substituiert. Die Orthogonalität der Links- und Rechtseigenvektoren in Bezug auf die gekoppelte Massematrix bedeutet, dass die resultierenden modalen Matrizen $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$ diagonal werden. Aus diesem Grund wird diese Methode häufig als die *Diagonalisierungsmethode* bezeichnet [Pur08]. Des Weiteren vereinfacht sich bei einer Normalisierung der Eigenvektoren zur Massematrix die modale Massematrix $\hat{\mathbf{M}}$ zur Einheitsmatrix. Demnach folgt aus Gleichung (A.21) für die modale

Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ eine Diagonalmatrix, auf deren Hauptdiagonale die quadrierten Eigenkreisfrequenzen $\omega_{\hat{c},l}^2$ stehen. Auch die Eigenwertzerlegung von ungedämpften Systemen mit unsymmetrischen Systemmatrizen kann in ANSYS® unter Verwendung eines BLOCK LANCZOS-Verfahrens [GLS94] durchgeführt werden.

Die Notwendigkeit der Berechnung von Linkseigenvektoren lässt sich beispielsweise durch die Darstellung des akustischen Systems anhand des Geschwindigkeitspotentials und einer damit verbundenen Symmetrisierung des Gleichungssystems umgehen [Lef07]. Der nachfolgende Abschnitt stellt numerische Ergebnisse der ge- und entkoppelten Modalanalyse der analytischen Vorhersage gegenüber.

A.5. Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse für die strukturellen und akustischen Modelle durch den Vergleich mit analytisch berechneten Eigenfrequenzen validiert. Weiterhin werden die Eigenfrequenzen sowie Moden der validierten entkoppelten numerischen Modelle mit denen der gekoppelten Systeme verglichen. Letzteres dient der Plausibilisierung der Annahme der modalen Interaktionstheorie, nach welcher sich die akustischen Eigenformen im gekoppelten Modell nicht signifikant ändern.

Quadermodell

Einen Vergleich der analytisch und numerisch berechneten Eigenfrequenzen für die abgeschlossene quaderförmige Kavität zeigt Abbildung A.2. Die analytischen Eigenfrequenzen werden nach Gleichung (4.20) berechnet. Die numerischen Modelle \mathbb{P}_2 und \mathbb{P}_3 beschreiben die Fluidomäne gemäß der in Kapitel 5.4 vorgestellten Diskretisierung. Das Modell \mathbb{P}_3 zeigt dabei aufgrund der Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen eine bessere Übereinstimmung mit den analytischen Eigenfrequenzen. Im Modell \mathbb{P}_2 müsste die räumliche Auflösung erhöht werden um eine bessere Übereinstimmung zu erzielen.

Tabelle A.2.: Vergleich der analytischen und numerischen Eigenfrequenzen der entkoppelten, quaderförmigen Kavität

(l, m, n)	Analytisch	Modell \mathbb{P}_2	Modell \mathbb{P}_3
(0, 0, 0)	0 Hz	0 Hz	0,26e-04 Hz
(0, 1, 0)	214,38 Hz	214,49 Hz	214,38 Hz
(1, 0, 0)	285,83 Hz	286,10 Hz	285,83 Hz
(1, 1, 0)	357,29 Hz	357,57 Hz	357,29 Hz
(0, 0, 1)	408,33 Hz	409,08 Hz	408,33 Hz
(0, 2, 0)	428,33 Hz	429,65 Hz	428,75 Hz
(0, 1, 1)	461,19 Hz	461,90 Hz	461,19 Hz
(1, 0, 1)	498,43 Hz	499,20 Hz	498,43 Hz

Tabelle A.3.: Vergleich der analytischen und numerischen Eigenfrequenzen der rechteckigen ebenen Platte

(u, v)	Analytisch	Modell \mathbb{P}_2	Modell \mathbb{P}_3
(1, 1)	21,60 Hz	21,64 Hz	21,58 Hz
(1, 2)	44,93 Hz	45,11 Hz	44,88 Hz
(2, 1)	63,08 Hz	63,66 Hz	63,04 Hz
(1, 3)	83,82 Hz	84,74 Hz	83,75 Hz
(2, 2)	86,41 Hz	87,02 Hz	86,30 Hz
(2, 3)	125,29 Hz	126,46 Hz	125,11 Hz
(3, 1)	132,20 Hz	135,28 Hz	132,15 Hz
(1, 4)	138,25 Hz	141,26 Hz	138,17 Hz
(3, 2)	155,53 Hz	158,46 Hz	155,38 Hz
(2, 4)	179,73 Hz	182,73 Hz	179,50 Hz
(3, 3)	194,42 Hz	197,58 Hz	194,15 Hz
(1, 5)	208,24 Hz	215,80 Hz	208,16 Hz
(4, 1)	228,98 Hz	238,97 Hz	228,94 Hz
(3, 4)	248,85 Hz	253,40 Hz	248,48 Hz
(2, 5)	249,77 Hz	256,92 Hz	249,47 Hz
(4, 2)	252,31 Hz	261,89 Hz	252,16 Hz
(4, 3)	291,19 Hz	300,56 Hz	290,89 Hz
(1, 6)	293,78 Hz	309,84 Hz	293,75 Hz
(3, 5)	318,84 Hz	327,01 Hz	318,41 Hz
(2, 6)	335,26 Hz	350,53 Hz	335,03 Hz
(4, 4)	345,63 Hz	355,74 Hz	345,19 Hz
(5, 1)	353,41 Hz	378,47 Hz	353,48 Hz
(5, 2)	376,74 Hz	401,03 Hz	376,68 Hz
(1, 7)	394,88 Hz	425,31 Hz	394,97 Hz
(3, 6)	404,39 Hz	419,89 Hz	403,96 Hz
(4, 5)	415,62 Hz	428,51 Hz	415,10 Hz
(5, 3)	415,62 Hz	439,10 Hz	415,40 Hz
(2, 7)	436,36 Hz	465,47 Hz	436,25 Hz
(5, 4)	470,06 Hz	493,43 Hz	469,70 Hz

Einen Vergleich der analytischen und numerischen Eigenfrequenzen der entkoppelten, ebenen Platte gibt Tabelle A.3. Auch hier zeigt sich eine höhere Übereinstimmung in der Verwendung von quadratischen Ansatzfunktionen im Modell \mathbb{P}_3 . Insbesondere bei den hohen modalen Indizes u bzw. v in der jeweiligen Raumrichtung wird dabei eine genauere Approximation deutlich.

Tabelle A.4.: Vergleich der entkoppelten sowie gekoppelten Eigenfrequenzen von Modell IP_2

(u, v)	(l, m, n)	Eigenfreq. Struktur	Eigenfreq. Fluid	Eigenfreq. gekoppelt
–	(0,0,0)	–	0 Hz	$0,14e - 04$ Hz
(1,1)	–	21,64 Hz	–	37,91 Hz
(1,2)	–	45,11 Hz	–	44,15 Hz
(2,1)	–	63,66 Hz	–	62,63 Hz
(1,3)	–	84,74 Hz	–	84,58 Hz
(2,2)	–	87,02 Hz	–	85,95 Hz
(2,3)	–	126,46 Hz	–	125,24 Hz
(3,1)	–	135,28 Hz	–	134,50 Hz
(1,4)	–	141,26 Hz	–	139,75 Hz
(3,2)	–	158,46 Hz	–	156,84 Hz
(2,4)	–	182,73 Hz	–	181,32 Hz
(3,3)	–	197,58 Hz	–	196,18 Hz
(1,5)	–	215,80 Hz	–	214,39 Hz
–	(0,1,0)	–	214,48 Hz	217,41 Hz
(4,1)	–	238,97 Hz	–	236,74 Hz
(3,4)	–	253,40 Hz	–	251,97 Hz
(2,5)	–	256,92 Hz	–	255,10 Hz
(4,2)	–	261,89 Hz	–	260,00 Hz
–	(1,0,0)	–	286,10 Hz	288,55 Hz
(4,3)	–	300,56 Hz	–	299,18 Hz
(1,6)	–	309,84 Hz	–	308,24 Hz
(3,5)	–	327,01 Hz	–	325,24 Hz
(2,6)	–	350,53 Hz	–	347,52 Hz
(4,4)	–	355,74 Hz	–	353,37 Hz
–	(1,1,0)	–	357,57 Hz	361,05 Hz
(5,1)	–	378,47 Hz	–	375,92 Hz
(5,2)	–	401,03 Hz	–	398,80 Hz
–	(0,0,1)	–	409,08 Hz	411,86 Hz
(3,6)	–	419,89 Hz	–	417,87 Hz
(4,5)	–	428,51 Hz	–	426,50 Hz
–	(0,2,0)	–	429,65	431,38 Hz
(1,7)	–	425,31 Hz	–	432,00 Hz
(5,3)	–	439,10 Hz	–	438,24 Hz
(2,7)	–	465,47 Hz	–	463,02 Hz
–	(0,1,1)	–	461,90 Hz	464,86 Hz
(5,4)	–	493,43 Hz	–	491,35 Hz
–	(1,0,1)	–	499,20 Hz	501,51 Hz

Die entkoppelten Eigenfrequenzen von Fluid und Struktur sind in Tabelle A.4 zusammen mit den gemäß Kapitel A.4 berechneten gekoppelten Eigenfrequenzen vergleichend aufgetragen. Dabei zeigt

sich insbesondere auf die strukturelle (1, 1)-Mode eine signifikante Skalierung im gekoppelten System. Die übrigen im betrachteten Frequenzbereich von $f = 0 \dots 500$ Hz liegenden Eigenfrequenzen werden maximal um ca. 2,5 Hz skaliert.

Um die Änderung der fluiddominierten Eigenformen im gekoppelten System zu untersuchen, wird das Korrelationskriterium $\zeta_{k,i}$ [All03] in folgender Form betrachtet

$$\zeta_{k,i} = \frac{\langle \phi_k, \psi_{CF,i} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\phi}_k, \phi_k \rangle} \sqrt{\langle \psi_{CF,i}, \psi_{CF,i} \rangle}}. \quad (\text{A.29})$$

Darin entspricht ϕ_k den entkoppelten akustischen Eigenvektoren und $\psi_{CF,i}$ dem akustischen Anteil der gekoppelten Rechtseigenvektoren nach Gleichung (A.23). Das Korrelationskriterium $\zeta_{k,i}$ ist in Abbildung A.8 für die ersten 8 Eigenformen unterhalb von 500 Hz aufgetragen. Mit einer Korrelation $> 0,99$ der jeweiligen Eigenvektoren kann dabei eine minimale Änderung der fluiddominierten Eigenform im Vergleich zur entkoppelten Eigenform bestätigt werden. Eine äquivalente Korrelation wurde mit den gekoppelten Linkseigenvektoren berechnet und lieferte ein identisches Ergebnis.

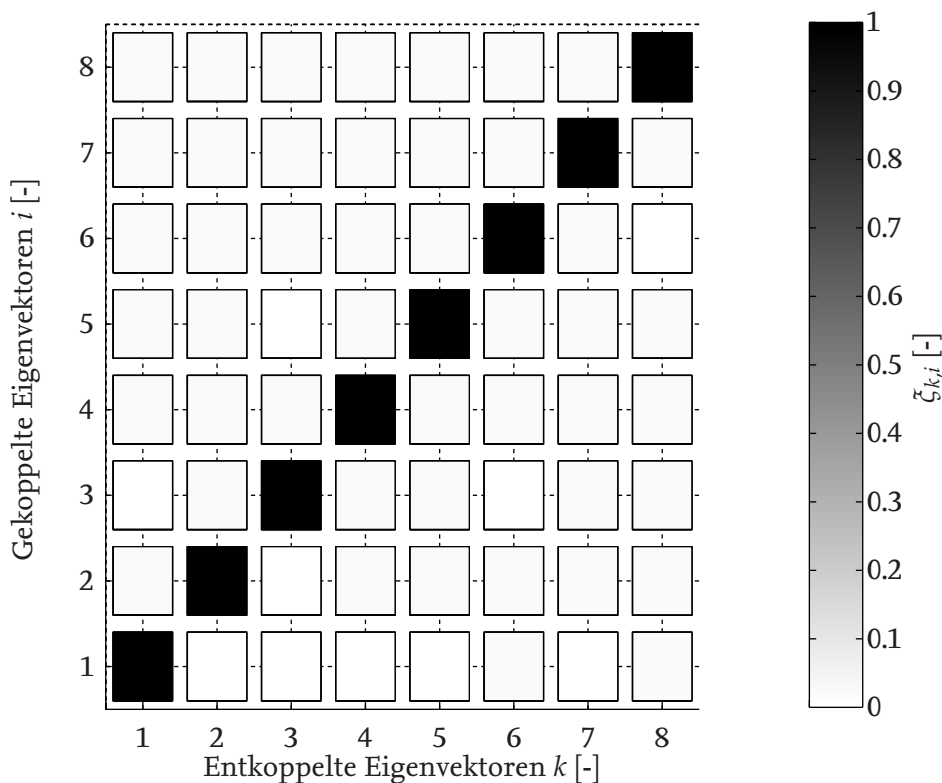


Abbildung A.8.: Korrelation der entkoppelten akustischen Eigenvektoren und dem akustischen Anteil der gekoppelten Rechtseigenvektoren am Beispiel des QUADERMODELLS \mathbb{P}_2

Zylindermodell

Für die entkoppelte zylindrische Kavität zeigt Tabelle A.5 einen Vergleich der ersten zehn analytisch berechneten Fluideigenfrequenzen nach Gleichung (4.29) mit den Fluideigenfrequenzen der numerischen Modelle. Dabei wird die Art der Mode durch die axialen, umlaufenden und radialen Indizes $(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n})$ charakterisiert. Zum einen werden im Modell $\mathbb{Z}_{R,1}$ die Elemente FLUID30 mit linearen Ansatzfunktionen verwendet. Modell \mathbb{Z}_R greift dagegen gemäß Tabelle 6.3 auf Elemente vom Typ FLUID220 mit quadratischen Ansatzfunktionen zur Modellierung des Fluids zurück. Auch bei diesem Modell offenbart sich eine bessere Abbildung der analytischen Eigenfrequenzen durch die Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung. Auf einen Vergleich der entkoppelten sowie gekoppelten Eigenfrequenzen wird für das zylindrische Modell aufgrund der hohen modalen Dichte verzichtet.

Tabelle A.5.: Vergleich der analytischen und numerischen Eigenfrequenzen der entkoppelten zylindrischen Kavität

$(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n})$	Analytisch	Modell $\mathbb{Z}_{R,1}$	Modell \mathbb{Z}_R
(0, 0, 0)	0 Hz	8,28e-06 Hz	7,74e-07 Hz
(1, 0, 0)	57,17 Hz	57,18 Hz	57,17 Hz
(2, 0, 0)	114,33 Hz	114,40 Hz	114,33 Hz
(3, 0, 0)	171,50 Hz	171,74 Hz	171,50 Hz
(0, 1, 0)	201,00 Hz	201,57 Hz	201,02 Hz
(1, 1, 0)	208,97 Hz	209,52 Hz	208,99 Hz
(4, 0, 0)	228,67 Hz	229,22 Hz	228,67 Hz
(2, 1, 0)	231,24 Hz	231,77 Hz	231,26 Hz
(3, 1, 0)	264,22 Hz	264,81 Hz	264,24 Hz
(5, 0, 0)	285,83 Hz	286,92 Hz	285,84 Hz

In Abbildung A.9 ist ein Vergleich zwischen den analytischen Eigenfrequenzen der strukturellen Moden nach Gleichung (6.17) und den numerischen Eigenfrequenzen des Modells \mathbb{Z}_R dargestellt. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass Gleichung (6.17) nach [Soe80] eine kontinuierliche Berechnung der analytischen Eigenfrequenzen erlaubt. Im numerischen Modell werden die Schalenelemente SHELL281 mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Es zeigt sich dabei eine annehmbare Übereinstimmung mit den analytisch berechneten Eigenfrequenzen. Die Genauigkeit steigt dabei mit Zunahme vom umlaufenden modalen Index \hat{v} .

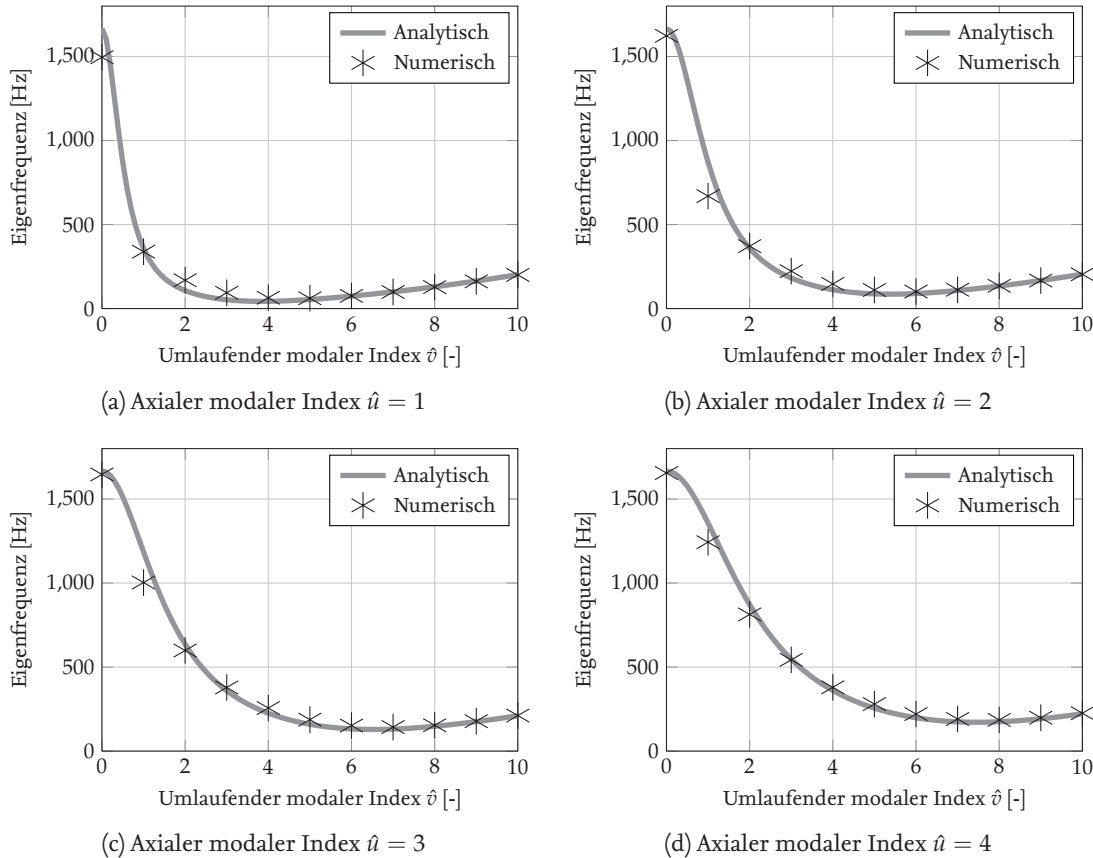


Abbildung A.9.: Vergleich der numerischen Eigenfrequenzen mit der analytischen Formulierung für die axialen modalen Indizes $\hat{u} = 1 \dots 4$

Abbildung A.10 stellt das Korrelationskriterium $\zeta_{\hat{k}, \hat{l}}$ für die entkoppelten, akustischen Eigenvektoren und den akustischen Anteil der gekoppelten Rechtseigenvektoren am Beispiel des ZYLINDERMODELLS \mathbb{Z}_R unterhalb von 300 Hz dar. Es zeigt sich dabei, dass die aus der Rotationssymmetrie resultierenden Modenpaare (bspw. 6 und 7) eine Korrelation ungleich Null abseits der Hauptdiagonalen besitzen. Diese Modenpaare sind in der Tatsache begründet, dass bei der Modalanalyse rotationssymmetrischer Zylinder jeweils zwei identische Eigenwerte resultieren können. Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten sind um 90° über dem Umfang zueinander verschoben. Es sind davon alle asymmetrischen Eigenformen betroffen, welche im Fall der Zylinderschale einem umlaufenden modalen Index von $\hat{v} > 0$ entsprechen. Das Skalarprodukt mit allen übrigen Eigenvektoren ergibt sich dagegen zu Null, sodass sich auch im Fall des ZYLINDERMODELLS eine geringe Änderung der Eigenvektoren des gekoppelten Modells im Vergleich zu den entkoppelten Eigenformen bestätigt.

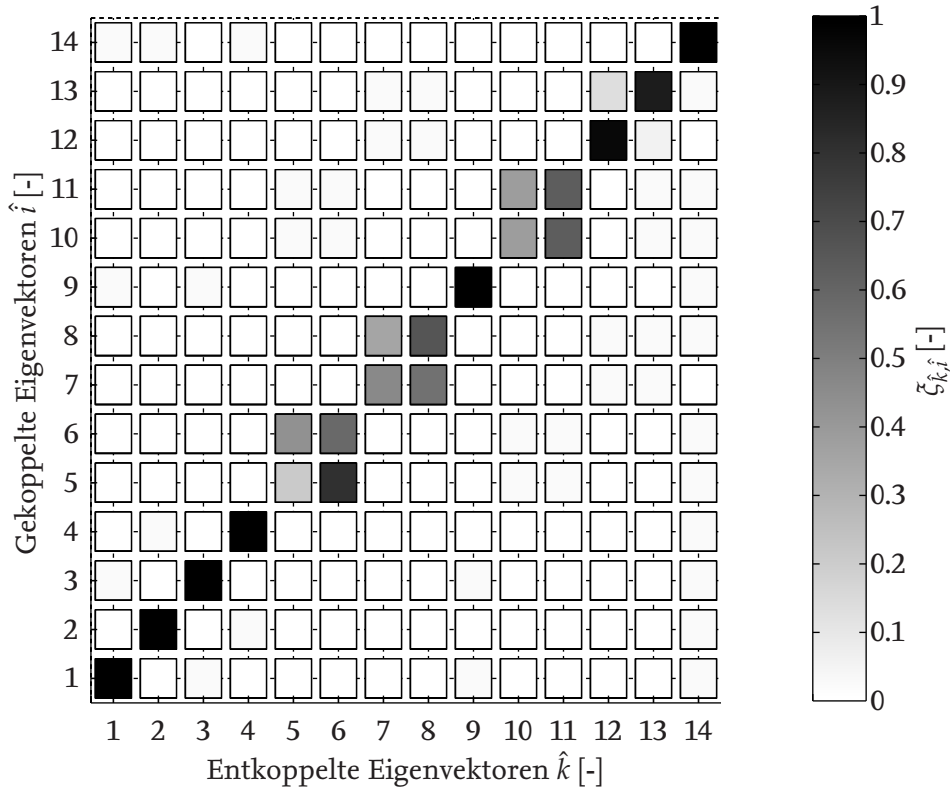


Abbildung A.10.: Korrelation der entkoppelten akustischen Eigenvektoren und dem akustischen Anteil der gekoppelten Rechtseigenvektoren am Beispiel des ZYLINDERMODELLS \mathbb{Z}_R

A.6. Akustische Eigenvektoren irregulärer Kavitäten

Analog zum Einfluss der Diskretisierungsfeinheit auf die akustischen Eigenvektoren des QUADERMODELLS in Kapitel 6.5, wird in diesem Abschnitt die Auswirkung der Netzfeinheit auf eine irreguläre Kavität untersucht. Mit einer irregulären Kavität wird damit ein Innenraum bezeichnet, deren Eigenformen sich nicht gemäß Kapitel 4.3 als separierbare Funktionen der jeweiligen Raumrichtung und damit analytisch beschreiben lassen. Dazu wird in der vorliegenden Studie das Modell einer einfach gekrümmten Schale verwendet, welche an eine einseitig gekrümmte Kavität gekoppelt ist. Die übrigen Kavitätswände sind eben. Ein diskretisiertes Modell $\mathbb{P}_{C,1}$ zeigt Abbildung A.11. Die Schale weist dabei einen Krümmungsradius von 1 m auf, die Materialparameter von Struktur und Fluid entsprechen jenen des ebenen QUADERMODELLS nach Tabelle 5.1.

Die in Kapitel 4 gezeigte Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden gilt unter der Voraussetzung, dass die akustischen Eigenformen an der Interaktionsfläche entweder orthogonal oder parallel sind. Mit zunehmend feiner Diskretisierung des Randes wird die Konvergenz der Eigenformen des gekrümmten QUADERMODELLS untersucht. Analog zum ebenen QUADERMODELL in Kapitel 6.5 soll die Konvergenz der numerisch berechneten Eigenvektoren am Interaktionsrand untersucht werden. Die Netzfeinheiten der verwendeten Modelle für diese Untersuchung der Konvergenz stellt Tabelle A.6 dar.

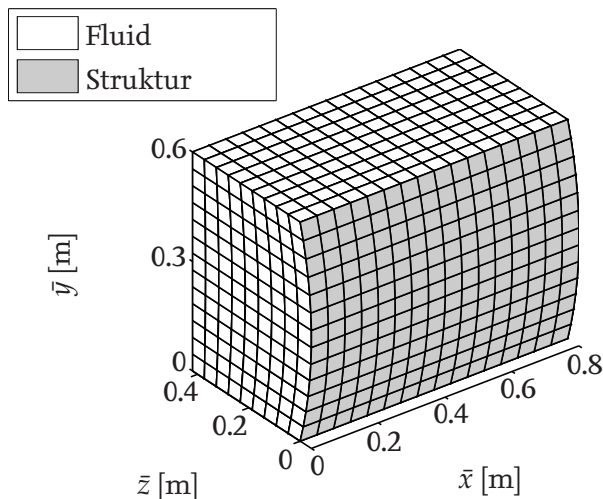
Abbildung A.11.: Finite Elemente Modell des gekoppelten, gekrümmten QUADERMODELLS (Modell $\mathbb{P}_{C,1}$)

Tabelle A.6.: Verwendete Finite Elemente Modelle für die Konvergenzstudie des gekrümmten QUADERMODELLS

Modell	Struktureller Elementtyp	Akustischer Elementtyp	Anzahl der Elemente
$\mathbb{P}_{C,1}$	Shell181	Fluid30	$13 \times 16 \times 9$
$\mathbb{P}_{C,2}$	Shell181	Fluid30	$28 \times 36 \times 19$
$\mathbb{P}_{C,3}$	Shell281	Fluid220	$28 \times 36 \times 19$
$\mathbb{P}_{C,4}$	Shell281	Fluid220	$40 \times 52 \times 28$

Die entkoppelten akustischen Eigenvektoren entlang der Interaktionsfläche werden durch Gleichung (6.35) sowie deren Skalarprodukte nach Gleichung (6.36) berechnet. Letztere sind in Abbildung A.12 für die vier Modelle abgebildet. Dabei zeigt sich keine eindeutige Konvergenz gegen Eins bzw. Null für alle akustischen Eigenvektoren. Die Frequenzunabhängigkeit der Schalleinstrahlungsmoden kann damit für die Schalleinstrahlung in irreguläre Kavitäten nicht schlüssig bewiesen werden. Möglicherweise lassen sich mithilfe räumlich feiner aufgelöster Modelle bzw. unter Verwendung nochmals erhöhter Ansatzfunktionen weitergehende Aussagen ableiten.

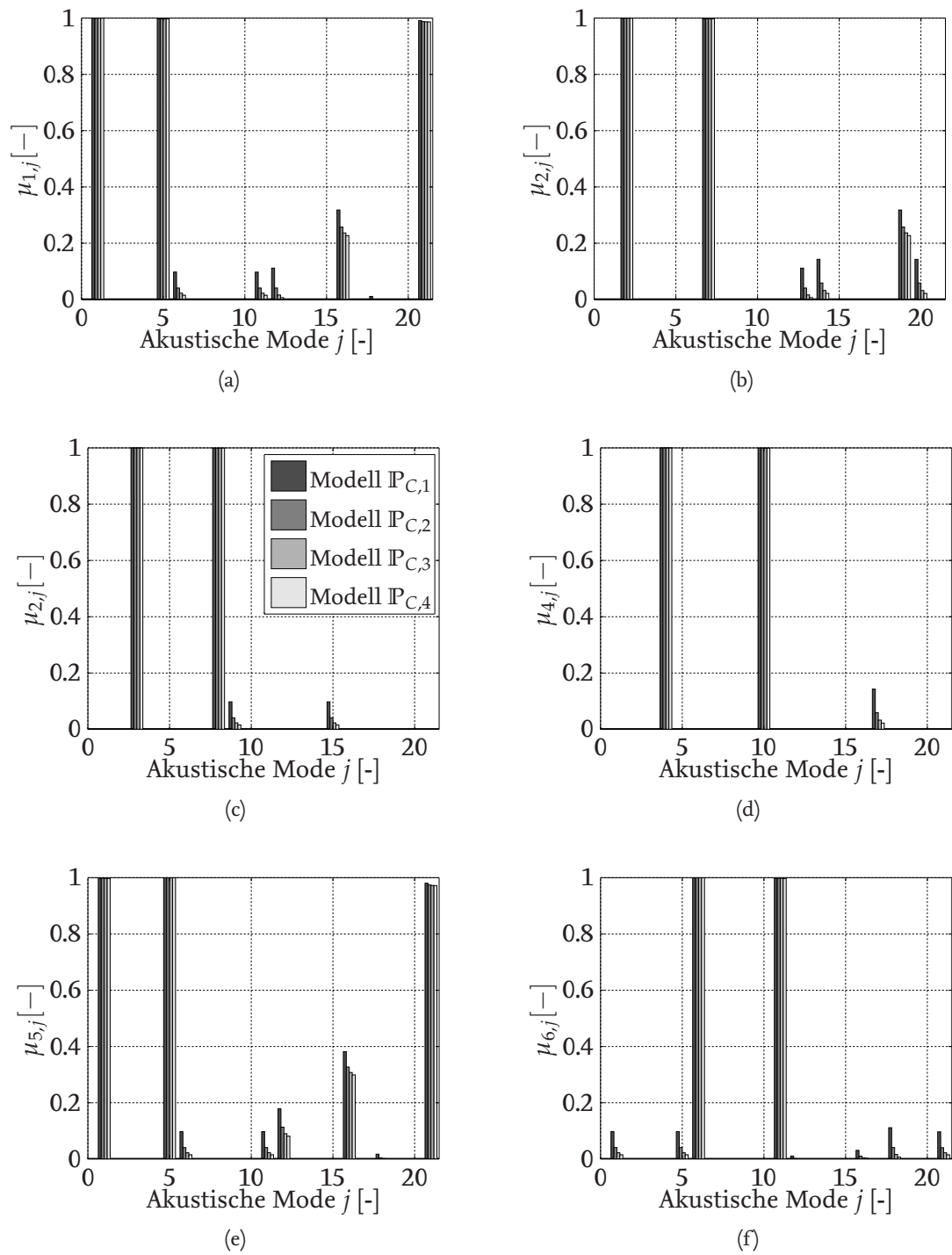


Abbildung A.12.: Skalarprodukte der akustischen Eigenvektoren reduziert auf die Interaktionsfläche

Literaturverzeichnis

- [AB94] ATALLA, N. ; BERNHARD, R. J.: Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. In: *Applied Acoustics* 43 (1994), Nr. 3, S. 271–294
- [AB06] ABEL, D. ; BOLLIG, A.: *Rapid control prototyping*. Springer, 2006
- [ABB06] AL-BASSYIOUNI, M. ; BALACHANDRAN, B.: Control of enclosed sound fields using zero spillover schemes. In: *Journal of sound and vibration* 292 (2006), Nr. 3, S. 645–660
- [Alg10] ALGERMISSEN, S.: *Selbsteinstellende, robuste Regelung von Strukturschwingungen an Parallelrobotern*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2010
- [All03] ALLEMANG, R. J.: The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. In: *Sound and vibration* 37 (2003), Nr. 8, S. 14–23
- [AMU⁺10] ALGERMISSEN, S. ; MISOL, M. ; UNRUH, O. ; HEINTZE, O. ; MONNER, H. P.: Robust Control of Turbulent Boundary Layer Noise Transmission Through a Stiffened Panel. In: *Proc. of International Congress on Sound and Vibration*. Cairo, Egypt, July 2010
- [AS10] ALGERMISSEN, S. ; SINAPIUS, M.: Robust gain scheduling for smart-structures in parallel robots. In: *Robotic Systems for Handling and Assembly*. Springer, 2010, S. 159–174
- [BCPS05] BALAS, G. ; CHIANG, R. ; PACKARD, A. ; SAFONOV, M.: *Robust control toolbox. For Use with Matlab. User's Guide, Version 3*, 2005
- [Bev01] BEVAN, J. S.: Piezoceramic Actuator Placement for Acoustic Control of Panels / Old Dominion University, Norfolk, Virginia. 2001 (NASA/CR-2001-211265). – Forschungsbericht
- [BH15] BÜHMANN, H. ; HAASE, T.: Experimentelle Umsetzung eines Schallstrahlungssensors für Steuerungen / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. Köln, 2015 (131-2015/71). – DLR-IB
- [BM15] BAGHA, A. K. ; MODAK, S. V.: Structural sensing of interior sound for active control of noise in structural-acoustic cavities. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 138 (2015), Nr. 1, S. 11–21
- [BSMM05] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Aufl. Frankfurt/Main : Verlag Harri Deutsch, 2005
- [BSP96] BALACHANDRAN, B. ; SAMPATH, A. ; PARK, J.: Active control of interior noise in a three-dimensional enclosure. In: *Smart materials and structures* 5 (1996), Nr. 1, S. 89
- [BV04] BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L.: *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004

- [Caz99] CAZZOLATO, B. S.: *Sensing systems for active control of sound transmission into cavities*, The University of Adelaide, Diss., 1999
- [CF92] CLARK, R. L. ; FULLER, Chris R.: Modal sensing of efficient acoustic radiators with polyvinylidene fluoride distributed sensors in active structural acoustic control approaches. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 91 (1992), Nr. 6, S. 3321–3329
- [CH97] CAZZOLATO, B. S. ; HANSEN, Colin H.: Structural sensing of sound transmission into a cavity for active structural-acoustic control. In: *Proceedings of the 5-th ICSV* (1997), S. 2391–2401
- [CH98] CAZZOLATO, B. S. ; HANSEN, Colin H.: Active control of sound transmission using structural error sensing. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 104 (1998), S. 2878–2889
- [CH99] CAZZOLATO, B. S. ; HANSEN, Colin H.: Structural radiation mode sensing for active control of sound radiation into enclosed spaces. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 106 (1999), S. 3732–3735
- [CZKH02] CAI, C. ; ZHENG, H. ; KHAN, M. S. ; HUNG, K. C.: Modeling of material damping properties in ANSYS. In: *CAD/FEM Users' Meeting & ANSYS Conference*, 2002
- [Dav04] DAVIDSSON, P.: *Structure-acoustic analysis; finite element modelling and reduction methods*, Lund University, Diss., 2004
- [Des98] DESMET, W.: *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique, Diss., 1998
- [DF00] DE FONSECA, P.: *Simulation and optimisation of the dynamic behaviour of mechatronic systems*, Katholieke Universiteit Leuven, Diss., 2000
- [DGKF89] DOYLE, J. C. ; GLOVER, K. ; KHARGONEKAR, P. P. ; FRANCIS, B. A.: State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 34 (1989), Nr. 8, S. 831–847
- [DHR05] DRESIG, H. ; HOLZWEISSIG, F. ; ROCKHAUSEN, L.: *Maschinendynamik*. Springer, 2005
- [DM12] DHANDOLE, S. ; MODAK, S. V.: A constrained optimization based method for acoustic finite element model updating of cavities using pressure response. In: *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012), Nr. 1, S. 399–413
- [DR06] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag, 2006
- [EJ93] ELLIOTT, S. J. ; JOHNSON, M. E.: Radiation modes and the active control of sound power. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 94 (1993), S. 2194–2204
- [Ell01] ELLIOTT, S. J.: *Signal processing for active control*. Academic Press, 2001. – ISBN 0122370856
- [EPB07] ESTORFF, O. von ; PETERSEN, S. ; BIERMANN, J.: Acoustic simulations with higher order finite and infinite elements. In: *PAMM* 7 (2007), Nr. 1, S. 4120013–4120014

- [FG07] FAHY, F. J. ; GARDONIO, P.: *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. 2. Aufl. Academic press, 2007
- [FHS91] FULLER, C. R. ; HANSEN, C. H. ; SNYDER, S. D.: Active control of sound radiation from a vibrating rectangular panel by sound sources and vibration inputs: an experimental comparison. In: *Journal of Sound and Vibration* 145 (1991), Nr. 2, S. 195–215
- [FM95] FRISWELL, M. ; MOTTERSHEAD, J. E.: *Finite element model updating in structural dynamics*. Bd. 38. Springer Science & Business Media, 1995
- [FSHS92] FULLER, C. R. ; SNYDER, S. D. ; HANSEN, C. H. ; SILCOX, R. J.: Active control of interior noise in model aircraft fuselages using piezoceramic actuators. In: *AIAA journal* 30 (1992), Nr. 11, S. 2613–2617
- [GCCV00] GIBBS, G. P. ; CLARK, R. L. ; COX, D. E. ; VIPPERMAN, J. S.: Radiation modal expansion: Application to active structural acoustic control. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 107 (2000), Nr. 1, S. 332–339
- [GLL08] GRIFFIN, S. ; LANE, S. A. ; LAZZARO, A.: Active vibroacoustic device for noise reduction in launch vehicles. In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 45 (2008), Nr. 6, S. 1282–1292
- [GLS94] GRIMES, R. G. ; LEWIS, J. G. ; SIMON, H. D.: A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15 (1994), Nr. 1, S. 228–272
- [GR70] GOLUB, G. H. ; REINSCH, C.: Singular value decomposition and least squares solutions. In: *Numerische mathematik* 14 (1970), Nr. 5, S. 403–420
- [Gri97] GRIMME, E. J.: *Krylov projection methods for model reduction*, University of Illinois, Diss., 1997
- [GWA13] GRIFFIN, S. ; WESTON, A. ; ANDERSON, J.: Adaptive noise cancellation system for low frequency transmission of sound in open fan aircraft. In: *Shock and Vibration* 20 (2013), Nr. 5, S. 989–1000
- [GZL01] GREWAL, A. ; ZIMCIK, D. G. ; LEIGH, B.: Feedforward piezoelectric structural control: An application to aircraft cabin noise reduction. In: *Journal of Aircraft* 38 (2001), Nr. 1, S. 164–173
- [HC01] HENRY, J. K. ; CLARK, R. L.: Noise transmission from a curved panel into a cylindrical enclosure: Analysis of structural acoustic coupling. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 109 (2001), Nr. 4, S. 1456–1463
- [HPA16] HESSE, C. ; PAPANTONI, V. ; ALGERMISSEN, S.: Experimental study of active sound transmission control into enclosed spaces. In: *Internoise 2016, 21.-24. Aug. 2016, Hamburg, Germany, 2016*
- [HRMS15a] HESSE, C. ; ROSE, M. ; MONNER, H. P. ; SINAPIUS, M.: Active structural acoustic control for coupled fluid-structure-interaction systems. In: *AST 2015 5th International Workshop on Aircraft System Technologies, 24. - 25. Februar 2015, Hamburg, Deutschland, 2015*

- [HRMS15b] HESSE, C. ; ROSE, M. ; MONNER, H. P. ; SINAPIUS, M.: Aktive Reduktion der Schallabstrahlung für gekoppelte Systeme mit Fluid-Struktur-Interaktion. In: *DAGA 2015 41. Jahrestagung für Akustik*, 16. - 19. März 2015, Nürnberg, Deutschland., 2015
- [HTI12] HILL, S. G. ; TANAKA, N. ; IWAMOTO, H.: A generalised approach for active control of structural-interior global noise: Practical implementation. In: *Journal of sound and vibration* 331 (2012), Nr. 14, S. 3227–3239. – ISSN 0022–460X
- [HTS09] HILL, S. G. ; TANAKA, N. ; SNYDER, S. D.: A generalized approach for active control of structural-interior global noise. In: *Journal of sound and vibration* 326 (2009), OCT 9, Nr. 3-5, S. 456–475. – ISSN 0022–460X
- [HVPS17] HESSE, C. ; VIVAR PEREZ, J.M. ; SINAPIUS, M.: Frequency-independent radiation modes of interior sound radiation: An analytical study. In: *Journal of Sound and Vibration* (2017), -. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.038>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.038>. – ISSN 0022–460X
- [IG91] IGLESIAS, P. A. ; GLOVER, K.: State-space approach to discrete-time, H_∞ control. In: *International Journal of Control* 54 (1991), Nr. 5, S. 1031–1073
- [Jan14] JANDA, O.: *Modeling and Control of Sound and Vibration for Smart Structures*, TU Darmstadt, Diss., 2014
- [JHS98] JAYACHANDRAN, V. ; HIRSCH, S. M. ; SUN, J. Q.: On the numerical modelling of interior sound fields by the modal function expansion approach. In: *Journal of sound and vibration* 210 (1998), Nr. 2, S. 243–254
- [Joh04] JOHNSON, W. M.: *Structural acoustic optimization of a composite cylindrical shell*, G. W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Diss., 2004
- [Kat06] KATAYAMA, T.: *Subspace methods for system identification*. Springer Science & Business Media, 2006
- [KB99] KIM, S. M. ; BRENNAN, M. J.: A comparative study of feedforward control of harmonic and random sound transmission into an acoustic enclosure. In: *Journal of sound and vibration* 226 (1999), Nr. 3, S. 549–571
- [KB00] KIM, S.-M. ; BRENNAN, M. J.: Active control of harmonic sound transmission into an acoustic enclosure using both structural and acoustic actuators. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 107 (2000), S. 2523–2534
- [Koh13] KOHNKE, P.: *ANSYS mechanical APDL theory reference*. November 2013
- [LC10] LI, D. S. ; CHENG, L.: The design of synthesized structural acoustic sensors for active control of interior noise with experimental validation. In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), Nr. 2, S. 123–139
- [Lef07] LEFÈVRE, J.: *Finite-Elemente-Simulation adaptiver Leichtbaustrukturen zur Untersuchung der Schwingungs- und Schallreduktion*, University of Magdeburg, Diss., 2007

- [Lei69] LEISSA, A. W.: Vibration of plates / National Aeronautics and Space Administration. 1969 (NASA-SP-160). – Technical Report
- [Lei73] LEISSA, A. W.: Vibration of shells / National Aeronautics and Space Administration. 1973 (NASA-SP-288). – Technical Report
- [Lei74] LEISSA, A. W.: On a curve veering aberration. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 25 (1974), Nr. 1, S. 99–111
- [Liu02] LIU, X. L.: Behavior of derivatives of eigenvalues and eigenvectors in curve veering and mode localization and their relation to close eigenvalues. In: *Journal of Sound and Vibration* 256 (2002), Nr. 3, S. 551–564
- [LJFC06] LANE, S. A. ; JOHNSON, M. ; FULLER, C. ; CHARPENTIER, A.: Active control of payload fairing noise. In: *Journal of sound and vibration* 290 (2006), Nr. 3, S. 794–819
- [LMTT05] LE MOYNE, S. ; TEBEC, J.-L. ; TAWFIQ, I.: Acoustical influence of stiffeners on acoustic radiation of plates. In: *Mechanical systems and signal processing* 19 (2005), Nr. 1, S. 195–212
- [Lun12] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Bd. 2. Springer-Verlag, 2012
- [LWHQ15] LI, Y. ; WANG, X. ; HUANG, R. ; QIU, Z.: Active vibration and noise control of vibro-acoustic system by using PID controller. In: *Journal of Sound and Vibration* 348 (2015), S. 57–70
- [MAM12] MISOL, M. ; ALGERMISSEN, S. ; MONNER, H. P.: Experimental investigation of different active noise control concepts applied to a passenger car equipped with an active windshield. In: *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), Nr. 10, S. 2209–2219
- [Mar05] MARBURG, S.: Normal modes in external acoustics. Part I: Investigation of the one-dimensional duct problem. In: *Acta acustica united with acustica* 91 (2005), Nr. 6, S. 1063–1078
- [Mar06] MARBURG, S.: Normal modes in external acoustics. Part III: Sound power evaluation based on superposition of frequency-independent modes. In: *Acta acustica united with acustica* 92 (2006), Nr. 2, S. 296–311
- [MDHS06] MARBURG, S. ; DIENEROWITZ, F. ; HORST, T. ; SCHNEIDER, S.: Normal modes in external acoustics. Part II: Eigenvalues and eigenvectors in 2D. In: *Acta acustica united with acustica* 92 (2006), Nr. 1, S. 97–111
- [MH12] MISOL, M. ; HESSE, C.: Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Optimierung der Sensorik von adaptiven Steuerungen an doppelwandigen Leichtbaustrukturen / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. Köln, 2012 (131-2012/43). – DLR-IB
- [Mis14] MISOL, M.: *Aktive Steuerung des Transmissionsverhaltens stochastischer Störquellen durch flächige Leichtbaustrukturen*, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt eV, Diss., 2014

- [NE92] NELSON, P. A. ; ELLIOTT, S. J.: *Active control of sound*. Academic press, 1992
- [ODSS⁺08] OLIVEIRA, L. P. R. ; DA SILVA, M. M. ; SAS, P. ; VAN BRUSSEL, H. ; DESMET, W.: Concurrent mechatronic design approach for active control of cavity noise. In: *Journal of Sound and Vibration* 314 (2008), Nr. 3, S. 507–525
- [OJG⁺09] OLIVEIRA, L. P. R. ; JANSSENS, K. ; GAJDATSY, P. ; AUWERAER, H. Van d. ; VAROTO, P. S. ; SAS, P. ; DESMET, W.: Active sound quality control of engine induced cavity noise. In: *Mechanical systems and signal processing* 23 (2009), Nr. 2, S. 476–488
- [PH91] PAN, J. ; HANSEN, C. H.: Active control of noise transmission through a panel into a cavity. II: Experimental study. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 90 (1991), Nr. 3, S. 1488–1492
- [PHB90] PAN, J. ; HANSEN, C. H. ; BIES, D. A.: Active control of noise transmission through a panel into a cavity: I. Analytical study. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 87 (1990), Nr. 5, S. 2098–2108
- [Pie88] PIERRE, C.: Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 126 (1988), Nr. 3, S. 485–502
- [PM86] PERKINS, N. C. ; MOTE, C. D.: Comments on curve veering in eigenvalue problems. In: *Journal of Sound and Vibration* 106 (1986), Nr. 3, S. 451–463
- [PP97] PALUMBO, D. L. ; PADULA, S. L.: *Optimizing an actuator array for the control of multi-frequency noise in aircraft interiors*. National Aeronautics and Space Administration, 1997
- [PPK⁺98] PADULA, S. L. ; PALUMBO, D. L. ; KINCAID, R. K. ; ASME, T. A. ; AHS, A.: Optimal sensor/actuator locations for active structural acoustic control. In: *Proceedings of the 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA-98-1865, Long Beach, CA, 1998*
- [Pre65] PRETLOVE, A. J.: Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity by a closed rectangular cavity. In: *Journal of Sound and Vibration* 2 (1965), Nr. 3, S. 197–209
- [PRWM82] POPE, L. D. ; RENNISON, D. C. ; WILLIS, C. M. ; MAYES, W. H.: Development and validation of preliminary analytical models for aircraft interior noise prediction. In: *Journal of Sound and Vibration* 82 (1982), Nr. 4, S. 541–575
- [Pur08] PURI, R. S.: *Krylov Subspace Based Direct Projection Techniques for Low Frequency, Fully Coupled, Structural Acoustic Analysis and Optimization.*, Oxford Brookes University, Diss., 2008
- [Rin11] RINGWELSKI, S.: *Numerische Modelle für die aktive Schwingungs- und Schallreduktion und deren experimentelle und analytische Verifikation*, University of Magdeburg, Diss., 2011
- [SC99] SCARPA, F. ; CURTI, G.: A method for the parametric frequency sensitivity of interior acousto-structural coupled systems. In: *Applied Acoustics* 58 (1999), Nr. 4, S. 451–467

- [Sca00] SCARPA, F.: Parametric sensitivity analysis of coupled acoustic-structural systems. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 122 (2000), Nr. 2, S. 109–115
- [Sch07] SCHILLER, N. H.: *Decentralized control of sound radiation from periodically stiffened panels*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Diss., 2007
- [SH94] SNYDER, S. D. ; HANSEN, C. H.: The design of systems to control actively periodic sound transmission into enclosed spaces, part II: mechanisms and trends. In: *Journal of sound and vibration* 170 (1994), Nr. 4, S. 451–472
- [SHLH03] SONG, C. K. ; HWANG, J. K. ; LEE, J. M. ; HEDRICK, J. K.: Active vibration control for structural–acoustic coupling system of a 3-D vehicle cabin model. In: *Journal of sound and vibration* 267 (2003), Nr. 4, S. 851–865
- [SKKR02] SARWAR, B. ; KARYPIS, G. ; KONSTAN, J. ; RIEDL, J.: Incremental singular value decomposition algorithms for highly scalable recommender systems. In: *Fifth International Conference on Computer and Information Science* Citeseer, 2002, S. 27–28
- [SLF90] SILCOX, R. J. ; LESTER, H. C. ; FULLER, C. R.: Mechanisms of active control in cylindrical fuselage structures. In: *AIAA journal* 28 (1990), Nr. 8, S. 1397–1404
- [Smi97] SMITH, S. W.: *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Publishing, 1997
- [Soe80] SOEDEL, W.: A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions. In: *Journal of Sound and Vibration* 70 (1980), Nr. 3, S. 309–317
- [SP94] SERIANI, G. ; PRIOLO, E.: Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. In: *Finite elements in analysis and design* 16 (1994), Nr. 3, S. 337–348
- [SP00] SUM, K. S. ; PAN, J.: On acoustic and structural modal cross-couplings in plate-cavity systems. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 107 (2000), Nr. 4, S. 2021–2038
- [SS66] STROUD, A. H. ; SECREST, D.: *Gaussian quadrature formulas*. Bd. 39. Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., 1966
- [ST93] SNYDER, S. D. ; TANAKA, N.: On feedforward active control of sound and vibration using vibration error signals. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 94 (1993), S. 2181–2193
- [TK06] TANAKA, N. ; KOBAYASHI, K.: Cluster control of acoustic potential energy in a structural/acoustic cavity. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 119 (2006), S. 2758
- [TS02] TANAKA, N. ; SNYDER, S. D.: Cluster control of a distributed-parameter planar structure–Middle authority control. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 112 (2002), S. 2798
- [Whi09] WHITMER, C. E.: *An investigation of active structural acoustic control in resonant enclosures*, Iowa State University, Diss., 2009

- [ZD98] ZHOU, K. ; DOYLE, J. C.: *Essentials of robust control*. Bd. 180. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998
- [ZT00] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. 5. Aufl. Butterworth-Heinemann, 2000