

**IB 131-2015/075**

**Linearitätsuntersuchungen an Federelementen  
von Schwingungsisolationssystemen**

G. Reiher-Saenger

B. T. Kletz



**Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik  
Braunschweig**

12 / 2015



Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.  
in der Helmholtzgemeinschaft  
Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

IB 131-2015/075

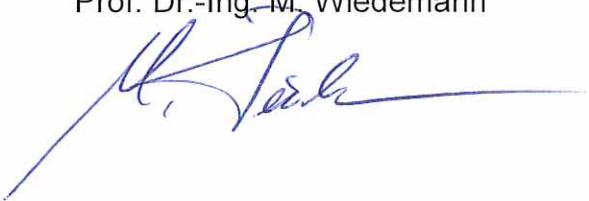
Linearitätsuntersuchungen an Federelementen von  
Schwingungsisolationssystemen

Braunschweig, 12, 2015

Der Bericht umfasst:

90 Seiten

Institutsleiter:  
Prof. Dr.-Ing. M. Wiedemann



Verfasser:  
G. Reiher-Saenger



Leiter der Abteilung: Adaptronik  
Prof. Dr.-Ing. H. P. Monner



Betreuer:  
B. T. Kletz





---

# Inhaltsverzeichnis

Erklärung	III
Danksagungen	V
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XI
Symbolverzeichnis	XII
Kurzfassung	XIV
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Lineare schwingende Systeme</b>	<b>3</b>
2.1 Systemgleichung . . . . .	3
2.2 Steifigkeit . . . . .	4
2.3 Dämpfung . . . . .	6
<b>3 Nichtlineare schwingende Systeme</b>	<b>9</b>
3.1 Material-Nichtlinearität . . . . .	11
3.1.1 Nichtlineare Steifigkeit . . . . .	11
3.1.2 Nichtlineare Dämpfung . . . . .	14
3.1.3 Temperaturabhängigkeit . . . . .	15
3.2 Geometrische Nichtlinearität . . . . .	15
<b>4 Charakterisierung erwarteter Nichtlinearitäten</b>	<b>17</b>
4.1 Statische Bestimmung . . . . .	17
4.2 Dynamische Bestimmung . . . . .	18
<b>5 Verwendete Probekörper</b>	<b>20</b>
5.1 Geometrie der Probekörper . . . . .	21
5.2 Liste der Probekörper . . . . .	21
<b>6 Versuchsstand</b>	<b>23</b>
6.1 Biegebalken . . . . .	24
6.2 Kreuzförmige Probekörper . . . . .	25
6.3 Sensoren . . . . .	26
<b>7 Durchführung</b>	<b>27</b>

---

<b>8</b>	<b>Auswertung</b>	<b>32</b>
8.1	Balken mit Piezo-Patch . . . . .	32
8.2	Balken gedämpft . . . . .	38
8.3	Kreuz mit Piezo-Patches . . . . .	42
8.3.1	Translatorische Anregung . . . . .	42
8.3.2	Rotatorische Anregung . . . . .	47
8.4	Kreuz gedämpft . . . . .	52
8.4.1	Translatorische Anregung . . . . .	52
8.4.2	Rotatorische Anregung . . . . .	57
<b>9</b>	<b>Diskussion</b>	<b>61</b>
9.1	Steifigkeit . . . . .	61
9.2	Eigenfrequenzen . . . . .	62
9.3	Dämpfungen . . . . .	63
9.4	Linearitätsbetrachtung . . . . .	63
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>67</b>
A.1	Messdaten Ungedämpfter Biegebalken . . . . .	67
A.2	Messdaten Gedämpfter Biegebalken . . . . .	69
A.3	Messdaten Ungedämpftes Kreuz . . . . .	71
A.4	Messdaten Gedämpftes Kreuz . . . . .	75
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Prototyp eines Schwingungsisolators zur aktiven Beruhigung eines PKW-Außenspiegels (Quelle: Website des Instituts für Adaptronik und Funktionsintegration der TU Braunschweig) . . . . .	1
2.1	Einfaches Masse-Feder-System . . . . .	3
2.2	Einfaches Masse-Feder-Dämpfer-System . . . . .	4
2.3	Spannungs-Dehnungs-Diagramm [2] . . . . .	5
2.4	Strömung zwischen zwei parallelen Platten [2] . . . . .	7
3.1	Beispielhafte Darstellung verschiedener Nichtlinearitäten [4] . . . . .	10
3.2	Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Formgedächtnis-Legierung in austenitischem und martensitischem Zustand [3] . . . . .	12
3.3	Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Zugstabes, bei Dehnung über die Streckgrenze $\sigma_F$ hinaus [6] . . . . .	13
3.4	Strukturänderung eines Elastomers unter Spannung [2] . . . . .	13
3.5	Relaxation eines Elastomers bei einer definierten Dehnung $\varepsilon_0$ (a) und der sich einstellenden Spannung $\sigma(t)$ (b) [2] . . . . .	14
3.6	Vergleich des nicht-konservativen (a) und konservativen (b) Krafteingriffes bei einer großen Verformung. 1 Anfang und 2 Ende der Krafteinleitung [7] . . . .	15
3.7	Knicken eines Balkens bei Belastung oberhalb der kritischen Kraft $F_k$ [8] . . .	16
4.1	Vergleich linearer und nichtlinearer Federkennlinien bei Kraft $F(s)$ , Auslenkung $s$ und nichtlinearem Steifigkeitsanteil $\varepsilon$ [10] . . . . .	17
4.2	Resonanzdiagramm eines nichtlinearen Systems mit der Verstärkung $ A $ , der Kreisfrequenz $\omega$ und der Dämpfung $\delta$ [10] . . . . .	18
5.1	Schematischer Aufbau der Proben . . . . .	20
5.2	Probekörper mit Balkenform und Piezo-Patch . . . . .	21
5.3	Probekörper mit Kreuzform ohne Piezo-Patch . . . . .	22
6.1	Koordinatensystem des Versuchsstandes . . . . .	23
6.2	Schematische Darstellung des Messaufbaus für Biegebalken . . . . .	24
6.3	Schematische Darstellung des Messaufbaus für kreuzförmige Probekörper . . .	25
7.1	Grafische Ausgabe einer Messung des Sprungversuches . . . . .	28
7.2	Ausschwingkurve eines schwingenden Systems [11] . . . . .	29
7.3	Grafische Ausgabe von Eingang, Spektrum, Ausgang und Phasendiagramm . .	31
8.1	Kraft-Weg-Diagramm des Balkens mit Piezo-Patch . . . . .	33
8.2	Steifigkeitsverlauf des Balkens mit Piezo-Patch . . . . .	33

8.3	Dämpfungsverlauf des Balkens mit Piezo-Patch . . . . .	35
8.4	Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessener (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des Balkens mit Piezo-Patch . . . . .	36
8.5	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Balkens mit Piezo-Patch bei dynamischer Anregung . . . . .	37
8.6	Kraft-Weg-Diagramm des gedämpften Balkens . . . . .	40
8.7	Steifigkeitsverlauf des gedämpften Balkens . . . . .	40
8.8	Gemessene Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Balkens bei dynamischer Kraftanregung . . . . .	41
8.9	Kraft-Weg-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches . . . . .	43
8.10	Steifigkeitsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches . . . . .	44
8.11	Dämpfungsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches . . . . .	44
8.12	Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessenen (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des Kreuzes mit Piezo-Patches . . . . .	45
8.13	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei translatorischer dynamischer Anregung . . . . .	46
8.14	Moment-Winkel-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die z-Achse . . . . .	48
8.15	Steifigkeitsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die z-Achse . . . . .	48
8.16	Moment-Winkel-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die y-Achse . . . . .	49
8.17	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei rotatorischer Anregung um die z-Achse . . . . .	51
8.18	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei rotatorischer Anregung um die y-Achse . . . . .	51
8.19	Kraft-Weg-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung . . . . .	53
8.20	Steifigkeitsverlauf des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung . . . . .	53
8.21	Dämpfungsverlauf des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung . . . . .	54
8.22	Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessener (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung . . . . .	55
8.23	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung . . . . .	56
8.24	Moment-Winkel-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die z-Achse . . . . .	57
8.25	Moment-Winkel-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die y-Achse . . . . .	58
8.26	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die z-Achse . . . . .	60
8.27	Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die y-Achse . . . . .	60

---

# Tabellenverzeichnis

5.1	Übersicht über die untersuchten Probekörper . . . . .	22
6.1	Übersicht der verwendeten Sensoren . . . . .	26
8.1	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung des Balkens mit Piezo-Patch (MP = Messpunkt) . . . . .	38
8.2	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den gedämpften Balken (MP = Messpunkt) . . . . .	41
8.3	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den Balken mit Piezo-Patches bei translatorischer Anregung (MP = Messpunkt) . . . . .	46
8.4	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den Balken mit Piezo-Patch (MP = Messpunkt) . . . . .	50
8.5	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für das gedämpfte Kreuz bei translatorischer Anregung (MP = Messpunkt) . . . . .	56
8.6	Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für das gedämpfte Kreuz bei rotatorischer Anregung (MP = Messpunkt) . . . . .	59

# Symbolverzeichnis

## 1. Kennzeichnung durch Art der Schreibweise

$F(t)$ , $x(t)$ , etc.	Augenblickswerte
$k(x)$ , $d(x)$ , etc.	Wegabhängige Werte
$\dot{x}(t)$ , etc.	Ableitung nach der Zeit
$w'(x)$ , etc.	Ableitung nach dem Weg
$\hat{x}$	Maximale Auslenkung

## 2. Symbole

<i>Abkürzung</i>	<i>Variable</i>	<i>Einheit</i>
$a$	Länge	$m$
$A$	Querschnittsfläche	$m^2$
$d$	Dämpfung	$\frac{Ns}{m}$
$D$	Lehrsches Dämpfungsmaß	
$E$	Elastizitätsmodul	$\frac{N}{m^2}$
$F$	Kraft	$N$
$G$	Schubmodul	$\frac{N}{m^2}$
$I_{yy}$	Flächenträgheitsmoment gegen Biegung	$m^4$
$k$	Steifigkeit	$\frac{N}{mm}$
$l$	Länge	$m$
$m$	Masse	$kg$
$M_b$	Biegemoment	$Nm$
$Q$	Querkraft	$N$
$r$	Radius	$m$
$s$	Weg	$m$
$T_d$	Gedämpfte Periodendauer	$s$
$w$	Durchbiegung	$m$
$x$	Weg	$m$

$\alpha$	Winkel	$rad$
$\gamma$	Nichtlinearer Steifigkeitsanteil	
$\gamma$	Schubverzerrung	
$\delta$	Abklingkonstante	$\frac{1}{s}$
$\varepsilon$	Dehnung	
$\varepsilon$	Nichtlinearer Steifigkeitsanteil	
$\eta$	Viskosität	$\frac{Ns}{m^2}$
$\mu$	Reibungskoeffizient	
$\nu$	Relativgeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
$\sigma$	Mechanische Spannung	$\frac{N}{m^2}$
$\psi$	Verwindung	
$\omega$	Kreisfrequenz	$\frac{rad}{s}$
$\Lambda$	Logarithmisches Dekrement	

## 2. Indizes

$F_d$	Dämpfungskraft	$N$
$F_{int}$	Interpolierte Kraftfunktion	$N$
$F_k$	Federkraft	$N$
$F_m$	Massenträgheitskraft	$N$
$F_N$	Normalkraft	$N$
$F_R$	Reibkraft	$N$
$I_t$	Flächenträgheitsmoment gegen Torsion	$m^4$
$k_{eq}$	Äquivalent Steifigkeit	$\frac{N}{m}$
$k_{lin}$	Linearer Steifigkeitsanteil	$\frac{N}{m}$
$k_{tan}$	Tangentiale Steifigkeit	$\frac{N}{m}$
$M_t$	Torsionsmoment	$Nm$
$\sigma_f$	Streckgrenze	$\frac{N}{m^2}$
$\omega_0$	Eigenkreisfrequenz	$\frac{rad}{s}$
$\omega_d$	Gedämpfte Eigenkreisfrequenz	$\frac{rad}{s}$
$\omega_{eq}$	Äquivalente Eigenkreisfrequenz	$\frac{rad}{s}$

# Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung von Schwingungsisolations-Systemen im Hinblick auf die Linearität ihres Verhaltens. Es werden dazu verschiedene nichtlineare Phänomene beleuchtet und charakterisiert. Anschließend werden vier Probekörper hinsichtlich ihrer Steifigkeit und Dämpfung, sowie daraus folgend ihrer Eigenfrequenz untersucht.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass bei allen untersuchten Proben, sowohl bei translatorischer, als auch bei rotatorischer Anregung Nichtlinearitäten auftreten. Aus den, über statische Auslenkungsversuche bestimmten, Steifigkeitskennlinien wurden mithilfe der harmonischen Balance linearisierte, äquivalente Steifigkeiten gebildet.

Durch Ausschwingversuche und dynamische, breitbandige Anregung bei unterschiedlichen Anregungsarten wurden Kennlinien für die Dämpfung und Eigenkreisfrequenz der Systeme erstellt. Auch hier zeigt sich deutlich nichtlineares Verhalten, insbesondere bei Fußpunktanregung und Anregung durch Piezo-Patch-Aktoren.

Zuletzt wird in dieser Arbeit ein Arbeitsbereich für die untersuchten Systeme festgelegt, in welchem sie annähernd lineares Verhalten zeigen.

# 1 Einleitung

Bei der Entwicklung, Bewertung und Regelung dynamischer Systeme stellen Schwingungen und ihre Erzeugung, Überlagerung oder Unterdrückung einen zentralen Bestandteil dar. So gilt es beispielsweise bei der Entwicklung eines Fahrzeuges, optische Hilfsmittel wie Rück- und Seitenspiegel gegen Vibrationen durch Fahrbahnunebenheiten und Wind zu isolieren. Für die Entwicklung eines solchen, in Abbildung 1.1 dargestellten, Schwingungsisolators ist es nötig, das dynamische Verhalten des Gesamtsystems zu verstehen.



Abbildung 1.1: Prototyp eines Schwingungsisolators zur aktiven Beruhigung eines PKW-Außenspiegels (Quelle: Website des Instituts für Adaptronik und Funktionsintegration der TU Braunschweig)

Um dies zu erreichen, werden schwingende Systeme für ihre analytische Charakterisierung zu Beginn meist als linear angenommen. Dies ermöglicht es, die Reaktion des Systems auf Störungen mit verhältnismäßig geringem Aufwand vorherzusagen. Jedoch trifft diese Annahme in der Realität nicht oder nur in bestimmten Grenzen zu. Besonders bei hoch präzisen Anwendungen, wie beispielsweise der Schwingungsisolierung bis zur kompletten Ruhe des Gegenstandes, können auftretende Abweichungen zu Problemen führen. In derartigen Fällen ist

es deshalb notwendig, das System vor dem Betrieb auf seine Linearität hin zu untersuchen. Besonderes Augenmerk liegt hierbei auf Steifigkeit und Dämpfung des Systems, da diese gemeinsam mit der, meist konstanten, Masse das Systemverhalten beschreiben (vgl. Kap. 2).

In dieser Arbeit geht es um eine derartige Untersuchung. Es wird die Linearität verschiedener Grundstrukturen eines von Dipl. Ing. B. Kletz entwickelten Mehr-Achs-Schwingungs-isolationssystems und Mehr-Achs-Tilgers analysiert [1].

Dabei handelt es sich um einseitig eingespannte Blattfedern und kreuzförmige Probekörper. Diese liegen jeweils einmal als Vollkörper mit aufgeklebtem Piezo-Folien-Aktuator und als Schichtverbund aus zwei Metallschichten mit dämpfender Klebeschicht vor (vgl. Kap. 5).

Durch Messungen bei statischer Auslenkung werden Steifigkeitskennlinien der Probekörper erstellt. Anschließend werden die Dämpfung und Eigenkreisfrequenz durch verschiedene dynamische Messungen, bei unterschiedlichen Anregungsarten, ermittelt. Alle so gebildeten Kennlinien werden auf ihre Linearität hin untersucht. Mit den hieraus gewonnenen Erkenntnisse wird ein Arbeitsbereich definiert, in welchem sich das System annähernd linear verhält.

## 2 Lineare schwingende Systeme

Zum Verständnis schwingender Systeme gibt es verschiedene grundlegende Eigenschaften zu bestimmen.

### 2.1 Systemgleichung

Ein einfaches schwingungsfähiges System besteht aus einer Masse ( $m$ ) und einer Feder mit der Steifigkeit  $k$ . Wird es durch eine zeitabhängige Kraft  $F(t)$  angeregt, so wird es sich um den Weg  $x(t)$  auslenken (vgl. Abb. 2.1).

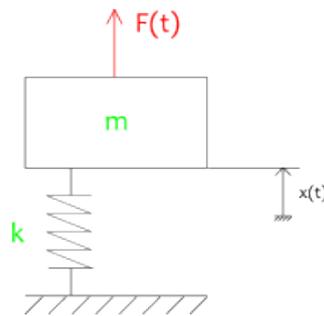


Abbildung 2.1: Einfaches Masse-Feder-System

Es lässt sich, wie in Gleichung 2.1 dargestellt, als Summe der Anregungskraft  $F(t)$ , der Massenträgheitskraft  $F_m(\ddot{x})$  und der Federkraft  $F_k(x)$  beschreiben, wobei es sich bei  $x(t)$  um die Auslenkung und bei  $\ddot{x}$  um ihre zweite zeitliche Ableitung, die Beschleunigung des Systems handelt.

$$F_m(\ddot{x}) + F_k(x) = F(t) \quad (2.1)$$

Fügt man dem System ein Dämpferelement mit der Dämpfung  $d$  hinzu (vgl. Abb. 2.2), so erweitert sich die Kräftegleichung mit der Dämpferkraft  $F_d(\dot{x})$  und der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  zu Gleichung 2.2.

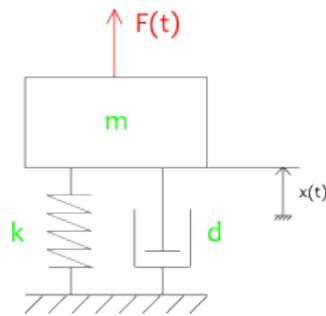


Abbildung 2.2: Einfaches Masse-Feder-Dämpfer-System

$$F_m(\ddot{x}) + F_d(\dot{x}) + F_k(x) = F(t) \quad (2.2)$$

Über die als linear angenommenen Zusammenhänge

$$F_m(\ddot{x}) = m \cdot \ddot{x} \quad (2.3)$$

$$F_d(\dot{x}) = d \cdot \dot{x} \quad (2.4)$$

$$F_k(x) = k \cdot x \quad (2.5)$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t) \quad (2.6)$$

Für ein lineares System muss gelten, dass man die Abhängigkeit der Systemantwort im Bezug auf  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  und  $x$  immer mittels einer Proportionalität ausdrücken kann.

## 2.2 Steifigkeit

Die Steifigkeit  $k$  eines Systems beschreibt dessen Widerstand gegen Verformung. Für einen auf Zug beanspruchten Balken ergibt sich mit der mechanischen Spannung  $\sigma$ , dem Elastizitätsmodul  $E$ , dem belasteten Querschnitt  $A$  und der Dehnung  $\varepsilon$  über das Hooksche Gesetz der Zusammenhang zwischen Kraft und Dehnung wie in Gleichung 2.9 dargestellt.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.7)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.8)$$

$$F = E \cdot A \cdot \varepsilon \quad (2.9)$$

Hier zeigt sich, dass die Kraft  $F$  über einen Faktor  $EA$  proportional mit der Dehnung verbunden ist. Hieraus folgend lässt sich die Dehnsteifigkeit mittels des belasteten Querschnittes aus dem linear-elastischen Bereich des Graphen eines Spannungs-Dehnungs-Diagrammes (vgl. Abb. 2.3) herleiten.

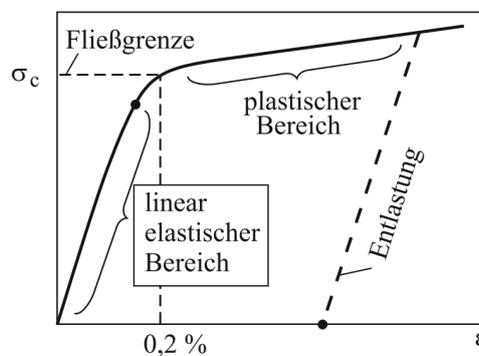


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Diagramm [2]

In einem linearen System handelt es sich hierbei um eine Gerade. Da das Produkt  $EA$  in ähnlicher Form auch bei anderen Verformungen vorkommt, wird es als Steifigkeit bezeichnet. Es setzt sich immer aus einem Materialterm und einem geometrischen Term zusammen. Im Falle des Zugstabes bilden das Elastizitätsmodul  $E$  und der Querschnitt  $A$  die Dehnsteifigkeit  $[N]$ . Betrachtet man einen Biegebalken, bildet sich der Zusammenhang zwischen Krümmung  $w''(x)$  und anliegendem Biegemoment  $M_b$  [6] mit

$$M_b = E \cdot I_{yy} \cdot w''(x) \quad (2.10)$$

Die Biegesteifigkeit  $[Nm^2]$  ist das Produkt des Elastizitätsmoduls  $E$  und des Flächenträgheitsmoments gegen Biegung  $I_{yy}$ .

Für ein ähnliches Vorgehen ergibt sich die Torsionssteifigkeit  $[Nm^2]$  mit der Verwindung am Balkenende  $\vartheta_t$  und dem Torsionsmoment  $M_t$  bei einem mit Torsion beaufschlagten Balken der Länge  $l$  [6] zu

$$\vartheta_l = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (2.11)$$

als Produkt des Schubmoduls  $G$  und des Flächenträgheitsmoments gegen Torsion  $I_t$  und die Schubsteifigkeit  $[N]$  mit Schubverzerrung  $\gamma$  und Querkraft  $Q$  zu einem Produkt aus Schubmodul und Querschnitt [6].

$$Q = G \cdot A \cdot \gamma \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

Zur experimentellen Analyse eines Systems, welches sich auf einen Ein-Massen-Schwinger im niederfrequenten Bereich zurückführen lässt, wird eine Ersatzfedersteifigkeit bestimmt. Diese wird, im Gegensatz zur Dehnsteifigkeit, nicht auf die Dehnung, sondern über das Federgesetz

$$F = k \cdot \Delta l \quad (2.14)$$

auf eine spezifische Länge, beispielsweise die Längung  $\Delta l$  bezogen. Aus diesem Grund ändern sich bei dieser Betrachtung die Einheiten der Steifigkeiten zu  $[\frac{N}{m}]$  bei translatorischen Verformungen. Für ein wie in Abschnitt 6.2 beschriebenes System stellt sich die Steifigkeit bei rotatorischer Anregung mit dem Moment  $M_b$  und dem erzeugten Winkel  $\alpha$  über den in Gleichung 2.15 beschriebenen Zusammenhang mit der Einheit  $[\frac{Nm}{rad}]$  dar.

$$\frac{M_b}{\alpha} = k \quad (2.15)$$

## 2.3 Dämpfung

Betrachtet man ein reales schwingendes System, so gibt es zusätzlich zur Steifigkeit eine grundlegende Systemeigenschaft. Diese als Dämpfung bezeichneten Effekte beschreiben die dissipative Umwandlung von Energie. Während durch ideale Steifigkeit und Massenträgheit eine rein reversible Energieumwandlung zwischen potentieller und kinetischer Energie stattfindet, sorgt die Dämpfung für den irreversiblen Energieverlust des Systems. Meist sind hierfür Reibungseffekte verantwortlich, welche mit einer Umwandlung der potentiellen und

kinetischen Energie in Wärme einhergehen. Reibung kann entweder zwischen Körpern oder den Molekülen eines Körpers stattfinden.

### Stokes-Reibung

Eine lineare Form der Reibung ist die Stokes-Reibung. Das Gesetz von Stokes erlaubt die Berechnung der Reibkraft  $F_R$ , welche ein sphärischer Körper mit dem Durchmesser  $r$ , der Relativgeschwindigkeit  $\nu$  und der Viskosität des Fluids  $\eta$ , bei der Umströmung durch ein Fluid erfährt [11].

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot \nu \quad (2.16)$$

Da sich die Reibkraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit verhält, kann eine hieraus resultierende Dämpfung als linear angesehen werden. Weitere, nichtlineare Dämpfungsarten werden in Kapitel 3.1.2 behandelt.

### Newton-Reibung

Eine weitere lineare Form der Reibung ist die Newton-Reibung. Sie tritt auf, wenn sich zwei durch eine Flüssigkeitsschicht voneinander getrennte Platten langsam (schleichende Strömung) gegeneinander bewegen (vgl. Abb. 2.4), so entsteht im Fluid Reibung [2]. Diese wird durch ein Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit und den sich deshalb gegeneinander verschiebenden laminaren Strömungsschichten erzeugt.

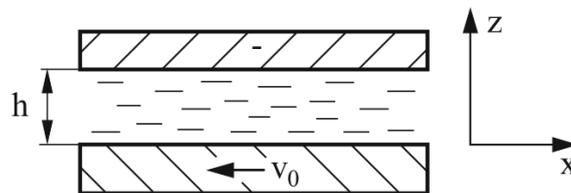


Abbildung 2.4: Strömung zwischen zwei parallelen Platten [2]

Die entstehende Reibkraft  $F_R$ , lässt sich bezogen auf die Position  $z$  im Querschnitt mit

$$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{d\nu}{dz} \quad (2.17)$$

als Abhängigkeit des Querschnitts  $A$ , der dynamischen Viskosität  $\eta$  und des Geschwindigkeitsverlaufs im Spalt  $\frac{dv}{dz}$  darstellen. Da die Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit und Kraft nur durch die Multiplikation konstante Terme entsteht, kann die Newton-Reibung ebenfalls als linear angesehen werden.

## 3 Nichtlineare schwingende Systeme

Betrachtet man die in Kapitel 2 beschriebene Systemgleichung 2.6

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t)$$

so werden vereinfachende Annahmen vorausgesetzt, um eine analytische Lösung zu ermöglichen. In realen Systemen ist dieses oft nicht möglich. Darum können bei Betrachtung eines realen, nichtlinearen Systems die Systemparameter  $m$ ,  $d$  und  $k$  in Gleichung 2.6 nicht mehr als konstant angesehen werden, sondern müssen alle oder in Teilen als abhängig von  $x$  oder seinen Ableitungen angenommen werden. Während die Masse bei realen Festkörpersystemen meist als konstant angesehen werden kann, sind Dämpfung und Steifigkeit oft von der Geschwindigkeit beziehungsweise der Auslenkung abhängig (vgl. Abb. 3.1).

Somit entsteht Gleichung 3.1.

$$m(\ddot{x}) \cdot \ddot{x} + d(\dot{x}) \cdot \dot{x} + k(x) \cdot x = F(t) \tag{3.1}$$

Für diese ist eine einfache analytische Lösungsfindung meist nicht mehr möglich. Neben materialbezogenen und geometrischen Nichtlinearitäten treten auch nichtlineare Randbedingungen auf. Dabei kann es beispielsweise vorkommen, dass sich die Lagerung des Systems oder Kontakte im System durch Verformungen ändern. Hierbei spricht man auch von zustandsabhängiger Nichtlinearität [9].

### Harmonische Balance

Ein mögliches Hilfsmittel, um eine linearisierte analytische Lösung für ein System mit nichtlinearer Steifigkeit und Dämpfung zu finden, ist die harmonische Balance [5]. Wird ein nichtlineares System harmonisch angeregt, so kann bei bekanntem Steifigkeits- beziehungsweise Dämpfungsverlauf eine äquivalente Steifigkeit oder Dämpfung gefunden werden, welche von der maximalen Auslenkung abhängig sind. Hierzu wird die Annahme getroffen, dass die Systemantwort auch als hauptsächlich harmonisch anzunehmen ist. Mithilfe einer Fou-

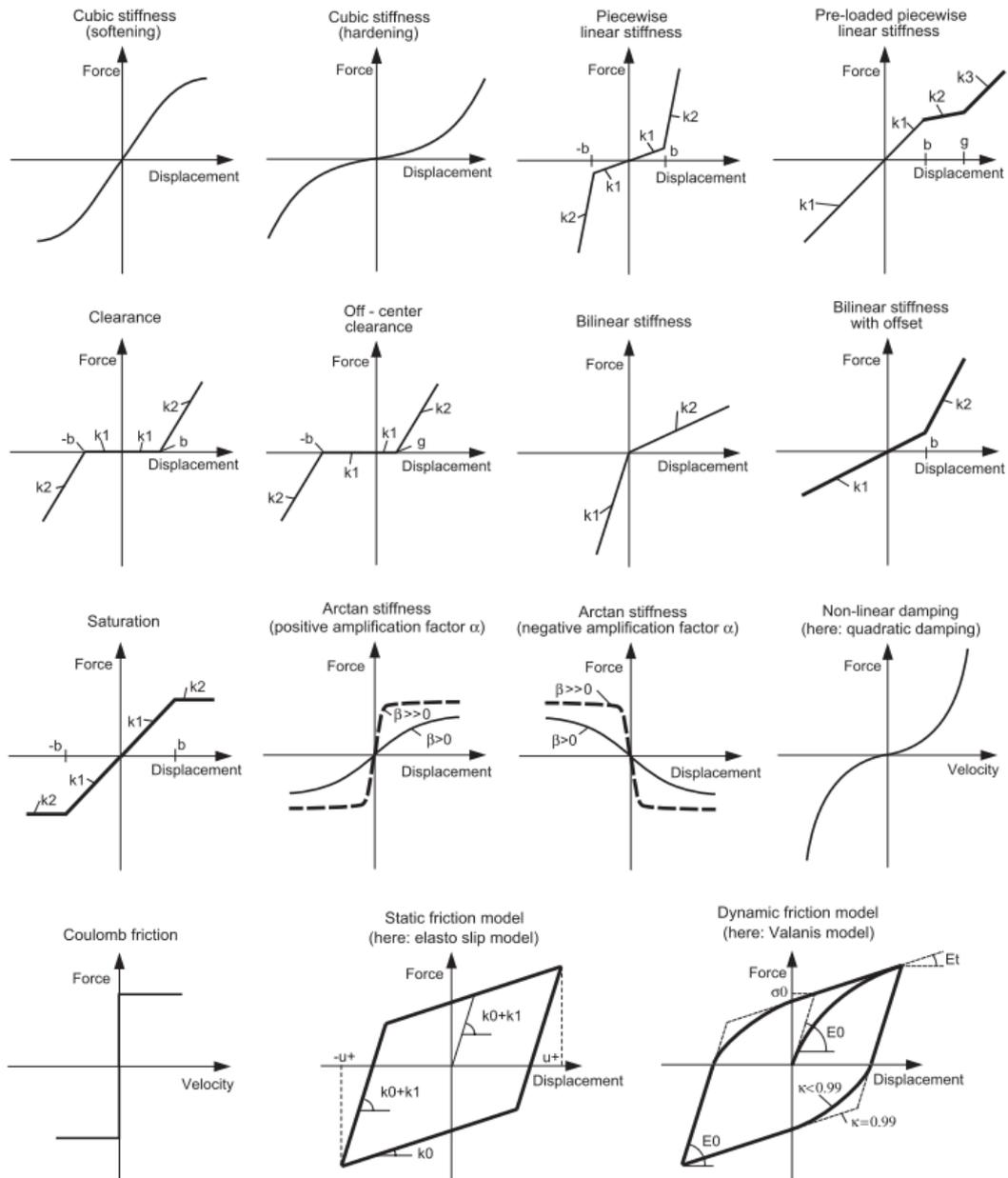


Abbildung 3.1: Beispielhafte Darstellung verschiedener Nichtlinearitäten [4]

rierzerlegung der Rückstell- und Dämpfungskraft, bei der die höher-harmonischen Anteile vernachlässigt werden und Symmetrie angenommen wird [5], lassen sich die äquivalente Steifigkeit und Dämpfung bestimmen. Kann die Kraft-Weg-Beziehung beispielsweise durch eine in Gleichung 3.2 dargestellte kubische Funktion mit den Faktoren  $k_{lin}$  als linearem und  $\gamma$  als nichtlinearem Anteil der Steifigkeit beschrieben werden, so lässt sich daraus eine äquivalente Steifigkeit  $k_{eq}$  bestimmen (vgl. Gleichung 3.3).

$$f_k = k(x + \gamma x^3) \quad (3.2)$$

$$k_{eq} = k_{lin} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\gamma \hat{x}^2\right) \quad (3.3)$$

Mittels dieser Ersatzsteifigkeit lässt sich das so linearisierte System bei harmonischer Anregung und vorher bestimmter maximaler Auslenkung wie ein lineares System behandeln. So kann beispielsweise eine äquivalente Eigenkreisfrequenz gebildet werden (vgl. Gleichung 3.4), welche nur von der maximalen, nicht aber von der aktuellen Auslenkung abhängig ist.

$$\omega_{eq} = \sqrt{\frac{k_{eq}(\hat{x})}{m}} \quad (3.4)$$

## 3.1 Material-Nichtlinearität

Als Material-Nichtlinearität bezeichnet man nichtlineares Verhalten, welches sich direkt aus dem verwendeten Material eines Körpers und seinem inneren Verhalten ergibt.

### 3.1.1 Nichtlineare Steifigkeit

Kann der Zusammenhang von Kraft zu Auslenkung nicht als proportionale Verknüpfung angesehen werden, so handelt es sich um eine nichtlineare Steifigkeit. Während im linearen System die Steifigkeit  $k$  in einem Punkt als Quotient aus Kraft  $F_{x1}$  und Auslenkung  $x_1$  in diesem Punkt angesehen werden kann (vgl. Gleichung ??).

$$k = \frac{F_{x1}}{x_1} \quad (3.5)$$

Im nichtlinearen System gilt dieser Zusammenhang nicht mehr. Vielmehr wird die Steifigkeit hier als der Gradient der Kraft-Weg-Kurve definiert. Somit ergibt sich die Steifigkeit  $k(x)$  als der in Gleichung 3.6 dargestellte Zusammenhang.

$$k(x) = \frac{\delta F(x)}{\delta x} \quad (3.6)$$

### Nicht-Hooksche Dehnung

Nicht-Hooksche Dehnung kann aus einem nicht konstanten E-Modul des gedehnten Materials entstehen. Während sich im linearen Fall im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine Gerade einstellt, entsteht im nichtlinearen Fall eine anders geformte Kurve. Ein Beispiel hierfür ist die martensitische Phase einer Formgedächtnis-Legierung. In Abbildung 3.2 ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Form-Gedächtnis-Legierung zu sehen. Da Spannung  $\sigma$  und Kraft  $F$  (vgl. Gleichung 2.8), beziehungsweise Dehnung  $\varepsilon$  und Längenänderung  $x$  nur über konstante Faktoren (Querschnitt  $A$  und Länge  $l$ ) verknüpft sind, lässt sich hieraus der qualitative Verlauf der Kraft-Weg-Kurve ableiten.

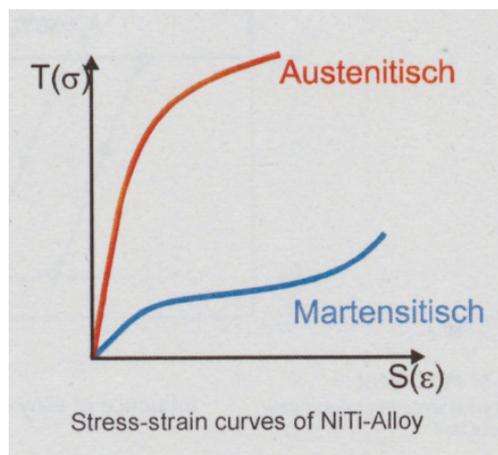


Abbildung 3.2: Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Formgedächtnis-Legierung in austenitischem und martensitischem Zustand [3]

### Dehnung über die Streckgrenze

Wird ein Material über seine Streckgrenze hinaus gedehnt, stellt sich im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ein stark nichtlinearer Zusammenhang dar. Dieser entsteht durch plastische, irreversible Verformung, welche den Ruhezustand des Systems dauerhaft verschiebt. (vgl. Abb. 3.3)

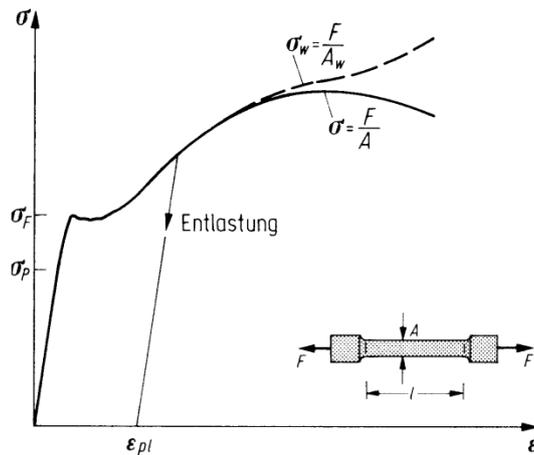


Abbildung 3.3: Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Zugstabes, bei Dehnung über die Streckgrenze  $\sigma_F$  hinaus [6]

### Zeitabhängige Steifigkeit

Bei viskoelastischen und gummiartigen Materialien kommt es vor, dass die Steifigkeit eines Körpers nicht nur nicht linear (vgl. Kap. 3.1.1), sondern auch zeitabhängig ist [2]. Betrachtet man ein viskoelastisches Polymer, so ist dieses aus Molekülketten aufgebaut, welche im entspannten Zustand zusammengezogen und verknotet sind (vgl. Abb. 3.4).

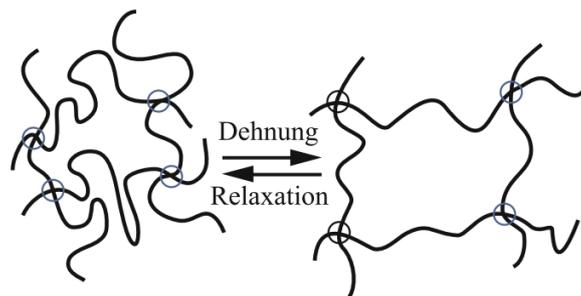


Abbildung 3.4: Strukturänderung eines Elastomers unter Spannung [2]

Wird das Material nun unter mechanische Spannung gebracht, so reagiert es zuerst als verhältnismäßig starre Struktur. Unter andauernder Belastung beginnen sich die Molekülketten jedoch zu entwirren und sorgen so für eine Relaxation und eine Abnahme der Spannung (vgl. Abb. 3.5).

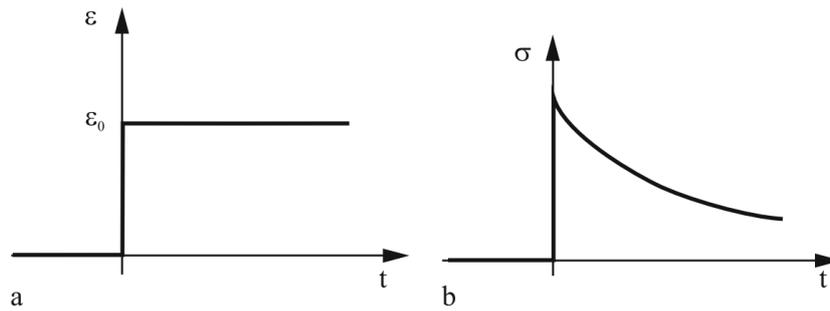


Abbildung 3.5: Relaxation eines Elastomers bei einer definierten Dehnung  $\varepsilon_0$  (a) und der sich einstellenden Spannung  $\sigma(t)$  (b) [2]

### 3.1.2 Nichtlineare Dämpfung

Im Gegensatz zur linearen Dämpfung (vgl. Kap. 2.3) gibt es auch nichtlineare Dämpfungsphänomene, beziehungsweise Reibphänomene ohne lineare Verknüpfung von Kraft und Geschwindigkeit.

#### Coulomb-Reibung

Werden zwei in Kontakt befindliche Körper parallel zu ihrer Kontaktfläche relativ zueinander bewegt, so entstehen durch mikroskopische Verzahnungen der Oberflächen Widerstandskräfte, welche der Bewegung entgegenwirken [2]. Die Reibkraft  $F_R$  lässt sich als Produkt aus der Normal- oder Anpresskraft  $F_N$  und dem Reibwert zwischen den Körpern  $\mu$  beschreiben.

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (3.7)$$

Die Coulombreibung ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Körper und dem zurückgelegten Weg. Deshalb sind aus ihr hervorgehende Dämpfungseffekte als nichtlinear zu betrachten.

#### Viskose-Reibung

Bei der viskosen, oder auch inneren Reibung handelt es sich um Reibung, welche im Inneren eines viskosen oder viskoelastischen Stoffes auftritt. Je größer die Viskosität eines Stoffes ist, desto stärker sind die Bindungskräfte (Kohäsion) zwischen den Molekülen. Diese führen zu einem Widerstand gegen die Geschwindigkeit der Verformung. Sie tritt besonders bei Flüssigkeiten und zähen viskoelastischen Materialien auf.

### 3.1.3 Temperaturabhängigkeit

Ein Beispiel hierfür sind Form-Gedächtnis-Legierungen. Sie bilden je nach Temperatur eine austenitische oder martensitische Gitterstruktur. Dieser physikalische Effekt wirkt sich stark auf die Festigkeit des Materials aus. Da sich die Steifigkeit aus Festigkeit und einem geometrischen Term zusammensetzt, ist auch sie davon beeinflusst (vgl. Abb. 3.2).

## 3.2 Geometrische Nichtlinearität

Unter geometrischer Nichtlinearität versteht man Effekte, welche auf Veränderungen der Geometrie und in deren Folge des Kraftflusses beruhen. Dazu zählen unter anderem:

### Spannungsversteifung

Unter Spannungsversteifungen versteht man das Auftreten von inneren Spannungszuständen zusätzlich zur Auslenkung [9]. Ein Beispiel hierfür ist ein beidseitig fest eingespannter Balken, welcher in der Mitte ausgelenkt wird. Neben der Verschiebung der Mitte des Balkens findet auch eine Längung statt. Durch diese wird die innere Spannung des Balkens erhöht, welches seinen Widerstand gegen Verformung steigert.

### Große Auslenkung

Wird ein Bauteil bei einer nicht konservativen Verformung stark ausgelenkt, so besteht die Möglichkeit, dass angreifende Kräfte ihre Richtung ändern und die Kraftkomponenten parallel der Bauteilverformung kleiner werden, obwohl die Kraft konstant bleibt. (vgl. Abb. 3.6)

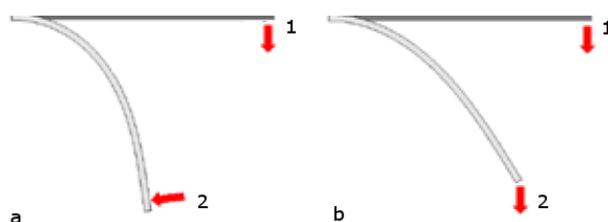


Abbildung 3.6: Vergleich des nicht-konservativen (a) und konservativen (b) Krafteingriffes bei einer großen Verformung. 1 Anfang und 2 Ende der Krafteinleitung [7]

## Knicken

Wird ein Stab in Normalenrichtung mit einer Druckkraft beaufschlagt, so wird er bei Überschreiten einer kritischen Kraft knicken. Bei diesem Vorgang ändern sich die Lage und Steifigkeit gegen die Verformung plötzlich. (vgl. Abb. 3.7)

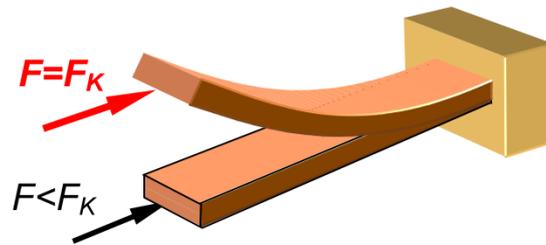


Abbildung 3.7: Knicken eines Balkens bei Belastung oberhalb der kritischen Kraft  $F_k$  [8]

## Große Dehnung

Treten große Dehnungen auf, muss die Veränderung des Querschnitts und gegebenenfalls andere geometrische Körpercharakteristik berücksichtigt werden. Wird der Körper stark verformt, wird sich aufgrund des verkleinerten Querschnittes  $A$  bei konstanter Kraft  $F$  mit

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.8)$$

die Spannung  $\sigma$  im Körper erhöhen.

## 4 Charakterisierung erwarteter Nichtlinearitäten

Bei der Untersuchung von ein- und beidseitig eingespannten Sandwich-Verbund-Balken (vgl. Kap. 5) auf Biegung, Durchbiegung und Torsion werden verschiedene Nichtlinearitäten erwartet. Deren Auswirkungen auf die Systemparameter Steifigkeit und Dämpfung, kann man je nach Effekt bei statischen und/oder dynamischen Untersuchungen bestimmen.

### 4.1 Statische Bestimmung

Um das System statisch zu untersuchen, wird mittels einer Sprungfunktion eine konstante Kraft auf den Probekörper aufgebracht. Durch die Messung der Auslenkung bei verschiedenen starken Kräften kann eine Steifigkeitskurve bestimmt werden (vgl. Abb. 4.1).

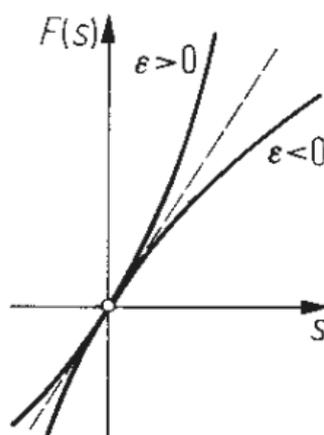


Abbildung 4.1: Vergleich linearer und nichtlinearer Federkennlinien bei Kraft  $F(s)$ , Auslenkung  $s$  und nichtlinearem Steifigkeitsanteil  $\varepsilon$  [10]

Handelt es sich um ein lineares System, so kann der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung mit einer Gerade ausgedrückt werden (vgl. Kap. 2). Im nichtlinearen System

kann diese Kurve verschiedene Formen annehmen (vgl. Kap. 3.1.1). Eine nichtlineare Federkennlinie kann durch Material-Nichtlinearitäten wie nicht-hooksche Dämpfung (vgl. Kap. 3.1.1), durch geometrische Nichtlinearitäten wie beispielsweise durch große Dehnung (vgl. Kap. 3.2) und bei beidseitig eingespannten Körpern durch Spannungsversteifung (vgl. Kap. 3.2) entstehen. Irreversible Verformungen (vgl. Kap. 3.1.1) sollten bei einem im Normalbetrieb arbeitenden System, das entsprechend ausgelegt ist, nicht vorkommen. Im Vergleich der verschiedenen Probekörper können mögliche Rückschlüsse auf die Stärke der einzelnen Nichtlinearitäten gezogen werden.

## 4.2 Dynamische Bestimmung

Zur dynamischen Untersuchung wird das System mit einem Gleitsinus zu Schwingungen angeregt. Aus der entstehenden Resonanzkurve lässt sich das Systemverhalten beurteilen. Während das lineare System eine eindeutige Antwort ausgibt kann es beim nichtlinearen System zu instabilen Zuständen kommen. So sieht man bei der in Abbildung 4.2 dargestellten Resonanzkurve, dass die Punkte R und P jeweils nur aus einer Richtung erreicht werden können.

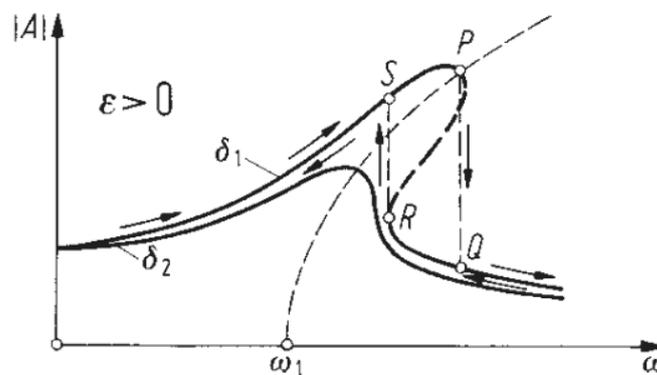


Abbildung 4.2: Resonanzdiagramm eines nichtlinearen Systems mit der Verstärkung  $|A|$ , der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Dämpfung  $\delta$  [10]

Nähert man sich beispielsweise dem Punkt P von einer höheren Frequenz, so wird das System aus dem Zustand in Punkt R in den im Punkt S herrschenden Zustand springen und den zwischen liegenden Teil der Kurve überspringen. Anhand der Neigung der Kurve kann auf die Stärke der Nichtlinearität geschlossen werden. Während bei der Kurve eines linearen Systems das Maximum senkrecht über der Eigenkreisfrequenz steht, ist es im nichtlinearen Fall seitlich verschoben. Handelt es sich um eine progressive Steifigkeit, so ist die Kurve wie

---

in Abbildung 4.2 nach rechts gekippt. Im Gegensatz dazu kippt sie bei einer degressiven Steifigkeit nach links, da eine geringere Steifigkeit eine kleinere Eigenkreisfrequenz zur Folge hat.

## 5 Verwendete Probekörper

Bei den untersuchten Proben handelt es sich um Metallblattfedern in verschiedenen Formen und Ausführungen. Sie unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Materialschichten, ihrer Form und damit einhergehend in der Anzahl ihrer Einspannungspunkte sowie im Vorhandensein von Piezopatches (vgl. Tab. 5.1).

### Verwendete Materialien

Für die Fertigung der Probekörper kamen zwei Materialien zum Einsatz. Neben VA-Federstahl (Werkstoff Nr. 1.4310) kam als verbindende Dämpfungsschicht doppelseitiges Klebeband mit Zellwoll-Gewebe-Träger und Hotmelt Kleber 9191 von 3M zum Einsatz. Dieses verband die geforderte Klebefähigkeit mit sehr guten Dämpfungseigenschaften (vgl. [12]). Da es sich hierbei um einen viskoelastischen Werkstoff handelt, sind gegebenenfalls auftretende zeitabhängige Steifigkeiten (vgl. Kap. 3.1.1) zu beachten.

### Aufbau der Probekörper

Die Proben sind monolithisch oder in Schichten aufgebaut (vgl. Abb. 5.1). Im monolithischen Fall handelt es sich um verschieden starke reine Stahlkörper. Im Gegensatz dazu bestehen die Schichtkörper aus zwei Stahlblechen und einer sie verbindenden, dämpfenden Klebeschicht.

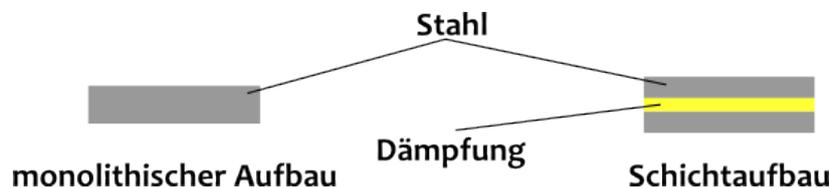


Abbildung 5.1: Schematischer Aufbau der Proben

Zusätzlich dazu sind auf die monolithischen Proben je nach geometrischer Ausführung ein oder vier Piezopatches Typennummer P-876.A15 von PI Ceramics aufgebracht, welche zur Anregung der Körper verwendet werden können.

## 5.1 Geometrie der Probekörper

Die Geometrie der Probekörper lässt sich zusätzlich zum Schichtaufbau in zwei Gruppen unterteilen. Bei einer Gruppe von Körpern handelt es sich um einseitig eingespannte Balken, bei der zweiten Gruppe um kreuzförmige Körper.

### Einseitig eingespannter Balken

Die einseitig eingespannten Balken haben Außenmaße von 250 mm x 35 mm. Im eingespannten Zustand werden hiervon 200 mm Länge belastet. Sie bestehen aus Vollmaterial und haben lediglich sechs paarweise angeordnete Löcher zur Befestigung von Anregung beziehungsweise Sensoren (vgl. Abb. 5.2).

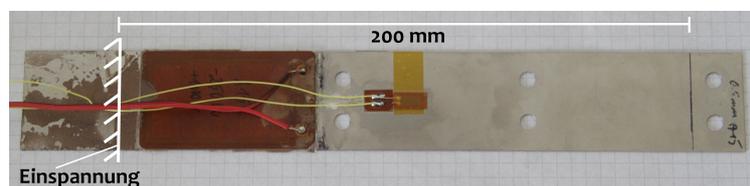


Abbildung 5.2: Probekörper mit Balkenform und Piezo-Patch

### Kreuzförmiger Probekörper

Die kreuzförmigen Probekörper bestehen aus zugeschnittenen Stahlblechen, welche eine Armbreite von 35 mm und eine Armlänge vom Mittelpunkt von 240 mm aufweisen. Davon sind 232 mm nach Einspannung belastet. Zusätzlich befinden sich vier Löcher in der Mitte des Körpers, an welcher die Kraftanregung angeschlossen werden kann (vgl. Abb. 5.3).

## 5.2 Liste der Probekörper

Die in Tabelle 5.1 dargestellte Übersicht der untersuchten Probekörper listet sie anhand ihrer unterscheidenden Merkmale auf. Neben geometrischen Form handelt es sich dabei um die Anzahl der Lagen, die Stärke der metallischen Deckschichten - beziehungsweise des Monolithen - und das Vorhandensein eines Piezo-Patch-Aktuators.

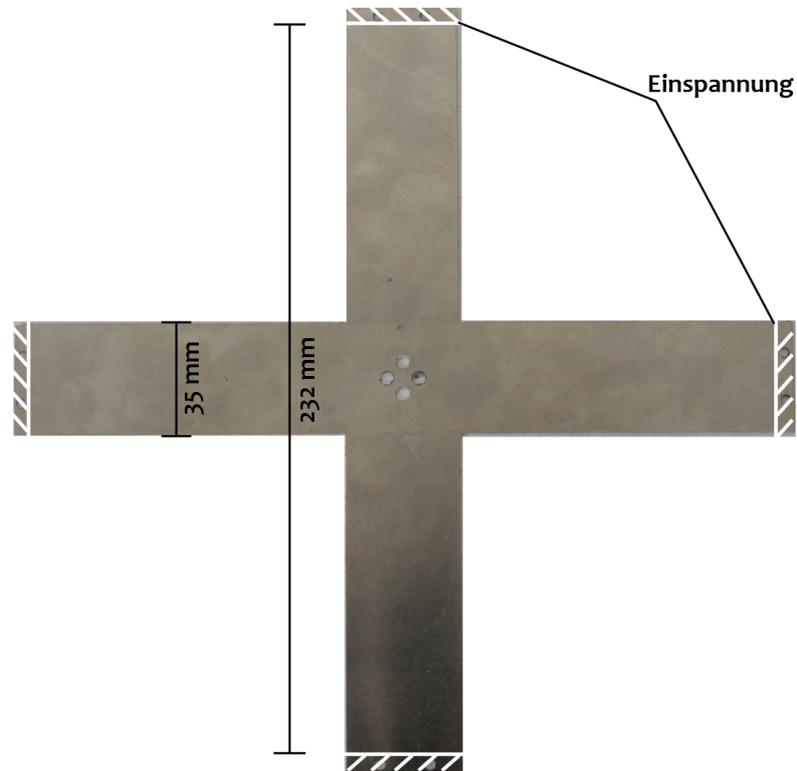


Abbildung 5.3: Probekörper mit Kreuzform ohne Piezo-Patch

Tabelle 5.1: Übersicht über die untersuchten Probekörper

Probekörper	Lagen	Stärke (Deckschichten) [mm]	Piezopatches [ja/nein]
Einseitiger Balken	1	0,5	ja
Einseitiger Balken	3	0,1	nein
Kreuzförmiger Körper	1	0,2	ja
Kreuzförmiger Körper	3	0,1	nein

## 6 Versuchsstand

Zur Vermessung der Probekörper wurde ein von Dipl. Ing. B. Kletz entwickelter Messstand verwendet. Dieser befand sich zum Zeitpunkt der Untersuchungen im Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt am Standort Braunschweig. Er besteht aus einer Anzegevorrichtung zur Fußpunktanregung, und einer Vorrichtung zur Kraftanregung. Zwischen diese beiden wird der Probekörper montiert, um eine Untersuchung zu ermöglichen. Die Fußpunktanregung erfolgt durch lineare Verschiebung der Bodenplatte entlang der  $x$ -Achse, beziehungsweise durch ihre Rotation um  $y$ - oder  $z$ -Achse (vgl. Abb. 6.1). Die Bewegungen der Bodenplatte werden mithilfe von drei Lasersensoren vom Typ M7L/2 von der Firma MEL Mikroelektronik GmbH aufgezeichnet. Sie sind als gleichschenkliges Dreieck angeordnet. Während ein Sensor die Verschiebung des Mittelpunktes der Bodenplatte misst, sind die anderen beiden auf die  $y$ - beziehungsweise  $z$ -Achse ausgerichtet, um die rotatorischen Bewegungen aufzuzeichnen. Die Kraftanregung erfolgt über vier kreuzförmig angeordnete Tauchspulenaktoren vom Typ VM38, welche über Kraftsensoren mit dem jeweiligen Probekörper verbunden sind. Es handelt sich dabei um steifigkeitslose Shaker.

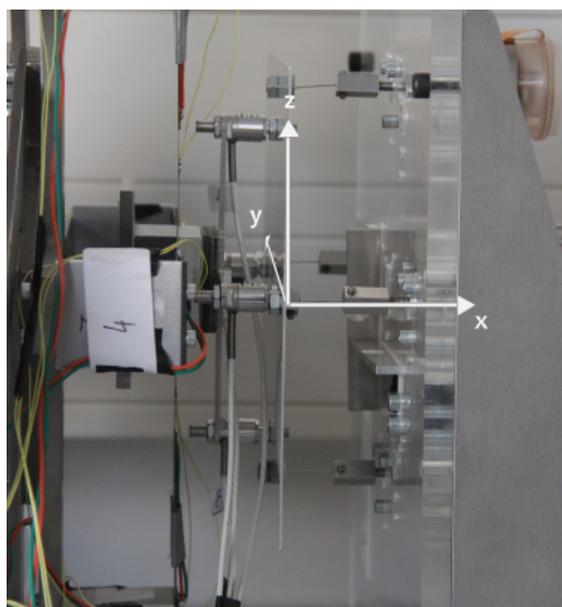


Abbildung 6.1: Koordinatensystem des Versuchsstandes

## 6.1 Biegebalken

Die Biegebalken wurden in einen an der Bodenplatte befestigten Block eingespannt. Am anderen Balkenende wurde ein Kraftsensor KD24s (vgl. Abs. 6.3) befestigt, welcher mit einem anregenden Shaker verbunden wurde. Die belastete Länge der eingespannten Balken beträgt 200 mm. Die Messung der Auslenkung erfolgt mit einem Abstand von 180 mm zur Einspannung auf der Mittelachse des Balkens (vgl. Abb. 6.2) mittels eines Lasertriangulators. Da sich die Untersuchungen auf den statischen Fall und die dynamische Untersuchung der ersten Eigenfrequenz konzentrieren, kann die Berechnung der Auslenkung an der Balkenspitze über die Biegelinie eines Biegebalkens erfolgen. Dies ist möglich, da nur statische Effekte, beziehungsweise solche in der ersten Eigenfrequenz betrachtet werden. Würden höherfrequente Untersuchungen durchgeführt, so muss jeweils ein, auf den höheren Eigenformen des Balkens beruhender Korrekturfaktor, für jede Eigenfrequenz bestimmt werden. Vor Durchführung der Messungen wurden die Korrekturfaktoren der Kraftsensoren bestimmt und in den Messgeräten eingestellt (vgl. Kap. 6.3).

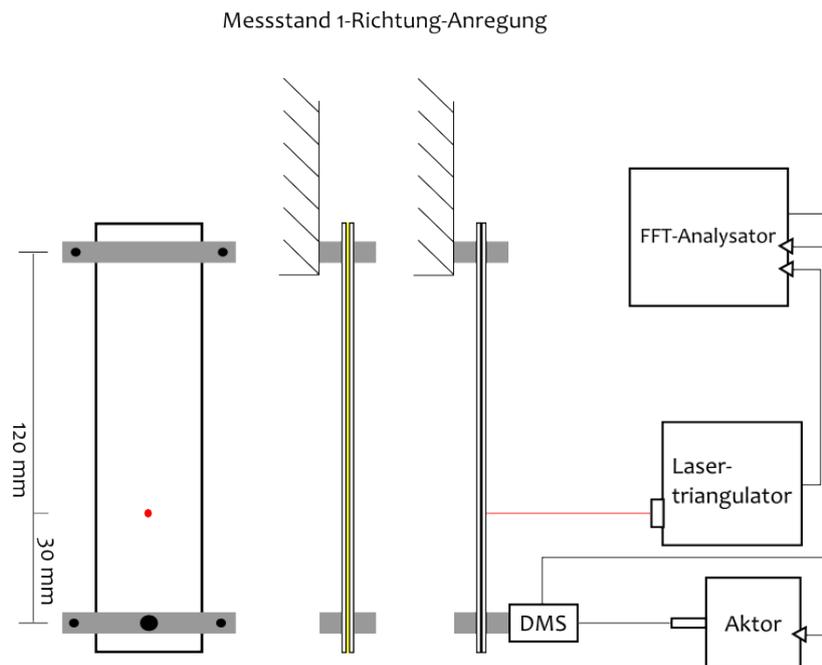


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung des Messaufbaus für Biegebalken

Wird der Piezo-Patch aktiviert, so biegt sich der Balken aufgrund der einseitigen Krafteinleitung. Zieht sich der auf der Oberseite aufgeklebte Patch in  $d_{31}$ -Richtung zusammen, so wird sich die Balkenspitze nach oben bewegen.

## 6.2 Kreuzförmige Probekörper

Die kreuzförmigen Probekörper wurden mit der Bodenplatte verbunden (vgl. Abb. 6.3). In der Mitte des Körpers wurde eine Aufnahme für vier Kraftsensoren des Typs XFTC-300 (vgl. Abs. 6.3) befestigt. Diese haben im Gegensatz zum Sensor KD24s eine deutlich höhere Steifigkeit. Dies verringert ihren Einfluss im tieffrequenten Bereich. Aufgrund ihrer geringen Belastungsgrenze gegen Querkräfte sind sie allerdings nicht für den Einsatz am Biegebalken geeignet. An den dem Körper abgewandten Seiten der Sensoren wurde ein rechteckiges Aluminiumblech mit Muttern fixiert, mit welchem die Kraft erzeugenden Shaker über Adapter verbunden wurden.

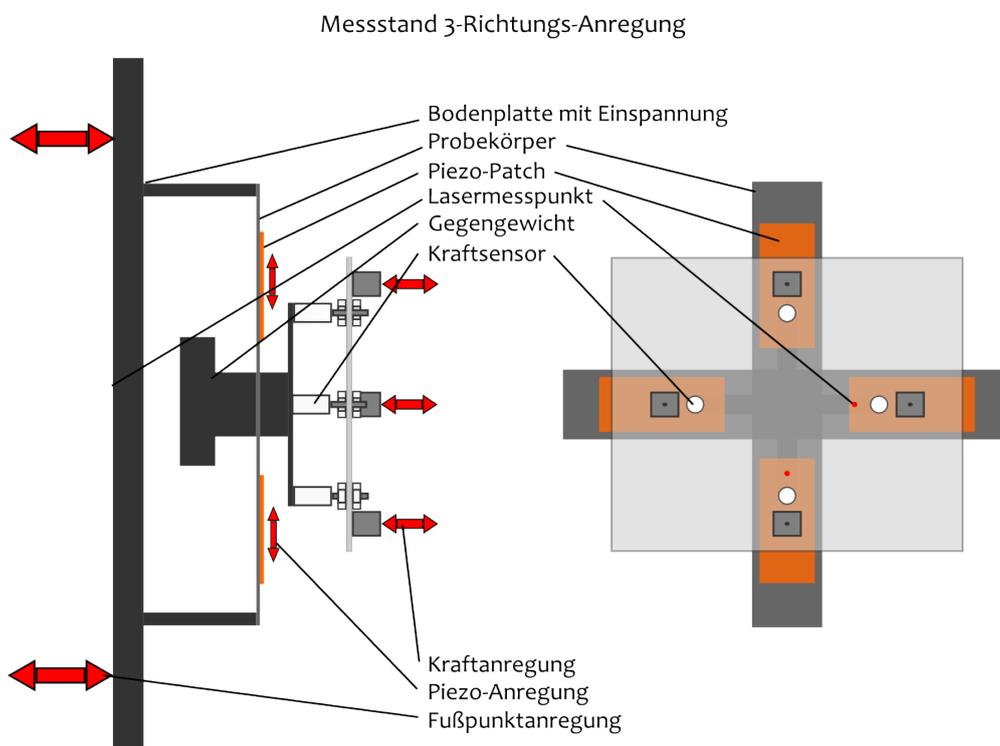


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung des Messaufbaus für kreuzförmige Probekörper

Hierdurch konnte durch gleichgerichtetes Anregen der Aktoren eine lineare Krafteinwirkung in Richtung der x-Achse erzeugt werden. Werden die gegenüberliegenden Aktoren allerdings gegenläufig, beziehungsweise mit einer Phasendifferenz von  $180^\circ$  betrieben, so wird ein rotatorisches Moment um die y- oder z-Achse erzeugt. Die Kraftsensoren befinden sich hierbei 55 mm vom Mittelpunkt entfernt. Mit diesem Wert und der gemessene Kraft lässt sich das erzeugte Moment berechnen. Da bei rotatorischer Anregung eventuelle Effekte durch eine translatorischen Verschiebung herausgerechnet werden müssen, wurde die Auslenkung auf der y- und z-Achse mit Lasersensoren des Typs M7L/10 bestimmt (vgl. Abb. 6.3). Da bei

einer rotatorischen Anregung um eine der beiden Achsen immer nur der Sensor, welcher nicht auf der Rotationsachse misst, eine Auslenkung aufnehmen sollte, ist davon auszugehen, dass eine Bewegung in der Messung des anderen Sensors aus einer überlagernden translatorischen Auslenkung resultiert. Deshalb wurde aus der Differenz der beiden Sensorsignale die bereinigte Auslenkung  $x$  ermittelt, welche mit dem Abstand des Messpunktes zum Mittelpunkt  $a$  über den Zusammenhang in Gleichung 6.1 den Drehwinkel  $\alpha$  ergibt.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (6.1)$$

Bei Piezo-Anregung wird die Auslenkung des Systems durch das Zusammenziehen der Piezo-Patches auf dem Probekörper erreicht. Bei diesem Vorgang biegt sich der Arm des Probekörpers aufgrund einer asymmetrischen Kraftaufbringung. Werden die Gegenüberliegenden Patches gleichförmig angeregt, so vollführt der Körper eine translatorische Bewegung orthogonal zur Ebene der Patches. Findet eine gegenläufige Aktivierung statt, so wird der Körper in eine rotatorische Bewegung um die Mittelachse zwischen den Patches gebracht.

### 6.3 Sensoren

In Tabelle 6.1 sind die bei den Versuchen verwendeten Sensoren mit ihren technischen Daten angegeben. Die Messung der Bewegung der Bodenplatte geschah mithilfe der Lasertriangulatoren vom Typ M7L/2. Die Auslenkung der Probekörper wurde hingegen mit Sensoren vom Typ M7L/10 bestimmt.

Tabelle 6.1: Übersicht der verwendeten Sensoren

Sensor	Messbereich	Messgröße [EU]	Umrechnung [ $\frac{V}{EU}$ ]
M7L/10	+ - 10 mm	Auslenkung x [mm]	0,5 [ $\frac{V}{mm}$ ]
M7L/2	+ - 2 mm	Auslenkung x [mm]	0,1 [ $\frac{V}{mm}$ ]
XFTC-300 Nr. 1	+ - 2 N	Kraft F [N]	0,116 [ $\frac{V}{N}$ ]
XFTC-300 Nr. 2	+ - 2 N	Kraft F [N]	0,104 [ $\frac{V}{N}$ ]
XFTC-300 Nr. 3	+ - 2 N	Kraft F [N]	0,139 [ $\frac{V}{N}$ ]
XFTC-300 Nr. 4	+ - 2 N	Kraft F [N]	0,108 [ $\frac{V}{N}$ ]
KD24s	+ - 2 N	Kraft F [N]	0,49 [ $\frac{V}{N}$ ]

## 7 Durchführung

Zur Bestimmung der Linearität der Systeme wurden mehr als eintausend Messungen ausgewertet. So wurden neben der Steifigkeitskennlinie der Probekörper in einer beziehungsweise drei Belastungsrichtungen auch der Einfluss der Amplitude auf Dämpfung und Eigenfrequenz bestimmt. Des Weiteren wurde untersucht, inwieweit sich diese bei einer Veränderung der mittleren Auslenkungen ändern. Jede Untersuchung wurde für zehn Amplituden durchgeführt. Des Weiteren wurde jede Messung fünfmal wiederholt. Anschließend wurden aus den ermittelten Messwerten Mittelwert und Standardabweichung bestimmt. Abhängig von der Anregungsrichtung und der Art der Messung wurden unterschiedliche Signale aufgenommen (vgl. Kap. 8). Von einer Untersuchung des Systems hinsichtlich etwaiger Temperatureinflüsse wird an dieser Stelle Abstand genommen, da es sich an diesem Punkt in der Entwicklung noch nicht um die endgültig verwendeten Materialien handelt, etwaige Effekte jedoch nur auf die Materialien zurückzuführen wären.

### Messung bei Sprunganregung

Bei der Messung bei Sprunganregung wird die Steifigkeit bestimmt. Des Weiteren wurden aus den hierbei gewonnenen Ergebnissen die Dämpfung und Eigenfrequenz des ausschwingenden Systems bestimmt (vgl. Kap. 8). Der Probekörper wurde durch eine in definierten Schritten gesteigerte Spannung am Shaker mit einer Kraft beaufschlagt, welche eine Auslenkung aus seiner Ruhelage zur Folge hatte. Anschließend wurde die Spannung auf 0 V gesetzt, und der Körper bewegte sich in seine Ruhelage zurück.

Mittels der Sensoren wurde hierbei der Zeitverlauf aufgezeichnet. Bei den Biegebalken wurde die aufgebrachte Kraft und die Auslenkung der Balkenspitze ermittelt, bei den kreuzförmigen Probekörpern die Auslenkung der Adapterplatte auf der y- und der z-Achse und die übertragenden Kräfte der drei Kraftsensoren<sup>1</sup>. In Abbildung 7.1 ist ein beispielhaftes Messergebnis grafisch dargestellt.

Für die Intervalle vor (1), während (3) und nach (2) der Auslenkung wurden die jeweiligen Mittelwerte  $x_1$ ,  $x_3$  und  $x_2$  gebildet. Die Mittelwerte der Intervalle 1 und 2 wurden addiert

---

<sup>1</sup>Da während der Versuche ein Sensor einen Defekt hatte, wurden nur die Daten von drei Sensoren ausgewertet. Die Werte des vierten Sensors konnten jedoch durch die Messwerte der anderen drei Sensoren näherungsweise bestimmt werden



gemeiner Ausschwingvorgang beispielhaft dargestellt. Die einhüllende Funktion  $Ce^{-\delta t}$  zeigt die Abnahme der Amplitude über die Zeit, bei  $T_d$  handelt es sich um die gedämpfte Periodendauer und bei  $C$  und  $\alpha$  um die Randbedingungen. Bei der Analyse der Ausschwingvorgänge wird die Amplitude bei zwei aufeinander folgenden Maxima gemessen und mittels des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$ , wie in den Gleichungen 7.1 und 7.2 gezeigt [11], in das Lehrsche Dämpfungsmaß  $D$  überführt. Über die gedämpfte Periodendauer ergibt sich aus Gleichung 7.3 die gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$ .

$$\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \quad (7.1)$$

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad (7.2)$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (7.3)$$

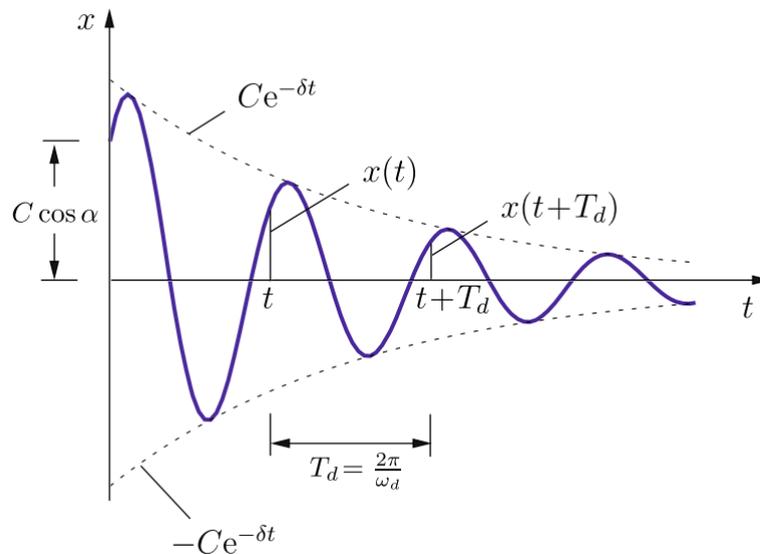


Abbildung 7.2: Ausschwingkurve eines schwingenden Systems [11]

Im Gegensatz zur Messung bei breitbandiger Anregung lässt sich hieraus keine quantitative Größe ermitteln, da sich Eigenfrequenz und Dämpfung aufgrund der schwankenden Amplitude während des Ausschwingvorgangs ändern. Jedoch kann man für verschiedene Sprunghöhen qualitative Vergleiche anstellen. So war es auch möglich, den Einfluss der mittleren Auslenkung zu untersuchen. Während beim Ein- und Ausschaltvorgang die Amplitude, also die Sprunghöhe, gleich ist, so ist die mittlere Auslenkung mit  $x_{12}$  beziehungsweise  $x_3$

unterschiedlich. Des Weiteren ist hierbei zu beachten, dass sich eine nichtlineare Dämpfung über den in Gleichung 7.4 dargestellten Zusammenhang auf die gemessene, nicht aber auf die nur über Steifigkeit und Masse berechnete Eigenfrequenz auswirkt.

$$\omega_d(x) = \omega_0(x) \cdot \sqrt{1 - D(x)^2} \quad (7.4)$$

Während eine konstante Dämpfung die nichtlineare Eigenfrequenz nur um einen konstanten Faktor reduziert, ändert sich dieser bei nichtlinearer Dämpfung mit wechselnder Amplitude.

### Messung bei breitbandiger Anregung

Die Messung bei breitbandiger Anregung wurde durchgeführt, um die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude zu untersuchen. Hierfür wurden die Probekörper mit einem Gleitsinus mit konstanter Amplitude mit aufsteigender Frequenz im Bereich von 0 bis 40 Hz angeregt. Diese Messung wurde für jeweils zehn verschiedene Amplituden durchgeführt. Die Sensoren nahmen dabei jeweils ein Signal der Anregung und ein Signal der entstehenden Bewegung auf (vgl. Kap. 8). Aus den gemessenen Größen wurde eine Übertragungsfunktion zwischen Eingang und Ausgang gebildet und mittels einer FFT-Analyse auf ihre Frequenzanteile bezogen dargestellt (vgl. Abb. 7.3). Aus den so ermittelten Daten ließ sich die Eigenfrequenz des Systems bei der jeweiligen Amplitude bestimmen.

Dabei ist bei Fußpunkt- und Piezoanregung darauf zu achten, dass die Aktoren zur Kraftanregung nicht kurzgeschlossen sind. Ist dies nicht der Fall wird durch die Bewegung des Körpers in ihrem Inneren Strom induziert, welches zu einer deutlichen Erhöhung der Dämpfung des Gesamtsystems führt.

Neben der Bestimmung durch Ausschwingversuche lässt sich die Dämpfung eines Systems ebenfalls aus dem Spektrum ableiten. Hierfür wird die Halbwertsbreite  $\Delta\omega_H$  des Spektrums gebildet. Dies ist die Differenz der Grenzfrequenzen des Spektrums beim  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen seines Maximalwertes. Teilt man die Halbwertsbreite durch die Eigenkreisfrequenz, so erhält man das doppelte des Lehrschen Dämpfungsmaßes. Wiewohl man über dieses Vorgehen die Dämpfung bestimmen kann, wurde es hier nicht angewendet, da ein Großteil der erzeugten Spektren zu schlecht ausgeprägt waren, um eine gute Bestimmung der Dämpfung auf diesem Wege zu gewährleisten.

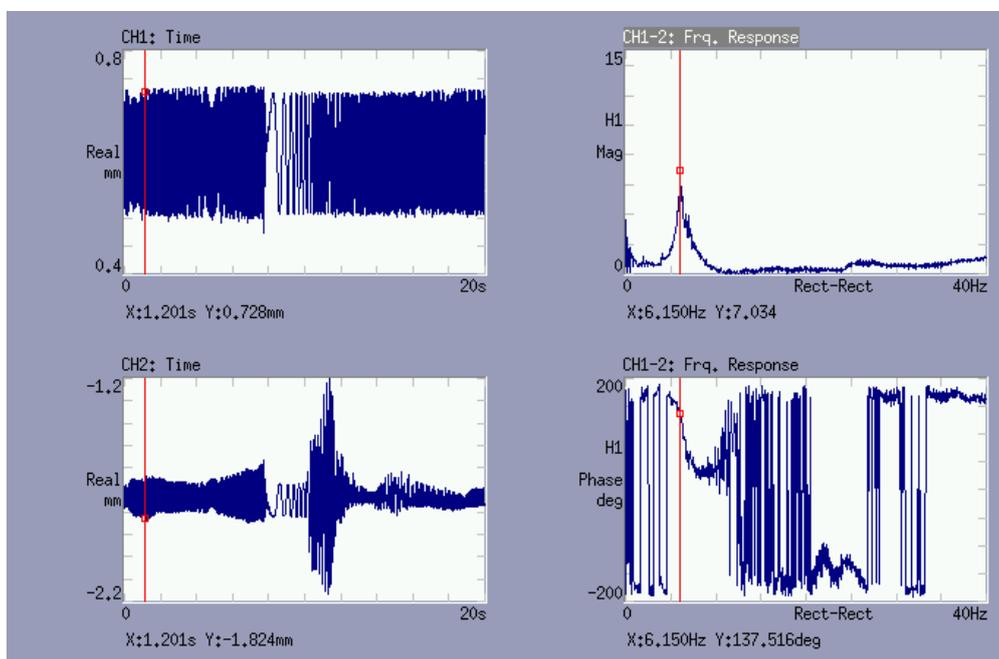


Abbildung 7.3: Grafische Ausgabe von Eingang, Spektrum, Ausgang und Phasendiagramm

## 8 Auswertung

Die Auswertung der Messergebnisse wurde auf Basis der Sprunganregung und der Messung bei breitbandiger Anregung durchgeführt. So wurden die Steifigkeit und lokal gemittelte Dämpfung und Eigenkreisfrequenz über die Sprunganregung bestimmt und die Eigenkreisfrequenz nochmals bei breitbandiger Anregung. Die Dämpfung konnte nicht auf Basis dieser Daten bestimmt werden, da die Spektren bei den meisten Messungen zu ungenau waren, um eine verlässliche, genaue Bestimmung zuzulassen. Aus diesem Grund konnte auch keine Neigung in den Spektren 4.2 festgestellt werden. Zwar zeigten sich in einigen Messungen asymmetrische Verläufe der Kurven, jedoch konnten sie nicht in der nötigen Breite analysiert werden.

### 8.1 Balken mit Piezo-Patch

Der erste untersuchte Probekörper war der einseitig eingespannte Biegebalken mit Piezo-Patches. Hierbei konnten fast alle relevanten Auswertungen Ergebnisse liefern. Lediglich Dämpfung und Eigenkreisfrequenz waren nach dem Einschaltvorgang, aufgrund von nicht-harmonischen Verhaltens, nicht zu bestimmen. Diese konnten somit nur für den Ausschwingvorgang nach dem Zurücksetzen der Spannung bestimmt werden. Für die einzelnen Anregungsarten wurden verschiedene Größen gemessen. So wurden für die Kraftanregung im statischen und im dynamischen Fall die Auslenkung der Balkenspitze und die Anregerkraft aufgezeichnet, bei der dynamischen Fußpunkterregung die Balkenauslenkung und die Bewegung der Bodenplatte und bei der dynamischen Piezo-Anregung aus Auslenkung und Spannung an den Piezo-Patches.

#### Messung bei Sprunganregung

Als relevante Größen für die Sprunganregung des Balkens mit Piezo-Patches sind die Auslenkung der Balkenspitze und die Übertragene Kraft zwischen Anregung und Balkenspitze gemessen worden (vgl. Kap. 6.1). Nach Bildung der Mittelwerte der verschiedenen Messschritte (vgl. Kap. 7) wurden diese mittels eines über die Balken-Biegelinie bestimmten Faktors (vgl. Kap. 6.1), in die Auslenkung der Balkenspitze überführt. Aus den so gewonne-

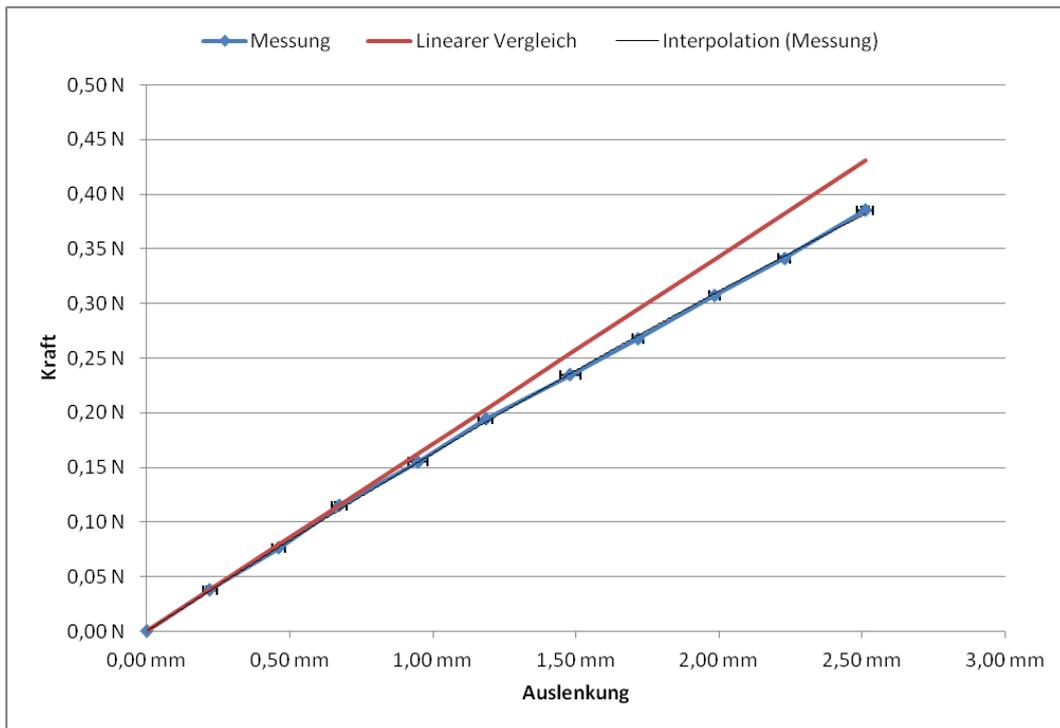


Abbildung 8.1: Kraft-Weg-Diagramm des Balkens mit Piezo-Patch

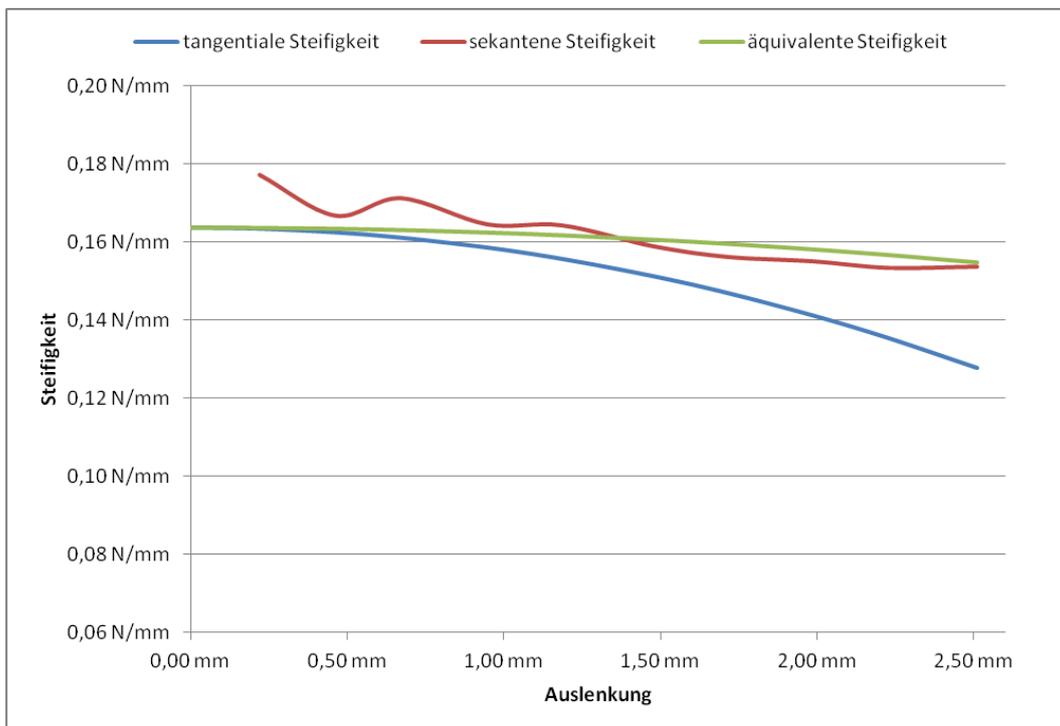


Abbildung 8.2: Steifigkeitsverlauf des Balkens mit Piezo-Patch

nen Werten lässt sich ein Kraft-Weg-Diagramm erstellen (vgl. Abb. 8.1). Dieses zeigt einen nichtlinearen Verlauf. Mit zunehmender Auslenkung nimmt die benötigte Kraft im Vergleich zum linearen Fall ab. Durch Interpolation lässt sich eine kubische Funktion

$$F_{int} = -0,0019 \cdot x^3 + 0,1637 \cdot x \quad (8.1)$$

finden, welche annähernd der gemessenen Kurve entspricht. Für die tangentielle Steifigkeit als lokaler Gradient dieser Kurve ergibt sich somit

$$\frac{\delta F_{int}}{\delta x} = k_{tan} = -0,0057 \cdot x^2 + 0,1637 \quad (8.2)$$

Mittels der harmonischen Balance (vgl. Kap. 3) ergibt sich aus Gleichung 8.1 eine, von dem Quadrat der maximalen Amplitude  $\hat{x}$  abhängige, äquivalente Steifigkeit von

$$k_{eq} = k_{lin} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\gamma\hat{x}^2\right)$$

mit  $k_{lin} = 0,1637 \frac{N}{mm}$  und  $\gamma = -0,0116$ .

Es zeigt sich, dass es sich um eine degressive Steifigkeit handelt (vgl. Abb. 8.2). Die Gründe hierfür sind mutmaßlich im Effekt der großen Auslenkung (vgl. Kap. 3.2) zu suchen. Des weiteren zeigen sich in Abbildung 8.2 Unterschiede zwischen den verschiedenen bestimmten Steifigkeiten. Während tangentielle und äquivalente Steifigkeit im Bereich geringer Auslenkungen nah beieinander sind, zeigt sich bei großen Auslenkungen eine deutliche Diskrepanz zwischen den beiden. Demgegenüber nähern sich die Sekanten- und äquivalente Steifigkeit in diesem Bereich an.

Die Bestimmung der Dämpfung, dargestellt in Abbildung 8.3 erfolgte über die Analyse der harmonischen Ausschwingversuche (vgl. Kap. 7). Es zeigt sich ein stark nichtlinearer Zusammenhang. Bei sehr geringen und hohen Auslenkungen ist das Dämpfungsmaß größer als bei mittlerer Auslenkung.

Betrachtet man die mithilfe der äquivalenten Steifigkeit berechnete Eigenkreisfrequenz (vgl. Abb. 8.4) so zeigt sich der, unter Annahme einer konstanten Masse, erwartete abnehmende Verlauf. Vergleicht man diesen mit der in den Ausschwingversuchen gemessenen Frequenz, so ist die Verringerung auch dort vorhanden, jedoch keine kontinuierliche Abnahme. Dies hängt einerseits mit der Mittlung der Messwerte in der Auswertung zusammen (vgl. Kap. 7). Andererseits zeigt sich beim Betrachten der Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung

(vgl. Abb. 8.3), dass diese sehr stark nichtlinear ist. Somit wird die Schwingung bei großen und kleinen Amplituden stärker gedämpft als bei mittleren. Da sich die Dämpfung direkt auf die gemessene Eigenkreisfrequenz auswirkt (vgl. Kap. 7) wird sich auch diese bei großen und kleinen Amplituden zusätzlich verringern.

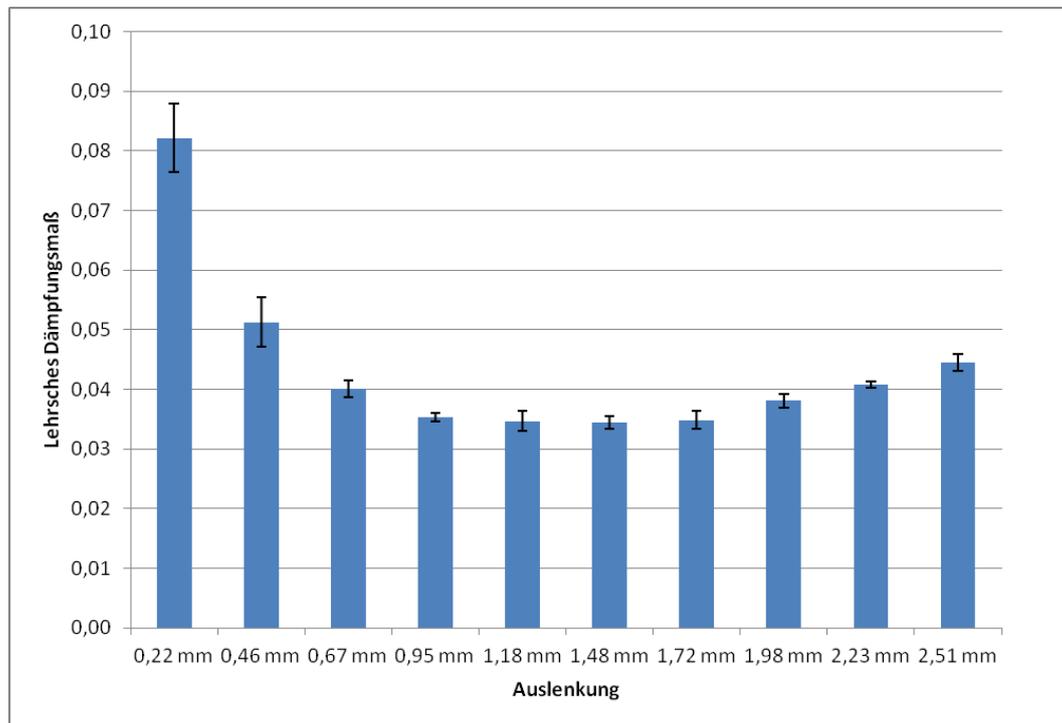


Abbildung 8.3: Dämpfungsverlauf des Balkens mit Piezo-Patch

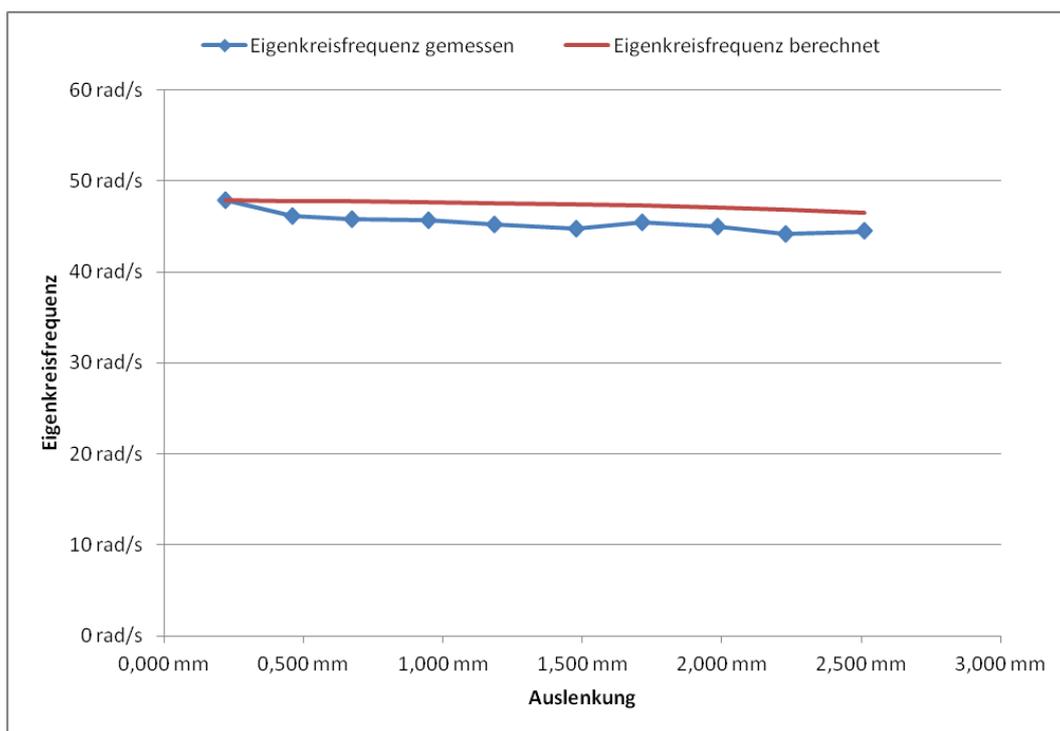


Abbildung 8.4: Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessener (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des Balkens mit Piezo-Patch

### Messung bei breitbandiger Anregung

Bei breitbandiger Anregung ließ sich für den Biegebalken mit Piezo-Patches für Kraft-, Fußpunkt- und Piezoanregung darstellen. Lediglich bei geringen Amplituden zeigte sich bei Piezoanregung (Messpunkt 2) und Fußpunktanregung (Messpunkte 1 - 5 ) kein eindeutiges Spektrum, so dass die Bestimmung der Eigenkreisfrequenz hier nicht möglich war. Die zur Erstellung der Abbildung 8.5 verwendeten Anregerwerte sind in Tabelle 8.1 aufgeführt. Bei Fußpunkt- und Piezoanregung handelt es sich hierbei um die Spannung die an den einzelnen Aktoren anliegt, bei der Kraftanregung um die pro Aktor aufgebrauchte Kraft.

Vergleicht man die mittels Gleitsinus ermittelten Eigenkreisfrequenzen für Kraft-, Fußpunkt- und Piezoanregung, so stellt man bei der Piezoanregung einen sehr starken Abfall der Frequenz im Bereich von geringer Anregungsamplitude fest. Während sich bei Kraftanregung im gesamten Spektrum und bei der Fußpunktanregung im höheren Amplitudenbereich nur eine leichte Nichtlinearität darstellt, halbiert sich die Eigenkreisfrequenz unter Piezoanregung innerhalb der ersten drei Anregungsschritte. Der erwartete leichte Abfall aller Kurven zu höheren Amplituden hin hängt mit der Degressivität der Steifigkeit zusammen.

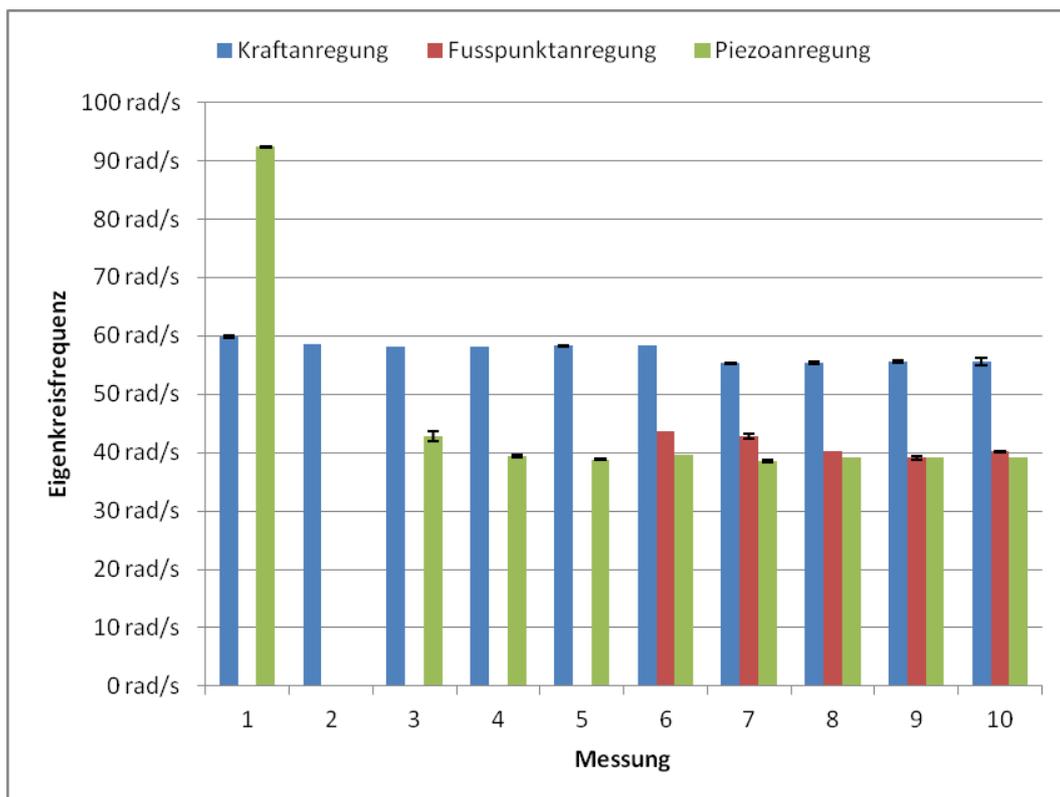


Abbildung 8.5: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Balkens mit Piezo-Patch bei dynamischer Anregung

Tabelle 8.1: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung des Balkens mit Piezo-Patch (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	1	0,0227 N	0,0284 N	0,0341 N	0,0398 N	0,0455 N
Fußpunkt	4	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
Piezo	1	0,075 V	0,15 V	0,225 V	0,3 V	0,375 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,0511 N	0,0568 N	0,0625 N	0,0682 N	0,0739 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8
Piezo		0,45 V	0,525 V	0,6 V	0,675 V	0,75 V

## 8.2 Balken gedämpft

Aufgrund der hohen Dämpfung des gedämpften Biegebalkens konnten nicht alle gesuchten Parameter bestimmt werden. So war eine Ermittlung der Dämpfung und Eigenkreisfrequenz im Ausschwingversuch nicht möglich. Für die einzelnen Anregungsarten wurden verschiedene Größen gemessen. Bei Kraftanregung im statischen und im dynamischen Fall die Auslenkung der Balkenspitze und die Anregerkraft und bei der dynamischen Fußpunkterregung die Balkenauslenkung und die Bewegung der Bodenplatte.

### Messung bei Sprunganregung

Nach Auswertung der Messdaten wie in Kapitel 7 beschrieben ergibt sich für den gedämpften Biegebalken das Kraft-Weg-Diagramm 8.6. Im Gegensatz zum Biegebalken mit Piezo-Patches wurden in diesem Fall Auslenkungen größer und kleiner Null untersucht, da aufgrund der geringen Steifigkeit und der großen minimalen Schrittweite des Aktors keine zehn Messwerte im positiven Bereich zu messen waren. Durch Interpolation des Graphen lässt sich die kubische Funktion aus Gleichung 8.3 zur Beschreibung des Verlaufs ableiten. Hieraus ergibt sich für die tangentielle Steifigkeit Gleichung 8.4 und für die äquivalente Steifigkeit mit  $k_{lin} = 0,0243 \frac{N}{mm}$  und  $\gamma = -0,0247$  Gleichung 8.5.

$$F_{int} = -0,0006 \cdot x^3 + 0,0243 \cdot x \quad (8.3)$$

$$k_{tan} = -0,0018 \cdot x^2 + 0,0243 \quad (8.4)$$

$$k_{eq} = 0,0243 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot 0,0247 \cdot \hat{x}^2\right) \quad (8.5)$$

Betrachtet man die in Abbildung 8.7 dargestellten verschiedenen Steifigkeiten des Systems, so stellt sich ähnlich wie beim Biegebalken mit Piezo-Patches ein zweigeteiltes Bild dar. Während sich die äquivalente Steifigkeit im Bereich niedriger Auslenkungen wie die tangentielle Steifigkeit verhält, nähern sie sich im Bereich großer Auslenkungen der Sekantensteifigkeit an. Die starke Änderung der Sekantensteifigkeit im Bereich von etwa  $0,6\text{mm}$  lässt sich mit dem vermutlichen Ausreißer bei gleicher Auslenkung im Kraft-Weg-Diagramm erklären.

Eine qualitative Bestimmung der Dämpfungseigenschaften war aufgrund der starken Dämpfung nicht möglich. Die Auswertung der Ausschwingvorgänge (vgl. Kap. 7) setzt eine harmonische Schwingung über mehr als eine Periode voraus. Da dies bei keiner Messung der Fall war, kann lediglich von einer starken Dämpfung ausgegangen werden. Allerdings ist von einem Dämpfungsmaß von unter  $0,7$  auszugehen. Bei dieser Dämpfung würde sich im Ausschwingen lediglich genau ein Überschwinger einstellen [11]. Da es jeweils zumindest auch noch eine Unterschwingung gab, ist von einem niedrigeren Dämpfungsmaß auszugehen. Ähnlich der Dämpfung ließ sich auch die Eigenkreisfrequenz nicht im Ausschwingversuch bestimmen. Jedoch konnte sie bei breitbandiger Anregung bestimmt werden.

### Messung bei breitbandiger Anregung

Aufgrund der sehr starken Dämpfungseigenschaften und der geringen Steifigkeit des gedämpften Balkens, war es nicht möglich, verwertbare Ergebnisse bei einer Fußpunktanregung mittels eines Gleitsinus' zu erzeugen. So wurde auch bei der maximalen Anregeramplitude keine Bewegung an der Balkenspitze aufgezeichnet.

Die Eigenkreisfrequenz bei Kraftanregung (vgl. Abb. 8.8) hat einen leicht wellenförmigen Verlauf. Ein Abfall bei höheren Frequenzen ist aufgrund der degressiven Steifigkeit des Systems zu erwarten. Das lokale Minimum bei niedrigeren Amplituden ist möglicherweise auf vermutete nichtlineare Dämpfungseffekte, ähnlich denen beim ungedämpften Balken, zurückzuführen.

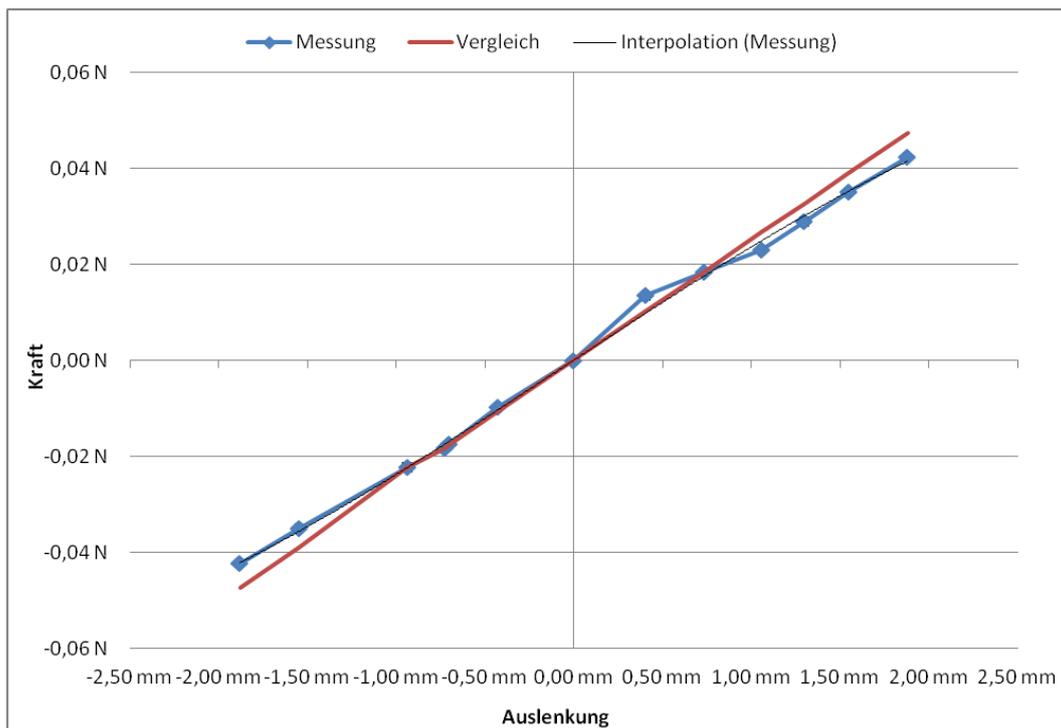


Abbildung 8.6: Kraft-Weg-Diagramm des gedämpften Balkens

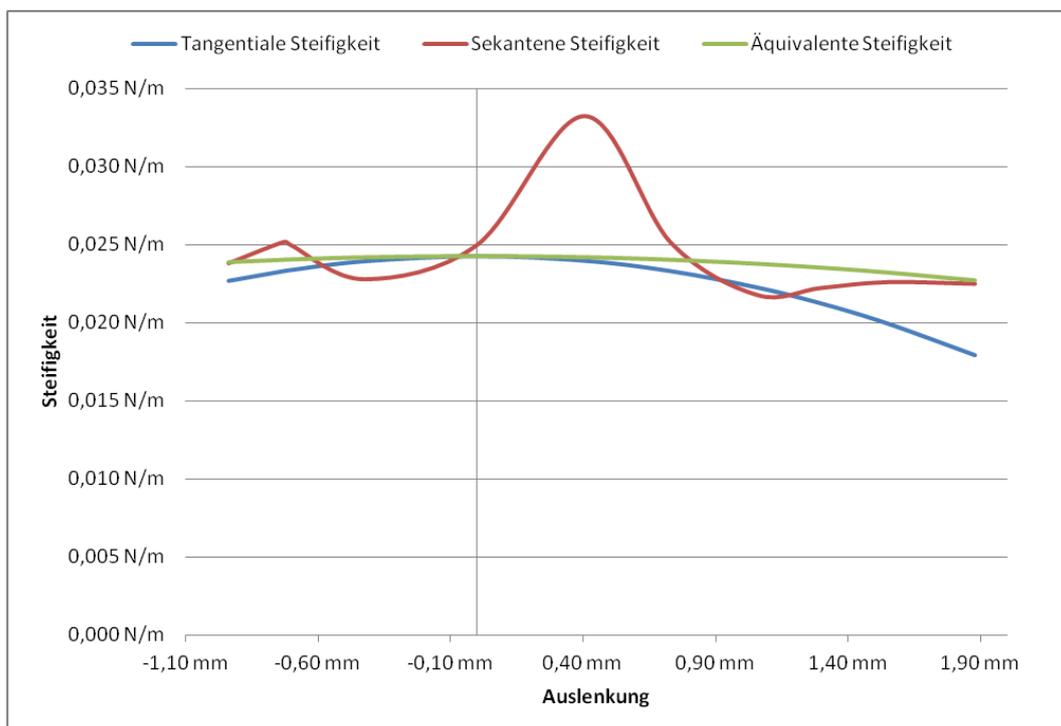


Abbildung 8.7: Steifigkeitsverlauf des gedämpften Balkens

Tabelle 8.2: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den gedämpften Balken (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	1	0,0227 N	0,0284 N	0,0341 N	0,0398 N	0,0455 N
Fußpunkt	4	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,0511 N	0,0568 N	0,0625 N	0,0682 N	0,0739 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8

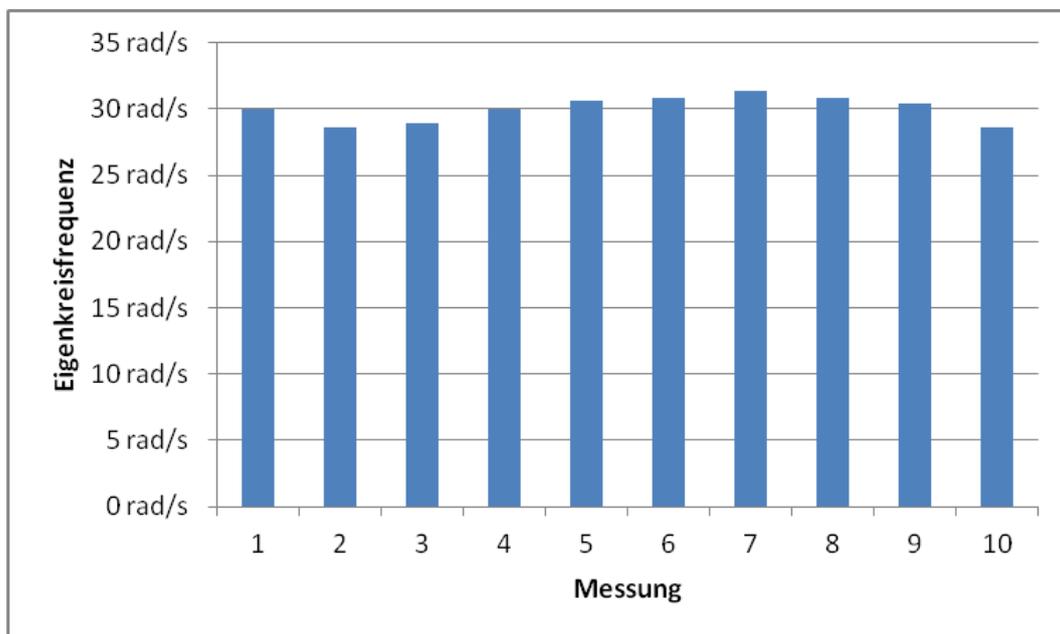


Abbildung 8.8: Gemessene Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Balkens bei dynamischer Kraftanregung

## 8.3 Kreuz mit Piezo-Patches

Der kreuzförmige Probekörper mit Piezo-Patches wurde in translatorischer, sowie in zwei rotatorischen Richtungen untersucht. Während im translatorischen Fall sowohl statische als auch dynamische Anregung gute Ergebnisse lieferten, war dies bei der rotatorischen Untersuchung nicht der Fall. Hier ließ die statische Messung lediglich bei Rotation um die z-Achse weiterführende Auswertung zu. Im dynamischen Fall hingegen konnten bei allen Anregungsrichtungen Erkenntnisse erlangt werden.

### 8.3.1 Translatorische Anregung

Bei der translatorischen Anregung des Probekörpers gab es lediglich bei einzelnen Messungen bei dynamische Anregung keine verwertbaren Ergebnisse. Für die jeweiligen Anregungsarten wurden verschiedene Größen gemessen. So wurden für die Kraftanregung im statischen und im dynamischen Fall die translatorische Auslenkung der Anregerplatte und die Anregerkraft aufgezeichnet. Bei der dynamischen Fußpunkterregung fand eine Messung der translatorische Auslenkung der Anregerplatte und der Bewegung der Bodenplatte und bei der dynamischen Piezo-Anregung von translatorische Auslenkung der Anregerplatte und Spannung an den Piezo-Patches statt.

#### Messung bei Sprunganregung

Nach Auswertung der Messdaten wie in Kapitel 7 beschrieben ergibt sich für das Kreuz mit Piezo-Patches bei translatorischer Anregung das Kraft-Weg-Diagramm 8.9. Durch Interpolation des Graphen lässt sich die kubische Funktion aus Gleichung 8.6 zur Beschreibung des Verlaufs ableiten. Hieraus ergibt sich für die tangentielle Steifigkeit Gleichung 8.7 und für die äquivalente Steifigkeit mit  $k_{lin} = 0,389 \frac{N}{mm}$  und  $\gamma = 0,0165$  Gleichung 8.8.

$$F_{int} = 0,00642 \cdot x^3 + 0,3896 \cdot x \quad (8.6)$$

$$k_{tan} = 0,01926 \cdot x^2 + 0,3896 \quad (8.7)$$

$$k_{eq} = 0,3896 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0,0165 \cdot \hat{x}^2\right) \quad (8.8)$$

Im Gegensatz zu den Biegebalken ist  $\gamma$  hier größer Null. Dies bedeutet, dass wie im Steifigkeitsverlauf (vgl. Abb. 8.10) zu erkennen, die Steifigkeit mit zunehmender Amplitude größer wird. Man spricht hierbei von einer progressiven Steifigkeit. Wie in den vorangegangenen Auswertungen, zeigt sich auch hier der zweiteilige Zusammenhang zwischen äquivalenter

Steifigkeit auf der einen und tangentialer, beziehungsweise Sekantensteifigkeit auf der anderen Seite.

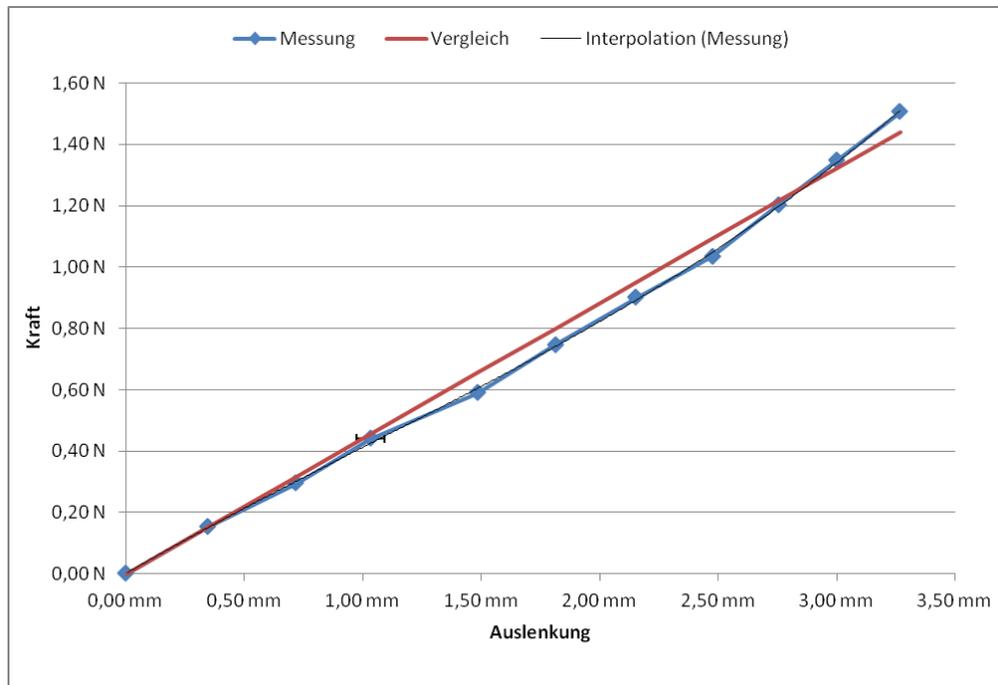


Abbildung 8.9: Kraft-Weg-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches

Betrachtet man den in Abbildung 8.11 dargestellten Verlauf der Dämpfung, so sieht man nicht nur eine Änderung mit der Größe der Auslenkung, sondern gleichzeitig auch eine Differenz bei unterschiedlicher mittlerer Auslenkung aber gleicher Amplitudengröße (vgl. Kap. 7).

Der Eindruck der progressiven Steifigkeit wird mit Blick auf die Eigenfrequenz (Abb. 8.12) bestätigt. Es zeigt sich, dass sie mit zunehmender Amplitude, also gleichzeitig zunehmender Steifigkeit, ansteigt. Des weiteren ist zu beobachten, dass sie ähnlich der Dämpfung bei gleicher Amplitude aber unterschiedlicher mittlerer Auslenkung abweicht. Dies ist so zu erwarten, da sich mit steigender mittlerer Auslenkung auch die mittlere Steifigkeit erhöht. Vergleicht man die gemessenen Eigenfrequenzen mit der aus der äquivalenten Steifigkeit berechneten, so zeigt sich, dass alle einen ähnlichen Verlauf haben. Jedoch ist die berechnete Frequenz deutlich näher an der gemessenen Frequenz nach dem Rücksprung. Dies ist nachvollziehbar, da bei der Bestimmung der äquivalenten Steifigkeit von einer Schwingung um die Nulllage ausgegangen wird. Bei einer Schwingung um ein Intervall, in dem die Nulllage nicht enthalten ist, muss die Formel entsprechend angepasst werden.

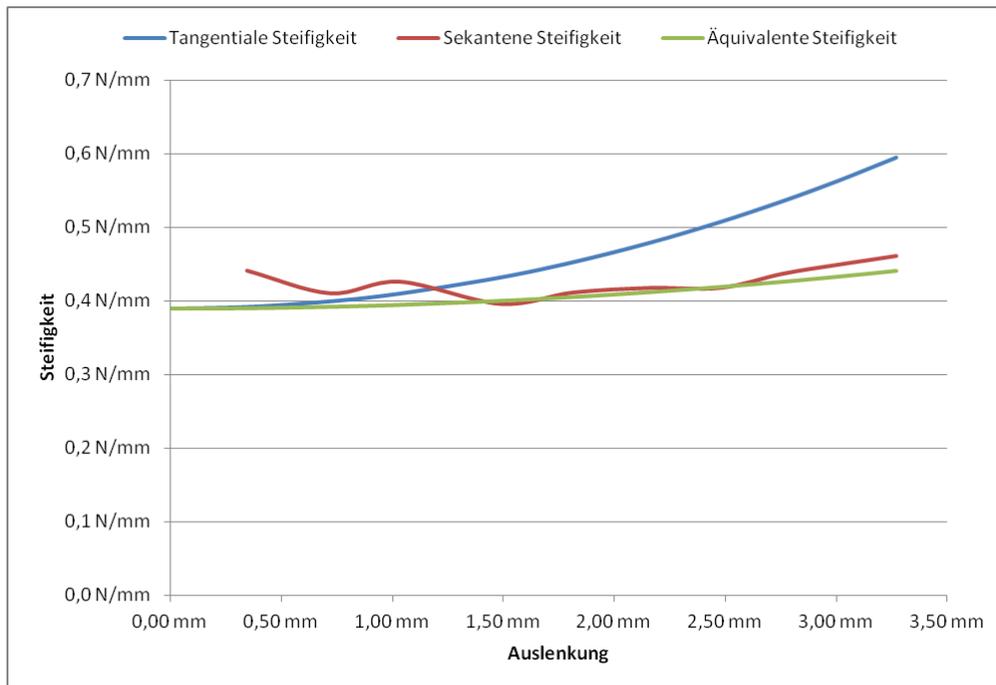


Abbildung 8.10: Steifigkeitsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches

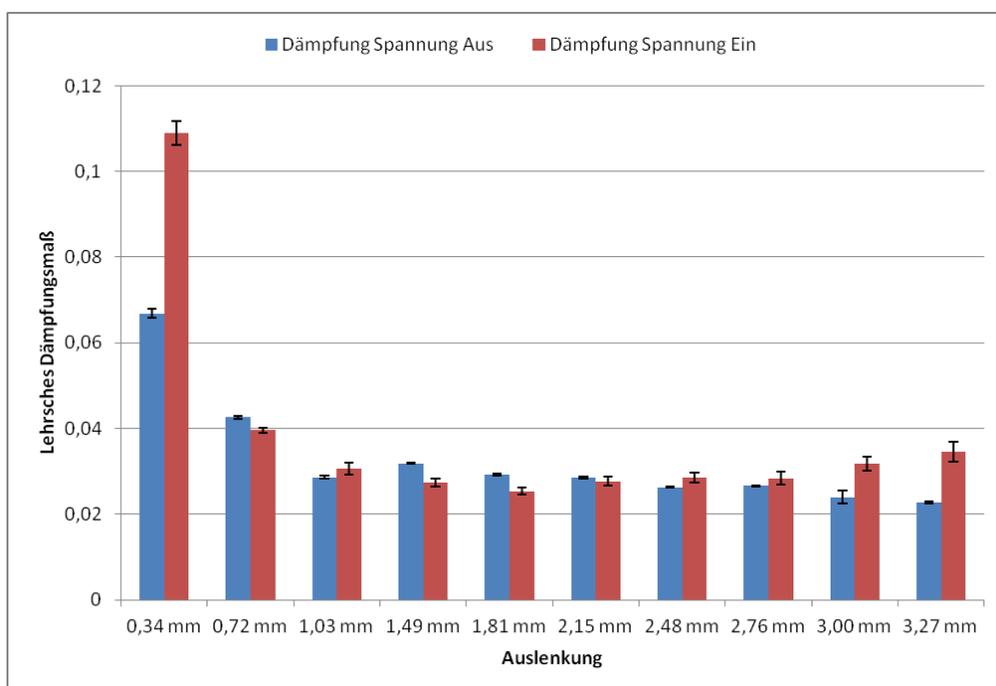


Abbildung 8.11: Dämpfungsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches

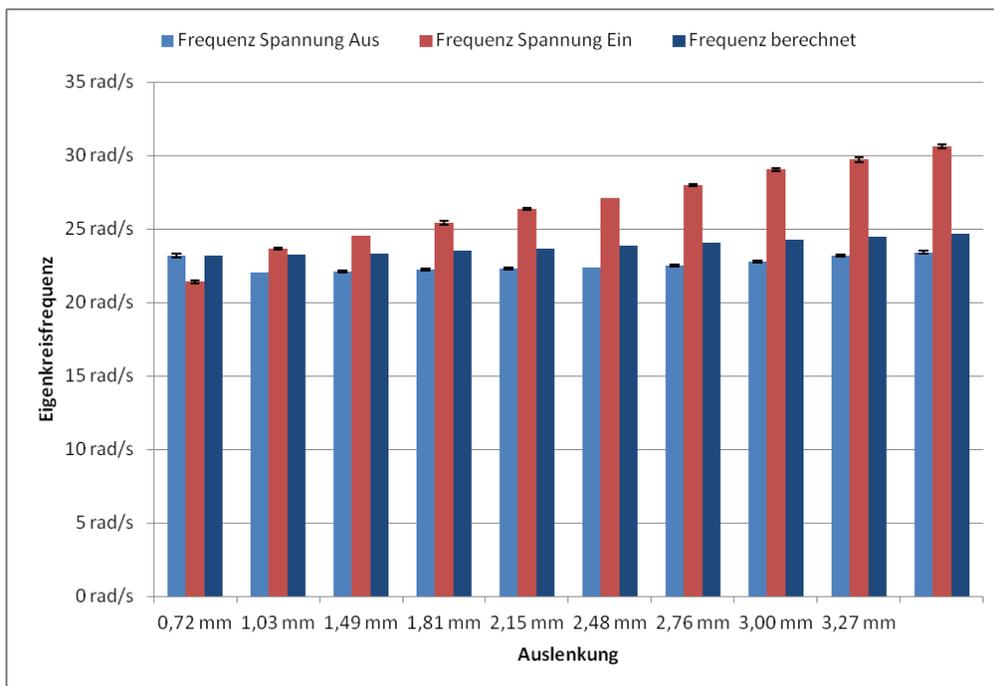


Abbildung 8.12: Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessenen (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des Kreuzes mit Piezo-Patches

### Messung bei breitbandiger Anregung

Auch bei der Untersuchung des kreuzförmigen ungedämpften Probekörpers zeigt sich ähnlich wie beim ungedämpften Biegebalken (vgl. Kap. 8.1) das Phänomen der stark erhöhten Eigenkreisfrequenz bei niedriger Amplitude. Die jeweils verwendeten Anregungen sind in Tabelle 8.3 aufgeführt. In diesem Fall tritt es jedoch bei der Anregung durch Piezo-Patches auf und nicht bei der Fusspunktanregung. Auch ist der Effekt noch einmal deutlich stärker ausgeprägt. Statt bei ca.  $50 \frac{rad}{s}$  liegt die Diskrepanz zwischen der ersten und dritten Messung hier bei über  $100 \frac{rad}{s}$ . Es besteht die Möglichkeit, dass es sich bei der gemessenen Frequenz um eine Oberfrequenz handelt, welche aufgrund der nicht messbaren Grundfrequenz einen verhältnismäßig hohen Einfluss besitzt. So lässt sich bei Messung 2 neben der angegebenen Eigenkreisfrequenz bei  $52 \frac{rad}{s}$ , ein ähnlich starkes Maximum im Spektrum für  $137 \frac{rad}{s}$  feststellen. Für die Messpunkte 8 - 10 bei Piezo-Anregung, sowie Messpunkt 10 bei Kraftanregung war eine Ermittlung der Eigenkreisfrequenzen aufgrund zu großer Amplituden und einer damit einhergehenden möglichen Beschädigung des Materials nicht möglich.

Tabelle 8.3: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den Balken mit Piezo-Patches bei translatorischer Anregung (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	2	0,017 N	0,0341 N	0,0511 N	0,0682 N	0,0852 N
Fußpunkt	4	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
Piezo	4	0,12 V	0,24 V	0,36 V	0,48 V	0,6 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,1023 N	0,1193 N	0,1364 N	0,1534 N	0,1705 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8
Piezo		0,72 V	0,84 V	0,96 V	1,08 V	1,2 V

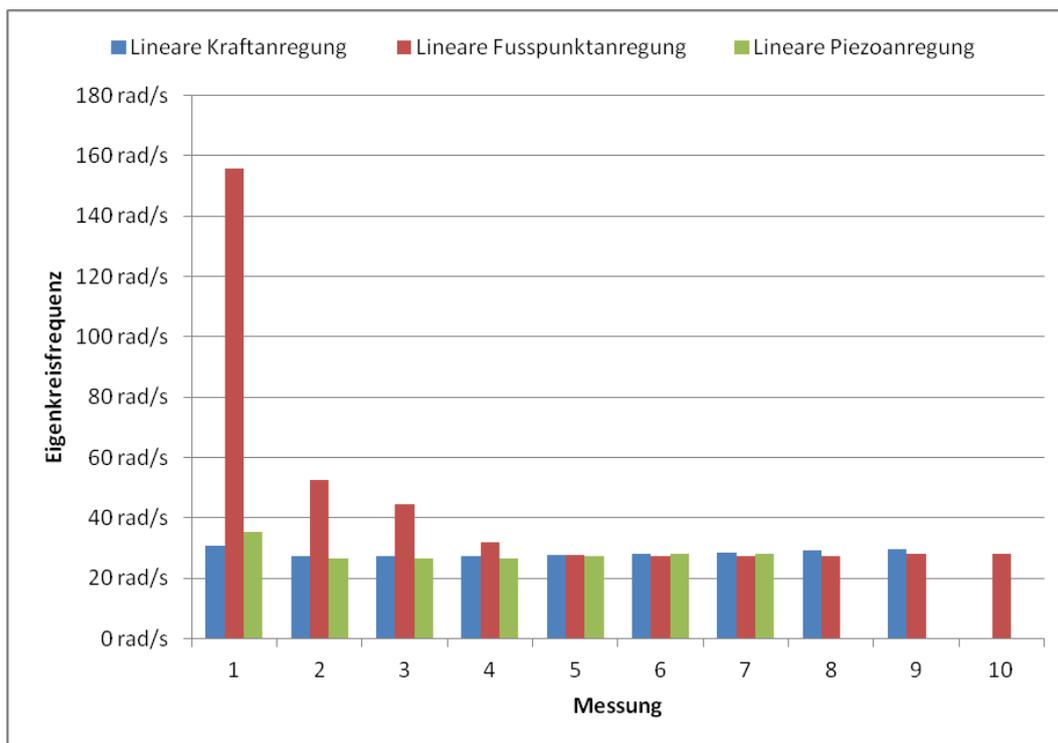


Abbildung 8.13: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei translatorischer dynamischer Anregung

### 8.3.2 Rotatorische Anregung

Bei rotatorischer Anregung des Systems ließ sich im statischen Fall lediglich eine Steifigkeit für die Rotation um die z-Achse ermitteln. Hierfür wurden der Drehwinkel und das angelegte Moment (vgl. Kap. 6.2) bestimmt. Im dynamischen Fall wurden bei Krafterregung Winkel und Moment, bei Fußpunkterregung die Winkel von Anregerplatte und Bodenplatte und bei Piezoanregung der Winkel der Anregerplatte sowie die Spannung an den Piezo-Aktoren aufgenommen. Es wurde wie beim gedämpften Biegebalken ein Amplitudenverlauf im negativen und positiven Bereich gewählt, um mögliche Symmetrie zu überprüfen.

#### Messung bei Sprunganregung

Die Messung bei rotatorischer Anregung gestaltete sich schwierig. Aufgrund von Instabilitäten des Systems, die auf die Überbestimmung der Einspannung zurückzuführen sind, war es nicht möglich eine aussagekräftige Kennlinie aufzunehmen. Lediglich im negativen Bereich der Rotation um die z-Achse (vgl. Abb. 8.14) lässt sich der Verlauf erahnen. Durch Interpolation des Graphen in diesem Bereich, lässt sich die kubische Funktion aus Gleichung 8.9 zur Beschreibung des Verlaufs ableiten. Hieraus ergibt sich für die tangentiale Steifigkeit Gleichung 8.10 und für die äquivalente Steifigkeit mit  $k_{lin} = 0,5,461 \frac{N}{mm}$  und  $\gamma = -0,0022$  Gleichung 8.11.

$$F_{int} = -0,0122 \cdot x^3 + 5,461 \cdot x \quad (8.9)$$

$$k_{tan} = -0,0366 \cdot x^2 + 5,461 \quad (8.10)$$

$$k_{eq} = 5,461 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot 0,0022 \cdot \hat{x}^2\right) \quad (8.11)$$

Vergleicht man die berechneten Steifigkeiten bei Rotation um die z-Achse (vgl. Abb. 8.15) so stellt sich der bekannte Zusammenhang zwischen tangentialer und äquivalenter Steifigkeit dar. Während sie im Nullpunkt den selben Wert erreichen, scheren die Graphen bei zunehmendem Betrag der Auslenkung auseinander.

Aus dem bei Rotation um die y-Achse erzeugten Moment-Winkel-Diagramm 8.16 ließen sich keine belastbaren Rückschlüsse auf die Steifigkeit des Systems ziehen.

Dämpfung und Eigenkreisfrequenz konnten bei beiden statischen Untersuchungen der rotatorischen Auslenkung nicht bestimmt werden. Die in den Ausschwingversuchen auftretenden Schwingungen waren stark nicht-harmonisch und ließen deshalb eine Analyse hinsichtlich der Parameter nicht zu.

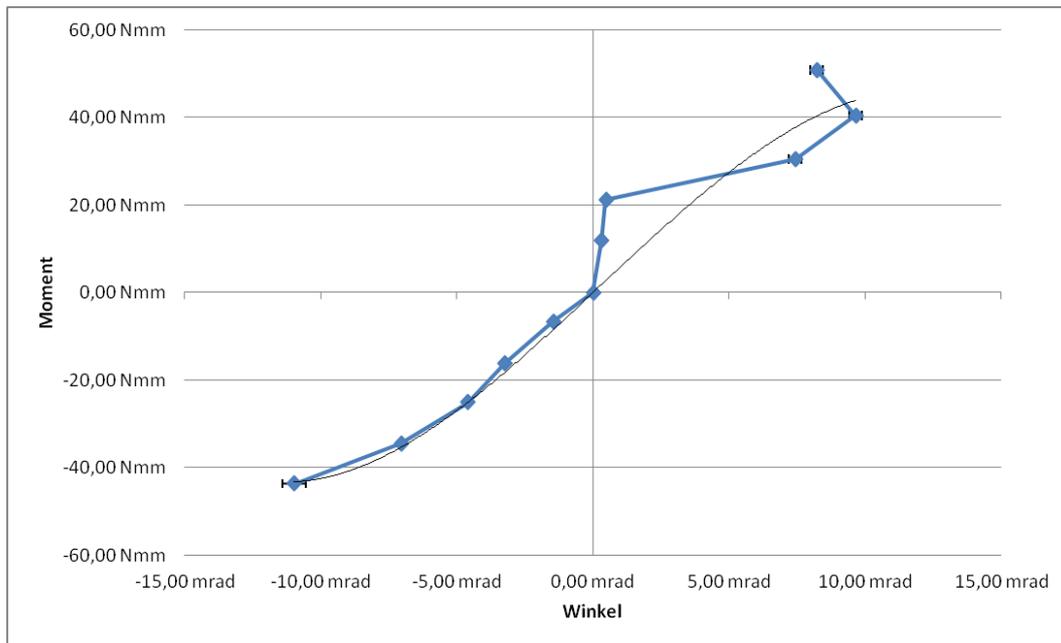


Abbildung 8.14: Moment-Winkel-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die z-Achse

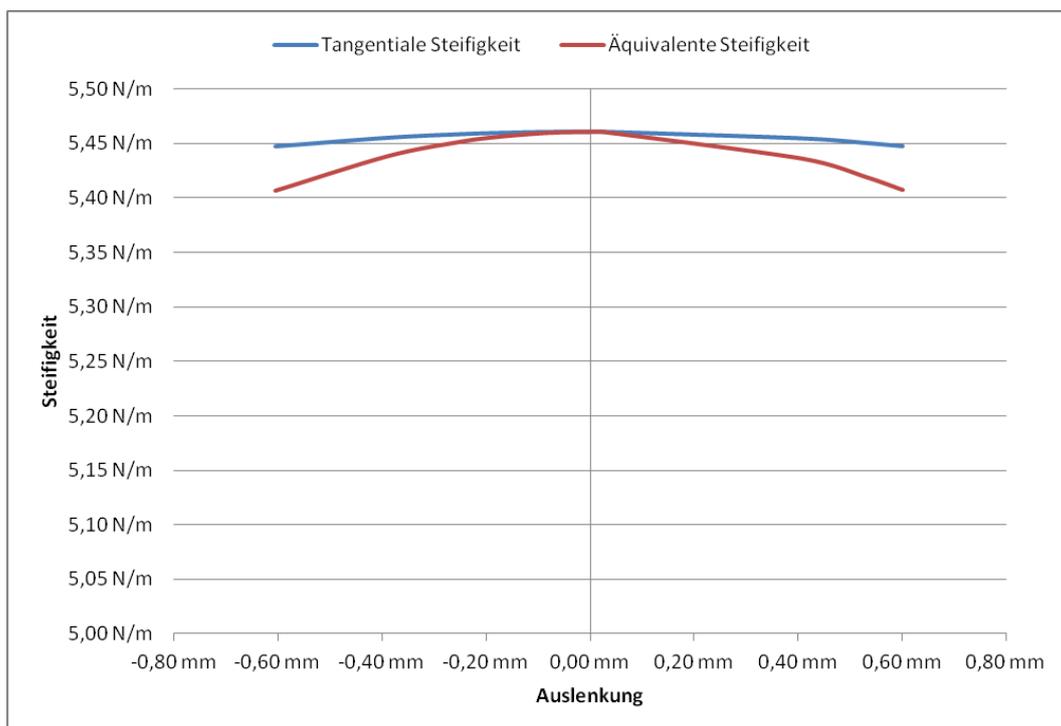


Abbildung 8.15: Steifigkeitsverlauf des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die z-Achse

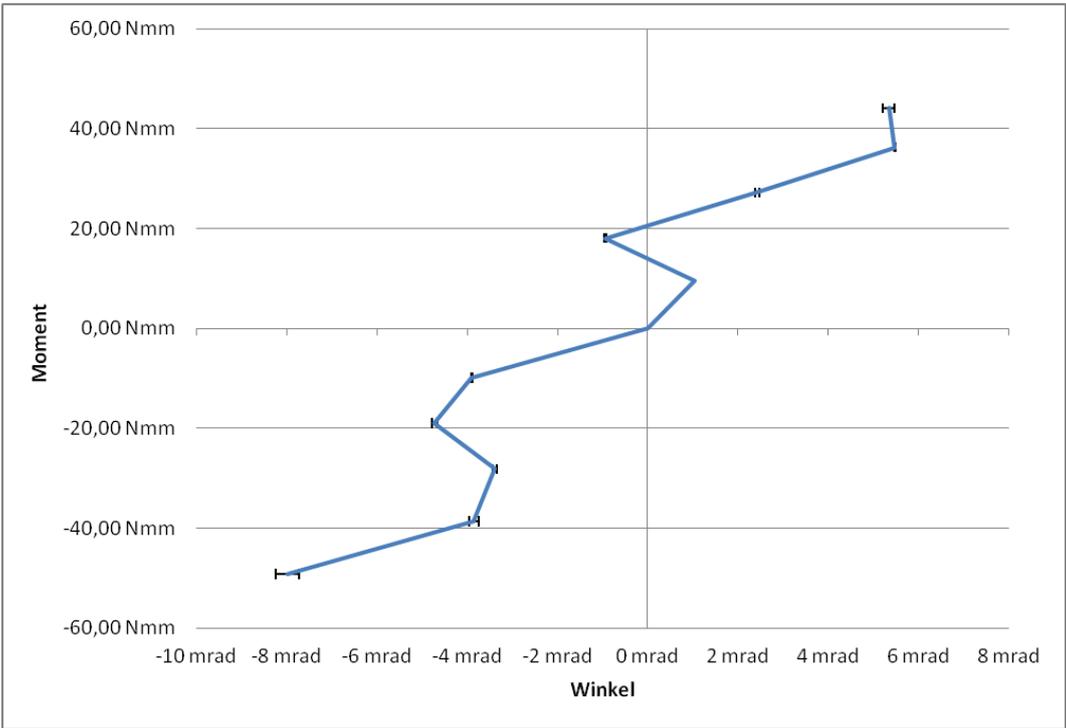


Abbildung 8.16: Moment-Winkel-Diagramm des Kreuzes mit Piezo-Patches bei Rotation um die y-Achse

### Messung bei breitbandiger Anregung

Wie bei allen bisherigen Messungen bei breitbandiger Anregung lassen sich nicht alle Eigenfrequenzen bestimmen. Im Bereich kleiner Amplituden gibt es bei beiden Rotationsrichtungen fehlende Messwerte bei Fußpunkt- und Piezoanregung. Vergleicht man die Anregungsformen, so stellt sich das bekannte Bild ein, dass die Fußpunkt- und Piezoanregung im Bereich niedriger Amplituden (vgl. Tab. 8.4) teils starke Abweichungen aufweisen. Bei Steigender Amplitude nähern sich die Kurven allerdings an und sinken bei großen Amplituden unter die bei Kraftanregung. So zeigen sich in Abbildung 8.18 für die Messpunkte 1-3 im Vergleich zur Kraftanregung höhere Eigenfrequenzen bei Fußpunkt- und Piezo-Anregung. Lediglich bei der Rotation um die y-Achse nähern sich die gemessenen Frequenzen an, werden aber im betrachteten Bereich nicht kleiner als die der Kraftanregung (vgl. Abb. 8.18).

Tabelle 8.4: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für den Balken mit Piezo-Patch (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	2	0,0227 N	0,0455 N	0,0682 N	0,0909 N	0,1137 N
Fußpunkt	2	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
Piezo	2	0,12 V	0,24 V	0,36 V	0,48 V	0,6 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,1364 N	0,1591 N	0,1818 N	0,2046 N V	0,2273 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8
Piezo		0,72 V	0,84 V	0,96 V	1,08 V	1,2 V

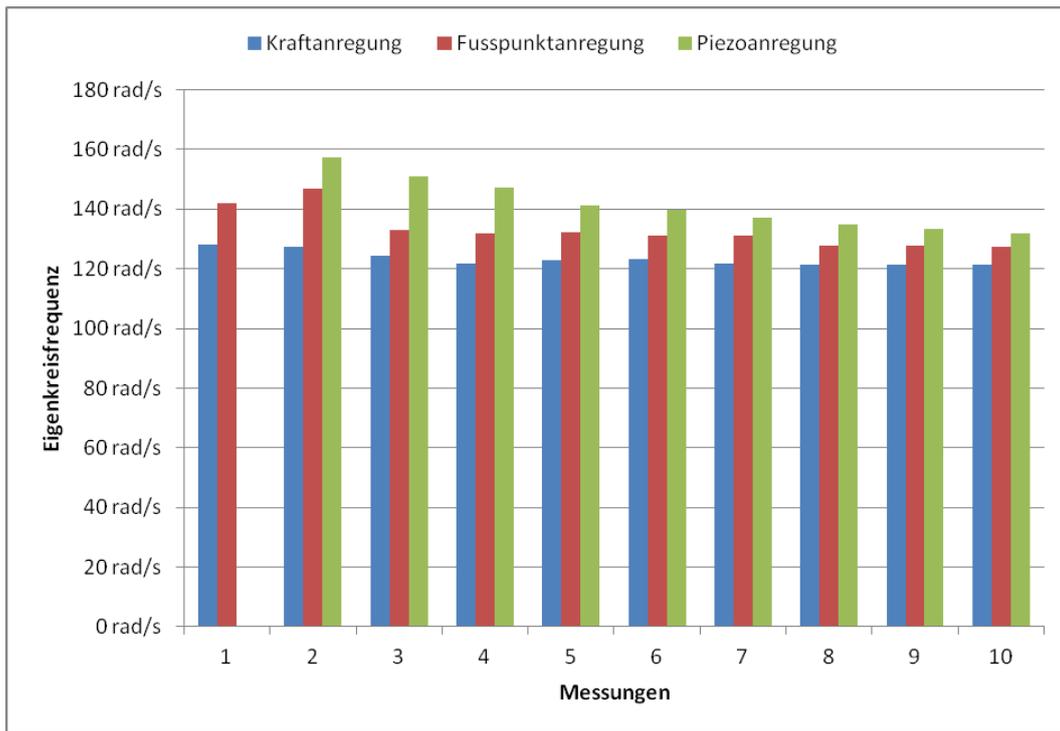


Abbildung 8.17: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei rotatorischer Anregung um die z-Achse

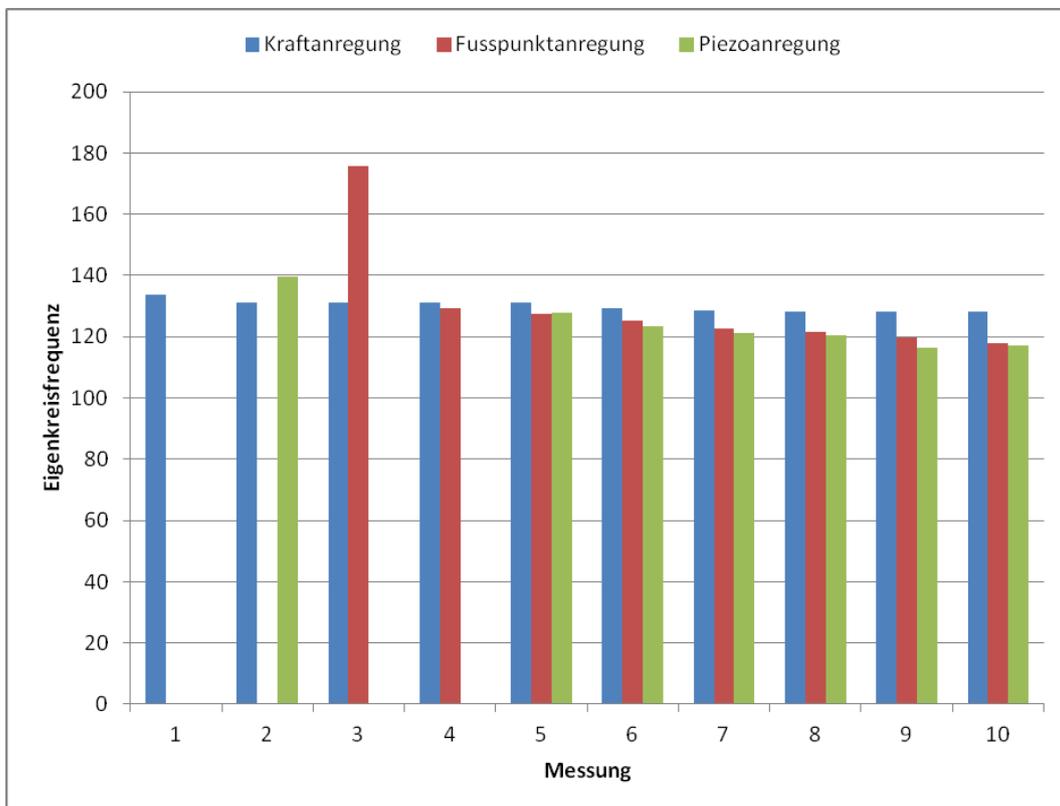


Abbildung 8.18: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des Kreuzes mit Piezo-Patches bei rotatorischer Anregung um die y-Achse

## 8.4 Kreuz gedämpft

Der gedämpfte kreuzförmige Probekörper wurde in translatorischer, sowie in zwei rotatorischen Richtungen untersucht. Während im translatorischen Fall sowohl statische als auch dynamische Anregung gute Ergebnisse lieferten, war dies bei der rotatorischen Untersuchung nicht der Fall. Hier ließ die statische Messung keine weiterführende Auswertung zu. Im dynamischen Fall hingegen konnten bei allen Anregungsrichtungen Erkenntnisse erlangt werden.

### 8.4.1 Translatorische Anregung

Bei der translatorischen Anregung des Probekörpers gab es lediglich bei einer Messung bei dynamische Anregung keine verwertbaren Ergebnisse. Für die jeweiligen Anregungsarten wurden verschiedene Größen gemessen. So wurden für die Kraftanregung im statischen und im dynamischen Fall die translatorische Auslenkung der Anregerplatte und die Anregerkraft aufgezeichnet. Bei der dynamischen Fußpunkterregung fand eine Messung der translatorische Auslenkung der Anregerplatte und der Bewegung der Bodenplatte statt.

#### Messung bei Sprunganregung

Nach Auswertung der Messdaten wie in Kapitel 7 beschrieben ergibt sich für das gedämpfte Kreuz bei translatorischer Anregung das Kraft-Weg-Diagramm 8.19. Durch Interpolation des Graphen lässt sich die kubische Funktion aus Gleichung 8.12 zur Beschreibung des Verlaufs ableiten. Hieraus ergibt sich für die tangentiale Steifigkeit Gleichung 8.13 und für die äquivalente Steifigkeit mit  $k_{lin} = 0,464 \frac{N}{mm}$  und  $\gamma = 0,1332$  Gleichung 8.14.

$$F_{int} = 0,0618 \cdot x^3 + 0,464 \cdot x \quad (8.12)$$

$$k_{tan} = 0,1854 \cdot x^2 + 0,464 \quad (8.13)$$

$$k_{eq} = 0,464 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0,1332 \cdot \hat{x}^2\right) \quad (8.14)$$

Wie im Steifigkeitsverlauf (vgl. Abb. 8.20) zu erkennen, wird die Steifigkeit mit zunehmender Amplitude größer. Es handelt sich also, wie beim anderen kreuzförmigen Probekörper um eine progressive Steifigkeit. Wie in den vorangegangenen Auswertungen, zeigt sich auch hier der zweiteilige Zusammenhang zwischen äquivalenter Steifigkeit auf der einen und tangentialer, beziehungsweise Sekantensteifigkeit auf der anderen Seite. Jedoch steigt die Sekantensteifigkeit hier deutlich linearer an, als tangentiale und äquivalente Steifigkeit. Aus diesem Grund ist die Differenz zwischen Sekanten- und äquivalenter Steifigkeit auch deutlich größer.

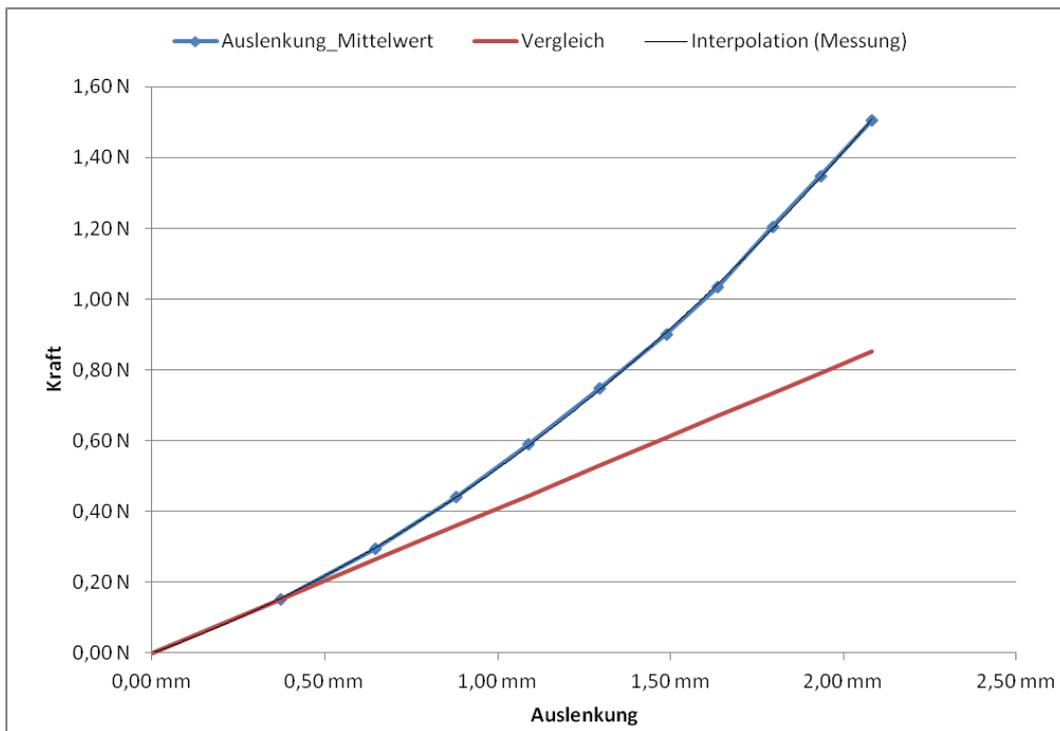


Abbildung 8.19: Kraft-Weg-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung

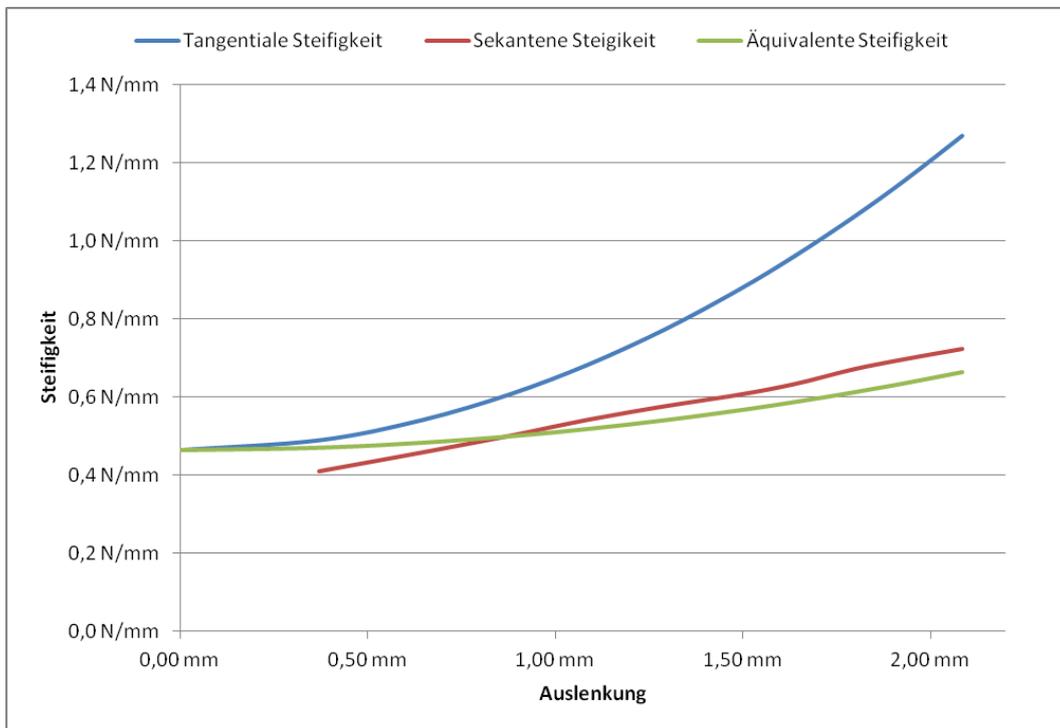


Abbildung 8.20: Steifigkeitsverlauf des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung

Die im Ausschwingversuch bestimmte Dämpfung weist im Bezug auf die Auslenkung eine deutliche Abhängigkeit auf (vgl. Abb. 8.21). Während sie für sehr kleine Amplituden überproportional groß ist, nähert sich für große Amplituden einem konstanten Wert an. Dieser liegt beim Sprung aus der Mittelposition bei einem Lehrschen Dämpfungsmaß von etwa 0,15, beim Sprung zurück bei etwa 0,05. Dies unterscheidet ihren Verlauf von den bisher bestimmten Dämpfungsverläufen, da diese bei großen Amplituden eine Zunahme der Dämpfung zeigen.

Die Eigenkreisfrequenz wie zu erwarten mit zunehmender Amplitudengröße zu (vgl. Abb. 8.22). Allerdings ist dies nur beim Sprung bei eingeschalteter Spannung so. Beim Rücksprung in die Ruhelage nimmt die sie sogar ab. Dies ist unerwartet, da die höhere Amplitude eine erhöhte Frequenz mit sich bringen sollte.

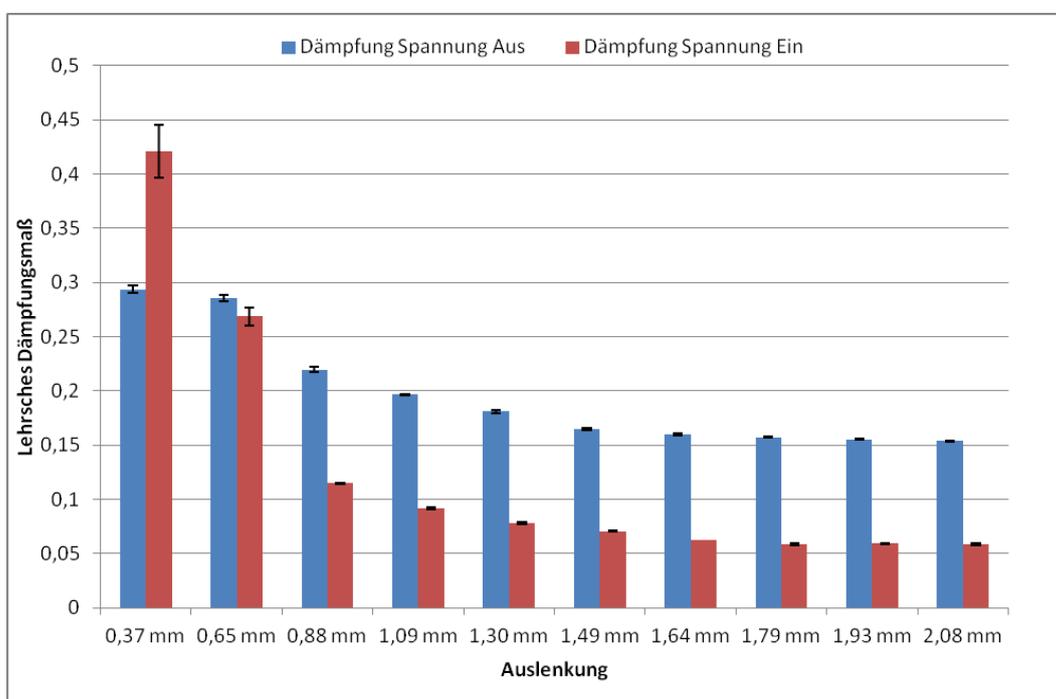


Abbildung 8.21: Dämpfungsverlauf des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung

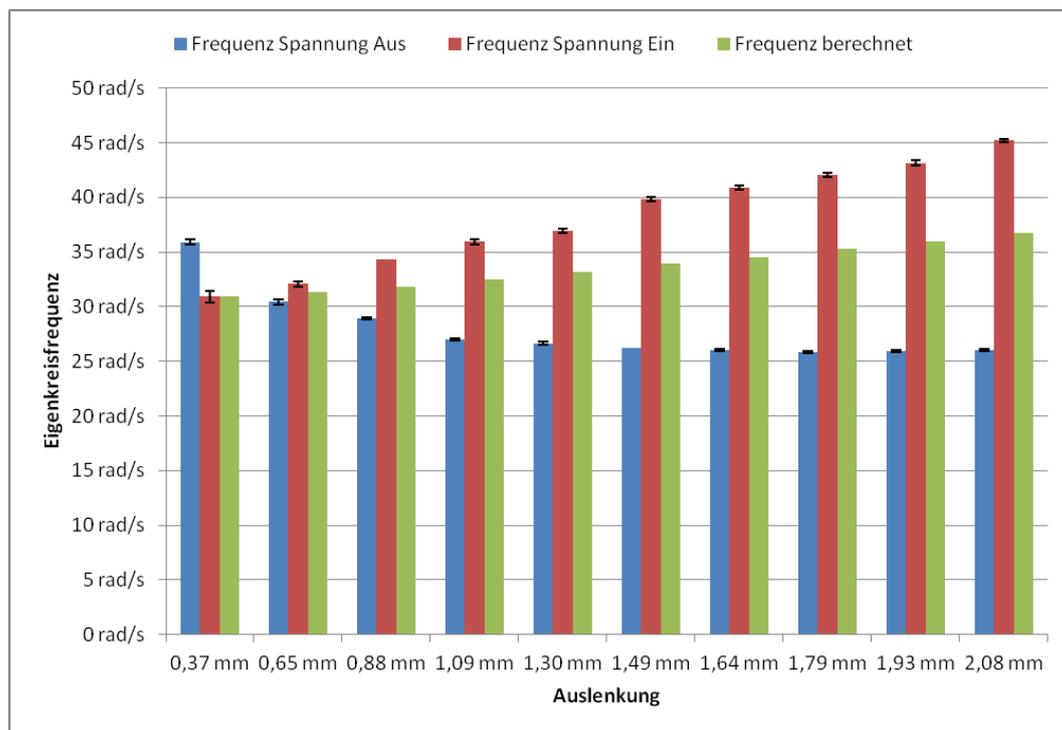


Abbildung 8.22: Vergleich zwischen im Ausschwingversuch gemessener (gedämpft) und berechneter (ungedämpft) Eigenkreisfrequenz des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung

## Messung bei breitbandiger Anregung

Auch bei diesem Körper zeigt sich bei der breitbandigen Anregung das Phänomen der sehr hohen Eigenkreisfrequenz bei Piezo-Anregung mit kleinen Amplituden (vgl. Abb. 8.23). Messpunkt 1 (vgl. Tab. 8.5) bei Piezo-Anregung lieferte keine identifizierbare Eigenkreisfrequenz.

Tabelle 8.5: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für das gedämpfte Kreuz bei translatorischer Anregung (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	2	0,0398 N	0,0796 N	0,1193 N	0,1591 N	0,1989 N
Fußpunkt	2	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,2387 N	0,2784 N	0,3182 N	0,3580 N	0,3978 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8

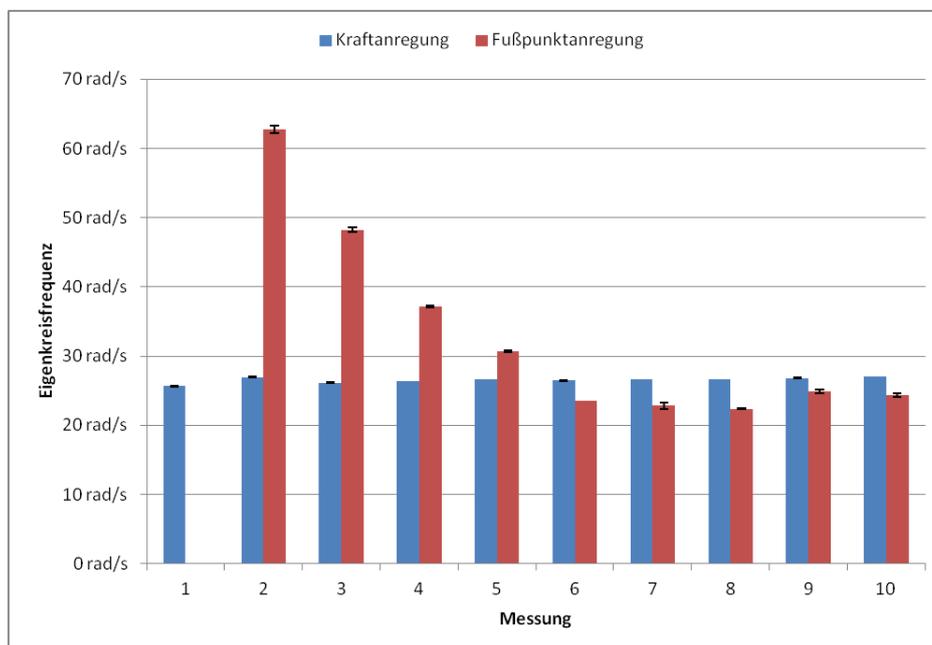


Abbildung 8.23: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei translatorischer Anregung

## 8.4.2 Rotatorische Anregung

Bei rotatorischer Anregung des Systems ließen sich im statischen Fall keine Verläufe für Steifigkeit, Dämpfung und Eigenkreisfrequenz ermitteln. Zur Messung des Systemverhaltens wurden der Drehwinkel und das angelegte Moment (vgl. Kap. 6.2) bestimmt. Im dynamischen Fall wurden bei Krafterregung Winkel und Moment und bei Fußpunkterregung die Winkel von Anregerplatte und Bodenplatte aufgenommen. Es wurde wie beim gedämpften Biegebalken ein Amplitudenverlauf im negativen und positiven Bereich gewählt, um mögliche Symmetrie zu überprüfen.

### Messung bei Sprunganregung

Wie bei rotatorischer Anregung um die y-Achse des kreuzförmigen Probekörpers mit Piezo-Patches ließ sich keine zielführend interpolierbare Moment-Winkel-Kurve (vgl. Abb. 8.24, 8.25) bilden. Aufgrund der nicht-harmonischen Ausschwingvorgänge war auch die Bestimmung von Dämpfung und Eigenkreisfrequenz auf diesem Wege nicht möglich.

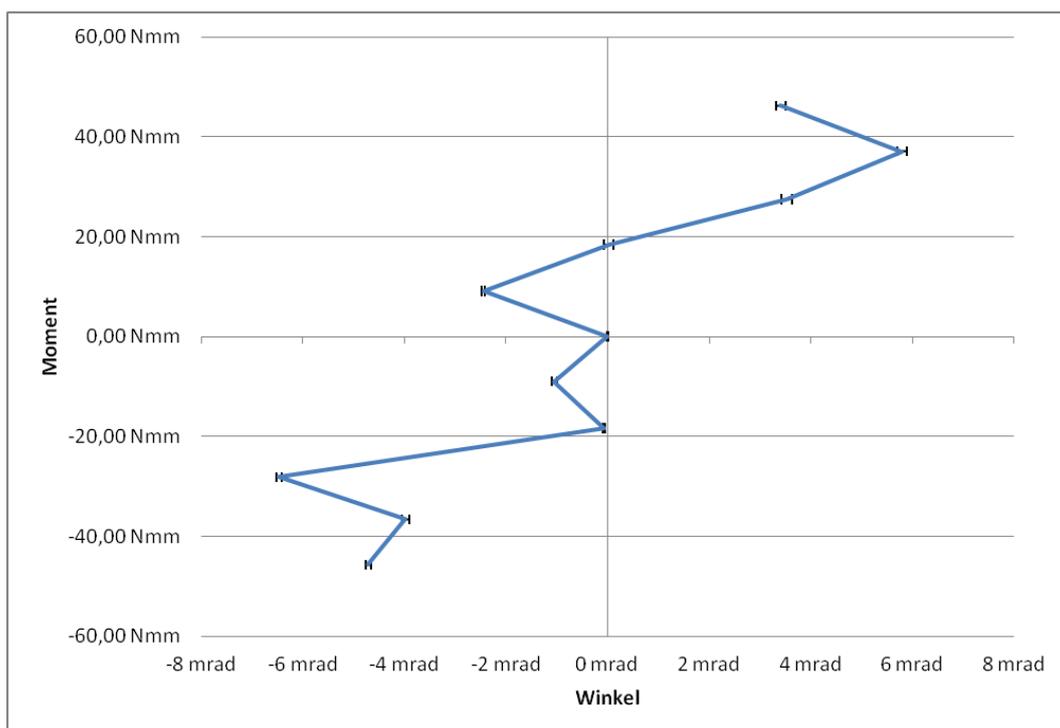


Abbildung 8.24: Moment-Winkel-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die z-Achse

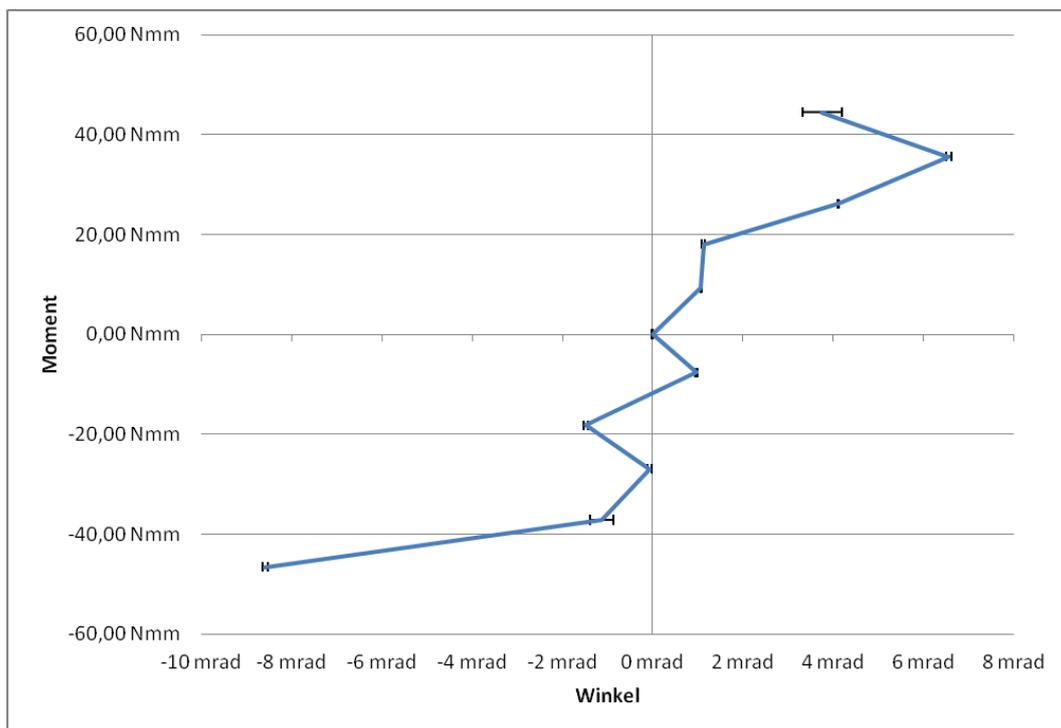


Abbildung 8.25: Moment-Winkel-Diagramm des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die y-Achse

### Messung bei breitbandiger Anregung

Vergleicht man die in Abbildung 8.26 und 8.27 dargestellten Verläufe der Eigenkreisfrequenzen, so zeigen sich. Die unterschiedliche Größe der Frequenzen bei gleichen Anregungsamplituden (vgl. Tab. 8.6) ist auf die verschiedenen Massenträgheitsmomente aufgrund der rechteckigen Anregerplatte zurückzuführen. Es zeigt sich jedoch auch ein deutlicher Unterschied im Vergleich zu den anderen bisher untersuchten Probekörpern. Lediglich bei Messpunkt 1 bei Rotation um die y-Achse wird bei Anregung durch Fußpunkterregung eine größere Frequenz gemessen, als bei Kraftanregung. Und auch dieser Effekt ist deutlich schwächer ausgeprägt als bei vergleichbaren Messungen des ungedämpften Kreuzes.

Tabelle 8.6: Eingangswerte pro Aktor der Messungen mit breitbandiger Anregung für das gedämpfte Kreuz bei rotatorischer Anregung (MP = Messpunkt)

Anregung	Aktoren	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
Kraft	2	0,0398 N	0,0796 N	0,1193 N	0,1591 N	0,1989 N
Fußpunkt	2	0,48 V	0,96 V	1,44 V	1,92 V	2,4 V
		MP 6	MP 7	MP 8	MP 9	MP 10
Kraft		0,2387 N	0,2784 N	0,3182 N	0,3580 N	0,3978 N
Fußpunkt		2,88 V	3,36 V	3,84	4,32	4,8

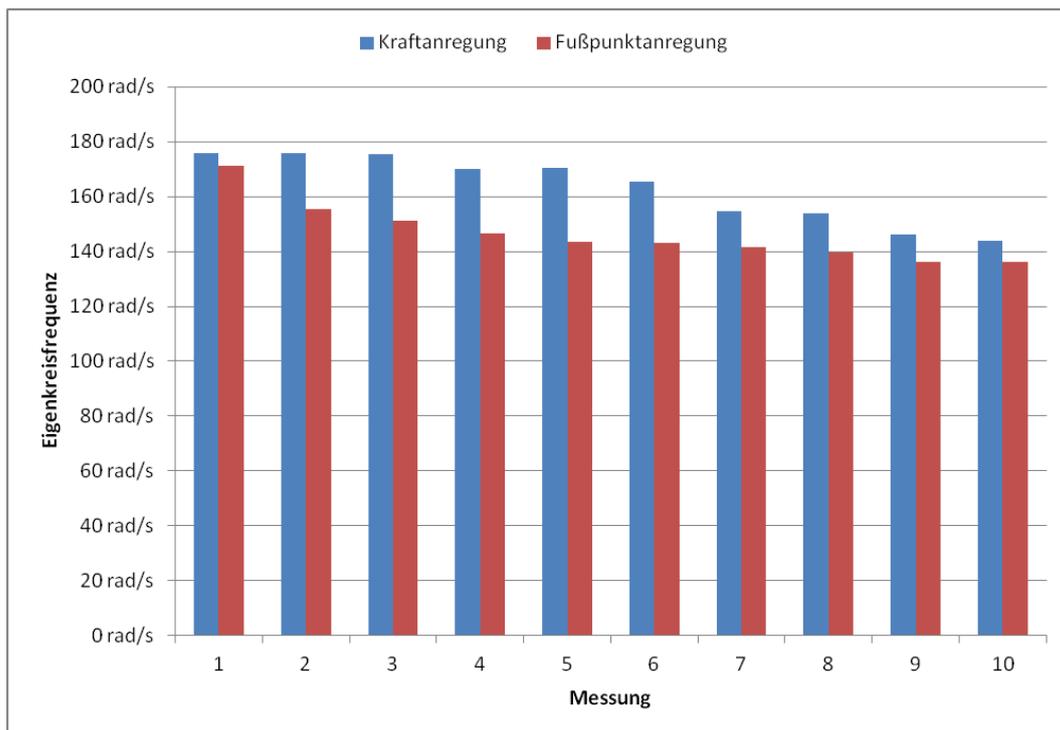


Abbildung 8.26: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die z-Achse

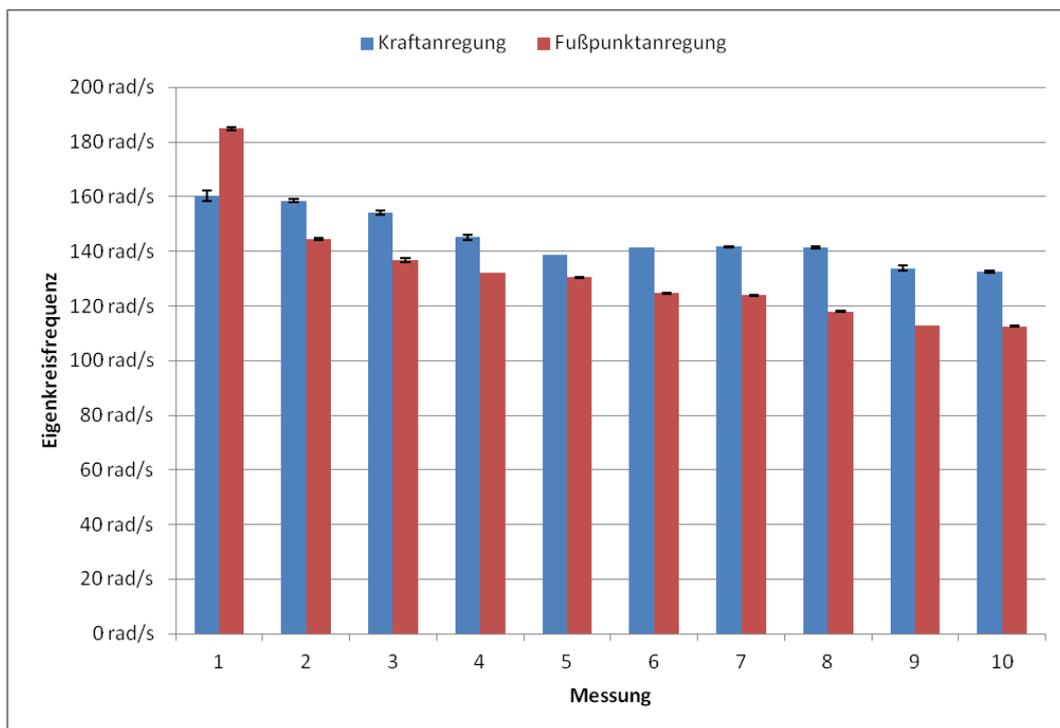


Abbildung 8.27: Vergleich der gemessenen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Kreuzes bei Rotation um die y-Achse

## 9 Diskussion

Die statischen und dynamischen Untersuchungen zeigen für alle Probekörper nichtlineares Verhalten. Dies unterscheidet sich je nach Körper und Parameter, ist jedoch immer vorhanden.

### 9.1 Steifigkeit

Betrachtet man die Steifigkeiten der verschiedenen Probekörper, so lässt sich bei allen eine Nichtlinearität in unterschiedlicher Ausprägung feststellen. Bei translatorischer Auslenkung entlang der x-Achse lassen sich die Steifigkeitskennlinien aller vier Probekörper als kubische Funktion interpolieren, welche auf eine äquivalente Steifigkeit mit einem linearen Anteil  $k_{lin}$  und einem nichtlinearen Anteil  $\gamma$  führen. Hierbei zeigt sich, dass bei den Proben ohne Schichtaufbau das Verhältnis von linearem zu nichtlinearem Anteil deutlich größer ist als bei den gedämpften Proben. So beträgt der Faktor  $\frac{k}{\gamma}$  beim Biegebalken ohne Dämpfung  $-14,1$ , bei seinem gedämpften Gegenstück nur  $-0,98$ . Das Hinzufügen der Dämpfungsschicht erhöht somit die Nichtlinearität des Systems deutlich.

Des Weiteren lässt sich feststellen, dass es sich bei den einseitig eingespannten Balken um eine abnehmende, degressive Steifigkeit handelt, während bei den kreuzförmigen Proben eine progressive Steifigkeit zu beobachten ist. Da das System der kreuzförmigen Proben statisch überbestimmt ist, stellt sich bei zunehmender Auslenkung eine Spannungsversteifung ein, welche zu einer Erhöhung der Steifigkeit führt (vgl. Kap. 3.2). Demgegenüber tritt bei den Biegebalken eine große Verformung auf (vgl. Kap. 3.2), welche dafür sorgt, dass die vom Sensor aufgezeichnete Kraft nicht der tatsächlich eingeleiteten Kraft entspricht, da Anteile dieser quer zur Messrichtung des Sensors übertragen werden.

Bei rotatorischer Anregung war die Steifigkeit nicht sauber zu bestimmen. Trotz geringer Standardabweichungen zeichnete sich ein indifferentes Bild. Eine mögliche Ursache hierfür liegt in der Überbestimmtheit des Systems und dem damit verbundenen Vorhandensein von mehreren stabilen Mittelpositionen. Lediglich für den kreuzförmigen Probekörper mit Piezo-Patches lies sich eine degressive äquivalente Steifigkeit bestimmen. Diese zeichnet sich durch einen sehr großen linearen Anteil aus. So ergibt sich der charakteristische Faktor zu

$$\frac{k}{\gamma} = -2444,5.$$

In allen Fällen zeigte ein Vergleich der verschiedenen bestimmten Steifigkeiten ein einheitliches Bild. Während im Bereich kleiner Auslenkungen tangentielle und äquivalente Steifigkeit etwa die gleiche Größe hatten, zeigte die tangentielle Steifigkeit durch ihren größeren nichtlinearen Faktor einen deutlich stärker progressiven, beziehungsweise degressiven Verlauf. Dies ist zu erwarten, da es sich bei der äquivalenten Steifigkeit um einen gemittelten Wert handelt. Die gemessene Sekantensteifigkeit hingegen zeigt im Bereich großer Auslenkungen einen der äquivalenten Steifigkeit ähnlichen Verlauf.

## 9.2 Eigenfrequenzen

Bei der Betrachtung der Eigenfrequenzen ergeben sich unterschiedliche Bilder. Betrachtet man die Eigenkreisfrequenzen des Biegebalkens mit Piezo-Patches, so zeigt sich, je nach Anregungsart, ein quantitativer Unterschied zwischen den Eigenfrequenzen bei Kraftanregung. Qualitativ sind die Kurven jedoch vergleichbar. Wie auch beim gedämpften Biegebalken stellt sich ein leicht wellenförmiger Verlauf ein. Es gibt leichte Abweichungen vom – mittels der äquivalenten Steifigkeit berechneten – ungedämpften Eigenkreisfrequenzverlauf. Diese sind allerdings nur gering und zeigen ein leicht erhöhtes lineares Verhalten (vgl. Abb. 8.4).

Im Hinblick auf die Eigenkreisfrequenzen der kreuzförmigen Probekörper erkennt man einen mit der Amplitudengröße zunehmenden Verlauf, was aufgrund der progressiven Steifigkeit zu erwarten war. Lediglich die Frequenzen des Probekörpers mit Dämpfungsschicht weichen hiervon teilweise ab. So nimmt die Eigenfrequenz mit zunehmender Amplitude beim zweiten Ausschwingvorgang ab und nicht wie erwartet ebenfalls zu. Beim Ausschwingen nach dem Einschalten der Spannung ist die erwartete Zunahme zu beobachten. Der Vergleich zur berechneten ungedämpften Frequenz zeigt nur quantitative, aber keine qualitativen Unterschiede (vgl. Abb. 8.12, 8.22).

Das ausgeprägteste nichtlineare Verhalten der Eigenfrequenzen zeigt sich bei der Anregung mittels Fußpunkt- (vgl. Abb. 8.5) und Piezoanregung (vgl. Abb. 8.13). Hierbei wurde in beiden Fällen eine – im Vergleich zur Kraftanregung deutlich erhöhte – Eigenkreisfrequenz gemessen. Da dieser Effekt nicht bei der Kraftanregung auftritt, ist zu vermuten, dass er im passiven Verhalten der Shaker begründet liegt. Lediglich bei der rotatorischen Anregung des gedämpften kreuzförmigen Probekörpers tritt dieser Effekt nicht, beziehungsweise stark vermindert, auf.

## 9.3 Dämpfungen

Die Dämpfung der Systeme zeigt bei allen bestimmaren Proben einen ähnlichen Verlauf. Bei geringer Auslenkung ist das Dämpfungsmaß am höchsten, danach fällt es relativ stark ab. Während es bei den Proben ohne Dämpfungsschicht anschließend erneut ansteigt, ist dies beim kreuzförmigen Probekörper mit Dämpfungsschicht nicht der Fall. Für den Biegebalken mit Dämpfungsschicht war sie nicht zu bestimmen. Bei der Analyse der Ausschwingvorgänge war der Körper in Ruhe, bevor er eine volle Schwingung durchlaufen hatte. Dies lässt auf ein hohes Dämpfungsmaß schließen. Für eine Analyse der Übertragungsfunktion war diese nicht ausgeprägt genug.

Betrachtet man bei den kreuzförmigen Probekörpern die Dämpfung bei Sprunganregung für das Ausschwingen jeweils beim Sprung nach oben und unten, so zeigt sich, dass die Dämpfung nicht nur von der Amplitude, in diesem Fall die Sprunghöhe, abhängt. Auch die mittlere Auslenkung hat einen, teilweise starken, Einfluss auf das Dämpfungsverhalten. Während es sich beim Körper ohne Dämpfungsschicht nur im Bereich sehr kleiner Amplituden deutlich unterscheidet, sieht man bei der Probe mit erhöhter Dämpfung im Bereich mittlerer und hoher Auslenkung durchgängig eine Differenz im Dämpfungsmaß von etwa 0,1 (vgl. Abb. 8.21).

Über die Dämpfungseigenschaften im rotierenden Fall konnten keine weiterführenden Aussagen getroffen werden, da sich eine Bestimmung der Dämpfung in dieser Konfiguration als nicht möglich erwies. Zwar gab es, wie bei der translatorischen Anregung, Ausschwingvorgänge, jedoch waren diese nicht harmonischer Natur.

## 9.4 Linearitätsbetrachtung

Die Festlegung eines als linear zu betrachtenden Arbeitsbereiches stellt sich je nach Probekörper und verwendeter Anregungsart als schwierig dar. Die Biegebalken können bei Kraftanregung bis  $0,25N$  Anregeramplitude im ungedämpften Fall und  $0,025N$  im ungedämpften Fall als annähernd linear angesehen werden. Zwar hat die Dämpfung einen stark nichtlinearen Verlauf, jedoch ist sie nur bei sehr geringer Amplitude stark geändert. Betrachtet man die translatorische Anregung der kreuzförmigen Proben, so lässt sich der annähernd lineare Bereich hier für beide Körper bis  $0,25N$  Anregeramplitude definieren. Bei rotatorischer Anregung ist eine Einschätzung schwierig. Bezogen auf Diagramm 8.16 lässt sich jedoch die Vermutung anstellen, dass eine Anregung bis zu einem Moment von  $25Nmm$  annähernd lineares Verhalten hervorruft. Lediglich bei der Anregung mittels Piezo-Patches und Fußpunkterregung ist eine maximale Amplitude nicht zu benennen, da sich eine starke Nichtlinearität bezüglich der Eigenkreisfrequenzen bei sehr geringen Amplituden ergibt.

Somit wäre es zu empfehlen, den Schwingungsisolator in einem Modus zu betreiben, in welchem dieser Bereich überbrückt wird. Allerdings ist bei höheren Amplituden wiederum mit einem hohen Einfluss der Nichtlinearität der Steifigkeit zu rechnen. Daraus folgend kann für die Probekörper bei Betrieb mit mehreren Anregungen nur ein schmaler Linearitätsbereich außerhalb des Mittelpunktes bis  $0,2N$  beziehungsweise  $25Nmm$  empfohlen werden.

## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Reale schwingende Systeme zeigen selten rein lineares Verhalten. In der vorliegenden Arbeit wurden daher verschiedene Schwingungsisolationssysteme auf die Linearität ihres Verhaltens hin überprüft. Sie beschreibt Mechanismen, welche nichtlineares Verhalten bedingen und beleuchtet deren experimentelle Charakterisierung.

Es wurden für jede Probe in einer, beziehungsweise drei Anrichtungsrichtungen Steifigkeitskennlinien erstellt. Bei Beaufschlagung der Probekörper mit einer statischen Kraft konnte die resultierende Auslenkung aufgenommen werden. Dieser Vorgang wurde für zehn verschiedene Kräfte jeweils fünf mal durchgeführt. Aus den Resultaten wurden für die zehn Messpunkte Mittelwert und Standardabweichung bestimmt und aus diesen eine Kennlinie erstellt. Mit den so erzeugten Steifigkeitskennlinien konnte mittels der harmonischen Balance eine linearisierte, äquivalente Steifigkeit gebildet werden. Es zeigte sich bei den Biegebalken eine degressive Steifigkeit, während sich bei den kreuzförmigen Probekörpern bei translatorischer Anregung eine progressiver, bei rotatorischer Anregung hingegen eine degressiver Verlauf einstellte (vgl. Kap. 9.1).

Bei der Untersuchung der Eigenfrequenzen der Systeme durch breitbandige Anregung bei Kraft-, Fußpunkt- und Piezo-Aktoren-Anregung, sowie bei Ausschwingversuchen zeigten sich unterschiedliche Verläufe. Die aufgrund der jeweiligen degressiven, beziehungsweise progressiven Steifigkeit erwartete Ab- und Zunahme der Eigenfrequenzen stellte sich ein. Hierbei waren die bei Kraftanregung gemessenen Frequenzen immer höher als die bei Fußpunkt- oder Piezoanregung. Lediglich im Bereich sehr geringer Auslenkungen gab es bei nahezu allen Körpern eine deutliche Erhöhung der Eigenfrequenzen bei Fußpunkt- und Piezo-Anregung (vgl. Kap. 9.2).

Die Untersuchung der Dämpfungen der Körper ergab auch hier nichtlineare Verläufe. Meist wurde die größte Dämpfung bei sehr geringen Auslenkungen gemessen und stieg nach einem starken Abfall bei großen Amplituden wieder an. Zusätzlich zur angestrebten Untersuchung der Amplitudenabhängigkeit, konnte gezeigt werden, dass Dämpfung und Eigenfrequenz nicht nur durch die Amplitudengröße beeinflusst werden, sondern auch durch die mittlere Auslenkung der Schwingung (vgl. Kap. 9.3).

Ein annähernd linearer Arbeitsbereich konnte für alle Körper bei translatorischer Kraftanregung ermittelt werden. Er umfasst bei drei Körpern den Bereich bis zu einer Anregeram-

plitude von  $0,25N$ . Der vierte Körper, der gedämpfte Biegebalken, kann bis etwa  $0,025N$  als linear angenommen werden. Bei rotatorischer Kraftanregung ist die Linearität bis zu einem Moment von  $25Nmm$  gegeben. Bei Anregung durch Piezo-Aktoren und Fußpunkterregung ist die Ermittlung eines linearen Bereiches schwer möglich, da bei kleinen und großen Anregeramplituden verschiedene nichtlineare Effekte auftreten (vgl. Kap. 9.4).

Aufbauend auf die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse kann in einer weiterführenden Untersuchung die genaue Ursache für die starken Nichtlinearitäten im Bereich niedriger Amplituden bei Fußpunkterregung und Anregung mittels Piezo-Folien-Aktuatoren erforscht werden. Ein weiterer Aspekt kann die Untersuchung auf Temperaturabhängigkeiten sein.

# **A Anhang**

## **A.1 Messdaten Ungedämpfter Biegebalken**



## **A.2 Messdaten Gedämpfter Biegebalken**

0,000 mm
8,004E-05

ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463		
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad

Standardabweichungen
0,000 N
0,003 mm
0,002 mm
0,00021348

Spannung		0,003 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	20	20	20	20	20			
Messung	061	063	065	067	069			
Lamda	-4,579	0,677	7,663	0,486	10,596			
L. Dämpfungsmaß (D)	-0,58896311	0,10715662	0,77328835	0,07711628	0,86015425	0,246	0,237	
ged. Eigenfrequ. (fd)	10,240	10,240	1,781	1,781	1,781			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	64,339811	64,3398241	11,1895334	11,1895334	11,1895334	32,45 rad	11,64 rad	
Lamda	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!			
L. Dämpfungsmaß (D)	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad	

Standardabweichungen
0,000 N
0,028 mm
0,022 mm
0,000197443

Spannung		0,004 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	20	20	20	20	20			
Messung	071	073	075	077	079			
Lamda	-4,125	1,551	-1,676	2,581	1,338			
L. Dämpfungsmaß (D)	-0,54883298	0,23971377	-0,25779351	0,3800282	0,20834261	0,004	0,157	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,413	3,562	3,562	3,562	3,562			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,4466051	22,3790669	22,3790669	22,3790677	22,3790669	22,19 rad	0,17 rad	
Lamda	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	0,882	#ZAHL!			
L. Dämpfungsmaß (D)	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	0,13898879	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad	

Standardabweichungen
0,000 N
0,013 mm
0,010 mm
7,83198E-05

Spannung		0,005 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	20	20	20	20	20			
Messung	081	083	085	087	089			
Lamda	0,656	2,382	3,509	2,373	0,985			
L. Dämpfungsmaß (D)	0,10381086	0,35444563	0,48758101	0,35328301	0,15482311	0,291	0,063	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,413	3,562	3,562	3,562	3,562			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,4466051	22,3790669	22,3790669	22,3790669	22,3790709	22,19 rad	0,17 rad	
Lamda	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!			
L. Dämpfungsmaß (D)	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad	

Standardabweichungen
0,000 N
0,019 mm
0,014 mm
4,10688E-05

Spannung		0,006 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	20	20	20	20	20			
Messung	091	093	095	097	099			
Lamda	-0,140	1,841	1,900	-0,499	1,957			
L. Dämpfungsmaß (D)	-0,0222086	0,28122777	0,28945494	-0,07912839	0,29734198	0,153	0,075	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,413	3,562	3,562	3,562	3,562			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,4466051	22,3790669	22,3790669	22,3790669	22,3790685	22,19 rad	0,17 rad	
Lamda	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	2,615	#ZAHL!			
L. Dämpfungsmaß (D)	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	0,38421015	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad	

Standardabweichungen
0,001 N
0,026 mm
0,020 mm
5,9054E-05

Spannung		0,007 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	20	20	20	20	20			
Messung	101	103	105	107	109			
Lamda	0,472	3,550	3,181	5,125	2,151			
L. Dämpfungsmaß (D)	0,0748675	0,49196457	0,4516895	0,63210515	0,32388943	0,395	0,084	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,413	3,562	3,562	3,562	3,562			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,4466168	22,3790669	22,3790669	22,3790669	22,3790685	22,19 rad	0,17 rad	
Lamda	2,483	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!			
L. Dämpfungsmaß (D)	0,36748618	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,375	3,417	3,417	3,375	3,463			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	21,2075133	21,4714715	21,4714715	21,2075131	21,7574262	21,42 rad	0,09 rad	

## **A.3 Messdaten Ungedämpftes Kreuz**

0,001 mm
0

ged. Eigenfrequ. (fd)	4,240	4,168	4,168	4,168	4,240		
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	26,6389421	26,1874347	26,1874343	26,1874346	26,6389421	26,37 rad	0,10 rad

Standardabweichungen
0,009 mm
0,004 mm
0,004 mm
0

Spannung		0,06 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	061	063	065	067	069			
Lamda	0,184	0,176	0,177	0,182	0,177			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02929383	0,02805439	0,02815607	0,02890862	0,02812083	0,029	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,562	3,562	3,562	3,562	3,562			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	22,3790669	22,3790669	22,3790671	22,3790669	22,3790669	22,38 rad	0,00 rad	
Lamda	0,169	0,148	0,182	0,185	0,187			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02687847	0,02359252	0,02899474	0,02937158	0,02981064	0,028	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,320	4,320	4,312	4,320	4,312			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	27,140617	27,1406174	27,0904492	27,1406167	27,0904495	27,12 rad	0,01 rad	

Standardabweichungen
0,007 mm
0,004 mm
0,004 mm
0

Spannung		0,07 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	071	073	075	077	079			
Lamda	0,164	0,166	0,166	0,167	0,165			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,0260144	0,02642431	0,02642431	0,02649803	0,02627899	0,026	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,616	3,562	3,562	3,562	3,616			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	22,7181439	22,3790669	22,3790669	22,3790671	22,7181436	22,51 rad	0,07 rad	
Lamda	0,185	0,148	0,184	0,191	0,191			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02948991	0,0236073	0,02921208	0,03036519	0,03031572	0,029	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,391	4,471	4,471	4,471	4,471			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	27,5921241	28,093799	28,093799	28,093799	28,093799	27,99 rad	0,09 rad	

Standardabweichungen
0,006 mm
0,003 mm
0,003 mm
0

Spannung		0,08 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	081	083	085	087	089			
Lamda	0,167	0,166	0,167	0,168	0,168			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02657121	0,02643012	0,02653767	0,02674824	0,02670767	0,027	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,670	3,616	3,616	3,616	3,616			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	23,0572203	22,7181439	22,7181436	22,7181439	22,7181436	22,79 rad	0,06 rad	
Lamda	0,182	0,135	0,194	0,185	0,197			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02898034	0,0215168	0,03086409	0,02944701	0,03134708	0,028	0,002	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,640	4,640	4,551	4,640	4,640			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	29,1561694	29,1561703	28,5954748	29,1561703	29,1561699	29,04 rad	0,10 rad	

Standardabweichungen
0,002 mm
0,001 mm
0,001 mm
0

Spannung		0,09 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	091	093	095	097	099			
Lamda	0,163	0,163	0,158	0,160	0,109			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02587568	0,02598217	0,02506199	0,02551061	0,01727623	0,024	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,670	3,670	3,670	3,724	3,724			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	23,0572206	23,0572203	23,0572203	23,3962974	23,3962974	23,19 rad	0,07 rad	
Lamda	0,202	0,156	0,201	0,217	0,222			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,03213648	0,02484228	0,03199753	0,03458735	0,03523347	0,032	0,002	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,741	4,730	4,819	4,730	4,640			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	29,7869528	29,7168659	30,2775614	29,7168659	29,1561699	29,73 rad	0,16 rad	

Standardabweichungen
0,009 mm
0,006 mm
0,006 mm
0

Spannung		0,10 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	101	103	105	107	109			
Lamda	0,150	0,140	0,143	0,143	0,142			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,02381915	0,02224009	0,02276561	0,02279101	0,02252733	0,023	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	3,724	3,670	3,724	3,724	3,783			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	23,3962971	23,0572206	23,3962974	23,3962974	23,7676671	23,40 rad	0,10 rad	
Lamda	0,217	0,155	0,231	0,232	0,253			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,03448465	0,02461748	0,0366822	0,03683695	0,04025744	0,035	0,002	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,819	4,819	4,919	4,919	4,919			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	30,2775614	30,2775614	30,9083438	30,9083438	30,9083438	30,66 rad	0,14 rad	





## **A.4 Messdaten Gedämpftes Kreuz**

0,000 mm
0

ged. Eigenfrequ. (fd)	5,851	5,851	5,851	5,851	6,001		
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	36,7656095	36,7656102	36,7656102	36,7656095	37,7083173	36,95 rad	0,17 rad

Standardabweichungen
0,000 mm
0,000 mm
0,000 mm
0

Spannung		0,06 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	061	063	065	067	069			
Lamda	1,075	1,040	1,063	1,037	1,044			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,16866177	0,16328105	0,16680106	0,16277422	0,16396781	0,165	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,168	4,168	4,168	4,168	4,168			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	26,1874343	26,1874347	26,1874317	26,1874343	26,187434	26,19 rad	0,00 rad	
Lamda	0,450	0,447	0,442	0,437	0,447			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,07140451	0,07095831	0,07009934	0,06939601	0,07091018	0,071	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	6,477	6,327	6,302	6,302	6,327			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	40,6935605	39,7508527	39,5937338	39,5937338	39,7508527	39,88 rad	0,19 rad	

Standardabweichungen
0,001 mm
0,001 mm
0,001 mm
0

Spannung		0,07 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	071	073	075	077	079			
Lamda	1,024	1,019	1,007	1,033	1,010			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,1608515	0,16005914	0,15825244	0,16215632	0,15865417	0,160	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,096	4,168	4,168	4,096	4,168			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	25,7359268	26,1874343	26,1874343	25,7359282	26,1874347	26,01 rad	0,10 rad	
Lamda	0,398	0,387	0,393	0,396	0,390			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,06316079	0,06149335	0,06245184	0,06285256	0,06196043	0,062	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	6,477	6,477	6,477	6,477	6,652			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	40,6935597	40,6935605	40,6935605	40,6935595	41,7933864	40,91 rad	0,20 rad	

Standardabweichungen
0,000 mm
0,000 mm
0,000 mm
0

Spannung		0,08 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	081	083	085	087	089			
Lamda	0,997	0,994	1,009	1,005	1,005			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,15669545	0,15620591	0,15856843	0,1578791	0,15800258	0,157	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,096	4,096	4,096	4,168	4,096			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	25,7359268	25,7359268	25,7359268	26,1874346	25,7359272	25,83 rad	0,08 rad	
Lamda	0,371	0,369	0,359	0,356	0,384			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,0588955	0,05862453	0,05711508	0,05662903	0,06100186	0,058	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	6,827	6,652	6,652	6,652	6,652			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	42,8932112	41,7933853	41,7933863	41,7933863	41,7933864	42,01 rad	0,20 rad	

Standardabweichungen
0,001 mm
0,001 mm
0,001 mm
0

Spannung		0,09 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	091	093	095	097	099			
Lamda	0,983	0,986	1,002	0,981	0,989			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,15449513	0,1549565	0,15744429	0,15422796	0,15546458	0,155	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,096	4,103	4,175	4,168	4,096			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	25,7359272	25,7789275	26,230435	26,1874347	25,7359275	25,93 rad	0,10 rad	
Lamda	0,381	0,372	0,380	0,363	0,372			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,06058608	0,05916946	0,06043138	0,05770205	0,05915336	0,059	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	6,827	7,034	6,827	6,827	6,827			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	42,8932122	44,1930055	42,8932112	42,8932112	42,8932112	43,15 rad	0,23 rad	

Standardabweichungen
0,001 mm
0,000 mm
0,000 mm
0

Spannung		0,10 V						
Durchgang	1	2	3	4	5			
Datensatz	11	11	11	11	11			
Messung	101	103	105	107	109			
Lamda	0,981	0,977	0,979	0,972	0,977			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,15428151	0,15370866	0,15402936	0,15294842	0,15358929	0,154	0,000	
ged. Eigenfrequ. (fd)	4,096	4,096	4,168	4,168	4,168			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	25,7359272	25,7359268	26,1874347	26,187435	26,1874347	26,01 rad	0,10 rad	
Lamda	0,361	0,360	0,371	0,386	0,365			
L. Dämpfungsmäß (D)	0,05732673	0,05727525	0,05892439	0,06127749	0,05797237	0,059	0,001	
ged. Eigenfrequ. (fd)	7,240	7,240	7,132	7,240	7,132			
ged. Eigenkr.frequ. (wd)	45,4928005	45,4928007	44,8146466	45,4928007	44,8146466	45,22 rad	0,15 rad	

Auslenkung ein	0,433 mm	0,428 mm	0,425 mm
Auslenkung	0,216 mm	0,198 mm	0,191 mm
Positionskorrigiert	0,216 mm	0,198 mm	0,191 mm
Steifigkeit	2	2	2

Spannung	0,08 V		
Durchgang	1	2	3
Datensatz	8	8	8
Messung	131	133	135
Kraft aus	0,129 mm	0,079 mm	0,065 mm
Kraft ein	0,719 mm	0,723 mm	0,718 mm
Kraft	0,590 mm	0,644 mm	0,653 mm
Auslenkung aus	0,065 mm	0,039 mm	0,032 mm
Auslenkung ein	0,360 mm	0,362 mm	0,359 mm
Auslenkung	0,295 mm	0,322 mm	0,327 mm
Positionskorrigiert	0,295 mm	0,322 mm	0,327 mm
Steifigkeit	2	2	2

Spannung	0,10 V		
Durchgang	1	2	3
Datensatz	8	8	8
Messung	141	143	145
Kraft aus	0,231 mm	0,235 mm	0,234 mm
Kraft ein	0,642 mm	0,595 mm	0,587 mm
Kraft	0,411 mm	0,359 mm	0,352 mm
Auslenkung aus	0,115 mm	0,118 mm	0,117 mm
Auslenkung ein	0,321 mm	0,297 mm	0,293 mm
Auslenkung	0,205 mm	0,180 mm	0,176 mm
Positionskorrigiert	0,205 mm	0,180 mm	0,176 mm
Steifigkeit	2	2	2



---

# Literaturverzeichnis

- [1] Kletz B. T., Melcher J., "Dual feedback control for vibration isolation systems, dealing with multiple excitations", *The 22nd International Congress of Sound and Vibration*, 2015.
- [2] Popov L., "Kontaktmechanik und Reibung", *Springer-Verlag*, 2009.
- [3] Wiedeman M., Sinapius M., "Principles of Adaptronics", *Vorlesungsscript, TU-Braunschweig*, 2013.
- [4] Göge D., Sinapius M., Füllekrug U., Link M., "Detection and description of non-linear phenomena in experimental modal analysis via linearity plots", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40 (pp. 27-48), 2005.
- [5] Sinapius M., "Experimentelle Modalanalyse", *Vorlesungsscript, TU-Braunschweig*, 2015.
- [6] Gross D., Hauger W., Schnell W., Schröder J., "Technische Mechanik 2, Elastostatik", *Springer-Verlag*, (8.Auflage), 2005.
- [7] "Die nicht-lineare-Analyse", *Ratgeber zur nichtlinearen Simulation, Solidline*, aus dem Internet geladen am 26.07.2015
- [8] "Großübung Stabilität, Knickung", *Übungsunterlagen, IFME Universität Magdeburg*, aus dem Internet geladen am 26.07.2015
- [9] Böhnke F., "Finite Elemente Analysen zur Berechnung der Signalverarbeitung in Cochlea", *Habilitationschrift, TU Ilmenau*, 1999
- [10] Grote K.-H., Feldhusen J., "Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau", *Springer-Verlag*, (22.Auflage), 2007.
- [11] Gross D., Hauger W., Schnell W., Schröder J., Wall W., "Technische Mechanik 3, Kinetik", *Springer-Verlag*, (12.Auflage), 2012.
- [12] Bettels, Christian, "Maximierung der Dämpfung eines Biegebalkens zur Anwendung in einem Tilgersystem", *Studienarbeit, DLR Braunschweig*, 2012.